REPASO MAT1203
1. VECTORES, RECTAS Y PLANOS

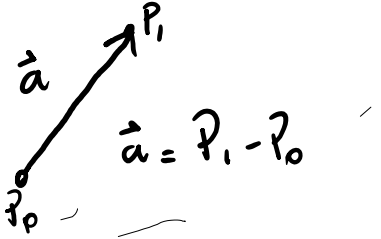
febrero 2021
itserrano@uc.cl

1.

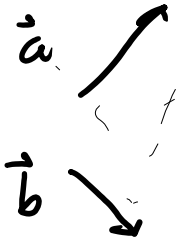
VECTORES

Definición y operaciones

Vectores



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$



$$\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$c\vec{a}$

cGlh

$c\vec{a}$

$$c\vec{a} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}$$

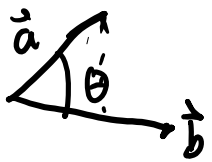
Vectores: producto punto $\mathbb{R}^n$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$

$\vec{b} = (b_1, b_2 \dots b_n)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$



$\theta = 90^\circ$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vectores: producto cruz $(\mathbb{R}^3)$

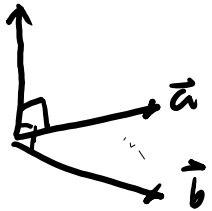
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

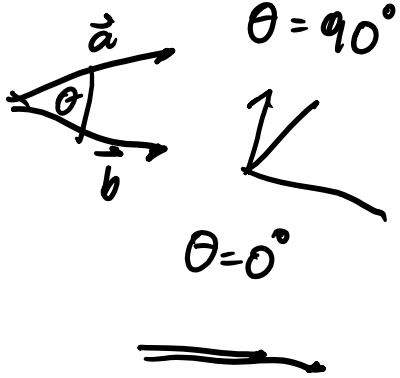
$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$$

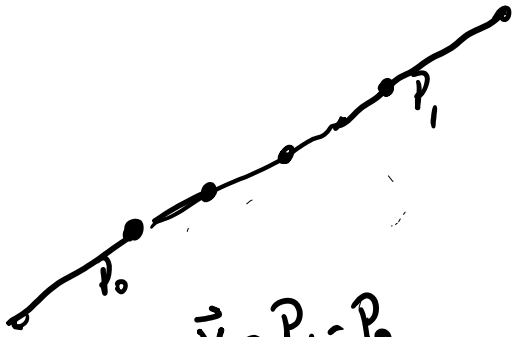


2.
RECTAS

Ecuación de la recta, ecuación paramétrica

Ecuación paramétrica

- 2 pto,
- 1 pto, 1 vector



$\vec{v} = P_1 - P_0$

$L: P_0 + t\vec{v} \quad t \in \mathbb{R}$

$L: \langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle v_x, v_y, v_z \rangle \quad t \in \mathbb{R}$

$L: P_0 + s\vec{v} \quad s \in \mathbb{R}$

$L: (1,0,1) + t(2,0,3)$

Ecuación continua

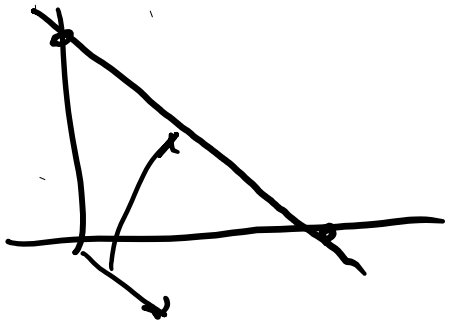
$L: (1,0,1) + t(2,1,3)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 1+3t \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = t \\ y = t \\ \frac{z-1}{3} = t \end{array} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-1}{3}$$

Cambio de ecuaciones

$x + y = 5 \quad (\mathbb{R}^2) \qquad y = 5 - x$

$x = x$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 5-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$x = t$

$$L: (0,5) + x(1,-1) = (0,5) + t(1,-1)$$

1

-like!

