Fundamentals Resumen

Resumen para el Examen de Conocimientos Fundamentales

Ingeniería UC

5 de febrero de 2026

Índice

Programa del Módulo

0.1. Cálculo I (MAT1610)

Contenidos

1. Geometría Analítica

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

1. Identificar gráficos de funciones básicas, exponenciales, logarítmicas.
4. Calcular derivadas de funciones obtenidas por álgebra de funciones elementales.
6. Reconocer gráfica y analíticamente propiedades de los gráficos de funciones (crecimiento, concavidad, máx/mín, asíntotas).
9. Conocer el cálculo de primitivas de funciones básicas.

0.2. Cálculo II (MAT1620)

Contenidos

1. Cálculo Integral

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

3. Aplicar el concepto de integral definida para calcular áreas y momentos de regiones del plano.
5. Aplicar los criterios básicos de convergencia de series e integrales impropias.
8. Conocer las ecuaciones paramétricas, vectoriales y cartesianas de rectas y planos.

0.3. Cálculo III (MAT1630)

Contenidos

1. Cálculo Diferencial

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

2. Aplicar el concepto de integral múltiple para evaluar volúmenes y centros de masa.
5. Reconocer y explicar el concepto de “curvas de nivel” y calcularlas.
6. Calcular derivadas direccionales.

0.4. Ecuaciones Diferenciales (MAT1640)

Contenidos

1. Ecuaciones Diferenciales

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

2. Modelar situaciones sencillas de la realidad y fenómenos mediante ecuaciones diferenciales.
3. Reconocer tipo de EDO, identificar y utilizar métodos de solución según el caso.
6. Calcular soluciones de sistemas lineales de 2×2 y 3×3 (coef. constantes).

0.5. Álgebra Lineal (MAT1203)

Contenidos

1. Matrices
2. Raíces de Ecuaciones
3. Análisis Vectorial

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

1. Determinar escalonada reducida, resolver $Ax = b$, calcular inversas y bases.
2. Interpretar geométricamente dependencia lineal, complemento ortogonal.
4. Explicar y utilizar propiedades de operaciones matriciales.
6. Explicar y utilizar matrices elementales, simétricas, ortogonales, etc.
7. Calcular determinantes, resolver sistemas y evaluar inversas.
9. Determinar matriz de Transformación Lineal y relación con cambio de base.
12. Explicar valores/vectores propios, diagonalización y aplicaciones (simétricas).

0.6. Probabilidades y Estadística (EYP1113)

Contenidos

1. Álgebra de eventos, axiomas, prob. condicional, Bayes.
2. Medidas descriptivas teóricas (media, varianza, percentil, etc.).
3. Modelos Discretos/Continuos (Binomial, Poisson, Normal, Exp, etc.) y uso de R.
4. Distribuciones conjuntas, covarianza, correlación.
5. Estimación y propiedades.
6. Test de hipótesis e intervalos de confianza.
7. Bondad de ajuste (Chi-cuadrado).
8. Regresión lineal (test-t, test-F, R^2).

Indicadores a evaluar (Números corresponden al correlativo del programa de cada curso)

1. Ajustar distribuciones de probabilidad a datos reales.
2. Describir fenómenos de incertidumbre usando variables aleatorias.
3. Realizar estimaciones de parámetros e intervalos de confianza.
4. Ajustar e interpretar modelos de regresión lineal.

1. Cálculo I (MAT1610): Análisis de Funciones

1.1. Funciones Elementales y Límites

Funciones Básicas

- **Exponencial (e^x):** Dominio $\mathbb{R}$, Recorrido $(0, \infty)$. $\exp(x+y) = e^x e^y$.
- **Logaritmo Natural ($\ln x$):** Dominio $(0, \infty)$. $y = \ln x \iff e^y = x$.
- **Propiedades ($a, b > 0$):** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^b) = b \ln a$.

