PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2020

MAT1203

Capítulo 1: Vectores en $\mathbb{R}^n$

1. Sea $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine si existen a, b, c tal que $\overrightarrow{0} = av_1 + bv_2 + cv_3$.

2. Demuestre que $d(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ \sqrt{2} & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

3. Demuestre que $\theta(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ \pi/2 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

4. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Caracterice los siguientes conjuntos

   a) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ tal que $\alpha > 1\}$.

   b) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ tal que $\alpha > 0\}$.

   c) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ tal que $0 < \alpha < 1\}$.

   d) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}\}$.

   e) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

   f) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

   g) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\alpha > 0, \beta > 0\}$.

h) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1\}$.

i) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1\}$.

j) $\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tal que $\alpha + \beta = 1\}$.

5. Explique la diferencia entre $\{v_1, v_2\}$ y $\mathrm{Gen}\{v_1, v_2\}$.

6. Sean $v_1 = u_1 + 3u_2$ y $v_2 = -u_1 + u_2$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que existen escalares a, b, c, d tal que $u_1 = av_1 + bv_2$ y $u_2 = cv_1 + dv_2$.

7. Sean $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$ tal que $u_3 = 2u_1 - 5u_2 + u_4$. Demuestre que

   a) $u_1 \in \mathrm{Gen}\{u_2, u_3, u_4\}$.

   b) $\mathrm{Gen}\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \mathrm{Gen}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathrm{Gen}\{u_1, u_2, u_4\} = \mathrm{Gen}\{u_1, u_3, u_4\} = \mathrm{Gen}\{u_2, u_3, u_4\}$

8. Sea $S = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto L.I. Demuestre que el conjunto $\{u_1 - 2u_2, u_2 + 2u_3\}$ es un conjunto L.I.

9. Sea $S = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto L.D. Demuestre que al menos uno de los vectores de S es combinación lineal de los otros dos.

10. Determine el vector u tal que la ecuación de los siguientes hiperplanos sea $x \cdot u = 0$. Escríbalos como conjuntos generados.

    a) $x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = 0$ en $\mathbb{R}^4$.

    b) $x_1 + x_3 - x_4 = 0$ en $\mathbb{R}^4$.

    c) $2x_1 + 2x_2 - 2x_5 = 0$ en $\mathbb{R}^5$.

    d) $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ en $\mathbb{R}^5$.

11. V o F

    a) La suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ es conmutativa.

    b) El producto punto es asociativo.

    c) Si $u \centerdot u = 0$, entonces $u = \vec{0}$.

d) Si $u \cdot u = 1$, entonces u es un vector canónico.

e) $u \cdot u \;\; u + \|u\| \;\; u$ es un número real.

f) Para todo u y v en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\|u + v\| < \|u\| + \|v\|$.

g) Todo conjunto generado en $\mathbb{R}^n$ es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalar.

h) Sean v_1, v_2, v_3 vectores en $\mathbb{R}^8$, entonces
$\text{Gen}\{v_1, v_2 + v_3, v_1 - v_3\} = \text{Gen}\{v_1 + v_3, v_2 - v_1, v_3\}$.

i) Si $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ pertenece al hiperplano de $\mathbb{R}^4$ de ecuación $x_1 - x_2 + x_4 = 8$, entonces debe ocurrir que $x_3 = 0$.

j) Todo hiperplano que pasa por el origen es un conjunto generado.

k) Todo conjunto generado es un hiperplano.

l) Si $\{u, v\}$ es L.D., entonces v es un múltiplo de u.

m) Si $\{u, v\}$ es L.D, con u, v no nulos, entonces v es un múltiplo de u.

n) Existe un único conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ que no es L.I. y no es L.D.

ñ) Sea $u \in \mathbb{R}^n$. $u \neq \vec{0}$ si y sólo si $\{u\}$ es L.I.

o) Si $u \in \text{Gen}\{v_1, v_2\}$, entonces $\text{Gen}\{u, v_1\} \subseteq \text{Gen}\{u, v_2\}$.

1. Sea $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$ una matriz de 3×4. Determine $A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ suponiendo que $v_1 + v_3 = v_2$ y $v_1 + v_4 = v_3$

2. Encuentre la forma escalonada reducida de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

3. Determine la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2. \end{aligned}$$

4. Determine condiciones sobre a para que el siguiente sistema no tenga solución

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + ax_3 &= 1. \end{aligned}$$

5. Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^7$ y $M = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$. Si $M(2e_1 - e_3 + e_4) = \vec{0}$, ¿cuál es el mínimo de filas nulas que tiene la F.E.R. de M? Justifique.

6. Determine la solución general de los siguientes sistemas:

   a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 5x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

7. Resuelva los siguientes sistemas:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ -x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

8. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es una constante.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ x_1 - ax_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

$a)$ Determine valores de a para los cuales el sistema es inconsistente.

$b)$ Determine valores de a para los cuales el sistema es consistente, y encuentre la solución.

9. Determine condiciones sobre los números primos p y q tal que el sistema

$$\begin{aligned} px_1 + qx_3 &= q + 1/q \\ px_2 + qx_4 &= q + 1/q \\ qx_1 + px_3 &= p + 1/p \\ qx_2 + px_4 &= p + 1/p \end{aligned}$$

- No tenga soluciones.
- Tenga infinitas soluciones, y encuentre el conjunto solución.
- Tenga una única solución, y encuentre la solución.

10. Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudie la consistencia del siguiente sistema. En los casos en que exista solución, encuéntrelas.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= a \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a & 3 \\ 0 & -1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto si $a = 3$, el sitema no tiene solución.

Si $a \neq 3$, entonces

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & a(5-a) \end{bmatrix}$$

Luego, si $a \neq 0$ y $a \neq 5$ el sistema no tiene solución.

Si $a = 0$ la solución es única: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -2$.

Si $a = 5$ la solución es única: $x_1 = 9$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 3$.

11. Demuestre que si un sistema de ecuaciones tiene dos soluciones distintas, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones.

Solución:

Sea u y v vectores distintos tales que solucionan el sistema $Ax = b$.

Entonces basta tomar cualquier vector de la forma: $x = u + \alpha(u - v)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y se tiene que:

$$Ax = A(u + \alpha(u - v)) = Au + \alpha(Au - Av) = b + \alpha(b - b) = b.$$

12. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ y $Ax = b$ un sistema de ecuaciones tal que la forma escalonada reducida de $[A \mid b]$ es la matriz,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array}\right]$$

Determine si existen valores de p y de q para que:

a) el sistema no tenga solución,

b) el sistema tenga solución única y en tal caso encuéntrela,

c) el sistema tenga infinitas soluciones y en tal caso encuéntrelas,

d) b pertenece al conjunto generado por las columnas de A,

e) columnas de A sean L.I.,

f) filas de A sean L.I.

