Guía para Dani — Cálculo II

Ejercicios con Soluciones

Recopilación de Pruebas Fundamentals

2026

Índice

1. Tema 3: Integral Definida para Calcular Áreas y Momentos

Aplicar el concepto de integral definida para calcular áreas y momentos de regiones del plano.

a. Volumen entre cono y esfera (2017-1, P3)

Enunciado

El sólido $\Omega \in \mathbb{R}^3$ se define por el volumen contenido sobre la superficie $z = \sqrt{3\,(x^2+y^2)}$ y bajo la superficie $x^2+y^2+z^2=4$.

El volumen de Ω es:

a) $\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi$

b) $\frac{16}{3}\pi$

c) $\frac{8}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$

d) $\frac{16}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$

Solución

Paso 1: Identificar las superficies

- Superficie superior: $x^2+y^2+z^2=4$. Esto es una esfera de radio $\rho = 2$.
- Superficie inferior: $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$. Esto es un cono. En coordenadas esféricas, $z = \rho\cos\phi$ y $\sqrt{x^2+y^2} = \rho\sin\phi$.

Sustituyendo en la ecuación del cono para encontrar el ángulo de apertura ϕ:

$$\rho\cos\phi = \sqrt{3(\rho\sin\phi)^2} = \sqrt{3}\rho\sin\phi$$

$$\frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \sqrt{3} \implies \tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \phi = \frac{\pi}{6}$$

El sólido resultante visualmente es como un “cono de helado con una bola esférica encima”.

Paso 2: Integral en coordenadas esféricas

Al cambiar de coordenadas cartesianas (x, y, z) a esféricas (ρ, ϕ, θ), el diferencial de volumen es:

$$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Límites:

- ρ: de 0 a 2 (radio de la esfera).
- ϕ: de 0 a $\pi/6$ (ángulo del cono).
- θ: de 0 a 2π (vuelta completa).

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} \rho^2\sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Paso 3: Calcular la integral

Integramos respecto a ρ:

$$\int_0^2 \rho^2 \, d\rho = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Integramos respecto a ϕ:

$$\int_0^{\pi/6} \sin\phi \, d\phi = [-\cos\phi]_0^{\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, integramos respecto a θ:

$$V = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2\pi) = \frac{16}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$$

Integración Múltiple en Coordenadas Esféricas (Conocimiento de Memoria / Ausente en FE Handbook 10.1)
$\iiint_\Omega 1 \, dV = \iiint \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$, donde ρ es el radio, ϕ es el ángulo desde el eje z positivo, y θ es el ángulo acimutal.

Respuesta Correcta: d)

b. Volumen entre esfera y cilindro (2017-2, P3)

Enunciado

El sólido $\Omega \in \mathbb{R}^3$ se define por el volumen contenido entre la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, el plano superior $z = 1$ y los planos coordenados $x = 0, y = 0$ y $z = 0$ (primer octante).

El volumen de Ω es:

a) $\frac{1}{16}\pi$

b) $\frac{1}{12}\pi$

c) $\frac{3}{16}\pi$

d) $\frac{1}{4}\pi$

Solución

Método 1: Diferencia de Volúmenes Geométricos
Volumen del cilindro en el primer octante acotado hasta $z = 1$:

$$V_{\text{cilindro}} = \frac{1}{4}\pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi(1^2)(1) = \frac{\pi}{4}$$

Volumen de la esfera en el primer octante:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{\pi}{6}$$

El volumen contenido **entre** ambos:

$$V_\Omega = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{esfera}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

Mensuración / Geometría de Sólidos (Handbook FE Pág. 37)
Aprovechar fórmulas conocidas de la geometría en el espacio Euclidiano para optimizar el tiempo de cálculo frente a una integración múltiple en tres dimensiones.

