Fundamentals Resumen

Resumen para el Examen de Conocimientos Fundamentales

Ingeniería UC

13 de febrero de 2026

Índice

Programa del Módulo

0.1. Cálculo I (MAT1610)

Contenidos

1. Geometría Analítica

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

1. Identificar gráficos de funciones básicas, exponenciales, logarítmicas.

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Aprender de memoria las formas gráficas elementales. No están en el manual.

4. Calcular derivadas de funciones obtenidas por álgebra de funciones elementales.

Manual FE v10.1
Página 48 (Tabla de Derivadas)
Consúltalo en el examen.

6. Reconocer gráfica y analíticamente propiedades de los gráficos de funciones.

Manual FE v10.1
Página 45 (Máximos, Mínimos, Inflexión)
Consúltalo en el examen.

9. Conocer el cálculo de primitivas de funciones básicas.

Manual FE v10.1
Página 49 (Tabla de Integrales)
Consúltalo en el examen.

0.2. Cálculo II (MAT1620)

Contenidos

1. Cálculo Integral

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

3. Aplicar el concepto de integral definida para calcular áreas y momentos de regiones del plano.

Manual FE v10.1
Página 108-112 (Centroides en sección de Estática)
Consúltalo en el examen.

5. Aplicar los criterios básicos de convergencia de series e integrales impropias.

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
¡CUIDADO! El manual solo tiene Geométrica (p.50) y Taylor (p.51). Faltan Razón, Raíz e Integral.

8. Conocer las ecuaciones paramétricas, vectoriales y cartesianas de rectas y planos.

Manual FE v10.1
Página 35 (Rectas 2D) y 59 (Vectores)
Consúltalo en el examen.

0.3. Cálculo III (MAT1630)

Contenidos

1. Cálculo Diferencial

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

2. Aplicar el concepto de integral múltiple para evaluar volúmenes y centros de masa.

Manual FE v10.1
Página 42 (Volúmenes de Sólidos Básicos)
Consúltalo en el examen.

5. Reconocer y explicar el concepto de “curvas de nivel” y calcularlas.

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Concepto visual. No hay fórmula.

6. Calcular derivadas direccionales.

Manual FE v10.1
Página 59 (Gradiente, Divergencia, Rotor)
Consúltalo en el examen.

0.4. Ecuaciones Diferenciales (MAT1640)

Contenidos

1. Ecuaciones Diferenciales

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

2. Modelar situaciones sencillas de la realidad y fenómenos mediante ecuaciones diferenciales.

   ¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
   Habilidad de modelado.

3. Reconocer tipo de EDO, identificar y utilizar métodos de solución según el caso.

   Manual FE v10.1
   Página 51-52 (Primer y Segundo Orden)
   Consúltalo en el examen.

6. Calcular soluciones de sistemas lineales de 2×2 y 3×3 (coef. constantes).

   ¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
   Teoría de valores propios para sistemas no está explícita.

0.5. Álgebra Lineal (MAT1203)

Contenidos

1. Matrices
2. Raíces de Ecuaciones
3. Análisis Vectorial

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

1. Determinar escalonada reducida, resolver $Ax = b$, calcular inversas y bases.

   Manual FE v10.1
   Página 57 (Matrices e Inversa)
   Consúltalo en el examen.

2. Interpretar geométricamente dependencia lineal, complemento ortogonal.

   ¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
   Concepto teórico.

4. Explicar y utilizar propiedades de operaciones matriciales.

   Manual FE v10.1
   Página 57
   Consúltalo en el examen.

6. Explicar y utilizar matrices elementales, simétricas, ortogonales, etc.

Manual FE v10.1

Página 57 (Definiciones)
Consúltalo en el examen.

7. Calcular determinantes, resolver sistemas y evaluar inversas.

Manual FE v10.1

Página 58 (Determinantes)
Consúltalo en el examen.

9. Determinar matriz de Transformación Lineal y relación con cambio de base.

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
No está explícito.

12. Explicar valores/vectores propios, diagonalización y aplicaciones (simétricas).

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Definición básica solamente. Algoritmo no está.

0.6. Probabilidades y Estadística (EYP1113)

Contenidos

1. Álgebra de eventos, axiomas, prob. condicional, Bayes.
2. Medidas descriptivas teóricas (media, varianza, percentil, etc.).
3. Modelos Discretos/Continuos (Binomial, Poisson, Normal, Exp, etc.) y uso de R.
4. Distribuciones conjuntas, covarianza, correlación.
5. Estimación y propiedades.
6. Test de hipótesis e intervalos de confianza.
7. Bondad de ajuste (Chi-cuadrado).
8. Regresión lineal (test-t, test-F, R^2).

