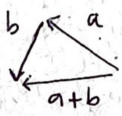
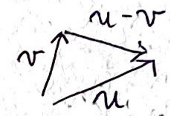
IV. ÁLGEBRA LINEAL

> Vectores

- $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$
  $\downarrow$
  $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$

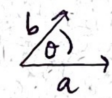


- $u - v = u + (-v)$



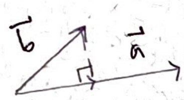
- $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- Producto punto : $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
  $a \cdot a = |a|^2$; $a \cdot b = b \cdot a$; $a \cdot b = |a||b| \cos\theta$



  $a \cdot b = 0 \rightarrow$ ortogonales $\vec{a} \perp \vec{b}$.

  * Proyecciones :



  $\text{proy}_a b = \dfrac{a \cdot b}{|a|^2}\, a$

- Producto cruz: $\underbrace{a \times b}_{\text{ortogonal a } a \text{ y } b.} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

  $|a \times b| = |a||b| \operatorname{sen}\theta$; $a \times b = -b \times a$; $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$

  $a \times b = 0 \rightarrow$ paralelos $\vec{a} \parallel \vec{b}$. $\quad$ $\hookrightarrow$ || vol. paralelep.

> Matrices

$$\text{fila} - \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$
columna

: $A\ m \times n$
(f, c)

$A(m \times n) \cdot B(n \times p) = C(m \times p)$
$= [Ab_1 \ \ Ab_2 \ \ Ab_p]$
cada columna es comb. lineal de columna de A.

* Linealmente indep: $\alpha \wedge \beta = 0 \rightarrow \alpha V_1 + \beta V_2 = 0$.
LD: $\alpha \wedge \beta \neq 0 \rightarrow \alpha V_1 + \beta V_2 = 0$.

- Transpuesta: $A^T(n \times m)$ $\quad (A^T)^T = A$; $(A+B)^T = A^T + B^T$; $(AB)^T = B^T A^T$.

- Sist. ecuaciones : $A\vec{x} = b$; homogéneo $A\vec{x} = 0$.

- Pivotear : 1) intercambiar filas
  2) multiplicar por escalar
  3) sumar a múltiplo de otra

* Pivote : 1er n° no nulo de cada fila.

↝ sin solución : $[0 \ldots 0]\, c$.
única : 1 pivote por columna.
∞s : + columnas que pivotes. (rectas coincidentes).

◦ Inversa:

$A^{-1}A = I$; $AA^{-1} = I$ $\Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ * $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ↝ $Ax = b$ ó $[A \ I] \rightarrow [I \ A^{-1}]$.

$x = A^{-1}b$.

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. * $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{det(A)}$

* Elemental : matriz E de operación elemental (1,2,3) (I).

$\Rightarrow$ A invertible, n pivotes, $Ax = 0$ solo trivial, columnas LI, $Ax = b$ tiene solución, A^T invertible.

◦ Factorización LU:

$Ax = b \rightarrow L(Ux) = b \longrightarrow Ly = b$, $Ux = y$ L : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 1 \end{bmatrix}$ U : $\begin{bmatrix} * & ? & ? & ? & ? \\ 0 & * & * & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ESCALONADA

(3)

$P \cdot A = L \cdot U$ $\Rightarrow$ P: identidad con cambio filas necesarios.

◦ Determinantes:

* Diagonal $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, Δsup : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, Δinf : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

$det(A) = ad - bc$. $det(I) = 1$.

* Propiedades:
  - (1) intercambio filas A para prod B : $det\,B = -det\,A$.
  - (2) multiplico fila A por k : $det\,B = k \cdot det\,A$
  - (3) múltiplo fila A se suma $det\,B = det\,A$.

Matriz cuadrada invertible si $det\,A \neq 0$. y $det\,A^T = det\,A$.

$det\,AB = det\,A \cdot det\,B$.

