



Preparación Fundamentals 2024-1

Tomás Triviño (Tom)

Guías resueltas hasta 2019-1

Versión: 2.3

Primera versión: 27 de noviembre de 2023

Fecha de actualización: 16 de julio de 2024

tomastrivino.dev



Índice de contenido

1. Introducción	4
2. Temario e información general	6
3. Material complementario	7
4. Guía de Ejercicios 2023-2	8
5. Guía de Ejercicios 2019-2	57
6. Guía de Ejercicios 2019-1	84
7. Mensaje de cierre	111
7.0.1. Agradecimientos especiales	111
7.0.2. Más guías: 2018-2 hacia abajo	111
8. MAT1610	112
8.1. Derivación	112
8.1.1. Regla del producto y cociente	112
8.1.2. Regla de la cadena	112
8.2. Asíntotas	112
8.2.1. Asíntotas verticales	112
8.2.2. Asíntotas oblicuas	112
9. MAT1620	113
9.1. Integrales impropias	113
9.1.1. Integrales impropias de tipo I	113
9.1.2. Integrales impropias de tipo II	113
9.1.3. Teorema de comparación para integrales impropias	114
9.1.4. Algunos trucos para integrales impropias	114
9.2. Masa, centro de masa y momento	115
9.2.1. Masa con integrales dobles	115
9.2.2. Momento respecto a un eje	115
9.2.3. Centro de masa	115
9.3. Volumen de una región con integrales dobles	116
9.4. Series	116
9.4.1. Series geométricas	116
9.4.2. La prueba de la divergencia	116
9.4.3. La prueba de la integral	117
9.4.4. Pruebas por comparación	117
9.4.5. Prueba de la serie alternaente	117
9.4.6. Prueba de la razón	117
9.4.7. Prueba de la raíz	118



10.MAT1630	119
10.1. Volumen de una región con integrales triples	119
10.2. Derivadas direccionales	119
11.MAT1640	120
11.1. Categorización de EDOs	120
11.1.1. Orden de una EDO	120
11.2. Método de valores propios para sistemas homogéneos	120
12.MAT1203	121
12.1. Propiedades de la multiplicación de matrices	121
12.2. Propiedades de la transpuesta de matrices	121
12.3. Propiedades de matrices invertibles	121
12.4. Teorema de la matriz invertible	122
12.5. Matrices simétricas	122
13.QIM100E	123
13.1. La materia	123
13.1.1. Diagramas de fase	123
13.1.2. El agua	123
13.1.3. Propiedades de los gases, líquidos y sólidos	123
13.2. Equilibrio químico	124
13.2.1. Principio de Le Chatelier	124
13.2.2. Potenciales estándar de reducción	125
13.2.3. Constante de equilibrio	126
13.2.4. El cociente de reacción Q	126
13.2.5. Predicción del equilibrio	126
13.2.6. Reacciones de precipitación	127
13.2.7. Solubilidad y solubilidad molar	127
13.2.8. Reglas de solubilidad	127
13.2.9. Efecto del ión común y del pH en la solubilidad	128
13.2.10. Bases débiles y pOH	129
13.2.11. Reacción de combustión	129
13.3. Compuestos iónicos	129
13.3.1. Propiedades de los sólidos iónicos	129
14.FIS1523	131
14.1. Trabajo y diagrama P-V	131
15.IEE1533	132
15.1. Líneas de campo	132
15.1.1. Líneas equipotenciales	132
15.2. Condensadores	133
15.2.1. Condensador de placas planas y paralelas	133
15.2.2. Dieléctricos	134
15.3. Corriente alterna	134
15.3.1. Ángulo de fase en un circuito RLC	134



15.3.2. Reactancia inductiva y capacitativa	135
16. ICS1513	136
16.1. Costo marginal	136
16.2. Costo de oportunidad	136
16.3. Elasticidad	136
16.3.1. Elasticidad precio-demanda	136
16.3.2. Determinación de la elasticidad	137
16.3.3. Elasticidad y curvas de demanda	138
16.3.4. Elasticidad precio-oferta	139
16.3.5. Elasticidad y curvas de oferta	140
16.4. Economía de bienestar y teoría del productor/consumidor	142
16.4.1. Excedentes del consumidor y productor	142
16.4.2. Costo y tipos de costo	143
16.4.3. Bienestar social	144
16.5. Monopolios	144
16.5.1. Curva de ingreso marginal	144
16.5.2. Costo social del monopolio	145
16.5.3. Regulación del monopolio	145
17. Excel	146
17.1. Referencias en celdas	146
17.1.1. Uso de \$	146
18. Referencias bibliográficas	148



1. Introducción

El siguiente documento es la guía que hice para mí mismo y con la que me preparé para el Fundamentals 2024-1, ajustado al currículum de la generación 2022 (sin ética en el temario).

Advertencia

Es importante tener en cuenta lo siguiente:

- Este documento **NO ES OFICIAL**. Es decir, es personal y no está relacionado directamente con la Escuela de Ingeniería.
- Algunas soluciones podrían ser engorrosas, erróneas o más complejas de lo que deberían. Esto es porque son **mis resoluciones** y pueden tener ciertos errores, los que no corregiré después de publicar esta guía.
- Sólo incluiré mis soluciones de los ejercicios de las guías 2023-2, 2019-2 y 2019-1, y es posible que no me de el tiempo de explicar a detalle cada una de ellas.
- **CLAVE: ESTUDIAR CON EL HANDBOOK**. Es el texto que nos entregarán al rendir la prueba. Yo incluiré en el anexo algunos repasos de materia que considero relevante, pero lo realmente importante es saber dónde encontrar la materia en el handbook. Recuerda que este es un apunte personal que estoy difundiendo.

Información adicional

Este es mi último proyecto como delegado generacional de la generación 2022 de Ingeniería Civil.
¡Espero que les sea muy útil!

- Puedes donarme un pan con huevo haciendo [click acá](#) (puedes ser un buen samaritano y enviar desde 1000 pesos).
- Tengo otros proyectos que podrían interesarte: te invito a revisar mi [página web](#).
- ¡Te invito a seguirme en Instagram! [@tomas.sk2003](#).





Cambios en la versión 2.3

La versión 2.3 incorporó correcciones respecto al material disponible. La verdad es que yo ya pasé el Fundamentals, pero decidí actualizarlo para que esto siga siendo de ayuda.

- **CORRECCIÓN:** Lamentablemente el *Google Drive* de las guías resueltas en años anteriores (por Ámbar Zenteno) fue eliminado. Para nuestra suerte, tenía descargadas las guías en mi computador y las subí nuevamente, por lo que no es material perdido. Ahora los enlaces a esas guías están funcionando nuevamente.
- ~~Actualicé la imagen de mi fursona, cause why not?~~

NOTA: Este documento podría contener errores, los que ya no serán actualizados a menos que sean de gravedad. Esto se debe a que, debido al tamaño del archivo, debo de pagar (*mentira, por alguna razón siempre me dan prueba gratuita*) una cuenta Premium de Overleaf cada vez que necesito modificarlo. Podrás encontrar abajo el historial de cambios realizados en febrero de 2024.

Cambios en la versión 2.2

La versión 2.2 incorporó una corrección en la comparación de la B de la pregunta 2 de 2023 – 2 (gracias a Tatán Silva por el aviso).

Respecto a la versión 2.1, los principales cambios que contiene dicha actualización (21/02/24) en comparación a la versión anterior (15/02/24) son:

- **AVISO:** Agregué un disclaimer para la pregunta 15 de *EYP1113* de 2023 – 2, en la que aclaro que lo más correcto es realizar una prueba de igualdad de varianzas antes que lanzarse a asumir cosas. Personalmente, creo que en la prueba hay varias preguntas que se podrían prestar para asumir, pero la forma más correcta es realizando todo el procedimiento. (No me quise dar la lata de agregar ese paso, por lo que lo dejo como una recomendación).
- **COMENTARIO:** Recomiendo no pescar mucho mi desarrollo del ejercicio 3 de 2019 – 1. No tengo confirmación de que esté erróneo, pero debo reconocer que está chamullento. Hay formas más fáciles.
- **CORRECCIÓN:** En el ejercicio 15 de 2023 – 2, arreglé un error en que había puesto que $c_{0.9} = X^2_{0.010}$. En verdad, $c_{0.9} = X^2_{0.10}$. Con esto, también modifiqué el valor de $c_{0.9}$ y la respuesta se mantuvo igual.
- **CORRECCIÓN:** Me había equivocado planteando la integral de área en el ejercicio 2 de la guía 2019 – 2. Además, puse erróneamente que la alternativa correcta es la A, lo que no cuadra con la guía original. Esto también fue corregido.
- **CORRECCIÓN:** En el ejercicio 10 de 2019 – 2, corregí un error en que convertí $20cm$ a $0.02m$, lo que me había generado un conflicto en mi respuesta. Ahora sí contiene la respuesta adecuada.

Me gustaría reiterar **que he sido claro en que es un desarrollo mío y que NO debe usarse como guía de estudio**. En caso de apoyarse fuertemente de este documento, **se espera ser lo suficientemente crítico para estar al tanto de que pueden haber errores**, en cuyos casos les pido que me lo hagan saber (sin menospreciar mi esfuerzo, por favor :c). ¡Gracias! :D



2. Temario e información general

Primero lo primero: **para rendir el fundamentals necesitas inscribirlo en SIDING.**

- La inscripción se realiza en *Procesos Pregrado > Ciclo 1 > Examen*.
- Las fechas son informadas por la DIPRE y podrás encontrar más información en ODOC y SIDING por medio de *Pregrado > Ciclo 1 > Examen Competencias Fundamentales*.

Mientras tanto, me restaré a incluir el desglose de las preguntas que se incluyen en la prueba. **OJO:** Para el caso de los cursos que son impartidos por dos facultades, **pondré las siglas de los que yo tomé**. Esto es importante a tomar en cuenta pues los cursos se enseñan de manera diferente.

Módulo 1: Su duración es de 2 horas y evalúa los contenidos matemáticos del plan común.

Sigla	Ramo	Cantidad de preguntas
MAT1610	Cálculo I	2
MAT1620	Cálculo II	4
MAT1630	Cálculo III	4
MAT1640	Ecuaciones Diferenciales	4
MAT1203	Álgebra Lineal	4
EYP1113	Probabilidad y Estadística	12

Módulo 2: Su duración es de 2 horas y 50 minutos. Evalúa los contenidos científicos.

Sigla	Ramo	Cantidad de preguntas
FIS1514	Dinámica	12
IEE1533	Electricidad y Magnetismo	12
FIS1523	Termodinámica	12
QIM100E	Química Para Ingeniería	12

Módulo 3: Su duración es de 1 hora y 30 minutos y evalúa el manejo de programación, Excel y economía.

Sigla	Ramo	Cantidad de preguntas
ICS1513	Introducción a la Economía	12
IIC1103	Introducción a la Programación	12



3. Material complementario

A continuación, adjunto algunos de los materiales que utilicé para hacer las guías :)

- **Chang:** Libro que referencié en algunas partes para química. Puedes visualizarlo [aquí](#).
- **Apunte de Michael Ramón:** Absolutamente imprescindible para EYP1113. La versión que utilicé está en [este enlace](#). Sin embargo, te recomiendo usar alguna versión más nueva, pues este apunte se actualiza constantemente.
- **Handbook del Fundamentals:** La versión más reciente la encontrarás en SIDING. Sin embargo, la que yo utilicé para esto es la que encuentras [en esta página](#).

Por último, puedes encontrar más desarrollos (guías 2018-2 hacia abajo) [en este enlace](#), realizados por Ámbar Zenteno.

¡Que te vaya muy bien!

-Tom





4. Guía de Ejercicios 2023-2

A continuación, encontrarás mi resolución a la guía de ejercicios de 2023-2.

Ejercicio 1

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)$$

¿Cuál es la derivada de $f(x)$?

Alternativa correcta: A

Resolución: Por regla del cociente, el procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) \right] \\ &= \frac{(\sin(x))'x - x'\sin(x)}{x^2} - (-\sin(x)) \\ &= \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2} + \sin(x) \\ &= \frac{\cos(x)x - \sin(x) + x^2\sin(x)}{x^2} \\ &= \frac{[\sin(x)][x^2 - 1] + x\cos(x)}{x^2} \\ &= x^{-2}(x\cos(x) + (x^2 - 1)\sin(x)) \end{aligned}$$

¿Perdido o perdida?

Puedes encontrar un breve repaso de los contenidos en el anexo haciendo click acá. Además, para cada pregunta incluiré (de ser necesario) la página del handbook en donde encontrarás más detalles. Por supuesto, existen algunas cosas que obviaré considerando que este es un archivo de estudio personal, pero si tienes dudas me puedes hablar e intentaré responderle.



Ejercicio 2

¿Cuál de las siguientes integrales diverge?

- $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$
- $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^5+5}} dx$
- $\int_0^\infty \frac{\sin(\frac{1}{x})}{e^x} dx$
- $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln(x)} dx$

Alternativa correcta: D

Resolución: Si no recuerdas, te recomiendo revisar el repaso de integrales impropias que dejé en el anexo de cálculo II: puedes acceder haciendo click acá. Todo lo que necesitas para este ejercicio está ahí.

Descarte de la alternativa A: Para el caso de la primera integral, nos es útil considerar que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, lo que se cumple también para el seno. De esta manera podemos acotar $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Por el criterio de comparación de integrales, sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ converge, por lo que la integral $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ es convergente pues $\frac{1}{x^2} \geq \frac{\cos(x)}{x^2}$.

Descarte de la alternativa B: Podemos notar que $\sqrt{\frac{x^2+2}{x^5+5}} \leq \sqrt{\frac{x^2+2}{x^5}} \leq \frac{x^2+2}{x^5} \leq \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^5}$. Luego, por lo anterior, $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^5} dx$ es convergente (porque las separamos y tenemos una suma de integrales impropias de tipo p que convergen), por lo que la integral $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^5+5}} dx$ converge por criterio de comparación de integrales impropias.

Descarte de la alternativa C: En este caso $-e^{-x} \leq \sin(\frac{1}{x})e^{-x} \leq e^{-x}$. Acá podemos probar integrando, pues la integral con sólo la exponencial es mucho más sencilla. En particular, $\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t}) = 1$, por lo que converge. Así, la integral es convergente por el mismo criterio usado en las partes anteriores.

Confirmación de la alternativa D: La integral es engorrosa por lo que una vez más podemos buscar una cota para comprobar la divergencia. En este caso, podríamos usar una cota inferior, considerando que para $x \geq e$, se tiene que $\ln(x) \geq 1$, por lo que $\frac{1}{\ln(x)} \leq 1$. De todos modos, yo no gastaría tiempo en eso, pues sale más conveniente descartar las otras alternativas para seleccionar esta :).

CORREGIDO: La comparación de la B estaba mala, la corregí en la v2.2.
Gracias a Tatán Silva por la aclaración.





Ejercicio 3

Sea R la región del plano descrita por:

$$\begin{aligned}0 &\leq y \leq 1 - x^2 \\-1 &\leq x \leq 1\end{aligned}$$

El momento de la región R con respecto al eje X es:

Alternativa correcta: C

Fórmula disponible en la página 108 (84 en pdf) del handbook.



Resolución: Tuve que repasar esta materia para este ejercicio, revisa mis apuntes haciendo click acá. Sabemos que el momento de una región respecto al eje X corresponde a

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)dA$$

Aplicándolo a este caso particular, la integral sobre la región corresponde a

$$M_x = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} y\rho(x, y) dy dx$$

Como no nos dicen nada respecto a la densidad, asumiremos que esta es constante e igual a 1. De esta manera, desarrollamos:

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} y \cdot 1 dy dx \\&= \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^2}{2} dx \\&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 - 2x^2 + x^4 dx \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} \\&= \frac{8}{15}\end{aligned}$$

Por lo que la alternativa correcta es la C.



Ejercicio 4

Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ un cuerpo en el espacio definido por las siguientes desigualdades en coordenadas cilíndricas,

$$0 \leq r \leq 2 + \sin(4\theta)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq 1$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde al volumen del cuerpo Λ ?

Alternativa correcta: C

Integrales importantes en la página 49 (25 en pdf) del handbook.



Resolución: En este caso no hay que hacer descarte por alternativas, sino que simplemente calcular. Los apuntes de MAT1630 los encuentras haciendo click aquí.

Dado

$$V = \iiint_E dV$$

Como nos entregan los límites de integración correspondientes a este cuerpo, tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin(4\theta)} r dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin(4\theta)} r dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(2 + \sin(4\theta))^2}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4 + 4\sin(4\theta) + \sin^2(4\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(8\pi + \int_0^{2\pi} \sin^2(4\theta) d\theta \right) \end{aligned}$$

Para resolver la integral que nos queda dando vueltas, basta con hacer un cambio de variable $u = 4\theta$ y se llega a que $\int_0^{2\pi} \sin^2(4\theta) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{8\pi} \sin^2(u) du$. Esto último da como resultado π y se puede resolver tomando en cuenta la integral del handbook. Así, el resultado final es $\frac{9\pi}{2}$.

Jacobiano alert

No olvides el Jacobiano. Para coordenadas cilíndricas, el diferencial de volumen dV corresponde a $dV = r dr \, d\theta \, dz$.



Ejercicio 5

Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida como:

$$g(x, y) = e^{\arctan(x+y)}$$

Considere el punto $x_0 = (1, 0)$ y el vector unitario $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. ¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a la derivada direccional $\frac{\partial g}{\partial u}$ en el punto x_0 ?

Alternativa correcta: C

Derivadas importantes en la página 48 (24 en pdf) del handbook.



Resolución: Esto es aplicar fórmula. Revisa el apunte de MAT1630 haciendo click aquí.

Por la fórmula $D_u f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$, como las componentes del vector unitario son iguales, tenemos que $D_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (f_x(x, y) + f_y(x, y))$.

Si no recuerdas la derivada de arcotangente, puedes revisarla en el handbook.

A partir de esto último, tenemos que $\frac{d}{dx} e^{\arctan(x+y)} = e^{\arctan(x+y)} \cdot \frac{1}{1+(x+y)^2}$, que es lo mismo a la derivada respecto a y en este caso, por regla de la cadena. Entonces,

$$\begin{aligned} D_u f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(2 \frac{e^{\arctan(x+y)}}{1+(x+y)^2} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\arctan(x+y)}}{1+(x+y)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot e^{\arctan(x+y)}}{1+(x+y)^2} \end{aligned}$$

Lo que evaluado en el punto $x_0 = (1, 0)$ corresponde a $\frac{\sqrt{2} \cdot e^{\arctan(1)}}{2}$, donde $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$. Así, el resultado es $\frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}$.



Ejercicio 6

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para $x(t)$ e $y(t)$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 2y\end{aligned}$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a la solución $\{x(t), y(t)\}$ del sistema dado?

Alternativa correcta: A

Resolución: Revisa lo necesario para responder esta pregunta haciendo click aquí.

Consejo de oro

Si no tienes tiempo y te quieres ahorrar una lata, **es mejor probar alternativa por alternativa.**

¡Deriva las alternativas y fíjate que cumplan con la EDO!

Aún así, mostraré la solución a la misma a continuación.

Me imagino que esta pregunta, al igual que muchas en EDO, se puede resolver de distintas maneras. Por comodidad, lo haré empleando el sistema matricial dados los términos lineales. Así, se representa el sistema como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por método de valores propios, notamos que el determinante de la matriz $A - \lambda I$ da como resultado $(2 - \lambda)(-2 - \lambda) - 3 = 0$, lo que es $3 = -(2 - \lambda)(2 + \lambda)$, o bien $3 = -4 + \lambda^2$. Así, $\lambda = \pm\sqrt{7}$. Con esto ya podemos descartar las alternativas C y D. Ahora, nos corresponde obtener los vectores propios, para lo que basta con resolver $A - \lambda I = 0$ de manera matricial, tal que:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 - \sqrt{7} & 3 & 0 \\ 1 & -2 - \sqrt{7} & 0 \end{array} \right]$$

Con lo que podemos despejar $x_1 = (2 + \sqrt{7})x_2$ y representar el vector propio como $x_2 \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{7} \\ 1 \end{bmatrix}$, de manera

que un posible vector propio para el valor propio $\sqrt{7}$ está dado por $\begin{bmatrix} 2 + \sqrt{7} \\ 1 \end{bmatrix}$. A partir de este punto sólo nos queda la alternativa A, por lo que seleccionamos esa como la correcta, aunque puedes seguir desarrollando y obtener el resto de términos de la solución. Recuerda que la solución debe ir acompañada de las constantes, razón por la cual encuentras los términos A y B en las alternativas.



Ejercicio 7

Considere la siguiente ecuación diferencial para y como función de x :

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

¿Cuál de las siguientes alternativas describe mejor la ecuación diferencial?

- No lineal, homogénea y de primer orden.
- Lineal, no homogénea y de segundo orden.
- No lineal, no homogénea y de segundo orden.
- Lineal, homogénea y de primer orden.

Alternativa correcta: A

Resolución: Podemos reescribir la ecuación de la forma $(x^2 + y^2)dx = xydy$, de manera que $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$. Con esto, deducimos que la ecuación es de primer orden porque la derivada de mayor orden es $\frac{dy}{dx}$, con orden 1. Además, la EDO es no lineal pues la función $\frac{x^2+y^2}{xy}$ no es de grado 1.

Ejercicio 8

Considere la siguiente matriz (A y B son invertibles):

$$M = (AB)^T(BA^T)^{-1}$$

M^T es igual a:

Alternativa correcta: B

Resolución: Primero, expresaré esta igualdad usando las propiedades que describí en el apunte, al cual puedes acceder haciendo click aquí.

Tenemos que $(AB)^T = B^T A^T$ y $(BA^T)^{-1} = (A^T)^{-1}B^{-1}$ pues el producto BA^T es invertible. Luego,

$$\begin{aligned} M &= (AB)^T(BA^T)^{-1} \\ &= B^T A^T (A^T)^{-1} B^{-1} \\ &= B^T I B^{-1} \\ &= B^T B^{-1} \end{aligned}$$

Cuya transpuesta es $(B^T B^{-1})^T = (B^{-1})^T (B^T)^T = (B^{-1})^T B$, por lo que la alternativa correcta es la B.



Ejercicio 9

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo tamaño. Suponga además que las matrices A y $A + B$ son invertibles.

Considere las siguientes afirmaciones:

- I. B es siempre invertible.
- II. BA^{-1} es siempre invertible.
- III. $I + BA^{-1}$ es siempre invertible.

¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores son **FALSA(S)**?

Alternativa correcta: C

Información disponible en la página 57 (33 en pdf) del handbook.



Resolución: Revisa las propiedades de las matrices invertibles y el teorema de la matriz invertible haciendo click aquí.

No existe suficiente información que nos permita deducir que B es invertible. De hecho, para que B fuese invertible debería cumplirse que $BB^{-1} = I$, lo que no se puede deducir dado el contexto. Si tomamos que $(A + B)$ y A son invertibles, podemos multiplicar $(A + B)A^{-1} = AA^{-1} + BA^{-1} = I + BA^{-1}$, lo que es invertible pues se trata de un producto de matrices invertibles. Así, se descarta cualquier alternativa que incluya la III y se puede intuir que la II es falsa. Luego, I y II son falsas.



Ejercicio 10

Suponga que en cierto terreno la probabilidad de encontrar gas natural subterráneo es de 30 %. Un experto petrolero quiere realizar una prueba sísmica en el terreno, la cual confirma correctamente la presencia de gas con una probabilidad de 90 %. La misma prueba confirma correctamente la ausencia de gas con probabilidad 70 %.

Aclaración: Confirmar correctamente la presencia (o ausencia) de gas significa que el resultado de la prueba sísmica es el correcto, dada la presencia (o ausencia) de gas en el terreno.

Suponga que la prueba sísmica indicó ausencia de gas, ¿cuál de las siguientes alternativas es más cercana a la probabilidad de que haya gas natural subterráneo en el terreno, a pesar del resultado de la prueba?

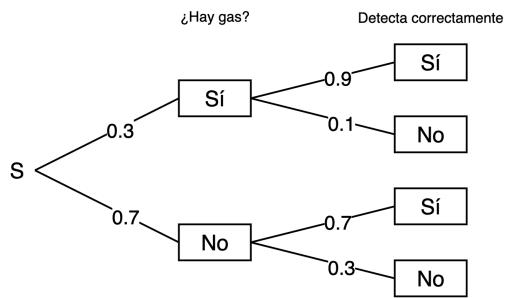
Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 65 (41 en pdf) del handbook.



Resolución: Este ejercicio sale más fácil de comprender con árboles. Pondré un diagrama a continuación:

Figura 1
Diagrama ejercicio 10



Definimos los eventos:

- A: Hay gas subterráneo
- B: La prueba detecta ausencia

Nos piden $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Lo que es igual a $\frac{0.1 \cdot 0.3}{0.1 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.7} \approx 0.057 \approx 0.06$, lo que corresponde a aproximadamente un 6 % de probabilidad. Es importante que tomes en cuenta la aclaración para resolver este ejercicio: si **no** hay gas subterráneo y la prueba detecta correctamente, entonces la prueba detecta ausencia. Si hay gas subterráneo y la prueba no detecta correctamente, entonces también detecta ausencia de gas.



Ejercicio 11

Un fabricante de automóviles tomó una muestra de 100 vehículos y midió su kilometraje al momento de ser necesario su cambio de transmisión. De la muestra se obtiene una media muestral de 122240km , y una desviación estándar de 8400km . Suponga que el rendimiento de cada vehículo es independiente de los demás y que el kilometraje recorrido antes de requerir un cambio de transmisión tiene distribución normal.

Según esta información, ¿cuál de las siguientes alternativas es la más cercana a un intervalo de 95 % de confianza para el kilometraje esperado al momento de requerir un cambio de transmisión?

Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 74 (50 en pdf) del handbook.



Resolución: Del ejercicio tenemos que X : kilometraje al momento de ser necesario un cambio de transmisión distribuye $X \sim Normal(\mu, \sigma)$, con $n = 100$, $\bar{X} = 122240$ y $s = 8400$. Sólo conocemos la desviación estándar muestral, mas no la de la distribución. Así, tenemos que usar la fórmula (B) del handbook, correspondiente a la de un intervalo de confianza con σ desconocido. Es decir,

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Como nos piden esta estimación al 95 % de confianza, entonces $\alpha = 5\%$, de manera que necesitamos $t_{0.025}(n-1)$. Dado $n = 100$, entonces necesitamos $t_{0.025}$ con $v = 99$, lo que se puede aproximar a $v \approx \infty$, o bien, a una $Normal(0, 1)$. La tabla en la página 77 (o 53 del pdf) sugiere que $t_{0.025}(\infty) = 1.960$, por lo que el intervalo queda como:

$$122240 - 1.960 \frac{8400}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 122240 + 1.960 \frac{8400}{\sqrt{100}}$$

Resolviendo:

$$120593.6 \leq \mu \leq 123886.4$$

Con lo que la alternativa más cercana es la B.



Ejercicio 12

Un analista de una pequeña empresa busca relacionar los gastos mensuales (y) como función del ingreso por ventas mensuales. Suponga que se registró una muestra de ventas y gastos por doce meses (x_i, y_i). La información de los datos se resume en los siguientes estadísticos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{12} x_i &= 2618 & \sum_{i=1}^{12} y_i &= 325.8 & \sum_{i=1}^{12} x_i^2 &= 587099.08 \\ \sum_{i=1}^{12} y_i^2 &= 72375.09 & \sum_{i=1}^{12} x_i y_i &= 9041.74\end{aligned}$$

Asuma que se cumplen los supuestos de un modelo de regresión lineal simple.

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a las estimaciones más cercanas de los parámetros (a, b) de la recta de regresión $y = a + bx$, por el método de mínimos cuadrados?

Alternativa correcta: A

Información disponible en la página 69 (45 en pdf) del handbook.



Resolución: Necesitamos \hat{a} y \hat{b} . Del handbook sabemos que $\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$, donde (de la misma fuente) se tiene que $S_{xy} = \sum x_i y_i - (\frac{1}{n})(\sum x_i)(\sum y_i)$, mientras que $S_{xx} = \sum x_i^2 - (\frac{1}{n})(\sum x_i)^2$. Entonces,

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{9041.74 - \frac{1}{12} \cdot 2618 \cdot 325.8}{587099.08 - \frac{1}{12} \cdot (2618)^2} \approx -\frac{62036.96}{15938.75} \approx -3.89$$

Desde aquí ya podemos decir que la alternativa es la A.

De todos modos, mostraré cómo obtener \hat{a} , para lo que tenemos que considerar que $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, reemplazamos:

$$\hat{a} = \frac{325.8}{12} + 3.89 \frac{2618}{12} \approx 875.8$$

Lo que es más cercano a la alternativa A.



Ejercicio 13

Un proveedor de fibra óptica afirma que las velocidades de carga y descarga de su servicio son equivalentes. Para comprobarlo, Emilia ha realizado un test de velocidad en 50 ocasiones, obteniendo:

- Una media de 322 Mbps para velocidad de carga, con desviación estándar de 12 Mbps.
- Una media de 328 Mbps para velocidad de descarga, con desviación estándar de 9 Mbps.

