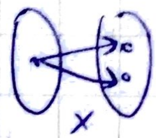
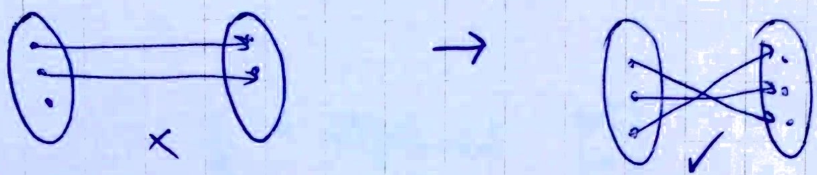
CÁLCULO I

Inyectiva: para un "y" tiene que haber 1 solo "x".



Epiyectiva (Sobreeyectiva): todos los elementos de llegada sean su recorrido.



IDENTIDADES

$\cos^2 + \text{sen}^2 = 1$

$\text{ctg}^2 + 1 = \csc^2$

$\text{tg}^2 = \sec^2 - 1$

$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$

$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$

Límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a^+} f(x) = L \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = L \end{array}\right\}$$ Si son $\neq$, el Lím. NO EXISTE

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{array} \right\}$$ NO TIENE LÍMITE

Prop

- Es lineal $\left\langle \begin{array}{l} \text{separa la suma y resta} \\ \text{las ctes salen} \end{array}\right.$
- $\lim(a \cdot b) = \lim(a) \cdot \lim(b)$
- $\lim\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\lim(a)}{\lim(b)}$

T. Compresión : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$\lim f(x) = L$ $\qquad$ $\lim h(x) = L$

$\lim g(x) = L$

$\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Prop :

- $\lim_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)^n$

El límite entra

- $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

Continuidad
- Límite existe para $c \in [a, b]$
- $f(c)$ Existe (evaluado)
- $\lim = f(c)$

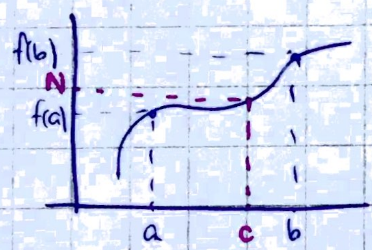
I. Compuesta :

$f \circ g(x) = f(g(x))$

$\lim f(g(x)) = f(\lim g(x))$

T. Valor Intermedio

→ función continua.



$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

Derivada por definición: $f'(x) = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$

- Si f no es continua, no es derivable.
  (f derivable → f es continua)

- $|x|$ es continuo pero no derivable. ($|0|$ → se produce una punta)

Regla de la cadena: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Producto: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

Cociente: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Derivadas Trigonométricas

$\operatorname{sen}'x = \cos x$

$\cos' x = -\operatorname{sen} x$

$tg\,x' = \sec^2 x$

$\sec' x = tg\,x \cdot \sec x$

Deriv. Implícita

Ej: $\arcsen(x) = y$

$$x = \operatorname{sen}(y) \quad /(\ )'$$

$$1 = \cos(y) \cdot y'$$

$$y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

• Cadena Leibniz: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Ej: $y = f(u) \rightarrow y = f(g(x))$

$u = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

Derivada Inversa: con $f^{-1}(x) = y \longrightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$$y' = \frac{1}{f'(y)}$$

Rectas Tangentes: $y_a = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

$y_b = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2)$

- Se igualan pendientes: $(f'(x_1) = g'(x_2))$
- Se igualan los coeficientes: $\{ g(x_2) - x_2 \cdot g'(x_2) = f(x_1) - x \cdot f'(x_1) \}$

Deriv. Trigonométricas

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos(x))' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arcsec}(x))' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Crecim. / Decaim. Exponencial: $y(t) = \underbrace{y(0)}_{\text{inicial}} \cdot e^{kt}$

- Evaluar
- Despejar el K
- Encontrar lo que te piden

Relaciones Afines

- Encontrar la relación entre variables.
- Derivar y reemplazar
- Despejar.

APROX. LINEALES

→ ver la recta tangente en vez de la función

$$\boxed{L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

Ej: $y = \ln(x)$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$L(x) = \ln(a) + \frac{1}{a} \cdot (x-a)$$

$a = 1$

$x = 1{,}01$

$\rightarrow \quad = 0 + 1 \cdot (1{,}01 - 1) = 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}01$ ✓

dy = aprox. lineal

Δy = cuánto se movió en realidad

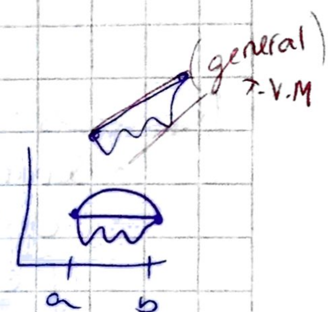
Max / Mín :

- Fermat : $f'(c) = 0$.

T.V. Extremo: Función acotada, tiene un máx y un mín.

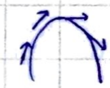
T.V. Medio → T. Rolle:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont.} \\ f \text{ deriv.} \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} f'(c) = 0$$



$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

- Cóncava:



$f'(x) > 0 \longrightarrow$ crece

$f'(x) = 0 \longrightarrow$ cte $\longrightarrow$ pto crítico

$f'(x) < 0 \longrightarrow$ decrece

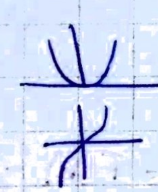
- Convexa:

- Puntos de Inflexión: $f'(x) = 0 \rightarrow$ cambia la pendiente

  $f''(x) = 0 \longrightarrow$ cambia la concavidad de la curva.

L'Hopital: $\left.\begin{array}{l} \frac{0}{0} \\ 0 \cdot \infty \\ \frac{\infty}{\infty} \end{array}\right\}$ Transformar: 0^0, ∞^0, 1^∞

Simetrías:
a) Eje y: $f(-x) = f(x)$
b) Origen: $f(-x) = -f(x)$



Asíntota:
- Vertical $\rightarrow$ $\lim = \infty$
- Horiz $\longrightarrow$ $\lim = cte$
- Oblicuas: $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m_0$

  $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) - m_0 x = b$

Integral Definida: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$

Propiedades:

- Separable por la suma
- Ctes salen
- $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Las integrales respetan las desigualdades.
- Intervalos $a \leq c \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

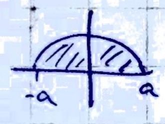
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ $\rightarrow$ $(-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

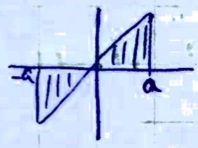
Simetrías:

Sea f continua en $[-a, a]$:

f es **PAR** $\rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



f es IMPAR $\rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$



Área entre curvas

1) Buscar los ptos de intersección entre curvas
2) Con $f(x) \geq g(x) \longrightarrow \displaystyle\int_{a}^{b} |(f(x) - g(x))|\,dx$

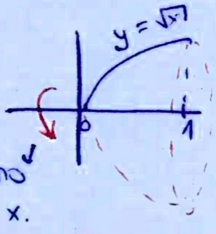
En el eje y: $A = \displaystyle\int_{c}^{d} |f(y) - g(y)|\,dy$

Volúmenes de Revolución

- Encontrar el radio (la función que hace el radio)
- Ver en qué eje gira.

$$\boxed{V = \int_{a}^{b} A(x)\,dx}$$

Ej:

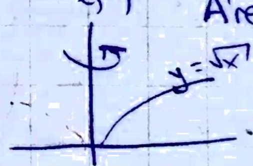


entorno al eje x.

$$V = \int_{0}^{1} A(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} \pi x = \frac{\pi}{2}$$

eje y



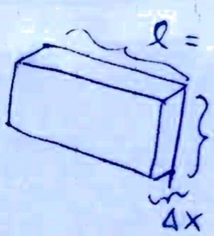
Área $= \pi r^2$

$\rightarrow x = y^2 = f(y)$

$A = \pi \cdot (y^2)^2$

$V = \int A$

Cascarones Cilíndricos:



$\rightarrow V = 2\pi x \cdot f(x) \cdot \Delta x$

Valor Promedio de una F(x): $\boxed{f_{prom} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx}$ → es un número

Integración por Partes → "VACA ☺"

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Prioridad para elegir el u:

I: inversas trigonométricas
L: logaritmo
A: Polinomio (algebraico)
T: trigonométricas
E: exponencial

Ej: 1) $\int x^2 e^x dx$ $\quad u = x^2 \rightarrow du = 2x$
$\quad dv = e^x \rightarrow v = e^x$

$u = x \quad du = 1$
$dv = e^x \quad v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int e^x x\, dx$$
$$= x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right)$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

2) $\int x \cdot \sin(x) dx$ $\quad u = x \quad du = 1$
$\quad dv = \sin x \quad v = -\cos x$

$$= x\cos x - \int -\cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \operatorname{sen}(x) + C$$

Integrales Trigonométricas

COS IMPAR

$\int \sin^4 \cdot \cos^{3}$ (sacar 1) $\rightarrow \int \sin^4 \cdot \cos^2 \cdot \cos$

- Hacer sustitución $\sin(x) = t$ para simplificar el $\cos(x)$.

SEN IMPAR → sacar 1

$\int \sin^{5}(x) \cos^2(x)$

AMBOS IMPAR

- se saca un coseno.

AMBOS PAR

Usar: $\frac{\sin(2x)}{2} = \sin(x) \cos(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

TG Y SEC PAR:

- sacar $\sec^2(x)$ y todo en función de tg y hacer $u = tg$

TG Y SEC IMPAR:

- sacar $\sec \cdot tg$ y hacer lo mismo.

SUST. TRIGONOMÉTRICAS

1) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \rightarrow x = a \cdot \sin(y)$

2) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx \rightarrow x = a \cdot tg(y)$

3) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \rightarrow x = a \cdot \sec(y)$

FRACCIONES PARCIALES

I • ver si es propia o impropia. (simplificar la impropia a propia)

$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ $\begin{cases} 2 = A(x-1) + B(x+1) \\ 2 = (A+B)x + (B-A) \end{cases}$ $B = 1$, $A = -1$

II: Repetidos → ponerlo n veces y ponerlo con 1 potencia más.

III: $\frac{Ax+B}{x^2+1}$

Ejercicios

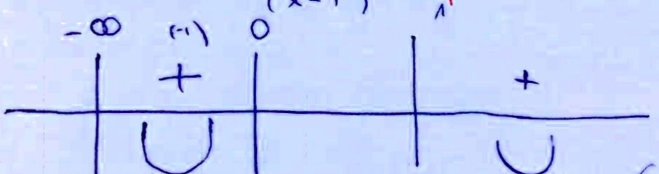
- $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

Intervalos de concavidad / convexidad:

$$f' = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'' = \frac{(6x^2 - 6x)\cdot(x-1)^2 - (2x^3 - 3x^2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{\cancel{2(x-1)}\left[3x(x-1)^2 - x^2(2x^{2} - 3x)\right]}{(x-1)^{4\,3}}$$

$$f'' = \frac{2x\left[3(x-1)^2 - x(2x-3)\right]}{(x-1)^{4}} \cdot \cancel{(x-1)}$$



$3x(x^2 - 2x + 1) - 2x^2(2x-3)$

$6x^3 - 12x^2 + 6x - 4x^3 - 6x^2$

$2x^3 - 18x^2 + 6x$

$2x(x^2 - 9x + 3)$

$$f''(-1) = \frac{- \cdot - \cdot (+}{+} = \frac{4(12 + -5)}{16\ 4} = \frac{7}{4}$$

$$= \frac{\cancel{+4\cdot(12 + (-2-3))}}{+} \cancel{= \frac{28}{+}} > 0$$

$$f''(2) = \frac{4\left[3\cdot 1 - 2\cdot 1\right]}{+} = 4 > 0 \checkmark$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 4}{x^2 - x} = \frac{2x-1}{2x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - 4}{x-1} - \frac{x^2 - x}{x-1} =$$

$$\frac{-4}{x-1} = 0$$

$\boxed{y = x}$

- Julio 2014:

$f(x) = e^{\cos^2(x) + \sqrt{x}}$

La derivada es: $f'(x) = e^{\cos^2(x) + \sqrt{x}} \cdot (\cos^2(x) + \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{1/2}})'$

$e^{\cos^2(x) + \sqrt{x}} \cdot \left[2\cdot \cos(x) \cdot - \operatorname{sen}(x) + \frac{x^{-1/2}}{2}\right]$ d)

- $f(x) = \sin^2(x)$

La primitiva: $\int \sin^2(x) = \int \cancel{\sin(x) \sin(x)}$ $\longrightarrow$ c) $\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$

$\cancel{\frac{\sin(x)^3}{3 \cos(x)}}$ $\quad -\frac{1}{2}\left(\underset{(1 - 2\operatorname{sen}^2)}{\cos^2(x)} - \operatorname{sen}^2(x)\right) + \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} + \operatorname{sen}^2 \quad + \frac{1}{2}$ ✓

CÁLCULO II

Largo de Curva : $\left[\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\right]$

Área de Superficie de un Vol. de Rev. : $\left[2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\right]$

Volumen $\int_a^b A(x)\, dx$

Trabajo = Fuerza • Desplazamiento $\longrightarrow \left[W = \int_a^b F(x)\, dx\right]$

Presión de un Fluído : $P = \underbrace{\delta}_{\text{densidad del fluído}} \cdot \overbrace{h}^{\text{profundidad}}$

Fuerza de fluídos : $F = p \cdot A \longrightarrow F = \delta \cdot h \cdot A$

$$F = \int_a^b \delta \cdot (\text{profundidad}) \cdot \underbrace{L(y)}_{\substack{\text{ancho} \\ \text{que depende} \\ \text{de la altura}}} \cdot dy$$

• Algo NO gire $\longrightarrow$ Torque $= 0$ $\quad \{ \text{Torque} = g \left(\sum m_k x_k\right)$

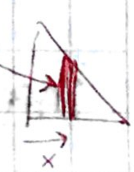
El centro de masa es la proporción entre el momento del sistema sobre la masa del sistema : $\dfrac{\text{momento}}{\text{masa}}$

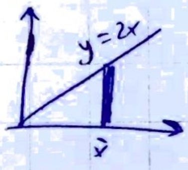
Centro de Masa $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{M_y}{M}, \dfrac{M_x}{M}\right)$

$M_y = \sum m_k x_k$

$M_x = \sum m_k y_k$

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_a^b \tilde{x}\, \Delta m}{\int_a^b \Delta m} \\[2ex] \bar{y} = \dfrac{\int \tilde{y}\, \Delta m}{\int dm} \end{cases}$$



Ej: 

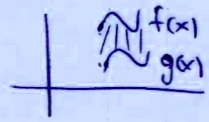
$\delta = 3\ g/cm^2$

Se calcula
- longitud $= 2x$
- ancho $= \Delta x = dx$
- área $(dA) = 2x\,dx$
- masa $(dm) = 3 \cdot dA = \delta \cdot dA$

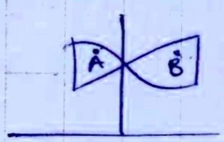
$\tilde{x}$ = centro de masa de una franja característica.

$M_y = \int \tilde{x}\,dm \rightarrow$ vertical
$M_x = \int \tilde{y}\,dm \rightarrow$ horizontal

Placas Acotadas por 2 curvas
Largo $= f(x) - g(x)$



• Si se cruzan:

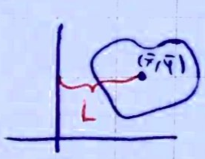


1) Calcular centros de masa de A y B
2) Sacar el promedio entre ambos.

centroide: masa con densidad variable. $(\delta = x^2, \ldots)$

Alambre $\rightarrow ds = \text{radio} \cdot d\theta \rightarrow$ en vez de dA
$dm = \delta \cdot ds = \delta \cdot a \cdot d\theta$

Teo. PAPPUS: Volumen es el A por la dist. del centroide recorrida en la rotación.



$$\boxed{V = 2\pi \cdot L \cdot A}$$

• Sirve para calcular el volumen teniendo el Área.

PAPPUS II: El área es el largo de curva por la dist. recorrida por el centroide.

$$A = (2\pi\,\bar{y}) \cdot L \rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$\bar{x}$

Curvas Paramétricas: $(f(t), g(t)) = (x(t), y(t))$

• Curvatura $= \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)}{f'(t)}$ $\quad f'(t) \rightarrow \frac{d}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Curva Tangente: $\dfrac{dy}{dx} = 0$
// eje x

Crecimiento: $\dfrac{dy}{dx} = ?$
<0 : decreciente
>0 : creciente

Curvatura: $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $\begin{cases} + \rightarrow \cup & \text{convexa} \\ - \rightarrow \cap & \text{cóncava} \end{cases}$

Coordenadas Polares

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\theta \\ y &= r \cdot \operatorname{sen}\theta \\ \text{con } \theta &\in [0, 2\pi] \end{aligned}\right\}$$

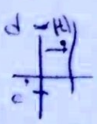
Cartesianas: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\dfrac{y}{x} = tg(\theta) \longrightarrow \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

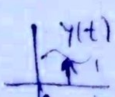
Cuando el radio no es cte:

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ y = f(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ \text{con } r = f(\theta), \ f \in \mathcal{C} \end{cases}$$

Longitud de Curvas Paramétricas: $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}$



$A_{sup.} = \int_c^d 2\pi \cdot x(t) \cdot L$



$= \int_a^b 2\pi \cdot y(t) \cdot L$

Largo en Polares: $\left[L = \int_a^b \sqrt{r^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta \right]$

• Área: $\left[A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f(\theta))^2\, d\theta . \right]$

Integrales Impropias

• Tipo I: Cuando el límite existe: $\left[\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx \right] \neq (-\infty, a]$

→ problemas con el intervalo

1) Calculo la integral definida
2) Resuelvo el límite.

General $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c \frac{1}{x^p}\,dx$ $\begin{cases} p > 1 \to \text{existe} \\ p \leq 1 \to \text{no existe} \end{cases}$

(con uno queda log nat.( ))

• $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx + \int_z^{\infty} f(x)\,dx$

↳ $\lim_{c \to -\infty} \int_c^z f(x)\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_z^b f(x)\,dx$

• tienen que existir ambas → si una falla → todo FALLA

Criterio de Comparación

Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, \infty)$

- Si $\int_a^{\infty} g(x)$ converge $\rightarrow f(x)$ ✓ pq es la + chica.

- Si $\int f(x)$ diverge $\rightarrow g(x)$ ✓ pq es + grande

Comparación al Límite

Si $\frac{f(x)}{g(x)} \approx K$, ambas divergen o convergen.

$$\left[\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K\right], K \in \mathbb{R} / \{0\}$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \longrightarrow$ la convergencia de $g(x)$ asegura la convergencia de $f(x)$.

- Tipo II: problemas con la función, en un intervalo definido. $\left[\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx\right]$

- Hay que hacer una integral por cada problema en la función.

Ej: $\int_1^6 \frac{1}{(x-2)}$ $\rightarrow \lim_{c\to 2^-}$, $\lim_{c\to 2^+}$

Ej: $\int_{0^+}^{b} \frac{1}{x^P} \begin{cases} P < 1 \rightarrow \text{convergente} \\ P \geq 1 \rightarrow \text{divergente} \end{cases}$

Criterio de Integral converge si la función $\rightarrow$ integrable, ≥ 0, $f' < 0$, $\lim = 0$

Las ctes salen
separan la suma y resta.

SERIES NUMÉRICAS

Criterio Base para descartar ~~con~~ divergencia:

- si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \to$ convergente $\to$ hay que seguir
- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to$ divergente [STOP]

1) Serie Aritmética

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \qquad \begin{cases} d = a_n - a_{n-1} \\ a_n = a_1 + d(n-1) \end{cases}$$

2) Serie Geométrica

$$\sum_{k=a}^{\infty} r^k = \frac{r^a}{1-r}$$, diverge cuando $|r| > 1$

3) Serie Armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ → DIVERGE SIEMPRE

4) Serie Alternante

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot a_k$$ → converge cuando $\begin{cases} 1)\ a_{n+1} \leq a_n \to \text{decrec.} \\ 2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$

Tipos de Convergencia

- Absoluta → si $\sum |a_k|$ conv., entonces $\sum a_k$ conv. abs.
- Condicional → si $\sum |a_k|$ no pero $\sum a_k$ sí.

• Ver criterios de convergencia en la hoja aparte

SERIE DE POTENCIAS: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

radio de convergencia R: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}$ → $\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}}$

- Intervalo de Convergencia: $|x-a| \leq R$ → todos los ptos del intervalo $(-R+a \leq x \leq R+a)$ convergen.
- Las series de potencias convergen si:
  a) $x=a \wedge r=0$
  b) $|x-a|<r \wedge r\in(0,\infty)$

  converge cuando tiene un intervalo de convergencia tipo (x_0-R, x_0+R), $[x_0-R, x_0+R]$, ... etc.

  ↓

  sacar el radio de convergencia y ver en donde está centrado

- Divergen
  - $x\neq a$ y $r=0$
  - $|x-a|>r$ y $r\in(0,\infty)$

SERIES IMPORTANTES

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\sum (-x)^n = \frac{1}{1+x}$
- $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$
- $\sin(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$
- $\arctan(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$
- $(1+x)^k = \sum \binom{k}{n} x^n$

Analizar convergencia:

a) remplazar $x = \ldots$
(cuando piden x específico).

Taylor $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$ $\rightarrow$ tienen radio de convergencia ∞.

derivadas

Maclaurin: $\sum^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot x^n$

(Taylor con $a=0$)

VECTORES

ortogonales $\rightarrow a \cdot b = 0$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) = \vec{a}$

norma $\longrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Ecuación de la Recta: $\vec{x} = (P_1, P_2) + \lambda(d_1, d_2)$ $\rightarrow$ vectorial

- Simétrica: $\lambda = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

- Paramétrica:
$$x = x_0 + a\lambda$$
$$y = y_0 + b\lambda$$
$$z = z_0 + c\cdot\lambda$$

$\vec{n} = \vec{d_1} \times \vec{d_2}$

Ecuación del Plano : $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

- escalar → $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

- lineal → $ax + by + cz + d = 0$, $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

PLANOS // → $n_1 \parallel n_2$ → múltiplo de ...

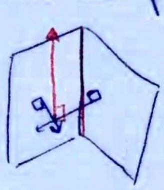
rectas oblicuas → no se intersectan porque están en planos ≠.
→ no son //.

- Distancia de un pto a un plano : $\boxed{D = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

→ Se encuentra 1 pto que cumpla 1 plano.
→ Se remplaza ese punto en el otro plano.
→ fórmula "D" con el 'n' del plano remplazado.

- Distancia de un pto a una recta :

Intersección de planos : $\vec{d_1} \times \vec{d_2} = \vec{n}$ → tiene la dirección de la recta intersección



- Distancia entre puntos : $d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

VARIAS VARIABLES

Límite de $f(x,y)$: aproximar por: (remplazar el y por...)

- RECTA: $y = mx$
- PARÁBOLA = $y = kx^2$
- Polares (comprobación perfecta) $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{array} \right\} \lim\limits_{\substack{r \to \infty \\ \theta \in [0, 2\pi]}}$

Cuando el límite $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x_0, y_0) = f(x,y)$, la función es continua en (x_0, y_0).