Límites y Continuidad

Límites Notables:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Continuidad en c: Se requiere que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Asíntotas

- **Vertical ($x = c$):** Si $\lim_{x\to c^\pm} f(x) = \pm\infty$.
- **Horizontal ($y = L$):** Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- **Oblicua ($y = mx + n$):** $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$.

1.2. Cálculo Diferencial

Reglas de Derivación (Cheat Sheet)

- **Producto:** $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- **Cuociente:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ **(con** $g \neq 0$**).**
- **Cadena:** $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Teoremas de Existencia (Rigor MAT1610)

- **Bolzano:** Si f es cont. en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b)/f(c) = 0$.
- **Valor Medio (MVT):** Si f es cont. en $[a, b]$ y derivable en (a, b), $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- **Rolle:** Si MVT y $f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b)/f'(c) = 0$.

Interpretación y Gráfica

1ra Derivada (f'): $f' > 0 \uparrow$ (Creciente), $f' < 0 \downarrow$ (Decreciente), $f' = 0 \to$ P. Crítico.

2da Derivada (f''):

- $f'' > 0 \cup$ (Punto mínimo local si $f' = 0$).
- $f'' < 0 \cap$ (Punto máximo local si $f' = 0$).
- **Punto de Inflexión:** Si $f''(c) = 0$ y hay cambio de signo en f''.

1.3. Primitivas (Integrales Indefinidas)

Tabla de Primitivas Básicas

- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$

2. Cálculo II (MAT1620): Integrales y Series

2.1. Técnicas de Integración

Integración por Partes

Recuerda: "**U**n **D**ía **V**i **U**na **V**aca **V**estida **D**e **U**nforme".

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Estrategia LIATE para elegir u: **L**ogarítmicas, **I**nversas, **A**lgebraicas, **T**rigonométricas, **E**xponenciales.

2.2. Aplicaciones de la Integral Definida

Área entre Curvas

Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

Área entre Curvas con Valor Absoluto

Problema (MAT1620-3-4): Considere la región dada por:

$$(x-2)^2 \leq y \leq 4 - |x|$$

¿Cuál es el área de la región descrita?
Solución:
Paso 1: Identificar las funciones

- Curva inferior: $g(x) = (x-2)^2$ (parábola con vértice en $(2, 0)$)
- Curva superior: $f(x) = 4 - |x|$ (función valor absoluto invertida)

Paso 2: Encontrar puntos de intersección
Resolver $(x-2)^2 = 4 - |x|$. Dividimos en dos casos:
Caso 1: $x \geq 0 \to |x| = x$

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= 4 - x\\ x^2 - 4x + 4 &= 4 - x\\ x^2 - 3x &= 0\\ x(x-3) &= 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 3\end{aligned}$$

Caso 2: $x < 0 \to |x| = -x$

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= 4 + x\\ x^2 - 4x + 4 &= 4 + x\\ x^2 - 5x &= 0\\ x(x-5) &= 0 \implies x = 0 \text{ (no válido en } x < 0)\end{aligned}$$

Para $x < 0$, si probamos un punto como $x = -1$: $(-1-2)^2 = 9$ y $4 - |-1| = 3$. Como $9 \not\leq 3$, **no existe región** para $x < 0$. La región está definida únicamente en el intervalo $x \in [0, 3]$.

Paso 3: Calcular el área
Dado que $x \geq 0$, tenemos $|x| = x$, por lo tanto $f(x) = 4 - x$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [(4 - x) - (x - 2)^2] \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 [4 - x - (x^2 - 4x + 4)] \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 [-x^2 + 3x] \, \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 \\ &= \left(-\frac{27}{3} + \frac{3 \cdot 9}{2} \right) - 0 \\ &= -9 + \frac{27}{2} \\ &= -\frac{18}{2} + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Alternativa correcta: c) $9/2$

Centro de Masa (Centroide)

Para una región plana de densidad constante ρ, el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ es:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x \\ \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2}([f(x)]^2 - [g(x)]^2) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