Según los datos de Emilia, ¿existe suficiente evidencia para rechazar que las velocidades de carga y descarga sean equivalentes?

Alternativa correcta: A

Información disponible en la página 73 y 74 (49 y 50 en pdf) del handbook.



Resolución: Sea X_1 la velocidad de carga y X_2 la velocidad de descarga, podemos asumir que distribuyen $X_1 \sim Normal(\mu_1, \sigma_1)$ y $X_2 \sim Normal(\mu_2, \sigma_2)$. Del enunciado tenemos $n_1 = n_2 = 50$, $\bar{X}_1 = 322$, $s_1 = 12$, $\bar{X}_2 = 328$, $s_2 = 9$, en donde tenemos que hacer un test de hipótesis. En particular, para que las velocidades sean equivalentes debe cumplirse que sus distribuciones sean iguales, es decir, que $\mu_1 = \mu_2$ y que $\sigma_1 = \sigma_2$. Entonces, haremos un test de comparación de medias **asumiendo varianzas iguales**, es decir, planteamos $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

$$T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim T-student(n_1 + n_2 - 2)$$

Por handbook,

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{\nu} = \frac{49 \cdot 12^2 + 49 \cdot 9^2}{50 + 50 - 2} = 112.5$$

Reemplazando,

$$T_0 = \frac{322 - 328}{\sqrt{112.5} \cdot \sqrt{\frac{2}{50}}} \approx -2.83$$

Para rechazar la hipótesis, $|T_0| > t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)$, es decir, $2.83 > t_{\frac{\alpha}{2}}(98)$, donde α es la significancia. Como $\nu > 30$, podemos verificar en la tabla $T-student$ para $\nu \approx \infty$ o en la tabla $Normal(0, 1)$. Dada la tabla de la página 77 (53 en pdf), notamos que $|T_0| > t_{0.005}(\infty)$, por lo que se puede rechazar la hipótesis nula con una significancia $\alpha = 0.01$. Así, la alternativa correcta es la A.

IMPORTANTE: Según algunas personas este desarrollo está incompleto. El procedimiento normal es hacer un test F para verificar si las varianzas son iguales primero, y después preocuparse de lo demás. Yo decidí omitirlo y asumir varianzas iguales, dado que se espera que las preguntas se hagan en 4 minutos. Si haces la prueba de F, te demorarás bastante más.





Ejercicio 14

Benjamín siempre ha vendido zapallo italiano por unidad, pero desea comenzar a venderlo por kg, así que está interesado en conocer, en promedio, cuánto masa uno de sus zapallos italianos. Para esto, ha masado 40 zapallos italianos, obteniendo un promedio de 240 g con una desviación estándar de 21 g.

Construya un intervalo de confianza al 90 % para la masa de un zapallo italiano promedio, en gramos.

Alternativa correcta: A

Información disponible en la página 74 (50 en pdf) del handbook.



Resolución: Esto es lo mismo que el ejercicio 11, por lo que lo describiré de manera breve. Tenemos X : masa del zapallo italiano, con $X \sim Normal(\mu, \sigma)$. En este caso, $n = 40$, $\bar{X} = 240$, $s = 21$. De esta manera, el intervalo de confianza del promedio (μ para una $Normal$) es

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Como el intervalo de confianza es al 90 %, entonces $\alpha = 0.1$, por lo que necesitamos $t_{0.05}(39)$. Por la tabla de la página 77, tenemos que $t_{0.05}(39) \approx \infty = 1.645$, por lo que, reemplazando:

$$240 - 1.645 \frac{21}{\sqrt{40}} \leq \mu \leq 240 + 1.645 \frac{21}{\sqrt{40}}$$

Llegando a

$$234.54 \leq \mu \leq 245.46$$

Con lo que la alternativa más cercana es la A.



Ejercicio 15

Un fabricante de ampolletas incandescentes está evaluando la calidad de su producto y está interesado en modelar la duración de las mismas (en horas de uso antes de quemarse). Para esto, el procedimiento ha sido:

- Testear 100 ampolletas, registrando la cantidad de horas que duraron encendidas.
- A partir de la muestra anterior, conseguir el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro de la distribución exponencial, que resultó ser $\hat{\lambda} = 1102$.
- Organizar la información en la siguiente tabla:

Tabla 1

Tabla resumida del ejercicio 15

Intervalo (horas)	O_i	E_i	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
[0, 800)	55	51.61	0.22
[800, 1600)	21	24.97	0.63
[1600, 2400)	10	12.08	0.36
[2400, 3200)	10	5.85	2.94
[3200, 4000)	2	2.83	0.24
[4000, $+\infty$)	2	2.65	0.16

Tabla acortada a mi gusto.

Con esta información, ¿existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis de que la duración de las ampolletas distribuye exponencial?

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 102 (109 en pdf) del **apunte de Michael Ramón.**



Resolución: Tenemos que hacer un test de bondad de ajuste, con

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(k - 1 - \nu)$$

Donde k es la cantidad de intervalos y ν la cantidad de parámetros **estimados**. Por el segundo ítem del procedimiento, $\nu = 1$. Luego, sumando los elementos de la tabla:

$$X^2 = 4.55 \sim \chi^2(6 - 1 - 1)$$

Dado $H_0 : X \sim Exponencial(\nu)$, $H_1 : X \not\sim Exponencial(\nu)$, para **aceptar** la hipótesis nula se debe cumplir que $X^2 < c_{1-\alpha}(k - 1 - \nu)$. Por la tabla de la página 79 del handbook notamos que $c_{0.9} = X^2_{.10} = 7.779$, por lo que a un 10 % de significancia **no existe** evidencia para rechazar la hipótesis nula en el test de bondad.



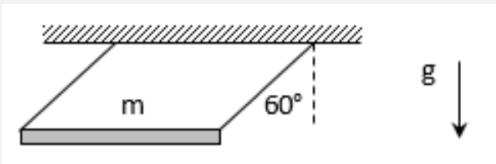
ATENCIÓN: La tabla del χ^2 que tiene el handbook es **distinta** a la que vimos en clases de EYP1113. Una forma de resumirlo es $c_{0.9} = X^2_{0.10}$ (fíjate en el área del gráfico que cubre, como se ve en la tabla).



CORREGIDO: Se corrigió este desarrollo en la v2.1.



Ejercicio 16



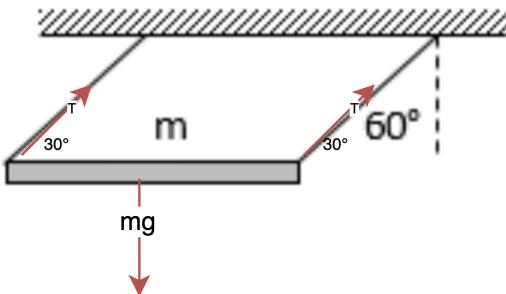
Una barra delgada y homogénea de masa m está colgada de dos cuerdas inextensibles del mismo largo, y de masa despreciable.

Si el sistema se suelta desde el reposo en $t = 0$, ¿Cuál es el valor de la fuerza de tracción en cada cuerda en el instante en que el sistema se suelta?

Alternativa correcta: D

Resolución: En este ejercicio decidí hacer un DCL asumiendo a la barra como algo "puntual", es decir, tal como si hiciésemos el DCL de un puntito. El diagrama quedó de esta manera:

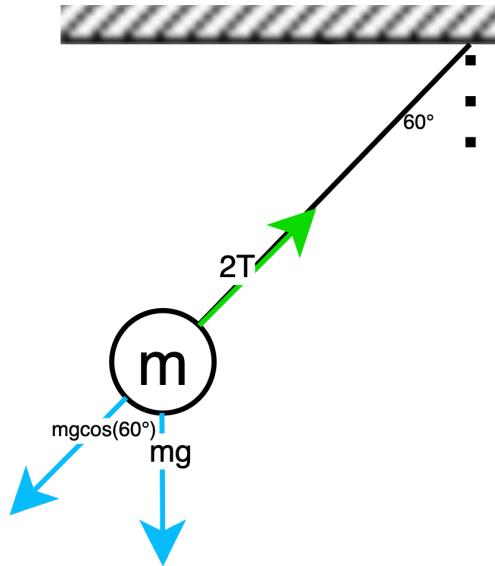
Figura 2
Diagrama ejercicio 16



En donde en $t = 0$ el sistema se encuentra en equilibrio, por lo que $\sum F = 0$. En particular, asumimos que la fuerza de tensión de cada cuerda es igual y nos piden su magnitud, por lo que nos es de utilidad el balance de fuerzas en el eje "radial" (el eje de las cuerdas). A continuación una figura más simplificada:



Figura 3
DCL ejercicio 16



Prestar especial atención a cómo orienté los ejes. Digamos que el eje y es paralelo a la tensión de la cuerda. En la figura simplificada se muestra como si se tratase de una única cuerda de tensión $2T$, puesto que las cuerdas son iguales en el ejercicio.

$$\sum F_y = 0$$

Lo que implica

$$2T - mg \cos(60^\circ) = 0$$

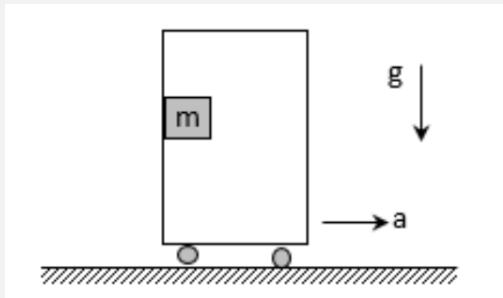
De manera que

$$\begin{aligned} T &= \frac{mg}{2} \cdot \cos(60^\circ) \\ &= \frac{mg}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{mg}{4} \end{aligned}$$

Por lo que la alternativa correcta es la D, correspondiente a $0.25mg$.



Ejercicio 17



Un pequeño bloque de masa m se encuentra sobre una pared vertical, dentro de un carro que acelera hacia la derecha con una aceleración constante “ a ”, como muestra la figura. El roce entre bloque y la pared es lo suficientemente alto para que, en estas condiciones, el bloque no deslice respecto a la pared.

¿Cuál es el mínimo valor que puede tener el coeficiente de roce estático entre el bloque y la pared?

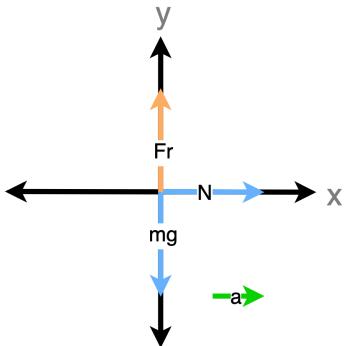
Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 122 (98 en pdf) del handbook.



Resolución: A continuación, incluyo un DCL del bloque de masa m . Este bloque tendrá la misma aceleración que la del carro. En particular, se cumplirá que $\sum F_y = 0$ y $\sum F_x = ma$. Además, la fuerza de roce F_r corresponde a $\mu_k N$, en donde nos piden determinar μ_k .

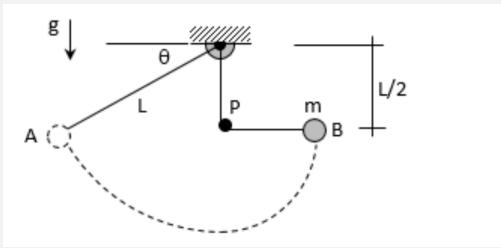
Figura 4
Diagrama ejercicio 17



Por balance de fuerzas, $N = ma$. Luego, $F_r - mg = 0$ por lo que $F_r = mg$, tal que $\mu_k N = mg$, lo que corresponde a $\mu_k ma = mg$. Despejando, concluimos que $\mu_k = \frac{g}{a}$.



Ejercicio 18



El péndulo de la figura tiene largo L y masa m . El péndulo se suelta en la posición A desde el reposo, y llega al punto B con rapidez nula. En el punto P existe un clavo, de tal forma que el radio de la trayectoria disminuye a la mitad.

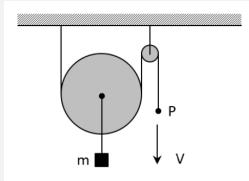
¿Cuál debe ser el ángulo θ inicial para que el péndulo llegue al punto B con rapidez nula?

Alternativa correcta: B

Resolución: Por conservación de energía, $E_A = E_B$. En ambos casos se debe dar que la velocidad sea nula, por lo que sólo hay presencia de energía potencial. Entonces, $mgL\sin(\theta) = mg\frac{L}{2}$, de manera que debe cumplirse que $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$, lo que se da con un ángulo θ de 30° .



Ejercicio 19

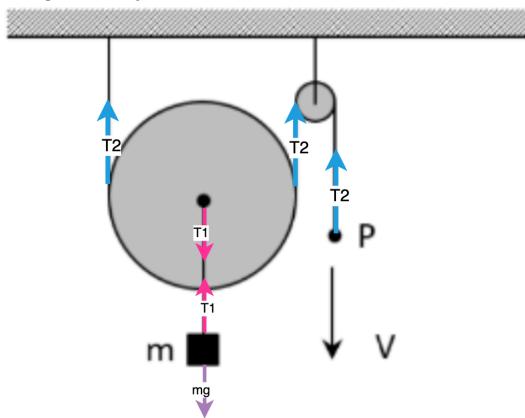


En el sistema de poleas de la figura, el punto P se mueve hacia abajo con una rapidez constante V . ¿Cuál es la rapidez del bloque m ?

Alternativa correcta: A

Resolución: A continuación, dejaré un diagrama del caso que se está proponiendo. A partir de esto, podremos formar ecuaciones que describan el movimiento del cuerpo a partir del DCL y las leyes de Newton.

Figura 5
Diagrama ejercicio 19

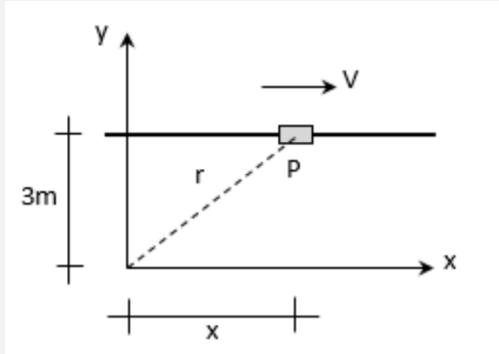


Para el caso de la polea grande p , tenemos que $\sum F_p = m_p a_p$. Como la masa de la polea es despreciable, $\sum F_p = 0$, por lo que llegamos a la relación $2T_2 = T_1$. La velocidad del cuerpo de masa m la podemos determinar tomando en cuenta que $v = \frac{\Delta y}{t}$. Si asumimos que en el punto P existe un bloque puntual, debido a la relación de las tensiones entre las cuerdas, si un bloque en el punto P recorre Δx_1 , entonces la masa m se desplazará $\frac{\Delta x_1}{2}$, pues el trozo de cuerda que sostiene al punto P se reparte a ambos lados de la polea que sostiene a la masa m . Entonces, como $V = \frac{\Delta x_1}{t}$ y esta es constante, $V_m = \frac{\Delta y}{t} = \frac{\Delta x_1}{2t} = 0,5V$.

Nota: Existen otras formas de hacer este ejercicio, como describiendo el largo L de la cuerda como suma de segmentos y luego derivar. ¡Muchas gracias a Pablo González por este tip!



Ejercicio 20



Una partícula P se mueve sobre la guía horizontal con rapidez constante V , como muestra la figura.
Cuando $x = 4m$, el valor de $\frac{dr}{dt}$ es igual a:

Alternativa correcta: C

Resolución: Por pitágoras, $x^2 + 3^2 = r^2$, por lo que $r = \sqrt{x^2(t) + 9}$. Derivando con respecto al tiempo, tenemos que $\frac{dr}{dt} = \frac{2x(t)\dot{x}(t)}{2\sqrt{x^2(t)+9}} = \frac{x(t)\dot{x}(t)}{\sqrt{x^2(t)+9}}$. Reemplazando,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{4V}{\sqrt{4^2 + 9}} = \frac{4V}{5}$$

Con lo que la alternativa correcta es la C.



Ejercicio 20

Una partícula de masa m que puede moverse sobre un plano está sometida a una única fuerza que en coordenadas polares puede escribirse como $\vec{F} = \frac{-k}{r^2} \hat{r}$, donde \hat{r} es el vector radial unitario, k es una constante y r es la distancia al origen. Considere que el origen del sistema también pertenece al plano de movimiento.

¿Qué se puede afirmar sobre el momento angular de la partícula respecto al origen?

Alternativa correcta: C

Información disponible en las páginas 115 y 121 (91 y 97 en pdf) del handbook.



Resolución: Del handbook tenemos que el momento angular corresponde a $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. El vector posición \vec{r} en coordenadas polares es $r\hat{r}$, mientras que la velocidad está dada por $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, según la página 115 del handbook. Si nos damos el engorroso trabajo de desarrollar el producto cruz, tenemos que:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \\ &= mr\hat{r} \times \dot{r}\hat{r} + mr\hat{r} \times r\dot{\theta}\hat{\theta} \\ &= mr^2\dot{\theta}\hat{z}\end{aligned}$$

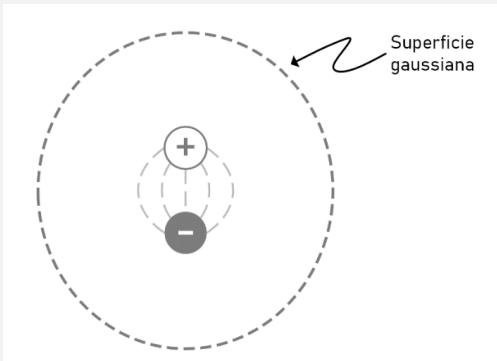
En donde la dirección de este vector se intuye por regla de la mano derecha.

Lo importante a notar acá, sin embargo, es que si la partícula se mueve únicamente en dirección radial se cumplirá que $\dot{\theta} = 0$, por lo que se conservará su momento angular. ¡Como la fuerza es única y en dirección radial, esta partícula conservará su momento angular, pues sólo se moverá en dirección radial producto de la fuerza!



Ejercicio 22

La figura presenta un dipolo en el vacío formado por dos cargas eléctricas de signo opuesto e igual magnitud. Se define una superficie gaussiana arbitraria que rodea al dipolo.



Respecto a la aplicación de la ley de Gauss para flujo eléctrico que produce el dipolo, ¿cuál de las siguientes alternativas es **CORRECTA**?

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 355 (214 en pdf) del handbook.

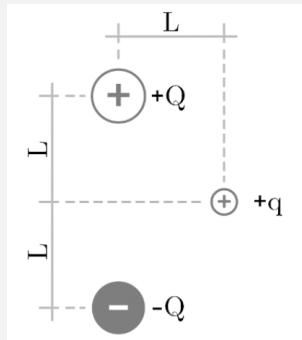


Resolución: Como la superficie Gaussiana encierra al dipolo, entonces $Q_{enc} = q + -q = 0$. Entonces, la integral de flujo eléctrico da como resultado 0, independiente de la forma de la superficie Gaussiana. Recuerda que un dipolo está formado de dos cargas de igual magnitud pero signo opuesto, por lo que la respuesta es la D.



Ejercicio 23

La figura representa un sistema de cargas eléctricas en el vacío. Dos cargas eléctricas fijas en el espacio poseen igual magnitud Q y signo opuesto (cargas grandes), las cuales están separadas a una distancia $2L$. Una tercera carga eléctrica de prueba positiva (carga pequeña) de magnitud q se posiciona equidistante a ambas cargas eléctricas fijas, a una distancia horizontal L con respecto al eje formado por las cargas grandes.



¿Cuál de las siguientes expresiones representa la magnitud de la fuerza que ejercen las cargas eléctricas fijas sobre la carga eléctrica de prueba? (K constante de Coulomb)

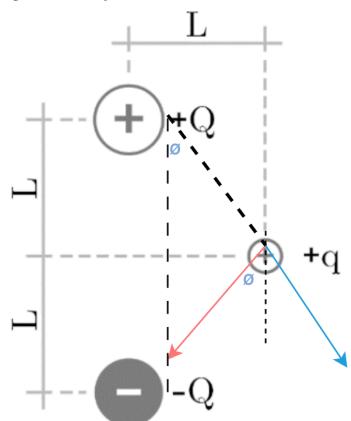
Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 355 (214 en pdf) del handbook.



Resolución: A continuación, incluyo un diagrama de las fuerzas que experimenta la carga q producto de las otras dos cargas.

Figura 6
Diagrama ejercicio 23





A partir de este diagrama, podemos observar que la fuerza neta tendrá exclusivamente una componente vertical cuya componente corresponderá a $2F\cos(\Phi)$, con F la magnitud de la fuerza de Coulomb. Por pitágoras, podemos notar que la distancia desde cualquier carga hacia la carga de prueba corresponde a $r = L\sqrt{2}$, por lo que el resultado es:

$$\begin{aligned} 2K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cos(\Phi) &= 2K \frac{Qq}{2L^2} \cdot \frac{L}{r} \\ &= K \frac{Qq}{L} \cdot \frac{1}{L\sqrt{2}} \\ &= K \frac{Qq}{L^2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Con lo que la alternativa correcta es la D.

Hacer estos ejercicios puede ser bastante confuso al comienzo (**no olvides que hay muchas maneras distintas**), pero creo que es importante tomar en cuenta la simetría que hay entre las fuerzas. En este caso, asumo aquello porque las cargas están a una misma distancia. Personalmente, me es más fácil dibujar las cargas como puntos sobre un eje y hacer el boceto marcando los ángulos.

Finalmente, recuerda que la constante de Coulomb K corresponde a $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Mensajito del Tom

Estoy un poco cansado mientras hago esto, pues estoy haciendo mi práctica 2 en paralelo.

¡Espero que valga la pena y te sea de ayuda! Si es así, **considera donarme un pan con huevo por Webpay**. El link está al inicio, pero puedes acceder también [haciendo click acá](#). ¡Gracias :3!

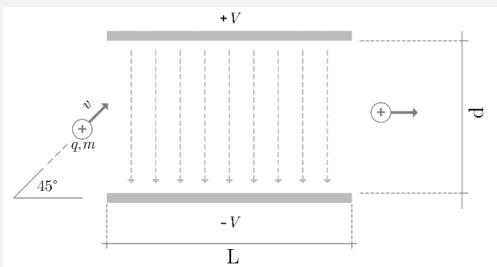


También puedes seguirme en Instagram @tomas.sk2003 y contactarme en caso de tener dudas.



Ejercicio 24

Una carga eléctrica q de masa m entra a una región contenida entre dos placas paralelas en un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Las placas paralelas corresponden a conductores conectados a un potencial de $+V$ la superior y $-V$ la inferior y separadas una distancia d , de tal modo que se produce un campo eléctrico en su interior. La distancia horizontal de las placas está dada por L .



Si la carga posee inicialmente una rapidez v y asumiendo que el campo eléctrico producido está contenido solamente entre las placas (aproximación de placas infinitas). ¿Qué largo L deben poseer las placas, para que al salir la carga eléctrica de la región entre ellas posea solo una componente horizontal de velocidad?

Alternativa correcta: C

Información disponible en la página 355 y 356 (214 y 215 en pdf) del handbook.



Resolución: Para que tenga únicamente una componente horizontal de velocidad, entonces la componente vertical debe ser nula. Además, sabemos que la fuerza eléctrica en la partícula está dada por $F = qE = ma$, por lo que la aceleración sobre la partícula es $\frac{qE}{m}$, la que está en dirección vertical hacia abajo. La componente vertical de la velocidad en función del tiempo corresponde a $v_y(t) = vsin(45^\circ) - at$. Cuando esta componente se anula al salir del campo eléctrico, se tiene $vsin(45^\circ) - at = 0$, por lo que $t = \frac{vsin(45^\circ)}{a}$. Luego, como la distancia recorrida en el eje vertical corresponde a $L = v_x t$, tenemos que:

$$L = v_x t = v \cos(45^\circ) \cdot \frac{vsin(45^\circ)}{a} = v^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{qE}{m}} = \frac{v^2 m}{2qE}$$

Finalmente, dado que $E = \frac{\Delta V}{d}$ y $\Delta V = +V - -V = 2V$, entonces $E = \frac{2V}{d}$, de manera que el resultado final es

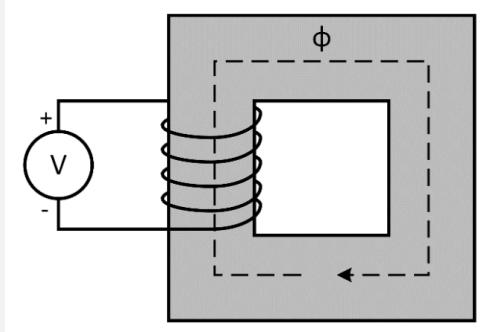
$$\frac{v^2 m}{2qE} = \frac{v^2 m}{2q \frac{2V}{d}} = \frac{v^2 dm}{4qV}$$

Por lo que la alternativa correcta es la C.



Ejercicio 25

La figura muestra un núcleo de hierro de sección transversal A al cual se le conecta un solenoide. Por este núcleo circula un flujo magnético de forma $\Phi = \Phi_0 \sin(t)$.



Si en el extremo del solenoide se mide el voltaje según la figura, ¿cómo será la forma del voltaje?

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 356 (215 en pdf) del handbook.

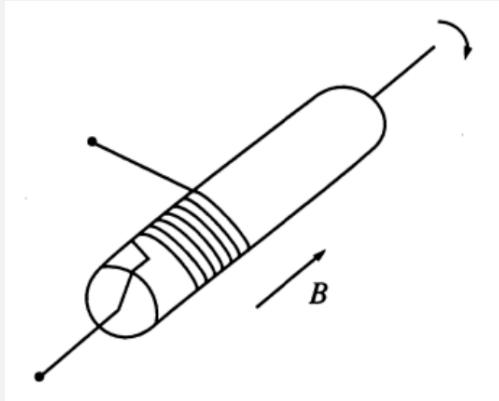


Resolución: Usando la Ley de Faraday, para un flujo Φ se tiene que $V = -N \frac{d\Phi}{dt}$, donde N es la cantidad de vueltas del solenoide. Por la figura, podemos intuir que $N = 5$. Entonces, $V = -5 \frac{d}{dt} \Phi_0 \sin(t) = -5\Phi_0 \cos(t)$. Aunque por la naturaleza de las alternativas podemos intuir que la correcta es la D a partir de esto, tenemos que considerar que el resultado es finalmente positivo debido a la forma en que se mide el voltaje.



Ejercicio 26

Un cable está siendo enrollado alrededor de un cilindro de madera y radio R , el cual se encuentra rotando en torno a su propio eje. Uno de los extremos del cable está conectado al eje del cilindro, como se muestra en la figura.



El cilindro se coloca en una región de campo magnético, de magnitud B , paralelo al eje de rotación del cilindro, el cual rota a una tasa de N revoluciones por segundo. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos extremos del alambre?

Alternativa correcta: B

Información (alguna) disponible en la página 356 y 366 (215 y 225 en pdf) del handbook. No encontré todas las fórmulas ahí :(



Resolución: Consideremos que nos dan la tasa de rotación en rps . La fórmula de la página 366 nos dice que la velocidad angular ω en $\frac{rad}{s}$ corresponde a $\frac{2\pi}{60}n$, donde n es la tasa de rotación en revoluciones por minuto. En este caso, el deducimos que el cilindro rota a una tasa de $60N$ revoluciones por minuto, por lo que $\omega = \frac{2\pi}{60} \cdot 60N = 2\pi N$.

Las cargas inducidas producen un campo eléctrico, en donde se tiene un equilibrio cuando $F = qE = qvB$, dada la fuerza de Lorentz. Recuerda que la fuerza de Lorentz corresponde a $q(E + v \times B)$. En este caso particular, la fuerza magnética y eléctrica van en distinta dirección por regla de la mano derecha.

Como conocemos la velocidad y la magnitud del campo magnético, podemos determinar que el campo eléctrico es $E = vB$, donde, como $\omega = \frac{v}{r}$, entonces $E = B\omega r$.



Así, podemos obtener la diferencia de potencial usando que $\Delta V = \int \vec{E} \cdot dl$, de modo que:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int \vec{E} \cdot dl \\ &= \int vB \, dl = \int \omega Br \, dr \\ &= \int_0^R 2\pi NBr \, dr \\ &= 2\pi NB \cdot \frac{R^2}{2} \\ &= \pi NBR^2\end{aligned}$$

Por lo que la alternativa correcta es la B.

La página 356 nos dice que la fuerza magnética (cuando el campo magnético es uniforme) está dada por

$$F = I\vec{L} \times \vec{B}$$

En donde tenemos que $I = \frac{dQ}{dt}$. De esta manera,

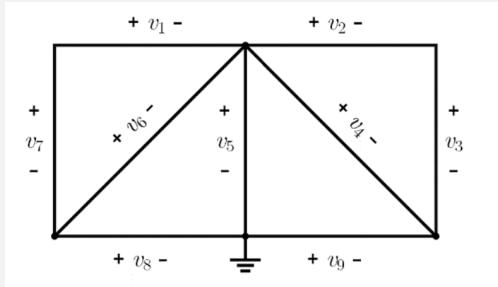
$$\begin{aligned}F &= I\vec{L} \times \vec{B} = \frac{dQ}{dt} \cdot \vec{L} \times \vec{B} \\ &= Q \frac{d\vec{L}}{dt} \times \vec{B} \\ &= Q\vec{v} \times \vec{B}\end{aligned}$$

Notar que esta es una forma un poco "sucia" de deducirlo, pero considero que podría ayudar en el caso de que, viendo el handbook, no recuerdes precisamente la fuerza de Lorentz.