- **Adjunta:**

$Adj(A) = (C_{ij})^T$

↳ matriz cofactores con det que acompaña cada cofactor. $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

- **Kramer:**

A nxn invertible; la solución de $Ax = b$: $x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}$

reemplazar b en col. i y sacar det.

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj A$.

- **Cholesky**

$A = A^T \rightarrow A = LDL^T$; $U = DL^T$

D: diagonal de U.

* Si A_k son LI: $A = LU$.

> **Espacios vectoriales**

conjunto no vacío V de objetos en el que están definidas operaciones suma y multiplicación por escalares.

$u + v \in V$; $u + 0 \in V$; $u + (-u) = 0 \in V$; $cu \in V$.

- **Subespacio**

subconjunto H de V. cerrado en suma y multiplicación.

Gen $\{v_1, \ldots, v_p\}$ es sub. de V. generado. (base).

* dimensión: nº elementos de cualquier base. $\dim(U) = \dim(V) \rightarrow U = V$.

- **Espacio nulo**

Nul(A) es conjunto soluciones de $Ax = 0$. Subespacio $\mathbb{R}^n$.

m eq lineales con n incógnitas.

- **Espacio columna**

Col(A) es conjunto de todas combinaciones lineales de columnas.

$Col(A) = Gen\{a_1 \ldots a_n\} = \{b : b = Ax\}$.

$\mathbb{R}^m \Leftrightarrow Ax = b$ sol. * Columnas pivote => base para Col(A)

- **Transformación lineal**: regla $T(x)$ que asigna vectores.

$T(u+v) = T(u) + T(v)$.

Bernardita Undurraga 2020

> Conjuntos LI, bases. / + de p vectores = LD.

* $B = \{b_1 \dots b_p\}$ en V es base de H si: B es LI; $H = \text{Gen}\{b_1 \dots b_p\}$.

Puedo eliminar v_k comb. lineal de Gen y aún generá H.

Si $H \neq \{0\}$, algún subconjunto de S es base para H.

* Representación única: $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$.

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ → vector coordenadas de x (respecto de B)

$P_B = \{b_1 \; b_2 \dots b_n\}$; $x = P_B[x]_B$ → $P_B^{-1}x = [x]_B$.

∘ Cambio de base

B y C bases. existe $\underset{C \leftarrow B}{P}$ $(n \times n)$ tq: $[x]_C = \underset{C \leftarrow B}{P}[x]_B$.

$\underset{C \leftarrow B}{P} = [[b_1]_C \dots [b_n]_C]$.

$[c_1 \; c_2 \,\vdots\, b_1 \; b_2] \sim [I \,\vdots\, \underset{C \leftarrow B}{P}]$.

* Columnas de A (inv) forman base.

> Rango

Dimensión espacio columna. $A_{m \times n}$. (= al de fila)

rango A + dim Nul A = n

Invertible. Col A = $\mathbb{R}^n$; dim Col A = n; Nul A = $\{0\}$.

> Vectores y valores propios

∘ Vector propio: $Ax = \lambda x$ para escalar λ.

* λ raíz de pol. característico.

∘ Valor propio: λ si existe sol. no trivial $Ax = \lambda x$.

$|A - \lambda I| = 0$. → sol: espacio nulo. espacio propio.

* matriz triangular: λ son entradas diagonal.

Invertible: 0 no es λ, $\det A \neq 0$.

> Ortogonalidad

$u \cdot v = 0$; ortonormal si $v \cdot v = 1$, $u \cdot u = 1$. (LI)

Conjunto ortonormal LI es base de su Gen.

∘ Gram Schmidt: $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ y base ortog. $\{u_1, \dots, u_m\}$.

Bernardita Undurraga 2020

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) \cdot u_1$, $u_3 = v_3 - \left(\frac{v_3 \cdot u_1}{u_2 \cdot u_2}\right) \cdot u_2$.

