X ESTÁTICA Y DINÁMICA

> Leyes de Newton

1) Partícula en reposo o v cte si F en eq.
2) $F = m \cdot a$
3) Acción, reacción.

> Movimiento rectilíneo

Desplazamiento: $\Delta U = U(t+\Delta t) - u(t)$.

∘ Aceleración constante:

$$\ddot{u} = a$$

$$\dot{u} = \int_0^t \ddot{u}\,dt = at + C_1 \Rightarrow v = v_0 + at$$

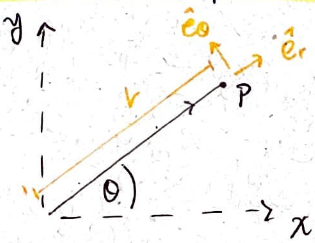
$$u = \int_0^t \dot{u}\,dt = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2 \Rightarrow x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

∘ Rectangular:

$$\dot{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + \dot{u}_z \hat{k}$$

* Vector director v es tangente a trayectoria $\hat{u} = \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|}$

> Coordenadas polares (R,θ)



$\hat{e}_r \begin{Bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{Bmatrix}$ $\hat{e}_\theta \begin{Bmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{Bmatrix}$

* Cilíndricas (R,θ,z).
* Esféricas (R,θ,ϕ)

$$u = r \cdot \hat{e}_r$$

$$\dot{u} = \dot{r} \cdot \hat{e}_r + r\dot{\theta} \cdot \hat{e}_\theta$$

$$\ddot{u} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r \cdot \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

∘ Mov. circular (r cte)

$$\dot{u} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

MUA: $\ddot{u} = -r\dot{\theta}^2\hat{e}_r + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$

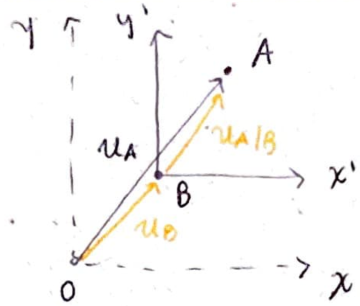
$$\ddot{u} = -r\dot{\theta}^2 \cdot \hat{e}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{e}_r$$

$v = \omega \cdot r$
$a = \alpha \cdot r$

$x(t) = r(t)\cos[\theta(t)]$ $\quad r(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y(t) = r(t)\,\mathrm{sen}[\theta(t)]$ $\quad \theta(t) = \arctan\left[\frac{y}{x}\right]$

Movimiento relativo.



$B - r_B$

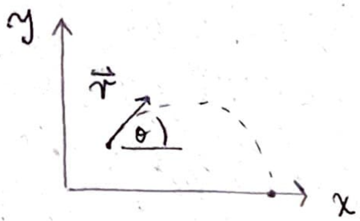
$A - r_A = r_B + r_{A/B}$

$\dot{r}_A = \dot{r}_B + \dot{r}_{A/B}$.

Sist. en A : $r_B = r_A + r_{B/A}$

$r_{B/A} = -r_{A/B}$.

Proyectiles



* $x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t$

$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

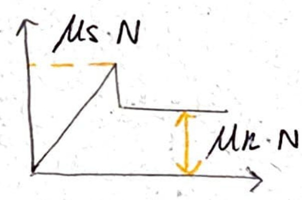
* v_x : cte

$v_y = v_{y0} - gt$.

* $a_x = 0$; $a_y = -g$.

CINÉTICA.

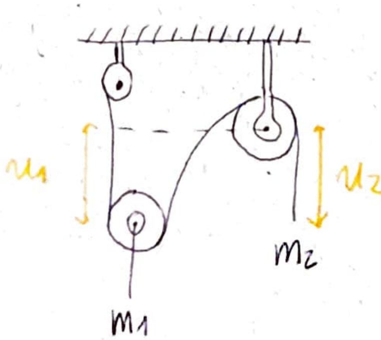
- Peso: mg
- Tensión : dirección cuerda
- Normal : Reacción superficie
- Gravitacional : $f = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
- Roce : oposición movimiento en plano de contacto.



* Estático : $Fr \leq Fr_{máx} = \mu_s \cdot N$
* Dinámico : $Fr = Fk = \mu_k \cdot N$,

- Elástica: ley de Hooke $\rightarrow$ $\vec{Fe} = -k \Delta x = -k |L - L_0|$.