Ejercicio 27

La siguiente figura muestra la topología de un circuito indicando las diferencias de potencial (voltaje) entre los diferentes nodos:



Respecto a la figura y la ley de voltajes de Kirchhoff,
¿Cuál de las siguientes ecuaciones es **CORRECTA**?

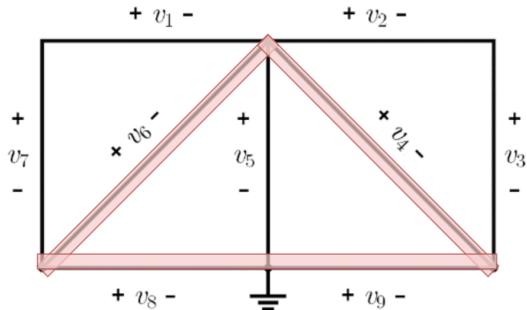
Alternativa correcta: C

Información disponible en la página 357 (216 en pdf) del handbook.



Resolución: Escogiendo la malla de la figura a continuación:

Figura 7
Diagrama ejercicio 27



Podemos aplicar las leyes de Kirchhoff $\sum V_{subida} = \sum V_{bajada}$ de manera que $v_9 + v_8 = v_6 + v_4$, por lo que $-v_4 + v_9 + v_8 - v_6 = 0$. De esta manera, concluimos que la alternativa correcta es la C.



Ejercicio 28

El átomo de plata presenta un radio atómico de $172pm$, exprese esta longitud en cm. ($1pm$ equivale a $10^{-10}cm$)

Alternativa correcta: C

Resolución: Basta con aplicar la conversión. En este caso $172pm = 172 \cdot 10^{-10} = 1.72 \cdot 10^2 \cdot 10^{-10} = 1.72 \cdot 10^{-8}cm$. Por ende, la alternativa correcta es la A.

Ejercicio 29

Considere un sistema cerrado que contiene agua y que se encuentra a una presión de $1atm$. En estas condiciones, se sabe que al calentar el agua hasta una temperatura de $100^\circ C$ ocurre el proceso de ebullición.

Al respecto, indique cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**:

- a) El calentamiento del agua líquida hace que aumente su presión de vapor.
- b) A $100^\circ C$, el agua líquida se encuentra en equilibrio con la fase gaseosa.
- c) Las moléculas de agua que se encuentran en la fase gaseosa presentan energía cinética mayor que las moléculas de agua en fase líquida.
- d) A nivel del mar, a $100^\circ C$ la presión de vapor del agua líquida es menor a 1 atm .

Alternativa correcta: D

Resolución: La forma más rápida de entender este ejercicio es pensando en el diagrama de fase del agua, el cual puedes encontrar haciendo click acá.

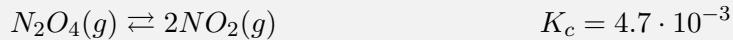
A partir de esto último, es claro que A y B son verdaderas. Con respecto a la C, basta con ver la tabla de las propiedades de los gases, líquidos y sólidos, en donde se tiene que el gas tiene un movimiento de moléculas muy libre, por lo que su energía cinética es mayor.

Por lo tanto, la falsa es la D.



Ejercicio 30

A $25^\circ C$ el tetróxido de dinitrógeno, N_2O_4 , se disocia un 24.0 % formando dióxido de nitrógeno, NO_2 , según la siguiente reacción química.



Determine la concentración de las especies en el equilibrio a esta temperatura.

Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 85 (61 en pdf) del handbook.



Resolución: Por el grado de disociación, tenemos que el 24 % de moléculas de N_2O_4 se disocian en NO_2 , por lo que 0.24 mol reaccionan convirtiéndose en 0.48 mol de NO_2 .

	$N_2O_4(g)$	$2NO_2(g)$
Iniciales	1 mol	-
Reaccionan	- 0.24 mol	+ 0.48 mol
Equilibrio	0.76 mol	0.48 mol

Como la molaridad $[M]$ es la concentración de moles por 1 litro, entonces podemos inferir que $[N_2O_4] = \frac{0.76}{0.48} [NO_2] = 1.583 [NO_2]$. Tenemos que $K_c = \frac{[NO_2]^2}{[N_2O_4]} = 4.7 \cdot 10^{-3}$. Luego, si tomamos $x = [NO_2]$ podemos resolver para $\frac{x^2}{1.583x} = 4.7 \cdot 10^{-3}$, de manera que $x = [NO_2] = 4.7 \cdot 1.583 \cdot 10^{-3}$, por lo que se cumple que $[NO_2] = 7.44 \cdot 10^{-3} \frac{mol}{L}$.

Finalmente, $[N_2O_4] = 7.44 \cdot 10^{-3} \cdot 1.583 \approx 11.8 \cdot 10^{-3} \approx 0.0118 \frac{mol}{L}$, por lo que la alternativa correcta es la B.



Ejercicio 31

Se desea preparar una disolución amortiguadora (buffer) que simule el pH sanguíneo de 7.4. Para ello se dispone de 0.1 mol de un ácido débil, HA , y su sal KA , los que se encuentran en un volumen de 200 mL.

Determine el valor más cercano de la concentración de la sal KA .

Dato: $K_{HA} = 2.5 \cdot 10^{-8}$

Alternativa correcta: A

Información disponible en la página 86 (62 en pdf) del handbook.



Resolución: Del handbook, sabemos que $HA(ac) \rightleftharpoons H^+(ac) + A^-(ac)$, donde HA es el ácido y A^- la base conjugada. Como el pH debe ser de 7.4, podemos despejar la concentración de H^+ , pues $pH = \log_{10} \left(\frac{1}{[H^+]} \right)$, de modo que:

$$10^{7.4} = \frac{1}{[H^+]}$$
$$[H^+] = \frac{1}{10^{7.4}} \approx 3.98 \cdot 10^{-8} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

Como tenemos 0.1 mol de HA en $0.2L$, entonces la concentración molar es $[HA] = 0.5 \frac{\text{mol}}{L}$.

Dado que $K_{HA} = 2.5 \cdot 10^{-8} = \frac{[A^-][H^+]}{[HA]}$, tenemos que $[A^-] = K_{HA} \frac{[HA]}{[H^+]}$. Reemplazando,

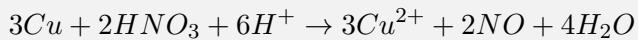
$$[A^-] = K_{HA} \frac{[HA]}{[H^+]}$$
$$[A^-] = 2.5 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{0.5}{3.98 \cdot 10^{-8}}$$
$$\approx 0.314 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

Lo que es más cercano a la alternativa A, correspondiente a $0.32 \frac{\text{mol}}{L}$.



Ejercicio 32

Considere la siguiente reacción química balanceada:



Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **VERDADERA**:

- HNO_3 es el agente reductor.
- Cu es el agente oxidante.
- La cantidad de electrones intercambiados es 6.
- El estado de oxidación de nitrógeno en HNO_3 es 7+.

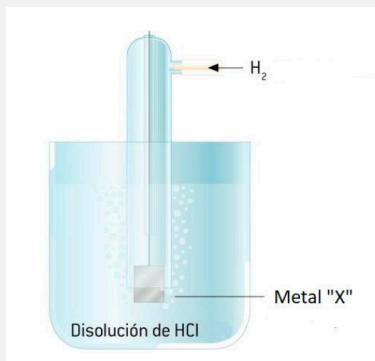
Alternativa correcta: C

Resolución: Podemos evidenciar que cada mol de Cu cede 2 electrones, quedando con una carga de 2+. Así, la cantidad de electrones intercambiado es de 6. Por esto, la respuesta correcta es la C.

El agente oxidante es aquel que gana electrones, mientras que el agente reductor los cede. Por ende, Cu es el agente reductor y con esto descartamos la A y la B.

Ejercicio 33

La siguiente imagen representa el electrodo de hidrógeno en condiciones estándar, que es utilizado como electrodo de referencia.



Al respecto, indique cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) **VERDADERA(S)**:

- El metal "X" corresponde a un electrodo de platino.
- La disolución de HCl tiene $pH = 0$.
- H_2 se encuentra a una presión de 1 atm.

Alternativa correcta: D

Resolución: Toda la información para responder esta pregunta la agregué al anexo y la puedes encontrar haciendo click acá. Con respecto a la B, como la disolución se encuentra a 1M, podemos intuir que su pH es 0, por la fórmula de pH que se encuentra en el Handbook. Así, todas las opciones son correctas.



Ejercicio 34

En Gran Bretaña la escala de temperatura utilizada es la escala Rankine. Determine en dicha escala, el valor de la temperatura correspondiente al punto de congelación y de ebullición del agua, respectivamente.

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 1 (7 en pdf) del handbook.



Resolución: En el handbook podemos encontrar la tabla de conversión de temperaturas. Como el punto de congelación es $0^{\circ}C$ y el punto de ebullición es de $100^{\circ}C$, entonces dado que ${}^{\circ}R = {}^{\circ}F + 459.69$ y ${}^{\circ}F = 1.8({}^{\circ}C) + 32$, tenemos que la temperatura de congelación es $32 + 459.69 = 491.69^{\circ}R$, mientras que la temperatura de ebullición es $(1.8 \cdot 100 + 32) + 459.69 = 671.69^{\circ}R$. De este modo, concluimos que la respuesta correcta es la D.

Ejercicio 35

Considere un puente hecho completamente de acero ($\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C}$), cuya longitud es de 1400 metros en el punto más frío. Si el puente se expone a temperaturas que oscilan entre $-10^{\circ}C$ y $40^{\circ}C$. Indique cuál es el valor más cercano al cambio de longitud entre las temperaturas indicadas:

Alternativa correcta: C

Información disponible en la página 131 (107 en pdf) del handbook.



Resolución: Usando la fórmula de expansión térmica del handbook, correspondiente a $\Delta L = \alpha L \Delta T$, reemplazamos:

$$\begin{aligned}\Delta L &= \alpha L \Delta T \\ &= \left(12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}C}\right) \cdot 1400m \cdot (40 - -10)^{\circ}C \\ &= 8.4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6} \\ &= 0.84m\end{aligned}$$

Por lo que la alternativa correcta es la C.



Ejercicio 36

Un gas ideal que inicialmente se encuentra a $200K$ experimenta una expansión isobárica a $2.5kPa$, aumentando su volumen de $2m^3$ a $4m^3$, $20kJ$ se transfieren al gas por calor.

Indique cuál será la temperatura final del gas.

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 144 y 147 (120 y 123 en pdf) del handbook.



Resolución: En un gas ideal se cumple $PV = nRT$. Como n y P son constantes en este caso, tenemos que $\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1}$. Nos piden $T_1 = \frac{V_1}{V_0}T_0$, lo que obtenemos reemplazando los valores. Así, la temperatura final es:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{V_1}{V_0}T_0 \\ &= \frac{4m^3}{2m^3}200K \\ &= 400K \end{aligned}$$

Por lo que la respuesta correcta es la D.



Ejercicio 37

Estime utilizando las tablas de vapor del Handbook, la entropía específica de una corriente que se encuentra a 0.6 MPa y 700°C .

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 158 (134 en pdf) del handbook.



Resolución: Tenemos que buscar la entropía específica s en la tabla de vapor sobrecalentado, la que encontramos en la página 158 (134 en pdf) del handbook. A 0.6 MPa y 700°C , la tabla nos dice que la entropía específica es de $8.5107 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$, por lo que seleccionamos la alternativa D.

Ejercicio 38

Responda la siguiente pregunta utilizando las tablas de vapor que se presentan en el Handbook. Si una corriente se encuentra como líquido saturado a 235°C . Indique cuál es el valor más cercano de la entalpía de la corriente:

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 157 (133 en pdf) del handbook.



Resolución: De la tabla de la página 157, buscamos el valor h_f para 235°C , en donde encontramos que la entalpía específica es de $1013.62 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Así, la respuesta es D.



Ejercicio 39

Responda la siguiente pregunta utilizando las tablas de vapor que se presentan en el Handbook.

Para una mezcla liquido-vapor que se encuentra a una temperatura $195^{\circ}C$ y su entalpía es $1500 \frac{kJ}{kg}$.

Indique cuál es el valor más cercano de la calidad (x) de la corriente:

Alternativa correcta: A

Información disponible en la página 144 (120 en pdf) del handbook.



Resolución: Del handbook, tenemos que la entalpía dada una calidad x es de $h = h_f + x \cdot h_{fg}$. De la tabla de la página 157 tenemos que a $195^{\circ}C$ se cumple que $h_f = 829.98 \frac{kJ}{kg}$ y $h_{fg} = 1960.0 \frac{kJ}{kg}$. Entonces, $1500 = 829.98 + x \cdot 1960.0$, de manera que:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1500 - 829.98}{1960.0} \\&= 0.34\end{aligned}$$

Con lo que la alternativa correcta es la A.



Ejercicio 40

Uno de los principios de la economía se relaciona con las disyuntivas a las cuales se ven enfrentados los agentes (productores, consumidores, etc.).

Una persona llamada “Bienestar” tiene planeado trabajar el próximo domingo arreglando computadoras en su taller. Por el trabajo de reparación, “Bienestar” recibe un ingreso de 110 dólares por cada computadora (este ingreso se recibe una vez que ha sido reparada la computadora) e incurre en un costo de 10 dólares por reparar cada computadora (este costo es incurrido una vez terminada la reparación). La productividad de “Bienestar” es constante e independiente del número de computadoras que repara en un mismo día. Al respecto, la productividad actual es “reparación de un computador por hora”. En dicha instancia, “Bienestar” tiene planificado arreglar 10 computadoras el próximo domingo en su taller.

Hoy sábado, “Bienestar” recibe una llamada telefónica de su amiga llamada “Amistad”, quien le invita para viajar a la playa. Para “Bienestar” ir a la playa le significa un beneficio de 1100 dólares. Todos los gastos del viaje (traslados, alojamiento y alimentación) serán financiados en su totalidad por “Amistad”.

La invitación coincide con el mismo domingo que tenía planificado arreglar las computadoras en su taller. En el caso que decida viajar a la playa, “Bienestar” deberá devolver las computadoras a sus dueños, y no podrá reprogramar dicha reparación para una nueva oportunidad. Considere que no existen multas ni otros costos asociados por la devolución de las computadoras a sus dueños. Tampoco sufrirá daño su imagen con otros clientes por el hecho de no haber realizado el trabajo, en el caso que viaje a la playa.

¿Cuál es la mejor decisión entre las opciones que tiene “Bienestar”, reparar computadoras o viajar a la playa, considerando un análisis beneficio versus costo económico?

A continuación, se pide seleccionar la alternativa **CORRECTA** en base a la información proporcionada.

Alternativa correcta: B

Resolución: Por cada computador que arregla, el beneficio total está dado por $110 - 10 = 100$ dólares. Entonces, al reparar 10 computadores, el beneficio será de 1000 dólares. Como el viaje a la playa que le es ofrecido tiene un beneficio de 1100 dólares, entonces la mejor decisión que puede tomar es la de ir a la playa, por lo que la alternativa es la B.



Ejercicio 41

Un modelo de oferta y demanda tiene el objetivo de representar la interacción entre consumidores y productores, de tal forma de estimar el equilibrio de mercado, representado a través de precio y cantidad.

Suponga un mercado perfectamente competitivo, donde la curva de oferta está representada por la relación $Q = 3P + 100$ y la curva de demanda or la expresión $P = 500 - Q$. Considerando esta información, el equilibrio de mercado es el siguiente:

Alternativa correcta: B

Resolución: Basta con igualar las ecuaciones. Sabemos que $P = 500 - Q$. Reemplazando en $Q = 3P + 100$, tenemos que $Q = 3(500 - Q) + 100$, lo que es:

$$\begin{aligned}Q &= 3(500 - Q) + 100 \\Q &= 1500 - 3Q + 100 \\4Q &= 1600 \\Q &= 400\end{aligned}$$

Luego, como $P = 500 - Q$ y determinamos que $Q = 400$, entonces $P = 100$. Así, el equilibrio (Q, P) es de $(400, 100)$, de manera que la alternativa correcta es la B.



Ejercicio 42

Un monopolio se caracteriza porque existe una única empresa en el mercado ofreciendo un producto. El hecho de ser el único oferente en el mercado le permite al monopolio tener poder de mercado, lo que implica tener la capacidad para fijar el precio en el nivel en que maximice su beneficio económico. Si el monopolio ejerce su poder de mercado (caso sin regulación), el precio será mayor que en el caso de competencia perfecta, implicando una menor oferta de productos disponibles para los consumidores. En dicho caso, el Estado podría regular al monopolio, por ejemplo, estableciendo un precio máximo a cobrar por las unidades producidas, de tal forma que el monopolio esté incentivado a producir mayor cantidad de dichas unidades respecto de la situación sin regulación. Por lo general, el Estado tiene dos opciones para fijar el precio máximo, podría ser a nivel de costo marginal o bien a nivel de costo medio total. Para que un monopolio tenga incentivos para producir, independiente de si existe o no regulación de parte del Estado, es necesario que el beneficio económico sea mayor o igual a cero. Si el precio que fija el Estado implica que el monopolista tenga beneficios económicos menores que cero (pérdida económica), en dicho caso el Estado podría entregar un subsidio al monopolio, equivalente a la pérdida económica, de tal forma que el monopolio tenga incentivos para ofertar en el mercado.

Suponga un mercado donde existe una única empresa (monopolio) que atiende una demanda de muchos consumidores. La demanda está representada por la función $Q = 1000$. Su función de costos totales está representada por la expresión $C_T(Q) = 1000 + 2Q$. El Estado se ha propuesto regular el precio del monopolio, estableciendo como condiciones: (1) fijar un precio máximo (P_{max}) en un nivel igual al Costo Marginal y (2) en el caso que el P_{max} no permita a la empresa obtener como resultado un beneficio económico de valor cero, en dicho caso el Estado dará un subsidio a la empresa por un monto equivalente a la pérdida económica.

Tomando en consideración las condiciones que el Estado busca aplicar para fijar el P_{max} , considerando la demanda dada, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **CORRECTA**?

Alternativa correcta: B

Resolución: Las condiciones se tienen que cumplir ambas a la vez. De acuerdo a lo que puse en mis apuntes (puedes acceder haciendo click acá.), tenemos que el costo marginal está dado por $\frac{dC}{dQ}$. Como $C = 1000 + 2Q$, entonces el costo marginal es de 2 pesos por cada unidad. Así, por la primera condición, el precio máximo P_{max} se fija en \$2. Luego, necesitamos saber cuál es la pérdida económica para que se pueda subsidiar a la empresa. Como la cantidad Q está fija en 1000, el costo total será de $C_T = 3000$, de los cuales \$2000 se obtendrán por el precio fijado a cada unidad, el cual es de \$2. Por lo tanto, la pérdida económica sería de \$1000, los que tendrán que ser subsidiados por el Estado. Así, concluimos que la alternativa correcta es la B.



Ejercicio 43

A través de un modelo de oferta y demanda es posible estimar el equilibrio de mercado, el cual se representa a través del precio y la cantidad transada. El excedente del productor es parte de la medida del bienestar social con la cual se evalúa cuán eficiente es el equilibrio de mercado.

Considere un mercado perfectamente competitivo (no existen fallas de mercado), donde el bienestar social es \$100, y el excedente del productor (EP) es 90. Respecto del excedente de consumidor (EC), podemos **AFIRMAR** lo siguiente:

Alternativa correcta: D

Resolución: Puedes encontrar un repaso de esta materia para este ejercicio, revisa mis apuntes haciendo click acá.

Como el bienestar social está dado por la suma de ambos excedentes, entonces $B = EC + EP = 100$, de manera que $EC = \$10$. Así, ninguna de las alternativas A, B, y C contiene la información correcta, por lo que seleccionamos la D.



Ejercicio 44

Para tomar la decisión acerca de si llevar a cabo un proyecto (por ejemplo: construir una fábrica de calcetines) se requiere saber si es rentable. Para determinar la rentabilidad de un proyecto se aplica el método flujos de caja descontados. Este método consiste en determinar los flujos de caja asociados al proyecto, entre los cuales cabe mencionar inversión, beneficios, costos, impuestos, entre otros. Dado que los flujos de caja asociados a un proyecto se producen en diferentes períodos de tiempo (por ejemplo: 10 años), para poder sumarlos, previamente cada flujo se debe actualizar, llevándolos todos al momento en que se inicia el proyecto. Para actualizar cada flujo de caja, se le aplica un factor de descuento, el cual se determina de la siguiente forma:

$$\text{Factor de descuento en el periodo } t = \frac{1}{(1+r)^t} \quad \text{con } r = \text{tasa de descuento}$$

En general, al flujo de caja actualizado se le conoce como flujo de caja descontado (FCD). Si la suma de los flujos de caja descontados (suma a la cual se le denomina Valor Actual Neto), es mayor que cero, se considera que el proyecto es rentable.

Considere un proyecto, cuyos flujos de caja están representados en la tabla adjunta. Dichos flujos de caja han sido actualizados (Ver fila 9) aplicando un factor de descuento cuya tasa de descuento es del 10 %. La tasa de descuento se considera igual para todos los períodos. Tomando en consideración esta información, se pide seleccionar la alternativa **CORRECTA**:

Elementos del Flujo de Caja Descontado	Período de Tiempo (t)			
	0	1	2	3
(A) Inversión	-1.200			
(B) Capital de Trabajo	-100			100
(1) Ingresos por Venta		2.000	2.000	2.000
(2) Costos		-500	-500	-500
(3) Margen Bruto: (1)+(2)		1.500	1.500	1.500
(4) Gastos Generales		-50	-50	-50
(5) Utilidad Antes de Impuesto y Depreciación (EBITDA): (3)+(4)		1.450	1.450	1.450
(6) Depreciación: [(A)]/Nº Períodos		-400	-400	-400
(7) Utilidad: (7.1)+(7.2)		767	767	767
(7.1) Utilidad Antes de Impuesto (EBIT): (5)+(6)		1.050	1.050	1.050
(7.2) Impuesto: (7.1)*Tax		-284	-284	-284
(8) Flujo de Caja (FC): (A)+(B)+(7)-(6)	-1.300	1.167	1.167	1.267
(9) Flujo de Caja Descontado (FCD): (8)/(1+r) ^t	-1.300	1.060	964	952

Alternativa correcta: B

Resolución: Si los gastos generales aumentan de \$50 a \$100, entonces el valor de (5) cambiará. En particular, para el primer período ($t = 1$) bajaría a \$1400. De esta manera, (7.1) cambia a \$1000 por lo que la utilidad (7) se reduce a $1000 - 284 = \$716$. Entonces, el flujo de caja corresponde a $0 + 0 + 716 - 400 = 1116$. Esto implica que el flujo de caja disminuye, por lo que el flujo de caja descontado necesariamente disminuirá. Así, la alternativa correcta es la B.



Ejercicio 45

Un proyecto presenta los siguientes flujos netos (también conocidos como flujos de caja), los cuales al aplicar la fórmula del VAN (Valor Actual Neto) quedan representados de la siguiente forma:

$$VAN = -800 + \frac{400}{(1+r)} + \frac{1200}{(1+r)^2}$$

Considerando la situación del proyecto, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **CORRECTA**?
(Ayuda: El valor de la TIR (Tasa Interna de Retorno) se obtiene de un VAN igual a cero).

Alternativa correcta: p

Resolución: Tenemos que igualar $VAN = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= -800 + \frac{400}{(1+r)} + \frac{1200}{(1+r)^2} \\ 800 &= \frac{400}{(1+r)} + \frac{1200}{(1+r)^2} \\ 2 &= \frac{1}{(1+r)} + \frac{3}{(1+r)^2} \\ 2 &= \frac{(1+r)+3}{(1+r)^2} \end{aligned}$$

Despejamos r . Como el valor de la TIR debe ser porcentual, tenemos que llegar a un valor de r que esté contenido entre 0 y 1.

$$\begin{aligned} 2(1+r)^2 &= r+4 \\ 2(1+2r+r^2) &= r+4 \\ 2+4r+2r^2 &= r+4 \\ 3r+2r^2-2 &= 0 \\ (2r-1)(r+2) &= 0 \end{aligned}$$

En donde notamos que $r = \frac{1}{2}$, por lo que $TIR = 50\%$. De esta manera, seleccionamos la alternativa A.



Ejercicio 46

A continuación, se muestra un pseudocódigo de un programa que utiliza distintos tipos de datos. Asuma que $a \% b$ entrega el resto de la división entera entre dos enteros a y b . Por ejemplo, $5 \% 2$ entrega el valor 1.

```
a = 3
b = 15.0
c = VERDADERO
d = a - b
e = d > 0
f = b%2 == 1
g = e AND f
```

Al terminar de ejecutarse el programa anterior, ¿qué valores quedan almacenados en las variables e , f y g ?

Alternativa correcta: C

Resolución: El valor de $d = a - b$ corresponderá a $3 - 15.0 = 12.0$, de manera que $d > 0$ evaluará a *FALSO*. Respecto a la f , $15 \% 2 = 1$, por lo que f será *VERDADERO*. Con esto seleccionamos la respuesta C. De todas maneras, g evaluará a *FALSO* pues no se cumple que ambas sean verdaderas.



Ejercicio 47

Se tiene el siguiente pseudocódigo para generar una matriz de booleanos. Para esto, se cuenta con una lista de listas (o arreglo de arreglos) llamado matriz y un arreglo de números llamado *arr*. Asuma que *arr*[*i*] accede al elemento que se encuentra en la posición *i*-ésima (con *i* ≥ 0) de la lista o arreglo *arr*. Además, el método *arr.agregar*(*e*) agrega el elemento *e* al final de la lista o arreglo *arr* y que se puede crear una nueva lista o arreglo con dos elementos *a* y *b* con la sentencia {*a*, *b*}. Por último, la función *arr.largo()* entrega la cantidad de elementos que tiene la lista o arreglo

```
i = 1
WHILE (i < arr.largo()):
    fila = {arr[i], arr[i - 1]}
    matriz.agregar(fila)
    i += 2
FIN WHILE
```

Asuma que las variables *arr* y *matriz* están inicializadas.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **VERDADERA**?

Alternativa correcta: D

Resolución: El primer elemento de la lista se accede con *arr*[0]. Para que el while inicie, el largo debe ser mayor o igual a 2. Si este es impar, entonces el while no alcanzará a cubrir todos los elementos (sólo lo hará si *arr* tiene una cantidad par). De esta manera, escogemos la alternativa D. A continuación, mostraré dos pequeños ejemplos para entender esta situación.

Caso 1: arreglo de largo impar

Supongamos que *arr* = [3, 5, 6]. Entonces, *arr.largo()* = 3. Como *i* = 1, se cumple la condición del while, por lo que se inicializa. Así, inicialmente *fila* = {*arr*[1], *arr*[0]} = {5, 3}, la que se agrega a la matriz. En este punto, la matriz contiene dos columnas y una fila, y luego se aumenta la variable *i* en 2, quedando *i* = 3. Desde este punto la condición del while no se cumple, por lo que no se procede.

Caso 2: arreglo de largo par

Supongamos que *arr* = [3, 5, 6, 7]. Entonces, *arr.largo()* = 4. Dado *i* = 1, se cumple la condición del while, con lo que se inicializa. Así, inicialmente *fila* = {*arr*[1], *arr*[0]} = {5, 3}, la que se agrega a la matriz. En este punto, la matriz contiene dos columnas y una fila, y luego se aumenta la variable *i* en 2, quedando *i* = 3. En este momento, se cumple la condición *i* = 3 < *largo* = 4, por lo que se vuelve a entrar al while. Luego, *fila* = {*arr*[3], *arr*[2]} = {7, 6}, quedando así una matriz de 2x2 una vez que esta fila se le es agregada. La variable *i* queda en *i* = 5, por lo que el while no continuará.



Ejercicio 48

Se quiere desarrollar un programa que identifique el sufijo más largo común en tres strings s_1 , s_2 y s_3 y lo almacene en la variable var . Por ejemplo, entre *contar*, *recortar* y *cantar*, el sufijo más largo es *tar* pues los tres strings terminan con esos tres caracteres. Para lograr lo anterior se ha escrito el siguiente código. Recuerda que $\text{len}(s)$ entrega la cantidad de caracteres del string s y que $s[i]$ accede al carácter de s que se encuentra en el índice i . Asume que las variables s_1 , s_2 y s_3 son tres variables que están inicializadas correctamente.

```
var = ''  
i = len(s_1) - 1  
continuar = True  
while i >= 0 and continuar:  
    if s_1[i] == s_2[i] == s_3[i]:  
        var = s_1[i] + var  
    else:  
        continuar = False
```

¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre este programa es **VERDADERA**?