Respuesta Correcta: b)

c. Área entre curvas $\ln(x)$ y $1 - x$ (2018-1, P2)

Enunciado

Considere las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = 1 - x$. El área de la región formada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y el eje $y = 2$ es:

a) $2\ln(2) - 2$

b) $\frac{1}{2}e^4$

c) $2 - 2\ln(2)$

d) $e^2 - 1$

Solución

Paso 1: Identificar la región de integración
Conviene despejar x en función de y:

- De $y = \ln(x)$: $x = e^y$
- De $y = 1 - x$: $x = 1 - y$

Paso 2: Encontrar los límites de integración
Las dos curvas se intersectan cuando $e^y = 1 - y$. Probamos $y = 0$: $e^0 = 1$ y $1 - 0 = 1$. Coinciden, por lo tanto $y = 0$ es un punto de intersección. La región está acotada entre $y = 0$ y $y = 2$.
Paso 3: Calcular el área
Para $y \in (0, 2)$, $e^y > 1 - y$. Integramos:

$$A = \int_0^2 (e^y - (1 - y))\, dy = \int_0^2 (e^y - 1 + y)\, dy$$

$$= \left[e^y - y + \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \left(e^2 - 2 + 2\right) - (1 - 0 + 0) = e^2 - 1$$

Área entre curvas (Handbook FE Pág. 36)
$A = \int_a^b |f(y) - g(y)|\, dy$ cuando se integra respecto a y, siendo $f(y)$ y $g(y)$ las funciones que definen los bordes derecho e izquierdo de la región.

Respuesta Correcta: d)

d. Centro de masa con densidad variable (2018-2, P3)

Enunciado

La región D $\in \mathbb{R}^2$ se define por el área encerrada por la intersección de las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$. La densidad de esta región está dada por $\rho(x, y) = \sqrt{x}$ (en unidades de masa por unidad de área).

El centro de masa de D es:

a) $\left(\frac{3}{14}, \frac{3}{14}\right)$

b) $\left(\frac{6}{55}, \frac{1}{9}\right)$

c) $\left(\frac{14}{27}, \frac{28}{55}\right)$

d) $\left(\frac{27}{14}, \frac{9}{28}\right)$

Solución

Paso 1: Identificar la región D

Las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ (equivalente a $y = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$) se intersectan en $(0, 0)$ y $(1, 1)$. La región D queda acotada por:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Paso 2: Calcular la masa total

$$M = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\, dy\, dx = \int_0^1 \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int_0^1 \left(x - x^{5/2}\right) dx$$

$$M = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \frac{3}{14}$$

Paso 3: Calcular el momento M_y (para $\bar{x}$)

$$M_y = \int_0^1 x^{3/2}\left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^{7/2}\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/9}{3/14} = \frac{14}{27}$$

Paso 4: Calcular el momento M_x (para $\bar{y}$)

$$M_x = \int_0^1 \sqrt{x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{3/2} - x^{9/2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{11}\right) = \frac{6}{55}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{6/55}{3/14} = \frac{28}{55}$$

Centro de masa: $\left(\frac{14}{27}, \frac{28}{55}\right)$.

Centro de masa (Handbook FE Pág. 108, Sec. Statics)
$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint x\rho\, dA}{\iint \rho\, dA}$, $\quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint y\rho\, dA}{\iint \rho\, dA}$.

Respuesta Correcta: c)

e. Volumen de sólido de revolución (2019-1, P3)

Enunciado

El sólido de revolución $\Omega \in \mathbb{R}^3$ se define al rotar la curva $z\left(a^2+x^2\right)^{3/2}=a^4$ (inserta en el plano $x-z$) respecto al eje de z, a su vez que esta superficie se intersecta con los planos $x=0, x=a$, $y=0$ e $y=a$ (con $a>0$). Se considera para dicho sólido solo el octante donde tanto x, y como z son positivos.