13. V o F

a) Reemplazar una fila por el doble de ella más el doble de otra es una operación elemental.

b) Reemplazar los elementos de una fila por los inversos aditivos de sus elementos es una operación elemental.

c) Reemplazar los elementos de una fila por los inversos multiplicativos de sus elementos es una operación elemental.

d) Existen matrices de 2×2 tal que la suma de los elementos de cada fila y cada columna es 1.

e) Si u y v son soluciones del sistema $Ax = b$, entonces $u + 7v$ es solución de $Ax = 8b$.

f) Existen vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$u + v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ u + 2v + w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } v + 2w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

g) Existe un sistema con más variables que columnas, pero que no tiene solución.

h) Existe una única parábola que pasa por los puntos $(1,3)$, $(2,5)$ y $(3,9)$.

i) Si A es una matriz de $n \times m$ con $n < m$, entonces el sistema $Ax = \vec{0}$ no puede tener infinitas soluciones.

j) Todo sistema homogéneo tiene infinitas soluciones.

k) Los únicos sistemas que tienen solución única son aquellos que tienen igual número de variables y ecuaciones.

l) Dado un conjunto solución S, existen infinitos sistemas $Ax = b$ tal que la solución del sistema es S.

m) Si una matriz A es de 3×4, entonces el sistema $Ax = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.

1. Determine $A = (a_{ij})$ de tamaño

   a) (5×6) tal que $a_{ij} = min\{i, j\}$
   b) (3×4) tal que $a_{ij} = max\{i, j\}$
   c) (4×4) tal que $a_{ij} = 2i - j$
   d) (4×3) tal que $a_{ij} = 2i + j$
   e) (2×3) tal que $a_{ij} = i^2 - j^2$
   f) (3×3) tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 & \text{si } i = j \\ j & \text{si } i \neq j \end{cases}$

2. Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$, $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ de 2×3 y $B = [v_2\ 2v_2]$ de 2×2 tal que
   $A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = B.$

   Calcule $A \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño 3×3 donde

   $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + 1 = j \\ 0 & \text{si } i + 1 \neq j \end{cases}$$

   Pruebe que $A^3 = 0$ y $A^2 \neq 0$.

4. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño 5×5 donde

   $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + 1 = j \\ 0 & \text{si } i + 1 \neq j \end{cases}$$

   Pruebe que $A^5 = I$ y $A^4 \neq 0$.

5. Muestre con un ejemplo que el producto de matrices no siempre es conmutativo

6. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) AB

b) $5A + 3D$

c) $B^t + D$

d) C^2

e) $2A - D$

f) BCD

7. Calcule A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ si

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Encuentre todas las matrices (2×2) que conmutan con

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Calcule Nul, Im, espacio de columnas y espacio fila de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

10. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

    a) Calcule $A(A^tA)^{-1}A^t$.

    b) Calcule $B(B^tB)^{-1}B^t$.

    c) Muestre que $A(A^tA)^{-1}A^t + B(B^tB)^{-1}B^t = I$.

11. Sea A una matriz de $n \times m$ con columnas L.I. Demuestre que si $P = A(A^tA)^{-1}A^t$, entonces $P^2 = P$ y $P = P^t$.

12. Sea A una matriz de 3×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

    Calcule A^{-1}.

13. Sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 - B^2 - 5B + 5I = 0$. Escriba B^{-1} en función de B.

14. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Demuestre que A es no singular si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

15. Demuestre que si una matriz cuadrada tiene una fila de ceros entonces no es invertible.

16. Demuestre que si una matriz cuadrada tiene una columna de ceros entonces no es invertible.

17. Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 0$, entonces $I - A$ es invertible.

18. Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^3 = 0$, entonces $I - A$ es invertible.

19. Demuestre que el producto de matrices triangulares superiores (inferiores) es una matriz triangular superior (inferior).

20. Demuestre que el producto de matrices triangulares inferiores (superiores) con $1's$ en su diagonal es triangular inferior (superior) con $1's$ en su diagonal.

21. Si A es una matriz antisimétrica, demuestre que A^2 es simétrica.

22. Demuestre que para toda $A \in M_n(\mathbb{R})$, la matriz $\dfrac{(A + A^t)}{2}$ es simétrica y la matriz $\dfrac{(A - A^t)}{2}$ es antisimétrica.

23. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se dice que
    - A es involutiva si $A^2 = I_n$,
    - A es idempotente si $A^2 = A$ y
    - A es ortogonal si $AA^t = I_n$.

    Demuestre o de un contraejemplo:

    a) Si A es involutiva y ortogonal, entonces A es simétrica.

    b) Si A es simétrica e involutiva, entonces A es ortogonal.

    c) Si A es simétrica y ortogonal, entonces A es involutiva.

    d) Si A es idempotente, entonces A es involutiva.

24. Caracterice a las transpuesta e inversa de una matriz elemental del tipo I (II, III).

25. Escriba las siguientes matrices como producto de matrices elementales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

26. Sea A una matriz 1-1 de $n \times m$. Demuestre que si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es L.I., entonces $\{Av_1, \ldots, Av_r\}$ es L.I.

27. Sea $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ una matriz de $n \times 3$. Demuestre que:

    Si la forma escalonada reducida de A^tA es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

    entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es L.D.

28. Sea $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6]$ una matriz de 4×6, tal que su forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

    a) Determine un conjunto generador de vectores L.I. para $C(A)$.
    b) Determine el $\mathrm{Nul}(A)$.
    c) Determine si $\{v_1, v_2, v_4\}$ es L.I. o L.D.

29. Sea A de 3×4 tal que existen $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ Av_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ Av_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

    a) Demuestre que el sistema $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^3$
    b) Determine un vector $x \in \mathbb{R}^4$ tal que $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

30. Determine la descomposición palu de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

31. Use PA=LU para resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

32. Use palu para determinar la primera fila de A^{-1}. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

33. Sea A de $n \times m$ tal que admite la factorización $A = LU$. Demuestre que si U tiene inversa por la izquierda, entonces A tiene inversa por la izquierda.

34. Suponga que U se obtiene de hacer en A el intercambio de la fila 1 con la 2 y luego restar la fila 2 a la fila 3. Use $PA = LU$ para resolver el sistema $Ax = b$ donde:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

35. Use la descomposición LDL^T para clasificar las siguientes formas cuadráticas y exprésela como una suma ponderada de cuadrados.

   - $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 2y^2 + 15z^2$.
   - $x^2 + 4xy + 2xz + 4yz + y^2 + z^2$.

36. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que AA^t es positiva definida.

37. Encuentre la factorización de Cholesky de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

38. Sea A de 2×3 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   a) Demuestre que el sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ es consistente para todo $a \in \mathbb{R}$.

   Solución:

   Primero se observa que:

$$A \left(y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = y_1 A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se resuelve:

$$y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2-a}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{3} \end{bmatrix}$$

Entonces basta tomar $y_1 = \dfrac{2-a}{3}$, $y_2 = \dfrac{a+1}{3}$.

y se tiene que:

$$A\left(\frac{2-a}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a+1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$b)$ Demuestre que A es sobre.

Solución:

Usando la primera parte de la pregunta se tiene que:

existe u tal que $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y existe v tal que $Av = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

por lo tanto:

$Ax = e_j$ tiene solución para $j = 1, 2$

entonces A es sobre.

39. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$a)$ Calcule el $\text{Nul}(A)$ y la $\text{Im}(A)$.

Solución:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces se tiene que $\text{Nul}(A) = \text{Gen}\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$

y se tiene que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Gen}\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$

b) Decida (justificadamente) si A es inyectiva y/o sobre.

Solución:

Dado que el rango de A es 3 que es el mismo que el número de filas de la matriz, se tiene que A es sobre.

Dado que el rango de A es 3 que es el mayor que el número de columnas de la matriz, se tiene que A no es inyectiva.