- QR:

  $A = QR$ y $A^T A = R^T R = LDL^T$. $R = (L\sqrt{D})^T$
  $Q = AR^{-1}$

→ Simetría

A, B son simétricas $m \times m$.
$A + B$ sim.
AA^T sim
$A - B^T$ sim.

→ Diagonalización

$A_{n \times n}$ si tiene n vectores propios lineal% indep. (distintos).

$A = PDP^{-1}$ ↳ columnas de P n.vect. LI de A.
↳ entradas: valores propios de A.
corresponden a vectores propios en P.

⟺ Σ dim espacios propios $= n$. y multp. algebraica = geométrica.

A diagon. y B_k base de espacio propio (con λ_k).
$B_1, \dots ; B_p$: base vectores propios.

n° veces λ raíz repetida

n° max vectores LI de λ.

V. ECUACIONES DIFERENCIALES

Derivadas de función desconocidas.

General: $G(t, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$; $G(t, x_0, x_n)$

Canónica: $y^{(n)} = g(t, y, \dots y^{(n+1)})$

* PVI (Problema de Cauchy): $\begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $y(x) = \int f(x)dx + C$.

→ Modelos matemáticos.

- Newton
  - mecánica: $x''(t) = F/m$
  - enfriamiento: $\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - A) & < 0 \ (\downarrow) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$ $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$

Bernardita Undurraga 2020

- Crecimiento población

$$\frac{dP}{dt} = -kP \rightarrow P(t) = ce^{-kt}$$

* Exponencial. $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = P_0 \end{cases}$ $P(t) = P_0 e^{\overset{\text{tasa}}{kt}}$

* Logístico. $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP(\ell - P) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$ $P(t) = \dfrac{P_0 \ell e^{\ell}}{P_0 - (P_0 - \ell)e^{-\ell kt}}$

> Ecuaciones separables

$y'(t) = f(t)\varphi(t)$ * Sol. singular: $\varphi(y) = 0$.

$h(y)\,y'(t) = f(t)$, $h(y) = \dfrac{1}{\varphi(y)}$

$\therefore \int h(y)\,dy = \int f(t)\,dt \Rightarrow H(y(t)) = F(t) + C.$

> Ec. lineales de primer orden

$y' + P(t)\,y = Q(t)$ $P = \dfrac{a_0}{a_1}$ $Q = \dfrac{g}{a_1}$ $\Rightarrow$ continuas: sol. única $y(x)$.

- Factor integrante * NO sol. singular.

$$\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$D_x\left[y(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right] = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx} \quad / \int$$

- Mezclas

$x(t)$: cant. soluto

r_i: flujo in

r_0: flujo out

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_i c_i - \frac{r_0}{V(t)} x(t) \\ V(t) = V_0 + (r_i - r_0)t \end{cases}$ $u(t) = [V_0 + (r_i - r_0)t]^{\frac{r_0}{r_i - r_0}}$

$C_0(t) = x(t) / V(t)$.

> Ec. exactas

$M(x,y) + N(x,y)\dfrac{dy}{dx} = 0$. ; $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.

$\dfrac{\delta F}{\delta x} = M \wedge \dfrac{\delta F}{\delta y} = N$ $\left\{ \dfrac{\delta M}{\delta y} = \dfrac{\delta N}{\delta x} \right\}$

NO: $\dfrac{\delta(\mu M)}{\delta y} = \dfrac{\delta(\mu N)}{\delta x}$

$\dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{M}$ ó $\dfrac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N}$

$(f(y))$ $(f(x))$

> $F(x,y) = \int M + k(y)$

> Derivo $dy = N$

> $k'(y) \Rightarrow k(y)$

Sustitución

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \end{cases} \qquad v = \alpha(x,y) \qquad \frac{dv}{dx} = g(x,y)$$
$$y = \beta(x,v)$$

- $y' = F\left(\frac{x}{y}\right)$; $v = \frac{y}{x}$; $v = xv' = F(v)$ SEP.