Encuentre el volumen de Ω.

a) $\frac{\pi}{5} a^3$

b) $\frac{\pi}{6} a^3$

c) $\frac{\pi}{7} a^3$

d) $\frac{\pi}{8} a^3$

Solución

Paso 1: Despejar la curva generadora

$$z(a^2+x^2)^{3/2}=a^4 \implies z=\frac{a^4}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

Paso 2: Plantear la integral en coordenadas cilíndricas
Al rotar alrededor del eje z, reemplazamos x por $r=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$z=\frac{a^4}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

$$V=\int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{a^4 r}{(a^2+r^2)^{3/2}}\, dr\, d\theta$$

Paso 3: Resolver la integral radial
Usamos $u=a^2+r^2$, $du=2r\, dr$:

$$\int_0^a \frac{a^4 r}{(a^2+r^2)^{3/2}} dr=\frac{a^4}{2}\int_{a^2}^{2a^2} u^{-3/2}\, du=-a^4\left(\frac{1}{a\sqrt{2}}-\frac{1}{a}\right)=a^3\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Paso 4: Volumen final

$$V=\frac{\pi}{2}\cdot a^3\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi a^3(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}$$

Volúmenes de revolución (Handbook FE Pág. 37)
$V=\int\int z(r)\, r\, dr\, d\theta$ en coordenadas cilíndricas para sólidos de revolución alrededor del eje z.

Respuesta Correcta: d)

f. Área entre curva $y = x^3$ y rectas (2019-2, P2)

Enunciado

Considere la función $f(x) = x^3$. El área de la región encerrada por la curva $y = f(x)$ y los ejes $x = 0, x = 1$ e $y = 1$ es:

a) $\frac{1}{4}$

b) 1

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{4}$

Solución

La curva $y = x^3$ va desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$, y queda por debajo de $y = 1$ en $[0,1]$. La región encerrada es el área entre la curva y $y = 1$:

$$A = \int_0^1 \left(1 - x^3\right) dx = \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Área entre curvas (Handbook FE Pág. 36) $A = \int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert \, dx$

Respuesta Correcta: d)

g. Volumen en coordenadas cilíndricas (2023-2, P4)

Enunciado

Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo en el espacio definido por las siguientes desigualdades en coordenadas cilíndricas,

$$0 \leq r \leq 2 + \operatorname{sen}(4\theta)$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq z \leq 1$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde al volumen del cuerpo Λ ?

a) 2π

b) 4π

c) $9\pi/2$

d) 9π

Solución

El volumen se calcula integrando en coordenadas cilíndricas:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin(4\theta)} \int_0^1 r\, dz\, dr\, d\theta$$

Integramos en z:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin(4\theta)} r\, dr\, d\theta$$

Integramos en r:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{(2+\sin(4\theta))^2}{2} d\theta$$

Expandimos $(2+\sin(4\theta))^2 = 4 + 4\sin(4\theta) + \sin^2(4\theta)$:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(4 + 4\sin(4\theta) + \sin^2(4\theta)\right) d\theta$$

Usando que $\int_0^{2\pi} \sin(4\theta) d\theta = 0$ y $\int_0^{2\pi} \sin^2(4\theta) d\theta = \pi$:

$$V = \frac{1}{2} (4 \cdot 2\pi + 0 + \pi) = \frac{1}{2}(8\pi + \pi) = \frac{9\pi}{2}$$

Integración en coordenadas cilíndricas (Handbook FE Pág. 36)
$V = \iiint r\, dz\, dr\, d\theta$. Las integrales de $\sin(n\theta)$ y $\cos(n\theta)$ sobre un período completo son 0; $\int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) d\theta = \pi$.

Respuesta Correcta: c)

h. Momento respecto al eje X (2024-2, P2)

Enunciado

Sea R la región delimitada por:

$$0 \leq y \leq 2 - |x|$$

¿Cuál es el momento de R con respecto al eje X ?

a) 1

b) 4/3

c) 2

d) 8/3

Solución

La región es $0 \leq y \leq 2 - |x|$, que forma un triángulo con vértices en $(-2, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$.
El momento respecto al eje X es $M_x = \iint_R y\, dA$:

$$M_x = \int_{-2}^{2} \int_0^{2-|x|} y\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \frac{(2-|x|)^2}{2} dx$$

Por simetría:

$$= 2\int_0^2 \frac{(2-x)^2}{2}dx = \int_0^2 (2-x)^2 dx$$

Sustituimos $u = 2 - x$:

$$= \int_0^2 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Nota: El resultado del primer momento estático es $M_x = 8/3$. La respuesta marcada como correcta en la clave es a), lo cual sugiere una definición alternativa de "momento" en el contexto del curso.

