Guía de Victorias Rápidas – Matemáticas

Tanda 1: Trucos, Análisis Gráfico y Fórmulas Directas

24 de febrero de 2026

Plan de Estudio – Tanda 1 Matemáticas

Objetivo: Dominar las preguntas más rápidas y sistemáticas de Matemáticas (Cálculo, Álgebra Lineal, EDO, Estadística) usando el FE Handbook y trucos de examinación.
Nivel: Conceptual rápido + evaluación de opciones directas.

Temas cubiertos:

1. Derivada direccional en vector canónico (solo derivar parcialmente)
2. Determinantes: regla multiplicativa $\mathrm{Det}(ABC) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)\,\mathrm{Det}(C)$
3. EDO: clasificación por orden, linealidad y homogeneidad (Visualización directa)
4. Álgebra Lineal: propiedades de matrices simétricas
5. Probabilidad discreta combinatoria: diagramas de suma o tablas
6. Estadística: Varianza al trasladar variables (invariabilidad por suma)
7. Cálculo: encontrar máximos evaluando alternativas directamente (Bypass de derivadas críticas)
8. Integrales impropias: convergencia de p-integral $(x - c)^p$
9. Probabilidad: Poisson $\rightarrow$ Tiempos entre llegadas distribuyen Exponencial
10. Estadística: significado conceptual de *Intervalo de Confianza*
11. Examen de gráficas de funciones a partir del dominio ($x > 0$ en logaritmos)
12. Geometría analítica: validar pertenencia de puntos en el plano con las opciones

Ejercicio 1 – Derivada Direccional Unitaria (Solo 1 derivada parcial)

Fuente: Pregunta 5 – 2016-1 (Cálculo)

Enunciado

Considere la función $g(x, y) = \cos(x)\cos(y) + \tan(xy) + \frac{y^2}{2}$. Se calcula la derivada direccional en el punto $(0, \pi)$ según la dirección unitaria $\hat{u} = (1, 0)$. ¿Cuánto vale?

a) 0

b) π

c) $\pi + 1/\pi$

d) $\pi - 1/\pi$

Solución paso a paso

Paso 1: Truco del vector canónico

La derivada direccional $D_{\hat{u}}g$ es el producto punto entre el gradiente (∇g) y el vector unitario $\hat{u}$. Si $\hat{u} = (1, 0)$ (eje X), la derivada direccional coincide exactamente con la **derivada parcial respecto a** x:

$$D_{(1,0)}g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) \cdot (1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0) = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Paso 2: Derivar e igualar Omitiendo y en favor de derivar a x:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\sin(x)\cos(y) + \frac{y}{\cos^2(xy)} + 0$$

Paso 3: Evaluar en $(0, \pi)$ Reemplazamos $x = 0$, $y = \pi$:

$$-\sin(0)\cos(\pi) + \frac{\pi}{\cos^2(0 \cdot \pi)} = 0 + \frac{\pi}{\cos^2(0)} = \frac{\pi}{1} = \pi$$

$$\boxed{\text{Respuesta: b)}}$$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- **Derivadas Direccionales (Pág. 35):** Aparece $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. El producto punto debe memorizarse: $D_{\hat{u}}g = \nabla g \cdot \hat{u}$.
- **Atajo:** Ir en dirección $X \to (1, 0)$ significa aislar la derivada parcial directa sin tocar la componente y.

Ejercicio 2 – Álgebra Lineal: Determinante de una matriz producto (Conceptual directa)

Fuente: Pregunta 6 – 2016-1 (Álgebra)

Enunciado

Se tiene $A = UU^TU$ con $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y donde la matriz inversa U^{-1} existe. ¿Cuál de las siguientes condiciones es la única correcta asertiva?

a) $\text{Det}(A) \neq 0$

b) $\text{Det}(A) = 0$

c) $\text{Det}(A) \geq 0$

d) $\text{Det}(A) \leq 0$

Solución paso a paso

Paso 1: Aplicar separación de determinantes
El determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes:

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(U)\,\text{Det}(U^T)\,\text{Det}(U)$$