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

1. Ajustar distribuciones de probabilidad a datos reales.

Manual FE v10.1

Página 66-68 (Distribuciones)
Consúltalo en el examen.

2. Describir fenómenos de incertidumbre usando variables aleatorias.

Manual FE v10.1

Página 63-65 (Medidas)
Consúltalo en el examen.

3. Realizar estimaciones de parámetros e intervalos de confianza.

Manual FE v10.1

Página 73-74 (Tests y C.I.)
Consúltalo en el examen.

4. Ajustar e interpretar modelos de regresión lineal.

Manual FE v10.1

Página 69-70 (Regresión)
Consúltalo en el examen.

1. Cálculo I (MAT1610): Análisis de Funciones

1.1. Funciones Elementales y Límites

Manual FE v10.1

Página 36
Consúltalo en el examen.

Funciones Básicas

- **Exponencial (e^x):** Dominio $\mathbb{R}$, Recorrido $(0, \infty)$. $\exp(x+y) = e^x e^y$.
- **Logaritmo Natural ($\ln x$):** Dominio $(0, \infty)$. $y = \ln x \iff e^y = x$.
- **Propiedades ($a, b > 0$):** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^b) = b \ln a$.

Límites y Continuidad

Límites Notables:

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
NO ESTÁN en el manual.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Continuidad en c: Se requiere que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Asíntotas

- **Vertical ($x = c$):** Si $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.
- **Horizontal ($y = L$):** Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$.
- **Oblicua ($y = mx + n$):** $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $\quad n = \lim_{x \to \infty}(f(x) - mx)$.

1.2. Cálculo Diferencial

Reglas de Derivación (Cheat Sheet)

Manual FE v10.1

Página 48 (Derivatives)
Consúltalo en el examen.

- **Producto:** $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- **Cuociente:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ **(con** $g \neq 0$**).**
- **Cadena:** $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Teoremas de Existencia (Rigor MAT1610)

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Memorizar enunciados. No están.

- **Bolzano:** Si f es cont. en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$.

- **Valor Medio (MVT):** Si f es cont. en $[a,b]$ y derivable en (a,b), $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- **Rolle:** Si MVT y $f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a,b)/f'(c) = 0$.

Interpretación y Gráfica

Manual FE v10.1

Página 45 (Tests for Critical Points)
Consúltalo en el examen.

1ra Derivada (f'): $f' > 0 \uparrow$ (Creciente), $f' < 0 \downarrow$ (Decreciente), $f' = 0 \rightarrow$ P. Crítico.

2da Derivada (f''):

- $f'' > 0 \cup$ (Punto mínimo local si $f' = 0$).
- $f'' < 0 \cap$ (Punto máximo local si $f' = 0$).
- **Punto de Inflexión:** Si $f''(c) = 0$ y hay cambio de signo en f''.

1.3. Primitivas (Integrales Indefinidas)

Tabla de Primitivas Básicas

Manual FE v10.1

Página 49 (Standard Integrals)
Consúltalo en el examen.

- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$

2. Cálculo II (MAT1620): Integrales y Series

2.1. Técnicas de Integración

Manual FE v10.1

Página 49-50
Consúltalo en el examen.

Integración por Partes

Recuerda: "**U**n **D**ía **V**i **U**na **V**aca **V**estida **D**e **U**nforme".

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Manual FE v10.1

Página 49 (Fórmula base)
Consúltalo en el examen.

Estrategia LIATE para elegir u: **L**ogarítmicas, **I**nversas, **A**lgebraicas, **T**rigonométricas, **E**xponenciales.

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
LIATE no está en el manual.

2.2. Aplicaciones de la Integral Definida

Área entre Curvas

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Concepto visual. No hay fórmula explícita.

Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

Área entre Curvas con Valor Absoluto

Problema (MAT1620-3-4): Considere la región dada por:

$$(x-2)^2 \leq y \leq 4 - |x|$$

¿Cuál es el área de la región descrita?
Solución:
Paso 1: Identificar las funciones
- Curva inferior: $g(x) = (x-2)^2$ (parábola con vértice en $(2, 0)$)
- Curva superior: $f(x) = 4 - |x|$ (función valor absoluto invertida)

Paso 2: Encontrar puntos de intersección
Resolver $(x-2)^2 = 4 - |x|$. Dividimos en dos casos:

Caso 1: $x \geq 0 \to |x| = x$

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= 4-x\\ x^2-4x+4 &= 4-x\\ x^2-3x &= 0\\ x(x-3) &= 0 \implies x=0 \text{ o } x=3\end{aligned}$$

Caso 2: $x < 0 \to |x| = -x$

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= 4+x\\ x^2-4x+4 &= 4+x\\ x^2-5x &= 0\\ x(x-5) &= 0 \implies x=0 \text{ (no válido en } x<0)\end{aligned}$$

Para $x < 0$, si probamos un punto como $x = -1$: $(-1-2)^2 = 9$ y $4 - |-1| = 3$. Como $9 \not\leq 3$, **no existe región** para $x < 0$. La región está definida únicamente en el intervalo $x \in [0, 3]$.

Paso 3: Calcular el área

Dado que $x \geq 0$, tenemos $|x| = x$, por lo tanto $f(x) = 4 - x$.

$$\begin{aligned}A &= \int_0^3 [(4-x)-(x-2)^2]\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3 [4-x-(x^2-4x+4)]\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3 [-x^2+3x]\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3\\ &= \left(-\frac{27}{3}+\frac{3\cdot 9}{2}\right)-0\\ &= -9+\frac{27}{2}\\ &= -\frac{18}{2}+\frac{27}{2} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Alternativa correcta: c) $9/2$

Centro de Masa (Centroide)

Manual FE v10.1

Página 108-112 (Sección Estática)
Consúltalo en el examen.

Para una región plana de densidad constante ρ, el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ es:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,\mathrm{d}x$$

2.3. Series e Integrales Impropias

Resumen de Criterios de Convergencia

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Manual solo tiene Geométrica (p.50) y Taylor (p.51). TODO lo demás es Memoria.

1. **Criterio del Término n-ésimo (Divergencia):** Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie diverge.
2. **Serie Geométrica:** $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$, diverge si $|r| \geq 1$.

Manual FE v10.1

Página 50
Consúltalo en el examen.

3. **Serie-p:** $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$, diverge si $p \leq 1$.
4. **Criterio de la Integral:** Si $f(x)$ es continua, positiva y decreciente, entonces $\sum a_n$ y $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ convergen o divergen juntas.
5. **Criterio de Computación Directa/Límite:** Compara con series conocidas (generalmente p-series o geométricas).
6. **Criterio de Series Alternantes (Leibniz):** $\sum(-1)^n b_n$ converge si b_n decrece a 0.
7. **Criterio de la Razón:** $L = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. $L < 1$ (Conv), $L > 1$ (Div), $L = 1$ (No decide).
8. **Criterio de la Raíz:** $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Mismas condiciones que la Razón.

Criterio de la Razón (D'Alembert)

Sea $\sum a_n$. Calculamos $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$:

- Si $L < 1 \implies$ Converge Absolutamente.
- Si $L > 1 \implies$ Diverge.
- Si $L = 1 \implies$ El criterio no decide.

Criterio de Comparación en el Límite

Si $a_n, b_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ $(0 < c < \infty)$, entonces:

$$\sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ se comportan igual (ambas Convergen o ambas Divergen).}$$

Útil para comparar con p-series: $\sum \frac{1}{n^p}$ conv. si $p > 1$.

Divergencia de Series

Problema: ¿Cuál de las siguientes series es **DIVERGENTE**?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n^5+8}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+\pi}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Solución Detallada:

a) Análisis Riguroso (Limit Comparison Test):

1. **Definimos las series:** Comparamos nuestra serie original (a_n) con la serie armónica (b_n), que sabemos que DIVERGE.

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n^5+8}} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n}$$

2. **Planteamos el Límite:** Calculamos $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Si $0 < L < \infty$, ambas se comportan igual.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n^5+8}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n^5+8}} \right)$$

3. **Factorización de términos dominantes:** No basta con decir "se parece a". Factorizamos la potencia mayor *dentro* de cada raíz para demostrar formalmente que los términos menores desaparecen.

$$L = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\sqrt{n^3(1+\frac{2n}{n^3}+\frac{1}{n^3})}}{\sqrt{n^5(1+\frac{8}{n^5})}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\sqrt{n^3} \cdot \sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{n^5} \cdot \sqrt{1+\frac{8}{n^5}}}$$

4. **Cancelación y Evaluación:** Sabemos que $\sqrt{n^3} = n^{3/2}$ y $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Agrupamos las potencias de n:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \cdot n^{3/2}}{n^{5/2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^5}}}$$

Observamos que $n \cdot n^{3/2} = n^{1+1{,}5} = n^{2{,}5} = n^{5/2}$. Los términos se cancelan exactamente ($\frac{n^{5/2}}{n^{5/2}} = 1$).

$$L = 1 \cdot \frac{\sqrt{1+0+0}}{\sqrt{1+0}} = 1$$

Como $L = 1$ (finito y positivo), y $\sum b_n$ diverge, **la serie a) DIVERGE**.