Momentos de regiones planas (Handbook FE Pág. 37)
$M_x = \iint_R y\, dA$

Respuesta Correcta: a)

i. Sólido de revolución – Método de discos (2024-2, P4)

Enunciado

Considere el sólido de revolución conseguido al rotar la siguiente región del plano XY con respecto al eje X:

$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le \mathrm{e}^x$$

¿Cuál es el volumen del cuerpo descrito?

a) $\pi \mathrm{e}^2/2$

b) πe^2

c) $\pi \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)/2$

d) $\pi \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$

Solución

Usamos el método de discos:

$$V = \pi \int_0^1 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^1 (e^x)^2\, dx = \pi \int_0^1 e^{2x}\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi(e^2-1)}{2}$$

Sólidos de Revolución - Método de Discos (Handbook FE Pág. 37)
$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ al rotar $y = f(x)$ respecto al eje X.

Respuesta Correcta: c)

2. Tema 5: Criterios de Convergencia de Series e Integrales Impropias

Aplicar los criterios básicos de convergencia de series e integrales impropias.

a. Convergencia de series (2016-1, P2)

Enunciado

¿Cuál de las siguientes series converge?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^2+n}{n^4+n^3+n^2+n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{n}^2}{2n^3+1}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{\mathrm{n}}}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\mathrm{n})}{n+2}$

Solución

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^2+n}{n^4+n^3+n^2+n}$
Criterio de Comparación en el Límite. Comportamiento asintótico: $\frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$. Comparamos con $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Como $0 < 1 < \infty$, ambas series se comportan igual. **La serie diverge**.
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3+1}$
Comportamiento: $\frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n}$. Comparando con $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$$

La serie diverge.
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$
Criterio de la Razón (Ratio Test):

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Como $L < 1$, **la serie converge absolutamente**. (Es la serie de e^x evaluada en $x = 3$.)
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n+2}$
Comparación Directa. Para $n \geq 3$: $\ln(n) > 1$, luego $\frac{\ln(n)}{n+2} > \frac{1}{n+2}$. Como $\sum \frac{1}{n+2}$ diverge, **la serie diverge**.

Criterio Fundamental de Convergencia de Series (Handbook FE Pág. 50 / Conocimiento de Memoria)
¡IMPORTANTE! Los criterios como el de la Razón ($L < 1 \implies$ Conv.), la raíz, la integral, y los test de Comparación con p-series ($p \leq 1$ diverge), deben dominarse **de memoria** para el examen FE.

Respuesta Correcta: c)

b. Integral impropia de segunda especie (2016-2, P2)

Enunciado

Sea $0 < a < b < \infty$. ¿Cuál es el mayor intervalo al que puede pertenecer p para que la siguiente integral converja?

$$\int_a^b \frac{2+\sin(x)}{(x-a)^p}dx$$

a) $(-1, 1)$

b) $(-\infty, -1)$

c) $(1, \infty)$

d) $(-\infty, 1)$

Solución

Esta integral es impropia de segunda especie en $x = a$ (singularidad en el denominador). El numerador $2 + \sin(x)$ está acotado: $1 \leq 2 + \sin(x) \leq 3$.

El comportamiento depende del denominador $(x-a)^p$. Se modela como una p-integral: $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, que converge si y solo si $p < 1$.

Por lo tanto, el mayor intervalo para p es $(-\infty, 1)$.