- Límites Iterados: $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$

Sugerencia:
1) Límites Iterados
2) Rectas y Parábolas
3) Coordenadas Polares
4) Definición

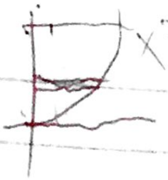
Derivada por definición:

$$\lim_{h,k \to 0,0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{df}{dx}(x_0,y_0) \cdot h - \frac{df}{dy}(x_0, y_0) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

PLANO TANGENTE: $z = z_0 + \frac{df}{dx}^{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \frac{df}{dy}^{(x_0,y_0)}(y - y_0)$

$z_0 = f(x_0, y_0)$

Gradiente: $\nabla f = \left(\frac{df}{dx}^{(x_0,y_0,\dots)}, \frac{df}{dy}^{(x_0,y_0,\dots)}, \dots \right)$



$$(x, y) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$$

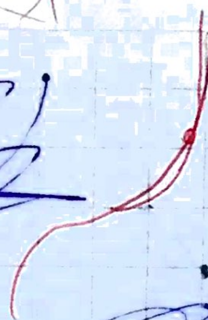
Ejercicios

$= \int \tilde{x}\, dm$ $\qquad \tilde{x} = x\, dm$

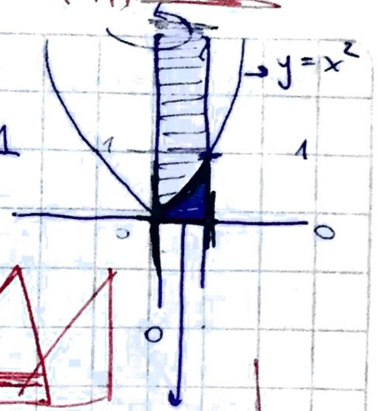
Julio 2014

$y = x^2$

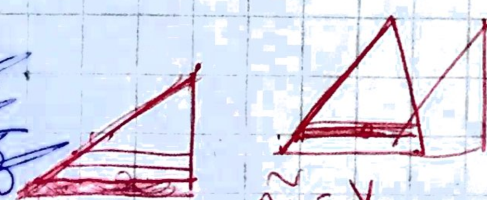
$\tilde{y} = \frac{f(x)}{2} \quad \delta = 1$

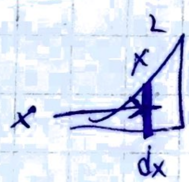


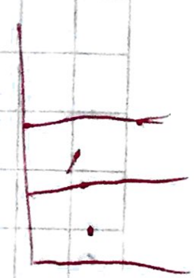
$M_y =$



$\tilde{y} = y$



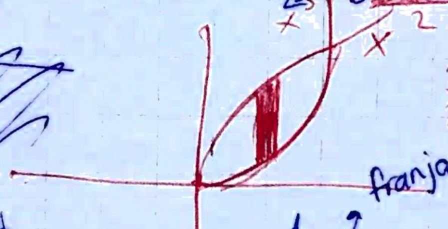




$\tilde{x} = x$

$\tilde{y} = \frac{x^3 + x^2}{2}$

franja



$$M_y = \int_0^1 \delta \cdot \tilde{x} \cdot dA = \int_0^1 x \cdot x^2 \cdot dx =$$ b)

- Con $a > 0$, $\alpha = ?$ para que la integral converge:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx \to \alpha \in (1, \infty)$$ "Criterio de la p"

d)

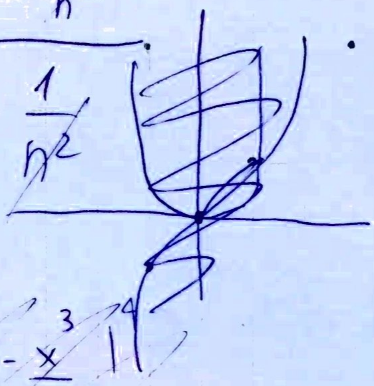
- $A = (3, 2, 0)$
  $B = (1, 1, 1)$ $\to (x-3) + (y-1) + (z-3) = 0$
  $C = (2, -1, 3)$ ecuación cartesiana del plano

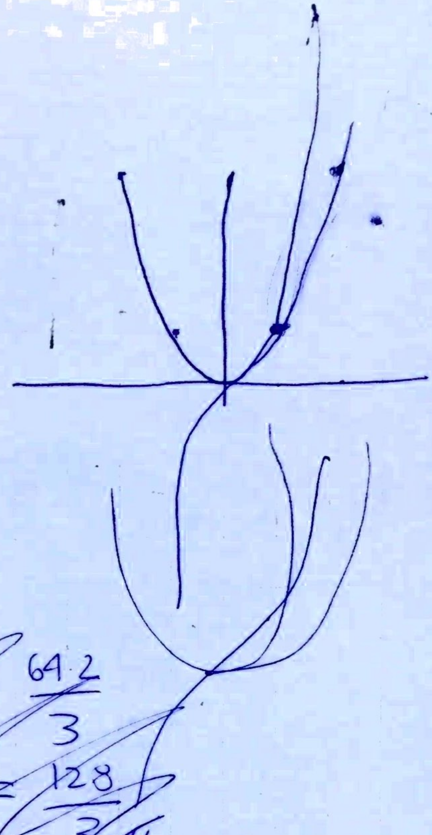
$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = (2, 1, -1) \\ \vec{AC} = (1, 3, -3)\end{array}\right\} \quad n = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (0, +5, 5) \to \text{a)}$$

Puntos
↓
Rectas
↓
$\vec{n}$
↓
se forma el plano

$$\lim \frac{\cos(\pi n)}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2}$$





Marzo 2014

$$\int_0^1 x^2 - x^3 + \int_1^4 x^3 - x^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$= \frac{3\cdot 4^3}{3} - \frac{4^3}{3} = \frac{4^3(2)}{3} = \frac{64\cdot 2}{3} = \frac{128}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} =$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\Big|_1^4$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \left(\frac{3\cdot 4^3}{3} - \frac{4^3}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2n^2+4n+3}$$

$$\frac{5n^2+3n}{5^{1/2}+n^{5/2}}$$

$p > 1 \to$ conv?

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{4^3\cdot 2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2n^2+4n+3} = \frac{5n^2}{2n^2+4n+3} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{128}{3} = \frac{130}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{260-3}{6}$$

$$\frac{5n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} = \frac{5n^4+3n}{\sqrt{5+n^5}} = \frac{5n^4}{n^{5/2}}$$

$$\frac{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}}{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

$\frac{x}{2} = -x+1$

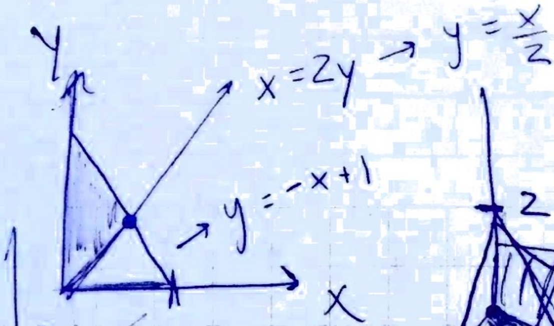
$x = -2x+2$

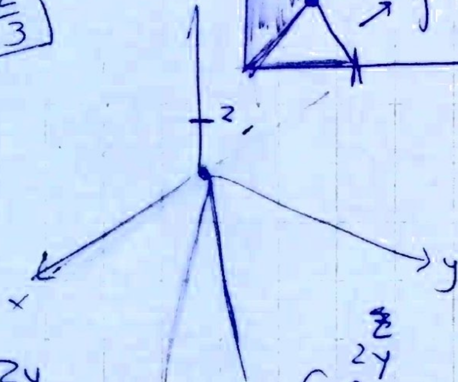
$3x = 2$

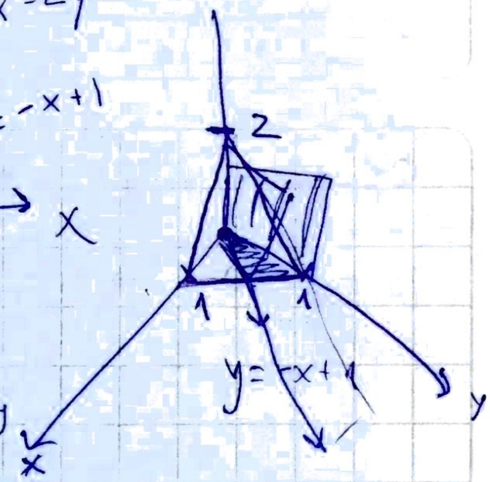
$\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$(0, 1, 2)$
$(1, -3, -2)$

$(1, -2, 0)$







cálculo 3

julio

- Volumen: $z = 2-2x-2y$

$x = 2y$

$x = 0$

$z = 0$

$\frac{x}{2} \leq y \leq -x+1$

$0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

$$\int \int_{\frac{x}{2}}^{-x+1} 2-2x-2y \, dy \, dx$$

$$2y - 2xy - y^2 \Big|_{\frac{x}{2}}^{-x+1}$$

$2(-x+1) - 2x(-x+1) - (-x+1)^2 - x + 2x \cdot \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$

$-2x+2 + 2x^2 - 2x - (x^2 - 2x + 1) - x + x^2 + \frac{x^2}{4}$

$-4x + 2 + x^2 + 2x - 1 - x + x^2 + \frac{x^2}{4}$

$$\int_0^{2/3} -3x + 1 + \frac{9x^2}{4} \, dx$$

$$-\frac{3x^2}{2} + x \ \frac{3x^3}{4} \Big|_0^{2/3} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{27}$$

$$-\frac{4}{6} + \frac{4}{6} = \frac{2}{9} \checkmark$$

$$\int \int_0^{2y} 2-2x-2y \, dx \, dy$$

$$\int 2x - x^2 - 2xy \Big|_0^{2y} dy$$

$$\int 4y - 4y^2 - 4y^2 \, dy$$

$$\int 4y - 8y^2 \, dy$$

$\nabla f = (2 + 2xy, \cos(y) + x^2)$

$= (2 + 0, 1 + 1) = (2, 2) \cdot (2, 2)$

$= 4 + 4 = 8$

$\sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$2, 2$

$1, 0$

$(1, 2)$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \ \frac{2}{\sqrt{5}}$

$z = 1 - 2x^2 + 3y \rightarrow$

$z = 0 \rightarrow y = \frac{2x^2}{3} - \frac{1}{3}$

CÁLCULO III

- Regla de la Cadena:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & z(x,y) \arrow[dl, "\frac{dz}{dx}"'] \arrow[dr, "\frac{dz}{dy}"] & & \\
 & x(s,t) \arrow[dl] \arrow[d] & & y(s,t) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\frac{dv}{ds} & \frac{dv}{dt} & & \frac{dy}{ds} & \frac{dy}{dt}
\end{tikzcd}$$

- **Derivadas Direccionales:**

con $\underline{v} = (a,b) \rightarrow$ dirección

$\downarrow$

en la dirección del vector unitario

$(\|v\|) \rightarrow$ comprobar $= \sqrt{a^2+b^2}$

$$D_v f(x,y) = f_x(x,y)\cdot \; f_y(x,y)\cdot b = \boxed{\nabla f \cdot \langle a,b\rangle}$$

$$D_v f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h\cdot a,\, y+h\cdot b) - f(x,y)}{h}$$

- **Derivadas Parciales:**

$\downarrow$

cuando sean COLINEALES, D_v va a ser máxima.

Para que f sea derivable $\longrightarrow$ $f_{xy} = f_{yx}$

(las deriv. parciales sean cont.) $\quad \dfrac{df}{dydx} = \dfrac{df}{dxdy}$

- Por definición:

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,\, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Plano Tangente: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad /: C$

$$z = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0} - \underset{\downarrow\ \frac{df}{dx}}{A}(x-x_0) - \underset{\downarrow\ \frac{df}{dy}}{B}(y-y_0)$$

Aprox. Lineal: evaluar ~~en~~ con el punto (a,b) en la ecuación del plano tangente.

Deriv. Implícitas: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\frac{F_x}{F_y}$

* Siempre el gradiente en el pto es $\perp$ al plano tg de la superficie de nivel.

Max / Mín $\rightarrow$ $\nabla f(a,b,\dots) = 0$

↳ todas las derivadas parciales tienen que ser cero.

- pto silla $\rightarrow$ deriv. parciales son cero pero no son máx/min.
- evaluar f en los extremos por si acaso.

Hessiana: $\left[A = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0, y_0) \quad B = \frac{d^2 f}{dxdy} \quad C = \frac{d^2 f}{dy^2} \right]$

(cruzadas son =s)

- $AC - B^2 > 0$ → $A > 0$: MIN REL. / $A < 0$: MAX REL
- $AC - B^2 < 0$ $\rightarrow$ pto silla
- $AC - B^2 = 0$ $\rightarrow$ NADA

LAGRANGE: $\left[\nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z) \right]$ → gradientes //

s.a. $g(x,y,z) = K$

1) (con $\nabla g \neq 0$)

Encontrar valores de x, y, z, λ tq:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(\ ) = K \end{cases}$$

2) Evaluar f en todos los ptos encontrados

- \+ grande → MÁX
- \+ chico → MÍN.

Con 2 restricciones: $\nabla f(\ ) = \lambda \nabla g(\ ) + \beta \nabla h(\ )$

CURVAS

Parametrización de Curvas: $r(t) = \langle \underbrace{f(t), g(t), h(t)}_{\text{funciones coordenadas}} \rangle$

$r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$

- $r'(t)$ → vector tangente.

Longitud de Curva: $L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}$

- Plano Osculador → se forma entre $r'(t)$ y $r''(t)$.

$B(t) = r' \times r''$ | $(\vec{B} \perp r' \perp r'')$

Arcoparametrizar: Se parametriza la curva en función de la longitud s desde el inicio.

$$\boxed{s = \int_a^t \| r'(u) \| \, du} = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} \, du$$

Ej: $r(t) = (r \cdot \cos(t), r \operatorname{sen}(t))$

$\vdots$ integral ...

$s = r \cdot t \rightarrow t = \frac{s}{r} \rightarrow \mu(s) = \left(r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

Vector Tg unitario: $T(t) = \dfrac{r'(t)}{|r'(t)|}$

Arcoparam.

Curvatura: $\boxed{K(t) = \dfrac{|T'(t)|}{|r'(t)|}} \rightarrow K(t) = \dfrac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} \Big\} \; K = \|\mu''(s)\|$

- A mayor radio, menor curvatura $\rightarrow \boxed{K = \frac{1}{r}}$
- Cuán rápido la curva se sale de ser recta.

- Curvas Planas $(y = f(x)) \rightarrow K(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}$

- Vector Normal Unitario: $N(t) = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|} \Big\}$ señala al lado cóncavo de C.

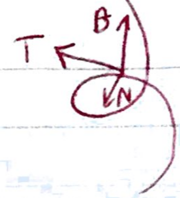
- Plano Normal $\rightarrow$ formado por N y B

  $\downarrow$ lo define T

  $\rightarrow$ contiene las rectas $\perp$ a $\vec{T}$.

Torsión: cuán rápido se aleja de ser plana. $\rightarrow \boxed{\tau(t) = \dfrac{|B'(t)|}{|r'(t)|}}$

con $B' = T \times N'$ $\Big\}$ con $K \neq 0$.



Frenet - Serret:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{T} = K \cdot N \rightarrow \dfrac{dT}{ds} = K \cdot N \\ \dot{N} = \dfrac{dN}{ds} = -KT + \tau B \\ \dot{B} = \dfrac{dB}{ds} = -\tau N \end{cases}$$

Jacobiano:

Ej:

$$\begin{tikzcd} (a,b) \arrow[r, "F"] & (x,y,z) \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

$$J_G = \begin{bmatrix} \frac{dx}{da} & \frac{dx}{db} \\ \frac{dy}{da} & \frac{dy}{db} \\ \frac{dz}{da} & \frac{dz}{db} \end{bmatrix}$$ → Matriz Jacobiana.

Jacob → det(m. Jac)

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{da}{dx} & \frac{d}{d} & \frac{da}{dz} \\ \frac{db}{dx} & \frac{db}{dy} & \frac{db}{dz} \end{bmatrix}$$

Teorema de la Función Implícita:

$F(x,y,z,u,v) = 0 \rightarrow u = u(x,y,z)$

$G(x,y,z,u,v) = 0 \rightarrow v = v(x,y,z)$

- Si quiero $\frac{d(\text{algo})}{dx}$, → derivo $F \wedge G$ en $\frac{d}{dx}$.
- Despejo $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dG}{dx}$
- Coef que acompañan a las nuevas variables (u y v) son los mismos de la matriz Jacobiana.

$$\frac{dF}{dx} = \boxed{\frac{dF}{du}} \cdot \frac{du}{dx} + \boxed{\frac{dF}{dv}} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dG}{dx} = \boxed{\frac{dG}{du}} \cdot \frac{du}{dx} + \boxed{\frac{dG}{dv}} \cdot \frac{dv}{dx}$$

- Se quiere $\frac{du}{dx}$ → se remplaza 1era columna del Jacob con $\frac{dF}{dx}$ y $\frac{dG}{dx}$.

Teo. Función Inversa : $\boxed{J F^{-1}(x,y) = (J F(u,v))^{-1}}$

con $(x,y) = (f(u,v), g(u,v))$

$\leftrightarrow \quad J_{F^{-1}}(y) = (J F(x))^{-1}$

• Jacobiano de funciones compuestas: $J_{(g \circ f)} = J_g \cdot J_f$

ya que: • $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

• Cartesianas a cilíndricas:

$$\frac{d(x,y,z)}{d(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dy}{dz} \\ \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\theta} & \cancel{\frac{dz}{dz}}\,1 \end{vmatrix} \rightarrow J = \rho$$

↳ a esféricas: $\frac{d(x,y,z)}{d(\rho,\theta,\phi)} = +\rho^2 \operatorname{sen}\phi$

Integrales de Línea $\rightarrow \left[\int_a^b (\vec{r}(t)) \cdot \overbrace{\|\vec{r}\,'(t)\| \, dt}^{ds} \right]$

- De un campo vectorial: $\left[W = \int_C F \cdot \vec{r}\,'(t) \, dt \right]$

$\vec{F}(\bar{x}, y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

- Int. de línea $\rightarrow$ no dependen de la trayectoria, sólo de los ptos extremos.
- En circuitos cerrados son cero. $\longrightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
- Campo escalar $f \longrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} f$

$\hookrightarrow$ Campo Conservativo cumple esto.

$\left. \begin{array}{l} P \rightarrow dx \\ Q \rightarrow dy \end{array} \right\} \int dx = ax + bx^2 + \ldots \; / \frac{d}{dy}$ ahora

$$\varphi'(y) = \ldots = Q$$

$$\int \varphi'(y) = \varphi(y) = \ldots$$

Y ahora se encuentra f que cumple $F = \nabla f$.

Teorema de Green: $\left[\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(Q \cdot \frac{d}{dx} - P \cdot \frac{d}{dy} \right) dA \right]$

- Se puede hacer que una integral de línea cerrada sea una int. doble.

Rotacional: → $\left[\text{rot } F = \nabla \times F\right]$ $= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

↓
vectorial

- El rotacional de un campo vectorial gradiente es cero. → $\text{rot}(\nabla f) = 0$

En un campo conservativo → $F = \nabla f$ → $\text{rot}(F_{consv.}) = 0$.

Divergencia: $\text{div}(F) = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}$

↓
escalar

$\boxed{\text{div } F = \nabla \cdot F}$

$\left[\text{div}(\text{rot} F) = 0\right]$ → $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

Entonces: $\oint_C F\,dr = \iint_D (\text{rot} F) \cdot k\,dA$

SUPERFICIES PARAMÉTRICAS

PLANOS TANGENTES (contiene a r_u y r_v)

$r_v = \left(\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv}\right)$

$r_u = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}\right)$

- $r_u \times r_v$ → es $\perp$ al plano tg.
- Encuentra el plano tg:
  1) calcular r_u y r_v
  2) $r_u \times r_v$
  3) valores de u y v igualando $(x, y, z) = (\text{pto})$
  4) evaluar vector normal
  5) Armar ecuación del plano tg.

$r_a \times r_b = - r_b \times r_a$

Área de una Superficie

$$\boxed{A(S) = \iint_D |r_u \times r_v|\, dA} \rightarrow \text{paramétrico}$$

$$\boxed{A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dA} \rightarrow \text{función}$$

Integral de Superficie

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(r(u,v)) \cdot |r_u \times r_v|\, dA}$$

- Normal de una Superficie : $\boxed{\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}}$

Integral de Flujo : $\boxed{\iint_S F \cdot dS = \iint_D F \cdot (r_u \times r_v)\, dA}$

Con función : $\iint_S F \cdot dS = \iint_D \left(-P \cdot \frac{dg}{dx} - Q \cdot \frac{dg}{dy} + R\right) dA$

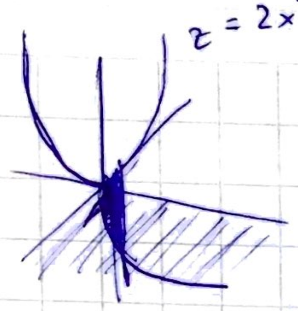
STOKES : $\boxed{\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot}\, F \cdot dS}$

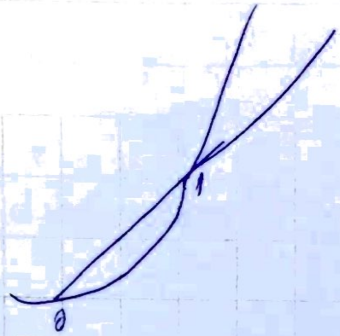
Teo. Divergencia : $\boxed{\iint_S F \cdot dS = \iiint_E (\text{div}\, F)\, dV}$

ÁLGEBRA LINEAL

Ejercicios

$z = 2x^2 + 3y^2$





$\int A = $

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_0^{2x^2+3y^2} dz\,dy\,dx = \int\int 2x^2+3y^2 \, dy\, dx$$

$$\int 2x^2y + y^3 \Big|_{x^2}^{x} dx = \int 2x^4 + x^6$$

$$\frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\Big|_0^1$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{14+5}{35}$$

$$2x^3 + x^3 - 2x^4 - x^6$$

$$3x^3 - 2x^4 - x^6$$

$$\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} - \frac{1}{7}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\operatorname{sen}\theta \cos\theta)}{r^2(r^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} = \infty$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{(x^4+y^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$y = x^2 \rightarrow \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{NO EXISTE}$$

$$\cancel{y = x \rightarrow \frac{y^3}{y^2(y^2+1)} = \frac{y}{(y^2+1)} = \frac{1}{y}}$$

$$\nabla f = \left(\frac{2xy(x^4+y^2) - x^2y(4x^3)}{(x^4+y^2)^2} , \frac{x^2(x^4+y^2) - x^2y(2y)}{(\quad)^2} \right)$$

$$= \left(\quad , \quad \right)$$

ÁLGEBRA LINEAL

Producto punto esté definido → los vectores tienen que tener la misma dimensión.

$\vec{a} \perp \vec{b} \longrightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

- vector unitario → $\|\vec{u}\| = 1$

- Ángulo entre vectores → $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}}$

- Conjunto generado por S : Gen $\{S\}$ = compuesto por todas las C.L. posibles de S.

L. Independientes ⟶ con $\alpha \wedge \beta = 0$ ⟶ $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$
LD → $\alpha, \beta \neq 0$ → $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$.

- Hiperplano: conjunto generado por $(n-1)$ vectores.

MATRICES

- $m \times n$ → "m" filas, "n" columnas } (filas) × (columnas)

$$A_{a \times b} \cdot B_{m \times n} = C_{a \times n}$$

Sistema de ecuaciones $A\vec{x} = b$ { filas → ecuaciones; columnas → incógnitas

↳ sistema homogéneo: $\boxed{A\vec{x} = 0}$

Matriz Escalonada → filas nulas al final. (FE)

Pivote: 1er elemento NO NULO de c/ fila de izq. a derecha.

M. E. Reducida → las columnas con pivotes son vectores canónicos. (ceros o unos)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PIVOTEAR
- intercambiar filas ($F_i \leftrightarrow F_j$)
- Multiplicar una fila por un escalar (αF_i)
- Sumar a una fila un múltiplo de otra ($F_i \to F_i + \alpha F_j$)

- Sistema sin solución (inconsistente) $\longrightarrow$ $[\underbrace{0\ 0\ 0 \ldots 0}_{\text{fila de ceros}} \mid c] \rightarrow$ RECTAS //
  (OJO $\to [0 \ldots 0 \mid 0]$ sí es consistente $\to 0=0$ ✓)
- Solución única $\rightarrow$ 1 pivote por columna $\longrightarrow$ se cruzan
- ∞ soluciones $\rightarrow$ + columnas que pivotes $\longrightarrow$ RECTAS COINCIDENTES

RANGO: indica cuántas columnas son LI.
↳ es el número de pivotes en su forma escalonada.

NOTA: El rango de la matriz es siempre menor o igual que la cantidad de filas.

Transf. Lineal (SIMPLE): $\left[T_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \right]$ → se multiplica solamente.

Multiplicación $\rightarrow$ $\boxed{AB \neq BA}$

Matriz Traspuesta
- $(A^t)^t = A$
- $\alpha \cdot A^t = (\alpha \cdot A)^t$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t \cdot A^t$ → para que coincidan filas con columnas

ΔSUP → $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ → ΔINF.

Matriz Diagonal → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

MATRIZ LI $\begin{cases} Ker(A) = \{\vec{0}\} \\ Im(A) = \mathbb{R}^n \end{cases}$ → c/ col tiene 1 pivote → genera todo el espacio → es sobre.

Ker (A) $= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : A\vec{x} = \vec{0}\}$ → todos los x que hacen que $A\vec{x} = 0$.

- $Ker(A) = \{\vec{0}\}$ → MATRIZ LI.

Im (A) $= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^m \text{ con } A\vec{x} = y\}$ → todos los $\vec{y}$ para los que existe un $\vec{x}$ que al multiplicarlo por A, resulta $\vec{y}$.

Matriz Inversa: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ → pivotear hasta que quede la matriz identidad a mi izquierda.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A)}{det(A)}}$$

PROPIEDADES:

1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$ con A inv.

3) Si A inv $\wedge$ A inv → $(A)^{-1} = (A^{-1})$

4) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

5) $A \cdot A^{-1} = I$

- Matrices Elementales → explicación del pivoteo. $E_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ } cambio de fila 1 con 3.

$(E_I^{-1} = E_I)$
- Tipo I → cambio de filas
- " II → multiplicar por un escalar
- " III → Operaciones entre filas.

- Si A inv → su F.E.R es la I.

$A = \underbrace{L}_{\Delta\, inf} \cdot \overbrace{U}^{\Delta\, sup.}$
- U se obtiene solo con operaciones tipo III
- L tiene solo 1s en su diagonal.

$(L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1})$

$$A = LU \rightarrow \overset{A}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{U}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}$$

$P \cdot A = LU$

- → cuando no se puede factorizar $A = LU$ con Operaciones tipo III.
- → hay que cambiar el orden de las ecuaciones.
- → P es una matriz identidad con el cambio de filas que se necesita.

- $A = A^t$ cuando A es simétrica. → determina una función cuadrática.

- En la <u>Forma Cuadrática</u> → la diagonal no cambia.
  $(F(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz)$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \left[\begin{matrix} & & \\ & & \\ & & \end{matrix}\right. & & \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right] & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}$$

CHOLESKY

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}$$

A_1, A_2

→ Si las A_K son LI (invertibles) → se puede hacer $A = LU$

Con $A = A^T$, existe D tq: $\boxed{A = LDL^T}$ $\qquad U = DL^T$

D = matriz diagonal de la U

Matrices →
- positiva definida
- semi positiva definida
- negativa definida
- semi neg. definida

det = (−, +, −, +, ...)

DETERMINANTES

- $\det(I) = 1$
- $\det(A) = -\det(B)$ → permutación de filas (E_I) $(A \cdot E_I = B)$
- $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$ → multiplicar una fila por un escalar (E_{II})
- $\det(A) = \det(B)$ → operaciones tipo III entre filas

$$\left[\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)\right]$$

- Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ → $\det(A) = ad - bc$

- Si A tiene → 1 fila nula / → 2 filas iguales } $\det(A) = 0$ } Matriz LD

A es invertible ⟷ $\boxed{\det(A) \neq 0}$

- Si A es triangular (inf o sup.) o diagonal → $\left[\det(A) = \prod d_i\right]$

- Sí se puede conmutar determinantes pero NO matrices:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A)$$

PERO $AB \neq BA$

$\det(A^T) = \det(A)$
y A es invertible } $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$

- $\det(\alpha A) = \alpha^{n} \cdot \det(A)$ (n → nº de filas)

- Determinante no es lineal entre matrices, pero sí con las filas y columnas de las matrices. (Separar 1 columna o filas en 2 col/fil distintas que se suman).