40. Sea A de 3×4 tal que la F.E.R. de $[A \mid I]$ es

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Sin calcular A ni A^t:

a) Determine el $\mathrm{Nul}(A)$.

b) Determine el $\mathrm{Nul}(A^t)$.

c) Determine si A tiene inversas por la derecha y/o izquierda. Si existen encuéntrelas.

d) Determine la solución general de $A^t x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

41. *a*) Sea A una matriz $1-1$ de $n \times 3$. Demuestre que la imagen por A del hiperplano $x_2 = 0$ es un conjunto generado por dos vectores L.I.

b) ¿Existe una matriz de 2×3 tal que la suma de cada fila y cada columna sea 1? (Construya un sistema de ecuaciones y luego decida si es consistente).

42. Sea A una matriz de 3×2. Demuestre que si $A^T A$ es invertible, entonces A es inyectiva.

Solución:

Dado que $A^t A$ es invertible, se tiene que existe B de 2×2 tal que $A^t AB = I$.

Asociando, se tiene que A^T es sobre, es decir las filas de A^T son LI.

Por lo tanto las columnas de A son LI.

43. Sean A y B matrices de 2×3 y E una matriz elemental tal que $AE = B$. Demuestre que $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$.

Solución:

Sea $b \in \text{Im}(B)$, entonces $Bx = b$ tiene solución, reemplazando:

$AEx = b$ tiene solución, entonces $Ay = b$ tiene solución, luego $b \in \text{Im}(A)$.

Dado que E es invertible, se tiene que $A = BE^{-1}$.

Sea $b \in \text{Im}(A)$, entonces $Ax = b$ tiene solución, reemplazando:

$BE^{-1}x = b$ tiene solución, entonces $By = b$ tiene solución, luego $b \in \text{Im}(B)$.

44. Escriba la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Solución:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces existen tres matrices elementales tales que $E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$, entonces $A = {E_1}^{-1} \cdot {E_2}^{-1} \cdot {E_3}^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

45. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

a) Calcule la descomposición $A = LU$ de la matriz A.

Solución:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Use la descomposición anterior para determinar la suma de la primera y cuarta columna de la inversa de A.

Solución:

Primera forma:

Se resuelve $Ax = e_1$ es decir $LUx = e_1$, con el cambio $Ux = y$.
Al resolver $Ly = e_1$ queda $y = (1, -1, 1, 0)^t$.

Al resolver $Ux = y$ queda $x = (1/3, 1/3, -1/3, 0)^t$.

Se resuelve $Ax = e_4$, es decir $LUx = e_4$, con el cambio $Ux = y$.
Al resolver $Ly = e_4$ queda $y = (0, 0, 0, 1)^t$.

Al resolver $Ux = y$ queda $x = (-16/5, 8/5, -2/5, -1/5)^t$.

Sumando ambos vectores queda que la suma de la primera y cuarta columna de la inversa de A es $(-43/15, 29/15, -11/15, -1/5)^t$.

Segunda forma:

Se resuelve $Ax = e_1 + e_4$, es decir $LUx = e_1 + e_4$, con el cambio $Ux = y$.

Al resolver $Ly = e_1 + e_4$ queda $y = (1, -1, 1, 1)^t$.

Al resolver $Ux = y$ queda $x = (-43/15, 29/15, -11/15, -1/5)^t$.

46. Sea A simétrica positiva definida. Demuestre que $A+I$ es simétrica positiva definida.

Solución:

$A + I$ es simétrica pues $(A + I)^t = A^t + I^t = A + I$.

$A + I$ es positiva definida pues:
dado $x \neq \overrightarrow{0}$, $x^t(A + I)x = x^tAx + x^tx$

El primer sumando es positivo pues A es positiva definida.

El segundo sumando es positivo pues es la norma al cuadrado del vector x.

Por lo tanto $x^t(A + I)x = x^tAx + x^tx > 0$

47. Clasifique la forma cuadrática

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy - 4xz - 2yz$$

Mediante un cambio de variables adecuado, exprésela como una suma ponderada de cuadrados.

Solución:

La matriz asociada a la forma cuadrática q es $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
Entonces

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & -4/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 9/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & -4/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -4/9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que $2, 9/2, 1/9$ son positivos, entonces q es positiva definida.

Entonces

$$q(x,y,z) = 2(x - y/2 - z)^2 + 9/2(y - 4/9z)^2 + 1/9(z)^2.$$

48. Parte uno de V o F

a) Si los sistemas $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ son consistentes, entonces el sistema $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^2$.

b) Si A es de 2×5 y $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución, entonces $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ tiene solución.

c) Si una matriz A es de 3×3, entonces el sistema $Ax = \vec{0}$ tiene solución única.

d) Si una matriz A es de 3×3, entonces el sistema $Ax = b$ no puede tener infinitas soluciones.

e) La suma de matrices es cerrada.

f) El producto de matrices no es conmutativo.

g) El Nul de una matriz de 3×4 no puede ser trivial.

h) Si A es de 3×4, entonces $A^t A$ es de 3×3.

i) Toda matriz de 3×4 es sobre.

j) Si A y B son matrices de $n \times n$, entonces $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

k) Sea A de $n \times n$, entonces el rango de A es n.

l) Si A es de 3×4 y existe B tal que $AB = 5I$, entonces las filas de A son L.I.

m) Sea A de $n \times m$ tal que $n < m$, entonces las columnas de A son L.D.

n) Sean A y B matrices de $n \times n$. $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Nul}(A)$ si y sólo si AB es la matriz nula.

ñ) Sea A de $n \times m$ tal que sus filas forman un conjunto L.D., entonces $n \geq m$.

o) Si A es inyectiva y $Ax = b$ tiene solución, entonces esta solución es única.

p) Si A es de 2×3 tal que $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tienen solución, entonces las filas de A son L.I.

q) Las únicas matrices que pueden ser sobreyectivas e inyectivas al mismo tiempo son las cuadradas.

r) Existen matrices que no son inyectivas ni sobreyectivas.

s) Si A y B son matrices cuadradas tal que $AB = A$, entonces B es la matriz identidad.

t) Si A y B son matrices simétricas de 3×3, entonces AB es simétrica.

49. Parte dos de V o F

    a) Toda matriz simétrica es invertible.

    b) Toda matriz antisimétrica es invertible.

    c) Si A es cuadrada, y existe B tal que $AB = I$, entonces $BA = I$.

    d) Si A es cuadrada, y existe B tal que $AB = I$, entonces $A^5B^5 = I$.

    e) Si A es cuadrada, y existe B tal que $AB = I$, entonces $(A - B)^2 = A^2 + B^2$.

    f) Si A es cuadrada e invertible, entonces $\mathrm{Nul}(A)$ es trivial.

    g) Si A es cuadrada e invertible, entonces existe una matriz B tal que $ABA^{-1} \neq B$.

    h) Si A es invertible, entonces no pueden existir ceros en su diagonal.

    i) Si A es la inversa de BAB, entonces B es invertible.

    j) Si ABC es invertible, entonces A, B y C son invertibles.

