# Cálculo II

martes, 16 de julio de 2019 13:55

Integrales impropias → convergentes, si el límite existe
→ divergentes, si el límite no existe.

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (Área finita)

$\sum_1^N \frac{1}{n}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge. (Área infinita) → Esperanza es infinito porque la serie diverge

Ejercicio

1. $\int_{-\infty}^{0} x e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 x e^x\,dx$

$u = x \qquad du = 1\,dx$

$dv = e^x\,dx \qquad v = e^x$

$\int_t^0 x e^x\,dx = x e^x\Big|_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx = [0 - t e^t] - [e^0 - e^t]$

$= -t e^t - 1 + e^t$

L'hospital

→ $\lim_{t\to-\infty} t e^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} -e^t = 0$

$\lim_{t\to-\infty} \underbrace{-t e^t}_{0} - 1 + \overset{0}{e^t} = -1$

2. $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$ si $p > 1$ → converge

→ diverge si $p \le 1$

3. $\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx$ si $p < 1$ → converge
$p \ge 1$ → diverge.

**Prueba de comparación**

$f(x) \ge g(x) \ge 0$

a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente

b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente.

Toda sucesión acotada y monótona es convergente

Monótona → sucesión creciente o decreciente.

Serie geométrica: $\sum_{n=1}^\infty a r^{n-1}$, $a \neq 0$

✓ Si $|r| < 1$ $\Rightarrow$ converge a $\frac{a}{1-r}$

✓ Si $|r| \ge 1$ $\Rightarrow$ diverge

Serie armónica: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ diverge. $\sum \frac{1}{n+2}$ diverge

Demostración

Si la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es convergente $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

**Prueba de la divergencia**

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe ó es $\neq 0$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es divergente.

**Prueba de la integral**

i) Si $\int_1^\infty f(x)$ es convergente $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es convergente

ii) Si $\int_1^\infty f(x)$ es divergente $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es divergente.

Serie p: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$

✓ Si $p > 1$ $\Rightarrow$ converge

✓ Si $p \le 1$ $\Rightarrow$ diverge.

**Prueba por comparación del límite**

Series $\sum a_n$ y $\sum b_n$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, $c$ número finito $> 0$

$\Rightarrow$ ambas series convergen o divergen.

**Prueba de la serie alternante**

$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} b_n$

1) $b_{n+1} \le b_n$
2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\Big\}\Rightarrow$ la serie converge.

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = 1$ → converge $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

**Prueba de la razón**

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

✓ $L < 1$ $\Rightarrow$ Converge absolutamente
✓ $L > 1$ $\Rightarrow$ Diverge
✓ $L = 1$ $\Rightarrow$ nada

**Prueba de la raíz**

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

✓ $L < 1$ $\Rightarrow$ Converge absolutamente
✓ $L > 1$ $\Rightarrow$ Diverge
✓ $L = 1$ $\Rightarrow$ nada