REPASO CALCULO I

→ **Trigonometría**

- Identidades fundamentales

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- Identidades pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

- Propiedades par e impar

* La función seno es impar: $\sin(-x) = -\sin(x)$
* La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos(x)$

- **Formulas de adición y sustracción de ángulos**

$$\sin(s+t) = \sin(s)\cdot\cos(t) + \sin(t)\cdot\cos(s)$$
$$\sin(s-t) = \sin(s)\cdot\cos(t) - \sin(t)\cdot\cos(s)$$

$$\cos(s+t) = \cos(s)\cdot\cos(t) - \sin(s)\cdot\sin(t)$$
$$\cos(s-t) = \cos(s)\cdot\cos(t) + \sin(s)\cdot\sin(t)$$

$$\tan(s+t) = \frac{\tan(s)+\tan(t)}{1-\tan(s)\cdot\tan(t)}$$

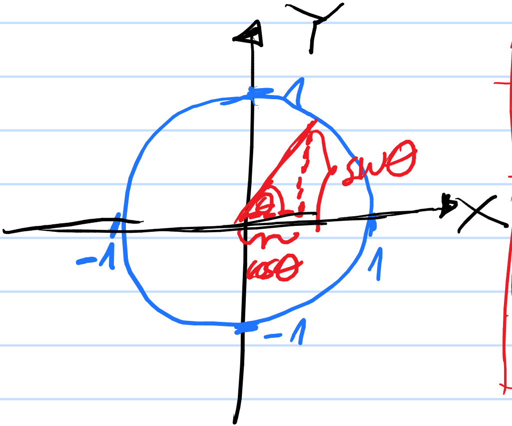
$$\tan(s-t) = \frac{\tan(s)-\tan(t)}{1+\tan(s)\cdot\tan(t)}$$

- Formulas para bajar potencias

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\tan^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

- <u>Circunferencia unitaria</u>



	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

- Limites notables

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e}$$

→ **Derivadas:**

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

- **Derivada de una función constante**

Sea $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\dfrac{d(c)}{dx} = 0}$

- **Regla de la potencia**

Sea $n \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\dfrac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}}$

• **Regla del múltiplo constante**

Sea $c \in \mathbb{R}$ y f una función derivable

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left[c \cdot f(x)\right] = c \cdot \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]}$$

• **Regla de la suma**: Sea f y g funciones derivables, entonces:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[g(x)\right]}$$

- **Regla de la diferencia:**

Sean f y g funciones derivables, entonces:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]}$$

- **Definición del número e**

$\Rightarrow$ $\boxed{e \text{ es un número t.q. } \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1}$

- **Igualdad importante:**

Sea $f(x)$ una función positiva, entonces:

$$\boxed{e^{\ln(f(x))} = f(x)}$$

- **Derivada de la función exponencial natural**

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^{x}) = e^{x}}$$

- Regla del producto

- Sean f y g funciones derivables, entonces:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f(x)\cdot\frac{d\,g(x)}{dx} + \frac{d f(x)}{dx}\cdot g(x) \\ \left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\end{gathered}}$$

- Regla del cociente

- Sean f y g funciones derivables tq: $g(x) \neq 0$

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$$

- Regla de la cadena

Si g es derivable en x y f en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$, definida mediante: $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x y F' está dada por el producto:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Derivadas importantes:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \cdot \ln(a)}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}}$$

- Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\sin^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\csc^{-1}(x)] = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(x)\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left[\sec^{-1}(x)\right] = \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(x)\right] = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left[\cot^{-1}(x)\right] = -\frac{1}{(x^2+1)}$$

- **Funciones hiperbólicas**

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

- Derivadas de funciones hiperbólicas 4u

$$\frac{d}{dx}\left(\sinh(x)\right) = \cosh(x) \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}(x)\right) = -\operatorname{csch}(x)\cdot\coth(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh(x)\right) = \sinh(x) \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}(x)\right) = -\operatorname{sech}(x)\cdot\tanh(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tanh(x)\right) = \operatorname{sech}^2(x) \qquad \frac{d}{dx}\left(\coth(x)\right) = -\operatorname{csch}^2(x)$$

- Regla de L'Hospital

- Suponga que f y g son funciones derivables y que $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene a "a". Suponga que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0}$$

ó

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty}$$

En otros problemas que la función a calcular el límite es del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

• Gráfica de curvas

* Normas para trazar una curva.

1. Determinar el dominio
2. Intersecciones con el eje X y el eje Y.
3. Simetría
   - i) Determinar si es par $(f(x)=f(-x))$
   - ii) Determinar si es impar $(f(x)=-f(-x))$
   - iii) Determinar si es periódica $(f(x+T)=f(x))$

4. Determinar asíntotas.

i) Horizontales

ii) Verticales

iii) Oblicuas o inclinadas.