50. Parte tres de V o F

    a) Si A es una matriz que admite la descomposición $A = LU$, entonces $a_{1,1} \neq 0$.

    b) Si $A = A^t$ es de 3×3, entonces existe $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $q_A(u) > 0$.

    c) Toda forma cuadrática positiva definida es semidefinida positiva.

    d) Existen formas cuadráticas que no pueden clasificarse.

    e) Si A es invertible, entonces A^2 es positiva definida.

    f) Si $A = A^t$ e invertible, entonces A^3 es positiva definida.

    g) Sea $A = A^t$. A es positiva definida si y sólo si $-A$ es negativa definida.

    h) Si A es simétrica positiva definida, entonces existe R invertible, tal que $A = R^tR$.

    i) Toda matriz positiva definida es invertible.

    j) El cuadrado de toda matriz invertible, es una matriz positiva definida.

    k) Sean A y B matrices tal que $ABB^tA^t = I$. Entonces BB^t es producto de matrices elementales.

    l) Si A es producto de matrices elementales, entonces A^tA es positiva definida.

    m) Si A es semidefinida positiva e I es la matriz identidad, entonces $A + I$ es positiva definida.

    n) Si A y B son matrices definida positivas, entonces $A + B$ es positiva definida.

ñ) Si A es semidefinida positiva y B es positiva definida, entonces $A+B$ es positiva definida.

o) Sea A una matriz simétrica e invertible. A es positiva definida si y sólo si A^2 es positiva definida.

p) Sea A simétrica. A es positiva definida si y sólo si para todo $a > 0$, $A + aI$ es positiva definida.

1. Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 5$, encuentre $|2A|$, $|4A|$, $|2^k A|$, $|A^5|$, $|-A|$, $|A^{-1}|$, $||A|A^{-1}|$, $|A^{-3}|$, $||A|A|$

2. Sean $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$, encuentre el $|A|$ si
   $A = [v_1 - v_3 + v_4 \quad -v_2 - v_3 \quad v_3 - v_1 \quad v_1 + v_2 + 2v_4] \in M_4(\mathbb{R})$

3. Sea A de 5×5 tal que $\text{Det}(A - I) = 0$.
   Demuestre que existe $v \in \mathbb{R}^5$ tal que $Av = v$.

4. Sea A de 4×4 tal que existen $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linealmente independientes tales que
   $$\begin{aligned} Av_1 &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 \\ Av_2 &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ Av_3 &= v_1 + 2v_2 \\ Av_4 &= v_1 \end{aligned}$$
   Demuestre que $\text{Det}(A)$ es un número natural múltiplo de 4.

5. Dé un ejemplo de matrices tal que $|A + B| \neq |A| + |B|$.

6. Sea $A = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_{n-1}\ v_n]$ y $B = [v_n\ v_{n-1}\ \ldots\ v_2\ v_1]^t$. Encuentre una relación entre $|A|$ y $|B|$

7. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $Ae_2 = 8e_2$. Demuestre que $|A - 8I| = 0$

8. Usando determinantes, determine el valor de k tal que las siguientes matrices sean invertibles
   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & k \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 2 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} k & 1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k & 0 \end{bmatrix}$

9. Resuelva la ecuación $\text{Det}(A) = 0$, con
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & x & 3 \end{bmatrix}$$

10. Calcule la inversa de las siguientes matrices mediante la matriz adjunta

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

11. Sea $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Demuestre que

    a) $A_\alpha^2 = A_{2\alpha}$.

    b) $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha\beta}$.

12. Demuestre que Det $\begin{bmatrix} x+1 & 0 & x+2 & 0 \\ 0 & x+3 & 0 & x+4 \\ x+5 & 0 & x+6 & 0 \\ 0 & x+7 & 0 & x+8 \end{bmatrix}$ no depende de x.

13. Sea p un número primo. Determine condiciones sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Det}(A) = 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & p+1 & 0 & p+2 \\ 0 & p+3 & 0 & p+4 & 0 \\ p+5 & 0 & p+6 & 0 & p+7 \\ 0 & p+8 & 0 & p+9 & 0 \\ p+10 & 0 & p+11 & 0 & 5n+12 \end{bmatrix}$$

14. Sea $a \in \mathbb{R}$, calcule el determinante de la siguiente matriz de $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}$$

Solución:

Si $a = 1$, quedan todas las filas iguales y entonces el determinante es 0.

Haciendo las operaciones: $F_i \to F_i - F_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, n-1$ queda:

$$= \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_i \to (1/(a-1))F_i$, para $i = 1, \ldots, n-1$ queda:

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_n \to F_n - F_1$, ..., $F_n \to F_n - F_{n-1}$ queda:

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+n-1 \end{vmatrix}.$$

Queda una matriz diagonal, entonces el determinante pedido es:

$(a-1)^{n-1}(a+n-1)$.

15. Sean v_1, v_2, v_3 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ y A matriz de 3×3, tal que: $Av_1 = v_2$, $Av_2 = v_3$ y $Av_3 = v_1$. Demuestre que $\text{Adj}(A) = A^{-1}$.

Solución:

Matricialmente se tiene:

$A \cdot [v_1\ v_2\ v_3] = [v_2\ v_3\ v_1]$.

Tomando determinantes queda $|A \cdot [v_1\ v_2\ v_3]| = |A| \cdot |[v_1\ v_2\ v_3]| = |[v_2\ v_3\ v_1]|$.

Dado que $|[v_2\ v_3\ v_1]| = -|[v_3\ v_2\ v_1]| = |[v_1\ v_2\ v_3]|$,

se tiene que $|A| \cdot |[v_1\ v_2\ v_3]| = |[v_1\ v_2\ v_3]|$.

Pero v_1, v_2, v_3 es LI, entonces la matriz $[v_1\ v_2\ v_3]$ es invertible, por lo tanto su determinantes es distinto de 0.

Luego $|A| = 1$.

Dado que $A \cdot \text{Adj}(A) = 1 \cdot I$, entonces $\text{Adj}(A) = A^{-1}$.

16. Use el método de Cramer para encontrar la intersección de los siguientes hiperplanos: $2x_1 + x_2 = 4$, $x_2 + 2x_3 = 0$ y $x_1 + 2x_2 = 5$

Solución:

El sistema queda: $Ax = b$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$|A| = -6$.

Entonces:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} / -6 = -6/-6 = 1$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} / -6 = -12/-6 = 2$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} / -6 = 6/-6 = -1$$

17. V o F

a) Si A es invertible, entonces $\text{Adj}(A)$ es invertible.

b) Si una matriz A de 7×7 y antisimétrica, entonces no es invertible.

c) Si existe un vector no nulo u tal que $Au = cu$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $\text{Det}(A - cI) = 0$.

d) Existen matrices tal que $|A + B| = |A| + |B|$.

e) Existe una matriz tal que $2|A| = |2A|$.

f) Existe una matriz tal que para todo $c \in \mathbb{R}$, $c|A| = |cA|$.

g) Si A es de $n \times n$ y $|A| = 5$, entonces $|A^t| = 5$.

h) Si A es de $n \times n$ y $|A| = 5$, entonces $|Adj(A)| = 1/5$.

i) Si A es de $n \times n$, entonces $|A + A| = n^2|A|$.

j) Si E es una matriz elemental, entonces $|E| \neq 0$.

k) Si E es una matriz elemental, entonces $|E| = |E^t|$.

l) Si A es una matriz simétrica, entonces $\mathrm{Adj}(A)$ es simétrica.