2.3. Series e Integrales Impropias

Resumen de Criterios de Convergencia

1. **Criterio del Término n-ésimo (Divergencia):** Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie diverge.
2. **Serie Geométrica:** $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$, diverge si $|r| \geq 1$.
3. **Serie-p:** $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$, diverge si $p \leq 1$.
4. **Criterio de la Integral:** Si $f(x)$ es continua, positiva y decreciente, entonces $\sum a_n$ y $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ convergen o divergen juntas.
5. **Criterio de Computación Directa/Límite:** Compara con series conocidas (generalmente p-series o geométricas).
6. **Criterio de Series Alternantes (Leibniz):** $\sum(-1)^n b_n$ converge si b_n decrece a 0.
7. **Criterio de la Razón:** $L = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. $L < 1$ (Conv), $L > 1$ (Div), $L = 1$ (No decide).
8. **Criterio de la Raíz:** $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Mismas condiciones que la Razón.

Criterio de la Razón (D'Alembert)

Sea $\sum a_n$. Calculamos $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$:

- Si $L < 1 \implies$ Converge Absolutamente.
- Si $L > 1 \implies$ Diverge.
- Si $L = 1 \implies$ El criterio no decide.

Criterio de Comparación en el Límite

Si $a_n, b_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ $(0 < c < \infty)$, entonces:

$$\sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ se comportan igual (ambas Convergen o ambas Divergen).}$$

Útil para comparar con p-series: $\sum \frac{1}{n^p}$ conv. si $p > 1$.

Divergencia de Series

Problema: ¿Cuál de las siguientes series es **DIVERGENTE**?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n^5+8}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+\pi}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Solución Detallada:

a) Análisis Riguroso (Limit Comparison Test):

1. **Definimos las series:** Comparamos nuestra serie original (a_n) con la serie armónica (b_n), que sabemos que DIVERGE.

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n^5+8}} \quad , \quad b_n = \frac{1}{n}$$

2. **Planteamos el Límite:** Calculamos $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Si $0 < L < \infty$, ambas se comportan igual.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n^5+8}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{\sqrt{n^5+8}} \right)$$

3. **Factorización de términos dominantes:** No basta con decir "se parece a". Factorizamos la potencia mayor *dentro* de cada raíz para demostrar formalmente que los términos menores desaparecen.

$$L = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\sqrt{n^3(1+\frac{2n}{n^3}+\frac{1}{n^3})}}{\sqrt{n^5(1+\frac{8}{n^5})}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{n^5}\cdot\sqrt{1+\frac{8}{n^5}}}$$

4. **Cancelación y Evaluación:** Sabemos que $\sqrt{n^3} = n^{3/2}$ y $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Agrupamos

las potencias de n:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n \cdot n^{3/2}}{n^{5/2}} \right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^5}}}$$

Observamos que $n \cdot n^{3/2} = n^{1+1{,}5} = n^{2{,}5} = n^{5/2}$. Los términos se cancelan exactamente ($\frac{n^{5/2}}{n^{5/2}} = 1$).

$$L = 1 \cdot \frac{\sqrt{1+0+0}}{\sqrt{1+0}} = 1$$

Como $L = 1$ (finito y positivo), y $\sum b_n$ diverge, **la serie a) DIVERGE**.

Análisis de las otras opciones:

b) Convergencia Absoluta:

$$\left| \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

Como la función seno está acotada entre $[-1, 1]$, el numerador no crece. Comparamos con la p-serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ ($p = 2 > 1$). Converge.

c) Serie Alternante: La serie se puede reescribir considerando que $\cos(n\pi) = (-1)^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\pi}$$

Esta es una **Serie Alternante**. Verificamos el Criterio de Leibniz: 1. ¿Son los términos decrecientes? Sí, $\frac{1}{n+1+\pi} < \frac{1}{n+\pi}$. 2. ¿El límite es 0? Sí, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\pi} = 0$. Por lo tanto, la serie **converge** (condicionalmente).

d) Criterio de la Razón (Converge): Usamos D'Alembert para términos con factoriales y potencias n-ésimas:

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n! \cdot n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n \cdot n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Como $L = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2{,}718} < 1$, la serie **converge** absolutamente.