Análisis de las otras opciones:

b) Convergencia Absoluta:

$$\left| \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

Como la función seno está acotada entre $[-1, 1]$, el numerador no crece. Comparamos con la p-serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ $(p = 2 > 1)$. Converge.
c) Serie Alternante: La serie se puede reescribir considerando que $\cos(n\pi) = (-1)^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \pi}$$

Esta es una **Serie Alternante**. Verificamos el Criterio de Leibniz: 1. ¿Son los términos decrecientes? Sí, $\frac{1}{n+1+\pi} < \frac{1}{n+\pi}$. 2. ¿El límite es 0? Sí, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\pi} = 0$. Por lo tanto, la serie **converge** (condicionalmente).
d) Criterio de la Razón (Converge): Usamos D'Alembert para términos con factoriales y potencias n-ésimas:

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n! \cdot n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n \cdot n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Como $L = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2{,}718} < 1$, la serie **converge** absolutamente.
Alternativa correcta: a)

2.4. Geometría en el Espacio

Rectas y Planos

- **Recta** por P_0 con dirección $\vec{v}$:

$$\vec{r}(t) = P_0 + t\vec{v}$$

- **Plano** por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con normal $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

3. Cálculo III (MAT1630): Cálculo Multivariable

3.1. Diferenciación Multivariable

Gradiente y su Significado

Manual FE v10.1

Página 59 (Vectors: Gradient, Divergence, Curl)
Consúltalo en el examen.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. El gradiente es el vector:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

Propiedades Clave:

- ∇f apunta a la dirección de **máximo crecimiento**.
- La tasa máxima de cambio es $\|\nabla f\|$.
- ∇f es **perpendicular** (ortogonal) a las curvas/superficies de nivel.

Derivada Direccional

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Concepto deducible de producto punto (p.59), pero no explícito.

La derivada de f en la dirección del vector unitario $\vec{u}$:

$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$$

Nota: Si $\vec{u}$ no es unitario, normalizar $\vec{u} \leftarrow \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ antes de usar la fórmula.

Optimización con Multiplicadores de Lagrange

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
NO ESTÁ en el manual.

Para maximizar/minimizar $f(x, y, z)$ sujeto a la restricción $g(x, y, z) = k$:

1. Resolver el sistema: $\nabla f = \lambda \nabla g$.
2. Considerar también la restricción: $g(x, y, z) = k$.

3.2. Integrales Múltiples y Cambios de Coordenadas

Coordenadas Polares (En el plano xy)

Manual FE v10.1

Página 36 (Coordinate Systems)
Consúltalo en el examen.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Jacobiano (Factor de corrección): $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Jacobiano r no explícito en sección integración.

Coordenadas Esféricas (Espacio 3D)

Manual FE v10.1

Página 36
Consúltalo en el examen.

Usar para esferas o conos.

- $x = \rho\sin\phi\cos\theta$
- $y = \rho\sin\phi\sin\theta$
- $z = \rho\cos\phi$

Jacobiano de volumen: $\mathrm{d}V = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$

MAT1630-2-3 (2025-1)

Considere el sólido E en el primer octante delimitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.
¿Cuál de las siguientes integrales iteradas permite calcular el volumen de E?

a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^2 (4 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (4 - r^2)\,dr\,d\theta$

c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^2\int_0^{4-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{4-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx$

Solución

Respuesta correcta: d)
Análisis de cada opción:

- **Opción a):** Los límites de integración son incorrectos. Para $x = 2$ y $y = 2$, tendríamos $z = 4 - 4 - 4 = -4 < 0$, lo cual está fuera del primer octante.
- **Opción b):** Falta el factor r del Jacobiano en coordenadas polares. Debería ser $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r(4 - r^2)\, dr\, d\theta$.
- **Opción c):** Similar a la opción a), los límites de y son incorrectos. No considera que la región de integración en el plano xy es circular.
- **Opción d): CORRECTA.**
  - El límite superior de z es la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.
  - Para cada x fijo, y varía desde 0 hasta $\sqrt{4 - x^2}$ (semicírculo en el primer cuadrante).
  - x varía de 0 a 2 (donde la superficie intersecta el plano xy cuando $z = 0$: $4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$).