COFACTORES → $\left[C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \right]$

Adjunta: $\left[Adj(A) = (C_{ij})^t \right]$ → matriz de cofactores

(compuesta por el determinante que acompaña a cada cofactor)

$\left[A \cdot Adj(A) = |A| \right]$

se puede

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)}$$

KRAMER

$$A = \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Para encontrar x_i:

→ Remplazar b en la columna i

→ Sacar el determinante de la nueva matriz

→ Dividir por el determinante de A.

$$\rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ b & 5 & 6 \\ c & 8 & 9 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$|Adj(A)| = |A|^{n-1}$$

$$|A^T| = |A|$$

- Espacios Vectoriales (≈ al principio)

→ V es un subespacio de W si es ≠ al vacío y hereda las operaciones del espacio W.

U_1, U_2 subespacios de V.

suma directa $\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

- Todo conjunto generado es un subespacio.

Subespacio (para comprobar)
- NO vacío
- cerrado bajo la suma
- cerrado bajo la multiplicación por escalar.

- Calcular el generado es lo mismo que calcular la Base.

dimensión = nº de elementos de cualquier base del espacio vectorial.
Si $\dim(U) = \dim(V) \rightarrow U = V$

- Columnas de A : $\dim(C(A))$ = rango de A
- Filas de A : $\dim(F(A))$ = rango de A = rango de A^T

Base de C(A): columnas $\boxed{\text{originales}}$ que quedan <u>con pivotes</u> después de pivotear.
Base de F(A): filas $\boxed{\text{finales}}$ de A que NO se anulan al final del pivoteo (con pivotes.)

- Un vector $\vec{v}$ se escribe de una <u>única</u> forma como <u>C.L.</u> de la base.

- Importa el orden de los elementos en las bases $\rightarrow B_1 \neq B_2$ aunque tengan los mismos elem.

Matriz CAMBIO DE BASE (P)
- P es LI y cuadrada.
- P es invertible.
- de B_1 a B_2, sus columnas son los vectores coordenados de los elementos de B_1 escritos en la base B_2.

$[\vec{v}]_{B_2} = P[\vec{v}]_{B_1} \rightarrow$ (es el mismo vector, solo cambian las coordenadas).

- Es la matriz de los coef. que se forman al escribir la base 1 como CL de la base 2.

Transformación Lineal: cambia de un espacio a otro.

Con $T: V \to W$:

- $Ker(T) \to \boxed{T(v) = 0_V}$ → es cualquier $v \in V$ (espacio) que hace que la transformación se haga cero.

- $Im(T) \to \boxed{T(v) = W}$ → la transformación del vector $v \in V$, me genera todo W.

$$\underbrace{\dim(Ker\, T)}_{\substack{\downarrow \\ \text{nº columnas sin pivote} \\ \downarrow \\ LD}} + \underbrace{\dim(Im\, T)}_{\substack{\downarrow \\ \text{nº de columnas con pivote} \\ \downarrow \\ LI}} = \underbrace{\dim V}_{\substack{\downarrow \\ \text{cantidad de columnas}}}$$

, con V espacio vectorial

monomorfismo

- T inyectiva $\leftrightarrow Ker\, T = \{0\}$
- T sobre $\leftrightarrow Im\, T = W$

} isomorfismo

epimorfismo

Vector Propio: $\vec{v}\ (\neq \vec{0})$, es vector propio de $A\ (n \times n)$ si se cumple que $\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v}}$

Valor Propio: λ es valor propio ssi $\boxed{|A - \lambda I| = 0}$

- λ es una raíz del polinomio característico.

$p_A(x) = |xI - A|$

- m.a (algebraica) de λ es cuántas veces se repite la raíz.

E_λ = espacio propio asociado a λ → $E_\lambda = Ker(A - \lambda I)$

- m.g (geométrica) dimensión de E_λ.

→ $mg \leq ma$

Pasos:

1) Tomo A matriz
2) $P_A \to \det(xI - A)$
3) Busco ceros $\to$ valores propios (raíz)
4) Vectores Propios $\to Ker(A - \lambda I) = 0$

- Si $\lambda = 0 \leftrightarrow$ A no es invertible
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \longrightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$
- Δsup, Δinf, diagonal $\to$ los valores propios son los elementos de la diagonal.

TRAZA DE A: suma de λ_i ($\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ = traza)

- $|A| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ (producto) *

- A inv y λ v.p. de A $\longrightarrow \lambda^{-1}$ v.p. de A^{-1}
- λ v.p de A $\longrightarrow \lambda$ v.p. de A^T

- Matrices Similares $\to$ $A = LBL^{-1}$ v $B = L^{-1}AL$ $\to$ tienen los mismos valores propios

- $A^k v = \lambda^k v$

- A diagonalizable $\leftrightarrow$ tiene n vectores propios
- A tiene $\lambda_n \neq \longrightarrow$ A es diagonalizable.

ORTOGONALIDAD

- Función $\cdot$ $\longrightarrow$ producto interno que lleva a los $\mathbb{R}$.

ortogonal: $u \cdot v = 0$ $(\perp)$

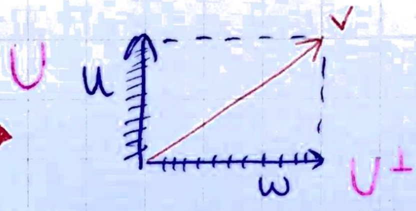
ortonormal $u \cdot v = 0$ y $u \cdot u = 1$ v $v \cdot v = 1$

- Todo conjunto ortogonal es LI, $\therefore$ es un base de su Gen{ }.

$U^{\perp}$: ortogonal a U

Matrices $\to$ A^TA positiva def (LI) y diagonal $\to$ ortogonal; $A^TA = I \to$ ortonormal

- $U^{\perp} = Ker(A^t)$
- $U = Im(A)$
- Proyección Ortogonal →
- Ecuaciones Normales



$u \in U$
$w \in U^{\perp}$

P: proyección en U
Q: proyección en $U^{\perp}$

$$\begin{cases} P(v) = u \\ Q(v) = w \end{cases}$$

- $P+Q = I$
- $Ker(P) = U^{\perp}$, $Im(P) = U$
- $Ker(Q) = U$, $Im(Q) = U^{\perp}$

Gram Schmidt: Dado $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ LI , y una base ortogonal de $\langle S \rangle$ es $\{u_1, \dots, u_m\}$ donde:

- $u_1 = v_1$
- $u_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) \cdot u_1$
- $u_3 = v_3 - \left(\frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 - \left(\frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}\right) \cdot u_2$

$\vdots$

Descomposición QR: Necesito Q tq $Im(Q) = Im(A)$ y $\overbrace{Q^T Q = I}^{\text{ortonormal}}$

Entonces, con $\boxed{A = QR}$ y $\boxed{A^T A = R^T R}$, descompongo en Cholesky:

$$A^T A = LDL^T = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = L\sqrt{D}(L\sqrt{D})^T = R^T R \Rightarrow \begin{cases} R = (L\sqrt{D})^T \\ Q = AR^{-1} \end{cases}$$

Ejercicios

Julio 2014

- $\left.\begin{array}{l} -x+3y-z=4 \\ x+4y=5 \\ 2x-6y+2z=3 \end{array}\right\} \rightarrow x=5-4y$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

NO $\exists$ solución

$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right.$ $\quad S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 3x+az=1 \end{array}\right.$

$S_1 \perp S_2$ con $a=?$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & a \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1+2a \\ 4 & 1 & 1+a \\ -3 & 0 & -a \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1+a \\ -3 & -a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 7 & 1+2a \\ -3 & -a \end{vmatrix}$$

$= \cancel{4a \; 3 \; 3a + -7a + 3 + 6a}$

$\cancel{3 - a \; 7a + 3 + 6a}$

$= \cancel{6a - 6a}$

$=$

$= 4a - \cancel{3} - 3a + -7a + \cancel{3} + 6a$

$= a - 7a + 6a = 0$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & x+4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & x-2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & x+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & x+4 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & x-2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & x+4 & -9 & 12 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 0 & 0 & x-2 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & x+4 & -9 & 12 \end{array}$$

Matriz C. de Base:

$$B_1 = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

$$L = \left[[v_1]_2 \ [v_2]_2 \ [v_3]_2 \right]$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\alpha = -1$ $\qquad -\beta + \gamma = 1$ $\qquad \boxed{\beta = -3}$

$\beta =$ $\qquad -1 - \gamma = 1$ ✓

1: b) $\gamma =$ $\qquad \boxed{-2 = \gamma}$

2) $A, B_{m \times n}$ $\qquad D = (\underbrace{B^T (AC)}_{n \times k})^T = k \times n$

$C \in n \times k$

$AC = m \times k$ $\qquad (AC)^T \cdot B$

$B^T = n \times m \cdot m \times k = C^T \cdot A^T \cdot B \rightarrow$ c)

3) $\cancel{8}$ $|B| = 2^3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ g & i & h \\ d & f & e \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$

$= 8 \cdot \left[a \cdot \begin{vmatrix} f & e \\ i & h \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} c & b \\ i & h \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} \right]$

$a \begin{vmatrix} i & h \\ f & e \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = 25$ $\qquad 8 \left[a(hf - ei) - d(ch - bi) + g(ce - bf) \right]$

$-$ $\qquad -1$

$a(\cancel{})(\cancel{f}\ he) - d(bi - ch) + g(bf - ec)$

$ei - fh$

a) 200

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} (x-5) & 0 & 4 \\ 0 & x-3 & 0 \\ -2 & 0 & x+1 \end{bmatrix}\right) = (x-3)\begin{vmatrix} x-5 & 4 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-3)\cdot\left[(x-5)(x+1)+8\right]$$

$$\left[x^2-4x-5+8\right]$$

$$(x^2-4x+3)$$

$$(x-3)(x-3)(x-1)$$

$$(x-3)^2(x-1)$$

$$A-\lambda I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x-z=0 \\ y=0 \\ x=z \end{array}$$

$1\ 0\ -1$

$\lambda_1 = 3 \quad m.a = 2$

$\lambda_2 = 1 \quad 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

$$A-3I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$x = 2z$

$$\begin{pmatrix} 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$$

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$ ~~b~~ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ECONOMÍA

escasez = $\frac{\text{deseos}}{\text{medios}}$ } en base a determinados fines.

3 Preguntas Básicas { QUÉ / CÓMO / PARA QUIÉN → PRODUCIR

marxismo
comunismo
Socialismo

Keynesianismo

Capitalismo
Escuela clásica y Chicago

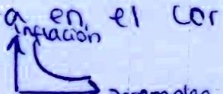
ECP
(econ. centralm. planif.)
↓
E° toma la mayoría de las decisiones.

Economías Mixtas

Economías Liberales
↓
"dejar hacer"

10 PRINCIPIOS BÁSICOS

1° Nada es gratis
2° Costo de Oportunidad: el costo de algo es lo que sacrificamos para tenerlo
3° La gente racional piensa al margen. (pensar de ahora en adelante)
4° La gente responde a incentivos.
5° El intercambio puede hacer que todos estén mejor.
6° Los mercados "usualmente" son un buen camino para organizar la act. económ. → familias deciden.
7° Los gobiernos (algunas veces) pueden mejorar los resultados económicos. → intervienen cuando el mercado falla.
8° El estándar de vida depende de la producción del país.
9° Los $ suben cuando el gobierno imprime mucho dinero. (Inflación)
10° La sociedad enfrenta en el corto plazo decisiones entre inflación y desempleo.
↳ Curva de Phillips



Economías de Escala → el costo promedio de producción disminuye al aumentar la cantidad de producción (c/unidad).

factores de producción : lo que necesita la empresas para producir.

FPP: frontera de posibilidades de producción
- combinaciones máximas posibles
  → uno puede aumentar su FPP.
- Hay eficiencia cuando se está en la línea de FPP.
- pendiente: razón de cambio
  ↘ refleja el costo de oportunidad

Ventaja Absoluta: mayor productividad en el mismo tiempo dado.
" Comparativa: el que tenga menor costo de oportunidad.
- El precio del intercambio debe estar entre los costos de oportunidad.

Demanda: disposición y capacidad para pagar. → es un valor marginal.

Ej: La 5ta unidad vale 1000 en el mercado.

Oferta → costo marginal: determinado por el costo de c/ unidad.

BIENES
- → Normal (↑ Ingreso, ↑ Q)
- → Inferior (↑ Ingr, ↓ Q)
- → Giffen (↑ $, ↑ Q) → PAN
- → Complementarios
  $\uparrow \$_A, \downarrow Q_B$
  (zapato izq y derecho)
- → Sustitutos
  $\uparrow \$_A, \uparrow Q_B$
  (mantequilla y margarina)

Elasticidad: se mueve el $ y ver cuánto cambia Q.

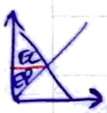
$$\varepsilon = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

- $\varepsilon \sim -\infty$ → perf. elástica → cambio poco el $ y Q varía muchísimo
- $\varepsilon < -1$ → elástica
- $\varepsilon = -1$ → unitaria
- $-1 < \varepsilon < 0$ → inelástica
- $\varepsilon \sim 0$ → Perf. inelástica → cambio poco el $ y casi no cambia el Q

Mercado del trabajo → Oferta: trabajadores ofrecen sus servicios
→ Demanda: empresas contratan.

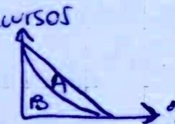
- Sueldo Mínimo: genera desempleo cuando está sobre P_{eq}. $(Q_{of} > Q_D)$
  - $P_{MAX} < P_{eq}$: hay escasez.

IPC: índice que mide los costos de vida de los consumidores ("canasta")
- se comparan canastas entre periodos de tiempo.



- Excedente del Consumidor: son todos los que están dispuestos a pagar + del P_{eq}.
- " " Productor: dispuestos a vender a un $ menor que el de P_{eq}.

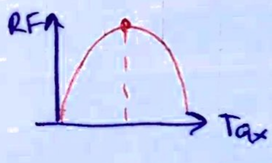
Coef. Gini: mide el nivel de desigualdad → $\frac{A}{A+B}$
+ grande → mayor desigualdad.



- El que tiene una curva + inelástica pagará + del impuesto.

- inversa de demanda → despejar el P.

- Laffer:



Externalidad: impacto no compensado de la acción de una persona sobre el bien de otra.

Teorema de Coase: privados pueden resolver las cosas solos sin que el E° intervenga.

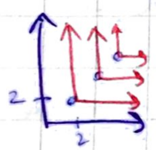
Teoría del Consumidor

- Espacio de Bienos (factible) para elegir
- Consumidores son económic. racionales.
- orden de preferencias

Utilidad
- es acumulada
- es creciente (a tasa decreciente)

• Pendiente de la Curva de Indif → no es cte, depende de la preferencia del consumidor.

TMS: tasa marginal de sustitución → $\boxed{TMS = \frac{U_x}{U_y}}$



→ complementos perfectos
$\text{Min}\{ax, by\}$

→ sustitutos Perfectos
$U(x,y) \to ax+by$

Restricción Presupuestaria: se asume que se gasta todo. → $\boxed{P_A \cdot x + P_Z \cdot y = m}$

Problema del Consumidor:

1) Tangencia: $TMS = \frac{P_1}{P_2}$ → (positivo)

2) Pertenencia: $P_1 x + P_2 y = m$

EFECTO TOTAL DEL CAMBIO DE \$
(A → C)
↓

- **E. Sustitución** (A → B): cambia la pendiente pero se mantiene la misma curva de indiferencia
  ↳ cuánto dejé de comprar de x_2 para comprar x_1 porque 1 es + barato y ambos me dan la misma utilidad.
- **E. Ingreso** (B → C): aumenta mi poder adquisitivo, (cuánto más puedo gastar porque ahora es más barato).
  ↳ desplazamiento de la recta.

Beneficio Social = Excedente Total

Normal : $A < B < C$

INFERIOR : $\overset{A}{C} < B$

↳ GIFFEN: $C < A < B$

Teoría del Productor $\left(F(\underset{\text{horas de trabajo}}{L}, \underset{\text{capital}}{K}) \right)$

son crecientes

- Isocuantas : cuando tiene la misma producción

TST: tasa de sustitución técnica → $\boxed{TST = \frac{F_L}{F_K}}$

F_L → productiv. marginal del trabajo

F_K → productiv. marginal del capital

↳ razón entre productividades de trabajo y capital.

w : costo de 1 unidad de trabajo

r : costo del capital → costo de oportunidad de invertir en mi proyecto y no en otro.

Problema del Productor → minimizar los costos sujeto a una cantidad.

$F(L,K)$ = producción

Min $\underbrace{b + wL + rK}_{\text{costos}(L,K)}$

1) Pertenencia : $\boxed{F(L,K) = Q}$

2) Tangencia : $\boxed{TST = \frac{F_L}{F_K} = \frac{w}{r}}$

w → precio trabajo

r → precio capital

La pendiente de la isocuanta tiene que ser = a la pendiente de costos.

- La empresa demanda L^* y K^*

COSTOS

COSTO FIJO: (CF) no depende de la cantidad producida.
Costo Variable: (CV) sí depende.

$\boxed{CT = CF + CV}$ → Costo Total

Costos Medios: se divide por la cantidad
→ CMedio Fijo: $\frac{CF}{Q}$
→ C medio V = $\frac{CV}{Q}$
→ Costo Medio Total = $\frac{CT(Q)}{Q}$

Costo Marginal (CMg): $\frac{d}{dQ}(CT(Q))$ → costo de fabricar 1 unidad

Se busca Q para que $\boxed{P = CMg(Q)}$ → si $P > CMg$, le pagan menos de lo que puede producir.

π = Ingreso Total − Costo Total

Utilidad (π): $\boxed{\pi = PQ - CT(Q)}$ → cuantas unidades vende por cuánto le cuesta en promedio producir.

$\pi > 0 \rightarrow CMT < P$
$\pi < 0 \rightarrow CMT > P.$

→ $\pi = -CF + Q(P - CMV)$
$= Q(P - CMT)$

En el largo plazo → empresa cierra con utilidad negativa.
" " corto plazo → Cierra con Q=0 y paga −CF. ($P < CMV$)
→ NO CIERRA si $P > CMV$.

Competencia Perfecta → las empresas en mercados competitivos tienen $\boxed{\pi = 0}$.
→ Entran y salen empresas ctemente.

Comp. Imperfecta → Monopolios → produce menos y cobra más que en competencia perfecta.

MONOPOLIO → tienen poder de mercado
→ No es precio aceptante
→ No es tomador de $

• Antes era P, ahora es P(Q)

$P + Q \cdot \frac{dP}{dQ}$

• El monopolio se produce cuando: $\boxed{IMg(Q^*) = CMg(Q^*)}$

lo que me entra por vender mi última unidad es lo mismo que me costó producir esta última unidad.

• E.C. disminuye
• E.P. es un rectángulo.

1er mejor: El Monopolio pierde plata → lo mejor para la sociedad (racionalmente infactible)
CMT = P

2do mejor: Monopolio tiene $\pi = 0$. → no gana ni pierde → en las licitaciones se llega a esto.

Oligopolios: Duopolio: 2 empresas tienen el poder
* Monopsomios → sólo hay 1 comprador/consumidor.

VAN: valor actual neto
→ trae los flujos de caja al presente aplicándole una tasa de descuento. para ajustarlo a tiempo real.
→ mide la rentabilidad de un proyecto.
→ ver qué inversión es mejor que otra en términos absolutos

VAN > 0 : Beneficios > Costos
VAN = 0 : Beneficios = costos → es indiferente la realización del proyecto.
VAN < 0 : Beneficios < costos → hay pérdidas por lo que se rechaza el proyecto.

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+K)^t}$$

- F_t: flujos de dinero en c/ periodo t
- I_0: inversión inicial
- n: nº periodos de tiempo
- K: tipo de descuento o interés exigido a la inversión

tasa de descuento = es el coste de capital que se aplica para determinar el valor actual de un pago futuro.

Tasa Interna de Retorno (TIR): el valor de la tasa de descuento que hace que el VAN sea cero.

TIR > K → ACEPTA el proyecto
TIR = K → VAN = 0 → se lleva a cabo el proyecto si se mejora la posición compet de la empresa.
TIR < K → RECHAZA porque no se alcanza la rentabilidad mínima

EDO: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Modelación

1) Teoría de Poblaciones

$x(t)$ tamaño de una población
$x'(t)$ velocidad de crecim./ decrecim.

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \text{tasa de cambio} = \left(\frac{\text{velocidad}}{\text{cantidad}}\right)$$

$$\frac{x'}{x} = \underset{\text{nacimientos}}{\overset{\text{positivo}}{\alpha}} - \underbrace{\beta x}_{\text{muertes}} \longrightarrow \boxed{x' = \alpha x - \beta x^2}$$

2) Mecánica de Newton

$$F = m \cdot a \longrightarrow x''(t) = \frac{F}{m}$$

3) Ley de Hooke: $x'' + Kx = 0 \rightarrow x(t) = C_1 \cdot \cos(\sqrt{K}t) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{K}t)$

I: Separables

- dejar todos los "y" a un lado y los "x" al otro.
- $y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow$ pasar el dx al otro lado e integrar.

II: Ec. Lineal $\rightarrow \boxed{y' + p(x) \cdot y = q(x)} \rightarrow$ y' está solo

- Multiplico por $\boxed{v(x) = e^{\int p(x)dx}} \rightarrow v' = p(x) \cdot v$
- Izquierda: $\left(y \cdot e^{\int p(x)dx}\right)'$
- Integrar
- Si hay condiciones iniciales $\rightarrow$ encontrar la cte de integración.

III: Ec. Homogénea

- Cambiar $\boxed{x \rightarrow \lambda x}$ $\boxed{y = \lambda y}$ y se cumple $F(x,y) = F(\lambda x, \lambda y)$
- $\boxed{z = \frac{y}{x}} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} y = xz \\ y' = z + xz' \end{array}\right\}$ Hacer cambio de variable $\rightarrow$ remplazar en $F(x,y)$
- Resolver para $z' \rightarrow \frac{dz}{dx}$
- Remplazar devuelta.

VI: Ec. Exactas → $\boxed{M\,dx + N\,dy = 0}$

- Se cumple: $\boxed{\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}}$

1) Integro M en x. ✓ → queda la $\int + u(y)$
2) Derivo en d/dy → queda algo + $u'(y)$
3) Igualo al N
4) Completo la función

VII: Bernoulli → $\boxed{y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^n}$

1) Multiplico $\cdot\, y^{-n}$ $\quad \frac{z'}{(1-n)} + p(x)\cdot \underbrace{y^{1}\cdot y^{-n}}_{z} = q(x)$
2) $z = y^{1-n}$ → lo que queda acompañando a $p(x)$ ⟶ $z' = (1-n)\boxed{y^{-n}\cdot y'}$
3) Remplazo $\boxed{}$ y z y queda EDO lineal $\circ\circ$

$$\left(z' + (1-n)\cdot p(x)\, z = (1-n)\, q(x)\right) \quad / \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Existencia y Unicidad:

$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$ PI

1) Si $f(x,y)$ es continua para (x_0, y_0) → tiene soluciones
2) $f(x,y)$ es C^1 → tiene sol. única.

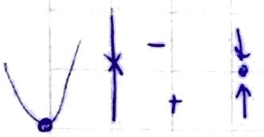
- Si y_1, y_2 se intersectan (curvas) → la misma curva.

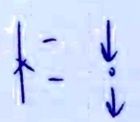
Campo de Pendientes: pendiente ($y' = f(x,y)$) de la curva solución en c/pto (x,y).

EULER $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \end{cases}$

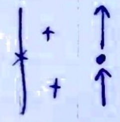
Teoría Cualitativa

- ecuación autónoma: $x' = f(x)$
- pto crítico $\rightarrow f(x_0) = 0 \longrightarrow$ x_0 es pto de equilibrio $\rightarrow x(t) = x_0$ es solución de equilibrio


ESTABLE


SILLA


INESTABLE


SILLA

Factor Integrante en No Exactas (μ)

$$\left[\mu \cdot M dx + \mu N dy = 0\right] \rightarrow \text{sí es exacta.}$$

$$\rightarrow \frac{d(\mu M)}{dy} = \frac{d(\mu N)}{dx}$$

- μ cumple:

$$\boxed{\frac{\frac{d\mu}{dx}}{\mu} N - \frac{\frac{d\mu}{dy}}{\mu} M = \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}$$

1) $\mu(x) \longrightarrow \dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} \longrightarrow \boxed{\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} dx}}$

2) $\mu(y) \longrightarrow -\dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}}{M} \longrightarrow \boxed{\mu(y) = e^{\int \frac{\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)}{M} dy}}$

- Hacer la resta $\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}$ y ver por cuál dividir para ver de qué variable depende.

Ec. Lineales 2^{do} Orden $\rightarrow$ $\left[y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x) \right]$ N.H.