1. Determine si los siguientes conjuntos forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

   a) $V = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, tal que $f(\frac{a+b}{2}) = 0\}$

   b) $V = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ tal que $p(0) = 0\}$

   c) $V = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R})$ tal que $p'(0) = 0\}$

   d) $V = \mathbb{C}$

   e) $V = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

   f) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a+b+c+d = 1 \right\}$

   g) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$

   h) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a^2+b^2+c^2 = 1 \right\}$

2. Sea $V = \mathbb{R}^+$, se define

   $$x \oplus y = xy \quad , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$
   $$\alpha \odot x = x^\alpha \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

   Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones.

3. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$

   a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad x+y-2z = 0 \ , \ 2x+y+z = 0 \right\}$

   b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad xyz \geq 0 \right\}$

$c)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad x = y^2 \ , \ x + y + z \geq 0 \right\}$

$d)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

4. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial indicado

$a)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ de $\mathbb{R}^2$

$b)$ $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 3\beta \\ 4\beta - \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$ de $\mathbb{R}^4$

$c)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^n$

$d)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ \sum_{i=1}^n (2x_i) = 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^n$

$e)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ x_1 \neq x_2 \right\}$ de $\mathbb{R}^n$

$f)$ $\{v \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ ||v|| = 1\}$ de $\mathbb{R}^n$

$g)$ $\{v \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \ v \cdot a = 0 \quad \text{con} \ a \in \mathbb{R}^n \ \text{fijo} \ \}$ de $\mathbb{R}^n$

$h)$ $\{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que} \ p(0) + p'(0) = 1\}$ de $P_n(\mathbb{R})$

$i)$ $\{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que} \ p(0) \ \text{es un número par} \ \}$ de $P_n(\mathbb{R})$

$j)$ $\{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que} \ p(x) = p'(x)\}$ de $P_n(\mathbb{R})$

k) $\left\{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } \int_0^1 xp(x)\,dx = 0\right\}$ de $P_n(\mathbb{R})$

l) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } tr(A) = 0\}$ de $M_n(\mathbb{R})$

m) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } A = A^t\}$ de $M_n(\mathbb{R})$

n) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } A = -A^t\}$ de $M_n(\mathbb{R})$

ñ) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } A^2 = I_n\}$ de $M_n(\mathbb{R})$

o) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } AB = BA \quad \text{con } B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ fija}\}$ de $M_n(\mathbb{R})$

p) $\{f(x) \in C[0,1] \quad \text{tal que } f(x) \quad \text{es una función par}\}$ de $C[0,1]$

q) $\{f(x) \in C[0,1] \quad \text{tal que } f(x) \quad \text{es una función impar}\}$ de $C[0,1]$

5. Determine si el vector v en el espacio vectorial correspondiente, es combinación lineal de los vectores que se indican

   a) $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $v = \tan^2(x) \in C[0,\pi]$ de 1, $\sec^2(x)$

   d) $v = \tan^2(x) \in C[0,\pi]$ de $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$

6. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $u \in V$ y $S \subseteq V$ L.I. Demuestre que

$$S \cup \{u\} \text{ es L.I. } \longleftrightarrow u \text{ no es C.L. de elementos de } S$$

7. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y los conjuntos de vectores

$$S_1 = \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{v_1, \cdots, v_m\}$$

   Demuestre que $\text{Gen}\, S_1 = \text{Gen}\, S_2$ si y sólo si cada u_i es combinación lineal de los v_j y cada v_j es combinación lineal de los u_i.

8. Demuestre que todo subconjunto no vacío de un conjunto de vectores L.I. es también L.I.

9. Demuestre que todo conjunto que contiene un conjunto de vectores L.D. es también L.D.

10. Considere el espacio vectorial $V = M_2(\mathbb{R})$ y $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo. Demuestre que el siguiente conjunto U es un subespacio de V.
$$U = \{A \in V \ : \ adj(A)\, v = \overrightarrow{0}\}$$

11. Considere el espacio vectorial $P_3(\mathbb{R})$. Determine si el siguiente conjunto es L.I. o L.D.
$$\{p_i(x) = \sum_{j=0}^{i} x^j \in P_3(\mathbb{R}) \quad \text{para} \ \ i = 0, 1, 2, 3\}$$

12. Sea $\{u_1, u_2, u_3\}$ un conjunto L.I. en $\mathbb{R}^4$. Considere las matrices
$$A_1 = [u_1 \ \ u_2 \ \ u_3] \quad , \quad A_2 = [u_2 \ \ u_1 \ \ u_3] \quad , \quad A_3 = [u_2 \ \ u_3 \ \ u_1]$$
Demuestre que $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ es un conjunto L.I. en $M_{4,3}(\mathbb{R})$.

13. Sea A de 5×4. Demuestre que el siguiente conjunto U es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.
$$U = \{b \in \mathbb{R}^5 \ : \ Ax = b \quad \text{es consistente}\}$$

14. Encuentre una base de los siguientes espacios vectoriales

    a) $V = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } p(0) = 0\}$

    b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } a + b + c + d = 0 \right\}$

    c) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$

15. Determine si los siguientes conjuntos son una base del espacio vectorial indicado

    a) $\{1, 1 + x^2, 1 - x - 2x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

    b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

16. Determine valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que los vectores columna de la matriz A sean una base de $\mathbb{R}^3$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & k & -1 \\ k & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

17. Sea $U = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : \ p(-1) = 0 \ \}$

    a) Demuestre que U es subespacio de $P_3(\mathbb{R})$
    b) Encuentre una base de U
    c) Determine $\operatorname{Dim} U$

18. Sean U_1 y U_2 subespacios de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto $U_1 + U_2$ definido por

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \ \text{ tal que } \ u_1 \in U_1 \ \text{ y } \ u_2 \in U_2\}$$

    es también un subespacio vectorial de V.

19. Sea $S = \{ \ 1 \ , \ x + x^2 \ , \ 1 + x + x^2 \ , \ x^3 \ , \ x + x^2 + x^3 \ \}$ en $P_3(\mathbb{R})$. Encuentre una base B de $\operatorname{Gen} S$ tal que $B \subseteq S$

20. Considere el espacio vectorial $V = C[0, 2\pi]$ y el conjunto

$$U = \{f(x) \in V \ : \ f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0\}$$

    Demuestre que U es subespacio de V.

21. Determine la dimensión de los siguientes espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

    a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad x + y - 2z = 0 \right\}$
    b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$
    c) $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 3\beta \\ 4\beta - \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$

$d)$ $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que } \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$

$e)$ $\{v \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que } v \cdot a = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^n \text{ fijo } \}$

$f)$ $\{p(x) \in P(n, \mathbb{R}) \quad \text{tal que } p(x) = p'(x)\}$

$g)$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } tr(A) = 0\}$

$h)$ $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{tal que } A = A^t\}$

22. Sea A de 4×3, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    Demuestre que si $Ax = \vec{0}$ tiene solución única, entonces $\{A, AB, AC\}$ es un conjunto L.I. en $M_{4,3}(\mathbb{R})$.

    Solución:

    Sea $\alpha A + \beta AB + \gamma AC = 0$ (matriz nula). p.d.: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

    Sea $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ tal que $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$.

    Y entonces $AB = [v_3\ v_1\ v_2]$ y $AC = [v_3\ v_2\ v_1]$.