Poleas



1) Mov. dependiente.

$2r_1 + r_2 = L$

$2\dot{r}_1 + \dot{r}_2 = 0$

$2\ddot{r}_1 = -\ddot{r}_2$

2) Newton: $\Sigma F = m \cdot \ddot{r}$

Bernardita Undurraga 2020

Roce viscoso

$$f_v = -c \cdot v$$

$$\sum F = mg - cv$$

* Vel. límite: $mg = cv$

$v_{lim} = mg/c$.

$t \gg \quad v = mg/c$

$t \ll \quad v = gt$.

Trabajo y energía

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K = \frac{1}{2} m \left[v(t_2)^2 - v(t_1)^2 \right] = |\vec{F}||\Delta \vec{r}| \cos\theta.$$

$$E_T = E_K + E_P + E_E = \frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{1}{2} k (x - L_0)^2.$$

- Por f. constante:

$$W = -mg \cdot \Delta z$$

- Por resorte lineal:

$$W = -\Delta E_E$$

- Fuerza de roce

$$W = -\mu N \cdot d$$

* Fuerzas conservativas.

$\Delta E = 0$; $E_i = E_f$

* No conservativas.

$\Delta E = W_{NC}$.

$W_T = W_{NC} + W_C$.

- Potencia: $P = F \cdot v = \frac{W_{AB}}{\Delta t}$ [Watts]

$$e_m = \frac{P_{out}}{P_{in}} < 1.$$

*MASA VARIABLE

$$\sum F_{ext} = \frac{m\,dv}{dt} - v_{esc} \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\text{empuje}}$$

$$a = \frac{-v_e}{m} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Vibración

- Masa-resorte.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + w_n^2 x = 0$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \;, \quad T = \frac{2\pi}{w}$$

$$x(t) = C\cos(wt + \phi) = A\cos(wt) + B\,\mathrm{sen}(wt)$$

$$A = x_0 \;; \quad B = \dot{x}_0 / w \;; \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

- Péndulo simple

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \;; \quad w = \sqrt{g/l}$$

$$\theta(t) = A\cos(wt) + B\,\mathrm{sen}(wt)$$

* libre amortiguada:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

Impulso y momentum

$$J = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot d\vec{t} = \underbrace{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}_{\text{impulso}} \quad ; \quad \underbrace{\vec{p} = mv}_{\text{momento lineal}}$$

* F. impulso cte: $\vec{J} = \vec{F}\Delta t$.

∘ $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ si $\sum F = 0 \to \vec{p} = cte$

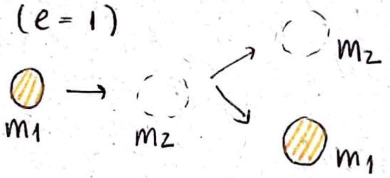
CONSERVAC MOM. LINEAL.

aislado.

* $\sum F_{ext} = \frac{d\vec{p}_{TOTAL}}{dt}$.

Colisiones

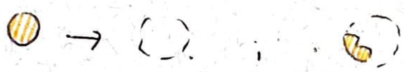
∘ Elásticas ($e = 1$)



Se conserva Ek. (cinética).

= m, = v.

∘ Inelásticas ($e = 0$)



PLÁSTICO.

* Coeficiente restitución $e = \frac{|V_{f2} - V_{f1}|}{|V_{i1} - V_{i2}|}$ (1D).

Cuerpo rígido

Sólido que no se deforma.

∘ Centro de masa

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + \ldots m_n x_n}{m_1 + \ldots + m_n} \qquad Y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + \ldots m_n y_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

*Cuerpo: $\lambda_0 = m/L$

Plano: $\sigma = m/A$

Vol: $\rho = m/V$

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L \lambda_0 \cdot x\, dx$$

$(\rho\, dV;\ \sigma\, dA;\ \lambda\, dL)$.