Alternativa correcta: a)

2.4. Geometría en el Espacio

Rectas y Planos

- **Recta** por P_0 con dirección $\vec{v}$:

$$\vec{r}(t) = P_0 + t\vec{v}$$

- **Plano** por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con normal $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

3. Cálculo III (MAT1630): Cálculo Multivariable

3.1. Diferenciación Multivariable

Gradiente y su Significado

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. El gradiente es el vector:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

Propiedades Clave:

- ∇f apunta a la dirección de **máximo crecimiento**.
- La tasa máxima de cambio es $\|\nabla f\|$.
- ∇f es **perpendicular** (ortogonal) a las curvas/superficies de nivel.

Derivada Direccional

La derivada de f en la dirección del vector unitario $\vec{u}$:

$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$$

Nota: Si $\vec{u}$ no es unitario, normalizar $\vec{u} \leftarrow \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ antes de usar la fórmula.

Optimización con Multiplicadores de Lagrange

Para maximizar/minimizar $f(x, y, z)$ sujeto a la restricción $g(x, y, z) = k$:

1. Resolver el sistema: $\nabla f = \lambda \nabla g$.
2. Considerar también la restricción: $g(x, y, z) = k$.

3.2. Integrales Múltiples y Cambios de Coordenadas

Coordenadas Polares (En el plano xy)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Jacobiano (Factor de corrección): $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

Coordenadas Esféricas (Espacio 3D)

Usar para esferas o conos.

- $x = \rho \sin\phi \cos\theta$
- $y = \rho \sin\phi \sin\theta$
- $z = \rho \cos\phi$

Jacobiano de volumen: $\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$

MAT1630-2-3 (2025-1)

Considere el sólido E en el primer octante delimitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.

¿Cuál de las siguientes integrales iteradas permite calcular el volumen de E?

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^2 (4 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4 - r^2)\, dr\, d\theta$

c) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^2 \int_0^{4-x^2-y^2} 1\, dz\, dy\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{4-x^2-y^2} 1\, dz\, dy\, dx$

Solución

Respuesta correcta: d)

Análisis de cada opción:

- **Opción a):** Los límites de integración son incorrectos. Para $x = 2$ y $y = 2$, tendríamos $z = 4 - 4 - 4 = -4 < 0$, lo cual está fuera del primer octante.
- **Opción b):** Falta el factor r del Jacobiano en coordenadas polares. Debería ser $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r(4 - r^2)\, dr\, d\theta$.
- **Opción c):** Similar a la opción a), los límites de y son incorrectos. No considera que la región de integración en el plano xy es circular.
- **Opción d): CORRECTA.**
  - El límite superior de z es la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.
  - Para cada x fijo, y varía desde 0 hasta $\sqrt{4 - x^2}$ (semicírculo en el primer cuadrante).
  - x varía de 0 a 2 (donde la superficie intersecta el plano xy cuando $z = 0$: $4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$).

Verificación: La región de integración en el plano xy es un cuarto de círculo de radio 2 (primer cuadrante de $x^2 + y^2 \leq 4$), y la altura va desde $z = 0$ hasta $z = 4 - x^2 - y^2$.

4. Ecuaciones Diferenciales (MAT1640)

4.1. Clasificación y Primer Orden

Conceptos Básicos

- **Orden:** Derivada más alta presente (ej: y'' es orden 2).
- **Linealidad:** La variable y y sus derivadas tienen potencia 1 y no se multiplican entre sí.

Método: Variables Separables

Si la EDO se puede escribir como $f(y)\,dy = g(x)\,dx$:

1. Separar variables a cada lado del igual.
2. Integrar ambos lados: $\int f(y)dy = \int g(x)dx$.
3. Despejar $y(x)$ si es posible.