Paso 2: Igualar determinante transpuestas
Sabiendo que la transpuesta comparte identidades: $\text{Det}(U^T) = \text{Det}(U)$.

$$\text{Det}(A) = [\text{Det}(U)]^3$$

Paso 3: Utilizar el dato singular de invertibilidad
El enunciado indica que U^{-1} *existe*. Esto algebraicamente exige que $\text{Det}(U) \neq 0$. Si un número no es 0, su cubo tampoco podrá ser jamás 0. El cubo de un número negativo es negativo y de un número positivo es positivo; lo único absoluto es que:

$$[\text{Det}(U)]^3 \neq 0 \implies \text{Det}(A) \neq 0$$

$\boxed{\text{Respuesta: a)}}$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- **Matrices (Pág. 32):** $|AB| = |A||B|$. $|A^T| = |A|$. Una matriz tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$.
- Se trata de tres reglas matemáticas atómicas agrupadas en el Handbook de Álgebra Lineal como identidades absolutas.

Ejercicio 3 – Clasificación visual de EDO (Teoría pura, rápido escaneo)

Fuente: Pregunta 7 – 2016-1 (Ecuaciones Diferenciales)

Enunciado

¿Cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales es **lineal, no homogénea y de segundo orden**?

a) $y'' + \cos(x)y' + x = 0$

b) $y'' + 3y' = xy$

c) $(y')^2 = e^x$

d) $(y')^2 - x^2 y = 0$

Solución paso a paso

Paso 1: Buscar Orden 2 (y'')

Descartamos (c) y (d) categóricamente porque solo llegan hasta la primera derivada y', por ende son EDOs de **primer orden**. Además tienen $(y')^2$ lo que rompe la *linealidad*. Las opciones se reducen a (a) y (b).

Paso 2: Aislar si es Homogénea o No Homogénea

- Para la opción **(b)** $y'' + 3y' - xy = 0$. Todos los términos tienen al menos una y (ya sea en función, primera derivada o segunda). Esto es ser **Homogéneo** o sistema cerrado.
- Para la opción **(a)** $y'' + \cos(x)y' = -x$. Si apartamos a un lado las y, nos sobra el fragmento $-x$ (un término foráneo a la y, una entrada externa). Esto la califica como **No Homogénea**.

El requisito se cumple por completo y a la vista para la opción A.

$$\boxed{\text{Respuesta: a)}}$$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- **Differential Equations (Pág. 38):** Una EDO Homogénea iguala a cero post reagrupación de la variable y (no posee factor independiente $f(x)$ libre). Si hay variables al cuadrado o derivadas multiplicándose, pierde *linealidad*.

Ejercicio 4 – Álgebra Lineal: Matrices Simétricas (Conceptual, escaneo)

Fuente: Pregunta 9 – 2016-1 (Álgebra)

Enunciado

Considere las siguientes afirmaciones de matrices simétricas:

I. La diferencia de matrices simétricas es simétrica.

II. Si A, B simétricas y conmutan ($AB = BA$), AB es simétrica.

III. Todas las matrices simétricas $n \times n$ tienen n valores propios *reales distintos.*

¿Cuáles son CORRECTAS?

a) Sólo I y II

b) Sólo II y III

c) Sólo I y III

d) Todas son correctas

Solución paso a paso

Paso 1: Validación Simétrica Estándar ($C^T = C$)
Para probar, aplicamos transpuestas:

- **I:** Para $D = A - B$, entonces $D^T = (A - B)^T = A^T - B^T = A - B = D$. Es simétrica ($I$ Verdadera).
- **II:** Para $C = AB$, entonces $C^T = (AB)^T = B^T A^T = BA$. Como nos conceden que $AB = BA$, entonces $C^T = AB = C$. Es simétrica. (II Verdadera).

Paso 2: Traba Teorema Espectral (Multilicidades)
La aseveración III dice que tienen los n valores *distintos*. Sin embargo, la simple matriz identidad $\mathbb{I}$ (que es 100 % simétrica) tiene el valor $\lambda = 1$ en abundancia idéntica multiplicada n veces. (Existen cruces repetidos). Por ende la afirmación falla por absolutismo (III Falsa).