∘ Fuerzas

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_{TOTAL} \cdot \vec{a}_{CM}$$

$$\vec{p}_{TOTAL} = M_{TOTAL} \cdot \vec{v}_{CM}$$

∘ Movimiento

* Traslación (= v, a)
* Rotación (= v, w)

- Energía

$$W_{NC} = \Delta K + \Delta U$$

$$K = K_{CM} + K_{rot\ ICM}$$

$$L = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rot\ ICM}$$

MOV. TRASLACIONAL		MOV. ROTACIONAL
$V = at + V_0$; $x = \frac{at^2}{2} + V_0t + x_0$	CINEMÁTICA	$w = \alpha t + w_0$; $\theta = \frac{\alpha t^2}{2} + w_0t + \theta_0$
$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = d\vec{p}/dt$	2DA LEY	$\Sigma \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = d\vec{L}/dt$
$\vec{p} = m\vec{v}$; $\vec{L} = r \times \vec{p}$	MOMENTO	$\vec{L} = I\vec{w}$
$K = \frac{mv^2}{2}$	E. CINÉTICA	$K_{rot} = \frac{1}{2} I w^2$

> Torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = F r \operatorname{sen}\theta \qquad \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \text{ (ROT)}$$

$$I = I_{cm} + md^2$$

$dx^2 A$

- Brazo palanca: $r\operatorname{sen}\phi$
  Dist ⊥ entre eje rotación y línea acción fuerza.

> Momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = |\vec{r}||\vec{p}| \operatorname{sen}\phi = pL. \qquad * \Sigma \vec{\tau} = \frac{dL}{dt}$$

⊥ a plano en movimiento.

$\vec{L}_{ROT} = I\vec{w}$. (eje simetría o 2D resp. al plano).

ESTÁTICA

Cuerpos en equilibrio.

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad ; \quad \Sigma \vec{\tau} = 0.$$

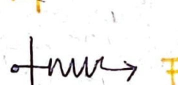
> Soportes

- Rodantes: 

- Pivote: 

- Soporte: 

- Guía sin roce: 

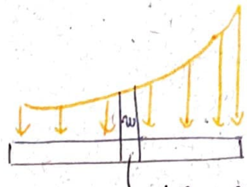
- Resorte: 

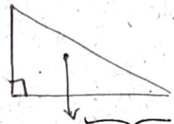
- **Par de fuerzas**: igual magnitud en sentido contrario. no colineales ⇒ torque. $|\vec{\tau}| = F \cdot d$ M M

- **Fuerzas distribuidas**

$$R = \int dR = \int w(x)\,dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int w(x)\,x\,dx}{R}$$





- **Estructuras**

  - Reticulados 

    fuerzas, cargas en uniones.

    Dos fuerza (extremos)

  * NODOS i) $\sum F_x, F_y, M = 0$. (EXT)

    ii) $\sum F_x, F_y = 0$ (NODO)

    (+) T : tira

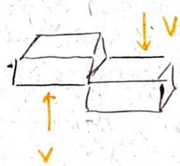
    (−) C : empuja

  * SECCIONES : corte →

    i) EXT.

    ii) F. EN BARRAS CORTADAS.

- **Esfuerzos internos**

  - F. transversales: 

    "CORTE".

  - F. longitudinales: NB "NORMALES". T, C.

  - Momentos → transversal, flexión M —— M

    → torsión T — T

NB(+) : tensión

VB(+) : horario

MB(+) : cóncava arriba.

i) EXT.

ii) SECCIÓN BARRA.

Bernardita Undurraga 2020

- Diagramas

$$w = -\frac{dV}{dx}, \quad V = \frac{dM}{dt}, \quad V(x) = V_0 - \int_{x_0}^{x} w\,dx; \quad M(x) = M_0 + \int_{x_0}^{x} V(x)\,dx$$

	GRADOS	V(+1)	M(+2)
−2	↻ M		SALTO
−1	↓	SALTO	CAMBIA PTE
–	—	—	/
0	↓↓↓↓↓	/	ax^2
1		ax^2	ax^3
2		ax^3	ax^4

> Trabajo virtual

i) Punto fijo y sist. referencia
ii) Vectores de fuerza
iii) Vectores de posición
iv) Deriv. posición

$$W = \int \vec{F_i} \cdot \delta x_i = 0$$

$$W = \int \vec{F_i} \cdot \delta x_i + \sum M_i \delta\theta = 0$$

$$W = M \cdot \delta\theta$$