- La solución de orden "n" depende de "n" ctes arbitrarias.
- Solución única $\rightarrow$ mismas condiciones iniciales para $y(x_0) = \text{algo}$, $y'(x_0) = \text{algo}$

$\left[y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \right]$ Homogénea

- Condiciones iniciales LI $\rightarrow$ soluciones LI

Coeficientes Constantes

$y'' + py' + qy = 0$ (H) $\rightarrow$ soluciones de la forma : $y = e^{\lambda x}$

1) Polinomio Característico $\rightarrow$ $p(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$

2) Busco raíces : ojalá 2 raíces $\neq$ $\rightarrow$ $p^2 - 4q \neq 0$

Sol. general $\rightarrow$ $\left[y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \right]$ *

* Euler : $\boxed{e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \cdot \operatorname{sen}\alpha}$ $\longrightarrow$ $e^{(a \pm ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) \pm i \cdot \operatorname{sen}(bx))$

- cuando $p^2 - 4q = 0$ $\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = x e^{\lambda_1 x} \end{cases}$ LI

* $y_1 = e^{(1+i)x}$, $y_2 = e^{(1-i)x}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \,,\, e^{ax}\cos(bx)}$ Soluciones Reales

$y_{general} = y_h^* + y_p \rightarrow$ reemp.
- $\rightarrow$ polin.
- $\rightarrow$ sen(x) , cos(x)
- $\rightarrow$ e^x

Enfriamiento: $\boxed{T'(t) = c\,(T(t) - T_0)}$

Wronskiano

- $y_1(x)$, $y_2(x)$ 2 soluciones de $y'' + p(x)y' + q(x)\cdot y = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}$ → calculo el determinante.

- Derivo:

$$\boxed{W' = -pW}$$

Fórmula de Abel: $W(x) = W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$ → sirve para otra solución LI dado otra que ya tenemos.

- Asumir $W(x_0) = 1$
- Hacer $W(x)$ con y_1 conocido y resolver para y_2''.

- $W(x)$ se anula siempre o no se anula nunca.

Variación de Parámetros: $(y_2'' + y_2' p(x) + y_2 = 0)$

- Buscamos solución de la forma: $\boxed{y_2 = C(x)\cdot y_1(x)}$ no es cte.
- Derivar para y_2', y_2''.

→ Remplazo y factorizo por $C(x)$ pq queda multiplicando a la H. de y_1 $(=0)$
↳ se va lo que queda multiplicado por C.

Queda: $C''y_1 + 2C'y_1' + p(x)\cdot C'\cdot y_1 = 0$

Resuelvo para C' → $v = C'$ → $v'y_1 + 2vy_1' + p(x)vy_1 = 0$

- Integro el resultado.
- Compruebo por W que son LI → $\boxed{y_2 = y_1(x)\cdot\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}\,dx}$

Ecuación No Homogénea: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

Sol general → $y = y_p + y_h$ (sol. particular: y_p; sol. homogénea: y_h)

Coef. Indeterminados (sólo funciona para coefs. ctes)

1) • Ver qué hay en el lado derecho:

→ Polinomio: probar con $y_p = ax^2 + bx + c \ldots$ (del mismo grado)

• → $y_p = a e^{bx}$

→ $y_p = a \operatorname{sen}(bx) + c \cos(bx)$

2) Derivar y reemplazar en EDO para encontrar a, b, c...

*: Si está la solución de la (H) ⟶ $y_p = x \cdot (\text{sol } H)$

Variación de Parámetros:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases} \rightarrow W \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)}$$

• Se integra y queda: $\left[y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 \right]$

Series de Potencia

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ → se deriva y se remplaza en $y'' + xy = 0$

1) Homogeneizar los exponentes → elevados al mismo n.

2) Junto las sumatorias. y que partan del mismo n. y lo dejo todo multiplicado por el n.

Ver dónde es solución ⟶ $\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n}$

SISTEMAS LINEALES

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}' &= A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t)\\ x(t_0) &= \vec{a}\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}\text{tiene}\\ \text{sol. única}\end{array},\quad \text{si } \vec{f}(t)=0 \text{ es } H.$$

LIOUVILLE: $W'(t) = tr(A(t)) \cdot W(t)$

Sol. general: $\vec{x} = \vec{x_p} + \vec{x_h}$

Una ecuación se escribe como sistema:

1) Hacemos $\left\{\begin{aligned} x &= x\\ y &= x'\end{aligned}\right.$

2) Derivo x, nos queda y; derivo y queda y'

→ La ecuación de 2do orden se escribe como un sistema de 1er orden.

e^{tA} →
- Exp = Identidad
- A es diagonalizable → $\left[e^{tVDV^{-1}} = V e^{tD} V^{-1}\right]$
- Matriz Nilpotente = matriz elevada a potencia es cero.

$\left(e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots\right.$

Para el sistema: $\left.\begin{aligned} x' &= ax+by\\ y' &= cx+dy\end{aligned}\right\}$ se pueden encontrar 2 sol. LI.

a) 2 valores propios con ma = 1 y mg = 1 respect.

b) 1 valor propio con ma = 2 → Hay que armar la otra:

SOL 1: $e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v_1}$ (vector propio)

$(A-\lambda I) \to \vec{v_1}$

SOL 2: 1) $(A-\lambda_1 I)^2 \to \vec{v_2}$

2) Solución final: $e^{\lambda_1 t}\left(\vec{v_2} + t\cdot(A-\lambda I)\vec{v_2}\right)$

Sol general: $c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2}$

Los ptos de equilibrio dependen de los valores propios.

λ_1 y $\lambda_2 < 0$ $\rightarrow$  siempre al origen

$\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ $\rightarrow$  se va a ∞ (pto silla)

λ_1 y $\lambda_2 > 0$ $\rightarrow$  a ∞ exponencialmente

SIST. NO HOMOGÉNEOS

$\Phi(t)$: matriz fundamental, cuyas columnas son n soluciones LI de $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$

Prop:

$W(x) = \det(\Phi(t))$

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi'(t) &= A(t)\cdot\Phi(t) \\ (\Phi^{-1})' &= -\Phi^{-1}(t)\cdot A(t) \end{aligned}}$$

- $e^{At} = \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0)$ $\rightarrow$ coefs. ctes.

$$\vec{x_p}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,f(s)\,ds$$

SIST. NO LINEALES

Pto de Equilibrio: (x_0, y_0) tq $\begin{cases} f(x_0,y_0)=0 \\ g(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ resolviendo el sist. No lineal.

- Ver cómo se comportan las soluciones $\rightarrow$ Teoría Cualitativa.

Linealización $\rightarrow$ $\left[\frac{df}{dx}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{df}{dy}(x_0,y_0)(y-y_0)\right]$

$$x' = \frac{df}{dx}(0,0)\cdot x + \frac{df}{dy}(0,0)\,y$$

$$y' = \frac{dg}{dx}(0,0)\cdot x + \frac{dg}{dy}(0,0)\cdot y$$

Sistemas Hamiltonianos

Un sistema no lineal es un sistema Hamiltoniano cuando existe una función: $H(x,y)$, tq:

$$\boxed{\frac{dH(x,y)}{dx} = -g(x,y) \quad , \quad \frac{dH}{dy}(x,y) = f(x,y)}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{dH(x,y)}{dy} \\ \\ y' = -\dfrac{dH(x,y)}{dx} \end{cases} \xrightarrow{\text{Linealizando}} A = \begin{bmatrix} \dfrac{d^2H}{dxdy}(0,0) & \dfrac{d^2H}{dy^2}(0,0) \\ \\ -\dfrac{dH^2}{dx^2}(0,0) & -\dfrac{d^2H}{dxdy}(0,0) \end{bmatrix}$$

- Si $(x(t), y(t))$ es solución del sist. $\longrightarrow$ $H(x(t), y(t))$ es constante $= C$.
- Se saca el $P_A(\lambda) = \lambda^2 + \det(A)$

LAPLACE

- Transforma una ecuación lineal con coef. ctes a una ec. algebraica.
- Dada $x(t)$:

$$\boxed{\mathcal{L}_x(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot x(t)\, dt}$$

- $\mathcal{L}_{x'}(s) = s \cdot \mathcal{L}_x(s) - x(0)$

- $\mathcal{L}_{x''}(s) = s^2 \mathcal{L}(x) - s \cdot x(0) - x'(0)$

1) Se le aplica a una ecuación
2) Se factoriza por $\mathcal{L}_x(s)$ y se despeja
3) Aplicar $\mathcal{L}^{-1}$ y ver la tabla de transformación.

$6 - \cancel{8} = 0 \quad = 0$

$6 - 2 = 4 \quad 4t \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

Ejercicios

• Marzo

$t = 15$ años $\rightarrow 0{,}043\%$ de A_0

$\boxed{\cancel{x' = e^{kt} \cdot x(t)}} \longrightarrow x' = \alpha x - \beta x^2$

$x' = k \cdot x(t)$

$x(0) = A_0$

$x(15) = \cancel{0{,}043}\ 0{,}00043\, A_0$

11 a)

$\cancel{x' = A_0}$

$\cancel{x' = e^{15k} \cdot 0{,}00043 A_0}$

$x' = -k \cdot x$

$\frac{dx}{dt} = -k\, x$

$\ln(x) = -kt$

Me queda $0{,}99957$

$x(t) = A_0 e^{-kt}$

$x(15) = e^{-k15} = \cancel{0{,}00043}\, A_0$

$(x^2+9)y' + xy = 0$ $\quad -k \cdot 15 = \ln(\cancel{0{,}00043})\, A_0$

$y' + \frac{x}{(x^2+9)} \cdot y = 0$ $\quad k = -\frac{\ln(\cancel{0{,}00043})\, \cancel{A_0}}{15}$

$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{(x^2+9)}\, dx$

$\ln(y) = -\int \frac{x}{x^2+9}\, dx$ $\quad x^2+9 = u$ $\quad 2x\, dx = du$ $\quad \boxed{y(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+9}}}$

$\ln(y) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, dx$ $\quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{1}{3}$

$=$

$\ln(y) = -\frac{1}{2} \ln(x^2+9) + c$

$y(x) = \frac{1}{(x^2+9)^{1/2}} + c$ $\quad \frac{2}{3} = \sqrt{c} = 2$ $\quad \cancel{2 = \frac{1}{3} + c} \rightarrow c = \frac{1}{3}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6$$

$$= 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - \cancel{8}\,{-4} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

~~$\lambda = -4$~~ ~~$\lambda = 1$~~

$\boxed{\lambda = -1}$

$$\cancel{A + I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad x + 3y = 0 \quad 2x = 0 \to x = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = -y \to \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 4}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3y = 2x, \quad y = \frac{2}{3}x \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \quad + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$3 = -c_1 + \frac{3}{2} c_2 \to 3 = 2 + c_2 \frac{2}{2} + \frac{3}{2} c_2$$

$$-2 = c_1 + c_2 \to -2 - c_2 = c_1 \qquad 1 = \frac{5}{2} c_2$$

$$13 \cdot b) \quad -\frac{10}{5} - \frac{2}{5} = c_1 \qquad \frac{2}{5} = c_2$$

$$-\frac{12}{5}$$

$\downarrow N(t)$ $\downarrow g$

25) c. $F = m \cdot a$

$$\left.\begin{aligned} x' + 3x &= e^{-3t} \\ x(1) &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$\cdot\, e^{+\int 3\,dt}$

e^{+3t}

$$e^{3t}x' + 3 \cdot e^{3t}x = 1$$

$$\int (e^{3t}x)' = \int 1$$

$$e^{3t}x = t + c$$

$$x(t) = \frac{t}{e^{3t}} = t \cdot e^{-3t} + c \cdot e^{-3t}$$

$$x(1) = 5 = e^{-3} + ce^{-3}$$

$$5e^{3} - 1 = c$$

$$x(t) = t \cdot e^{-3t} + (5e^{3} - 1) \cdot e^{-3t}$$

26. d)

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \sim \cancel{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ & & \end{bmatrix}}$$

$$1-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda) \cdot \left((1-\lambda)^2 - 4\right) + 2\left(-2+2\lambda+4\right) + 2\left(4-2+2\lambda\right)$$

$$4\left(\cancel{2}+2\lambda+2\right)$$

$$(1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) + 8(1+\lambda)$$

$$(1-\lambda)^3 - 4 + 4\lambda + 8 + 8\lambda$$

$$(1-\lambda)^3 + 12\lambda + 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L \cdot U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{3} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{bmatrix}$$

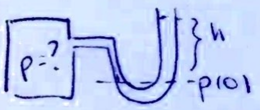
$$A = \cancel{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L \cdot \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{5}{3}t} \end{bmatrix}$$

TERMODINÁMICA

- presión $= \frac{F}{A} = p$
- densidad: $\rho = \frac{m}{V}$
- $N_{esp} = \frac{1}{\rho}$

Manómetro: $P(y) = P_{atm} + \rho g (h-y)$



Ley Cero: $A \approx C$ y $B \approx C \longrightarrow A \approx B$.

Dilatación (Largo en función de T) $\rightarrow L(T) = L_0 + \left(\frac{L_{100} - L_0}{100}\right) \cdot T$

Kelvin - Celsius: $\boxed{T_K = T_C + 273,15}$

Fahrenheit - Celsius: $\boxed{T_F = \frac{9}{5} T_C + 32}$

- cero absoluto $\rightarrow p = 0 \rightarrow -273,15°C = 0°K$.

EXPANSIÓN
- Lineal $\rightarrow \Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$
- Superficial $\rightarrow \Delta A = \gamma A_0 \Delta T \rightarrow \gamma = 2\alpha$
- Volumétrica $\rightarrow \Delta V = \beta V_0 \Delta T \rightarrow \beta = 3\alpha$

4°C → MÁXIMA densidad

AGUA
- Se comporta normal hasta que baja a los 4°C.
- $V_{H_2O} \uparrow$ cuando $T \uparrow$ entre 0°C y 4°C → sube a medida que la enfrío.

↳ 0° y 4°C → se pone menos denso.

$\boxed{PV = RTn}$ Leyes de los Gases Ideal $= N \cdot k_B T$

- R: cte univ.
- n: nº de moles
- N: nº de partículas
- k_B: cte de Boltzman $= 1,38 \times 10^{-23}$ J/K

Energía Cinética de un Gas Ideal : $\left[\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} K_B T \right]$ → solo depende de la Temperatura.

Energía Interna : $\left[U = \frac{f}{2} K_B T \right] \cdot N$ → para la energía del total de part.

f = grados de libertad
- biatómica rígida : 5
- monoatómica : 3

TIPOS DE SISTEMAS
- CERRADO : no sale materia pero sí sale y entra materia (entra ni)
- AISLADO : NO permite nada
- ABIERTO : volumen fijo → entra y sale materia y energía
- adiabático : no permite el paso de Q.

PAREDES
- Permeable / imp. : pasa O NO MATERIA
- móvil / rígida : VOLUMEN.
- Adiabática : no pasa energía

- Q, W → variables de transf.
- P, T, V, U → variables de E°

reservorio : entorno grande cuya T° no cambia.

Cambios de Fase → ocurren cambios en la energía interna sin cambios de T°

$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T$ → energía necesaria para subir 1° la T°.

Trabajo Mecánico : $W = -\int_{V_i}^{V_f} p \cdot dV$

$W > 0$: yo empujo el pistón $\rightarrow$ el gas recibe trabajo
$W < 0$: el gas realiza trabajo

• Proceso Isotérmico : $W = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V}$

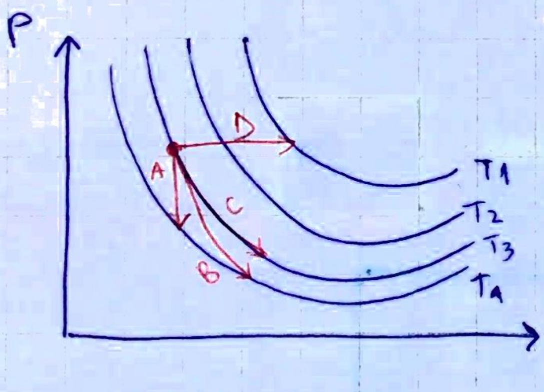
1era Ley : La energía se conserva : $\Delta U = Q + W$

no depende

dependen del proceso

Procesos

A • isocórico : V cte $\rightarrow$ $\boxed{W=0}$ $\rightarrow$ $\Delta U = Q$
B • adiabático : no entra ni sale calor $\rightarrow$ $\boxed{Q=0}$ $\rightarrow$ $\Delta U = W$
C • isotérmico : T cte $\rightarrow$ $\boxed{\Delta U = 0}$
D • isobárico : p cte $\rightarrow$ $\boxed{W = -p \cdot \Delta V}$ $\rightarrow$ $\Delta U = Q - p \cdot \Delta V$
• cíclico $\rightarrow$ mismo estado inicial y final $\rightarrow$ $\boxed{\Delta U = 0}$



$c_v = \frac{3}{2} R \rightarrow c_v = \frac{f}{2} R$

$c_p > c_v \longrightarrow Q = n \cdot c_v \Delta T \rightarrow$ V cte

$Q = n \cdot c_p \cdot \Delta T \rightarrow$ p cte

$c_p = \frac{5}{2} R \rightarrow c_p = \left(\frac{f}{2} + 1\right) R$

$\boxed{c_p = c_v + R}$

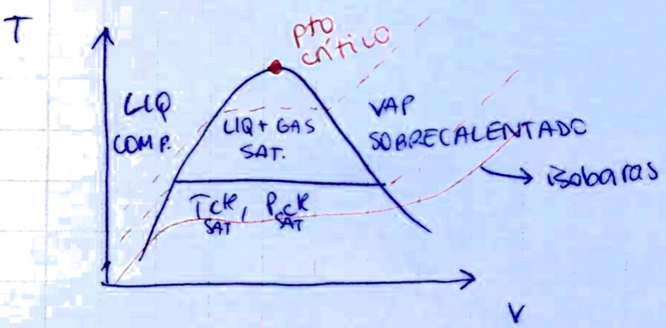
Expansión Adiabática

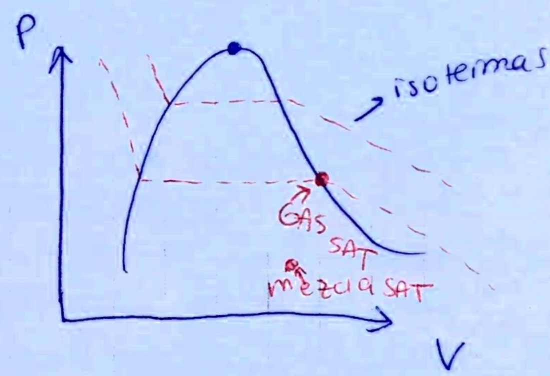
$$\left[P_i V_i^{\gamma} = P_f V_f^{\gamma}\right] \qquad \left.\left[T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}\right]\right\} \quad \boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_v}}$$

- Para un gas ideal siempre $\rightarrow \boxed{\Delta U = n c_v \Delta T}$

SATURADO → al máximo de su estado. (LIQ SAT si ↑T va a ser vapor)

- A mayor T°, mayor P°_{SAT}.





pto crítico → [líquido SAT = vapor SAT]

$\left.\begin{array}{l} m_g: \text{vapor SATURADO} \\ m_f = \text{líquido SAT} \end{array}\right\} \; m = m_g + m_f$

Calidad: $\boxed{x = \frac{m_g}{m}}$ → cuánto vapor hay en el sistema.

Propiedades de la Mezcla:

$$\boxed{\begin{array}{l} v = (1-x) v_f + x \cdot v_g \\ h = (1-x) h_f + x \cdot h_g \end{array}}$$

Entalpía: $[h = u + Pv]$

- Calor latente: $\boxed{L = h_g - h_f}$

$\{ w_{fijo} = Pv_g = h - u \}$

Gases Reales $\rightarrow$ $\boxed{PV = nZ \cdot RT}$

$Z = \dfrac{v_{real}}{v_{ideal}}$ $\boxed{P_R = \dfrac{P}{P_{cr}}}$ $\boxed{T_R = \dfrac{T}{T_{cr}}}$

- La aprox. de gas ideal va a ser buena a medida que estoy + lejos del pto crítico.

P_r chico y T_r grande $\rightarrow$ + cerca de ser un gas ideal (T° muy alta o presión muy baja)

Volumen de Control

Flujo de masa: $\boxed{\dot{m} = \rho V_{avg} A_c}$ área (velocidad)

Flujo de Volumen: $\boxed{\dot{V} = V_{avg} \cdot A_c}$

Fluido Incompresible $\boxed{\dot{V} = \dot{m} v}$

- $V_{avg} = \dfrac{1}{A_c} \int_{A_c} V \, dA$

Conservación de masa: $\boxed{\dfrac{dm_{vc}}{dt} = \dot{m}_{entra} - \dot{m}_{sale}}$

Energía de un fluido: $\boxed{e = u + \dfrac{v^2}{2} + gz}$ (Total específica) $\rightarrow$

Energía Total de Flujo $\boxed{\theta = u + Pv + \dfrac{v^2}{2} + gz}$

Tasa de Flujo de Energía: $\boxed{\dot{E} = \dot{m} \cdot \theta}$

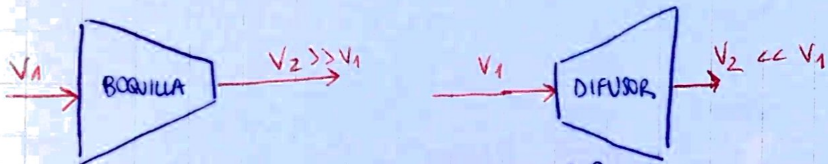
FLUJO ESTACIONARIO → se conserva la masa.

1) $\sum_e \dot{m} = \sum_s \dot{m}$

2) $\sum_e \dot{E} = \sum_s \dot{E}$

3) $\dot{Q}_e + \dot{W}_e + \sum_e \dot{m}\theta = \dot{Q}_s + \dot{W}_s + \sum_s \dot{m}\theta$ → energía se transfiere como W, Q, m.

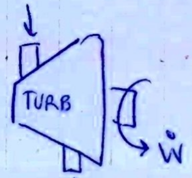
$\dot{Q} > 0$ si entra, < 0 si sale.



↓P, ↑ Velocid.   ↑P, ↓ Veloc.

$$\begin{cases} \dot{m}_e = \dot{m}_s \\ \rho A_e V_e = \rho A_s V_s \end{cases}$$

$\Delta h = c_p \Delta T$ → GAS IDEAL



- TURBINA: entrega W (produce)
- COMPRESOR / BOMBA: aumenta presión aplicando W.
  gas / LIQ

Válvulas reguladores → generan caída de presión con $\dot{Q} = 0$, $\dot{W} = 0$.
→ isoentálpico.

FLUJO TRANSIENTE

1) Conservación de Masa : $\left[m_f - m_i = \sum_e m - \sum_s m \right]$

2) " de la Energía : $\left[m_f e_f - m_i e_i = Q + W + \sum_e m\theta - \sum_s m\theta \right]$

~ Desprecia cinética y potencial y queda $\boxed{e = u}$ $\boxed{\theta = h}$

1era Ley → cómo ocurren los procesos.

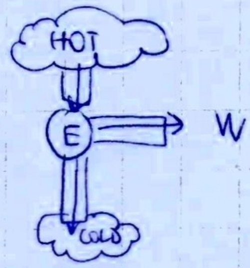
2DA Ley : hacia dónde ocurren los procesos.

- Habla de procesos reversibles e irreversibles.

Postulado 1 : Imposible tener máquina 100% eficiente.
(Kelvin - Planck)
↳ No puede recibir calor de un reservorio y producir la misma cantidad de trabajo. ($\eta < 1$)

Postulado 2 : El calor no fluye espontáneamente de T° baja a T° alta → (Necesita W)
(Clausius)

Máquina Térmica →



$W = |Q_h| - |Q_c|$
Q_{out}

} La energía se transfiere del reservorio caliente al frío.
→ Procesa esa E para convertirla en W útil.

Eficiencia Térmica : quiero ganar W y pago Energía (Q) para hacerlo.

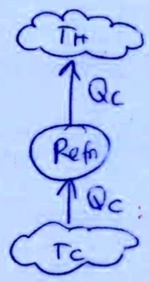
$$\left[\eta = \frac{\text{trabajo producido}}{\text{energía absorbida}} = \boxed{\frac{W}{|Q_h|}} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_H|} \right]$$ → qué tan eficiente es la MT.

CDF: coeficiente de funcionamiento (eficiencia de una bomba de calor).

$$CDF_{BOMBA} = \frac{\text{energía transf. al reserv. caliente}}{W \text{ realizado sobre el sistema}} = \boxed{\frac{|Q_H|}{W}} = \frac{Q_C}{W} + 1.$$

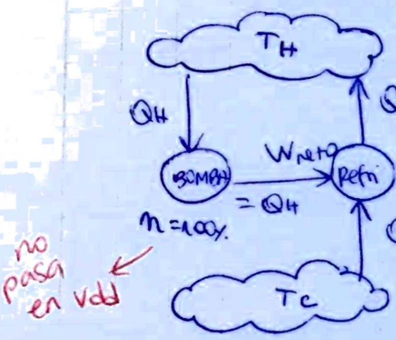
$CDF_B > 1$

$$CDF_{Refrigerador} = \boxed{\frac{Q_C}{W}} = \frac{Q_H - W}{W} = \frac{Q_H}{W} - 1$$



Bomba: mantiene HOT el reservorio HOT
Refri: mantiene frío el reserv. frío.

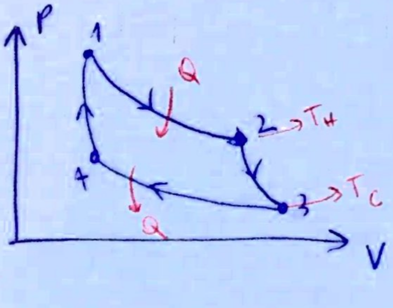
* $CDF_B = CDF_R + 1 > 1$



- Solo el proceso isotérmico es reversible. (Proceso muy lento ≈ isotérm. rev.)