Verificación: La región de integración en el plano xy es un cuarto de círculo de radio 2 (primer cuadrante de $x^2 + y^2 \leq 4$), y la altura va desde $z = 0$ hasta $z = 4 - x^2 - y^2$.

4. Ecuaciones Diferenciales (MAT1640)

4.1. Clasificación y Primer Orden

Conceptos Básicos

- **Orden:** Derivada más alta presente (ej: y'' es orden 2).
- **Linealidad:** La variable y y sus derivadas tienen potencia 1 y no se multiplican entre sí.

Método: Variables Separables

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Método algebraico. No hay fórmula.

Si la EDO se puede escribir como $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$:

1. Separar variables a cada lado del igual.
2. Integrar ambos lados: $\int f(y)\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x$.
3. Despejar $y(x)$ si es posible.

Método: Factor Integrante (Ec. Lineales 1er Orden)

Manual FE v10.1

Página 51
Consúltalo en el examen.

Para ecuaciones de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$:

1. Calcular el factor integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$.
2. Multiplicar toda la ecuación por $\mu(x)$. El lado izquierdo colapsa a $(\mu \cdot y)'$.
3. Integrar: $\mu(x) \cdot y = \int \mu(x)Q(x)\mathrm{d}x$.
4. Despejar y.

4.2. Ecuaciones de Segundo Orden (Coef. Constantes)

Para resolver $ay'' + by' + cy = 0$:

Paso 1: Escribir la **ecuación característica**: $ar^2 + br + c = 0$.

Manual FE v10.1

Página 52 (Homogeneous 2nd Order)
Consúltalo en el examen.

Paso 2: Hallar las raíces r_1, r_2:

- **Reales distintas** $(r_1 \neq r_2)$: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
- **Reales iguales** $(r_1 = r_2 = r)$: $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$
- **Complejas** $(\alpha \pm \beta i)$: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

4.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

Sistema Lineal Homogéneo

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Teoría de e^{At} explicada aquí NO ESTÁ en matemáticas.

Un sistema de la forma $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ donde A es una matriz constante $n \times n$.
Solución general: $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$
donde e^{At} es la matriz exponencial definida por:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

Comportamiento Asintótico

El comportamiento de $\mathbf{x}(t)$ cuando $t \to \infty$ depende de los valores propios λ de A:

- Si $\text{Re}(\lambda) < 0$ para todos los λ: el sistema es **estable** y $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$
- Si existe λ con $\text{Re}(\lambda) > 0$: el sistema es **inestable** y diverge
- Si $\text{Re}(\lambda) = 0$: el comportamiento depende de la multiplicidad algebraica/geométrica

Comportamiento Asintótico de Sistemas Lineales

Sea $\mathbf{x}(t)$ la solución al sistema homogéneo $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ donde:

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si $u = \lim_{t\to\infty} e^{At}\mathbf{x}(t)$, entonces u es igual a:

a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solución

Respuesta correcta: a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

Análisis paso a paso:

1. Identificar valores y vectores propios:

De la información dada:

- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ es vector propio con $\lambda_1 = 0$ (ya que $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$)
- $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ es vector propio con $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

2. Expresar la condición inicial en la base de vectores propios:

Escribimos $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ como combinación lineal:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Resolviendo: $c_1 + c_2 = 1$ y $-c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$

3. Solución del sistema:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = \frac{1}{2}e^{0\cdot t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Cuando $t \to \infty$: el término $e^{-\frac{t}{2}} \to 0$, por lo tanto:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

4. Calcular el límite pedido:

$$u = \lim_{t\to\infty} e^{At}\mathbf{x}(t) = \lim_{t\to\infty} e^{At}\cdot e^{At}\mathbf{x}(0) = \lim_{t\to\infty} e^{2At}\mathbf{x}(0)$$

Usando la descomposición en vectores propios:

$$e^{2At}\mathbf{x}(0) = \frac{1}{2}e^{2\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}e^{2\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}e^{0}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Cuando $t \to \infty$: $e^{-t} \to 0$, entonces:

$$u = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Interpretación: El vector propio asociado al valor propio $\lambda = 0$ domina el comportamiento a largo plazo, mientras que el componente con $\lambda = -\frac{1}{2}$ decae exponencialmente.