Quedando en solitario I y II.

$\boxed{\text{Respuesta: a)}}$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- **Symmetric Matrices (Pág. 32):** Un matrix A es simétrica si $A^T = A$.
- **Eigenvalues:** Menciona que todos los autovalores de la matriz simétrica están anclados en $\mathbb{R}$, pero *no implica obligatoriedad a que deban ser todos y cada uno radicalmente diferentes* $\implies$ pueden repetirse.

Ejercicio 5 – Sucesos discretos: Dado cargado (Cálculo básico a mano)

Fuente: Pregunta 17 – 2016-1 (Estadística)

Enunciado

Se cuenta con un dado de seis caras: 3 caras con "6", 2 caras con "4", 1 cara con "5". Se lanza dos veces de manera independiente. ¿Probabilidad de que la suma binde 10?

a) 0,1944

b) 0,2777

c) 0,3333

d) 0,3611

Solución paso a paso

Paso 1: Mapeo de probabilidades solitarias Hay 6 lados totales, prob individual de sacar:

$$P(6) = 3/6, \quad P(5) = 1/6, \quad P(4) = 2/6$$

Paso 2: Identificar combinaciones viables que den 10 (con reemplazo): Lanzando dos veces ordenadas:

- Primera 4 y Segunda 6 $\rightarrow P(4) \cdot P(6) = (2/6)(3/6) = 6/36$
- Primera 6 y Segunda 4 $\rightarrow P(6) \cdot P(4) = (3/6)(2/6) = 6/36$
- Primera 5 y Segunda 5 $\rightarrow P(5) \cdot P(5) = (1/6)(1/6) = 1/36$

Paso 3: Unificación Global Sumamos los eventos complementarios (Regla aditiva de OR disjuntos):

$$\text{Total} = \frac{6+6+1}{36} = \frac{13}{36} \approx 0,3611$$

$$\boxed{\text{Respuesta: d)}}$$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- **Probability Rules (Pág. 39):** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B no comparten intersecciones (Mutuamente exclusivos). Como la ordenación afecta: debes multiplicar $P(A)P(B)$ para el orden natural de cada par independiente.

Ejercicio 6 – Varianza al trasladar variable Aleatoria (Truco Estadístico)

Fuente: Pregunta 18 – 2016-1 (Estadística)

Enunciado

La densidad de una variable aleatoria es $f(x) = 2e^{-2(x-1)}$ para $x > 1$. De las siguientes opciones, ¿cuál es la varianza estadística de X?

a) 1/4

b) 5/4

c) 6/4

d) 9/4

Solución paso a paso

Paso 1: Eliminar la ceguera de traslación

La función tiene forma de un modelo exponencial clásico con ratio $\lambda = 2$. Originalmente debiera ser $f(Y) = 2e^{-2Y}$, de modo que el autor de la prueba definió $Y = X - 1$. Mover (sumar o restar números a toda la curva) desplaza la media, pero no dispersa más a los datos, por lo tanto **la varianza en sumatorias/sustracciones se congela permanentemente**:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y + 1) = \text{Var}(Y)$$

Paso 2: Varianza base del Handbook

Acudimos a la tabla de distribuciones base (Exponencial), donde Varianza Exponencial (ratio λ) es:

$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Respuesta: a)}}$$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- **Exponential Distribution (Pág. 41):** Media $\mu = 1/\lambda$ y $\text{Var} = 1/\lambda^2$.
- **Expectation properties:** $\text{Var}(aX + b) = a^2 \, \text{Var}(X)$. Al carecer de factor ."A"(A=1) la "b"desaparece sin aportar inercia.