CICLO DE CARNOT

1) Expansión Isotérmica (en contacto con reservorio caliente)
2) Expansión Adiabática
3) Compresión Isotérmica (en contacto con reservorio frío).
4) Compresión Adiabática



$$\eta_{carnot} = \underbrace{1 - \frac{Q_L}{Q_H}}_{\text{M.T.}} = \underbrace{\boxed{1 - \frac{T_L}{T_H}}}_{\text{sólo Carnot.}}$$

CARNOT

→ $\eta_{IRREV} < \eta_{REVERSIBLE}$ (operando en los mismos reservorios)

→ $\eta_{1\,REV} = \eta_{2\,REV}$ si operan en reservorios =s.

- La máquina + eficiente produce + Q en W.

2DA Ley y Entropía

$$\boxed{\underbrace{\frac{Q_L}{T_L}}_{\text{entra}} + \underbrace{\frac{Q_H}{T_H}}_{\text{sale}} \leq 0}$$ → Carnot es =

Desigualdad de Clausius : $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$ → en un proceso reversible la integral no va a depender del camino.

Entropía : $\left[\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} + S_{gen}\right]$, $S_{gen} \geq 0$ → ($= 0$ en REV)

→ Buscar el proceso reversible equivalente.

Ej 1 : $\boxed{V_1 T} \xrightarrow[\text{(IRREV)}]{\text{expansión libre}} \boxed{V_2, T}$

⇓ EXPANSIÓN ISOTÉRM.

Ej 2 : $V_1\ T \xrightarrow[\text{(IRREV.)}]{\text{Adición de calor}} V_1\ T'$

$\left.\boxed{V_1\ T} \xrightarrow[\text{para subir } T^o]{\text{compresión Adiabática}} \boxed{V_1'\ T'} \xrightarrow{\text{Expansión Isotérmica}} \boxed{V_1\ T'}\right\}$ REV

(pq ↑ la Presión)

Ecuaciones de Gibbs $\rightarrow$ $\boxed{TdS = dU + PdV}$

$\rightarrow$ $\boxed{TdS = dH - VdP}$

- Se integra Gibbs para encontrar S.
- Se divide por T y se integra a lo largo de un camino reversible entre el E° final e inicial.

Para un Gas ideal : $\left[\Delta s = c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)\right] \rightarrow s(T, v)$

$\left[\Delta s = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\right] \rightarrow s(T, P)$

Proceso Isoentrópico: $\left[\underbrace{T v^{\gamma - 1}}_{cte} = cte\right]\left[\underbrace{T P^{\frac{1}{\gamma} - 1}}_{cte} = cte\right]\left[\underbrace{P v^{\gamma}}_{cte} = cte\right] \rightarrow \Delta S = 0$

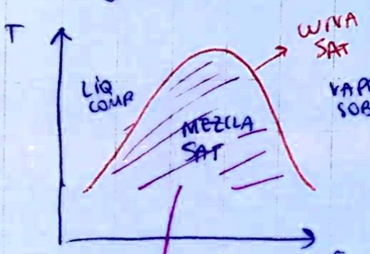
(no entra ni sale Q)

- Un proceso adiabático <u>reversible</u> es isoentrópico.

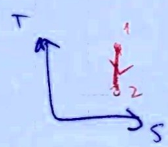
La entropía sirve para determinar el E° final del sistema.

MEZCLA SAT = $s = (1-x) s_f + x \cdot s_g$

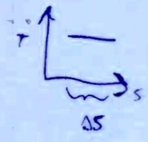
- Diagrama T-S :



Procesos Isoentrópico: $Q = 0$

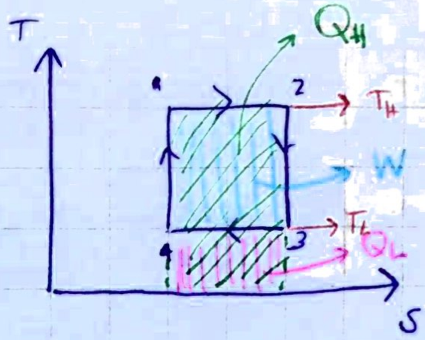


Proceso Isotérmico: $Q = T \Delta S$



$\rightarrow$ Área bajo la curva = Q total transferido $\Rightarrow Q = \int T dS$

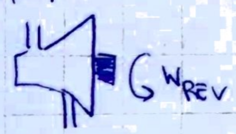
Diagrama T-s Carnot :



$$\eta = \frac{W_{neto}}{Q_H}$$

(Refri : entre + Q_L le quito , + frío va a estar el refri)

W_{REV} → estacionario (abierto) : $\left[W_{REV} = -\int_i^{final} v\,dP \right]$



W_{REV} → cerrado : $\left[W_{REV} = \int_i^f P\,dV \right]$

→ el gas actúa en contra de la presion

• El W va a ser máximo cuando es reversible.
- Turbina : $W \leq W_{REV}$
- Bomba : $W_{REV} \leq W$ (consume el mínimo)

Ej : Compresor
- W_{max} : isotérmico
- W_{min} : isoentrópico.

• Ecuación de entropía sirve para encontrar S_{gen} → ver qué tan irreversible fue el procesos.

Entropía transferida
- calor (Q)
- flujo de masa (m)

ECUACIONES

1) Balance de entropía : $\left[\Delta S = \sum_e m \cdot s_e - \sum_s m \cdot s_s + \sum \frac{Q}{T_k} + S_{gen} \right]$

2) Tasa de generación de Entropía : $\left[\dot{S} = \sum_e \dot{m} s_e - \sum_s \dot{m} s_s + \sum \frac{\dot{Q}}{T_k} + \dot{S}_{gen} \right]$

si entra y sale masa : $\dot{S}_{gen} = \dot{m}(s_{sale} - s_{entra}) - \sum \frac{\dot{Q}}{T_k}$ → $\left(\frac{dS}{dt} \text{ no hay en flujo estac.} \right)$

Eficiencia Isoentrópica

$$\left[\eta_{TURBINA} = \frac{W_{real}}{W_{ideal\,(scte)}}\right]$$

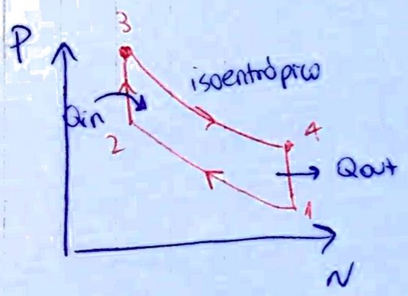
$$\left[\eta_{compresor\,(y\ bomba)} = \frac{W_{ideal\,(scte)}}{W_{real}}\right]$$

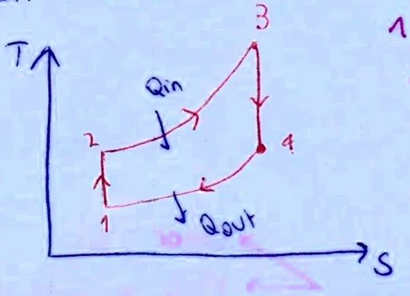
$$w = h_1 - h_2$$

- $$\eta_{TOBERA} = \frac{h_1 - h_{2,real}}{h_1 - h_{2,ideal}} = \frac{(v_{2real})^2}{(v_{2\,ideal})^2}$$

CICLOS

1) Ciclo de Otto : ciclo de gas ideal correspondiente a un motor de gasolina.





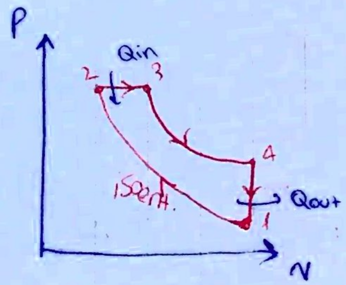
1-2 : Comp. isoentróp.
2→3 : Adición de calor isoentróp.
3-4 : expansión isoentróp
4-1 : rechazo de calor isocórico.

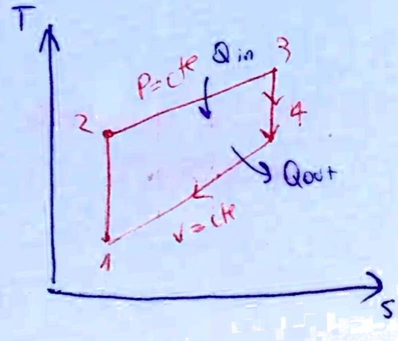
* OTTO : chispazo
* Diesel : se comprime y sube su T° y se prende solo

$$\left[\eta_{OTTO} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\right]$$

2) Ciclo de Diesel :

1-2 : Comp. isoentrópica
2-3 : Adición de calor isobárica
3-4 : Expansión isoentrópica
4-1 : Rechazo de calor isocórico





razón de corte: cociente entre Volúm. antes y después de la combustión.

$r = \frac{V_1}{V_2}$ → razón de compresión

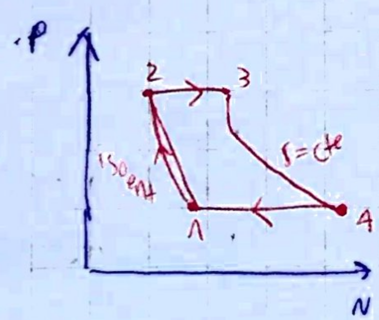
$r_c = \frac{V_3}{V_2}$ → razón de corte.

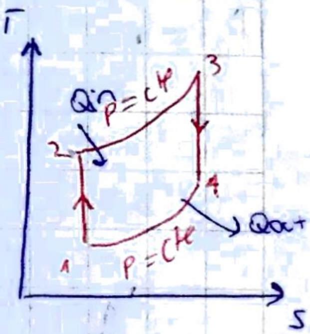
Para el mismo r : $\eta_{OTTO} \geq \eta_{DIESEL}$

$\eta_{DIESEL} : 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \frac{(r_c^{\gamma} - 1)}{\gamma(r_c - 1)}$ → $\left[\eta_{DIESEL} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - 2)}\right]$

3) Ciclo de Brayton : ideal para las turbinas a gas

1→2 : comp. isoentróp.
2→3 : Adición de calor isobárica
3→4 : Exp. isoentróp.
4→1 : Rechazo de Q a P=cte



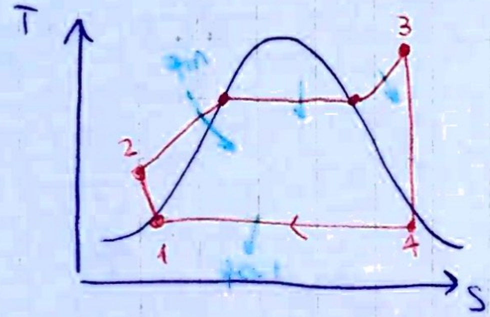


$\left[\eta_{Brayton} = 1 - \frac{T_1}{T_2}\right] = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$

* Propulsión Jet → Brayton + boquilla para acelerar el fluido

4) Ciclo de Rankine → debajo de la curva de SAT

1→2 : Comp. isoent. (s=cte)
2→3 : Agregar Q a P=cte
3→4 : Exp. isoent. (s=cte)
4→1 : Rechazo Q a P=cte

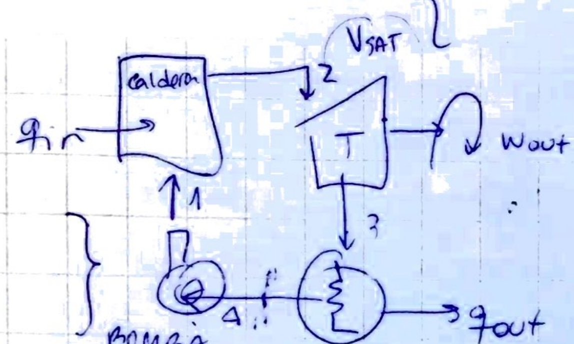


1) LIQ SAT
2) LIQ COMP
3) VAP SOB.
4) MEZCLA SAT

$\eta = 1 - \frac{q_{in}}{Q_{OUT}}$

Ejercicio

$\{ P_2 = 306\ MPa$



$h_1 = \}$

87

$\{ P = 7,384\ KPa$

$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H}$

$h_4, \nu_4 \approx$ SAT en T_4

$h_1 = h_4 + \nu_4 (P_1 - P_4)$

$\eta = \frac{W}{Q_{out}}$

$$\begin{cases} S_4 = S_1 \\ S_2 = S_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = P_1 = 3,06\ MPa = 3060\ KPa \\ P_3 = P_4 = 7,384 \end{cases}$$

$T_4 = 40°C$

$h_4 = h_f = 167,57$

$\nu_4 = 0,001008$

$T_1 = 235°C$

$h_1 =$ 170,607

$$\eta_{RANK} = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{(h_3 - h_2)} \rightarrow \frac{(h_2 - h_3) - (h_1 - h_4)}{(h_2 - h_1)}$$

6°C

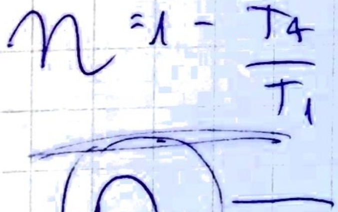
$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_1}$

$C_{Ag} = 4,2 \frac{kJ}{kg\,K}$

$\dot{m}_{fr} = 5\ kg/min/kg$

$h_e = 238\ kJ/kg$

$h_s = 60,6\ kJ/kg$



$\frac{279°K}{4,2} =$

$\dot{W} = 177,4$

$\boxed{W = 887}$

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

Ley de Morgan: $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$

Axioma 1: $P(E) \geq 0$

Axioma 2: $P(S) = 1$

Axioma 3: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

Ley del Complemento → $E \cap \overline{E} = \emptyset$

→ $E \cup \overline{E} = S$

- $P(\emptyset) = 0$ → probabilidad de un evento imposible.

Ley Aditiva: $\left[P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \right]$

CONTEO
- → Principio de Multiplicación
- → Permutación → cuenta varias veces el mismo caso → $\boxed{\frac{n!}{(n-r)!}}$
- → Combinación → no importa el orden de ingreso. → $\boxed{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$
- → Ordenamiento Multinomial: asignar n objetos a k grupos. $\frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

Probabilidad Condicional: $P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$

- Complemento: $P(\overline{E_1} | E_2) = \frac{P(\overline{E_1} \cap E_2)}{P(E_2)}$

$\Big\}$ $P(E_1|E_2) + P(\overline{E_1}|E_2) = 1$

Probabilidades Totales: $\left[P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|E_i) \cdot P(E_i) \right]$

Árbol:

$$S \to E_1 \to \begin{cases} A & P(A|E_1)\cdot P(E_1) \\ \bar{A} & P(\bar{A}|E_1)\cdot P(E_1) \end{cases}$$

$$S \to E_2 \to \begin{cases} A & P(A|E_2)\cdot P(E_2) \\ \bar{A} & P(\bar{A}|E_2)\cdot P(E_2) \end{cases}$$

$\vdots$

$$S \to E_n \to \begin{cases} A & P(A|E_n)\cdot P(E_n) \\ \bar{A} & P(\bar{A}|E_n)\cdot P(E_n) \end{cases}$$

TOTALES $\longleftrightarrow$ BAYES

$$S \to A \to \begin{cases} E_1 \\ E_2 & P(E_2|A)\cdot P(A) \\ \vdots \end{cases}$$

$$S \to \bar{A} \to \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Teorema de Bayes: $\left[P(E_j|A) = \dfrac{P(A|E_j)\cdot P(E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)\cdot P(E_i)} \right]$

Función densidad $f_x(x)$: $\left[P(a < x \leq b) = \int_a^b f_x(x)dx \right]$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt$$

$$\boxed{P(a < x \leq b) = F_x(b) - F_x(a)}$$

Modelo Uniforme $\to$ $f(u) = \dfrac{1}{b-a}$; $F(u) = \dfrac{u-a}{b-a}$, para $u \in [a,b]$

Promedio $\to$ Esperanza

$$\mu(x) = E(x) = \begin{cases} \sum_{x \in \Theta_x} x \cdot p_x(x) \to \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\,dx \to \text{caso continuo.} \end{cases}$$

$\neq E(g(x))$

Mediana $\to$ en el 50% $\longrightarrow$ $\boxed{F_x(x_{MÉD}) = \frac{1}{2}}$

Función Generadora de Momentos: $\left[M_x(t) = E[e^{xt}] \right]$

$$\left[M^{(r)}(0) = E(x^r) \right]$$

$$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

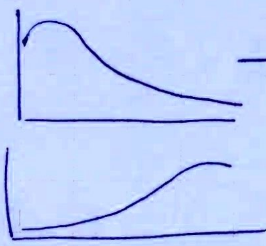
Varianza: $\sigma_x^2 = Var(x) = E[(x-\mu_x)^2] \rightarrow \boxed{Var(x) = E(x^2) - \mu_x^2}$

- Desviación estándar: $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$

Coef. de Variación: permite comparar variables de $\neq$ unidades de medida. $\rightarrow \boxed{\delta_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}}$

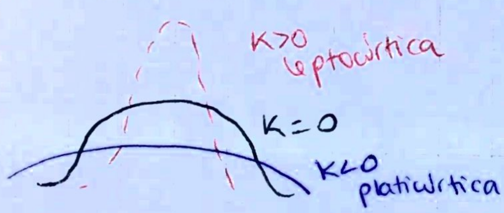
- X moda $\rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 0$ (función densidad)

- **Asimetría:** 3^er momento central $\longrightarrow E[(X-\mu_x)^3] = \int (x-\mu_x) f_x(x) dx$

Positiva:  $\rightarrow \mu_x >$ mediana

Negativa: $\rightarrow \mu_x <$ mediana

- **Kurtosis:** cuarto momento central $\rightarrow$ mide el apuntamiento o achatamiento de la dist. de densidad.



$\longrightarrow E[(X-\mu_x)^4] = \sum_i (x_i-\mu_x)^4 \cdot p_x(x_i)$

Coef. de Asimetría: $\frac{E[(x-\mu_x)^3]}{\sigma_x^3}$

Coef. de Kurtosis: $\frac{E[(x-\mu_x)^4]}{\sigma_x^4} - 3$

Distribución Normal

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

$P(S \leq -s) = P(S \geq s) \rightarrow \Phi(-s) = 1 - \Phi(s)$

$\rightarrow \boxed{\frac{x-\mu}{\sigma} =}$ "Normalizar" (0,1)

Log-Normal: $\boxed{\frac{\ln(x) - \lambda}{\xi}}$ $\quad \lambda = \ln\mu - \frac{1}{2}\xi^2$ $\quad$ Mediana $= e^{\lambda}$

$\xi = \sqrt{\ln(1+\delta_x^2)}$

• Si c.o.v. $< 0{,}3 \rightarrow \delta_x \approx \xi$

BERNOULLI → Éxito / Fracaso $\quad X \sim BER(p)$ $\quad \begin{cases} E(x) = p \\ V(x) = p(1-p) \end{cases}$

BINOMIAL: $p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$X \sim Bin(n, p)$ — n: nº de experim.; p: probabilidad

$\boxed{E(x) = np}$ $\boxed{V(x) = np(1-p)}$ $\quad M_x(t) = (pe^t + (1-p))^n$

• Periodo de Retorno $\rightarrow \frac{1}{p}$

Múltiples Variables Aleatorias : Continua $\rightarrow \iint_{\theta_{XY}} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

• Marginal : $X/_{Y=y} = \frac{f(x,y)}{f(y)} \longrightarrow f(x,y) = f(y) \cdot f(x)_{X/Y=y}$

• X e Y indep $\longrightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

$COV(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$ (covarianza) * indep $\rightarrow$ cov = 0

Correlación $\longrightarrow \rho = Corr(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

$(-1 \leq \rho \leq 1)$

• $\rho = 0 \longrightarrow$ no hay asociación lineal

• Esperanza Condicional : $E(Y/_{X=x}) = \int_{\theta_{Y/X=x}} y \cdot f(y)_{Y/X=x}\,dy$

Teorema de Esperanzas Iteradas

$\boxed{E(Y) = E(E(Y/X))}$

$\boxed{Var(Y) = V(E(Y/X)) + E(Var(Y/X))}$

Funciones de Variables Aleatorias

$Y = g(X)$

$P(Y=y) = P(X = g^{-1}(y))$

$P_Y(y) = P_X(g^{-1}(y))$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(g^{-1}(y)) & \text{si } g \text{ es creciente} \\ 1 - F_X(g^{-1}(y)) & \text{si } g \text{ decrece.} \end{cases}$$

$$\boxed{f(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|}$$

SUMA / RESTA

$$\begin{cases} X \sim N(\mu_x, \sigma_x) \\ Y \sim N(\mu_y, \sigma_y) \end{cases}$$

$$\left[X+Y \sim N\left(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right) \right]$$

$$\left[X-Y \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right) \right]$$

→ La variabilidad se acumula.

Teorema Central del Límite

Normal: $\left[\sum_i X_i \overset{\cdot}{\sim} N(n \cdot \mu, \sqrt{n}\,\sigma) \right] \longleftrightarrow \left[\frac{1}{n} \sum X_i = \bar{X} \overset{\cdot}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \right]$

- Binomial $(n, p) \longrightarrow \left[X \overset{\cdot}{\sim} N(np, \sqrt{np(1-p)}) \right]$

* Corrección por continuidad: $P(X < x + 0{,}5) \rightarrow \overbrace{P(k - 1/2 < X < k + 1/2)}^{P(X=k)}$

(cuando se aproxima una discreta a una continua)

Si $Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \rightarrow V(Y) = a_1^2 V(X_1) + a_2^2 (V(X_2)) + 2 a_1 a_2 \operatorname{cov}(X_1, X_2)$

- $\operatorname{cov}(X_1, X_1) = \operatorname{Var}(X_1)$
- $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \operatorname{cov}(X_2, X_1)$

INFERENCIA ESTADÍSTICA

- Estimador Puntual
  - **Insesgado**: $E(\theta) \to \theta$
  - **Consistencia**: $V(\theta) \to 0$
  - **Eficiencia**: θ_1 es + eficiente si tiene menor Var : $(Var(\theta_1) < Var(\theta_2))$
  - **Suficiencia**: utiliza toda la info contenida.

1) **Método de los Momentos**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_K : \text{teórico} \to E(X^K) \\ m_K : \text{empírico} \to \frac{1}{n} \sum x_i^K \end{array} \right\} \quad \boxed{\mu_K = m_K}$$

- **Error Cuadrático Medio (ECM)** : $\boxed{ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})}$ con $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

2) **Método Máx. Verosimilitud**

$$\left\{ \begin{array}{l} 1)\ L = \prod f_X(x_i, \theta) = f_{X_1}(x_1, \theta) \cdot f_{X_2}(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n, \theta) \\ 2)\ \frac{dL}{d\theta} = 0 \longrightarrow \ln(L) = \sum \ln f_{X_i}(x_i, \theta) \\ \qquad \frac{d \ln(L)}{d\theta} = 0 \end{array} \right.$$

DISTRIBUCIÓN ASINTÓTICA NORMAL

- $\boxed{\hat{\theta} \sim N\left(\theta, \sqrt{\frac{1}{I(\theta)}}\right)}$ con $I(\theta) = -E\left(\frac{d^2 \ln(L)}{d\theta^2}\right)$

↳ Con una función: $g(\hat{\theta}) \dot{\sim} \text{Normal}\left(g(\theta), \sqrt{\frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}}\right)$

χ^2 : si $X \sim N(\mu, \sigma) \longrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

↳ $\boxed{Z^2 = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)}$

$E(\chi^2(r)) = r$

$Var(\chi^2(r)) = 2r$

$$\left[\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \sim N(0,1) \rightarrow$$ cuando quiero μ y el σ es conocido

PIVOTES

$$\left[\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right] \sim t(n-1) \rightarrow$$ decisiones sobre μ y σ desconocido

$$\left[\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}\right] \sim \chi^2(n-1) \rightarrow$$ desiciones sobre σ cuando tengo datos muestrales.

S^2 = varianza muestral = $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2$

↳ $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2} \rightarrow$ desv. estándar muestral

Prueba de Hipótesis

H_0: hip. nula ("estándar") $\rightarrow =$

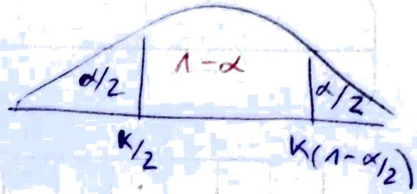
H_1: hip. alternatina ("lo nuevo") $\rightarrow \neq, >, <$

1) Def. Ho y H1
2) Identificar la pba estadística adecuada y su distribución
3) Basado en una muestra de datos observados estime el estadístico de prueba.
4) Especifique el nivel de significancia (prob. de equivocarse)

TIPO I → rechaza Ho cuando es Verdadera

TIPO II → NO rechaza Ho cuando es falsa.