Alternativa correcta: C

Resolución: Supongamos que tenemos los strings s_1 , de largo 4, s_2 , de largo 3, y s_3 , de largo 2. Inicialmente, el programa toma $i = 4 - 1 = 3$. Asumiendo que s_3 está contenido en s_2 y que s_2 está contenido en s_1 , entonces eventualmente tendremos un *IndexOutOfRangeException*, puesto que para $i = 2$ no existe $s_3[2]$. Así, podemos intuir que la respuesta es la C.

La B la podemos descartar, pues lo de aquella alternativa se cumpliría si es que fuese $var+ = s_1[i]$ o $var = var + s_1[i]$. Finalmente, var quedará con el valor de s_1 sólo si $s_1 = s_2 = s_3$.



Ejercicio 49

A continuación, se muestra un pseudocódigo de un programa que implementa el ordenamiento por selección o *selectionsort*. Asuma que *l.largo()* entrega la cantidad de elementos de la lista *l*, *l[i]* ($i \geq 0$) entrega el elemento en la posición *i* de la lista *l*, que *encontrar_maximo(l)* entrega la posición del máximo elemento de una lista *l* y la función *intercambiar(i, j, lista)* pone el elemento de *lista[i]* en la posición *j* y pone en la posición *i* el valor que estaba originalmente en *lista[j]*. Por último, *lista[i :]* entrega la sublista que contiene los elementos desde la posición *i* (inclusive) en adelante.

```
DEF ordenamiento_seleccion(lista)
    i = 0
    WHILE i < lista.largo()
        max = encontrar_maximo(lista[i:])
        intercambiar(XX,XXX,XXXX)
        i += 1
    FIN WHILE
FIN DEF
```

Se ha perdido parte del código de la línea 6 de los parámetros que se entregan a la función *intercambiar*, ¿cuál de las siguientes alternativas muestra correctamente la llamada a la función *intercambiar* para que el código ordene la lista correctamente?

Alternativa correcta: A

Resolución: Como hay un ordenamiento, se debe intercambiar el valor más alto por el más pequeño, de manera que el número más grande esté último en la lista. Como *entregar_maximo()* entrega la **posición** del elemento máximo de la lista, entonces descartamos *B* y *D* inmediatamente. En la línea 5, se busca el máximo en *lista[i :]*, vale decir, en la parte de la lista que parte desde el *i-simo* elemento. Así, concluimos que la alternativa correcta es la A.

Por último, podemos descartar la C pues esta no toma en cuenta que el máximo se obtiene a partir de *lista[i :]*. Podemos complementar esto último suponiendo que tenemos una lista de la forma [0, 1, 3, -1, 2], en donde *lista[2 :]* = [3, -1, 2] y su *encontrar_maximo()* retorna 0, pues es la ubicación del mayor elemento.



Ejercicio 50

Considere la Hoja de Cálculo que se muestra a continuación. Las fórmulas se muestran explícitas en las celdas que comienzan con un signo igual ‘ = ’. El resto de las celdas pueden contener un valor o estar vacías.

La función *PROMEDIO()* devuelve el promedio (media aritmética) de los argumentos.

	A	B	C	D
1	2	2	0	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	=PROMEDIO(\$A1:B\$2)			
5				

La celda *A4* se copia en *C5*. ¿Qué fórmula se copia en la celda *C5*?

Alternativa correcta: D

Resolución: Toda la información para responder esta pregunta la agregué al anexo y la puedes encontrar haciendo click acá.

Por *\$A1*, entonces la columna está bloqueada y sólo cambia la fila, por lo que en *C5* debería ser *\$A2* (esto porque en la celda *A4* se tenía *\$A1* en el selector). Por otra parte, *B\$2* implica que la fila 2 está fija, por lo que en *C5* debería ser *D\$2*. Finalmente, se puede concluir que la fórmula que se copia en *C5* corresponde a $=PROMEDIO(\$A2 : D\$2)$. Con esto, la respuesta correcta es la D.



Ejercicio 51

Considere la Hoja de Cálculo que se muestra a continuación. Las fórmulas se muestran explícitas en las celdas que comienzan con un signo igual ‘ = ’. El resto de las celdas pueden contener un valor o estar vacías. La función *MAX()* entrega el valor más grande en el conjunto de valores dado.

	A	B	C	D	E
1	1	2	1		=MAX(A\$1:C\$2)
2	1	0	2		
3	1	1	1		
4	3	2	1		
5					

La celda *E1* se copia en *E2*. ¿Qué valor queda almacenado en la celda *E2*?

Alternativa correcta: A

Resolución: Por lo mismo del ejercicio anterior, se puede concluir que la fórmula que se copia en *E2* es $= MAX(A\$1 : C\$2)$. Como esta fórmula obtiene el máximo contenido entre las celdas *A1* y *C2*, el cual es 2 (ubicado en *B1*), entonces el valor que se almacenará en *E2* es de 2. Por lo tanto, la alternativa correcta es la A.

Si no entiendes por qué no cambia la fórmula en *E1* y *E2*, revisa el ejemplo que agregué al anexo. ¡Te será muy útil! :D



Mensaje del Tom

Después de varios días, ¡he terminado la primera guía! He avanzado lento, pues como ya comenté anteriormente estoy haciendo mi práctica 2.

Trabajare para hacer una o dos guías más, por lo que espero que este documento sea útil para quienes tengan que rendir el fundamentals en un futuro.

Recuerda que puedes [donarme un pan con huevo haciendo click acá](#). ¡Gracias :3!

Figura 8
Yo aprendiendo LaTeX



5. Guía de Ejercicios 2019-2

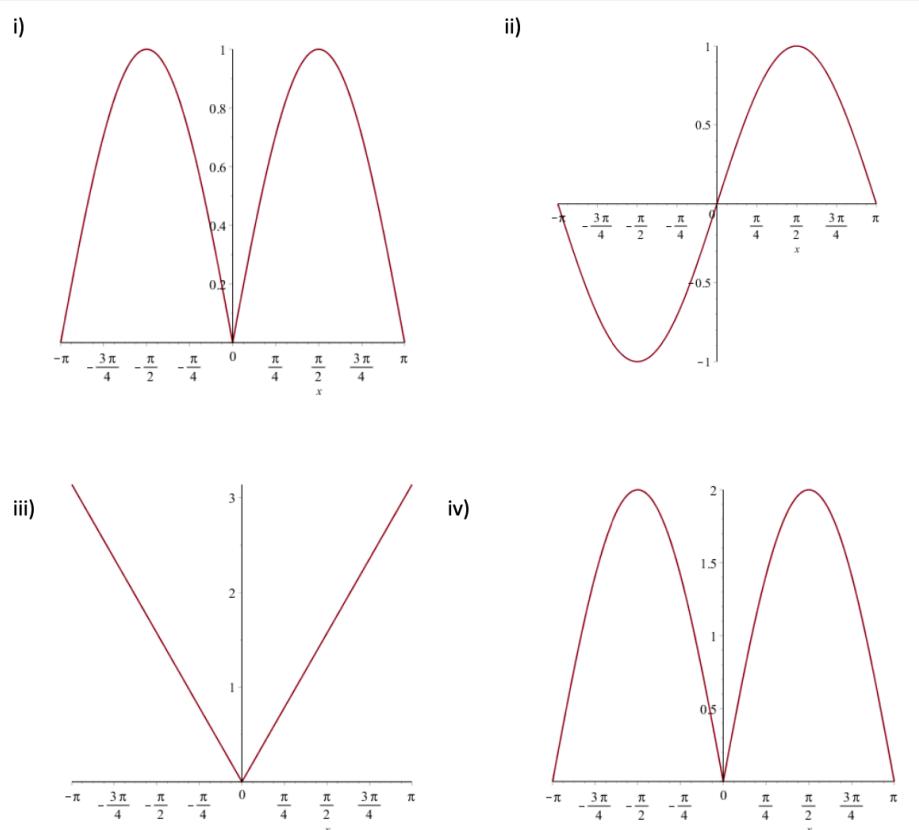
A continuación, encontrarás mi resolución a la guía 2019-2, a partir de la página siguiente.

OJO: Al igual que con la guía anterior, hago sólo los ejercicios que considero que son válidos para mi generación (2022). Preliminarmente, me parece que estos abarcan ejercicios 1 al 32.





Ejercicio 1



¿Cuál es el gráfico que mejor representa la función $f(x) = \sin(|x|)$?

Alternativa correcta: A

Resolución: En este ejercicio conviene más descartar. Presta especial atención a los valores de los ejes: por ejemplo, la figura I tiene la misma forma que la figura IV, pero tienen distintos valores en el eje y. Además, podemos descartar la III pues no tiene la forma del seno, sino que más bien se parece al gráfico de $f(x) = |x|$. Como el seno tiene valores entre -1 y 1 , entonces descartamos la IV. Finalmente, la alternativa correcta es la A, correspondiente a I, puesto que el gráfico debería ser simétrico considerando que el valor x está en valor absoluto.



Ejercicio 2

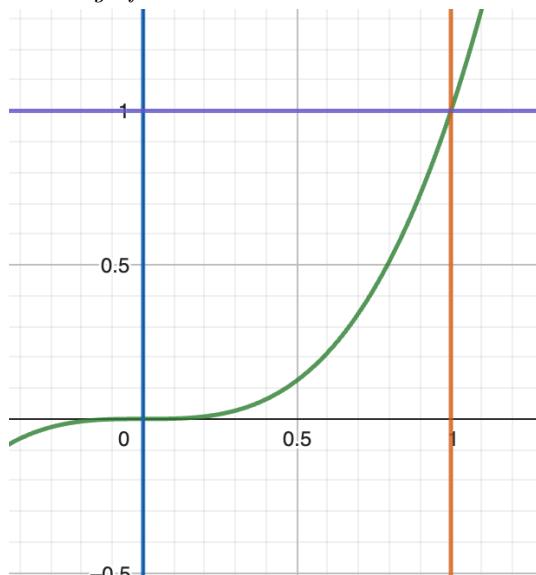
Considere la función $f(x) = x^3$

El área de la región encerrada por la curva $y = f(x)$ y los ejes $x = 0$, $x = 1$ e $y = 1$ es:

Alternativa correcta: D

Resolución: A continuación, incluyo una figura de lo que sería esto gráficamente:

Figura 9
Forma gráfica de verlo



Fíjate que si integramos $f(x)$ entre $x = 0$ y $x = 1$ obtendremos el área bajo la curva verde (correspondiente a $f(x)$). Sin embargo, como nos piden el área encerrada entre las curvas verde, azul y morado, una forma de hacerlo es simplemente restando el área que forma el cuadrado $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ con el área bajo la curva. Es decir,

$$1 - \int_0^1 x^3 dx = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

De manera que la alternativa correcta es la D.

CORREGIDO: La respuesta correcta es la D. Se corrigió esta pregunta en la v2.1.





Ejercicio 3

Sea $f(x) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. La derivada direccional en el punto $(1,1)$, en la dirección unitaria $\theta = \frac{\pi}{4}$ (coordenadas polares) es:

Alternativa correcta: D

Resolución: Este ejercicio parecido al 5 de 2023 – 2. Corresponde aplicar fórmula, la que encuentras en el apunte de MAT1630 haciendo click aquí.

Dado $D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$, tenemos que el vector $(1,1)$ normalizado corresponde a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, por lo que $D_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (f_x(x,y) + f_y(x,y))$.

Ahora, nos corresponde derivar la función respecto a x y respecto a y . Así, $f_x(x,y) = \frac{2x\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$.

Análogamente, $f_y(x,y) = \frac{2y\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$.

Expresando en coordenadas polares, tal que $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, podemos concluir que $f_x = \frac{2r^2\cos(\theta) - r^2 \frac{r\cos(\theta)}{r}}{r} = \cos(\theta)$, mientras que $f_y = \sin(\theta)$. Así, $D_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta))$, lo que en $\theta = \frac{\pi}{4}$ corresponde a $D_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{2} = 1$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la D.

Considero que debe de haber otras formas más sencillas, como quizás empezar expresando la función en coordenadas polares. Recuerda que **todos los ejercicios que pongo acá contienen mi desarrollo personal** y que este puede estar errado o puede no ser el más conveniente o rápido.



Ejercicio 4

La temperatura de un objeto T varía en el tiempo de acuerdo a la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T)$$

Donde A es la temperatura del medio y k es una constante de conductividad de calor del medio hacia el objeto.

Si la temperatura inicial del objeto es el doble que la temperatura del medio, ¿cuánto tiempo le tomará al objeto alcanzar una temperatura exactamente el 50% más alta que la del medio?

Alternativa correcta: D

Resolución: Esta es una ecuación diferencial separable. Podemos desarrollar la expresión tomando que $\frac{dT}{A-T} = kdT$, por lo que $-\ln(A-T) = kT + C$, teniendo así que $\ln(A-T) = -kt + C$.

Entonces, $A - T = e^{-kt}c$. Despejando T , llegamos a $T = A - e^{-kt}c$. Como $T(0) = 2A$, se cumple que $T(0) = A - c$, por lo que $c = -A$. Luego, $T(t) = A(1 + e^{-kt})$.

Nos piden t tal que $T(t) = 1.5A$.

$$\begin{aligned} 1.5A &= A(1 + e^{-kt}) \\ 1.5 &= 1 + e^{-kt} \\ 0.5 &= e^{-kt} \\ \ln(0.5) &= -kt \\ -\ln(0.5) &= kt \\ \frac{\ln(2)}{k} &= t \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que la alternativa correcta es la D.



Ejercicio 5

Sean A y B dos matrices cuadradas de $n \times n$, ambas simétricas. ¿Cuál de las siguientes alternativas es **FALSA**?

- $A + B$ es siempre simétrica
- AA^T es siempre simétrica
- $A - B^T$ es siempre simétrica
- $AB(BA)^T$

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 57 (33 en pdf) del handbook.



Resolución: Revisa algunos apuntes que tengo haciendo click aquí. En particular, conviene repasar las propiedades de la transpuesta de matrices y la definición de matriz simétrica.

Descarte de la alternativa A: Tenemos que $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, puesto que $A = A^T$ y $B = B^T$ debido a que ambas son simétricas. Así, esta alternativa es **VERDADERA** y de esa manera la descartamos.

Descarte de la alternativa B: $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, por lo que es simétrica.

Descarte de la alternativa C: $(A - B^T)^T = A^T - (B^T)^T = A - B^T$, por lo que es simétrica pues A y B son simétricas.

Confirmación de la alternativa D: $(AB(BA)^T)^T = ((BA)^T)^T(AB)^T = BA(AB)^T$, lo que difiere de $AB(BA)^T$. Así, esta matriz no es siempre simétrica, por lo que esta afirmación es falsa y así seleccionamos la alternativa D.



Ejercicio 6

Un pequeño ascensor en una construcción tiene capacidad máxima de 150 kilogramos, pero tiene espacio para que quepan 2 adultos. Considere que el peso de un obrero adulto tiene distribución normal con media 70 kilogramos y desviación estándar 10 kilogramos. El peso de un obrero es independiente a los demás.

¿Cuál de las siguientes alternativas es el valor más cercano a la probabilidad de que el ascensor exceda su capacidad máxima al ser utilizado por dos obreros adultos simultáneamente?

Alternativa correcta: A

Información disponible en la página 54 (61 en pdf) del **apunte de Michael Ramón.**



Resolución: Sea $Z = X + Y$ el peso de dos adultos juntos, tales que cada uno de sus pesos corresponden a $X \sim Normal(70, 10)$ e $Y \sim Normal(70, 10)$ respectivamente. Tenemos que $Z = X + Y \sim Normal(140, \sqrt{10^2 + 10^2}) \sim Normal(140, 10\sqrt{2})$. Nos piden $P(Z \geq 150) = 1 - P(Z \leq 150) = 1 - \Phi(\frac{150-140}{10\sqrt{2}}) = 1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 1 - \Phi(0.70) = 1 - 0.7580 \approx 0.2420$, según la tabla de la página 76 del handbook. Esta probabilidad del 24.20 % se acerca más a 24 %, la que se encuentra en la alternativa A.

Ejercicio 7

Según un estudio, se estima que durante una tormenta eléctrica, una antena pararrayos recibe en promedio 2 rayos por hora. Suponga que se modela la cantidad de rayos que impactan esta antena como una variable aleatoria con distribución *Poisson*, con tasa *2 rayos/hora*.

¿Cuál de las siguientes alternativas es el valor más cercano a la probabilidad de que la antena pararrayos no reciba más de dos rayos durante una tormenta eléctrica que se extiende por exactamente tres horas?

Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 20 (27 en pdf) del **apunte de Michael Ramón.**



Resolución: La cantidad de rayos que impactan a la antena en un periodo de 3 horas se modela por $X \sim Poisson(\lambda = 6)$. Nos piden $P(X \leq 2)$. Acá puedes calcularlo manualmente usando los datos de la página 84 (60 en pdf del **handbook**), tal que $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$, correspondiente a $\frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!} + \frac{e^{-6}6^2}{2!} = e^{-6}(1 + 6 + 18) \approx 0.062$, lo que es cerca de 6.2 %, siendo así la alternativa B.



Ejercicio 8

Para un estudio acerca del área que alcanza una flor de girasol, se plantaron 20 girasoles en iguales condiciones, y se midió el área plana de su flor (incluyendo sus pétalos) luego de tres meses. El área promedio de las flores de esta muestra fue de 314.5cm^2 , con una desviación estándar muestral de 111.1cm^2 . Asuma que el área de la flor es una variable aleatoria con distribución normal. Si se desea cuantificar la estimación por medio de un intervalo, ¿cuál de las siguientes alternativas se aproxima a un intervalo de 90 % confianza para el área promedio?

Alternativa correcta: C

Información disponible en la página 74 (50 en pdf) del handbook.



Resolución: Esto es lo mismo que los ejercicios 11 y 14 de 2023 – 2, por lo que no explicaré demasiado. Tenemos X : área de una flor, con $X \sim Normal(\mu, \sigma)$, en donde nos dan $n = 20$, $\bar{X} = 314.5$, $s = 111.1$. El intervalo de confianza del promedio (μ) está dado por:

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Como nos piden al 90 % de confianza, entonces $\alpha = 0.1$, por lo que necesitamos $t_{0.05}(19)$. De la página 77 del handbook, $t_{0.05}(19) \approx 1.729$, por lo que, reemplazando:

$$314.5 - 1.729 \frac{111.1}{\sqrt{20}} \leq \mu \leq 314.5 + 1.729 \frac{111.1}{\sqrt{20}}$$

Llegando a

$$271.54 \leq \mu \leq 357.45$$

Lo que se asemeja más a la alternativa C.



Ejercicio 9

Suponga que el valor de una acción P tiene una distribución normal y, en circunstancias normales de mercado, el valor en cada día es aleatorio e independiente, con la misma distribución normal (media μ y varianza σ^2 , desconocidas). Es de interés obtener una cuantificación de la varianza (o “volatilidad”) del precio de la acción P por medio de un intervalo de confianza.

Para lograr el objetivo se registró el valor de la acción (x_i) durante dos semanas hábiles (10 días) en que el mercado se encontraba en situación estable, y se obtuvo el siguiente resumen estadístico,

$$n = 10 \quad \bar{x} = 268.6 \quad s^2 = 317.8$$

Donde los últimos dos valores están medidos en pesos.

En base a esta muestra, ¿cuál de las siguientes alternativas corresponde a un intervalo de 95 % de confianza para la varianza σ^2 ?

Alternativa correcta: A

Información disponible en la página 75 (51 en pdf) del handbook.



Resolución: Según la página 75 del handbook, tenemos que

$$\frac{(n-1)s^2}{X_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}$$

Como el intervalo de confianza debe ser al 95 %, entonces $\alpha = 0.05$, de manera que necesitamos $X_{0.025}^2(9)$ y $X_{0.975}^2(9)$. La tabla de la página 79 (55 en pdf) nos dice que $X_{0.975}^2(9) = 2.70039$, $X_{0.025}^2 = 19.0228$. Reemplazando,

$$\frac{9 \cdot 317.8}{19.0228} \leq \sigma^2 \leq \frac{9 \cdot 317.8}{2.70039}$$

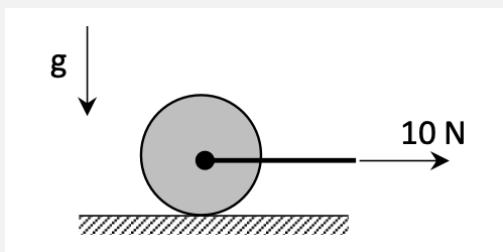
Nos da como resultado

$$150.35 \leq \sigma^2 \leq 1059.18$$

Lo que se acerca más a la alternativa A.



Ejercicio 10

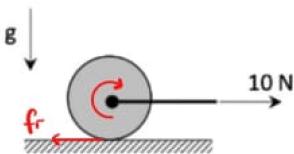


El cilindro **no homogéneo** de la figura de masa de 2kg y radio de 20cm es tirado por una fuerza horizontal constante de 10N aplicada en su centro de masa (que coincide con el centroide de su sección transversal) por lo que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Su aceleración angular es constante e igual a $5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ en sentido horario. Luego, el valor de la fuerza de roce estática entre el cilindro y la superficie es más cercana a:

Alternativa correcta: B

Resolución: Gracias a mi amigo Marco Gallegos por ayudarme con esta pregunta. **Nota:** para entender este ejercicio recomiendo fuertemente [revisar esta página \(click\)](#), pues explica los contenidos de una manera mucho más adecuada de la que yo podría hacerlo.

Figura 10
DCL. Créditos: Marco
Gallegos



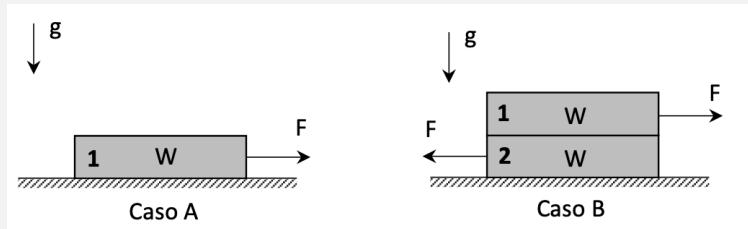
Tenemos que despejar la fuerza de roce, para lo que podemos hacer uso de las ecuaciones de suma de fuerzas o de la suma de torques. Así, $\sum F_x = 10\text{N} - F_r = ma$, tal que $F_r = 10\text{N} - ma$. Además, $\sum \tau = F_r \cdot R = I\alpha$, por lo que $F_r = \frac{I\alpha}{R}$, con R el radio del cilindro. La condición de no deslizamiento está dada por $a = R\alpha$, de manera que podemos despejar la aceleración usando que $R = 0.2\text{m}$ y que $\alpha = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, teniendo así que $a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Reemplazando, llegamos a $F_r = 10\text{N} - 2\text{kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8\text{N}$.

CORREGIDO: La respuesta correcta es la B. Se corrigió esta pregunta en la v2.1.





Ejercicio 11



En el caso *A* de la figura, un bloque de peso W es tirado por una fuerza constante F hacia la derecha. En el caso *B*, otro bloque idéntico se coloca por debajo del primero y es tirado hacia la izquierda por otra fuerza del mismo valor. Si en ambos casos los contactos entre todas las superficies poseen un coeficiente de roce dinámico de 0.2 entonces es **CORRECTO** afirmar que:

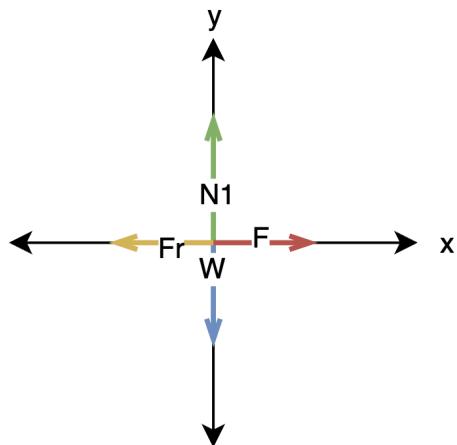
Alternativa correcta: C

Información disponible en la página 122 (98 en pdf) del handbook.



Resolución: Te recomiendo ver [esta página \(click\)](#) para entender cómo vamos a seguir en este ejercicio. Tenemos que comparar las aceleraciones de cada bloque. Usando la relación $\sum F = ma$. A continuación, incluyo un DCL:

Figura 11
DCL Bloque 1 en el caso A

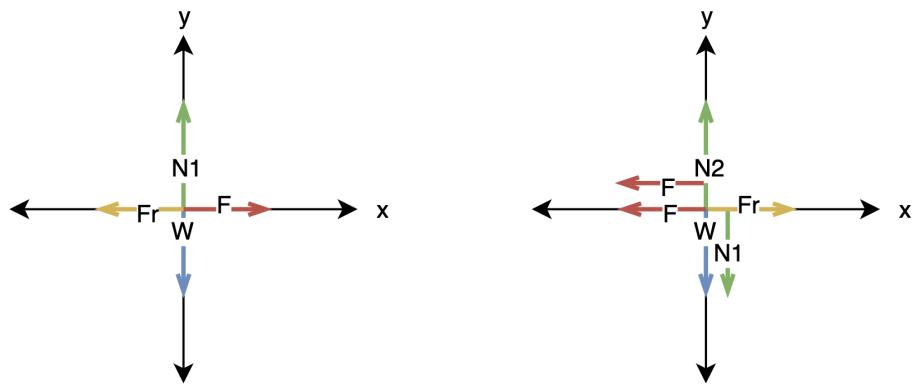


Dado que la fuerza de roce es μN , en el caso A podemos determinar que la normal corresponde a W , haciendo la suma en el eje y de las fuerzas. De este modo, tenemos que $\sum F_x = F - \mu N = F - 0.2W = ma$, por lo que para el caso A el bloque tiene una aceleración de $\frac{F-0.2W}{m}$.



Para el caso B, tenemos que ser cuidadosos con el DCL, para lo que te aconsejo ver la página que mencioné recién. A continuación incluyo un DCL del caso. Notar que en el bloque 2 se observan dos fuerzas de magnitud F , puesto que una de ellas corresponde a la fuerza de **reacción** dada la fuerza que se aplica en el bloque que está encima.

Figura 12
DCL Bloques 1 y 2 en caso B



A partir de lo anterior, primeramente nos conviene comparar el bloque 1, pues ya determinamos su aceleración anteriormente. Podemos notar que el DCL del bloque 1 es exactamente el mismo en el caso A y en el caso B, por lo que podemos intuir que su sumatoria de fuerzas (y, por ende, su aceleración), será la misma a la del caso A. De este modo, la alternativa correcta es la C.

Spam Alert

Son las 1AM de un martes 6 de febrero de 2024. Vengo a recordarte que puedes [donarme un pan con huevo o un cafecito haciendo click acá](#). ¡Gracias :3!

ATENCIÓN: Decidí omitir el ejercicio 12 por considerar que no se adapta al temario actual.



Ejercicio 13

Una pelota se deja caer al suelo desde una altura H . Se sabe que en cada rebote, un $P\%$ de la energía se “pierde” por deformación y temperatura. Entonces, el valor más cercano a la altura máxima que alcanza la pelota luego del k -ésimo rebote será:

Alternativa correcta: B

Resolución: Por conservación de energía, sabemos que inicialmente la energía potencial gravitatoria será de mgH (aunque no conocemos la masa, esta la descartaremos después con el despeje). Luego del primer rebote, la energía es $mgH \cdot (1 - 0.01P)$, por lo que se puede intuir que después del k -ésimo rebote esta será $mgH \cdot (1 - 0.01P)^k$. Entonces, igualando esta energía a la potencial gravitatoria, podemos determinar h_f de la manera que sigue:

$$\begin{aligned} mgh_f &= U \\ mgh_f &= mgH \cdot (1 - 0.01P)^k \\ h_f &= H(1 - 0.01P)^k \end{aligned}$$

Por lo que la alternativa correcta es la B.

Ejercicio 14

La ley de Gauss establece que la carga encerrada por una superficie cerrada es directamente proporcional a:

- La intensidad de líneas de campo eléctrico en todos los puntos de la superficie.
- La intensidad de campo eléctrico en todos los puntos de la superficie.
- El flujo de líneas de campo eléctrico a través de la superficie.
- El flujo de campo eléctrico que atraviesa la superficie.

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 355 (214 en pdf) del handbook.



Resolución: En la página 355 se define que la ley de Gauss corresponde a $Q_{enc} = \iint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S}$. En esa misma página, se menciona que la relación implica que la carga encerrada es directamente proporcional al flujo de campo eléctrico que atraviesa la superficie, con lo que la alternativa es la D.



Ejercicio 15

¿Cuál de las siguientes opciones es **CORRECTA** respecto de la relación entre las líneas de campo eléctrico y las curvas equipotenciales?

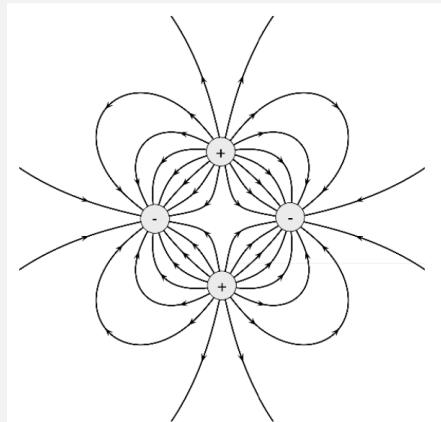
- Son tangentes en toda la región del espacio.
- Son perpendiculares en toda la región del espacio.
- Se intersectan si las cargas que generan el campo no son puntuales.
- Se intersectan en un solo punto si las cargas que generan el campo son puntuales.