    Entonces $[\alpha v_1 + (\beta + \gamma)v_3 \ \ \beta v_1 + (\alpha + \gamma)v_2 \ \ \gamma v_1 + \beta v_2 + \alpha v_3] = 0$

    Dado que $Ax = \vec{0}$ tiene solución única, entonces se tiene que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es L.I.

    De la segunda columna se tiene que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

23. Sean $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y los subespacios

    $U_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ {u_1}^t A u_1 = 0\}$ y $U_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \ {u_2}^t A u_2 = 0\}$.

a) Demuestre que U_1 es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

Solución:

U_1 es no vacío pues tomando $A = 0$ la matriz nula se tiene que ${u_1}^t 0 u_1 = 0$.

Dadas $A, B \in U_1$, se tiene que ${u_1}^t(A+B)u_1 = {u_1}^t A u_1 + {u_1}^t B u_1 = 0 + 0 = 0$.

Dada $A \in U_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que ${u_1}^t(\alpha A)u_1 = \alpha({u_1}^t A u_1) = \alpha 0 = 0$.

Por lo tanto U_1 es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Calcule bases y dimensión de U_1 y U_2.

Solución:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U_1$ si $a - c - b + d = 0$.

Por lo tanto $U_1 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\}$.

La dimensión de U_1 es 3 pues $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U_2$ si $4a + 2b + 2c + d = 0$.

Por lo tanto $U_2 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\}$.

La dimensión de U_2 es 3 pues $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

24. V o F

a) No existen espacios vectoriales finitos.

b) Todo espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tiene infinitos elementos.

c) Si V y W son dos espacios vectoriales tal que $\text{Dim}(W) \leq \text{Dim}(V)$, entonces W es un subespacio de V.

d) $U = \{p(x) \in P_4(\mathbb{R})$ tal que $p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\}$ es un espacio vectorial.

e) $\mathbb{R}^3$ contiene a $\mathbb{R}^2$.

f) Si V es un espacio vectorial de dimensión 8, entonces hay conjuntos L.D. en V con menos de 8 elementos.

g) Si V es un espacio vectorial de dimensión 8, entonces hay conjuntos L.D. en V con más de 8 elementos.

h) Si V es un espacio vectorial de dimensión 8, entonces hay conjuntos L.I. en V con menos de 8 elementos.

i) Si V es un espacio vectorial de dimensión 8, entonces hay conjuntos L.I. en V con más de 8 elementos.

j) Existen espacios vectoriales que no tienen subconjuntos L.I.

k) Si V es un espacio vectorial, entonces V es subespacio de V.

l) Si V es un espacio vectorial, entonces todo conjunto generado en V es un subespacio de V.

m) Si V es un espacio vectorial, B es una base de V y $v \in V$, con $v \neq \vec{0}_V$, entonces el vector coordenado de v respecto a B es único.

n) Si V es un espacio vectorial y B es una base de V, entonces el vector coordenado de $\vec{0}_V$ respecto a B no es único.

ñ) Existe un espacio vectorial de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ tal que las funciones $f(x) = |8x|$ y $g(x) = 2x$ son L.D.

o) Sean a y b números reales. Entonces existen infinitas funciones linealmente independientes en el intervalo $[0, \pi]$ tal que $f(x) = a\,\text{sen}(x) + b\cos(x)$ y $f(0) = f(\pi) = 0$.

p) Dada una base fija, el vector coordenado con respecto a esa base es único.

q) Si V es un espacio vectorial de dimensión 8 tal que U y W son subespacios de V de dimensión 4 y 6 respectivamente, entonces U está contenido en W.

1. Decida cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales y en tal caso determine Nul(T), Im(T), Rango(T), Nulidad(T), una base de Nul(T) y una base de Im(T)

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$, dada por
   $$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = (a+b+c) + (a-b+2c)x + (3b-c)x^2$$

   b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dada por
   $$T\,(A) = AM + MA^t \ \text{ con } \ M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   c) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$, dada por
   $$T\,(A) = AM + MA^t \ \text{ con } \ M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$, dada por
   $$T(\overrightarrow{x}) = \begin{bmatrix} \overrightarrow{x} \cdot a & \overrightarrow{x} \cdot b \\ \overrightarrow{x} \cdot b & \overrightarrow{x} \cdot a \end{bmatrix} \ \text{ con } \ a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por
   $$T(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||a \ \text{ con } \ a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por
   $$T(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||$$

   g) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por
   $$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 3a-b+7c+d \\ 4a+b-c \\ c+3b-d \\ a+b+c-d \end{bmatrix}\right)$$

h) $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} a-b+3c \\ d+a-b+c \\ 2c+d-a \\ a-b+c-2d \end{bmatrix}\right)$$

2. Sea $T:V \to W$ una transformación lineal. Demuestre

   a) Si T es inyectiva, entonces $\operatorname{Dim} V \leq \operatorname{Dim} W$

   b) Si T es sobreyectiva, entonces $\operatorname{Dim} W \leq \operatorname{Dim} V$

3. Demuestre que $M_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$

4. Demuestre que $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$

5. Demuestre que $M_2(\mathbb{R}) \cong P_3(\mathbb{R})$

6. Demuestre que $P_5(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^6$

7. Sea $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por

$$T(A) = A + A^t \qquad \text{para toda } A \in M_2(\mathbb{R})$$

   Encuentre la dimensión de $\operatorname{Nul}(T)$ y la dimensión de $\operatorname{Im}(T)$

8. Sea $T:V \to W$ una transformación lineal.
   Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto L.I. en V. Demuestre o dé un contraejemplo.

   a) Si T es inyectiva, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ es un conjunto L.I. en W.

   b) Si T es sobreyectiva, entonces $\operatorname{Dim}(W) \leq k$.

9. Sea $T: M_{n,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ lineal dada por $T(A) = Au \quad , \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Encuentre el $\operatorname{Nul}(T)$ y su dimensión.

10. Sean V de dimensión 3 y W de dimensión 4 espacios vectoriales tal que $V = \text{Gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ y $W = \text{Gen}\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sea $T : V \to W$ lineal tal que

$$\begin{array}{lcl} T(v_1 - v_3) & = & w_1 + w_2 \\ T(v_1 - v_2 - v_3) & = & w_1 + w_3 \\ T(v_1 - v_2 - 2v_3) & = & w_1 + w_4 \end{array}$$

¿Es T es 1-1 ? ¿Es T sobre? Justifique.

11. Sea $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal dada por
$T(p(x)) = p''(1) + p'(1)x + p(1)x^2$
Calcule bases para $\text{Nul}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

Solución:

Del enunciado, $T(a+bx+cx^2+dx^3) = (2c+6d)+(b+2c+3d)x+(a+b+c+d)x^2$.

Luego la matriz de T con respecto a las bases canónicas es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego $\text{Nul}(T) = \text{Gen}\{1 - 3x + 3x^2 - x^3\}$.

Dado que es un polinomio, se tiene que $\{1 - 3x + 3x^2 - x^3\}$ es L.I. y por lo tanto una base de $\text{Nul}(T)$.

$\text{Im}(T) = \text{Gen}\{x, x + x^2, 2 + 2x + x^2\}$.

De las columnas pivote de la F.E. de la matriz anterior, se tiene que $\{x, x + x^2, 2 + 2x + x^2\}$ es L.I. y por lo tanto una base de $\text{Im}(T)$.