Ejercicio 7 – Localización de Máximo en Raíz Fraccional (Bypass al derivar)

Fuente: Pregunta 1 – 2016-2 (Cálculo)

Enunciado

Considere $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2 + x^4/2}}{x^2 + 1}$. La función posee un **máximo** en:

a) $(0, 1)$

b) $(\sqrt{3/2}, 1/\sqrt{10})$

c) $(-\sqrt{3/2}, 1/\sqrt{10})$

d) $(1, 1/(2\sqrt{2}))$

Solución paso a paso

Paso 1: ¿Por qué derivar usando Quotient Rule si tenemos los puntos dados?

Derivar esa enorme raíz y generar el numerador a cero requiere mínimo unos 5 o 7 minutos. Como piden dónde ocurre el **máximo absoluto** en las combinaciones tabuladas, bastará con evaluar directo las componentes "x.$^{\text{ei}}$dentificar al que arroje mayor valor z".

Paso 2: Evaluaciones comparacionales

- $f(0) = \frac{\sqrt{1-0+0}}{0+1} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$
- $f(1) = \frac{\sqrt{1-1+1/2}}{1+1} = \frac{\sqrt{0{,}5}}{2} \approx \frac{0{,}707}{2} = \mathbf{0{,}35}$ (Menor)
- $f(\sqrt{1{,}5}) = \dots$ por inspección visual el radio $1/\sqrt{10}$ dicta un valor aproximado $\sim 1/3 = \mathbf{0{,}316}$ (Menor)

Dado que $(0,1)$ supera abismalmente a las alternativas decimales residuales, gana invictamente la puja siendo el máximo global de aquella región.

$\boxed{\text{Respuesta: a)}}$

Truco Universal del FE:

- El examen FE prioriza ."Engineering intuition". Derivar expresiones muy intrincadas en formato selección múltiple casi siempre puede by-passearse inyectando temporalmente las variables (Testing Reverse Engineering). (Pág. 34 extrema condicionalidad).

Ejercicio 8 – Integral Impropia p-integral converge... (Cálculo P-series)

Fuente: Pregunta 2 – 2016-2 (Cálculo)

Enunciado

Sea $0 < a < b < \infty$. ¿Mayor intervalo al que puede pertenecer p para que converja la integral $\int_a^b \frac{2+\sin(x)}{(x-a)^p} dx$?

a) $(-1, 1)$

b) $(-\infty, -1)$

c) $(1, \infty)$

d) $(-\infty, 1)$

Solución paso a paso

Paso 1: Entender si domina el numerador o denominador
El numerador $2 + \sin(x)$ oscila inofensivamente entre 1 y 3 (límite fijo). La **singularidad real** (peligro de explotar al ∞) proviene exclusivamente de $(x-a)^p$ en el extremo inferior $x = a$ (división por 0).
Paso 2: Criterio general P-integrales en límites anclados asintóticos (NO infinitos de cola)
La regla de singularidad infinita aislada, determina que:

$$\int_0^C \frac{1}{x^p} dx \quad \text{Converge si y sólo si:} \quad \mathbf{p < 1}$$

Cualquier exponente p menor que 1 (como $1/2$, 0, -50) logrará contraer en suma geométrica la curva en la convergencia natural y aplastacional, permitiendo un intervalo irrompible $(-\infty, 1)$.

$\boxed{\text{Respuesta: d)}}$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- Esto recae en teoría formativa de p-series (Pág. 50 acotado y límite integrales Pág. 35). A groso modo: si una anomalía de división se detona en los polos horizontales $x \to 0$, $p < 1$ es la frontera límite de control convergente. Si es de la variante en infinito integral (cola a infinito $x \to \infty$), se da vuelta la tortilla ($p > 1$). Memoriza este dictamen.

Ejercicio 9 – Poisson y tiempos de espera de llegada (Identidad Poisson-Exponencial)

Fuente: Pregunta 23 – 2016-2 (Estadística)

Enunciado

Una máquina carga una tarjeta en **30 seg (0,5 min)**. Las personas llegan haciendo fila como un Proceso de Poisson $\lambda = 1$ compañero cada 2 minutos ($\to \lambda = 0,5$/minuto). Una persona llega, usa la máquina recién liberada. ¿Probabilidad de que llegue otra persona *antes* que él pueda terminar de usarla?

a) 0,2212

b) 0,3935

c) 0,6321

d) 0,8647

Solución paso a paso

Paso 1: Entendiendo la relación Poisson / Exponencial
Un evento Poisson mide llegadas globales. El **tiempo exacto entre dos llegadas** continuas automáticamente obedece la densidad de la distribución **Exponencial**.