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

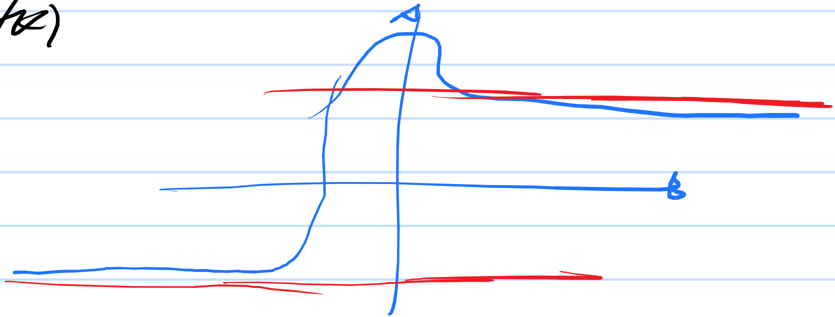
6. Valores máximos y mínimos locales

7. Concavidad y puntos de inflexión

Asíntotas

Asíntotas horizontales: _ Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$



Asíntotas verticales: – La recta $x=a$ es una asíntota vertical si se cumple con alguna de las siguientes proposiciones.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

· **Asíntotas oblicuas o inclinadas**

- Sean $m, b \in \mathbb{R}$ si: $\boxed{\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx+b)] = 0}$

entonces la recta $y = mx+b$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$. Lo mismo sucede para el caso en que $x \to -\infty$, es decir:

$\boxed{\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0}$ entonces la recta

$y = mx+b$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$.

- **Valores de m y b $(x \to \infty)$:**

$$\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right]}$$

- **Valores de m y b $(x \to -\infty)$:**

$$\boxed{m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx \right]}$$

INTEGRALES Y ANTIDERIVADAS

$\int c\cdot f(x) = c\cdot\int f(x)\,dx$	$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int k\,dx = k\cdot x + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$	$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$	$\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + C$
$\int \sec(x)\cdot\tan(x)\,dx = \sec(x) + C$	$\int \csc(x)\cdot\cot(x)\,dx = -\csc(x) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + C$

$$\boxed{\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)} \qquad \boxed{\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)}$$

• **Regla de sustitución**

Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces:

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(u)\,du}$$

$u = g(x)$

$\Rightarrow du = g'(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du}$$

<u>**Integral importante**</u>

$$\boxed{\int \tan(x)\,dx = \ln|\sec(x)| + C}$$

- **Integramos por partes**

$$\boxed{\begin{gathered}\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \\ \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du\end{gathered}}$$

Otras integrales importantes

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a}\cdot \ln\left(\frac{|x-a|}{|x+a|}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$$

FRACCIONES PARCIALES

– Sea f una función racional, es decir: $\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$
donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Si f es impropia, es decir, $\text{grado}(P) \geq \text{grado}(Q)$, entonces se debe emprender el paso preliminar de división P en Q, hasta obtener un residuo $R(x)$ tq: $\boxed{\text{grado}(R) < \text{grado}(Q)}$. El enunciado de la división es:

$$\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}}$$

donde $S(x)$ y $R(x)$ también son polinomios.

Caso I: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores de 1er grado que son todos distintos.

$$\boxed{Q(x) = (a_1 x + b_1)\cdot(a_2 \cdot x + b_2)\cdot\ldots\cdot(a_k x + b_k)}$$

$$Q(x) = (x-1)(x+1)$$

En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, \ldots, A_k$ tales que:

$$\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \cdots + \frac{A_k}{a_k x + b_k}}$$

estas constantes se determinan planteando la igualdad

$$\boxed{P(x) = Q(x) \cdot \left(\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \dots + \frac{A_k}{a_kx+b_k} \right)}$$

Caso II: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores de 1er grado. Algunos de los cuales se repiten.

Supongamos que el primer factor lineal (a_1x+b_1) se repite r veces, es decir $(a_1x+b_1)^r$ aparece en la factorización de $Q(x)$. Por lo tanto, en lugar del término simple $\boxed{\dfrac{A_1}{a_1x+b_1}}$ se usarán:

$$\boxed{\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_r}{(a_rx+b_r)^r}}$$

$$\boxed{\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}}$$

$$\cdot \,/\, x^2(x-1)^3$$

$$0 \quad x^3 - x + 1 = A\cdot x(x-1)^3 + B\cdot(x-1)^3 + C\cdot x^2(x-1)^2$$
$$+ D\cdot x^2\cdot(x-1) + E\cdot x^2$$

Caso III: $Q(x)$ tiene factores cuadráticos, ninguno de los cuales se repite.

- Si $Q(x)$ tiene el factor ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$, entonces además de los términos ya dados, la expresión $\frac{R(x)}{Q(x)}$ tendrá un término de la forma:

$$\boxed{\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Caso IV: Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2+bx+c)^r$ donde $(b^2-4ac)<0$, entonces en lugar del único término del caso III, se usan los términos:

$$\frac{A_1x+b_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+b_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_rx+b_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$

Caso I

Solución: $x^2-1=(x-1)(x+1)$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \qquad \Big/ \cdot (x-1)(x+1)$$

$$1 = A\cdot(x+1)+B(x-1) = Ax+A+Bx-B$$
$$= (A+B)x+(A-B)$$

① $A+B=0 \Rightarrow \boxed{A=-B}$

② $A-B=1 \Rightarrow A+A=1 \Rightarrow 2A=1 \quad \boxed{A=\frac{1}{2}}$

$$\boxed{B=-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln|x-1| - \ln|x+1| \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{|x-1|}{|x+1|} \right) \quad //$$