5. Álgebra Lineal (MAT1203)

5.1. Matrices y Determinantes

Propiedades Clave

Manual FE v10.1

Página 57 (Matrices)
Consúltalo en el examen.

- **Invertible:** A es invertible $\iff \det(A) \neq 0$.
- **Simétrica:** $A^T = A$. (Sus valores propios son siempre reales).
- **Ortogonal:** $A^T = A^{-1}$ (o $A^T A = I$). Preserva distancias y ángulos.

Propiedades del Determinante

Manual FE v10.1

Página 58
Consúltalo en el examen.

Si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(kA) = k^n \det(A)$ (¡Ojo con el n!)
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

5.2. Diagonalización

Valores y Vectores Propios

Un vector $v \neq 0$ es vector propio de A con valor propio λ si:

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0$$

Algoritmo para Diagonalizar Matriz A:

¡NO ESTÁ EN EL MANUAL!
Algoritmo detallado NO ESTÁ. Solo la definición $Av = \lambda v$.

Paso 1: **Polinomio Característico:** Calcular $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
Paso 2: **Valores Propios:** Hallar las raíces de $p(\lambda) = 0$.
Paso 3: **Vectores Propios:** Para cada λ_i, resolver $(A - \lambda_i I)v = 0$ para hallar una base del espacio propio E_{λ_i}.
Paso 4: **Matriz de Paso P:** Formar P con los vectores propios como columnas.
Paso 5: **Diagonalización:** $D = P^{-1}AP$, donde D tiene los λ_i en la diagonal.

6. Probabilidades y Estadística (EYP1113)

6.1. Álgebra de Eventos y Probabilidad Básica

Conceptos Básicos

Manual FE v10.1

Página 63-65 (Probability)
Consúltalo en el examen.

- **Espacio Muestral** (Ω): Conjunto de todos los resultados posibles.
- **Evento** (A): Subconjunto de Ω.
- **Axiomas**: $P(\Omega) = 1$, $P(A) \geq 0$, etc.

Manual FE v10.1

Página 64 (Laws of Probability)
Consúltalo en el examen.

6.2. Variables Aleatorias y Medidas Descriptivas

Medidas Teóricas

Manual FE v10.1

Página 63 (Dispersion, Mean, Mode)
Consúltalo en el examen.

Sea X una variable aleatoria:

- **Esperanza (Media):** $E[X] = \mu$.
- **Varianza:** $Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$.
- **Coef. de Variación:** $CV = \frac{\sigma}{|\mu|}$.

Manual FE v10.1

Página 63
Consúltalo en el examen.

6.3. Modelos de Distribución

Tabla 1: Distribuciones Comunes

Manual FE v10.1

Página 66-68
Consúltalo en el examen.

Modelo	Parámetros	Aplicación Típica
Binomial	n, p	Conteo de éxitos en n intentos (p). **Manual FE p.66**
Geométrica	p	Intentos hasta el primer éxito. **Manual FE p.66**
Poisson	λ	Tasa ocurrencia eventos raros. **Manual FE p.66**
Normal	μ, σ^2	Fenómenos naturales. **Manual FE p.67**
Exponencial	λ	Tiempo entre eventos Poisson. **Manual FE p.67**

Uso de R (Cheat Sheet)

- `dnorm(x, mean, sd)`: Densidad (altura de la curva).
- `pnorm(q, mean, sd)`: Probabilidad Acumulada $P(X \leq q)$.
- `qnorm(p, mean, sd)`: Cuantil (valor x tal que acumula prob p).
- `rnorm(n, mean, sd)`: Generar n datos aleatorios.

Prefixos: **d** (denstiy), **p** (probability), **q** (quantile), **r** (random).

6.4. Inferencia y Regresión

Teorema del Límite Central

Manual FE v10.1

Página 74 (Confidence Intervals for Mean)
Consúltalo en el examen.

Para n grande ($n > 30$), la media muestral $\bar{X}$ se distribuye aproximadamente Normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Esto permite construir intervalos de seguridad para μ sin conocer la distribucion original.

Regresión Lineal Simple

Manual FE v10.1

Página 69-70
Consúltalo en el examen.