Paso 2: Parametrizar en minutos (estandarización rigurosa) Tasa: $\lambda = 0,5$ usos/minuto. Umbral condicional: Demora $30s = 0,5$ min. Aspiramos resolver la probabilidad que el tiempo total de llegada T tome menos que el de demora general ($T \leq 0,5$).

Paso 3: Fórmula Probabilística Acumulativa

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Aplicado $= 1 - e^{-(0,5)(0,5)} = 1 - e^{-0,25} \approx 1 - 0,7788 = 0,2212$.

$\boxed{\text{Respuesta: a)}}$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- **Poisson & Exponential inter-arrivals (Pág. 41):** Muestra claramente el Cumulative Distribution Function (CDF) logrando $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
- Importa que unifiques la "temporalidad base"(minutos con minutos o segundos uniformes).

Ejercicio 10 – Interpretación Frecuentista Intervalos de Confianza (Conceptual)

Fuente: Pregunta 24 – 2017-1 (Estadística)

Enunciado

Al resolver un problema se obtuvo el intervalo de **95 % confianza** $[1,34\,;\,2,81]$ para la media μ. ¿Cuál alternativa es la correcta?

a) La media μ está entre ambos valores inclusive.

b) Aproximadamente el 95 % de los intervalos generados estadísticamente y en igual escala van a contener al verdadero valúo μ.

c) Existe 95 % de probabilidad de que μ fluya en el segmento 1,34 y 2,81.

d) Se reduce anchura si requerimos mayor confianza.

Solución paso a paso

Paso 1: Por qué Ç.^{es} erróneo de base absoluta

El error más común es tratar a μ (la verdad central poblacional) como una variable bailarina oscilante con probabilidades. μ es **una constante sagrada fija**. Por lo tanto, el intervalo $[1,34\,;\,2,81]$ la atrapará, o no la atrapará en forma rígida. No hay porcentaje suelto fluyendo para ese intervalo único analizado en particular.

Paso 2: ¿Qué narices significa la afirmación 95 %?

El 95 % de validación *alude enteramente al método generador estandarizado ("Frecuentismo")*. De si armáramos en paralelo otros 100 intervalos distintos bajo igual formulador base aleatoria, 95 recaerían con pleno éxito envolviendo el número verdad (μ) y 5 tendrían falla. (Inciso **b**).

$$\boxed{\text{Respuesta: b)}}$$

¡Lo que dice el Handbook FE!

- **Confidence Intervals (Pág. 74):** Su redacción resguarda cuidadosamente que es çonfianza al parámetro de contención de la matriz creadora, no una probabilidad de variolação a μ".

Ejercicio 11 – Análisis visual relampágo gráficos In (Dominio $X > 0$)

Fuente: Pregunta 1 – 2017-2 (Cálculo)

Enunciado

Selecciona el gráfico preciso asociado a la ecuación $f(x) = e^{\sin|x|} + \ln(x)$ de cuatro variables candidatas. (Nota descriptiva visual: algunos atraviesan izquierda negativa $X < 0$, otros tocan el cielo infinito hacia la izquierda y una cuarta que cae hundiéndose como abismo por la pared 0 Y).

Solución paso a paso

Paso 1: Detectar logaritmos u operativas inválidas o prohibidas:

Por inspección veloz, la conjunción sumatoria contiene de manera aislada al bloque **logaritmo natural** $\ln(x)$. La regla máxima del logaritmo exige imperativamente dominio de inyección estrictamente natural contiguo positivo: $x > 0$. ¡Es ilegal cualquier valor igual o menor que zero!.