- $y' = F(ax + by + c)$; $v(x,y) = ax + by + c$; $y = \frac{v - ax - c}{b}$

  $v' = a + bF(v)$

- Bernoulli

  $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad ; \quad v = y^{1-n}$$

  $$\frac{dv}{dx} + (1-n)Pv = (1-n)Q \quad \text{LINEAL}$$

- Riccati

  $$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \qquad y = y_1 + 1/v$$
  $$y' = y_1' - v'/v^2$$

Existencia y unicidad

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

E: si $f(t,y)$ continua : al menos una solución

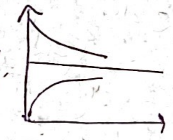
U: si $\frac{\delta f}{\delta y}$: existe : única.

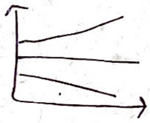
Ec. autónomas y puntos de equilibrio.

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \qquad f(\tilde{y}) = 0$$
$$\tilde{y} = c = y(t). \ (\text{eq}).$$

Equilibrio $P(y) = 0$.
orden. raíces, gráfico.

par: no cambia
impar: cambia (signo)

$\tilde{y}$  estable.

$\tilde{y}$  inestable.

$\ominus$ a $\oplus$: $\tilde{y}$ inest, fuente.

$\oplus$ a $\ominus$: $\tilde{y}$ est., sumidero

mantiene: $\tilde{y}$ semiest, nodo.

$f'(\tilde{y}) > 0$: inestable

$f'(\tilde{y}) < 0$: estable.

n (máx deriv) impar → $f^{(n)}(\hat{y}) > 0$ inest.
$\quad\quad$ → $f^{(n)}(\hat{y}) < 0$ est.
n (máx deriv) par → semiest.

- <u>Modelo logístico</u>

$\frac{dx}{dt} = kx(M-x)$; $x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M-x_0)e^{-kMt}}$; $x(t) = 0$, $x(t) = M$ EQ.

↳ $x' < 0$ $\quad x' > 0$ $\quad x' < 0$

$x=0$ inest. $\quad x=M$ est.

$\frac{dx}{dt} = kx(x-M)$, $x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M-x_0)e^{kMt}}$; $x(t) = 0$, $x(t) = M$ EQ

$x=0$ est $\quad x=M$ inest

↱ sin $y' \cdot y''$

- Ecuaciones lineales segundo orden

$y'' + P(x)y' + q(x)y = f(x)$ $\quad$ P, q cont: sol. única. mismas cond. iniciales y, y'.

- <u>Homogéneas</u> $\quad$ nada sin y

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Wronskiano $W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$

y_1, y_2 LD $\Leftrightarrow W = 0 \Leftrightarrow W(t_0) = 0$

y_1, y_2 LI $\Leftrightarrow W \neq 0 \Leftrightarrow W(t_0) \neq 0$.

* Abel : $\{ W = W(y_1, y_2)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} P(s)\,ds} \}$

* <u>Coeficientes constantes</u>

$ay'' + by' + cy = 0$.

CARAC : $ar^2 + br + c = 0$ $\quad\quad D = b^2 - 4ac$

1) $D > 0$: raíces reales distintas : $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

2) $D = 0$: raíces repetidas : $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{rx}$

3) $D < 0$: raíces complejas conjugadas : $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \underbrace{\cos(\beta x)}_{w_1} + c_2 \underbrace{\operatorname{sen}(\beta x)}_{w_2})$

> Ecuaciones no homogéneas

$ay'' + by' + cy = f$

$y = y_{gh} + y_p$

y_{gh}: general homogenea

y_p: particular

- Coeficientes indeterminados

$f(x)$ C.L polinom; exp; $\cos kx$ o $\operatorname{sen} kx$

$y \neq 0$ i) solución prueba como comb. lineal de términos y '.