- $\alpha = P(\text{Error tipo I}) \rightarrow P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es V})$
- $\beta = P(\text{Error tipo II}) = P(\text{NO rech. } H_0 \mid H_0 \text{ es F})$



Test de Hipotesis

0· Test sobre $\begin{cases} \text{media} \\ \text{desv.} \\ \text{propor.} \end{cases}$

1· Hipótesis $\angle \begin{matrix} H_0 = \\ H_1 \neq, >, < \end{matrix}$

2· Test a usar

3· Evaluar

4· Para α, concluir

Pivotes:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \rightarrow n = 30 \text{ o } + \approx \text{Normal}$$

$$c = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

• Rechazar H_0 si: $z_{obs} > K_{1-\alpha/2}$ o bien: $z_{obs} < -K_{1-\alpha/2}$ $\Big\}$ $\boxed{|z_{obs}| > K_{1-\alpha/2}}$ $(\neq)$

$(>, <) \longrightarrow z_{obs} > K_{(1-\alpha)}$, $z_{obs} < -K_{1-\alpha} \longleftrightarrow \bar{x} < \mu_0 - K_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Valor-p: Se rechaza H_0 si $\boxed{\text{valor-p} < \alpha}$

Ej: $|z_{obs}| > K_{1-\frac{\alpha}{2}} \longrightarrow 2 \cdot P(z > |z_{obs}|)$

$z_{obs} > K_{1-\alpha} \longrightarrow P(z > z_{obs})$

$z_{obs} < -K_{1-\alpha} \longrightarrow P(z < z_{obs})$

• Se rechaza t-student similar a z de la normal

χ^2 no es simétrica, entonces:

- $c_0 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ v $c_0 > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
- $c_0 > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
- $c_0 < \chi^2_{\alpha}(n-1)$

Intervalo de Confianza: Una vez conocido $\bar{x}$, puedo despejar μ:

$$\left[\bar{x} - \underbrace{K_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{error de estimación}} < \mu < \bar{x} + K_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

error de estimación → depende de σ
→ n: tamaño muestral
→ $1-\frac{\alpha}{2}$: porcentaje

σ conocido: $\bar{x} \pm K_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

σ desconocido: $\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Potencia $= 1-\beta$ → $P(\text{rechazar } H_0 \mid \theta)$

$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es V})$
$\beta = P(\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es F})$

Interv. para σ^2: $\left[\frac{(n-1)s^2}{C_{1-\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{C_{\alpha/2}(n-1)}\right]$

$\left(\text{PIVOTE} \rightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right)$

- **Comparación de Poblaciones**: $X_1, \dots, X_n \text{ iid} \sim N(\mu_x, \sigma_x)$
  $Y_1, \dots, Y_n \text{ iid} \sim N(\mu_y, \sigma_y)$

$H_0: \mu_x = \mu_y$ vs. $H_1: \begin{cases} \mu_x \neq \mu_y \\ \mu_x > \mu_y \\ \mu_x < \mu_y \end{cases}$

- σ_x, σ_y conocidos: $\left[\frac{(\bar{x}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1)\right]$

• σ_x, σ_y desconocidos pero iguales: $\dfrac{(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - (\mu_x - \mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{student}(n+m-2)$

$\hookrightarrow S_p^2 = \dfrac{(n-1)^2 S_x^2 + (m-1) S_y^2}{n+m-2}$

Bondad de Ajuste (Test χ^2):

$z_i = \dfrac{Obs_i - E}{\sqrt{Var}} \overset{\sim}{\sim} N(0,1) \rightarrow \dfrac{(O_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2(1) \rightarrow \boxed{\sum^{k} \dfrac{(O_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2(k-1-\nu)}$

nº de parámetros estimados

• Se rechaza H_0 si: $\chi^2_{calc} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1-\nu)$

Ej: H_0: Datos $\sim$ Normal

H_1: Datos $\nsim$ Normal

Regresión Lineal

$$\left.\begin{array}{l} E(Y/X=x) = \alpha + \beta x \\ Var(Y/X=x) = \sigma^2 \end{array}\right\} \quad \boxed{\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}} \quad \boxed{\hat{\beta} = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}} = \dfrac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

EMCO: estimadores de mínimos cuad. ordinarios

• $y_i' = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$

• $s^2_{Y|X} = \dfrac{\Sigma(y_i - y_i')^2}{n-2} = \dfrac{1}{n-2}\left[\Sigma(y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}^2 \Sigma(x_i - \bar{x})^2\right]$

• r^2 = coef. de determinación: $0 \leq r^2 \leq 1$ (0: muy malo; 1: muy bueno) $\rightarrow \boxed{r^2 = 1 - \dfrac{s^2_{Y|X}}{s^2_Y}}$

ÉTICA

FUNDAMENTACIÓN:

- El Código es un referente para llevar a cabo el análisis de c/ situación a la que se enfrentan los ingenieros.
- Los colegiados no podrán alegar ignorancia frente a cualquier conflicto que encierre cuestionamientos éticos, en los casos de trasgresión o cuestionamiento.
- El Tribunal de ética del Colegio podrán dar a lugar a las sanciones de forma y fondo (por hechos denunciados).

CÓDIGO:

a) Principios éticos y normas de conducta de los Ing. frente a la sociedad, a sus mandantes, a sus pares y a la comunidad.

c) Los ing. deben velar por la ejecución técnica y moralmente correcta de los encargos recibidos.

d) Deben cuidar de la segurid. de las personas, proteger la salud y el bienestar público, cumpliendo con los principios de desarrollo sustentable y protección del Med. Ambiente.

- Solo desempeñar tareas en las áreas de su competencia.
- Declaraciones objetivas y veraces.
- Evitar conflictos de interes con empleadores / mandante.
- Basar su reputación en el mérito propio.
- No tolerar el soborno, fraude ni corrupción.
- Los ing. Deben continuar con su desarrollo profesional durante toda su carrera y también dar la oportunidad de hacerlo a los ingenieros bajo su dependencia.
- Actuar con equidad y buena fe.
- No discriminar por motivos personales o sociales.
- A: Fomentar la investigación, desarrollo y transferencia de tecnología.
- Promover la enseñanza de los principios éticos.
- No deben dar o recibir beneficios no contractuales por la gestión, obtención u otorgamiento de designaciones de cualquier carácter.

• Mantener independencia y autonomía de criterio.
• Dejarle claro a los clientes las consecuencias de no respetar tu recomendación profesional.
B • Considerar impacto social y ambiental.
• Manifestar previamente un interés personal en algún asunto profesional.
• No usar documentos sin la autorización de sus autores a menos que sean de dominio público.
• No aceptar remuneración sujeta a resultados que puedan comprometer su integridad. (o indep. de criterio)

• La ética responde a: ¿qué tipo de persona quiero ser?
Un código de ética profesional debe ser una instancia de autorregulación del ejercicio profesional
• Calificar un acto desde la ética: ¿Cuál es el objeto, el fin y las circunstancias de mi acto?
• Es incorrecto obtener info secreta de la competencia porque no respeta el derecho de propiedad intelectual.
• Un liderazgo es incorrecto si se basa en la deshonestidad.
• Responsabilidad Social Empresarial es un compromiso de todos los miembros de una empresa.

ESTÁTICA Y DINÁMICA

Cartesianas: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x\hat{x} + y\hat{y} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} \\ &\bullet\ \vec{a} = \ddot{\vec{r}} \end{aligned}\right\} \left[x(t) = v_0 t + \frac{a t^2}{2} + x(0) \right] \rightarrow \text{Posición}$$

Polares:
- Posición: $\vec{r} = \rho \cdot \hat{\rho}$
- Velocidad: $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} = \left[\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} = \vec{v}\right]$
- Velocidad Angular: $\boxed{\omega = \dot{\theta}}$
- Aceleración: $\longrightarrow \left[\vec{a} = \hat{\rho}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}\right]$

MCU

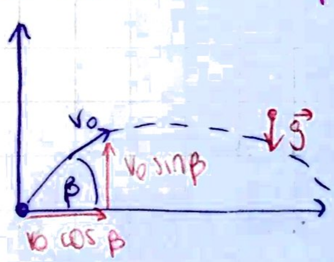
$\vec{v} = R\omega\,\hat{\theta}$

$\vec{a} = -R\omega^2 \hat{\rho}$

$\left[\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\hat{\rho}\right]$ aceleración centrípeta

Lanzamiento Proyectil: $\vec{a}(t) = -g\hat{y}$

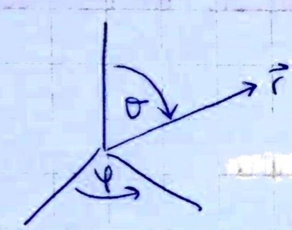
$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\beta \\ -gt + v_0 \sin\beta \end{pmatrix}$



- Relación Cartesianas / Polar 2D

$x = \rho\cos\theta \qquad \longleftrightarrow \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = \rho\,\text{sen}\,\theta \qquad\qquad\qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$



3D: Cilíndricas. (polares + z)

$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$

$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z}$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z}$

Esféricas: $x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\,\sin\varphi$

$z = r\cdot\cos\theta$

$\vec{r} = r\cdot\hat{r}$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\cdot\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\cdot\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\hat{\varphi}$

Movimiento Relativo: el mismo pto visto desde sistemas de referencia ≠.

Leyes de Newton
- MRU aunque se le aplique una fuerza
- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (usar sist. inerciales de referencia)
- "Acción - Reacción" → no se cancelan porque no se aplican sobre el mismo cuerpo.

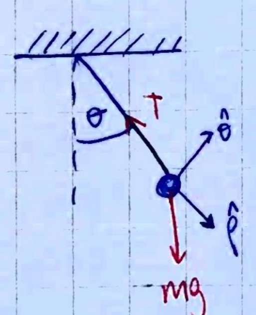
"Receta Universal"

1) Dibujar todas las fuerzas sobre todos los cuerpos.
2) Elijo sistema de referencia ("eje")
   → puedo elegir ≠ sistemas para c/ cuerpo
   → deben ser inerciales
3) Escribe $\vec{F}_T = m \cdot \vec{a}$ para cada cuerpo por separado
4) Escribir ecuaciones de "ligaduras geométricas" (si las hay) → poleas
5) Resuelve
6) Verificar
   - unidades
   - sentido físico

1) Ley de Hooke: $\boxed{\vec{F}_K = -K\vec{x}}$ → la fuerza es opuesta al mov.

Ecuación Armónico simple
- $\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x(t)}$ donde $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$
- $\boxed{x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)}$ cumplen

2) Péndulo:

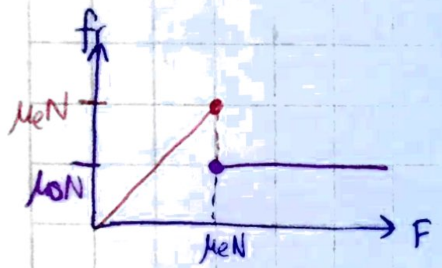


FUERZA DE ROCE → Estático $\left(\overbrace{F = \mu_e \cdot N}^{\text{pto crítico}}\right) \longrightarrow f_{estático} \le \mu_e N$

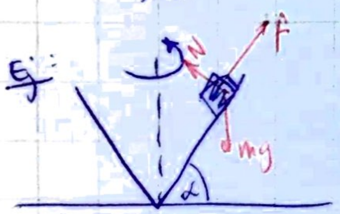
- el valor es tq el cuerpo no se mueve

→ Dinámico $(f_r = \mu_D \cdot N)$

- cuando se está moviendo, el roce se convierte en dinámico.

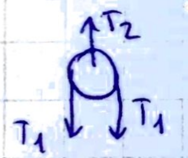


Ej:



$\omega_{crítico}$ = si $\omega < \omega_{mín}$ → el bloque desliza.
(A pto de deslizar $\longrightarrow f_r = \mu_e N$)

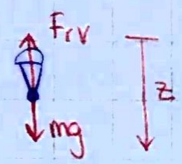
Problemas con Ligaduras



$\sum F = 2T_1 - T_2 = m \cdot a_{p1} = \cancel{m}(\ddot{x}_{p1})$ m = 0 (masa polea)

$\boxed{T_2 = 2T_1}$

Roce Viscoso: $\left[F_{vr} = -b\vec{v}\right]$



$\longrightarrow \left[v(t) = mg\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) + v_0\right]$

- Si $a = 0 \longrightarrow \boxed{v = \frac{mg}{b}}$

Energía: $\left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E\right]$

$E_{cinética} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ $\qquad U_K = \frac{1}{2} k x^2$ } Energía potencial elástica

$(E_K + U_p = cte)$

Trabajo: $\left[W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}\right] = K_B - K_A$ con $K = \frac{1}{2} m v^2$ = Ecinética

- F conserv → no importa el camino
- F No conserv → sí depende del camino.

Cuando no depende del camino: $\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = -\left(U(B) - U(A)\right)$ → "POTENCIAL"

- F es conservativa si puede escribirse como la derivada de algo:

$$F(x) = -\frac{d\,U(x)}{dx}$$

- Con F conservativa: $\boxed{K(A) + U(A) = K(B) + U(B)}$

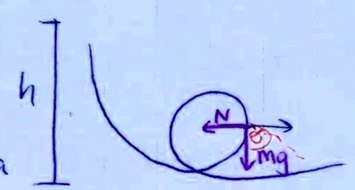
- $K + U$ = Energía (cte)

Energía Potencial

1) **Peso**: $U(z) = mgz$
2) Resorte: $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$
3) $W_{NORMAL} = 0$ $(N \perp dr)$
4) $W_{TENSIÓN} = 0$ $(T \cdot dr = 0)$

"Montaña Rusa Asesina" (Calcular rango de h para que no se caiga del Riel)

- $E = cte$
- $N = 0$ → separarse / despegarse de una superficie.
  1) Calcular N con $F = ma$
  2) Despejar $\dot{\theta}$ como función de θ. → usar Energía $E = K + U$



N es mín en $\theta = \pi$ → $\boxed{h = \frac{5}{2} R}$ → con $h > \frac{5}{2} R$ no me despego.

$\boxed{W_{froce} = E_B - E_A}$ → Cuanto avanza hasta detenerse: $\boxed{L = \frac{v_0^2}{2 g \mu_D}}$

- Con varios cuerpos → E_{total} se conserva
- Con poleas → cada Tensión realiza W. (Con el sistema completo los W de las cuerdas se cancelan)

Momentum: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ → "Cantidad de Movimiento"

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \cdot \vec{p} = 0 \checkmark \quad \Big\} \quad \boxed{\vec{p}_T \text{ (justo antes)} = \vec{p}_T \text{ (justo después)}}$$

- Cuando 2 objetos chocan, el momentum total del sistema es cte (justo antes y justo después del choque.

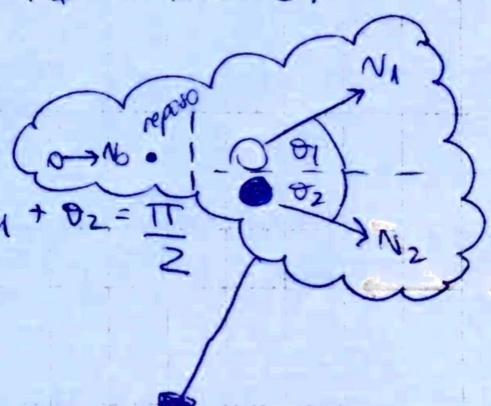
COLISIONES →
- a) Perfect. elástica: se conserva toda la energía
- b) Plástica (perf. inelástica): se quedan pegados ($m_T = m_1 + m_2$)
  ↳ disipa el máximo de Energía posible.
- c) Caso Intermedio: no se quedaron pegados pero sí se conservo la energía.
  ↳ hay que conocer el "coef. de rest."

a) Ecuaciones → $p = cte$, $E = cte$ $\Big\}$ $\boxed{v_1 + v_1' = v_2' + v_2}$

Ej: $v = \sqrt{2gh}$

b) $\rightarrow v'$ $\quad m_T = m_1 + m_2 \quad P_f = v'(m_1 + m_2)$

c) Coef. de Restitución: $\dfrac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$



* Choque con masas iguales → $\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$

COLISIÓN 2D

- 1) Energía (cinética): $m_1 v_0^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$
- 2) Momentum: $P_x = m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$

  $P_y = 0 = m_1 v_1 \operatorname{sen}\theta_1 + m_2 v_2 \cdot -\operatorname{sen}\theta_2$

Impulso : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\longrightarrow$ $\boxed{F \cdot \Delta t = p_2 - p_1}$ $\rightarrow$ variación de momentum

• Ecuación del cohete. $\longrightarrow$ $v(m_x) = |u| \cdot \ln\left(\frac{M + m_0}{M + m}\right)$

velocidad con la que se bota bencina en relación al cohete.

SÓLIDO RÍGIDO

• Centro Masa : $\vec{R}_{CM} = \frac{\sum \vec{r}_i \cdot m_i}{\sum m_i = M}$

• densidad
- lineal $= \lambda = \frac{dm}{dl}$
- superficial $= \sigma = \frac{dm}{dA}$
- volumétrica $= \rho = \frac{dm}{dV}$

Propiedades del CM :

1) $\vec{p}_{cm} = \vec{p}_{\text{TOTAL del sistema}}$

2) El CM se comporta como una partícula puntual (y solo siente las $\vec{F}_{ext.}$)

Sólido Rígido
- Traslación (como un todo)
- Rotación (sobre un eje)

(+) (−)

• Rotación : puede rotar con velocid. ang. $\vec{w}$ (apunta hacia afuera o hacia adentro)

$$\left[K^{ROT}_{TOTAL} = \frac{1}{2} I_{eje} \cdot w^2\right] \qquad \left(K = \frac{1}{2} m v^2 \approx K^{ROT} = \frac{1}{2} I w^2\right)$$

• El movimiento de inercia no depende del mov. del sólido, sí depende del dm.
$\left(I = \int r_{eje}^2 \, dm\right)$

Momentum Angular : $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$ → depende del sist. de referencia.
(1 partícula)

Torque : $\boxed{\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}}$ con $\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}$ → depende del origen.

Total : $\boxed{\vec{L}^{(0)}_{TOT} = I^{(0)} \cdot \vec{\omega}}$ **Mom. Ang. Total**

$I^{(0)}$ hay que calcularlo

$\boxed{I^{(0)} \cdot \vec{\alpha} = \sum \vec{\tau}_{ext}}$

Analogía:

Partícula		Sólido	
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\longrightarrow$	$\vec{L}^{(0)} = I^{(0)}\vec{\omega}$	"Momentum"
$\sum F = ma$	$\longrightarrow$	$\sum \vec{\tau}^{(0)}_{ext} = I^{(0)}\vec{\alpha}$	"Fuerzas"
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$\longrightarrow$	$K^{(0)}_{ROT} = \frac{1}{2} I^{(0)} \vec{\omega}^2$	"Energía Cinética"

Teo. Ejes Paralelos

$\vec{d}$: vector desde O hasta CM

Cuando el sólido rota en un eje ≠ CM ⟶ $\boxed{I^{(0)} = I^{CM} + M_T \cdot d^2}$

→ $I_{CM} = \int r_{cm}^2 \, dm$

Gravedad: $U_{TOTAL} = gM \cdot Y_{CM}$ → es como si tuviera toda la masa concentrada.

↳ Torque Gravitatorio : $\boxed{\tau^{(0)}_{TOTAL} = \vec{R}_{CM} \times m\vec{g}}$

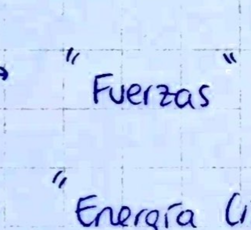
$I^{CM}_{BARRA} = \dfrac{ML^2}{12}$

$I^{(0)}_{\text{EXTREMO BARRA}} = \dfrac{ML^2}{3}$

$I_{esfera} = \dfrac{2}{5}MR^2$

$I_{DISCO} = \dfrac{MR^2}{2}$

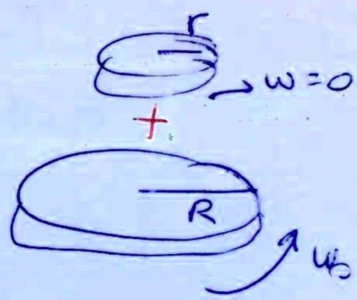
$I^{CM}_{Anillo} = R^2 M$



$I^{(0)}_{TOTAL} = I^{(0)}_{anillo} + I^{(0)}_{barra}$

- Polea con sólidos $\longrightarrow$ $I^{CM} \cdot \ddot{\theta} = R(T_1 - T_2)$
  (Ligaduras ctes $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$)

- Discos : $L^{(0)}_{antes} = L^{(0)}_{después}$



Conservación de Momentum $I_R \cdot \omega_0 = (I_R^{(0)} + I_r^{(0)})\, \omega_f$

$$\omega_f = \frac{I_R^{(0)} \cdot \omega_0}{(I_R^{(0)} + I_r^{(0)})}$$

Traslación

con respecto al

$$\text{MOV} = \underset{(\text{del CM})}{\text{ROTACIÓN}} + \underset{(\text{del CM})}{\text{TRASLACIÓN}}$$

- $K^{(0)}_{TOT} = K_{CM}^{(0)} + K_{R/CM}$ 1) Energía cinética

  $K_{CM}^{(0)} \downarrow$ TRASLACIÓN $\frac{1}{2} m v^2$ $K_{R/CM} \downarrow$ KROT $\frac{1}{2} I^{CM} \omega^2$

- $\vec{L}^{(0)}_{TOT} = \vec{L}_{CM}^{(0)} + \vec{L}_{R/CM}$ 2) Mom. Angular total

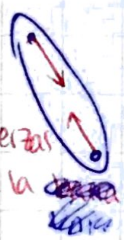
  TRAS $\vec{R}_{cm} \times \vec{p}_{cm}$ ROT $I^{CM} \cdot \omega$

$$\boxed{\vec{T}^{ext}_{R/CM} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_{R/CM})} = I \cdot \alpha$$ 3) Torque

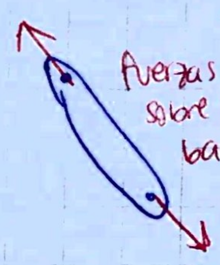
Estática → $\sum F = 0$, $\sum \tau = 0$

• Reticulados = Estructuras → Mét. de Uniones / Mét. de secciones.

• Si las fuerzas de la barra son hacia afuera, la fuerza de las uniones son hacia adentro.



} compresión



} Tensión

SOPORTES →
- Cuerda → tensión
- Soporte Móvil → F_{ext} siempre $\overrightarrow{Normal}$
- " Fijo → F_x y F_y
- Soporte Empotrado → F_x, F_y y la pared ejerce un $\vec{\tau}$ en el lugar del soporte.

1) Método de Uniones → $\sum F = 0$ en c/ unión; $\sum \tau = 0$ respecto de algún punto.

a) Calcular reacciones externas

b) Calcular fuerzas sobre las barras.

→ Siempre la fuerza sobre las barras es opuesta al resultado de la fuerza sobre las uniones.

• El torque es igual en todas partes cuando $\sum F = 0$.

• Hay sistemas indeterminados → ∞ soluciones

• Los Pares de Fuerza (igual magnitud pero sentido opuesto, separados por d) → se puede remplazar por un torque. ($M = dF$) → momento de fuerza.

1 no colineal

2 colineales

Barras de Fuerza Cero: Hay 3 barras en la unión, no hay F_{ext}.

- La no colineal no hace fuerza → se usan por seguridad.

2) Método de Secciones: hacer un corte imaginario

- Las fuerzas de las barras cortadas se interpretan como fuerzas externas a esa sección.
- Hago el corte en la barra que me piden.
- Se elige el lado con menos fuerzas externas.
  a) F_{ext}
  b) Corto y calculo.

Fuerzas Distribuidas → reemplazar $w(x)$ por una fuerza equivalente F.

$w(x)$ → densidad de fuerza $= \dfrac{\text{fuerza}}{\text{largo}}$

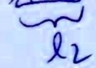
F equivalente cumple → $\Sigma F = 0$; $\Sigma \tau = 0$

Fuerza Total Equivalente: $\vec{F} = \int w(x)\,dx$ $\quad (F_{TOT} = F_{equiv})$

Torque equivalente: $\vec{\tau}_{eq} = \int x\,df = \bar{x} \cdot F$

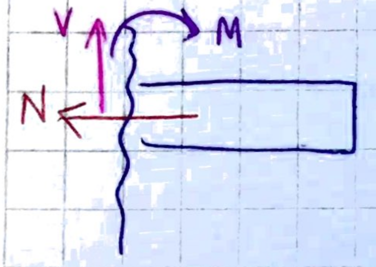
"Centro de Fuerza": $\bar{x} = \dfrac{\int x\,df}{F} = \dfrac{\int x \cdot w(x)\,dx}{\int w(x)\,dx}$

Pto medio de un Δ → $\frac{2}{3}\ell_2$



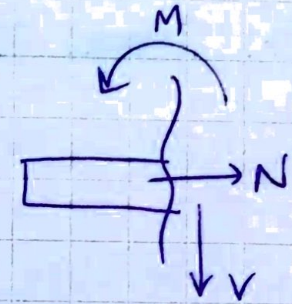
ℓ_2

Fuerzas Internas



V: fuerza de corte

M: momento flector (torque)

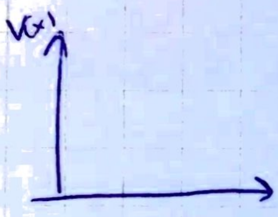


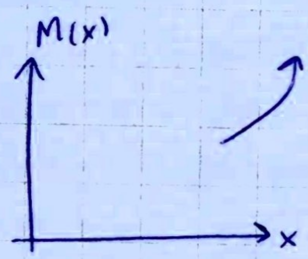
1) Hallar fuerzas externas $\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma \tau = 0 \end{cases}$

2) " " internas → cortar la barra a una distancia x.

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$





Las pendientes son V(x).

· Para poder dibujar el gráfico V(x), se corta la barra a una distancia x.

$\boxed{-W(x) = \frac{dV}{dx}}$ $\boxed{V(x) = \frac{dM}{dx}}$ } Para fuerzas distribuidas

• Con fuerzas puntuales se hace un corte entorno a donde se está aplicando la fuerza.

} $\boxed{V^+ = V^- - P_{\text{fuerza puntual}}}$

• V(x) tiene que ser = a la fuerza en los extremos

• M(x) = torques en los extremos.

Mét. Trabajos Virtuales

$$\delta W^{TOTAL} = \delta W^{TRAS} + \delta W^{ROT} = 0$$

PASOS

1) Identificar variables independientes (ver qué se puede mover y en qué dirección).

2) Reconocer qué fuerzas hacen el trab. virtual:
- internas: nunca hacen T.V. total → se cancelan
- externas: las que no hacen → ptos fijos (desplazam. cero) / mov. restringido con desplazam. $\perp$ a la fuerza.