(Otra manera es decir que como el Nul tiene dimensión 1 y $P_3(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4, entonces por teorema, $\text{Im}(T)$ tiene dimensión 3, y como es subespacio de $P_2(\mathbb{R})$ de dimensión 3, entonces $P_2(\mathbb{R}) = \text{Im}(T)$ y por lo tanto una base es $\{1, x, x^2\}$).

12. Sean V y W espacios vectoriales , $T : V \to W$ una transformación lineal y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Demuestre que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Gen}\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$.

    Solución:

    $w \in \mathrm{Im}(T)$

    $\leftrightarrow \exists v \in V : \; T(v) = w$

    $\leftrightarrow \exists v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \in V : \; T(v) = w$

    $\leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : \; v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n : \; T(v) = w$

    $\leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : \; T(x_1v_1 + \ldots + x_nv_n) = w$

    $\leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : \; x_1T(v_1) + \ldots + x_nT(v_n) = w$

    $\leftrightarrow w \in \mathrm{Gen}\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$

13. V o F

    a) Si A es una matriz de $n \times m$, entonces $m + \mathrm{Dim}(\mathrm{Nul}(A^t)) = n + \mathrm{Dim}(\mathrm{Nul}(A))$.

    b) Sea A una matriz de 3×4. El rango de A es 3 si y sólo si $\mathrm{Nul}(A^t) = \{\vec{0}\}$.

    c) Si $T : V \to W$ es una transformación lineal , entonces $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

    d) Sea $T : V \to W$ es una transformación lineal. T es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Nul}(T) = \{\vec{0}_V\}$.

    e) Sea $T : V \to W$ es una transformación lineal. T es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = W$.

    f) Si $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, entonces T no puede ser inyectiva.

    g) Si $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ es una transformación lineal sobre, entonces T es inyectiva.

    h) Si $T : V \to W$ es una transformación lineal sobre, entonces $\mathrm{Dim}\, V \leq \mathrm{Dim}\, W$.

    i) Sea $T : V \to W$ y $L : W \to V$ transformaciones lineales tal que $L \circ T$ es la transformación identidad, entonces L es sobre.

j) Sea $T : V \to W$ y $L : W \to V$ transformaciones lineales tal que $L \circ T$ es la transformación identidad, entonces $\mathrm{Nul}(T) \subseteq \mathrm{Nul}(L)$.

k) Sea $T : V \to W$ y $L : W \to V$ transformaciones lineales tal que $L \circ T$ es la transformación identidad, entonces $\mathrm{Im}(L) = V$

l) Sea $T : V \to W$ y $L : W \to V$ transformaciones lineales tal que $L \circ T$ es la transformación identidad, entonces T es inyectiva.

m) Sea $T : V \to W$ y $L : W \to V$ transformaciones lineales tal que $L \circ T$ es la transformación identidad, entonces $\mathrm{Nul}(T) \subseteq \mathrm{Nul}(L)$.

n) Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Entonces T no puede ser sobre.

1. Determine los valores y vectores propios de las siguientes matrices

$$\text{(a)}\begin{bmatrix} -6 & -2 & -7 \\ 4 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\begin{bmatrix} -5/2 & 1 & 3/2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es no singular, entonces los recíprocos de sus valores propios son valores propios de A^{-1}.

3. Sea A de $n \times n$ tal que $A^8 = 7A^7$. Pruebe que si 7 no es valor propio de A, entonces A es singular.

4. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Encuentre condiciones sobre los coeficientes de la matriz para que

   a) 0 sea un valor propio de A.
   b) A tenga un único valor propio.
   c) A sea diagonalizable.

5. Demuestre que la matriz $\begin{bmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a \end{bmatrix}$ es diagonalizable si y sólo si $|a| > 1$

6. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$, demuestre que la matriz sólo admite los valores propios 0 y 1.

7. Sea A de 2×2, tal que no es diagonal, $tr(A) = 0$ y $|A| = d$, con $d \in \mathbb{R}$. Determine condiciones para que A sea diagonalizable.

8. Sea A de 3×3 y e_1, e_2, e_3 vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} A(e_1 + e_2) &= e_3 \\ A(e_1 + e_3) &= e_2 \\ A(e_1) &= 3e_1 \end{aligned}$$

   Encuentre y diagonalice A.

9. Sea A de 3×3 simétrica con valores propios $\lambda, \lambda + 1, \lambda + 2$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que la matriz $A + aI$ es positiva definida.

10. Sean v_1, v_2, v_3 tal que $\mathbb{R}^3 = \text{Gen}\{v_1, v_2, v_3\}$, y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\text{Nul}(T) = \text{Gen}\{v_1 + v_2, v_1 + v_3\}$ y $\text{Im}(T) = \text{Gen}\{v_1\}$.

    Decida justificadamente si T es diagonalizable.

11. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que A es diagonalizable si y sólo si $A + aI$ es diagonalizable.

12. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A + 2I$. Pruebe que si 2 no es valor propio de A, entonces $A + I$ es singular.

13. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, con $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

14. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A + 3I$. Demuestre que si 3 no es valor propio de A, entonces $A + I$ es no invertible.

    Solución:

    Se tiene que $A^2 - 2A - 3I = 0$, entonces $(A - 3I)(A + I) = 0$.

    Tomando determinantes:

    $|A - 3I| \cdot |A + I| = 0$.

    Dado que 3 no es valor propio de A, entonces $|A - 3I| \neq 0$.

    Por lo tanto $|A + I| = 0$ y entonces $A + I$ es no invertible.

15. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que $5x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

    Solución:

    Matricialmente queda

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

Polinomio característico de la matriz: $(x - 1/5)(x - 1)$.

Valores propios: $1/5, 1$.

$E_1 = \text{Gen}\{(1,1)^t\}$.

$E_{1/5} = (1,5)^t$.

$P^{-1}AP = D \to A = PDP^{-1} \to A^n = PD^nP^{-1}$.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$.

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 5/4 & -1/4 \end{bmatrix}$.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{5x_1 - x_0}{4}$.

16. Sea A una matriz de 3×3 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ y la forma escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Calcule e^A.

Solución:

De la escalonada reducida $\text{Nul}(A) = \text{Gen}\{(0,1,0)^t, (1,0,1)^t\}$.

Por lo tanto 0 es un valor propio de A con m.g. $= 2$.

Además $A(1,2,3)^t = 2(1,2,3)^t$.

Por lo tanto 2 es un valor propio de A con m.g. $= 1$. (no puede ser mayor pues la matriz es de 3×3).

La diagonalización queda:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$$A = PDP^{-1} \text{ entonces } e^A = Pe^DP^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{3-e^2}{2} & 0 & \dfrac{e^2-1}{2} \\ 1-e^2 & 1 & e^2-1 \\ \dfrac{3-3e^2}{2} & 0 & \dfrac{3e^2-1}{2} \end{bmatrix}.$$

17. V o F

a) A cuadrada es invertible si y sólo si 0 es valor propio de A.

b) Si A cuadrada no tiene el 0 como valor propio, entonces A es invertible.

c) Si A es una matriz tal que $A^t = -A$, entonces 0 es valor propio de A.

d) Si A es una matriz tal que $A^2 = I$, entonces 1 es valor propio de A.

e) Sea A cuadrada. A y A^t tienen los mismos valores propios.

f) Sea A una matriz tal que $A^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Entonces $|2I - A| = 0$.

g) La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

h) Si una matriz A cuadrada es diagonalizable, entonces A es invertible.

i) Si una matriz A cuadrada es invertible, entonces A es diagonalizable.

j) Sea A de $n \times n$. A es diagonalizable si y sólo si A^t es diagonalizable.

k) Sea A una matriz cuadrada e invertible. A es diagonalizable si y sólo si A^{-1} es diagonalizable.

l) Sea A una matriz de 3×3. Si el polinomios característico de A tiene tres raíces reales, entonces A es diagonalizable.

m) La suma de matrices diagonalizables es diagonalizable.