$y = 0$ ii) $P_m(x) e^{rx} \cos kx$, $\operatorname{sen} kx$

> Polinom: $y_p = x^s (A_0 + A_1 x + \dots A_n x^m)$

> $a \cos kx + b \operatorname{sen} kx = x^s (A \cos kx + B \operatorname{sen} kx)$

> Variación parámetros

sin comb. lineal finita

$L[y] = y'' + P(x) y' + Q(x) y = f(x)$

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \qquad L[y_p] = f(x)$

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= f(x) \end{aligned} \qquad u_1' = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} / w(x) \qquad u_2' = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} / w(x)$$

$$y_p = -y_1(x) \int \frac{y_2(x) f(x)}{w(x)} + y_2(x) \int \frac{y_1(x) f(x)}{w(x)} dx$$

> Sist. lineales primer orden

* No lineal?

$\frac{dx}{dt} = P(t) x + f(x) \qquad x(t) = [x_i(t)]$

$f(t, x, y, x', y') = 0 \wedge g(t, x, y, x', y') \Rightarrow x(t), y(t)$

* Transformar a 1 orden

- Homogéneo

$\frac{dx}{dt} = P(t) x \qquad x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \dots$

$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_n \end{vmatrix} \qquad W = 0 : LD \qquad W \neq 0 : LI$

Bernardita Undurraga 2020

* Raíces características

$x(t) = v e^{\lambda t}$

$x' = Ax$

$Av = \lambda v$

① $|A - \lambda I| = 0$

② $(A - \lambda I) v = 0$

③ $x_n(t) = v_n e^{\lambda_n t}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Valores propios distintos: $x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$
- Valores propios complejos: $\lambda = p + qi$

$\bar{\lambda} = p - qi$

$v = a + bi$

$x(t) = (a+bi) e^{pt} (\cos qt \pm i \operatorname{sen} qt)$

* λ con rango 2°: $(A - \lambda I)^2 v = 0$.

$x(t) = e^{\lambda t} (v + (A - \lambda I) v t)$

- Matriz fundamental

$\phi(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_n(t)]$

$x(t) = \phi(t) \phi(0)^{-1} x_0$.

$x_0 = \phi(0) \phi(0)^{-1} x_0$.

- Matriz exponencial

$x = e^{At}$

$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!}$

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \rightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$

Si $AB = BA \rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$.

$e^{At} = \phi(t) \phi(0)^{-1}$

$x(t) = e^{At} x_0$.

- No homogéneo

$x' = Ax + f(x)$

$x(t) = x_{gh}(t) + x_p(t)$.

* Coeficientes indeterminados.

$f(t) = \begin{bmatrix} a \\ bt \end{bmatrix} \rightarrow x_p = ct + d = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

$f(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rightarrow x_p = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

$f(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_p = \begin{bmatrix} ae^t \\ be^t \\ ce^t \end{bmatrix}$

→ Plano fase

$x(t), y(t)$: curvas solución.

∘ Valores propios:

* Reales ≠s, mismo signo : parábolas / nodo impropio — $\lambda > 0$: div, $\lambda < 0$: conv.

* Reales ≠s, ≠ signo : silla / inestable.

* =s : estrella — $\lambda > 0$: div, $\lambda < 0$: conv.

* Complejos conjugados : espiral. $(p + qi)$ — $p > 0$: div, $p < 0$: conv

* Imaginarios puros : elipse.

→ Laplace

$$\mathcal{L}x(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot x(t)\, dt.$$

i) Aplicar

ii) $\mathcal{L}x(s)$ factorizo

iii) $\mathcal{L}^{-1}$ y ver tabla.

$$\Rightarrow ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t).$$

$$a\,\mathcal{L}\{x''(t)\} + b\,\mathcal{L}\{x'(t)\} + c\,\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s\,X(s) - f(0) \qquad X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}.$$

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2 X(s) - s f(0) - f'(0).$$