3) Fuerzas que sí hacen trabajo:

a) Escribir la posición donde se aplica la fuerza en función de las variables independientes.

b) Calculo $\delta\vec{r}$ ó $\delta\vec{\theta}$ como si calculara diferenciales (derivadas)

4) Escribo T.V., hago $\boxed{\delta W = 0}$ y despejo lo que me piden.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

- Conductor → e^- se mueven libremente.
- Aislante → no se mueven libremente.

Ley de Coulomb: $\vec{F}_{q_2 q_1} = K \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \dfrac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$ $\Bigg\}$ $\boxed{|\vec{F}_{q_1 q_2}| = K \cdot \dfrac{q_1 q_2}{d^2}}$

- Proporciones de carga: $\underset{q}{\bigcirc}$ $\underset{0}{\bigcirc}$ → $q\,0$ (se juntan) → $q/2$ $q/2$

Campo Eléctrico: $\vec{E}_q(\vec{r}) = \dfrac{Kq\,(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$ → $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = \dfrac{KQ}{r^2}$

- carga de prueba q_0: no afecta a q.

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2}}$$

- Superposición de $\vec{E}$: se suman vectorialmente.

Densidad de carga: $dq(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\, dVol$ ⟶ $Q_D = \int dq = \int_D \rho(\vec{r})\, dVol$

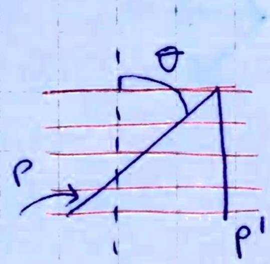
- ↳ superficial: $dq(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \cdot dA(\vec{r})$
- ↳ lineal: $dq(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})\, d\ell(\vec{r})$

- Campo en una distribución continua de cargas: $E_q(\vec{r}) = \displaystyle\int \frac{K \cdot q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} (\vec{r} - \vec{r}\,')$

$\vec{E}_{\text{plano } \infty} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ $\vec{E}_{\text{2 PLACAS } \infty \text{ (adentro)}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, afuera → $\vec{E} = 0$

Flujo Eléctrico:
- Plano: $\phi_1 = A \cdot E$
- Plano Inclinado: $\boxed{\phi_2 = E \cdot A \cdot \cos\theta}$
  ↳ pasa cualquier plano

$\Bigg\}$ $\left[\phi_S = \displaystyle\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}\right]$



$\phi_P = \phi_{P'}$ → pasan las mismas líneas de campo.

Flujo : $\boxed{\phi_s = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$

- Para una carga puntual: $\phi_s = \frac{q}{\varepsilon_0}$ → no depende de R

Ley de Gauss : $\phi_s = \boxed{\frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} \, d\vec{A}}$

1) Identificar la simetría
2) Dibujar una superficie imaginaria S que sea coherente con la simetría.
3) Calcula el flujo ϕ_s a través de la superficie imaginaria.
4) Despejo el $\vec{E}_{ens}$ usando Gauss.

- Campo de una esfera: $\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

Esfera sólida → $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}$

Alambre unif. cargado → $E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

- $\vec{E}_{ind} + \vec{E}_q = 0$ → hasta aquí se polariza un conductor.

CONDUCTORES →
- $\vec{E}_{dentro} = 0$
- Qneta del conductor está en la superficie
- Superficie ext. el $\vec{E}$ es ⊥ a ésta.

* cable a tierra.

Forma diferencial de Gauss: $\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\right]$

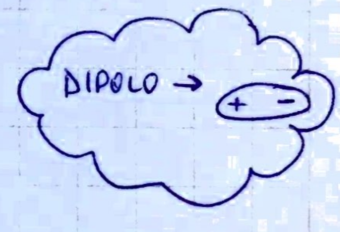
Potencial Eléctrico: $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot V}$ $\rightarrow V(a) - V(b) = \int_{\gamma_{ab}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

- $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$
- $\left[V = \dfrac{kq}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + V_0\right]$ 1 carga
- V no es único $\longrightarrow$ diferencias de potencial sí.

Volt $= \dfrac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$

- Carga Puntual $\rightarrow V = \dfrac{KQ}{r}$

$\left[\bullet\ V(\vec{r}) = k\cdot q\cdot\dfrac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}\right]$ $\rightarrow$ Potencial para Dipolos



- Momento Dipolar eléctrico: $\left[\vec{p} = q\cdot\vec{d}\right]$

Trabajo: $W_{\gamma a\to b}(\vec{F}_N) = \int_{\gamma ab} \vec{F}_N\cdot d\vec{l}$

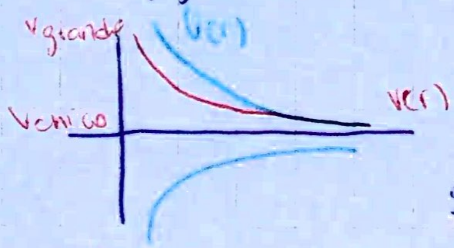
$\hookrightarrow W_{a\to b}(\vec{F}_N) = K(\vec{b}) - K(\vec{a})$

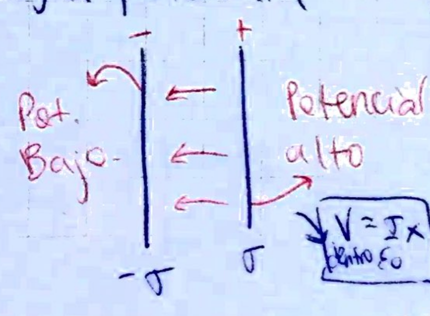
- Si $\vec{F}_{elect} = q\cdot\vec{E}$ $\rightarrow \left[W = q\int E\,dl = q(V(b) - V(a)) = \underbrace{U(b) - U(a)}_{\text{Energía Potencial}}\right]$

Conservación de la Energía: $K(a) + U(a) = K(b) + U(b)$

- Los sistemas tienden a configuraciones de menor energía potencial (de mayor a menor)

$\boxed{U(\vec{r}) = q\cdot V(\vec{r})}$





Energía Almacenada

$W_i = q_i V$ → W necesario para traer q desde el ∞.

$U = \sum W_i$

$U = \frac{1}{2} \sum q_k V'(\vec{r}_k)$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum q_k \sum \frac{k q_j}{r_{jk}}}$$

$U = \frac{1}{2} \int V(\vec{r})\, dq(\vec{r})$

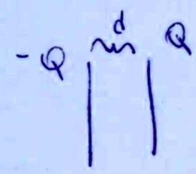
$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2 \, dVol}$$

Superficies Equipotenciales: superficies de conductores.
↳ no me cuesta nada mover la carga en esa superficie ($E \perp S$)

- $\vec{E} \perp S_{equip.}$
- $W_{a \to b} = 0$

Ej 1) Cascarones Esféricos
2) Condensador

CONDENSADOR: almacen Energía, separados por mat. aislante, con cargas Q y −Q.



$$\boxed{U = \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2 d}{A}}$$ (Placas) $$\boxed{V_{ab} = \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{A}\right) Q}$$

Capacitancia: $\boxed{C = \frac{Q}{V}}$ → $\frac{\text{coulomb}}{\text{volt}}$ = Faraday (2 placas → $C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$)

- cascarones → $C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$

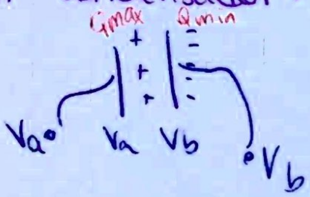
- cilindros $= \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$

Energía en condensadores

$$\boxed{U = \frac{Q}{2} V_{ab}} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} C V^2} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

- La capacitancia depende de la geometría!

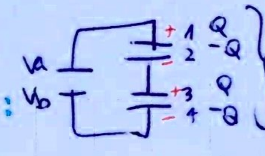
Cargar un condensador: voltaje de un conductor es =.



$Q_{max} + Q_{min} = 0$

CONECTAR CONDENSADORES

EN SERIE:

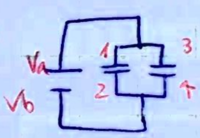


$V_1 = V_a$, $V_4 = V_b$, $V_2 = V_3$

Q cte

↳ $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}}$

EN PARALELO:



$V_1 = V_3 = V_a$

$V_2 = V_4 = V_b$

↳ $C_{eq} = C_1 + C_2$ → V cte

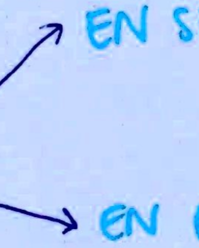
Dieléctricos:

$$\boxed{\vec{E}_{\text{dieléctrico}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\substack{\text{dipolos}\\ \text{alineados}}}}$$

$$V_{dip}(\vec{r}) = k \cdot \vec{p} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- Hay carga en el borde

"Nudos de Dipolo" →



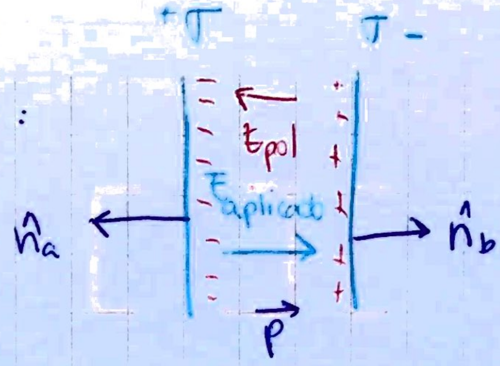
Dipolo en $\vec{E}$ uniforme → $\vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$ (suma de fuerzas es nula)

→ $\tau = \vec{p} \times \vec{E} = p \cdot E \cdot \operatorname{sen}\theta$

↳ El dipolo eléctrico es como un elástico de torsión → quiere volver al inicio.

$$\boxed{U(\theta) - U(\theta_0) = p \cdot E(\cos\theta_0 - \cos\theta)} \rightarrow U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Campos $\vec{E}$ en dieléctricos :



- $Q_T = \oint \underbrace{\sigma_i \, dA}_{\vec{P}\cdot\hat{n}} + \int_V \underbrace{\rho_i \, dVol}_{-\nabla\cdot\vec{P}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \sigma_i^{\,a} = \vec{P}\cdot\vec{n}_a < 0 \\ \bullet\ \sigma_i^{\,b} = \vec{P}\cdot\vec{n}_b > 0 \end{array} \right\}$$

- $\vec{E}_{pol} = K \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \cdot \rho_i(\vec{r}\,')\, dvol + K \oint_{Sv} \underbrace{\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, \sigma_i(\vec{r}\,')\, dA}_{\sigma_i = \vec{P}\cdot\hat{n}}$

GAUSS DIELÉCTRICOS: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc,S}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot dA$

$\rightarrow$ $\boxed{\oint_S \vec{D}\, d\vec{A} = Q_{libre}}$ con $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}}$

$$Q_{libre}, \varepsilon \xrightarrow[\oint_S D\,dA = Q_{libre,enc}]{} \vec{D} \xrightarrow{\varepsilon\cdot\vec{E} = \vec{D}} \vec{E} \xrightarrow[\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}]{} \vec{P} \rightarrow \boxed{\sigma_i = \vec{P}\cdot\hat{n}}, \quad \boxed{\rho_i = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}$$

$$\vec{E} \rightarrow V_{ab} \xrightarrow{V_{ab} = \int \vec{E}\, dl} C \rightarrow U_{almacenada} = \frac{1}{2} Q V_{ab} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$C = \frac{Q_\ell}{V_{ab}}$

$\frac{1}{2} C V^2$

- A mayor ε, + se polariza.

$Q_c > Q_{c_0}$ → almacena + carga → + capacitancia.

$\boxed{C > C_0}$ SIEMPRE

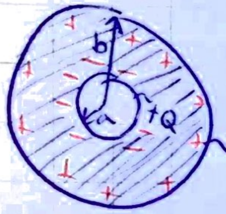
$V_c > V_{c_0}$ → V cte con Q cte → $V_c < V_{c_0}$; $V_c < V_{c_0}$

• $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_{apl} + \vec{E}_{pol}$

GAUSS

(cambiar $\varepsilon_0 \to \varepsilon$)

• $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$



$\underline{0 < r < a}$:

$\oint D\,dA = Q_{libre} = 0 \to \boxed{D = 0}$ $D = \varepsilon_0 \cdot E \to \boxed{\vec{E} = 0}$

$\underline{r \in (a,b)}$: $D \cdot 4\pi r^2 = \oint D\,dA = Q \to D = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$

$\to \vec{E} = \dfrac{Q}{\varepsilon \pi 4 r^2}$

$\underline{r > b}$: $\vec{E} = 0$.

Corriente Eléctrica: $I = \dfrac{dQ}{dt}$ → $[I] = \dfrac{q}{t}$ = Ampére.

• Sentido: + → −

Densidad de carga en mov. → $\rho_m = qN$

→ $dI = \dfrac{dQ}{dt} = \rho_m \cdot \vec{v} \cdot \vec{dA}$ → $\boxed{I_s = \int_s \rho_m \vec{v} \cdot \vec{dA} = \int_s \vec{J} \cdot \vec{dA}}$

$I = \int dI$ con $\vec{J} = \rho_m \vec{v}$ → densidad de corriente

$\left[I_s = -\dfrac{dQ_v}{dt} \right]$ → sale más de lo que entra. → rapidez de cambio de la carga va disminuyendo

Conservación de la carga eléctrica: $\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \dfrac{d\rho}{dt} = 0 \right]$

$\left(\text{Transformador: } \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{N_1}{N_2} \right) \to \left(V_1 I_1 = V_2 I_2 \right)$

Batería: mantiene cte la diferencia de potencial.

Ley de Ohm: La densidad de corriente es proporcional al campo $\vec{E}$ y la cte de prop: $\sigma = \frac{\rho_m q}{\xi}$

conductividad

Microscópica: $\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$

- Resistividad eléctrica → $\rho = \frac{1}{\sigma}$ → $\Omega \cdot m$

cte en todo el cable

LEY DE OHM: $I = \int_S J\, dA = J_0 \cdot S = \sigma E_0 S = \frac{\sigma V_{ab} S}{L}$

Cable:

- $\boxed{V = \left(\underbrace{\frac{\rho L}{S}}_{R}\right) I}$ → $\boxed{V = IR}$

Cilindro:

$E(r) = \frac{\rho I}{2\pi r L}$, $V = \left(\frac{\rho \ln(a/b)}{2\pi L}\right) I$

Energía Potencial: $U_s = U_a - q \cdot E \cdot \ell(s)$

CIRCUITOS

- $\Delta E_{potencial} = I \cdot V \cdot \Delta t$
- $\boxed{\text{Potencia} = I \cdot V}$ → con resistencia: $\boxed{P = I^2 R}$
  → [Watts] = Ampere · Volt

- Serie → $R_T = R_1 + R_2$

- Paralelo → $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Reglas de Kirchoff:

- **nodo**: pto del diagrama donde se separa la corriente.
- **espiras**: cualquier camino conductor cerrado del diagrama.

1) Nodo ⟶ $\boxed{I_{entra} = I_{sale}}$ ⟶ $I = I_1 + I_2 \dots$

2) Espira ⟶ $\boxed{\Delta V = 0}$ $\quad E_{ganada} = E_{perdida}$
   - Necesito tantas espiras como zonas cerradas tenga el circuito.
   - ⟶ De − a + se considera ΔV positivo ("subo")
   - ⟶ Paso una Resist. en el sentido de la corriente ⟶ $-IR$

CIRCUITOS R-C

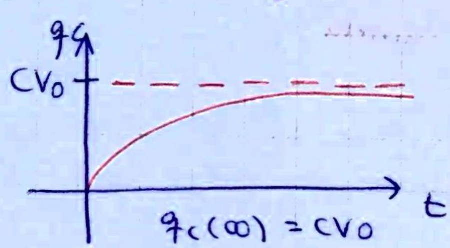
$t=0$ → condensador descargado ⟶ $R=0$
$t=\infty$ → " cargado ⟶ $R=\infty$

1) Asumo que siempre se cumple Kirchoff *
2) Relaciono corrientes con la tasa que crece la carga en el condensador:

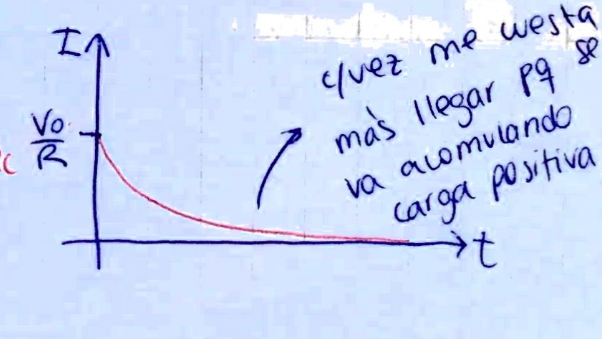
$I = \frac{dq_c}{dt}$ → EDO *

$$\boxed{q_c(t) = C \cdot V_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

$$\boxed{I = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$



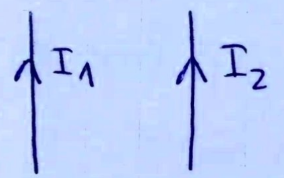
$q_c(\infty) = CV_0$



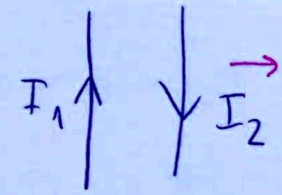
- Para descargar un condensador se hace lo mismo pero $I = -\frac{dq_c}{dt}$ → $q_c(t) = q_0 e^{-t/RC}$

→ $I = \frac{q_0}{RC} \cdot e^{-t/RC}$

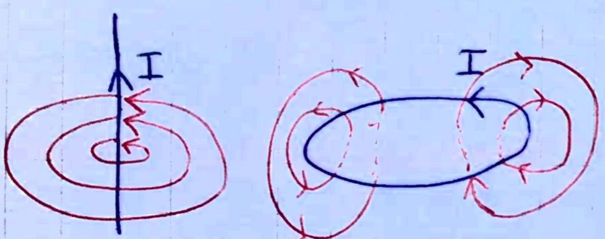
Interacciones Magnéticas



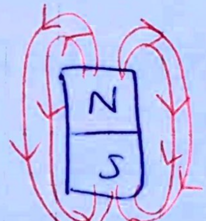
→ se atraen

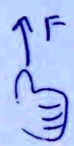


→ se repelen



Circularmente





Fuerza de Lorentz: $\vec{F}_q = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

Fuerza:

- $\perp$ a $\vec{B}$ y $\vec{v}$

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- $\vec{B}$ no ejerce trabajo
- $\vec{B}$ no cambia

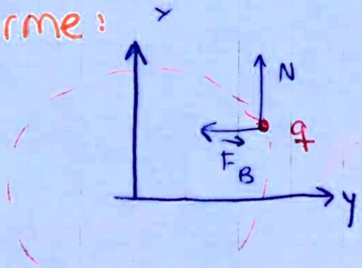
$\vec{F}_B$ no cambia la magnitud de la $\vec{v}$ de la partícula

$\vec{B}$ no cambia el módulo de la $\vec{v}$ pero cambia la dirección (excepto //)

En $\vec{B}$ uniforme:

- $\vec{v} \perp \vec{B}$:

v tangencial cte



$$\boxed{R_{giro} = \frac{m v}{q B_0}}$$

- Caso general: solo influye la componente $v_{\perp \vec{B}}$, no $v_{\parallel \vec{B}}$.
  (v_z se mantiene cte) → Helicoidal

- Alambre recto y $\vec{B}$ uniforme: $\vec{F} = IBL\sin\varphi$

Fuerza sobre corriente cte: $d\vec{F} = dq\,\vec{v} \times \vec{B} = I \int_{\text{alambre}} d\vec{l} \times \vec{B}$

Fuerza sobre un conductor: $\vec{F} = \int_{\text{conductor}} \vec{J} \times \vec{B}\, dVol$

- Espira de corriente en un $\vec{B}$ uniforme: $F_{NETA} = 0$ en una esp. cerrada.

Momento Dipolar magnético de la espira: $\vec{\mu} = I\vec{A} = IA\,\hat{n}$

Torque → $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = IAB\sin\theta\,\hat{y}$

Ley de Biot-Savart → $\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{cable}} d\vec{l} \times \dfrac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$

* $\boxed{\vec{B}_{\text{alambre}\ \infty} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\hat{z}}$

- Entre corrientes: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \rightarrow \vec{F}_{1-2} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \cdot L$

QUÍMICA

Arrhenius
- Ácido: en agua proporciona iones hidrógeno.
- Base: en agua → iones hidroxilo

Lewis
- ácido: acepta pares de e^-
- Base: dona pares de e^-

Brønsted – Lowry
- Ácido: capaz de donar protones
- Base: capaz de aceptar protones

Teoría Protónica de BL: una especie cede PROTONES y una sustancia los acepta.

ácido - base conjugado

$$\text{ácido 1} + \text{base 2} \rightleftarrows \text{base 1} + \text{ácido 2} \quad \Big\} \text{ PROTOLITOS}$$

ácido - base conjugado

Ácido monoprótico: cede 1 protón
Base " : acepta 1 protón

Anfolito → pueden actuar como ácido y base (anfiprótico)

- ácido acético (CH_3COOH)
  - ácido en agua
  - base en ácido perclórico

H_2O es anfiprótico → actúa como B o A. (≈ Metanol, Etanol)

Autoprotólisis → $H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

Cte de equilibrio: $K_W = \dfrac{a_{H_3O^+} \cdot a_{OH^-}}{a_{H_2O}}$, $a_{H_2O} = 1$

$$K_W = \frac{[H_3O^+][OH^-]}{[\cancel{H_2O}] \to 1} = 10^{-14} \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-7}$$

$[OH^-] = 10^{-7}$

pH : $\boxed{pH = -\log[H_3O^+]}$, $pH + pOH = -\log K_w = 14$

Escala de pH (agua) : 0 - 14

- Fuerza de un ácido / base → tendencia a ceder protones o aceptarlos.
  → se compara con otra sustancia. (Agua)

Ácido Fuerte : protolitos que se encuentran totalmente disociado en medio acuoso.

Base Fuerte : experimenta protólisis total

- Los débiles reaccionan en forma incompleta con el agua.

Ácido Diluido: ácido + $H_2O \rightleftarrows$ base + H_3O^+ + Ka → cte de acidez

Ka = cte de acidez → $\left[Ka = \frac{[Base][H_3O^+]}{[Ácido]} \right]$

HCl , HNO_3 , $HClO_4$

- Ka > 1 : equilibrio totalmente desplazado a la derecha y hay Ácidos fuertes
  - Sus bases conjugadas son muy débiles. (casi no reaccionan con H_2O)
    Cl^- NO_3^- ClO_4^-

- Ka < 1 : equilibrio hacia la izquierda.

(Mayor Ka → + ácida)
Menor pKa ↗

Ej: $H_2PO_4^- + H_2O \rightleftharpoons HPO_4^{2-} + H_3O^+$, $Ka = \frac{[HPO_4^{2-}][H_3O^+]}{[H_2PO_4^-]}$

• Base débil: K_B = cte de basicidad → $K_B = \frac{[Ácido][OH^-]}{[Base]}$

Par Ácido - Base Conjugado: (NH_4^+/NH_3)

$NH_4^+ + H_2O \rightleftharpoons NH_3 + H_3O^+$ $ka = \frac{[H_3O^+][NH_3]}{[NH_4^+]}$

$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$ $Kb = \frac{[OH^-][NH_4^+]}{[NH_3]}$

$Ka \cdot K_b = \frac{[H_3O^+]}{[OH^-]}$

Sumando ambas: $2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$

Cuando reacciones se suman → ctes se multiplican → $\underbrace{Ka \cdot K_b}_{Kw} = [H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$

Ácido fuerte → $Ka >> 1$ → $K_a = \infty$; → $K_b << 10^{-14}$

Ácido débil: $1 >> Ka >> 10^{-14}$

Base fuerte: $K_b >> 1$

• $Ka << 10^{-14}$ → ácido conjugado de una base fuerte.

• Efecto Nivelador (Agua) → cuando todos los ácidos se comportan como si tuvieran la misma fuerza en el disolvente.

• Disolvente diferenciador → ácido acético.

Hidrólisis: interacción entre las molécs. de agua y los iones de sal.

$K_H : \frac{[H_3COOH][OH^-]}{[CH_3COO^-]}$ → cte de Hidrólisis

PROTOLITOS FUERTES

ÁCIDO FUERTE: 1) Describir las reacciones implicadas en el sistema
2) Expresión de las ctes de equilibrio
3) Aplicación de BM, BC y BP.

Ej: a) Calcular el pH de HCl (0,1 M)

$$HCl + H_2O \rightarrow Cl^- + H_3O^+$$
$$H_2O + H_2O \rightleftarrows OH^- + H_3O^+ \qquad \underline{Kw} = [H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$$

BM: $C_{HCl} = [Cl^-]$

BC: $[H_3O^+] = [Cl^-] + [OH^-]$

BP: $[H_3O^+] = [Cl^-] + \cancel{[OH^-]}$ → de aquí se calcula el pH.

De Kw: $[OH^-] = \dfrac{Kw}{[H_3O^+]}$, de BM: $[Cl^-] = C_{HCl}$

Remplazando en el BP: $[H_3O^+] = C_{HCl} + \dfrac{Kw}{[H_3O^+]}$

Aprox: Si $C_{HCl} > 10^{-6}$ M → $[H_3O^+] >> [OH^-]$
(el agua no aporta)

$\therefore [H_3O^+] = C_{HCl}$

$10^{-8} < C_{HCl} < 10^{-6}$ → El agua aporta hidronios = que el ácido fuerte.

$$\therefore [H_3O^+] = C_{HCl} + \frac{Kw}{[H_3O^+]}$$
$$[H_3O^+]^2 - C_{HCl}[H_3O^+] - Kw = 0$$

$C_{HCl} < 10^{-8} M \longrightarrow$ el agua aporta todos los hidronios.