1. Sea A de 4×5. Demuestre que $F(A)^{\perp} = \mathrm{Nul}(A)$.

2. Determine la proyección de $v = e_1 - e_3 + e_4 + e_5 \quad \in \mathbb{R}^5$ sobre el hiperplano $x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 0$.

3. Sea U subespacio no trivial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m, P la matriz de proyección sobre U y $a \in \mathbb{N}$ mayor que uno. Determine los valores propios y la dimensión de los espacios propios de la matriz $I - aP$.

4. Determine la matriz de proyección sobre el hiperplano $x_1 - x_2 + x_4 = 0$.

5. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que

$$P_U(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - e_3) \quad P_U(e_2) = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + e_3)$$

   Determine la matriz de proyección sobre U.

6. Encuentre $\displaystyle\min_{x-y-2z=2} (x-3)^2 + (2y-1)^2 + (z+5)^2$ usando proyecciones

7. Sea U el hiperplano en $\mathbb{R}^4$, dado por la ecuación $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$. Calcule bases de U y de $U^{\perp}$. Calcule la proyección de $v = (2, -1, 3, 0)^t$ sobre U y sobre $U^{\perp}$. Calcule la matriz de proyección sobre U y sobre $U^{\perp}$.

   Solución:

   Base de U: $\{(1, 0, -2, 0)^t, (0, 1, 1, 0)^t, (0, 0, 2, 1)^t\}$.

   Base de $U^{\perp}$: $\{(2, -1, 1, -2)^t\}$.

   Matriz de proyección sobre $U^{\perp}$: $Q = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

   Usando $P + Q = I$.

   Matriz de proyección sobre U: $P = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Proyección de v sobre U: Pv, proyección de v sobre $U^{\perp}$: Qv.

$Pv = \dfrac{1}{10}(4, -2, 22, 16)^t$.

$Qv = \dfrac{1}{10}(16, -8, 8, -16)^t$.

8. Sea U subespacio de $\mathbb{R}^n$, P matriz de proyección sobre U y Q matriz de proyección sobre $U^{\perp}$. Demuestre que PQ es la matriz nula.

   Solución:

   Manera 1:

   Sea A tal que sus columnas forman una base de U. Entonces $P = A(A^tA)^{-1}A^t$.

   Sea B tal que sus columnas forman una base de $U^{\perp}$. Entonces $Q = B(B^tB)^{-1}B^t$.

   Entonces $PQ = A(A^tA)^{-1}A^tB(B^tB)^{-1}B^t$.

   Pero A^tB es la matriz nula, pues las filas de A^t son ortogonales a las columnas de B.

   Entonces $PQ = 0$.

   Manera 2:

   Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base de U.

   Sea $\{w_1, \ldots, w_r\}$ una base de $U^{\perp}$.

   Entonces si $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_m + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r$.

   $PQx = PQ(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_m + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r) = P(\vec{0} + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_r w_r) = \vec{0}$.

   Luego $PQx = \vec{0}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces PQ es la matriz nula.

9. Sea $P = \begin{bmatrix} 6/7 & -2/7 & 1/7 & 1/7 \\ -2/7 & 3/7 & 2/7 & 2/7 \\ 1/7 & 2/7 & 6/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 & -1/7 & 6/7 \end{bmatrix}$ matriz de proyección sobre $U \leq \mathbb{R}^4$. Determine una base de U y de $U^{\perp}$.

Solución:

$$P \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{Im}(P) = C(P) = U$.

Entonces $U = \mathrm{Gen}\{(1,0,0,1)^t, (0,1,0,2)^t, (0,0,1,-1)^t\}$.

O bien $U = \mathrm{Gen}\{(6/7,-2/7,1/7,1/7)^t, (-2/7,3/7,2/7,2/7)^t, (1/7,2/7,6/7,-1/7)^t\}$.

$\mathrm{Nul}(P) = U^{\perp}$.

Entonces $U^{\perp} = \mathrm{Gen}\{(-1,-2,1,1)^t\}$.

10. Usando proyecciones, calcule

$$min \;\; (x+y)^2 + (2x-y-2)^2 + (y-6)^2 + (y-x-2)^2$$

Solución:

El problema se traduce en encontrar la proyección de $b = (0,2,6,2)^t$ sobre $C(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema es: $A^t A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^t b$.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$.

Entonces el mínimo es 30.

11. V o F

    a) Sea P matriz de proyección sobre un subespacio U de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2. Entonces existen vectores no nulos v_1 y v_2 en $\mathbb{R}^4$ tal que $Pv_1 = Pv_2$.

    b) Sean A y B matrices inyectivas tal que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.
    Entonces $A(A^tA)^{-1}A^t = B(B^tB)^{-1}B^t$.

    c) Toda matriz de proyección es diagonalizable.

    d) Toda matriz de reflexión es diagonalizable.

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Encuentre la descomposición espectral de A.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Encuentre la descomposición espectral de A.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Determine la descomposición espectral de A.

   Solución:

   Valores propios: $3, 6$.

   $E_3 = \text{Gen}\{(1, 0, -1)^t, (0, 1, -1)^t\}$.

   $E_6 = \text{Gen}\{(1, 1, 1)^t\}$.

   Bases ortonormales:

   $E_3 = \text{Gen}\{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^t, (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^t\}$.

   $E_6 = \text{Gen}\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^t\}$.

   Entonces la descomposición queda:

$$A = 3 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/6 & -2/6 & 1/6 \\ -2/6 & 4/6 & -2/6 \\ 1/6 & -2/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

4. Sea A simétrica de 5×5 y $B = [v_1\ v_2\ v_3]$ de 5×3 tal que

$$AB = B \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

   Muestre que $B^t B$ es diagonal.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obterner la descomposición en valores singulares de A.

Solución:

$$A^tA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ con valores propios } \{4, 2, 0\}.$$

$$E_4 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\},\ E_2 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\} \text{ y } E_0 = \text{Gen}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ con } U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ y } U_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Entonces los valores singulares de A son: $\{2, \sqrt{2}\}$.

$$V_1 = AU_1\sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ y } V_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ y entonces } V^tAU = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. V o F

   a) Sea L una matriz de $n \times n$. L es una matriz ortogonal si y sólo si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ $||Lx|| = ||x||$.

   b) Si una matriz cuadrada A tiene sólo valores propios reales, entonces A es simétrica.

   c) Si una matriz A tiene vectores columnas ortonormales, entonces sus vectores fila también son ortonormales.

   d) Sea A una matriz cuadrada. Entonces $A + A^t$ es diagonalizable.

   e) Toda matriz simétrica se puede escribir como una suma ponderada de matrices de proyección.