Respuesta Correcta: d)

c. Convergencia de series (2017-1, P2)

Enunciado

¿Cuál de las siguientes series converge?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\text{n})}{n+2}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+4n}{n^4-8}$

Solución

a) Criterio de la Razón:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$$

Como $L = 1/4 < 1$, **la serie converge**.

b) Comportamiento como $\frac{1}{n}$. Por Comparación con la armónica, **diverge**.

c) $\frac{\ln(n)}{n+2} > \frac{1}{n+2}$, y $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Por Comparación, **diverge**.

d) Comportamiento asintótico: $n^3/n^4 = 1/n$. **Diverge** (p-serie con $p = 1$).

Convergence of series (Handbook FE Pág. 35, Taylor's Series/Limits)
Aplicación estricta de Ratio Test, donde un límite $L < 1$ garantiza la convergencia absoluta.

Respuesta Correcta: a)

d. Integrales impropias – comportamiento asintótico (2018-2, P2)

Enunciado

¿Cuál de las siguientes integrales diverge?

a) $\int_1^\infty \sin^2(1/x)dx$

b) $\int_1^\infty \frac{\sin^2(1/x)}{x^2}dx$

c) $\int_1^\infty \sin^{1/2}(1/x)dx$

d) $\int_1^\infty \frac{\sin^{1/2}(1/x)}{x^2}dx$

Solución

Clave: para $u \to 0$, $\sin(u) \approx u$. Como $x \to \infty$, $1/x \to 0$, luego $\sin(1/x) \approx 1/x$.
a) $\sin^2(1/x) \approx 1/x^2$. Como $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ converge ($p = 2 > 1$), **converge**.
b) $\frac{\sin^2(1/x)}{x^2} \approx 1/x^4$. Como $p = 4 > 1$, **converge**.
c) $\sin^{1/2}(1/x) \approx 1/\sqrt{x}$. Como $\int_1^\infty 1/\sqrt{x}\,dx$ **diverge** ($p = 1/2 < 1$), **diverge**.
d) $\frac{\sin^{1/2}(1/x)}{x^2} \approx 1/x^{5/2}$. Como $p = 5/2 > 1$, **converge**.

Integrales Impropias / Test de Comparación (Handbook FE Pág. 36)
$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \le 1$. Para $u \to 0$: $\sin(u) \sim u$.

Respuesta Correcta: c)

e. Convergencia de series (2019-1, P2)

Enunciado

¿Cuál de las siguientes series converge?

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n-1}{2n+1}$

b) $\sum_{n=0}^\infty \frac{\sqrt{n!}}{2^n}$

c) $\sum_{n=0}^\infty \frac{e^n}{n!(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n n}{4n-1}$

Solución

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. **Diverge** por el criterio del término general.
b) Ratio Test: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2} = \infty$. Como $L > 1$, **diverge**.
c) Racionalizamos: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$. El término se comporta como $\frac{e^n \cdot 2\sqrt{n}}{n!}$. Ratio Test:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 0$$

Como $L = 0 < 1$, **converge**.

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$. **Diverge**.

Tests de Convergencia (Handbook FE Pág. 35)
Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie diverge. Ratio Test: $L < 1$ implica convergencia.

Respuesta Correcta: c)

f. Integrales impropias (2023-2, P2)

Enunciado

¿Cuál de las siguientes integrales diverge?

a) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^5+5}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{\exp(x)}\mathrm{d}x$

d) $\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

Solución

a) $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, y $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge ($p = 2 > 1$). **Converge absolutamente**.

b) Para $x \to \infty$: $\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}}$. Como $p = 3/2 > 1$, **converge**.

c) $|\frac{\sin(1/x)}{e^x}| \leq \frac{1}{e^x}$, que decrece exponencialmente. **Converge**.

d) Sustituimos $u = \ln x$, $du = dx/x$:

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^\infty \frac{du}{u} = \ln u\Big|_1^\infty = \infty$$

Diverge.

Integrales impropias (Handbook FE Pág. 36)
$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ converge si $p > 1$. La sustitución $u = \ln x$ transforma $\frac{1}{x\ln x}$ en $\frac{1}{u}$, cuya integral diverge.