$\therefore [H_3O^+] = \frac{K_w}{[H_3O^+]} \rightarrow [H_3O^+] \sqrt{K_w} = 10^{-7} \longrightarrow \boxed{pH = 7}$

Pero $C_{HCl} = 0,1 \longrightarrow [H_3O^+] = C_{HCl} = 0,1 M \rightarrow \boxed{pH = 1}$

b) pH para HCl ($1,5 \cdot 10^{-8} M$)

$[H_3O^+]^2 - C_{HCl} \cdot [H_3O^+] - K_w = 0$

$\frac{(1,5 \cdot 10^{-8}) \pm \sqrt{(1,5 \cdot 10^{-8})^2 + 4 \cdot 10^{-14}}}{2}$ → $[H_3O^+] = 1,08 \cdot 10^{-7}$; negat.

BASES FUERTES

a) KOH 0,15 M

$KOH \longrightarrow K^+ + OH^-$

$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

$K_w = [H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$

BM : $C_{KOH} = [K^+]$

BC : $[K^+] + [H_3O^+] = [OH^-]$

BP : $[OH^-] = [K^+] + [H_3O^+]$ → de acá se calcula pH.

$\frac{K_w}{[OH^-]} = [H_3O^+]$

$C_{KOH} = [K^+]$

Se remplaza en BP : $[OH^-] = C_{KOH} + \cancel{\frac{K_w}{[OH^-]}}^{0}$

$C_{KOH} > 10^{-6} \longrightarrow [OH^-] = 0,15 M$

$pOH = 0,8239 \longrightarrow \boxed{pH = 14 - pOH = 13,176}$

b) KOH $(2 \cdot 10^{-8} M)$

$$[OH^-]^2 = C_{KOH} \cdot [OH^-] + K_w$$

$$[OH^-]^2 - C_{KOH}[OH^-] - K_w = 0$$

$$[OH^-] = \frac{2 \cdot 10^{-8} \pm \sqrt{4 \cdot 10^{-16} + 4 \cdot 10^{-14}}}{2}$$

$$[OH^-] = 1{,}1 \cdot 10^{-7}$$

$$pOH = 6{,}96$$

$$pH = 14 - 6{,}96 = 7{,}04$$

Ácidos Débiles (HA)

$$HA + H_2O \rightleftarrows A^- + H_3O^+ \qquad K_a$$

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows OH^- + H_3O^+ \qquad K_w - [H_3O^+][OH^-]$$

$$K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[HA]}$$

BM: $C_{HA} = [HA] + [A^-]$

BC: $[H_3O^+] = [A^-] + [OH^-]$

BP: $[H_3O^+] = [A^-] + [OH^-]$

↳ dejar expresado en términos de parámetros conocidos → concentraciones analíticas / cles

∴ $[HA]$ se deja expresado en función de $[A^-]$ ⟶ $[A^-]$ se obtiene del B.M.

$$[HA] = \frac{[A^-][H_3O^+]}{K_a}$$

• Remplaza $[HA]$ en el BM y se factoriza por $[A^-]$:

$$C_{HA} = \frac{[A^-][H_3O^+]}{K_a} + [A^-] \longrightarrow C_{HA} = [A^-]\left(\frac{[H_3O^+]}{K_a} + 1\right)$$

• Despejando $[A^-]$:

$$\boxed{[A^-] = \frac{C_{HA} \cdot K_a}{[H_3O^+] + K_a}}$$

• Remp. en BP: $[H_3O^+] = \frac{C_{HA}\,Ka}{[H_3O^+] + Ka} + [OH^-]$

Se deja en función de hidronios:

$$\boxed{[H_3O^+] = \frac{C_{HA} \cdot Ka}{[H_3O^+] + Ka} + \frac{Kw}{[H_3O^+]}}$$

Aproximaciones:

1) Despreciar el aporte del agua: 5% $[H_3O^+] >> [OH^-]$
BC queda: $[H_3O^+] = [A^-]$

2) Ácido se disocia poco si: 5% $C_{HA} > [H_3O^+]$
$([HA] >> [A^-])$
BM queda: $C_{HA} = [HA]$

• $Ka = \frac{[H_3O^+]^2}{C_{HA}} \longrightarrow \boxed{[H_3O^+] = \sqrt{Ka \cdot C_{HA}}}$

Calcule el pH:
a) HCN 0,1 M, pKa = 9,3 $\rightarrow$ $Ka = 5{,}011 \cdot 10^{-10}$

$H_2O + HCN \rightleftarrows [CN^-] + [H_3O^+]$
$H_2O + H_2O \rightleftarrows [H_3O^+] + [OH^-]$

BM: $C_{HCN} = [HCN] + [CN^-]$
BC: $[H_3O^+] = \cancel{[OH^-]}^{0} + [CN^-]$
BP: $[H_3O^+] = \cancel{[OH^-]}^{0} + [CN^-]$

$K_A = \frac{[H_3O^+][CN^-]}{[HCN]}$

Aprox:
1) $[H_3O^+] >> [OH^-]$
2) $[HCN] >> [CN^-]$

$K_A = \frac{[CN^-]^2}{[HCN]} = \frac{[H_3O^+]^2}{[HCN]}$

$[H_3O^+] = \sqrt{Ka \cdot C_{HCl}}$
$[H_3O^+] = 7{,}08 \cdot 10^{-6}$

Chequeo 1:

$0,05 \cdot 7,08 \cdot 10^{-6} > 1,412 \cdot 10^{-9}$

$0,354 \cdot 10^{-6} > 10^{-9}$ ✓

Chequeo 2:

$0,05 \cdot 0,1 > 7,08 \cdot 10^{-6}$ ✓

$0,005$

$pH = 5,15$

---

b) $HCOOH$ $(0,001\ M)$ $pKa = 3,75 \rightarrow Ka = 0,1778 \cdot 10^{-3}$

2^{da} Aprox no se cumple:

$$K_A = \frac{[H_3O^+][HCOO^-]}{[HCOOH]}$$

De 1^{era} Aprox $\rightarrow [H_3O^+] = [HCOO^-]$

$C_{HCOOH} = [HCOOH] + [H_3O^+]$

$[HCOOH] = C - [H_3O^+]$

$$K_A = \frac{[H_3O^+]^2}{C - [H_3O^+]}$$ $\rightarrow$ despejar hidronios

BASES DÉBILES

Mismo procedimiento que para ácidos débiles:

Aproximaciones:

1) $[OH^-] >> [H_3O^+]$ * Chequeo: $5\% [OH^-] > [H_3O^+]$

2) $[B] >> [BH^+]$ $\rightarrow$ la base se protona poco

Si se cumplen ambas: $\boxed{[OH^-] = \sqrt{C_B \cdot K_B}}$

Calcular pH de NH_3 (0,01M) $pKa = 9,26 \rightarrow Ka = 5,5 \cdot 10^{-10}$

$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$

$2H_2O \rightleftharpoons [H_3O^+] + OH^-$

$K_w = [OH^-][H_3O^+] = 10^{-14}$

$K_B = \frac{[OH^-][NH_4^+]}{[NH_3]}$

BM: $C_{NH_3} = [NH_3] + \cancel{[NH_4^+]}^{0}$

BC: $\cancel{[H_3O^+]}^{0} + [NH_4^+] = [OH^-]$

BP: $\cancel{[H_3O^+]}^{0} + [NH_4^+] = [OH^-]$

Aprox: 1) $[OH^-] > [H_3O^+]$

Chequeo: $0,05 \cdot 0,43 \cdot 10^{-3} > 2,33 \cdot 10^{-11}$ ✓

$Ka \cdot K_B = 10^{-14}$

$K_B = 0,018 \cdot 10^{-3}$

2) $[NH_3] > [NH_4^+]$

$0,05 \cdot \underbrace{0,01}_{\approx C_{NH_3}} > [OH^-]$

$> 0,43 \cdot 10^{-3} \rightarrow 5 \cdot 10^{-4} > 4,3 \cdot 10^{-4}$

$K_B = \frac{[OH^-]^2}{C_{NH_3}} \longrightarrow [OH^-] = \sqrt{K_B \cdot C_{NH_3}} = 0,43 \cdot 10^{-3}$

$pOH = 3,36$

$\boxed{pH = 10,633}$

Ácidos Polipróticos (H_2A)

$$H_2A + H_2O \rightleftarrows HA^- + H_3O^+ \qquad Ka_1$$

$$HA^- + H_2O \rightleftarrows A^{2-} + H_3O^+ \qquad Ka_2$$

$$2H_2O \rightleftarrows OH^- + H_3O^+$$

- $Ka_1 = \frac{[HA^-][H_3O^+]}{[H_2A]}$ $\qquad Ka_2 = \frac{[A^{2-}][H_3O^+]}{[HA^-]}$ $\qquad Kw = [H_3O^+][OH^-]$

BM: $C_{H_2A} = [H_2A] + [HA^-] + [A^{2-}]$

BC: $[H_3O^+] = [HA^-] + 2[A^{2-}] + [OH^-]$

BP: $[H_3O^+] = [HA^-] + 2[A^{2-}] + [OH^-]$

Se despeja del BM el $[H_2A]$ usando Ka_1 y Ka_2

$$CH_2A = [H_2A] + \frac{Ka_1 [H_2A]}{[H_3O^+]} + \frac{Ka_1 Ka_2 [H_2A]}{[H_3O^+]^2}$$

→ todo queda en función de $[H_2A]$

$$[H_2A] = \frac{C_{H_2A} [H_3O^+]^2}{[H_3O^+]^2 + Ka_1 \cdot [H_3O^+] + Ka_1 Ka_2}$$

- Lo mismo para $[HA^-]$ y $[A^{2-}]$

Aproximación:

1) $[H_3O^+] >> [OH^-]$ $\longrightarrow$ Chequeo $0{,}05 \cdot [H_3O^+] > [OH^-]$

2) $Ka_1 >> Ka_2$ $\longrightarrow$ Chequeo: $Ka_1 > 100 Ka_2$
- Se desprecia la 2da disociación!

3) $[H_3O^+] >> Ka_1 \cdot Ka_2$ $\longrightarrow$ Chequeo: $[H_3O^+] > 100 Ka_1 Ka_2$
- Se desprecia el producto $Ka_1 \cdot Ka_2$ del denominador de $[HA^-]$.

4) $[H_2A] >> [HA^-]$ $\longrightarrow$ Chequeo: $0{,}05 \cdot C_{H_2A} > [H_3O^+]$
- Su 1era disociación se desprecia

Ej: pH = ? H_2CO_3 (0,1 M) $pKa_1 = 6{,}35$ y $pKa_2 = 10{,}33$
$Ka_1 = 0{,}446 \cdot 10^{-6}$ $Ka_2 = 4{,}67 \cdot 10^{-11}$

$H_2CO_3 + H_2O \rightleftarrows HCO_3^- + H_3O^+$
$HCO_3^- + H_2O \rightleftarrows CO_3^{2-} + H_3O^+$
$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

$$Ka_1 = \frac{[HCO_3^-][H_3O^+]}{[H_2CO_3]}$$

$$Ka_2 = \frac{[CO_3^{2-}][H_3O^+]}{[HCO_3^-]}$$

BM: $C_{H_2CO_3} = [H_2CO_3] + \cancel{[HCO_3^-]}^{0} + \cancel{[CO_3^{2-}]}^{0}$
BC: $[H_3O^+] = [HCO_3^-] + 2\cancel{[CO_3^{2-}]}^{0} + \cancel{[OH^-]}^{0}$
BP: $[H_3O^+] =$ " " " " " " " " "

1) Aprox: $H_3O^+ > OH^-$ Sí $H_3O^+ > OH$ ✓
2) $Ka_1 > Ka_2$ ✓ $Ka_1 > 100 \cdot Ka_2$ ✓
4) $H_2A > HA^-$ Sí $10^{-3} = 0{,}05 \cdot 0{,}1 > 0{,}211 \cdot 10^{-3} = 2{,}11 \cdot 10^{-4}$

$[H_3O^+] = \sqrt{Ka_1 \cdot C_{H_2CO_3}} = 0{,}211 \cdot 10^{-3}$
pH = 3,675
OH = $4{,}74 \cdot 10^{-11}$

Sales

ácido o básico del

→ el carácter ^más fuerte determina el caráct. de la sal.

- **Ácido fuerte y base fuerte**

NO SE FORMAN pq son irreversibles

$NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$

$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

$NaOH$ base fuerte

HCl ácido fuerte

$K_w = [H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$

BM: $C_{NaCl} = [Na^+] = [Cl^-]$

BC: $[H_3O^+] + [Na^+] = [OH^-] + [Cl^-]$

BP: $[H_3O^+] = [OH^-]$

$[H_3O^+] = 10^{-7} \longrightarrow pH = 7$

- **Ácido fuerte y base débil**

$BHCl \longrightarrow BH^+ + Cl^-$

$BH^+ + H_2O \rightleftarrows B + H_3O^+$

$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

$$K_a = \frac{[B][H_3O^+]}{[BH^+]}$$

BM: $C_{sal} = C_{BH} = [Cl^-]$

$C_{BH} = [BH^+] + [B]$

$$[BH^+] = \frac{[B][H_3O^+]}{K_a}$$

BC: $[BH^+] + [H_3O^+] = [Cl^-] + [OH^-]$

BP: $\boxed{[H_3O^+] = [B] + [OH^-]}$

$$C_{BH} = \frac{[B][H_3O^+]}{K_a} + [B]$$

$$C_{sal} = C_{BH} = [B]\left(\frac{[H_3O^+] + K_a}{K_a}\right) \rightarrow [B] = \frac{C_{sal} \cdot K_a}{[H_3O^+] \cdot K_a}$$

En BP: $[H_3O^+] = \frac{C_{sal} \cdot Ka}{[H_3O^+] + Ka} + \frac{Kw}{[H_3O^+]}$

Aprox: 1) $[H_3O^+] \gg [OH^-]$ $\longrightarrow$ $0{,}05\ [H_3O^+] > [OH^-]$

2) $[BH^+] \gg [B]$ $\longrightarrow$ $0{,}05\ C_{sal} > [H_3O^+]$

$\therefore\ [H_3O^+] = \sqrt{C_{sal} \cdot Ka}$

Ejemplo: $NH_4Cl\ (0{,}1M)$ $Kb_{NH_3} = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$

$NH_4Cl \longrightarrow NH_4^+ + Cl^-$ $Ka_{NH_4} = 5{,}62 \cdot 10^{-10}$

$NH_4^+ + H_2O \rightleftarrows NH_3 + H_3O^+$

$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

BM: $C_{sal} = \cancel{[NH_4^+]} = [Cl^-] = C_{NH_4}$

$C_{NH_4} = [NH_4^+] + \cancel{[NH_3]}$

BC: $[H_3O^+] + [NH_4^+] = [Cl^-] + \cancel{[OH^-]}^{0}$

BP: $[H_3O^+] = [NH_3] + \cancel{[OH^-]}^{0}$

$Ka = \frac{[NH_3][H_3O^+]}{[NH_4^+]}$

1) $[H_3O^+] > [OH^-]$

Si. $[H_3O^+] = 0{,}37 \cdot 10^{-6} >$ ✓

2) $[NH_4^+] > [NH_3]$

Si. $C_{sal} > [H_3O^+]$

$0{,}005 > 7{,}495 \cdot 10^{-6}$ ✓

$[H_3O^+] = \sqrt{Ka \cdot C_{sal}}$

$= 7{,}495 \cdot 10^{-6}$

$[OH^-] = 1{,}33 \cdot 10^{-9}$

$\boxed{pH = 5{,}125}$

- **Sal de Ácido débil y base fuerte.**

$NaA \longrightarrow Na^+ + A^-$

$A^- + H_2O \rightleftarrows HA + OH^- \quad K_b$

$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^- \quad K_w$

Aprox:

1) $[OH^-] \gg [H_3O^+]$

$5\%\ [OH^-] > [H_3O^+]$

2) $[A^-] \gg [HA] \quad \rightarrow [OH^-] = \sqrt{C_{sal} \cdot K_b}$

Chequeo: $5\%\ C_A > [OH^-]$

- **Sal de Ácido Débil y Base Débil**

pH de $HCOONH_4$ (0,1 M) : $pKa\ HCOOH = 3,75$

$pKa\ NH_4^+ = 9,24$

$HCOONH_4 \longrightarrow HCOO^- + NH_4^+$

$HCOO^- + H_2O \rightleftarrows OH^- + HCOOH \quad K_b^{HCOO}$

$NH_4^+ + H_2O \rightleftarrows NH_3 + H_3O^+ \quad Ka^{NH_4}$

$2H_2O \rightleftarrows OH^- + H_3O^+ \quad K_w$

$$K_b^{HCOO} = \frac{[HCOOH][OH^-]}{[HCOO^-]} = \frac{[\ \ ][\ \ ]}{C_{sal} - [HCOOH]}$$

$$Ka^{NH_4} = \frac{[NH_3][H_3O^+]}{[NH_4^+]} = \frac{[NH_3][H_3O^+]}{C_{NH_4} - [NH_3]}$$

BM: $C_{sal} = C_{HCOO} = C_{NH_4}$

$C_{HCOO} = [HCOO^-] + [HCOOH]$

$C_{NH_4} = [NH_4^+] + [NH_3]$

BC: $[H_3O^+] + [NH_4^+] = [HCOO^-] + [OH^-]$

BP: $[H_3O^+] + [HCOOH] = [NH_3] + [OH^-]$

La disolución contiene un ácido y una base, el pH no es ni excesivamente ácido ni básico:

Aprox:

$$[HCOOH] \gg [H_3O^+]$$

$$[NH_3] \gg [OH^-]$$

$$\therefore [H_3O^+] = \sqrt{K_a^{NH_4} \cdot Ka_{HCOOH}}$$

Chequeo: $(5\% \, C_a > [H_3O^+])$

• $pH < 7$: Conc. del ácido

• $pH > 7$: C_{base} $(5\% \, C_b > [OH^-])$

ANFOLITOS: actúan como ácido y base.

$$\boxed{[OH^-] = \sqrt{K_{B_1} \cdot K_{B_2}}}$$

$$\boxed{[H_3O^+] = \sqrt{K_{A_1} \cdot K_{A_2}}}$$

Cuando los K_A y K_B se parecen $(K_{A_2} \Leftrightarrow K_{B_2})$

BUFFER: $pH = pK_A \pm 1$

$pOH = pK_B \pm 1$

REDOX

E^o de oxidación → dice quién se queda con los e^- (el + E.Neg.)

• Oxidación → moléculas entregan e^-

• reducción → captan e^-

e^- donados = e^- captados

• metálicos solos

• NM están juntos

• Oxígeno tiene carga −2 → excepto en peróxidos que tiene carga −1 (unión directa entre oxígenos. (H_2O_2))

• Hidrógeno tiene carga +1 → expepto hidruros → carga −1

↳ unión con metales alcalinos II y IIIA

• La suma total da la carga de la molécula

Balancear Redox:

1) Ver cuál se oxida y cuál se reduce.

2) Separar en 2 semi reacciones

3) Balancear todos los átomos ≠ a Hidrógeno y Oxígeno.

4) Balancear los Oxígenos agregando H_2O en el otro lado

5) " los Hidrógenos agregando protones (hidronios) del otro lado.

6) Balancear la carga agregando e^-

7) Multiplicar para que e^- desaparezcan.

8) Sumar

Ej: $Zn + Cu^{2+} \rightleftarrows \overset{\text{oxidó}}{Zn^{2+}} + \overset{\text{redujo}}{Cu}$

Ox: $Zn^0 \rightleftarrows Zn^{2+} + 2e^-$

Red: $2e^- + Cu^{2+} \rightleftarrows Cu$

$Zn + Cu \rightleftarrows Zn^{2+} + Cu$

El que se oxida entrega electrones

cede → ox
capta → red

$\overset{+5}{Br}O_3^- + I^- \rightleftarrows Br^- + I_2$

Ej 2: $BrO_3^- + I^- \rightleftarrows Br^- + I_2$

ox: $2I^- \rightleftarrows I_2 + 2e^- \quad /\cdot 3$

red: $BrO_3^- + 6H_3O^+ + 6e^- \rightleftarrows Br^- + 3H_2O + 6H_2O$

→ $6I^- \rightleftarrows 3I_2 + 6e^-$

$6e^- + BrO_3^- + 6H_3O^+ \rightleftarrows Br^- + 9H_2O$ ✓ medio ácido.

Pasar a medio básico:

Necesito OH^- para que reaccionen con los H_3O^+.

$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^- \quad /\cdot 6$

$12H_2O \rightleftarrows 6H_3O^+ + 6OH^-$

Se suman: $6H_3O^+ + BrO_3^- + 6I^- \rightleftarrows Br^- + 3I_2 + 9H_2O$
$12H_2O \rightleftarrows 6H_3O^+ + 6OH^-$ } +

Queda: $3H_2O + BrO_3^- + 6I^- \rightleftarrows Br^- + 3I_2 + 6OH^-$ } Medio Básico

PILA

puente salino → entrega carga al lugar que necesite para que el sistema se mantenga electroneutro

Cierro el circuito → genero f.e.m. $= \Delta E =$ dif. de voltaje

A 25°C:

voltaje de un vaso a una det. concentrac.

$$E_{RED} = E^{\circ}_{RED} - \frac{0{,}059}{n} \cdot \log_{10}(Q)$$

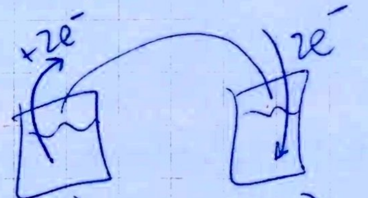
de la q se está reduciendo

FEM $= E_{RED} - E_{RED}$ de la que se está oxidado

Gibbs: mide Energía total del sistema

- $\Delta G < 0$ → espontánea ($\Delta E > 0$)
- $\Delta G > 0$ → no espontánea ($\Delta E < 0$)

- Regla Diagonal
  - El que tenga E_{RED} más grande se deja como reducción y el otro en oxidación para que sea espontáneo.



- Placa que se oxida → ánodo (−)
- " que se reduce → cátodo (+)

Pt / (Líq) // (Líq) /

/ → electrodo o cambio de fase

// → pte salino

/ → cambio de fase

Espontánea:

1) Identificar si la pila es espontánea o no (reduce // oxida)

2) Calcule E_{RED}

3) ΔE

4) K_{eq}

QUÍM 1

Concentración: cant. de soluto en una cant. de disolv.

Porcentaje en masa o %mm o %pp : masa de soluto en 100 gr. de disolución

$$\boxed{\%mm = \frac{\text{masa soluto (g)}}{\text{masa disolución (g)}} \cdot 100}$$

Porcentaje en Volumen o %vv : Volumen de soluto en mL presente en 100 mL de disolución

$$\boxed{\%vv = \frac{\text{volumen soluto (mL)}}{\text{vol. Disolución (mL)}} \cdot 100}$$

% Peso volumen (%mv , %pv) = $\frac{\text{masa soluto (g)}}{\text{vol. Disolución (mL)}} \cdot 100$

- Partes por millón (ppm) = $\frac{\text{masa soluto (mg)}}{\text{masa disolución (kg)}}$

Fracción Molar (x_i) : $\boxed{x_i = \frac{n_i}{n_T}}$

(M) Molaridad : masa de solutos disueltos en 1 lt de disolución

$$\boxed{M = \frac{n}{V} = \frac{m}{\mu \cdot V}}$$

Molalidad (m) : moles de soluto disueltos en 1 kg de solv.

$$m = \frac{\text{moles de soluto}}{\text{masa disolvente (kg)}}$$

Poisson

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \begin{cases} E(x) = \lambda \\ Var(x) = \lambda \end{cases}$$

Bin Neg

Bin Neg (K, p): x es el nº de ensayos hasta obtener el K-ésimo éxito

$$P(x) = \binom{x-1}{K-1} p^{K} \cdot (1-p)^{x-K}$$

$$E(x) = \frac{K}{p}$$

$$c = \frac{Q}{V}$$

$$Var(x) = \frac{K(1-p)}{p^2}$$

Exponencial

$$f(x) = \nu e^{-\nu t}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\nu t}$$

$$E(x) = \cancel{\tfrac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\nu}$$

$$Var(x) = \cancel{\tfrac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\nu^2}$$

→ para el 1er evento

Gamma

$x \sim Gamma(K, \nu)$

$$f(x) = \frac{\nu^{K}}{\Gamma(K)} \cdot x^{K-1} \cdot e^{-\nu x}$$

$$E(x) = \frac{K}{\nu}$$

$$Var(x) = \frac{K}{\nu^2}$$

→ exponencial para el K-ésimo evento

Inductancia mutua: $\dfrac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot r^2}{H}$

Transformador:

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \boxed{V_1 I_1 = V_2 I_2}$$

Inductancia: $L = \dfrac{d\Phi}{dI}$

$$\varepsilon = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$\Phi_B = \iint \vec{B}\, dS$$

Impedancia:

todo → $Z_R = R$

altas → $Z_C = \dfrac{1}{i\omega C}$

bajas → $Z_L = i\omega L$

$$V_{RMS} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon(t) = V_L + V_C + V_R = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI$$

Montaña Rusa	Radio $\vec{B}$
$h = \dfrac{5R}{2}$	$R_{giro} = \dfrac{mv}{qB_0}$

$x, y \rightarrow r, \theta$

$x = r\cos\theta$

$y = r\,sen\,\theta$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} \\ \frac{dx}{d\theta} & \frac{dy}{d\theta} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -r\,sen\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\det = \left(r\cos^2\theta + r\,sen^2\theta\right) = r$$

$$-\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\,\frac{du}{dy} + \frac{dF}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dG}{dV}\cdot\frac{dV}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dv} \\ -\frac{dG}{dx} & \frac{dG}{dV} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dF}{du} & \frac{dF}{dV} \\ \frac{dG}{dv} & \frac{dG}{dv} \end{vmatrix}}$$