Modelo: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$

- Coeficiente de Determinación (R^2): % de variabilidad explicada.
- Comando R: `lm(y ~ x, data=datos)`

Preguntas de Práctica Seleccionadas

Pregunta 1 (MAT1610 - Cálculo I)

Considere la función $f(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$. La función posee un máximo en:
a) $(1, -e^{-\frac{1}{2}})$
b) $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$
c) $(-1, -e^{-\frac{1}{2}})$
d) $(1, e^{-\frac{1}{2}})$

Pregunta 2 (MAT1620 - Cálculo II)

Sea R la región delimitada por $0 \leq y \leq 2 - |x|$. ¿Cuál es el momento de R con respecto al eje X?
a) 1
b) 4/3
c) 2
d) 8/3

Pregunta 3 (MAT1630 - Cálculo III)

Sea $f(x, y) = x^y$. La derivada direccional en el punto (1,2), en la dirección de $\mathbf{v} = (1, 1)$, es:
a) 2
b) 0
c) $\sqrt{2}$
d) 1

Pregunta 4 (MAT1630 - Cálculo III)

Sea un cuerpo en el espacio definido por las siguientes desigualdades en coordenadas cilíndricas: $0 \leq r \leq 2 + \sin(4\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$. ¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde al volumen del cuerpo?
a) 2π
b) 4π
c) $9\pi/2$
d) 9π

Pregunta 5 (MAT1640 - Ecuaciones)

Una población posee una tasa de crecimiento instantánea anual de 2 %. ¿Cuántos años le tomará aproximadamente a dicha población triplicar su tamaño?
a) $25 \ln(3)$
b) $50 \ln(3)$
c) $2 \ln(3)$
d) $3 \ln(2)$

Pregunta 6 (MAT1640 - Ecuaciones)

Considere la ecuación: $(x^2+y^2)\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = 0$. ¿Cuál alternativa la describe mejor?

a) No lineal, homogénea, orden 1.
b) Lineal, no homogénea, orden 2.
c) No lineal, no homogénea, orden 2.
d) Lineal, homogénea, orden 1.

Pregunta 7 (MAT1203 - Álgebra Lineal)

Plano Π: $x-2y+3z=12$. Recta L: $\vec{r}(t)=(1,1,-2)+t(2,b,1)$. ¿Cuál es la condición sobre b para que $\Pi\cap L=\emptyset$ (paralelos)?

a) $b\geq 5/2$
b) $b\leq 5/2$
c) $b=5/2$
d) No existe valor

Pregunta 8 (MAT1203 - Álgebra Lineal)

Sobre matrices simétricas, ¿cuáles son verdaderas?

I. Resta de simétricas es simétrica.
II. Si $AB=BA$, entonces AB es simétrica.
III. Matriz $n\times n$ tiene n valores propios reales.

a) I y II
b) II y III
c) I y III
d) Todas correctas

Respuesta 9 (EYP1113 - Probabilidades)

Si $X\sim N(\mu=10,\sigma^2=4)$, ¿cuál es el valor estandarizado Z correspondiente a $X=13$?

a) 1,5
b) 0,75
c) 3
d) 0,3

Solucionario

Tabla de Respuestas Correctas

1. **b)** $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$
2. **d)** $8/3$
3. **c)** $\sqrt{2}$
4. **c)** $9\pi/2$
5. **b)** $50\ln(3)$
6. **a)** No lineal, homogénea, 1er orden.
7. **c)** $b = 5/2$
8. **a)** Sólo I y II

Solución Pregunta 1 (MAT1610)

Enunciado

Problema: Encontrar el máximo de $f(x) = -xe^{-x^2/2}$.

Paso 1: **Calcular la primera derivada.** Usamos la regla del producto.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \cdot e^{-x^2/2} + (-x) \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x) \\ &= -e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}(x^2 - 1) \end{aligned}$$

Paso 2: **Encontrar puntos críticos.** Igualamos $f'(x)$ a cero. Como $e^{-x^2/2} > 0$, solo $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$.

Paso 3: **Clasificar los puntos críticos.** Usamos la segunda derivada.

$$f''(x) = xe^{-x^2/2}(3 - x^2)$$

Evaluamos:

- $f''(1) = 2e^{-1/2} > 0 \implies$ Mínimo local.
- $f''(-1) = -2e^{-1/2} < 0 \implies$ Máximo local.

El valor máximo es $f(-1) = e^{-1/2}$.

Respuesta Correcta

b) $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$

Solución Pregunta 2 (MAT1620)

Enunciado

Problema: Calcular el momento M_x de la región delimitada por $0 \leq y \leq 2 - |x|$.