1

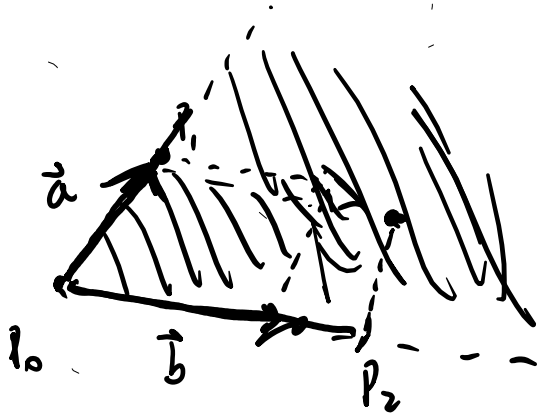
3.
PLANOS

Ecuación del plano, ecuación paramétrica

Ecuación paramétrica

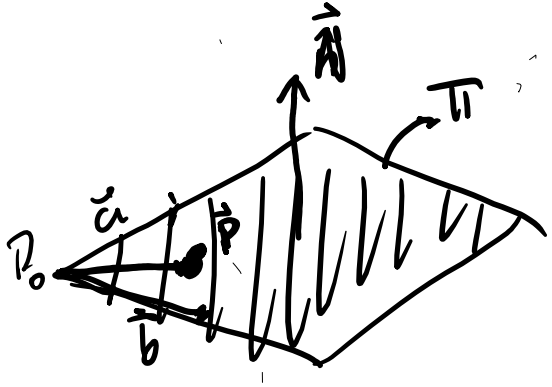
- 3 ptos
- 1 pto, 2 vectores
- 1 pto, vector normal

$$\pi : P_0 + t\vec{a} + s\vec{b}$$



Ecuación del plano

$ax + by + cz + d = 0$ $\rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$



$P \in \Pi$

$\vec{P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$

$\vec{P} \cdot \vec{N} = 0$

$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ $\rightarrow ax + by + cz + d = 0$

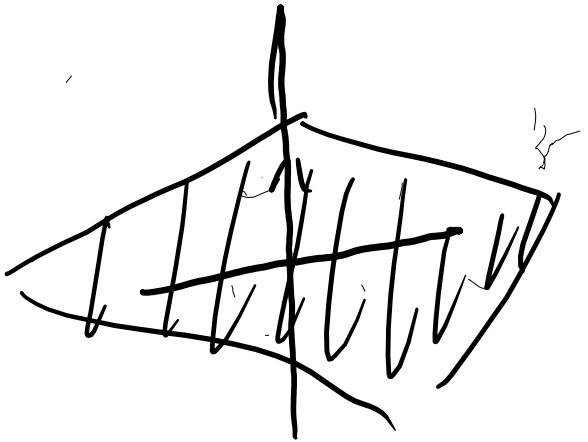
$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$

$P(x, y, z)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$

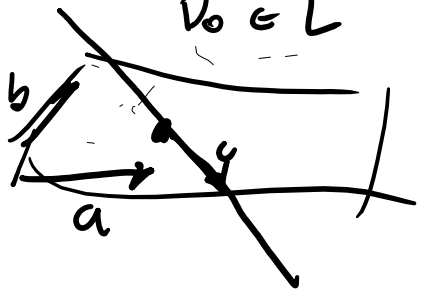
Intersecciones rectas-planos



$L \cap \pi$ Punto

$P_0 \in \pi$

$D_0 \in L$



$L: P_0 + t\vec{v}$

$\vec{v} = \vec{N}$

4.
EJERCICIOS

Ecuación del plano, ecuación paramétrica

Guía 2016-2

Se define el plano Π como:

$$x - 2y + 3z = 12$$

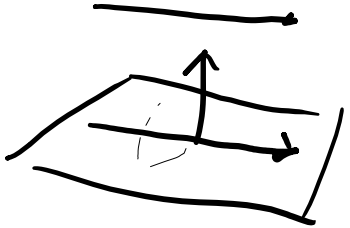
Y se define la recta L como:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a la condición que debe cumplir el parámetro b para que $\Pi \cap L$ sea vacío?

a) $b \geq 5/2$
b) $b \leq 5/2$
c) $b = 5/2$
d) no existe valor de b que cumpla con lo solicitado.

Guía 2015-2



Se define el plano Π como:

$$2x - 3y - z = 6$$

Y se define la recta L como:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\b\end{pmatrix}$$

P_0 $\vec{v}$

-7 $2-1=1\neq 6$ //

¿Qué condición debe cumplir el parámetro b para que $\Pi \cap L$ sea vacío?

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\b\end{pmatrix} = 0 \qquad -4-3-b=0$$

$$\boxed{b=-7}$$

REPASO MAT1203
1. VECTORES, RECTAS Y PLANOS

febrero 2021
itserrano@uc.cl