Alternativa correcta: B

Resolución: Puedes encontrar un breve repaso de los contenidos en el anexo [haciendo click acá](#). En esa parte, encontramos que las líneas de campo eléctrico son siempre perpendiculares a las curvas equipotenciales, por lo que la alternativa correcta es la B.

Ejercicio 16

En la figura se representan cuatro cargas eléctricas fijas.



¿Qué representan las líneas que las unen?

Alternativa correcta: D

Resolución: Por lo mismo del ejercicio anterior, viendo el anexo podemos determinar que las líneas representan líneas de campo eléctrico, de manera que la alternativa es la D.



Ejercicio 17

Dos cargas puntuales de magnitud Q se encuentran separadas por una distancia d en un medio de permitividad eléctrica ϵ .

¿Cuánto vale la magnitud del potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas?

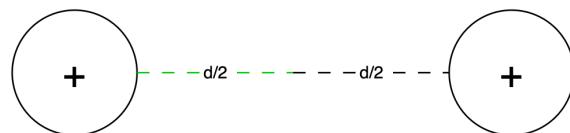
Alternativa correcta: C (Yo creo que la A)

Información disponible en la página 355 (214 en pdf) del handbook.



Resolución: A continuación, el siguiente diagrama podría ser de utilidad:

Figura 13
Diagrama ejercicio 17



A partir de la ley de Gauss, podemos deducir que el potencial eléctrico de una carga q a una distancia r está dada por $\frac{q}{4\pi\epsilon r}$. En particular, el potencial eléctrico de cada carga en el punto medio (distancia $\frac{d}{2}$) está dado por $\frac{Q}{4\pi\epsilon \frac{d}{2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon d}$. Por principio de superposición, el potencial eléctrico corresponde a $2V = \frac{Q}{\pi\epsilon d}$.

CONFLICTO: Según yo, la alternativa correcta es la A.

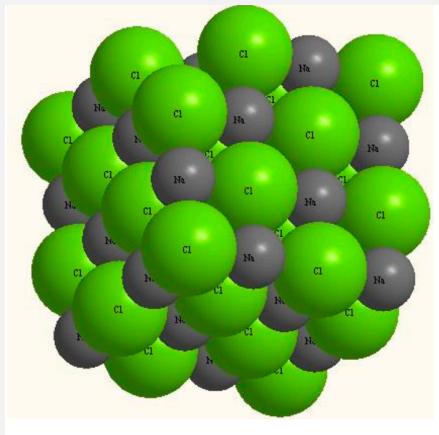
Sin embargo, según la pauta, es la C.





Ejercicio 18

Con respecto a los sólidos iónicos como el $NaCl$ (Figura), es **CORRECTO** decir que:



- Los sólidos iónicos se mantienen unidos por fuerzas de atracción electrostáticas (cargas netas).
- Los sólidos iónicos poseen orbitales atómicos ocupados por cationes y aniones, como los expuestos en la figura.
- Los sólidos iónicos tienen átomos “nadando en un mar de electrones”.

Alternativa correcta: C

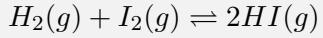
Resolución: Revisa las propiedades de los sólidos iónicos haciendo click aquí.

Por lo anterior, la respuesta correcta es la C (sólo I).



Ejercicio 19

A $500^{\circ}C$ la constante de equilibrio (K_p), de la reacción, es 60.



Prediga la dirección en la que avanzará la reacción para alcanzar el equilibrio y calcule el valor más cercano al cociente de reacción si las presiones parciales de $P_{I_2} = 0.888\text{atm}$; $P_{HI} = 0.592\text{atm}$; $P_{H_2} = 0.296\text{atm}$.

Alternativa correcta: D

Resolución: Es imprescindible que revises los apuntes sobre equilibrio químico. Anoté los míos y puedes verlos haciendo click aquí.

Tenemos que $Q = \frac{(P_{HI})^2}{(P_{H_2})(I_2)}$. Reemplazando,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(P_{HI})^2}{(P_{H_2})(I_2)} \\ &= \frac{0.592^2}{0.296 \cdot 0.888} \approx 1.33 \end{aligned}$$

Como $Q < K$, entonces la reacción avanzará hacia adelante y por ende se favorecerá la formación de producto, por lo que la respuesta correcta es la D.



Ejercicio 20

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **CORRECTA**?

- El pH influye en la solubilidad de las sales que contienen un anión que puede sufrir hidrólisis, como el BaF_2 , ya que el F^- puede reaccionar con los protones del agua en un medio ácido para dar HF . Este proceso hace que el equilibrio de solubilidad tiende a desplazarse a la izquierda y el BaF_2 se disuelva menos.
- Los hidróxidos alcalinotérreos que son parcialmente solubles, como el $Mg(OH)_2$, por ejemplo. Al añadir iones hidroxilos (aumento de pH) el equilibrio se desplaza hacia la izquierda, disminuyendo la solubilidad.
- El compuesto BaF_2 , libera iones F^- en disolución. Estos iones tienen la posibilidad de interactuar con el agua, lo que no implica una variación de la solubilidad y el pH.
- El $Ca(OH)_2$, es parcialmente soluble en agua. Al añadir protones (disminución del pH) el equilibrio se desplaza hacia la izquierda, disminuyendo la solubilidad.

Alternativa correcta: B

Resolución: El detalle de una gran parte de los datos de esta pregunta los encuentras haciendo click aquí.

Descarte de la alternativa A: La mayoría es correcta. Sin embargo, este proceso hace que el equilibrio se deba desplazar a la derecha y el BaF_2 se disuelva más. Con esto mismo podemos descartar la tercera alternativa.

Finalmente, la alternativa correcta es la B.



Ejercicio 21

Con respecto a la solubilidad, es **CORRECTO AFIRMAR** que:

- I. Un ejemplo de un soluto no polar con disolvente polar, podría ser cera en agua.
- II. Las fuerzas intramoleculares determinan la solubilidad de las moléculas.
- III. La regla general de solubilidad es que “lo similar disuelve a lo no similar”.

Alternativa correcta: B

Resolución: La solubilidad de una sustancia en otra está determinada por el equilibrio de fuerzas intermoleculares entre el disolvente y el soluto, por lo que podemos descartar la II). Además, podemos descartar la alternativa III) pues la regla general es que ”lo similar disuelve a lo similar”. Por ende, nos queda sólo I), con lo que la alternativa correcta es la B.



Ejercicio 22

Un médico posee un termómetro de mercurio que se encuentra mal calibrado, ya que esté indica que el punto de congelación del agua ocurre a los $-4^{\circ}C$, mientras que para el punto de ebullición indica que ocurre a $110^{\circ}C$.

Determine qué temperatura marcará el termómetro cuando el paciente tenga $40^{\circ}C$ de fiebre.

Alternativa correcta: B

Resolución: En condiciones generales, el punto de congelación es a los $0^{\circ}C$ y el de ebullición a los $110^{\circ}C$. Entonces, podemos definir una función $y = f(x)$ tal que $f(0) = -4$ y $f(100) = 110$, correspondiente a $y = 1.14x - 4$. Así, $f(40) = 1.14 \cdot 40 - 4 = 41.6$, siendo la B la alternativa correcta.

Ejercicio 23

A cuál de las siguientes temperaturas la superficie de un lago se encuentra congelada.

Alternativa correcta: C

Conversiones disponibles en la página 1 (7 en pdf) del handbook.



Resolución: Como el agua se congela a $0^{\circ}C$, tenemos que seleccionar la alternativa que corresponda a $0^{\circ}C$ o menor. Así, descartamos la B.

La alternativa A, correspondiente a $41^{\circ}F$ se puede convertir a $^{\circ}C$ usando que $C = \frac{F-32}{1.8} = \frac{9}{1.8} \approx 5^{\circ}C$, por lo que se descarta. Por otra parte, la alternativa C, de $482^{\circ}R$ se puede convertir a F° usando que $F = R - 459.69 = 22.31^{\circ}F$. Luego, $22.31^{\circ}F = \frac{22.31-32}{1.8} \approx -5,39^{\circ}C$, por lo que el lago está congelado a esta temperatura.

De este modo, la alternativa correcta es la C.

Ejercicio 24

Para que dos cuerpos se encuentren en equilibrio térmico, indique cuál de las siguientes propiedades debe ser la misma en todo el sistema.

Alternativa correcta: D

Resolución: El equilibrio térmico se produce cuando la temperatura es igual entre dos cuerpos. :3



Ejercicio 25

Un gas ideal realiza un proceso isocórico en un sistema cerrado. El calor transferido y el trabajo están dados por:

Alternativa correcta: D

Conversiones disponibles en la página 144, 145 y 147 (120, 121 y 123 en pdf) del handbook.



Resolución: En un proceso isocórico (isovolumétrico) permanece constante el volumen. Por primera ley de la termodinámica, donde $\Delta U = Q - W$, tenemos que $W = P\Delta V$, de acuerdo a la página 147, en donde $\Delta V = 0$. De esta manera, el trabajo es 0J. A partir de este momento, sólo nos queda la alternativa D. Aún así, según la página 145 se cumple que $\Delta u = c_v \Delta T$. Luego, por la primera ley, $\Delta U = c_v \Delta T = Q$.

Ejercicio 26

En unos años más, usted deberá decidir si quiere o no continuar con estudios de magíster, los que le significarían dedicación exclusiva.

¿Cuál de las siguientes alternativas da cuenta del **costo de oportunidad** o **costo alternativo** que enfrentaría si finalmente opta por realizar el magíster?

- Los ingresos adicionales que podrá obtener en el futuro, gracias a los aprendizajes y experiencia adicional producto de haber obtenido un título de postgrado (el magíster).
- La remuneración que dejaría de ganar si es que, en lugar de entrar a trabajar, ingresara al magíster.
- El costo que le significó estudiar para obtener su título de pregrado de ingeniero.
- Los gastos de mantención que deberá costear para vivir durante el período que dura el magíster, como por ejemplo, alimentación, arriendo, gastos de salud, etc.

Alternativa correcta: B

Resolución: Según los apuntes del anexo (accede haciendo click acá.), la alternativa que más se acerca es la B, pues consiste en un valor que se descarta por acceder a esta oportunidad.



Ejercicio 27

Elija la opción que, en términos generales, describe **MEJOR** el rol de los mercados en la economía.

- Minimizar los costos de transacción.
- Promover las mejoras tecnológicas.
- Lograr la mayor equidad posible.
- Distribuir los recursos de la forma más eficiente posible.

Alternativa correcta: D

Resolución: El rol de los mercados en la economía es el de distribuir los recursos de la forma más eficiente posible. No siento que deba detallar mucho más :3. Si tienes dudas te recomiendo consultar con los PDF de las clases.

Ejercicio 28

¿Cuál de las siguientes opciones **EJEMPLIFICA DE MEJOR FORMA**, una situación en que opera el libre mercado?

- Cuando la autoridad fija una banda de precios a los cuales se pueden vender y comprar los bienes en una economía.
- Cuando un experto trata de determinar mediante encuestas de opinión, qué quiere el ciudadano promedio, de tal forma de regular la oferta disponible.
- Cuando los recursos se dirigen hacia la producción de los bienes que demandan los consumidores.
- Cuando el Estado recauda impuestos y a través de éstos financia servicios públicos.

Alternativa correcta: C

Resolución: En el libre mercado **no interviene el Estado**. Por esto último, podemos descartar las alternativas A y D. La B se puede descartar porque el experto busca que se regule la oferta, lo que implicaría cierta intervención en el mercado. De este modo, la alternativa correcta es la C, pues en esta el mercado se regula sólo.



Ejercicio 29

La magnitud del efecto de un cambio positivo en la oferta depende en parte de las elasticidades de las curvas de demanda y de oferta.

Al respecto, elija cuál de las siguientes afirmaciones es **INCORRECTA**:

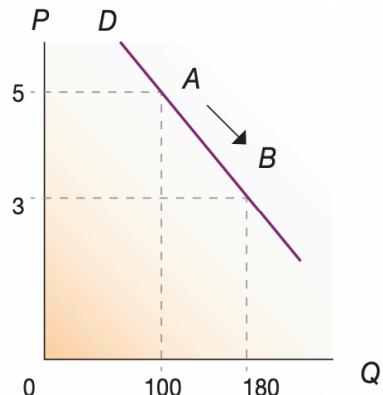
- Cuando la curva de demanda es más elástica, entonces un desplazamiento de la oferta tiene un mayor impacto en la cantidad de equilibrio.
- Cuando la curva de demanda es más inelástica, entonces un desplazamiento de la oferta tiene un mayor impacto en el precio de equilibrio.
- Cuando la curva de oferta es perfectamente inelástica, la elasticidad de la demanda es irrelevante en términos de efecto que tendría un cambio positivo en la oferta.
- Cuando la curva de demanda es perfectamente elástica, cualquier cambio en la oferta se traduce exclusivamente en cambios en la cantidad –y no en el precio– de equilibrio.

Alternativa correcta: C

Resolución: Revisa mis apuntes de esta materia haciendo click acá.. Iremos por partes:

Descarte de la alternativa A: Cuando la curva de demanda es más elástica, entonces la demanda responde más ante cambios en el precio, por lo que el impacto en la cantidad de equilibrio será mayor.

Figura 14
Demanda elástica

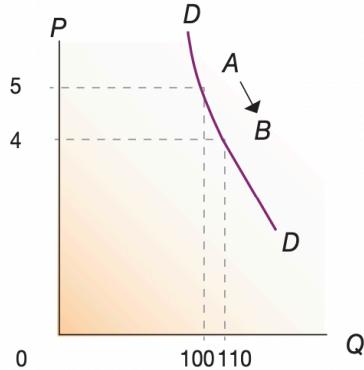


Si la curva de oferta intersecta (5, 100) y luego se desplaza, tal que intersecta en (3, 180), entonces se evidencia que el impacto en la cantidad de equilibrio es mayor.



Descarte de la alternativa B: En este caso la demanda responde menos ante cambios en el precio.

Figura 15
Demanda elástica

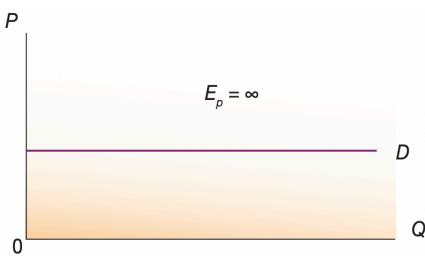


El análisis es análogo. Observa cómo es más "plana" la curva, tal que al desplazarse una curva de oferta que la intersecte, entonces se tendrá un mayor impacto en el precio de equilibrio.

Confirmación de la alternativa C: Cuando la oferta es perfectamente inelástica, un aumento del precio no cambia la cantidad ofrecida. En este caso, **sí es relevante** estudiar la elasticidad de la demanda para entender los efectos que tendría una variación en la oferta, puesto que esta podría ser perfectamente elástica, inelástica o cualquiera de sus variaciones. Esto último podría ser de particular influencia en la cantidad y precio de equilibrio.

Descarte de la alternativa D: Dada una curva de demanda perfectamente elástica, se tiene que a un precio mayor que P_0 la cantidad demandada es 0, mientras que dado un precio de P_0 los consumidores consumen a cualquier cantidad. El precio de equilibrio se mantendría constante sin importar el desplazamiento de una curva de oferta.

Figura 16
Demanda perfectamente elástica





Ejercicio 30

Se tiene una variable *var* que se define de la siguiente manera:

```
var = NOT((a + 3 == 5) OR NOT(b)) OR (a > 3 AND b)
```

¿Qué valores de *a* y *b* hacen que el valor de *var* sea **VERDADERO** respectivamente?

Alternativa correcta: B

Resolución: Para que *var* sea verdadero, entonces cualquiera de las 2 condiciones deben ser verdaderas (por los *OR*). Entonces, debe cumplirse que *NOT((a + 3 == 5) OR NOT(b))* sea *TRUE*, o que *(a > 3 AND b)* sea *TRUE*. Para que esta última sea verdadera, debe cumplirse que *b = TRUE* y que *a > 3*, lo que se tiene con la alternativa B.



Ejercicio 31

Se quiere tener un algoritmo para ordenar un arreglo de mayor a menor. A continuación, se muestra un pseudocódigo que intenta realizar esto.

```
a = {1,5,7,2,5,10}
n = 6
i = 0
WHILE(i < n)
    aux = a[i]
    j = i
    WHILE(j < n)
        IF(aux < a[j])
            aux = a[j]
            a[j] = a[i]
            a[i] = aux
        FIN IF
        j = j + 1
    FIN WHILE
    i = i + 1
FIN WHILE
```

Cuando i vale 2 ($i = 2$). ¿Qué valor tiene el arreglo a , justo **ANTES** de ejecutarse la línea 15?

Alternativa correcta: A

Resolución: La línea 15 corresponde a $i = i + 1$. Inicialmente, $i = 0$, lo que cumple con $i < n$. Entonces, $aux = i[0] = 1$, $j = 0$. Al entrar al while, se cumple que $j < n$. A partir del if, notaremos que $aux < a[j]$ para $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Cada vez que se tiene esta condición, se intercambia el i -ésimo elemento por el j -ésimo elemento, por lo que en este caso se intercambiarán los elementos con la primera entrada.

Así, para $j = 1$ se tiene que $a = \{5, 1, 7, 2, 5, 10\}$. Luego, con $j = 2$, $a = \{7, 1, 5, 2, 5, 10\}$, con $j = 3$, $a = \{2, 1, 5, 7, 5, 10\}$, con $j = 4$, $a = \{5, 2, 1, 5, 7, 10\}$ y con $j = 5$, $a = \{10, 5, 2, 1, 5, 7\}$. A partir de este último momento, $i = 1$. Con $i = 1$, se cumple que $a[1] = 5$, donde $5 < a[j]$ para $j = 5$ (nota que j se define como $j = i$ inicialmente).

Con $j = 5$, $a = \{10, 7, 2, 1, 5, 5\}$.

Finalmente, con $i = 2$ se tiene que $a[2] = 2$, en donde $2 < a[j]$ para $j = 4, 5$. Para $j = 4$, $a = \{10, 7, 5, 1, 2, 5\}$, mientras que para $j = 5$, $a = \{10, 7, 5, 1, 2, 5\}$. Esto corresponde al resultado antes de ingresar a la línea 15 cuando $i = 2$, por lo que la alternativa correcta es la A.



Ejercicio 32

Se tiene una planilla de cálculo que se muestra a continuación. La función $SI(PRUEBA_LOGICA; VALOR_VERDADERO; VALOR_FALSO)$ verifica si se cumple la condición $PRUEBA_LOGICA$, en caso de ser verdadero asigna a la celda $VALOR_VERDADERO$ y $VALOR_FALSO$ en caso contrario.

La función $MEDIANA(RANGO)$ entrega la mediana de los elementos pertenecientes al $RANGO$.

	A	B	C	D
1	1	1	3	
2	2	1	0	
3				

¿Qué fórmula debe ponerse en la celda $D3$, para que ésta quede con valor “NO”?

Alternativa correcta: A

Resolución: Todas las respuestas tienen que ver con los rangos $A1 : C1$ y $A2 : C2$. De esto, tenemos que $MEDIANA(A1 : C1) = 1$, $MEDIANA(A2 : C2) = 1$, por lo que la alternativa correcta es la A.

Esto se debe a que la fórmula = $SI(MEDIANA(A1 : C1) > MEDIANA(A2 : C2); "SI"; "NO")$ devuelve “SI” en el caso de que $MEDIANA(A1 : C1) > MEDIANA(A2 : C2)$. Como ambos son 1, entonces no se cumple que $1 > 1$, por lo que la fórmula retorna “NO”.



Mensaje del Tom

Después de varios días, ¡he terminado la SEGUNDA guía! He avanzado lento, pues como ya comenté anteriormente estoy haciendo mi práctica 2.

Trabajare para hacer una o dos guías más, por lo que espero que este documento sea útil para quienes tengan que rendir el fundamentals en un futuro.

Recuerda que puedes [donarme un pan con huevo haciendo click acá](#). ¡Gracias :3!

6. Guía de Ejercicios 2019-1

A continuación, encontrarás mi resolución a la guía 2019-1, a partir de la página siguiente.

OJO: Al igual que con la guía anterior, hago sólo los ejercicios que considero que son válidos para mi generación (2022). ¡También recuerda que me puedo equivocar!





Ejercicio 1

Considere la función $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

La derivada de esta función es:

Alternativa correcta: B

Resolución: Para mí, es más fácil separar las funciones. Es decir, $f(x) = \ln(g(x))$, donde $g(x) = \ln(\ln(x))$. Inicialmente, $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, en donde $g'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = \frac{1}{\ln(x)x}$. Así, $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \cdot \frac{1}{\ln(\ln(x))} = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$, por lo que la alternativa correcta es la B.

Ejercicio 2

¿Cuál de las siguientes series converge?

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{2^n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n-1}$

Alternativa correcta: C

Información disponible en la página 50 (26 del pdf) del handbook.



Resolución: Tomé apuntes sobre algunas pruebas de convergencia/divergencia en el anexo (click aquí).

Descarte de la alternativa A: Tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$, en donde podemos concluir su convergencia o divergencia de distintas maneras. En este caso, por prueba de la divergencia, notamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$, por lo que la serie es divergente.

Descarte de la alternativa B: Tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{2^n} = \frac{\sqrt{0!}}{2^0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{2^n}$, lo que es igual a $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{2^n}$. Ahora, por prueba de la razón, tenemos que $a_n = \frac{\sqrt{n!}}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)!}}{2^{n+1}}$, por lo que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \left| \frac{\sqrt{(n+1)!}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n!}} \right| = \left| \frac{\sqrt{(n+1)!}}{2} \right|$, lo que tiende a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, la serie diverge por prueba de la razón.

Confirmación de la alternativa C: Cuando hay factoriales conviene usar prueba de la razón. En este caso $a_n = \frac{e^n}{n!(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$ y $a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}$, de modo que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{e^{n+1}}{(n+1)!(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})} \cdot \frac{n!(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{e^n} \right| = \left| \frac{e(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(n+1)(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})} \right|$$

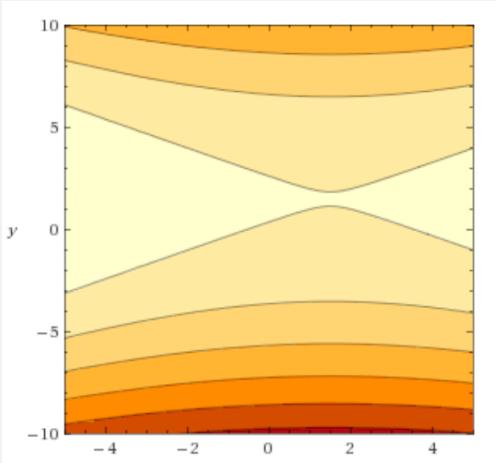
Lo que tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, por lo que converge por prueba de la razón.

Descarte de la alternativa D: Por prueba de la divergencia, notamos que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{4n-1}$ no existe, por lo que la serie diverge.



Ejercicio 3

Considere la siguiente curva de nivel:



¿A qué superficie podría corresponder la curva de nivel mostrada en la figura?

- $z = x^2 - 2y^2 - 3x + 6y + 7$
- $z = x^2 + 2y^2 - 3x + 6y + 3$
- $z = x^2 - 2y^2 + 3x - 6y + 7$
- $z = x^2 + 2y^2 + 3x - 6y + 3$

Alternativa correcta: A

Información disponible en la página 44 y 45 (20 y 21 del pdf) del handbook.



Resolución: Es posible notar que todas las curvas de nivel del dibujo corresponden a hipérbolas, las que se describen en el caso 3 de la página 44 del handbook. Las hipérbolas son de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Por lo que tenemos que considerar sólo las alternativas en que se puedan formar expresiones de esa manera, siendo en este caso la A y la C (notar que se resta el y^2).

Respecto a la primera alternativa, completamos cuadrados teniendo que $(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 2(y - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2} + 7$, lo que se puede escribir como $z = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{(y - \frac{3}{2})^2}{\frac{1}{2}} + \frac{37}{2}$. De esto último, podemos inferir que su centro se ubica en $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Por otra parte, la alternativa C se puede expresar como $z = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 2(y + \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2} + 7$, por lo que su centro está en $(x, y) = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

Viendo el gráfico, podemos intuir que la alternativa correcta es la A, pues hay un centro en el punto $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.



Ejercicio 4

Durante una reacción química una sustancia A es convertida en una B a una tasa proporcional al cuadrado de la cantidad de A . Cuando $t = 0$ hay 100 gramos de A y después de 1 hora sólo quedan 50 gramos de A por convertir.

¿Cuántos gramos de A quedan luego de 4 horas de reacción?

Alternativa correcta: C

Resolución: Sea la cantidad de $A(t)$. Según enunciado, $A(0) = 100$, $A(1) = 50$, mientras que $\frac{dA}{dt} = kA^2$, puesto que se nos dice que A es convertida a una tasa proporcional al cuadrado de su cantidad. Por EDOs separables, tenemos $\frac{dA}{A^2} = kdt$, por lo que $-\frac{1}{A(t)} = kt + C$, tal que $-\frac{1}{kt+C} = A(t)$. Como $A(0) = 100$ y $A(1) = 50$, entonces $-C = \frac{1}{100}$. Así, $A(t) = \frac{1}{-kt+\frac{1}{100}}$. Como $A(1) = 50$, tenemos $50(-kt + \frac{1}{100}) = 1$, de manera que $-50k + \frac{1}{2} = 1$, implicando que $-\frac{1}{2} = 50k$. Por lo tanto, $k = -\frac{1}{100}$ y $A(t) = \frac{1}{\frac{t}{100} + \frac{1}{100}} = \frac{100}{t+1}$. Al cabo de 4 horas, $A(4) = \frac{100}{5} = 20g$, con lo que la alternativa correcta es la C.



Ejercicio 5

Considere las siguientes 4 matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de las matrices dadas **NO** puede ser transformada a la matriz identidad I_3 por medio de operaciones fila elementales?

Alternativa correcta: C

Información disponible en la página 57 (33 en pdf) del handbook.



Resolución: Revisa las propiedades de las matrices invertibles y el teorema de la matriz invertible haciendo click aquí..

Para que una de las matrices pueda ser transformada a I_3 con operaciones fila, debe de ser invertible. Entonces, podrías recurrir a mi tan querido teorema de la matriz invertible si así lo deseas. En este caso particular, intentaré escalaronar las matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim^{e_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim^{e_{31}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim^{e_3(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim^{e_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Desde este punto es evidente que la A sí es escalonable. Vamos entonces por la B,

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim^{e_{21}(-1), e_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim^{e_4(\frac{1}{4}), e_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim^{e_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Donde también se hace evidente que se puede escalaronar a la matriz identidad. Luego, la C

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim^{e_{21}(-2), e_{31}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim^{e_{32}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En donde notamos que no se puede escalaronar a la matriz identidad I_3 , por lo que la alternativa es la C.



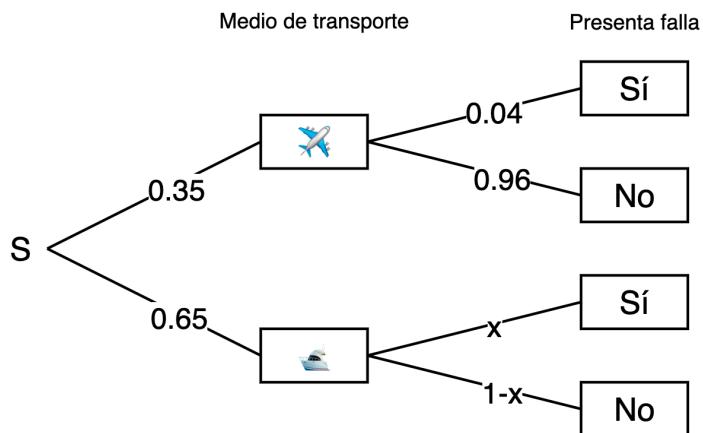
Ejercicio 6

Una fábrica de automóviles está recibiendo una queja de una automotora extranjera pues aproximadamente un 16 % de los vehículos que recibió vienen con una falla en su termostato. Un 65 % de los vehículos son transportados por barco, y el 35 % restante por avión. El jefe responsable del transporte aéreo aseguró que sólo un 4 % de todos los vehículos que transportó a dicha automotora presentan la falla. Según esta información, ¿cuál es el valor más cercano a la probabilidad de que un vehículo transportado por barco escogido al azar presente la falla mencionada?

Alternativa correcta: B

Resolución: Hice una figura como descripción de los eventos que ocurren en esta pregunta.

Figura 17
Diagrama ejercicio 6



Según enunciado, $0.16 = 0.35 \cdot 0.04 + 0.65 \cdot x$, en donde nos piden despejar x. Luego,

$$\begin{aligned}0.16 &= 0.35 \cdot 0.04 + 0.65 \cdot x \\x &= \frac{0.16 - 0.35 \cdot 0.04}{0.65} \\&\approx 0.224\end{aligned}$$

Lo que se acerca más a la alternativa B.