Paso 1: **Configurar la integral.** $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx$. Por simetría (de -2 a 2), calculamos de 0 a 2 y multiplicamos por 2. Para $x \geq 0$, $y = 2 - x$.

$$M_x = 2\int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)^2\, dx = \int_0^2 (4 - 4x + x^2)\, dx$$

Paso 2: **Evaluar la integral.**

$$M_x = \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(8 - 8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

Respuesta Correcta

d) 8/3

Solución Pregunta 3 (MAT1630)

Enunciado

Problema: Derivada direccional de $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$ dirección $\mathbf{v} = (1, 1)$.

Paso 1: **Gradiente.** $\nabla f = \langle yx^{y-1}, x^y \ln(x)\rangle$. En $(1, 2)$: $\nabla f(1, 2) = \langle 2, 0\rangle$.
Paso 2: **Vector unitario.** $||\mathbf{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \implies \mathbf{u} = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$.
Paso 3: **Producto punto.** $D_{\mathbf{u}}f = \langle 2, 0\rangle \cdot \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Respuesta Correcta

c) $\sqrt{2}$

Solución Pregunta 4 (MAT1630)

Enunciado

Problema: Volumen en cilíndricas: $\int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin(4\theta)} \int_0^1 r\,dz\,dr\,d\theta$.

Paso 1: **Integral en z.** $\int_0^1 r\,dz = r$.

Paso 2: **Integral en r.** $\int_0^{2+\sin(4\theta)} r\,dr = \frac{1}{2}(2+\sin(4\theta))^2$.

Paso 3: **Integral en θ.** Expandir: $\frac{1}{2}(4+4\sin(4\theta)+\sin^2(4\theta))$. La integral de $\sin(4\theta)$ en periodo completo es 0. La integral de $\sin^2(4\theta)$ es π. Integral de 4 es 8π. Total: $\frac{1}{2}(8\pi+\pi) = \frac{9\pi}{2}$.

Respuesta Correcta

c) $9\pi/2$

Solución Pregunta 5 (MAT1640)

Enunciado

Problema: Tiempo para triplicar población con tasa 2 % ($k = 0{,}02$).

Paso 1: **Modelo.** $P(t) = P_0 e^{kt} = P_0 e^{0{,}02t}$.
Paso 2: **Resolver.** $3P_0 = P_0 e^{0{,}02t} \implies 3 = e^{0{,}02t}$.
Paso 3: **Despejar t.** $\ln(3) = 0{,}02t \implies t = \frac{\ln(3)}{0{,}02} = 50\ln(3)$.

Respuesta Correcta

b) $50\ln(3)$

Solución Pregunta 6 (MAT1640)

Enunciado

Problema: Clasificar $(x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0$.

Paso 1: **Orden.** Primera derivada (dy/dx), primer orden.
Paso 2: **Linealidad.** Término y^2 o $1/y$ implica NO lineal.
Paso 3: **Homogeneidad.** Grado 2 en todos los términos (x^2, y^2, xy). Es Homogénea.

Respuesta Correcta

a) No lineal, homogénea, 1er orden.

Solución Pregunta 7 (MAT1203)

Enunciado

Problema: Intersección vacía entre recta L y plano $\Pi : x - 2y + 3z = 12$.

Paso 1: **Vectores.** $\mathbf{n}_\Pi = \langle 1, -2, 3 \rangle$, $\mathbf{v}_L = \langle 2, b, 1 \rangle$.

Paso 2: **Condición.** $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \implies 2 - 2b + 3 = 0 \implies 2b = 5 \implies b = 5/2$.

Paso 3: **Verificación.** Punto de recta no debe estar en plano. Confirmado en desarrollo previo.

Respuesta Correcta

c) $b = 5/2$

Solución Pregunta 8 (MAT1203)

Enunciado

Problema: Afirmaciones sobre matrices simétricas.

Paso 1: **I. Diferencia es simétrica.** VERDADERO. $(A-B)^T = A^T - B^T = A - B$.

Paso 2: **II. Si $AB = BA$, producto es simétrico.** VERDADERO. $(AB)^T = B^T A^T = BA$. Si $BA = AB$, entonces $(AB)^T = AB$.

Paso 3: **III. Valores propios reales distintos.** FALSO. Son reales, pero pueden repetirse (ej: Identidad).

Respuesta Correcta

a) Sólo I y II