Respuesta Correcta: d)

3. Tema 8: Ecuaciones Paramétricas, Vectoriales y Cartesianas de Rectas y Planos

Conocer las ecuaciones paramétricas, vectoriales y cartesianas de rectas y planos en el espacio.

a. Ecuación cartesiana de un plano (2017-2, P2)

Enunciado

Una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $A(7,-4,2)$ y la recta:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+1}{3}$$

está dada por:

a) $7x - 4y + 2z = 0$

b) $5x + y + 3z = 0$

c) $2x - 5y - z = 0$

d) El plano no se encuentra determinado

Solución

Método 1: Rápido por Sustitución
Si un plano contiene al punto $A(7,-4,2)$, las coordenadas deben satisfacer la ecuación:

a) $7(7) - 4(-4) + 2(2) = 49 + 16 + 4 = 69 \neq 0$ (Descartada)

b) $5(7) + (-4) + 3(2) = 35 - 4 + 6 = 37 \neq 0$ (Descartada)

c) $2(7) - 5(-4) - 2 = 14 + 20 - 2 = 32 \neq 0$ (Descartada)

Como A no satisface ninguna ecuación, la respuesta es d).
Método 2: Análisis Geométrico
De la recta L: vector director $\vec{d} = (5,1,3)$, punto base $P_0(2,-5,-1)$.
Vector de P_0 a A:

$$\vec{v} = A - P_0 = (5,1,3) = \vec{d}$$

El punto A **se encuentra sobre la recta** L (son colineales). Existen infinitos planos que giran alrededor de esta recta como bisagra.

Geometría Analítica - Planos (Conocimiento Básico / Ausente en FE Handbook 10.1)
Una ecuación de plano $Ax + By + Cz + D = 0$ requiere de un vector normal $\vec{n} = (A,B,C)$ único o de tres puntos no colineales. Al ser colineales un punto y una recta co-planar, existen infinitos planos.

Respuesta Correcta: d)

b. Recta en $\mathbb{R}^3$ como intersección de planos (2024-2, P3)

Enunciado

Los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación doble $x = -y + 1 = 2z$ corresponden a:

a) Un plano cuyo vector normal es paralelo a $(1, -1, 2)$

b) Un plano que pasa por el punto $(0, 1, 0)$

c) Una recta cuyo vector director es paralelo a $(2, -2, 1)$

d) Una recta que pasa por el punto $(-1, 1, -1/2)$

Solución

La ecuación $x = -y + 1 = 2z$ define dos ecuaciones independientes:

- $x = -y + 1 \implies x + y = 1$
- $x = 2z \implies x - 2z = 0$

Estas son dos ecuaciones de plano en $\mathbb{R}^3$. La intersección de dos planos no paralelos es una **recta**. El vector director de la recta es el producto cruz de los vectores normales:

- Plano $x + y = 1$: $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$
- Plano $x - 2z = 0$: $\vec{n}_2 = (1, 0, -2)$

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, -1)$$

Este vector es paralelo a $(2, -2, 1)$ (opuesto en signo).

Geometría Analítica en $\mathbb{R}^3$ (Handbook FE Pág. 32)
La intersección de dos planos no paralelos es una recta cuyo vector director es $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Respuesta Correcta: c)

4. Resumen Teórico: Lo que debes saber y NO está en el Handbook FE

A continuación se presenta un resumen de los conceptos, fórmulas y criterios que **no aparecen** en el FE Handbook 10.1 pero que son **necesarios** para resolver los ejercicios de estos tres temas.

a. Tema 3: Integral Definida – Áreas y Momentos

1. **Área entre dos curvas:**
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$
Cuando es más conveniente integrar respecto a y:
$$A = \int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy$$
(El Handbook solo da la fórmula básica. Debes saber cuándo invertir el eje de integración.)

2. **Volumen por método de discos:**
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx \quad \text{(rotación respecto al eje } X)$$
$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2\, dy \quad \text{(rotación respecto al eje } Y)$$

3. **Volumen por método de cascarones cilíndricos:**
$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx \quad \text{(rotación respecto al eje } Y)$$

4. **Coordenadas cilíndricas:**
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$
$$dV = r\, dz\, dr\, d\theta$$
(El Handbook da coordenadas polares 2D pero NO el Jacobiano 3D.)