Ejercicio 7

En un cajero de estacionamiento, se ha instalado un aparato que mide el tiempo (T , en horas) transcurrido cada 10 automóviles que pasan por la caja. En otras palabras, se mide la diferencia de tiempo entre la llegada de un automóvil y el décimo después de este. Suponga que el número de automóviles que pasan por caja tiene una distribución *Poisson* con tasa 20 llegadas por hora.

Considere las siguientes afirmaciones:

- I. El tiempo transcurrido entre 10 llegadas de automóviles tiene una distribución $\text{Gamma}(10; 0.05)$.
- II. El tiempo esperado entre 10 llegadas de automóviles es 10 veces el tiempo esperado entre llegadas consecutivas de automóviles
- III. El tiempo esperado entre llegadas consecutivas de automóviles es de 0.05 horas.

Son **CORRECTAS**:

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 84 (60 en pdf) del handbook.



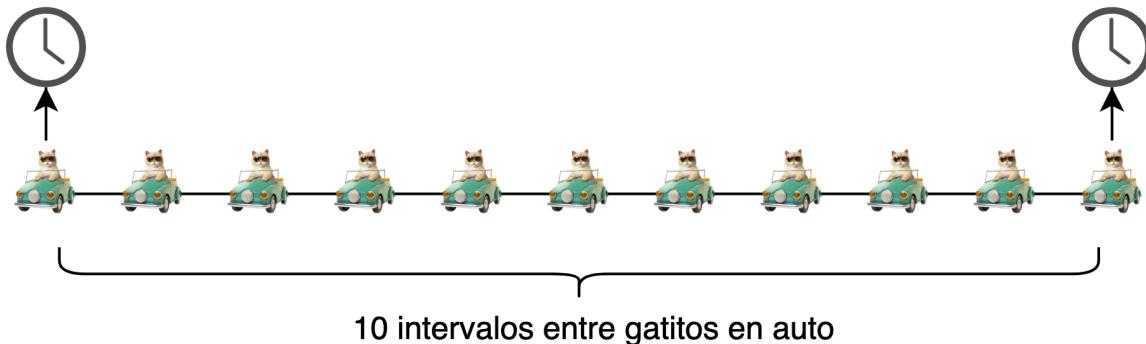
CONFLICTO: Para nuestra **HORRIBLE** suerte, la notación que se ocupa para la función *Gamma* es distinta en esta prueba. Ten mucho ojo con el apartado que te dice la esperanza y la varianza en el handbook.

A mi me enseñaron que $\text{Gamma}(k, \nu)$ tenía esperanza $\frac{k}{\nu}$, pero en este formato de prueba usamos $\text{Gamma}(k, \theta)$, donde $\theta = \frac{1}{\lambda}$. >:(



La lata de esto es que si usamos la notación de EYP1113 para calcular probabilidades, esperanzas y demás llegaremos a lo mismo (y en ese caso podríamos confirmar la II y la III sin problemas), pero no podremos confirmar la I.

Resolución: Siento que en [este documento \(click\)](#) se da una buena respuesta para entender la relación *Poisson – Gamma*. Tenemos que el número de automóviles M que pasa por la caja en una hora distribuye $M \sim \text{Poisson}(20)$. Para determinar el tiempo transcurrido entre 10 llegadas, debemos notar que la tasa de tiempo entre cada auto λ corresponde a $\lambda = \frac{1}{20} \frac{\text{hora}}{\text{auto}}$. Además, incluyo una figura que hice para que se entienda mejor en este caso (nota cómo define la medición del tiempo el enunciado, que es algo que se me hizo muy confuso al comienzo).



De esta manera, el tiempo que tardan n autos en llegar a la caja está dado por $T_n \sim \text{Gamma}(n, \frac{1}{20})$. Como el tiempo transcurrido entre 10 llegadas lo medimos con 10 intervalos (ver imagen), esto corresponde a $\text{Gamma}(10, 0.05)$, y su esperanza es $10 \cdot 0.05 = 0.5\text{hr}$. El tiempo esperado entre llegadas consecutivas de automóviles es $\text{Exponencial}(\frac{1}{20})$, cuya esperanza es $\frac{1}{20} = 0.5\text{hr}$. De esta manera, podemos decir que I, II y III son correctas, siendo así la alternativa D.

CONFLICTO Parte 2: La palabra clave **entre** es algo que siempre puede confundir, y considero que está muy bien explicado en el apunte de Michael Ramón. Sin embargo, para efectos de esta pregunta, consideré el "entre" como el tiempo transcurrido cada 10 automóviles, y por eso apliqué *Gamma* con $k = 10$ y no $k = 9$.

Si fuera tú, no te aconsejaría calentarte la cabeza en este ejercicio, pues su redacción es confusa y la notación es peor aún.





Ejercicio 8

En un hospital se está estudiando el peso promedio de los bebés que nacen de sus pacientes. En particular, quisieran probar que el peso promedio de los bebés recién nacidos en ese hospital es distinto a la media teórica 3.4 kg.

Para ello se registró el peso de cada recién nacido durante un mes; en total fueron $n = 86$. El peso promedio de esta muestra fue de 3.42 kg y la desviación estándar obtenida fue 0.32 kg.

Asumiendo que el peso de un recién nacido tiene una distribución normal, ¿existe evidencia estadística para probar que el peso promedio de recién nacidos en ese hospital es diferente al promedio teórico?

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 73 y 77 (48 y 53 en pdf) del handbook.



Resolución: Del enunciado, nos dicen que de una muestra de $n = 86$ bebés se obtuvo que $s = 0.32$ y que $\bar{X} = 3.42$. En función de esto, podemos hacer un test de hipótesis sobre el promedio, en donde $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu \neq \mu_0$, con $\mu_0 = 3.4$. Del handbook tenemos que

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim T - student(n - 1)$$

Reemplazando,

$$T_0 = \frac{3.42 - 3.4}{\frac{0.32}{\sqrt{86}}} \approx 0.58 \sim T - student(85)$$

En este caso para que se rechace la hipótesis (y probar así que el promedio de los recién nacidos es diferente al promedio teórico) se tiene que cumplir que $|T_0| > t_{\frac{\alpha}{2}}(85)$, con α la significancia. De la tabla de la página 77, podemos evidenciar para $n \approx \infty$ que no hay un α tal que $|T_0| = 0.58 > t_{\frac{\alpha}{2}}(\infty)$, por lo que seleccionamos la alternativa D.

Nota que esta alternativa está más seleccionada por "descarte".



Ejercicio 9

En el contexto de un modelo de regresión lineal simple, existen algunos supuestos importantes que se sugiere sean verificados al momento de tomar conclusiones estadísticas. Sea Y la variable respuesta (dependiente), y X la variable explicativa (independiente) del modelo.

¿Cuál de las siguientes alternativas **NO** es un supuesto necesario para este modelo?

- Para cada valor de X , la distribución de Y debe ser normal.
- Para cada valor de X , la desviación estándar de Y debe ser la misma.
- La esperanza de Y debe ser una función lineal de X .
- La variable Y debe ser independiente de X .

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 109 (116 en pdf) del **apunte de Michael Ramón**.

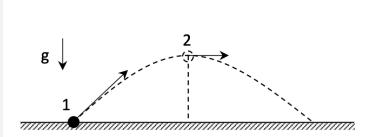


Resolución: El supuesto que no es necesario corresponde al de la independencia entre la variable Y y X . Toda la información está en la página 109 del apunte de Michael Ramón :).



Decidí omitir el ejercicio 10 por considerar que no se adapta al temario actual (es de estática).

Ejercicio 11



Un proyectil es lanzado desde la posición 1 y adquiere una trayectoria parabólica. El punto 2 que muestra la figura es aquel donde la altura del proyectil es más alta. Respecto a esta situación, es correcto decir que:

- El trabajo que hace el peso del proyectil entre 1 y 2 es igual al cambio de energía cinética.
- El trabajo que hace el peso del proyectil entre 1 y 2 es igual al cambio de energía potencial.
- El trabajo que hace el peso del proyectil entre 1 y 2 es igual al cambio de energía mecánica.
- El peso del proyectil no realiza trabajo entre los puntos 1 y 2.

Alternativa correcta: A

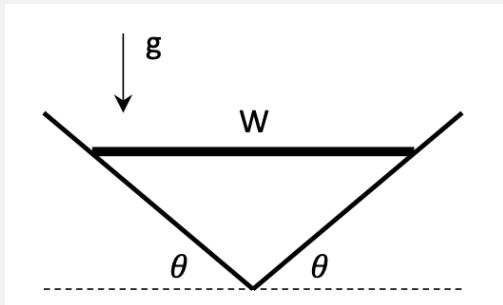
Información disponible en la página 119 (95 en pdf) del handbook.



Resolución: Para responder esta pregunta, es necesario considerar el teorema de trabajo-energía, cuya información puedes encontrar haciendo [click acá](#). Por ende, como la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la del peso, se cumplirá que su trabajo será igual al cambio de energía cinética, por teorema de trabajo y energía.



Ejercicio 12

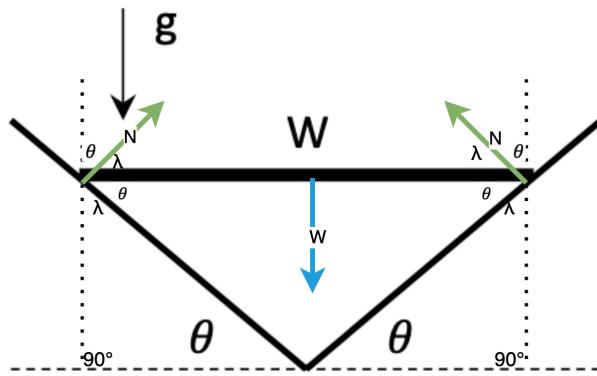


Una delgada barra rígida y homogénea de peso W se encuentra en equilibrio en posición horizontal, apoyada sobre dos superficies lisas inclinadas en un ángulo θ como muestra la figura. ¿Cuál es el módulo de la fuerza que cualquiera de las superficies ejerce sobre un extremo de la barra?

Alternativa correcta: C

Resolución: Agradecer a mi amigo Bastián Sanaguas por ayudarme con este ejercicio. A continuación, incluyo un DCL de esta situación:

Figura 18
Bosquejo ejercicio 12



En donde podemos notar que $\sum F_x = 2N\cos(\theta) - W$ y que $\sum F_y = 2N\sin(\theta)$. Nos piden despejar N , para lo que podemos considerar que $\sum F_x = 0$ dado que está en equilibrio. Así, $2N\cos(\theta) = W$, de modo que $N = \frac{W}{2\cos(\theta)} = 0.5W\sec(\theta)$, teniendo así que la alternativa correcta es la C.

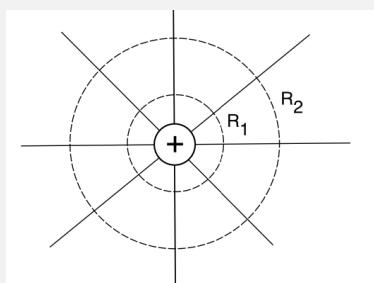


CONFLICTO: Decidí descartar el ejercicio 13 por considerar que estaba muy leseado. Junto a varios amigos, intentamos resolverlo pero consideré que era mejor no calentarse la cabeza. De todos modos, te recomiendo fuertemente ver [este video](#), [este otro video](#) y [este último video](#) en el caso de que quieras intentarlo.



Ejercicio 14

La figura representa una carga positiva y las líneas de campo que genera en un plano.



¿Cuánto vale la densidad lineal relativa de líneas de campo eléctrico $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ medidas en las circunferencias de radios R_1 y R_2 , tal que $R_2 = 3R_1$?

Alternativa correcta: A

Resolución: En el apunte de electro, podrás encontrar las propiedades del campo eléctrico, a las que puedes acceder haciendo click aquí.

Una propiedad importante es que **la densidad de líneas de campo en un punto es proporcional al valor del campo eléctrico en dicho punto**, por lo que aplicamos la Ley de Gauss.

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$$

De manera que $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$. Reemplazando,

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{R_1^2}{9R_1^2} = \frac{1}{9}$$

Por lo que la alternativa correcta es la A.



Ejercicio 15

Un capacitor es un elemento eléctrico utilizado en prácticamente todos los circuitos electrónicos de tecnologías actuales. ¿Cuál de las siguientes opciones es siempre **CORRECTA** respecto de un capacitor de placas paralelas de un circuito?

- La energía eléctrica del capacitor en cada placa es aproximadamente la misma.
- El campo eléctrico entre las placas del capacitor disminuye si se introduce un dieléctrico.
- El potencial eléctrico entre las placas del capacitor no depende de la distancia.
- Entre las placas del capacitor existe un traspaso de cargas.

Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 95 (71 en pdf) del handbook.



Resolución: Agregué la descripción de un condensador de placas planas y paralelas en el anexo (click). De todos modos, iré por partes.

Descarte de la alternativa A: mi intuición me dice que es incorrecta. Esto porque en cada placa la magnitud de la carga es aproximadamente la misma, la que no creo que se relacione mucho con la energía eléctrica.

Confirmación de la alternativa B: Esto es correcto, como se muestra también en el anexo que puse. De todos modos, la intuición que tengo aquí es pensar que en presencia de un dieléctrico la ley de Gauss corresponde a $\frac{Q}{4\pi\epsilon}$, en donde $\epsilon = K\epsilon_0$. Como las constantes dieléctricas son mayores que 1, entonces el resultado de esa fracción será inferior que el de $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$.

Descarte de la alternativa C: Según el handbook, el potencial eléctrico entre placas paralelas corresponde a $\frac{Q}{C}$, en donde $C = \frac{\epsilon A}{d}$, con d la distancia entre las placas. De esta manera, el potencial dependería de la distancia entre las placas.

Descarte de la alternativa D: Para esta pregunta, considero que esta es una buena respuesta que encontré en internet ([click acá](#)). Entre las placas no existe un traspaso de cargas. Recuerda que los capacitores almacenan energía en forma de campo eléctrico.



Ejercicio 16

Para construir un circuito casero se realiza la siguiente experiencia. Se utilizan dos ampolletas idénticas, una fuente de voltaje y un medidor de corriente. Se disponen en serie y en paralelo, aplicando diferentes voltajes y midiendo la corriente entre distintos nodos del circuito.

¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a una observación plausible del experimento?

- Al conectar las ampolletas en serie, la que está más cerca de la fuente brilla más y se mide más corriente en ella.
- Al conectar las ampolletas en paralelo brillan distinto y las corrientes miden distinto en cada una de ellas.
- Al aumentar el voltaje las ampolletas aumentan su brillo y se mide menos corriente en el circuito.
- Al disminuir el voltaje las ampolletas dejan de brillar, pero aún se mide corriente en el circuito.

Alternativa correcta: D

Información disponible en la página 357 y 358 (216 y 217 en pdf) del handbook.



Resolución: Hay una buena simulación online a la que puedes acceder [haciendo click aquí](#).

Descarte de la alternativa A: Al conectar las ampolletas en serie, se debe cumplir que $V = V_1 + V_2$. Como $V = RI$ y las ampolletas son idénticas, $V_1 = V_2$ pues circula la misma corriente en ambas. Así, ambas brillan lo mismo.

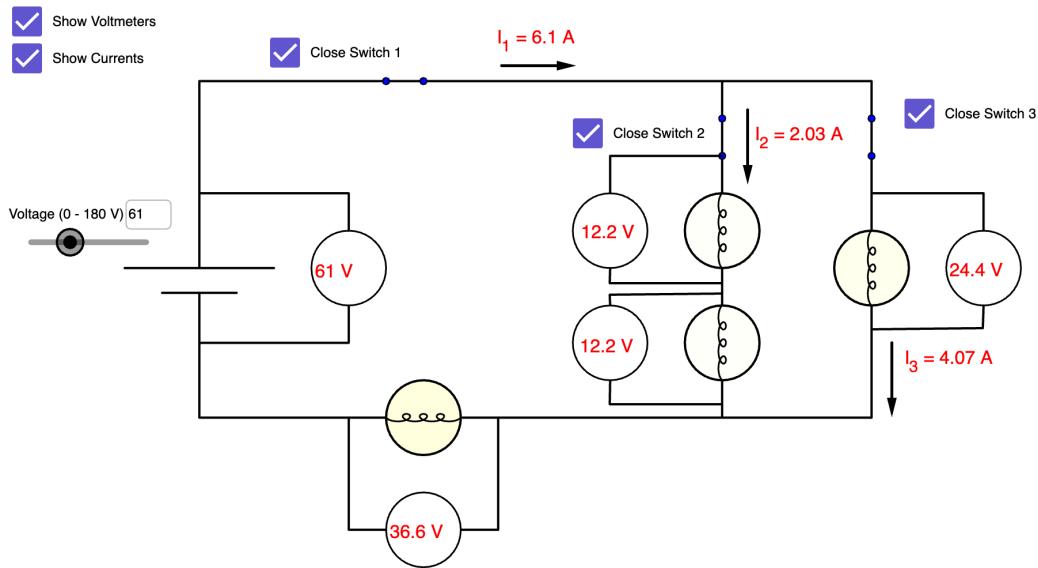
Descarte de la alternativa B: Las ampolletas que están conectadas en serie deben tener el mismo voltaje, por lo que también deben brillar lo mismo. (Recuerda que tenemos sólo dos ampolletas en total)

Descarte de la alternativa C: Dado que $V = RI$, si asumimos una resistencia constante, entonces al aumentar el voltaje necesariamente se aumenta la corriente.

Confirmación de la alternativa D: De acuerdo con la simulación que adjunté, el **brillo de la ampolleta se relaciona a la energía que disipa en forma de luz y calor**. Entonces, es de intuir que si el voltaje no es el suficiente la ampolleta no brillará, pero de todas maneras circulará corriente en el circuito. A continuación, pondré un diagrama para que se comprenda mejor (ver página siguiente):



Figura 19
Simulación del circuito



En donde se puede observar que las ampolletas con menor voltaje brillan menos, pero se sigue registrando corriente en el sistema. Así, la alternativa correcta es la D.

Ejercicio 17

Considere un circuito LRC ($L = 0.6H$; $R = 250\Omega$; $C = 3.5\mu F$) que es alimentado por una fuente alterna de $60Hz$ de frecuencia y un voltaje máximo de $150V$.

¿Cuánto vale el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente en este circuito?

Alternativa correcta: C

Resolución: No encontré esta fórmula en el handbook, pero la dejé en el anexo (click). Aplicando la fórmula, sabemos que el ángulo de fase corresponde a $\tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$. Según enunciado, $R = 250\Omega$. Además, $X_L = 2\pi fL$ y $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$. Reemplazando,

$$X_L = 2\pi \cdot 60Hz \cdot 0.6H \approx 226.20 \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi 60Hz \cdot 3.5 \cdot 10^{-6}F} \approx 757.88$$

Teniendo así que

$$\tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-531.68}{250}\right) \approx \tan^{-1}(-2.13)$$

De modo que la alternativa correcta es la C.



Ejercicio 18

Para la reacción $2NO(g) + O_2(g) \leftrightarrow 2NO_2(g)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **INCORRECTA**?

- Si se agrega oxígeno el sistema reacciona consumiendo oxígeno hasta restablecer el equilibrio.
- La constante de equilibrio no varía al agregar O_2 .
- Si se agrega NO_2 el sistema favorecerá el sentido inverso de la reacción hasta restablecer el equilibrio.
- Si se agrega un catalizador se aumenta la rapidez de la reacción y cambia el valor de K .

Alternativa correcta: –

Resolución: Muchas gracias a mi amigo Marco por ayudarme con esta pregunta. Recuerda que puedes ver algunos apuntes en el anexo (click).

Descarte de la alternativa A: Por principio de Le Chatelier, al agregar $O_2(g)$ el sistema avanzará formando producto para contrarrestar aquello, por lo que la A es verdadera.

Descarte de la alternativa B: Lo único que varía la constante de equilibrio es la temperatura. Si bien está en función de las concentraciones, su valor es fijo, por lo que esta alternativa es verdadera.

Descarte de la alternativa C: Al agregar NO_2 , por principio de Le Chatelier, el sistema reaccionará de "derecha a izquierda" para contrarrestar este efecto.

Confirmación de la alternativa D: La única perturbación que modifica la constante de equilibrio es la temperatura, al igual que se mencionó anteriormente. De esta manera, esta alternativa es falsa. Un catalizador no necesariamente hace la reacción más rápida ¡sino que disminuye la energía de activación que necesita la reacción!



Ejercicio 19

Una solución que posee un compuesto desconocido, pero que es sabido que es un compuesto de base débil (B) tiene un pH igual a 8.8 y la concentración inicial es de $0.35 \frac{mol}{L}$.
¿Cuál es el K_b de la base?

Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 86 (63 en pdf) del handbook.



Resolución: Dejé unas partes importantes en el anexo (click). Del enunciado tenemos que el pH corresponde a 8.8, por lo que podemos obtener la concentración de OH^- usando que $pOH + pH = 14$. De este modo, $5.2 = pOH$ por lo que $-\log([OH^-]) = 5.2$ y, así, $[OH^-] = 10^{-5.2} \approx 6.31 \cdot 10^{-6}$.

	$B(ac)$	$H_2O(l)$	$BH^+(ac)$	$OH^-(ac)$
Iniciales	0.35	-	-	-
Reaccionan	- x	- x	+ x	+ x
Equilibrio	0.35 - x	- x	+ x	+ x

Como sabemos que en el equilibrio $[OH^-] = x \approx 6.31 \cdot 10^{-6} M$, reemplazamos en la fórmula de K_b , de modo que:

$$\begin{aligned} K_b &= \frac{[BH^+][OH^-]}{[B]} \\ &= \frac{(6.31 \cdot 10^{-6})^2}{(0.35 - 6.31 \cdot 10^{-6})} \\ &\approx 1.14 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta correcta es la B.



Ejercicio 20

Sobre las fuerzas intermoleculares y uniones interatómicas ¿Cuál de estas afirmaciones es **FALSA**?

- Todas las sustancias, en principio, pueden existir en tres estados de la materia: sólido, líquido y gas.
- La viscosidad es una medida de la resistencia de un líquido al momento de estar estático.
- Las fuerzas intermoleculares actúan entre las moléculas o entre moléculas e iones.
- El puente de hidrógeno es un fuerte tipo de atracción intermolecular.

Alternativa correcta: B

Resolución: No creo que sea necesario detallar mucho en esta pregunta. En mi caso particular, la pensé por descarte. La alternativa B es incorrecta puesto que la viscosidad se define como la resistencia del líquido al flujo ([fuente](#)). No tiene demasiado sentido que sea al momento de estar estático, pues es una resistencia a "fluir".

Ejercicio 21

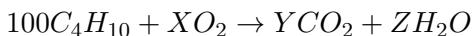
Un reactor de combustión se alimenta con 100 moles de butano (C_4H_{10}) y 5000 moles de aire (21 % en moles de O_2).

¿Cuál es el exceso de aire si la combustión es completa?

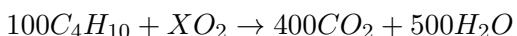
Alternativa correcta: A

Resolución: La ecuación de la combustión en casos generales la encuentras en el anexo ([click](#)).

Por enunciado, tenemos que



Para determinar el exceso del aire, tenemos que encontrar los coeficientes estequiométricos. A partir de la parte de la izquierda, podemos notar inmediatamente que $Y = 400$, pues de ese lado tenemos 400 moles de carbono. Además, tenemos 1000 moles de hidrógeno, por lo que $Z = 500$. Así, nos queda que



A partir de esto último, podemos inferir que la cantidad de moles de oxígeno que se necesitan para esta reacción corresponde a 650. Como tenemos 1050 moles de O_2 (puesto que 1050 corresponde al 21 % de 5000), entonces hay $1050 - 650 = 400$ moles de exceso. En términos porcentuales,

$$\text{Exceso} = \frac{400}{650} \approx 61.6\%$$

De modo que la alternativa correcta es la A.



Ejercicio 22

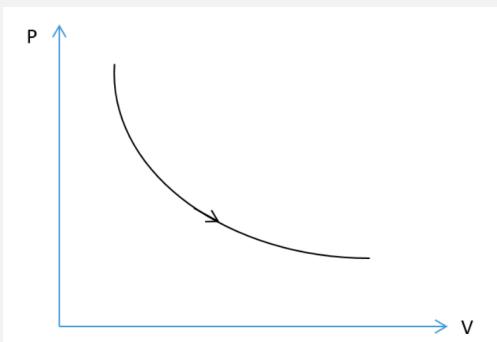
Indique cuál es el efecto esperado en el tamaño del orificio de un anillo de oro, si lo coloca en el freezer de su casa, a medida que baja la temperatura del anillo.

Alternativa correcta: B

Resolución: La intuición la puedes obtener a partir de la fórmula de dilatación lineal ($\alpha\Delta T$). La dilatación depende siempre de la variación de temperatura, por lo que es de esperar que si esa variación es negativa (producto de un descenso en temperatura), su dilatación sea también negativa y, por ende, el tamaño del orificio se vea disminuido. De este modo, seleccionamos la alternativa B.

Ejercicio 23

El gráfico $P - V$ representa un proceso de expansión realizado por un gas ideal en un sistema adiabático.



Indique cuál de las siguientes alternativas describe de manera CORRECTA el trabajo realizado por el gas y el cambio de energía interna realizado por el proceso.

Alternativa correcta: D

Resolución: Agregué toda la información para hacer este ejercicio en el anexo (click).

Por la figura, se puede observar que $W = \int_{V_A}^{V_B} PdV$ es positivo, por lo que el trabajo es realizado **por el gas**. Como el proceso es adiabático, $Q = 0$. Por primera ley de la termodinámica, $Q - W = \Delta U$, por lo que la variación de energía interna es negativa (disminuye), siendo así la alternativa D la correcta.

Nota: en el ramo me enseñaron las fórmulas con signos cambiados. Esto es súper confuso y prefiero guiarme por lo del handbook, pero no debería cambiar demasiado las cosas si tomas un camino adecuado.



Ejercicio 24

Indique qué ocurre con la entropía mientras más probable es la ocurrencia de un estado de equilibrio.

Alternativa correcta: A

Resolución: Por segunda ley de la termodinámica, la entropía aumenta cuando un sistema se reorganiza. De esta manera, al estar en una configuración de mayor probabilidad como lo es el equilibrio, la entropía será máxima ([fuente](#)).

Ejercicio 25

Durante un proceso de adición de calor isotérmico de un ciclo de carnot, $1000kJ$ de calor se agregan al fluido de trabajo desde una fuente que se encuentra a $500C$. Determine el cambio de entropía del fluido de trabajo.

Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 151 (127 del pdf) del handbook.



Resolución: Según enunciado, tenemos una situación en la que $Q = 1000kJ$ y $T = 500^{\circ}C$. De acuerdo con el handbook, en un proceso isotérmico el cambio de entropía está dado por $\Delta s = \frac{Q}{T}$. Tenemos que $T = 773.15K$, por lo que $\Delta s = \frac{1000kJ}{773.15K} \approx 1,29\frac{kJ}{K}$, lo que se acerca más a la alternativa B.

Temperatura alert

¡La temperatura debes convertirla a °K!

Puedes ver conversiones en la tabla de la página 1 (7 en pdf) en el handbook.



Ejercicio 26

Suponga que usted es dueño de un terreno al cual planea dar un uso productivo. Para ello contrató la asesoría de un experto que le recomendó plantar avellanos. El experto le cobró un monto $\$A$ y le entregó un documento con el detalle de su recomendación. Los avellanos supondrían una inversión inicial de $\$B$ y costos variables por $\$C$, lo que, al cabo de 3 años, le permitiría obtener ganancias por $\$D$.

Con dicha información, usted debe evaluar si le conviene o no llevar a cabo el proyecto de plantar avellanos. ¿Cuál de las siguientes alternativas constituyen elementos **RELEVANTES** a la hora de tomar su decisión?

Alternativa correcta: B

Información disponible en la página 232 (208 del pdf) del handbook.



Resolución: Según el handbook, los beneficios de un proyecto deben exceder sus costos estimados. El monto $\$A$ no es un costo del proyecto como tal, por lo que no lo consideramos. El costo total del proyecto es $B + C$ y su beneficio es de D . Para que este proyecto sea conveniente bajo un análisis costo-beneficio, debe darse que $D - (B + C) \geq 0$, por lo que la alternativa correcta es la B.



Ejercicio 27

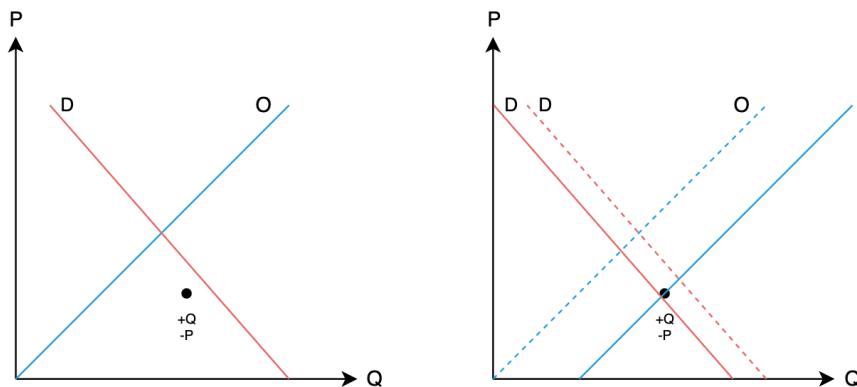
Suponga un mercado que opera en competencia perfecta y que se encuentra en su cantidad y precio de equilibrio.