Paso 2: Recortando los diagramas:

Se descalifica inmediatamente cualquier diagrama donde la línea fluye libremente bajo ceros negativos $(-\infty)$ en el vector X o intente cruzar frontalmente el eje cero $(0, 0)$.

Paso 3: Asíntotas de pozo:

Sabiendo que el límite $\lim_{x\to 0^+}(\text{constante } + \ln(x)) \to -\infty$, obligatoriamente la curva superviviente se lanza por un voladero vertiginoso por la parte inferior amarrado al origen Y vertical derecho (Cuadrante IV).

(Resultado intuitivo sin derivadas ni tablas aburridas $\to$ iii)

Analítica Base FE Handbook (Pág. 34/35):

- Evadir cálculos extensos ante identificadores de anomalías del dominio logarítmico (Asíntota de hundimiento en ceros y negación visual al Cuadro II y III del Cartesian).

Ejercicio 12 – Geometría de Ecuación Plano con truco bypass (Sustitución)

Fuente: Pregunta 2 – 2017-2 (Álgebra)

Enunciado

Una ecuación cartesiana general del plano que contiene en el espacio **obligatoriamente** al núcleo $A(7, -4, 2)$ y que cobija a una recta aleatoria. De las ecuaciones siguientes ¿Cuál será el plano de pertenencia?

a) $7x - 4y + 2z = 0$

b) $5x + y + 3z = 0$

c) $2x - 5y - z = 0$

d) El plano no se encuentra determinado (ninguna coordina o no existe de unicidad).

Solución paso a paso

Paso 1: Si un barco está en un lago, toca el lago

Si el hipotético plano (A, B, C) ostenta ser el responsable, entonces inyectar la piedra elemental de anclaje $A(7, -4, 2)$ (X,Y,Z) debe ser una solución final que de exactamente **CERO** perfecto para el plano que pretenda apadrinar a A.

Paso 2: Testing Rápido sustitutorio

- $P(a) = 7(7) - 4(-4) + 2(2) = 49 + 16 + 4 = 69 \neq 0$ (Falla)
- $P(b) = 5(7) + (-4) + 3(2) = 35 - 4 + 6 = 37 \neq 0$ (Falla)

- $P(c) = 2(7) - 5(-4) - 2 = 14 + 20 - 2 = 32 \neq 0$ (Falla)

Como todas fracasan en sostener al integrante más básico (y eso que es su único punto), no existe tal plano que brinde amparo y que cuadre entre esas 3 identidades. El fallo sistémico avala indudablemente el dictamen (d) como la opción residual restante.

$\boxed{\text{Respuesta: d)}}$

Aprovechamiento Rápido Multiple Choice (FE Handbook)

- Reemplazar Puntos para despejar variables se halla descrito en el Pág. 35 y 36. Aplicarlo como check ahorra entre 5 a 10 min de cruz de vectores cartesianos en 3D infinitos que causan agotamiento neural.

Resumen de Conceptos Clave

Lo que deberías dominar y recordar después de esta tanda

Fórmulas del Handbook que debes ubicar velozmente:

1. **Cálculos/Derivadas Direcc. (Pág. 35):** $D_{\hat{u}}g = \nabla g \cdot \hat{u}$. Desvía en $X \implies$ solo derive para X.
2. **Prod det. Matriz (Pág. 32):** El determinante general de multiplicaciones $|ABC| = |A||B||C|$.
3. **Mínimos/Máximos (Pág. 34):** Cuando pregunten localizaciones fraccionales crudas en multiple choice, sustituya las respuestas directo en $f(x)$ para ver su jerarquía (Mayor es Max).
4. **EDO 1er y 2do Orden (Pág. 38):** El factor autónomo exento de variante libre genera la *No Homogeneidad*.
5. **Reloj Exponencial Poisson (Pág. 41):** Si la máquina da fallos Poisson, el tiempo entre medio muta a distribución Exponencial con el mismo λ.
6. **Int. Confianza (Pág. 74):** Concepto "Frecuentista", los "métodos probables"se aferran al modelo, y μ es inamovible internamente. ¡No es un flanco porcentual directo de contención en azar!