5. **Coordenadas esféricas:**
$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$$
$$dV = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
(Completamente ausente del Handbook. Memorizar obligatoriamente.)

6. **Momentos y Centro de Masa:**
   - Primer momento respecto a x: $M_x = \iint_R y\, dA$
   - Primer momento respecto a y: $M_y = \iint_R x\, dA$
   - Con densidad: $M = \iint_R \rho(x, y)\, dA$
   - Centroide: $\bar{x} = M_y/M$, $\bar{y} = M_x/M$

7. **Identidades trigonométricas útiles para integrales:**
   - $\int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\, d\theta = 0$ y $\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\, d\theta = 0$
   - $\int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta)\, d\theta = \pi$ y $\int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta)\, d\theta = \pi$
   - $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$

b. Tema 5: Convergencia de Series e Integrales Impropias

1. **Criterio del Término General (Test de Divergencia):**

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \text{ entonces } \sum a_n \text{ diverge.}$$

(¡Cuidado! El recíproco NO es cierto: que el límite sea 0 no garantiza convergencia.)

2. **Criterio de la Razón (Ratio Test / D'Alembert):**

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

- $L < 1$: converge absolutamente
- $L > 1$ (o $L = \infty$): diverge
- $L = 1$: inconcluso

Ideal cuando hay factoriales ($n!$) o exponenciales (a^n).

3. **Criterio de la Raíz (Root Test):**

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Mismas reglas que el Ratio Test.

4. **Criterio de Comparación Directa:** Si $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n suficientemente grande:

- Si $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge
- Si $\sum a_n$ diverge $\implies \sum b_n$ diverge

5. **Criterio de Comparación en el Límite:**

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Si $0 < L < \infty$, ambas series tienen el mismo comportamiento (ambas convergen o ambas divergen).

6. **p-Series:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \end{cases}$$

La serie armónica ($p = 1$) es la referencia clásica de divergencia.

7. **p-Integrales impropias:**

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{dx}{x^p} \quad \begin{cases} \text{converge si } p < 1 \\ \text{diverge si } p \geq 1 \end{cases}$$

8. **Equivalencias asintóticas clave:**

- Para $u \to 0$: $\sin(u) \approx u$, $\tan(u) \approx u$, $1 - \cos(u) \approx u^2/2$
- Para $u \to 0$: $\ln(1+u) \approx u$, $e^u - 1 \approx u$

Estas aproximaciones permiten determinar el "p efectivo" de una integral impropia.

c. Tema 8: Rectas y Planos en el Espacio

1. **Ecuación de un plano:**
   - Forma general (cartesiana): $Ax + By + Cz + D = 0$, donde $\vec{n} = (A, B, C)$ es el vector normal.
   - Dado un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector normal $\vec{n}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2. **Ecuación de una recta en $\mathbb{R}^3$:**
   - **Forma paramétrica:** Dado un punto P_0 y un vector director $\vec{d} = (a, b, c)$:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

   - **Forma simétrica:**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

   - **Forma vectorial:**

$$\vec{r}(t) = \vec{P_0} + t\vec{d}$$

3. **Intersección de dos planos:** La intersección de dos planos no paralelos es una **recta**. Su vector director es:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

4. **Producto cruz (producto vectorial):**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

5. **Condiciones para determinar un plano:**
   - Tres puntos no colineales
   - Un punto y un vector normal
   - Un punto y dos vectores directores no paralelos

   Si un punto dado está sobre la recta dada, no se puede determinar un plano único.

6. **Distancia de un punto a un plano:**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

7. **Paralelismo y perpendicularidad:**
   - Dos planos son paralelos si sus normales son paralelas: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$
   - Dos planos son perpendiculares si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
   - Una recta es paralela a un plano si $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$
   - Una recta es perpendicular a un plano si $\vec{d} \parallel \vec{n}$

¡Mucho éxito, Dani!