¿Qué debiera ocurrir para que en un momento del tiempo se observe simultáneamente un alza en la cantidad de equilibrio, junto con una caída en el precio?

Alternativa correcta: A

Resolución: Para esta clase de ejercicios lo mejor es siempre hacer un gráfico (bosquejo) de curvas de oferta y demanda.

Figura 20
Bosquejo ejercicio 27

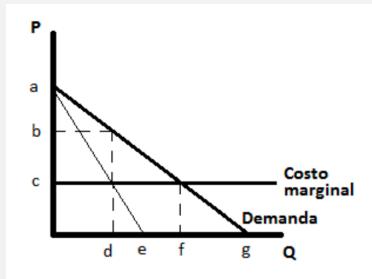


En donde notamos que la alternativa que más se acerca a lo evidenciado en el gráfico es la A. De todos modos, podemos descartar la B y C inmediatamente al notar que tiene que existir un aumento de la oferta.



Ejercicio 28

El siguiente gráfico muestra un mercado que es operado por una empresa monopólica, que tiene un costo marginal constante igual a “c”.



Marque la alternativa **CORRECTA** en relación a dicho gráfico.

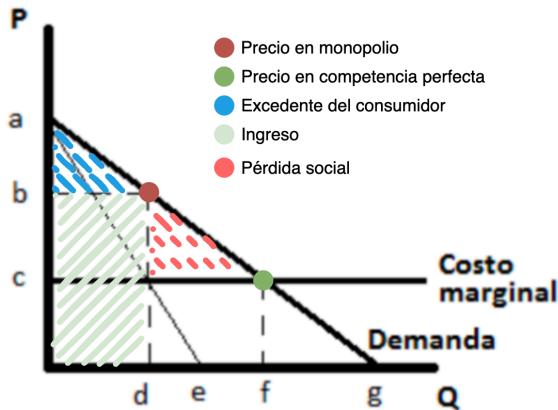
- El excedente de los consumidores es igual al área $\frac{(a-c)f}{2}$.
- El ingreso por ventas del monopolista es igual a $b f$.
- La pérdida social producto del monopolio es igual a $\frac{(b-c)(f-d)}{2}$.
- El ingreso marginal del monopolista es igual a la demanda.

Alternativa correcta: C

Resolución: Agregué más información para comprender esta pregunta el anexo (click aquí).

No dejes que te engañe la curva del costo marginal. En un caso de competencia perfecta, del gráfico se desprende que el precio sería C . Sin embargo, en esta situación de monopolio, el precio es D . A continuación, hice un bosquejo que creo que podría ayudar:

Figura 21
Bosquejo ejercicio 28



Lo que permite concluir que la alternativa correcta es la C. Además, nota que la curva del IMg no es igual a la demanda, pues esta curva es la que va desde el punto a al punto e , lo que nos hace descartar la D.



Ejercicio 29

Usted debe decidir si invertir hoy un monto X en un proyecto de inversión que de aquí a 4 años le entregará un monto Y .

¿Qué rol juega en esta decisión la tasa de descuento?

- Ésta refleja la rentabilidad del proyecto de inversión.
- Ésta refleja el costo alternativo del uso del capital durante el período.
- Ésta refleja el plazo necesario para ver recompensada su inversión.
- Todas las anteriores

Alternativa correcta: B

Resolución: Según [BBVA \(click para acceder\)](#), la tasa de descuento nos permite conocer el **valor actual del dinero** que se percibirá en un futuro. Por ende, la que más sentido tiene es la alternativa B, pues se relaciona al capital en sí mismo.

Ejercicio 30

Se tiene el siguiente pseudocódigo:

```
IF(a >= b)
    IF(b >= c) ENTONCES var = 1
    IF(c >= a) ENTONCES var = 2
FIN IF
ELSE
    IF(b <= c) ENTONCES var = 3
    IF(c <= a) ENTONCES var = 4
FIN ELSE
IF(a >= c)
    IF(c >= b) ENTONCES var = 5
FIN IF
ELSE
    IF(a <= c) ENTONCES var = 6
FIN ELSE
```

Si $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$. ¿Qué valor queda almacenado en la variable var ?

Alternativa correcta: D

Resolución: De la primera línea, notamos que sí se cumple que $a \geq b$, pues $a = b = 0$. Luego, como $b \geq c$ se define $var = 1$, pero en la siguiente línea se cumple que $c \geq a$ también, por lo que finalmente $var = 2$. Luego, en la línea 9 se cumple la condición $a \geq c$, por lo que como $c \geq b$, el valor final de var es 5.



Ejercicio 31

Se tiene un arreglo de arreglos, de tamaño $n \times n$. Se busca hacer un programa que permita invertir, para cada fila de dicho arreglo, el orden de los elementos. Por ejemplo, si el arreglo de arreglos es $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, el programa debería entregar $\{\{2, 1\}, \{4, 3\}\}$. Para esto, se ha escrito un pseudocódigo que se muestra a continuación, con n inicializado y conocido. Considere que la sentencia nuevo *ARREGLO_DE_ARREGLOS*(n, n) inicializa un arreglo de n filas de arreglos de n elementos. Asuma que el arreglo de arreglos de tamaño $n \times n$ original está inicializado y se llama *mapa*.

```
i = 0
invertido = nuevo ARREGLO_DE_ARREGLOS(n,n)
WHILE(i < n)
    j = 0
    WHILE(j < n)
        XXXX
        j = j + 1
    FIN WHILE
    i = i + 1
FIN WHILE
```

La línea 6 está perdida. ¿Qué debe ponerse en la línea 6 para que el algoritmo haga lo que debe hacer?

- $invertido[i, n - j] = mapa[i, j]$
- $mapa[i, j] = invertido[j, i]$
- $invertido[i, n - 1 - j] = mapa[i, j]$
- $invertido[i, n - 1 - j] = mapa[i, n - 1 - j]$

Alternativa correcta: C

Resolución: Creo que es relevante considerar que queremos retornar el arreglo correspondiente a la variable *invertido*, definida en la segunda línea. Por ende, descartamos inmediatamente la alternativa B. Además, tenemos que tomar en cuenta que podemos acceder a los elementos $0, \dots, n - 1$, por lo que se descarta la A, ya que para $j = 0$ se estaría intentando acceder al elemento n . Luego, descartamos la D pues esto dejaría el arreglo exactamente igual a como está, por lo que la alternativa correcta es la C.

Aún así, puedes ir probando con ejemplos e imaginarte el paso a paso en tu mente :3.



Ejercicio 32

Se tiene una planilla de cálculo que se muestra a continuación. Las fórmulas se muestran explícitas en las celdas que comienzan con un signo igual ‘ = ’, el resto de las celdas se encuentran vacías. La función $SI(PRUEBA_LOGICA; VALORVERDADERO; VALORFALSO)$ verifica si se cumple la condición $PRUEBA_LOGICA$, en caso de ser verdadero asigna a la celda $VALOR$ VERDADERO y $VALOR$ FALSO en caso contrario.

	A	B	C
1	3	4	10
2	10	1	9
3	5	9	4
4	=SI(SUMA(A1:A3)>20;"SI";"NO")		

Si se copia las celdas $A4$ en $B4$ y $C4$, ¿Qué valor queda almacenado en las celdas $A4$, $B4$ y $C4$ respectivamente?

Alternativa correcta: D

Resolución: Podemos notar que en la celda $B4$ se copiará la fórmula $= SI(SUMA(B1 : B3) > 20; "SI"; "NO")$ mientras que en $C4$ se copiará $= SI(SUMA(C1 : C3) > 20; "SI"; "NO")$. Luego, nos corresponde sumar las columnas y ver si se cumple la condición, en donde para el caso de la columna A la suma da como resultado 18, para la B resulta en 14 y para la C resulta en 23. Así, se espera que el output sea *NO, NO, SI*, siendo así la alternativa D.



7. Mensaje de cierre

¡SE ACABÓ!

Mensaje del Tom

Después de casi dos meses dedicándome a este proyecto, puedo decir que por fin he terminado, y les entrego un desarrollo que creo que es suficiente para que algunos puedan apoyarse y comprender más sobre esta prueba que se nos viene pronto.

En la sección a continuación, encontrarás las soluciones a las guías desde 2018 – 2 hacia abajo, hechas por la gran Ámbar Zenteno, a quien no conozco pero creo que es importantísimo destacar su gran trabajo.

Por última vez, te recuerdo que puedes donarme un pan con huevo haciendo click acá.
¡Es luca y media! ¡Gracias :3!

Finalmente, quisiera recordar que este documento **NO SERÁ ACTUALIZADO**, salvo casos excepcionales, pues el objetivo es exclusivamente el de compartir mi desarrollo.

7.0.1. Agradecimientos especiales

Agradecimientos

Me sería absolutamente imposible hacer esto sin el apoyo de mis amigos, a quienes les dedico este espacio para darlos a conocer.

- **Marco Gaymer:** Un seco en ramos científicos, realiza clases de dinámica, termodinámica, química y demás. Su email es marco.a.gaymer@uc.cl y lo puedes contactar al [+56 9 7697 8260](tel:+5697698260).
- **Eduardo Oteiza:** Si bien ya no hace clases particulares, le expreso mi agradecimiento por ser quien me ayudó en proba todo el semestre 2023-2. Si algún día vuelve a ofrecer clases particulares por ahí, no duden en contactarlo.
- **Bastián Sanaguas:** Realiza clases particulares de dinámica y lo puedes contactar al [+56 9 5732 8065](tel:+56957328065).

¡Gracias!

7.0.2. Más guías: 2018-2 hacia abajo

Nuevamente **GRACIAS** a Ámbar Zenteno por su increíble trabajo. Puedes encontrar las guías de años anteriores resueltas [en este enlace](#).



8. MAT1610

8.1. Derivación

8.1.1. Regla del producto y cociente

Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

A partir de lo anterior, podemos llegar a la **regla del cociente**:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

8.1.2. Regla de la cadena

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, la función compuesta $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x , y su derivada está dada por:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

O, en notación de Leibniz, dado $y = f(u)$, $u = g(x)$ derivables, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

8.2. Asíntotas

8.2.1. Asíntotas verticales

Una asíntota vertical es $x = k$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

8.2.2. Asíntotas oblicuas

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, donde $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$



9. MAT1620

9.1. Integrales impropias

9.1.1. Integrales impropias de tipo I

Si $\int_a^t f(x) dx$ existe para todo número $t \geq a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

Siempre que el límite exista y sea finito.

Análogamente,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

Si el límite correspondiente converge, entonces se dice que la integral impropia es **convergente**. En el caso contrario, se le denomina **divergente**.

Finalmente, se puede establecer la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

Siempre y cuando las dos últimas integrales sean convergentes.

9.1.2. Integrales impropias de tipo II

Si f es continua sobre $[a, b)$ y tiene una discontinuidad en b , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Siempre que el límite exista y sea finito.

Para el caso en que f es continua sobre $(a, b]$ y es discontinua en a , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Al igual que en el caso anterior, el límite debe converger para decir que la integral es convergente.

Por último, si f tiene una discontinuidad en c y se cumple que $a < c < b$, se tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Siempre y cuando las dos últimas integrales sean convergentes.

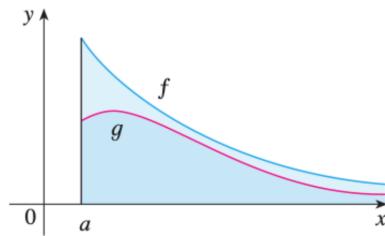
9.1.3. Teorema de comparación para integrales impropias

Supongamos que f y g son funciones continuas con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$.

- Si $\int_a^\infty f(x) dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x) dx$ converge.
- Análogamente, si $\int_a^\infty g(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(x) dx$ es divergente.

Es importante notar la diferencia del **orden** que hay entre las funciones. **NO ES POSIBLE** decir que si $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge entonces $\int_a^\infty g(x) dx$ diverge. La siguiente imagen es de bastante utilidad para entender el por qué:

Figura 22
Comparación gráfica



9.1.4. Algunos trucos para integrales impropias

Uno de los trucos más importantes y que podrían ahorrarte tiempo es el de considerar lo siguiente:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

Es **convergente** si $p > 1$ y **divergente** si $p \leq 1$.

Además, presta especial atención a lo que está dentro de las integrales. Por ejemplo, la integral $\int_0^3 \frac{dx}{x-1} dx$ tiene una asíntota en $x = 1$, por lo que debes tratarlo como una integral impropia de tipo II y separarla, tal que:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} dx + \int_1^3 \frac{dx}{x-1} dx$$



9.2. Masa, centro de masa y momento

9.2.1. Masa con integrales dobles

Es posible obtener la masa de una **lámina** de densidad $\rho(x, y)$ con la integral sobre la superficie que sigue:

$$\iint_D \rho(x, y) dA$$

Esto es para efectos de cálculo II y no incluye la integración en un volumen, aunque la idea es la misma.

9.2.2. Momento respecto a un eje

Recordemos que el **momento de una partícula** se define respecto a un eje como el producto de su masa y su distancia dirigida desde el eje. Entonces,

El momento de una lámina respecto al eje x es

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dA$$

Análogamente, el momento respecto al eje y está dado por

$$M_y = \iint_D x \rho(x, y) dA$$

Nota que si es con respecto a un eje, en la integral se multiplica por el otro eje (si es respecto al eje x , se incluye el término y en la integral, etc.). A partir de esto, surge la definición de centro de masa.

9.2.3. Centro de masa

Las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del centro de masa de una lámina que ocupa la región D y que tiene función de densidad $\rho(x, y)$ son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA$$

En cálculo III definimos el centro de masa en un volumen de manera análoga, por lo que omitiré incluirlo en caso de hacer uso de esto más adelante.

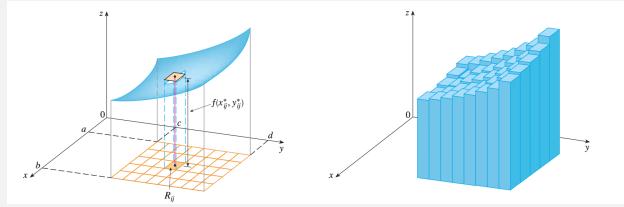


9.3. Volumen de una región con integrales dobles

Si $f(x, y) \geq 0$, entonces el volumen V del sólido que está arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

Figura 23
Vista gráfica



9.4. Series

9.4.1. Series geométricas

La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

Es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r| \geq 1$, la serie geométrica es divergente.

9.4.2. La prueba de la divergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.



9.4.3. La prueba de la integral

Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente **sí y sólo si** la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x) dx$ es convergente. En otras palabras:

- Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

La serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

9.4.4. Pruebas por comparación

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos.

- Si $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$ para toda n , entonces $\sum a_n$ también es convergente.
- Si $\sum b_n$ es divergente y $a_n \geq b_n$ para toda n , entonces $\sum a_n$ también es divergente.

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

Donde c es un número finito y $c > 0$, entonces ambas series convergen o ambas series divergen.

9.4.5. Prueba de la serie alternante

Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

Con $b_n > 0$ cumple con:

- $b_{n+1} \leq b_n$ para toda n
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Entonces la serie es convergente.

9.4.6. Prueba de la razón

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, o bien, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ diverge.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L = 1$, entonces la prueba no es concluyente.



9.4.7. Prueba de la raíz

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ diverge.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba no es concluyente.



10. MAT1630

10.1. Volumen de una región con integrales triples

Si $f(x, y, z) = 1$, entonces el volumen V dado el dominio E corresponde a

$$V(E) = \iiint_E dV$$

10.2. Derivadas direccionales

Si f es una función derivable de x y de y , entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{u} = (a, b)$:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$



11. MAT1640

11.1. Categorización de EDOs

11.1.1. Orden de una EDO

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en ella.

Por ejemplo, $xy'' + y = 0$ es de orden 2, mientras que $\frac{dP}{dt} = kP$ es de primer orden.

11.2. Método de valores propios para sistemas homogéneos

Sea A una matriz de $n \times n$ con coeficientes constantes. Para determinar la solución general al sistema homogéneo $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ se procede de la siguiente manera:

- Se resuelve la ecuación característica $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$ para determinar los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matriz A .
- Luego, se obtienen los vectores propios linealmente independientes $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ asociados a cada valor propio $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- De ser posible, esto permite obtener n soluciones linealmente independientes al sistema homogéneo

$$\vec{x}_1(t) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{x}_n(t) = \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$$

En cuyo caso la solución general del sistema homogéneo está dada por

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t)$$



12. MAT1203

12.1. Propiedades de la multiplicación de matrices

Sea A una matriz de $m \times n$, y sean B y C matrices con tamaños para los que las sumas y los productos indicados están definidos.

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, para cualquier escalar r
- $I_m A = A = A I_n$

12.2. Propiedades de la transpuesta de matrices

Sean A y B matrices cuyos tamaños son adecuados para las siguientes sumas y productos:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(rA)^T = rA^T$, para cualquier escalar r
- $(AB)^T = B^T A^T$

12.3. Propiedades de matrices invertibles

- Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible y

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$, entonces también lo es AB , y la inversa de AB es el producto de las inversas de A y B en el orden opuesto. Es decir,

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

- Si A es una matriz invertible, también lo es A^T , y la inversa de A^T es la transpuesta de A^{-1} . Es decir,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$



12.4. Teorema de la matriz invertible

Voy a incluir su versión "incompleta". Esta cosa es el mucho texto hecho teorema. Sólo ten presente que cada punto significa lo mismo y que puedes deducir cualquiera a partir de otro.

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes, es decir, para una A dada, los enunciados son **todos ciertos o todos falsos**.

- A es una matriz invertible
- A es equivalente por filas a la matriz identidad I_n
- A tiene n posiciones pivote
- La ecuación $Ax = 0$ tiene sólamente la solución trivial
- Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente
- La transformación lineal $x \mapsto Ax$ es uno a uno
- La ecuación $Ax = b$ tiene al menos una solución para toda b en \mathbb{R}^n
- Las columnas de A generan \mathbb{R}^n
- La transformación lineal $x \mapsto Ax$ mapea \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^n
- Existe una matriz C de $n \times n$ tal que $CA = I$
- Existe una matriz D de $n \times n$ tal que $AD = I$
- A^T es una matriz invertible

12.5. Matrices simétricas

Una matriz simétrica es aquella tal que $A = A^T$, es decir, es igual a su transpuesta.



13. QIM100E

13.1. La materia

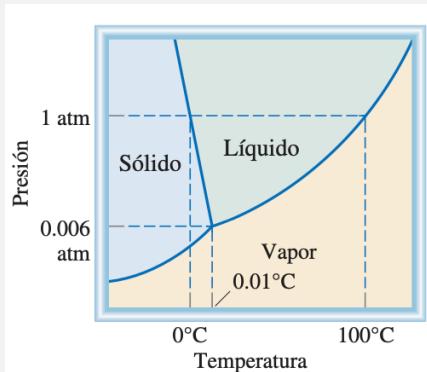
13.1.1. Diagramas de fase

Un diagrama de fases resume las condiciones en las cuales una sustancia existe como sólido, líquido o gas.

13.1.2. El agua

A continuación, se presenta el diagrama de fases del agua. La gráfica se divide en tres regiones y cada una representa una fase pura. La línea que separa dos de las regiones indica las condiciones en las que estas dos fases pueden estar en equilibrio. El punto en el que se unen las tres curvas se denomina punto triple, y corresponde a la única condición en la que las tres fases pueden estar en equilibrio entre sí.

Figura 24
Diagrama de fase del agua



13.1.3. Propiedades de los gases, líquidos y sólidos

Estado	Volumen/forma	Densidad	Compresibilidad	Movimiento de moléculas
Gas	Adopta el volumen y la forma de su contenedor	Baja	Muy compresible	Movimiento muy libre
Líquido	Tiene un volumen definido pero adopta la forma de su contenedor	Alta	Sólo ligeramente compresible	Se deslizan entre sí libremente
Sólido	Tiene un volumen y forma definidos	Alta	Virtualmente incompresible	Vibran en torno a posiciones fijas



13.2. Equilibrio químico

13.2.1. Principio de Le Chatelier

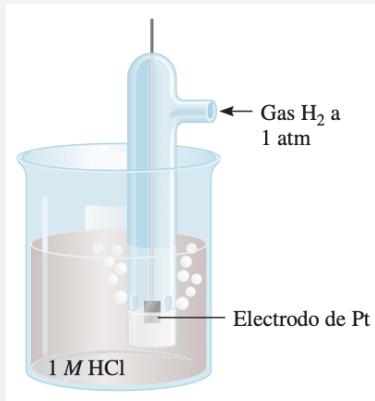
El Principio de Le Chatelier establece que, si un sistema en equilibrio se somete a un cambio de condiciones, éste se desplazará hacia una nueva posición a fin de contrarrestar el efecto que lo perturbó y recuperar el estado de equilibrio.



13.2.2. Potenciales estándar de reducción

Es imposible medir el potencial de un sólo electrodo, pero si arbitrariamente asignamos el valor de cero a un electrodo particular, éste se puede usar para determinar los potenciales relativos de otros electrodos. El electrodo de hidrógeno a continuación sirve para este fin:

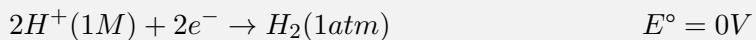
Figura 25
Electrodo de hidrógeno



En una disolución de ácido clorhídrico se burbujea gas hidrógeno a 25°C. El electrodo de platino tiene dos funciones: primero, proporciona la superficie en que pueden disociarse las moléculas de hidrógeno:



Segundo, sirve como conductor eléctrico para el circuito externo. En condiciones de estado estándar (cuando la presión de H_2 es de 1 atm y la concentración de la disolución de HCl es de 1 M), el potencial para la reducción de H^+ a 25°C se define exactamente como cero:



Donde E° es el potencial estándar de reducción, o el voltaje en un electrodo asociado con una semirreacción de reducción cuando todos los solutos son de 1 M y todos los gases están a 1 atm. Así, el potencial estándar de reducción del electrodo de hidrógeno es cero. El electrodo de hidrógeno se conoce como electrodo estándar de hidrógeno (EEH).



13.2.3. Constante de equilibrio

Dada la reacción $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$, la constante de equilibrio K_c se define como:

$$K = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

Para una reacción en **fase gaseosa**, $aA(g) + bB(g) \rightleftharpoons cC(g) + dD(g)$ se define K_p como

$$K_p = \frac{(P_C)^c(P_D)^d}{(P_A)^a(P_B)^b}$$

A partir de lo anterior, se puede establecer una relación entre K_c y K_p , donde $K_p = K_c(RT)^{\Delta n}$, con Δn correspondiendo a la diferencia de los moles del producto y reactivo en fase gaseosa.

13.2.4. El cociente de reacción Q

El cociente de reacción Q es una medida de la cantidad relativa de productos y reactivos presente en una reacción en un momento determinado.

Dada la reacción $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$, se tiene que

$$Q = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

La principal diferencia con K_c es que esta constante no es necesariamente en el equilibrio.

13.2.5. Predicción del equilibrio

Podemos relacionar Q y K de la manera que sigue:

- **Si $Q > K$:** Tenemos más producto presente de lo que tendríamos en el equilibrio. Por lo tanto, la reacción tratará de usar algo del exceso de producto y favorecer la reacción inversa para alcanzar el equilibrio.
- **Si $Q < K$:** Ocurre el caso contrario. La relación de productos a reactivos es menor que para el sistema en equilibrio, por lo que la reacción favorecerá la reacción hacia adelante y utilizará algo del reactivo en exceso para generar más producto.
- **Si $Q = K$:** ¡Estamos en el equilibrio químico!



13.2.6. Reacciones de precipitación

Las reacciones de precipitación son un tipo común de reacciones en disolución acuosa que se caracterizan por la formación de un producto insoluble o precipitado.

Un **precipitado** es un sólido insoluble que se separa de la disolución.

Para predecir la formación de un precipitado hay que tener en cuenta la **solubilidad del soluto**, que se define como la cantidad máxima de soluto que se disolverá en una cantidad dada de disolvente a una temperatura específica.

13.2.7. Solubilidad y solubilidad molar

La **solubilidad** ($\frac{g}{L}$) se define como los gramos de soluto disueltos en $1L$ de disolución saturada.

La **solubilidad molar** ($\frac{mol}{L}$) cuantifica los moles de soluto disueltos en $1L$ de disolución saturada.

La solubilidad de una sustancia en otra está determinada por el equilibrio de fuerzas intermoleculares entre el disolvente y el soluto, y la variación de entropía que acompaña a la solvatación. Factores como la temperatura y la presión influyen también en este equilibrio, cambiando así la solubilidad. En el caso de compuestos iónicos, la solubilidad depende mucho del carácter covalente del enlace, disminuyendo aquella con el aumento de este.

13.2.8. Reglas de solubilidad

Sales generalmente solubles:

- Todas las sales amónicas, sódicas y potásicas.
- Todos los nitratos.
- Todos los acetatos, excepto el de plata.
- Todos los sulfatos, excepto los de bario y plomo(II). Los de plata, mercurio (I) y calcio son poco solubles.
- Cloruros, bromuros y yoduros son solubles excepto los de plata, plomo(II) y mercurio(II).

Sales generalmente **insolubles** (excepto las que son solubles teniendo en cuenta el punto anterior):

- Carbonatos.
- Cromatos, excepto (además de los mencionados) el cromato de magnesio.
- Fosfatos.
- Silicatos.
- Sulfuros, excepto además los de magnesio, calcio y bario.
- Hidróxidos, excepto además los de litio, rubidio y cesio. Los de Ba, Ca y Sr son poco solubles.
- Las sales de plata son insolubles, excepto además el perclorato.



13.2.9. Efecto del ión común y del pH en la solubilidad

Cuando añadimos un ión común, estamos modificando la concentración de uno de los iones de la expresión de equilibrio, con lo que el proceso, de acuerdo al principio de Le Chatelier, se desplazará hacia la izquierda. Es decir, precipitará una fracción mayor del compuesto insoluble. Por lo tanto, el efecto del ión común hace que disminuya la solubilidad de la sal en disolución.

A continuación, se detallan los efectos del pH en disoluciones.

La solubilidad de muchas sustancias **depende del pH de la disolución**.

En el caso de los hidróxidos alcalinotérreos que son parcialmente solubles, como el $Mg(OH)_2$, al añadir iones hidróxido (aumento de pH) el equilibrio se desplaza a la izquierda, disminuyendo la solubilidad (en este caso equivalente al efecto del ión común). Si añadimos protones (disminución de pH), disminuye la concentración de hidróxido y el equilibrio se desplaza hacia la derecha, aumentando la solubilidad.

El pH también influye en la solubilidad de las sales que contienen un anión que puede sufrir hidrólisis, como el BaF_2 , ya que el F^- puede reaccionar con los protones del agua en un medio ácido para dar HF . De esta forma, se retiran aniones fluoruro de la disolución, por lo que el equilibrio de solubilidad tiene que desplazarse a la derecha y el BaF_2 se disuelve más. La solubilidad será aún mayor cuanto más ácido sea el medio, cosa que no se ve directamente planteando solo el equilibrio de la disociación de la sal.



13.2.10. Bases débiles y pOH

La reacción para una base débil suele ser de la forma



En donde B corresponde a la base débil y BH^+ a su ácido conjugado. A partir de lo anterior se define el pOH como

$$pOH = -\log([OH^-])$$

De lo que se obtiene importantísima relación:

$$pOH + pH = 14$$

Esto nos permite calcular constantes como K_b , la que se define como

$$K_b = \frac{[BH^+][OH^-]}{[B]}$$

Notar que este es un caso particular y la reacción no es necesariamente igual a la expuesta en esta parte.

13.2.11. Reacción de combustión

En términos generales, la reacción de combustión corresponde a



Y corresponde a una reacción exotérmica. Normalmente el combustible es de la forma C_xH_y .

13.3. Compuestos iónicos

13.3.1. Propiedades de los sólidos iónicos

Sus propiedades están determinadas por la fortaleza de la atracción electrostática entre sus iones y la formación de redes cristalinas.



Dichas propiedades son:

- Son sólidos a temperatura ambiente con altos puntos de fusión y ebullición.
- Son duros pero frágiles, ya que un pequeño desplazamiento de una capa del cristal enfrenta a iones de igual carga.
- Los compuestos iónicos, generalmente se disuelven bien en agua o disolventes polares. Las moléculas de agua rodean a los iones provocando que el cristal se desmorone.
- No conducen la electricidad en estado sólido ya que los iones se encuentran fijos en sus posiciones en la red. Cuando se encuentran fundidos o disueltos, tienen mayor libertad de movimiento por lo que pueden conducir electricidad.

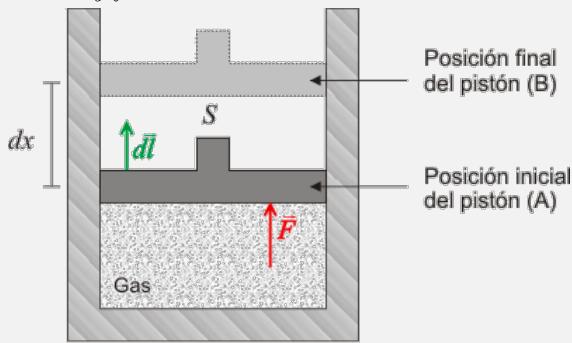


14. FIS1523

14.1. Trabajo y diagrama P-V

Dado que la presión se define como $P = \frac{F}{A}$, donde F es la fuerza y A es el área, se puede manipular dicha expresión para obtener el trabajo realizado por un gas.

Figura 26
Pistón y fuerza



A partir de lo anterior, se puede llegar a que el trabajo para pasar del estado A al estado B en el proceso descrito en la figura es:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P dV$$

El que es **positivo** cuando lo realiza el gas (**expansión**) y **negativo** cuando el exterior lo realiza contra el gas (**compresión**). En un diagrama P-V, el trabajo es simplemente el área encerrada bajo la curva.

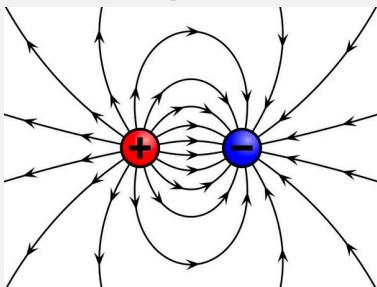


15. IEE1533

15.1. Líneas de campo

Las líneas de campo corresponden a líneas imaginarias que ayudan a visualizar cómo va variando la dirección del campo eléctrico al pasar de un punto a otro del espacio. Indican las trayectorias que seguiría la unidad de carga positiva si se la abandona libremente, por lo que las líneas de campo salen de las cargas positivas y llegan a las cargas negativas.

Figura 27
Líneas de campo



Algunas de sus propiedades son:

- El vector campo eléctrico es tangente a las líneas de campo en cada punto.
- Las líneas de campo eléctrico son abiertas; salen siempre de las cargas positivas o del infinito y terminan en el infinito o en las cargas negativas.
- El número de líneas que salen de una carga positiva o entran en una carga negativa es proporcional a dicha carga.
- La densidad de líneas de campo en un punto es proporcional al valor del campo eléctrico en dicho punto.
- A grandes distancias de un sistema de cargas, las líneas están igualmente espaciadas y son radiales, comportándose el sistema como una carga puntual.

15.1.1. Líneas equipotenciales

Las líneas equipotenciales son como las líneas de contorno de un mapa que tuviera trazada las líneas de igual altitud. En este caso la "altitud" es el potencial eléctrico o voltaje. **Las líneas equipotenciales son siempre perpendiculares al campo eléctrico.** En tres dimensiones esas líneas forman superficies equipotenciales. El movimiento a lo largo de una superficie equipotencial, no realiza trabajo, porque ese movimiento es siempre perpendicular al campo eléctrico.



15.2. Condensadores

15.2.1. Condensador de placas planas y paralelas

El condensador de placas paralelas tiene dos placas conductoras idénticas, cada una con una superficie A , separadas por una distancia d .

Cuando se aplica un voltaje V al condensador, este almacena una carga Q , como se muestra. Podemos ver cómo su capacitancia puede depender de A y d considerando las características de la fuerza de Coulomb. Además, sabemos que la fuerza entre las cargas aumenta con los valores de carga y disminuye con la distancia entre ellas. Es de esperar que cuanto más grandes sean las placas, más carga podrán almacenar. Por lo tanto, C debería ser mayor para un valor mayor de A . Del mismo modo, cuanto más cerca estén las placas, mayor será la atracción de las cargas opuestas en ellas. Por lo tanto, C debería ser mayor para una d más pequeña.

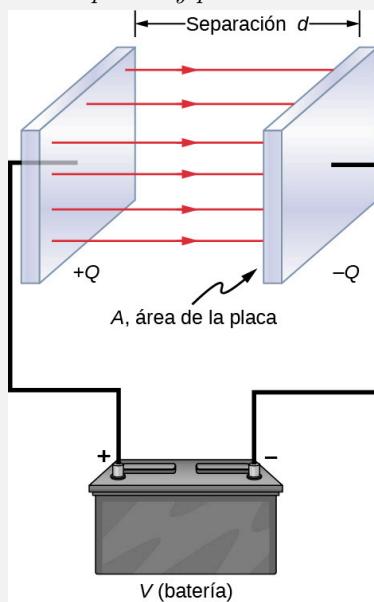
Recuerda que C corresponde a la **capacitancia** y se define como

$$C = \frac{Q}{V}$$

Además, en placas planas y paralelas, esto es igual a

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

Figura 28
Placas planas y paralelas



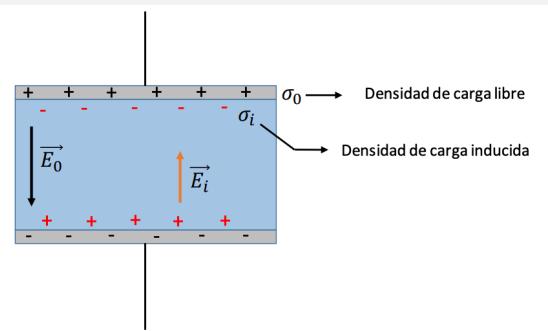


15.2.2. Dieléctricos

El separar las placas metálicas con un dieléctrico tiene varias funciones: da soporte mecánico al sistema, es decir, mantiene las placas separadas, además, el dieléctrico puede soportar diferencias de potencial mayores al aire, sin que se llegue a romper, o sea, sin que se ionice el material y haya conducción entre las placas. Por lo tanto, la capacitancia aumenta cuando se introduce un dieléctrico entre las placas.

Las constantes dieléctricas de todos los dieléctricos son mayores que la unidad. Adicionalmente, cuando se introduce un dieléctrico entre las placas del capacitor el dieléctrico se polariza, es decir, hay una redistribución de las cargas positivas y negativas dentro del material, como se observa en la figura:

Figura 29
Dieléctrico en placas



El campo eléctrico inducido en el dieléctrico se opone al campo debido a las cargas sobre las placas. Al mantener la carga constante, **el campo eléctrico resultante y la diferencia de potencial, son de menor magnitud respecto al campo y el potencial sin el dieléctrico.**

15.3. Corriente alterna

15.3.1. Ángulo de fase en un circuito RLC

El ángulo de fase nos indica cómo se desfasan la corriente y la tensión en un circuito RLC. Si el ángulo de fase es positivo, significa que la corriente se adelanta con respecto a la tensión. Si el ángulo de fase es negativo, significa que la corriente se retrasa con respecto a la tensión. Un ángulo de fase de 0 grados indica que la corriente y la tensión están en fase. Su fórmula corresponde a:

$$\tan^{-1}\left(\frac{X_l - X_c}{R}\right)$$

Con X_l la reactancia inductiva, X_c la reactancia capacitativa y R la resistencia.



15.3.2. Reactancia inductiva y capacitiva

La reactancia inductiva X_l corresponde a

$$X_l = 2\pi fL$$

En donde f es la frecuencia de la señal (Hz), L es la inductancia (medida en H) y C es la capacitancia (medida en F).

Por otro lado, la reactancia capacitativa X_c corresponde a

$$X_c = \frac{1}{2\pi fC}$$



16. ICS1513

16.1. Costo marginal

Matemáticamente, el costo marginal corresponde a la derivada del costo respecto a la cantidad, es decir:

$$CM = \frac{dC}{dQ}$$

16.2. Costo de oportunidad

El costo de oportunidad de una inversión corresponde al valor descartado debido a la realización de la misma o también al coste de la no realización de la inversión.

16.3. Elasticidad

Es una medida de cuán sensibles son los compradores y vendedores ante cambios en las condiciones del mercado.

16.3.1. Elasticidad precio-demanda

La elasticidad precio-demanda mide cómo la cantidad demandada de un bien responde a cambios en el precio de ese bien.

Se calcula como el cambio porcentual de la cantidad demandada dividida por el cambio porcentual en el precio.

$$\begin{aligned}\epsilon_{precio,demanda} &= -\frac{\text{cambio porcentual cantidad demandada}}{\text{cambio porcentual precio}} \\ &= -\frac{\partial q_D}{\partial P} \frac{P}{q_D}\end{aligned}$$

Como la cantidad demandada de un bien está negativamente relacionada con su precio, el cambio porcentual en la cantidad demandada siempre tendrá el signo opuesto al cambio porcentual en precio.



La elasticidad precio-demanda será elástica si responde mucho ante cambios en su precio y será **inelástica** si responde levemente ante cambios en su precio.

La elasticidad precio-demanda mide cuánto menos están dispuestos a comprar del bien los compradores cuando el precio aumenta.

16.3.2. Determinación de la elasticidad

Las demandas se clasifican de acuerdo a su elasticidad.

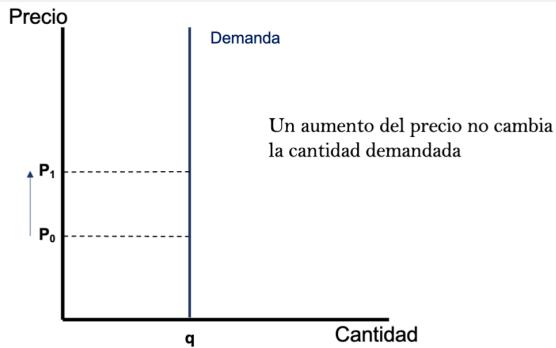
- Cuando su elasticidad es **mayor que uno**, se considera elástica y la cantidad demandada se mueve proporcionalmente más que su precio.
- Cuando su elasticidad es **menor que uno**, la demanda se considera inelástica y la cantidad demandada se mueve proporcionalmente menos que su precio.
- Cuando la elasticidad es **igual a uno**, la demanda tiene elasticidad unitaria y el cambio porcentual en cantidad es igual al cambio porcentual en el precio.



16.3.3. Elasticidad y curvas de demanda

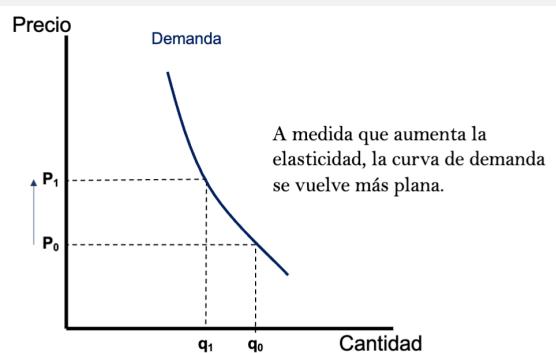
$\epsilon_{precio,demanda} = 0$ corresponde a una demanda perfectamente inelástica.

Figura 30
Demanda perfectamente inelástica



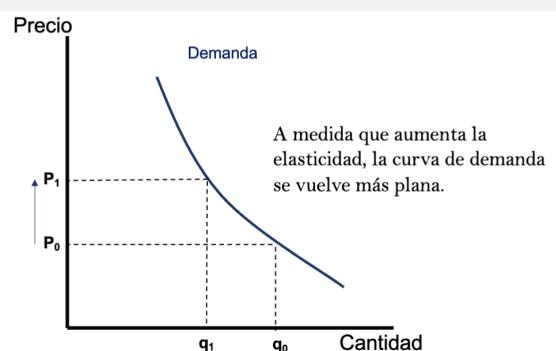
$\epsilon_{precio,demanda} < 1$ corresponde a una demanda inelástica.

Figura 31
Demanda inelástica



$\epsilon_{precio,demanda} = 1$ corresponde a una demanda de elasticidad unitaria.

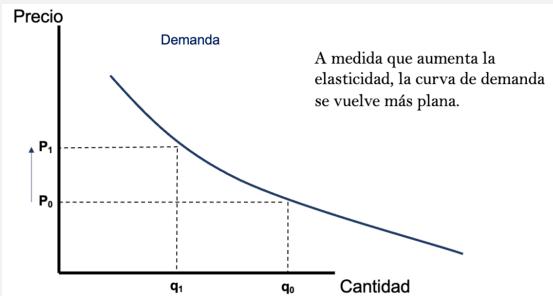
Figura 32
Demanda de elasticidad unitaria





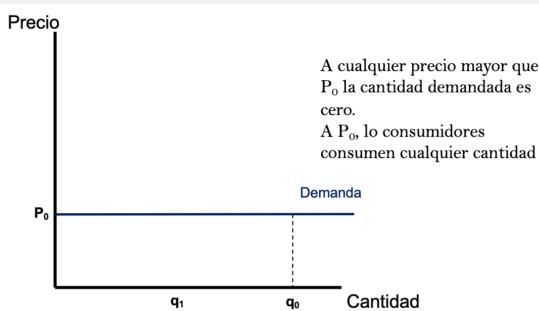
$\epsilon_{precio,demanda} > 1$ corresponde a una demanda elástica.

Figura 33
Demanda elástica



$\epsilon_{precio,demanda} = \infty$ corresponde a una demanda perfectamente elástica.

Figura 34
Demanda perfectamente elástica



16.3.4. Elasticidad precio-oferta

La elasticidad precio-oferta mide cómo la cantidad ofrecida de un bien responde a cambios en el precio de ese bien.

Se calcula como el cambio porcentual de la cantidad ofrecida dividida por el cambio porcentual en el precio.

$$\begin{aligned}\epsilon_{precio,oferta} &= -\frac{\text{cambio porcentual cantidad ofrecida}}{\text{cambio porcentual precio}} \\ &= -\frac{\partial q_S}{\partial P} \frac{P}{q_S}\end{aligned}$$

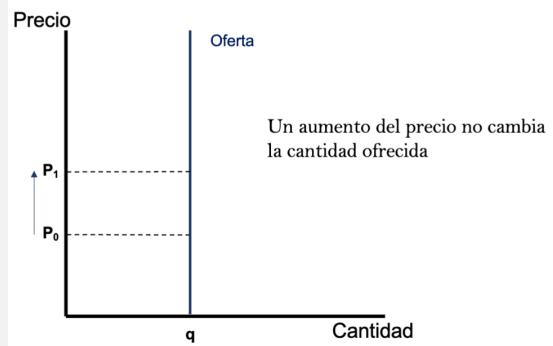
Como la cantidad ofrecida de un bien está positivamente relacionada con su precio, el cambio porcentual en la cantidad producida siempre tendrá el mismo signo al cambio porcentual en precio.



16.3.5. Elasticidad y curvas de oferta

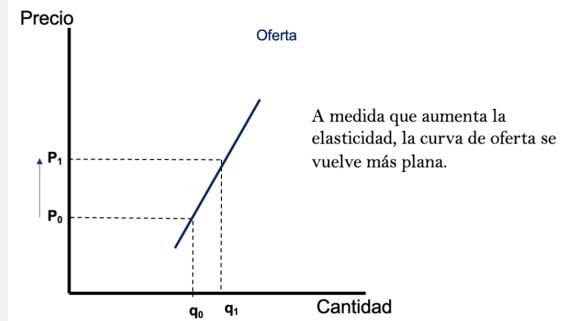
$\epsilon_{precio,oferta} = 0$ corresponde a una oferta perfectamente inelástica.

Figura 35
Oferta perfectamente inelástica



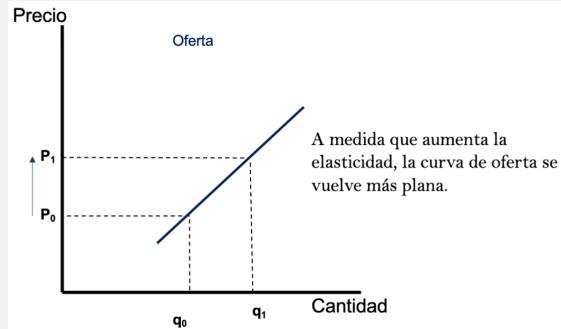
$\epsilon_{precio,oferta} < 1$ corresponde a una oferta inelástica.

Figura 36
Oferta inelástica



$\epsilon_{precio,oferta} = 1$ corresponde a una oferta de elasticidad unitaria.

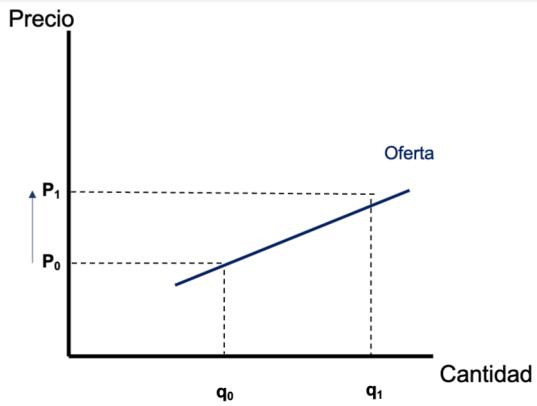
Figura 37
Oferta de elasticidad unitaria





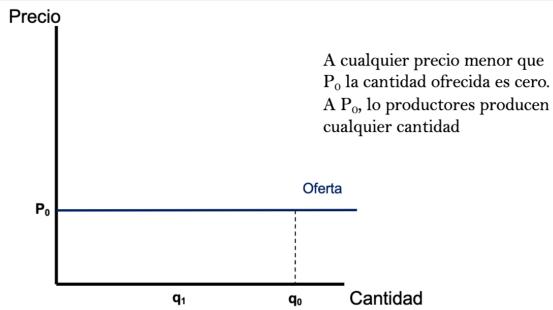
$\epsilon_{precio,oferta} > 1$ corresponde a una oferta elástica.

Figura 38
Oferta elástica



$\epsilon_{precio,oferta} = \infty$ corresponde a una oferta perfectamente elástica.

Figura 39
Oferta perfectamente elástica





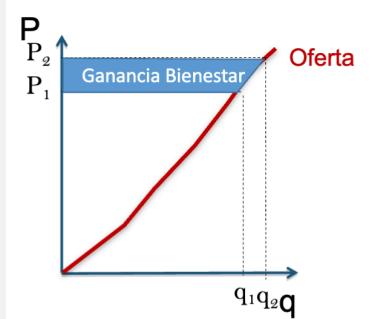
16.4. Economía de bienestar y teoría del productor/consumidor

16.4.1. Excedentes del consumidor y productor

Se le denomina excedente del productor a la diferencia entre el ingreso total y el costo total.

Si el precio del bien aumenta, aumenta el beneficio y esa área que muestra la diferencia es la ganancia en el bienestar.

Figura 40
Ganancia en el bienestar

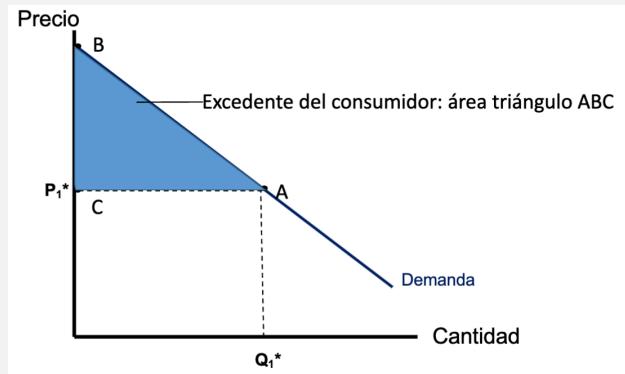


Si el precio es P_1 , el ingreso total será de $P_1 \cdot Q_1$. El costo total es el área bajo la curva de costo marginal (o de oferta).



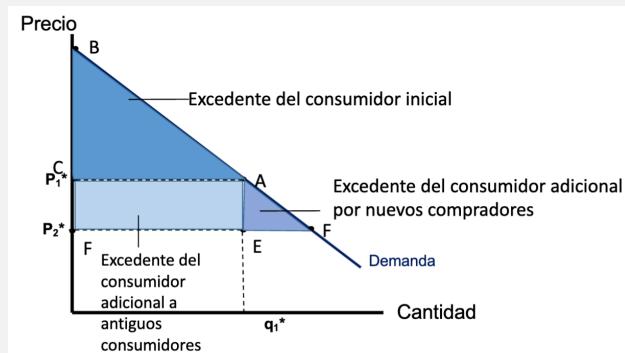
El excedente del consumidor es la disposición al pago de un comprador menos lo que paga por el bien. A continuación, se muestra una forma gráfica de calcular el excedente:

Figura 41
Excedente del consumidor



Finalmente, si el precio disminuye de P_1 a P_2 , la cantidad demandada aumenta de Q_1 a Q_2 y el excedente del consumidor aumenta en dos áreas:

Figura 42
Aumento en excedente



16.4.2. Costo y tipos de costo

Función de costo medio (CMe): corresponde al costo total por unidad de producción.

$$CMe = \frac{C}{q}$$

Por otra parte, la **función de costo marginal (CMg)** consiste en el costo de una unidad más de producción, dada por

$$CMg = \frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{\partial C}{\partial Q}$$



En el **largo plazo**, todos los insumos son variables.

En el **corto plazo**, algunos insumos (no todos) son fijos (usualmente se fija el capital). En sí, el corto plazo representa un periodo corto en el que tenemos una flexibilidad limitada en nuestras acciones.

En el corto plazo, el costo total se hará de la suma entre un costo fijo y un costo variable, en donde el **costo variable medio (CVM_e)** es igual a ese costo variable dividido por la producción.

$$C_{CP} = \text{Costo fijo} + \text{Costo variable}$$

$$CM_{eCP} = \frac{\text{Costo fijo} + \text{Costo variable}}{Q}$$

$$CVMe_{CP} = \frac{\text{Costo variable}}{Q}$$

16.4.3. Bienestar social

El Bienestar Social o Bienestar Económico de un mercado corresponde a la suma del excedente del Consumidor y del excedente del productor.

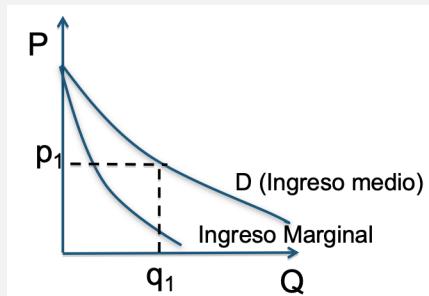
16.5. Monopolios

16.5.1. Curva de ingreso marginal

Toda curva de demanda tiene una **curva de IMg** asociada con ella.

Si la empresa debe vender toda su producción a un precio (suposición común), podemos pensar en la curva de demanda como una curva de ingreso medio. En sí, el **ingreso marginal** representa el ingreso obtenido por la venta de una unidad más de producción.

Figura 43
Curva de IMg



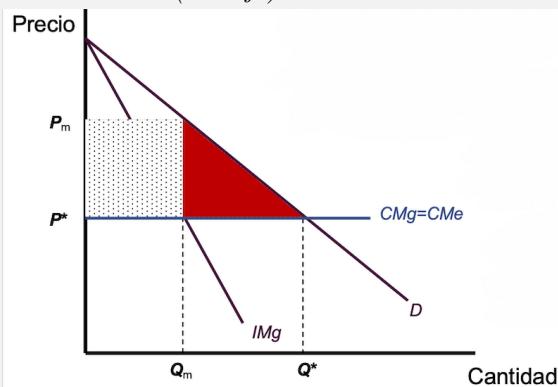


16.5.2. Costo social del monopolio

En un monopolio, el precio de mercado ya no transmite información precisa sobre los costos de producción, por lo que los recursos serán mal asignados. A continuación, se presenta una comparación entre el monopolio y un mercado competitivo (industria de costo constante).

Si este mercado fuera competitivo, la producción sería Q^* y el precio sería P^* . Bajo un monopolio, la producción será Q_m y el precio subirá a P_m , en donde $P_m > P^*$ y $Q_m < Q^*$. De este modo, bajará el excedente del consumidor y subirá el excedente del productor, implicando una **pérdida social por el monopolio**.

Figura 44
Pérdida social (en rojo)



16.5.3. Regulación del monopolio

Existen varias formas de regular los monopolios, entre las que se incluyen:

- **Fijar el precio al costo marginal:** La empresa podría tener pérdidas.
- **Fijar el precio al costo medio:** La empresa no tendrá ni ganancia ni pérdida, aunque sí existe una pérdida social.
- **Empresa como propiedad del Estado:** En Chile existen ejemplos como Metro, EFE y las empresas sanitarias.



17. Excel

17.1. Referencias en celdas

17.1.1. Uso de \$

Usamos \$ para bloquear celdas o columnas cuando hacemos referencias a las mismas.

Figura 45
Bloqueo en referencias



Sin hacer uso de estas, podemos referenciar las celdas de la forma que sigue:

Figura 46
Referencia en una misma columna

	A	B	
1	1	10	
2	2		
3	3		

	A	B	
1	1	10	
2	2	20	
3	3	30	

Podemos hacer uso del bloqueo de las referencias para calcular la conversión de una moneda. En el siguiente ejemplo, se fija C1, pues este contiene la conversión.

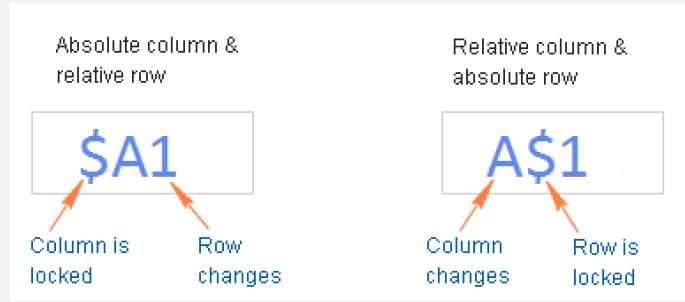
Figura 47
Fijación de celda

	A	B	C
1	Exchange rate		0.93
3	Item	Price, USD	Price, EUR
4	Apples	\$5.00	€4.65
5	Avocados	\$4.50	€4.19
6	Bananas	\$3.90	€3.63
7	Grapes	\$9.90	€9.21
8	Lemons	\$4.70	€4.37
9	Pears	\$2.40	€2.23
10	Watermelon	\$2.50	€2.33



Otras opciones disponibles para bloquear celdas son las siguientes:

Figura 48
Otras formas de bloquear



Finalmente, el siguiente ejemplo suele ser de utilidad:

Figura 49
Ejemplo de Excel

C5			=B5*C\$2		
	A	B	C	D	E
1			USD - EUR	USD - GBP	USD - RUB
2			0.93	0.66	64.74
3					
4	Item	Price, USD	Price, EUR	Price, GBP	Price, RUB
5	Apples	\$5.00	€4.65		
6	Avocados	\$4.50			
7	Bananas	\$3.90			
8	Grapes	\$9.90			
9	Lemons	\$4.70			
10	Pears	\$2.40			
11	Watermelor	\$2.50			

Figura 50
Referencia con bloqueo

D7			=B7*D\$2		
	A	B	C	D	E
1			USD - EUR	USD - GBP	USD - RUB
2			0.93	0.66	64.74
3					
4	Item	Price, USD	Price, EUR	Price, GBP	Price, RUB
5	Apples	\$5.00	€4.65	£3.30	323.70 ₧
6	Avocados	\$4.50	€4.19	£2.97	291.33 ₧
7	Bananas	\$3.90	€3.63	£2.57	252.49 ₧
8	Grapes	\$9.90	€9.21	£6.53	640.93 ₧
9	Lemons	\$4.70	€4.37	£3.10	304.28 ₧
10	Pears	\$2.40	€2.23	£1.58	155.38 ₧
11	Watermelor	\$2.50	€2.33	£1.65	161.85 ₧



18. Referencias bibliográficas

A continuación, adjunto algunas de las referencias que utilicé.

- Ablebits. *Why use dollar sign in Excel formulas - absolute and relative cell references.* [Enlace](#).
- DocPlayer. *Equilibrio en fase acuosa.* [Enlace](#).
- Educa2. *El enlace químico.* [Enlace](#).
- Galilea, P. (2022). *Introducción a la Economía (ICS1513), clases 7, 9, 22, 25.* [Ver clases](#).
- Hyperphysics. *Líneas equipotenciales.* [Enlace](#).
- Khan Academy. *El coeficiente de reacción Q.* [Enlace](#).
- Khan Academy. *Cálculo de la constante de equilibrio K_p usando presiones parciales.* [Enlace](#).
- Lay, D. (2001). *Álgebra lineal y sus aplicaciones (4a. ed.).*
- Manthano. *Ecuaciones Diferenciales.* [Enlace](#).
- Openstax. *Condensadores y capacitancia.* [Enlace](#).
- Polaridad. *Ángulo de fase en circuito RLC.* [Enlace](#).
- PUCP. *Principio de Le Chatelier.* [Enlace](#).
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas (7a. ed.).*
- Tecnológico de Costa Rica. *Condensadores y capacitancia.* [Enlace](#).
- Universidad Politécnica de Madrid. *Trabajo de un sistema termodinámico.* [Enlace](#).
- Universidad Politécnica de Madrid. *Campo eléctrico.* [Enlace](#).
- Wikipedia. *Coste de oportunidad.* [Enlace](#).