Método: Factor Integrante (Ec. Lineales 1er Orden)

Para ecuaciones de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$:

1. Calcular el factor integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.
2. Multiplicar toda la ecuación por $\mu(x)$. El lado izquierdo colapsa a $(\mu \cdot y)'$.
3. Integrar: $\mu(x) \cdot y = \int \mu(x)Q(x)dx$.
4. Despejar y.

4.2. Ecuaciones de Segundo Orden (Coef. Constantes)

Para resolver $ay'' + by' + cy = 0$:

Paso 1: Escribir la **ecuación característica**: $ar^2 + br + c = 0$.

Paso 2: Hallar las raíces r_1, r_2:

- **Reales distintas** ($r_1 \neq r_2$): $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
- **Reales iguales** ($r_1 = r_2 = r$): $y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$
- **Complejas** ($\alpha \pm \beta i$): $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

5. Álgebra Lineal (MAT1203)

5.1. Matrices y Determinantes

Propiedades Clave

- **Invertible:** A es invertible $\iff \det(A) \neq 0$.
- **Simétrica:** $A^T = A$. (Sus valores propios son siempre reales).
- **Ortogonal:** $A^T = A^{-1}$ (o $A^T A = I$). Preserva distancias y ángulos.

Propiedades del Determinante

Si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(kA) = k^n \det(A)$ (¡Ojo con el n!)
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

5.2. Diagonalización

Valores y Vectores Propios

Un vector $v \neq 0$ es vector propio de A con valor propio λ si:

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0$$

Algoritmo para Diagonalizar Matriz A:

Paso 1: **Polinomio Característico:** Calcular $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Paso 2: **Valores Propios:** Hallar las raíces de $p(\lambda) = 0$.

Paso 3: **Vectores Propios:** Para cada λ_i, resolver $(A - \lambda_i I)v = 0$ para hallar una base del espacio propio E_{λ_i}.

Paso 4: **Matriz de Paso P:** Formar P con los vectores propios como columnas.

Paso 5: **Diagonalización:** $D = P^{-1}AP$, donde D tiene los λ_i en la diagonal.

6. Probabilidades y Estadística (EYP1113)

6.1. Álgebra de Eventos y Probabilidad Básica

Conceptos Básicos

- **Espacio Muestral** (Ω): Conjunto de todos los resultados posibles.
- **Evento** (A): Subconjunto de Ω.
- **Axiomas**: $P(\Omega) = 1$, $P(A) \geq 0$, etc.

6.2. Variables Aleatorias y Medidas Descriptivas

Medidas Teóricas

Sea X una variable aleatoria:

- **Esperanza (Media):** $E[X] = \mu$.
- **Varianza:** $Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$.
- **Coef. de Variación:** $CV = \frac{\sigma}{|\mu|}$. (Adimensional, útil para comparar dispersión).

6.3. Modelos de Distribución

Modelo	Parámetros	Aplicación Típica
Binomial	n, p	Conteo de éxitos en n intentos independientes.
Geométrica	p	Intentos hasta el primer éxito.
Poisson	λ	Tasa de ocurrencia de eventos raros en intervalo.
Normal	μ, σ^2	Modelado de fenómenos naturales (T. Central Límite).
Exponencial	λ	Tiempo de espera entre eventos Poisson.

Uso de R (Cheat Sheet)

- `dnorm(x, mean, sd)`: Densidad (altura de la curva).
- `pnorm(q, mean, sd)`: Probabilidad Acumulada $P(X \leq q)$.
- `qnorm(p, mean, sd)`: Cuantil (valor x tal que acumula prob p).
- `rnorm(n, mean, sd)`: Generar n datos aleatorios.

Prefixos: **d** (denstiy), **p** (probability), **q** (quantile), **r** (random).

6.4. Inferencia y Regresión

Teorema del Límite Central

Para n grande ($n > 30$), la media muestral $\bar{X}$ se distribuye aproximadamente Normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Esto permite construir intervalos de seguridad para μ sin conocer la distribucion original.

Regresión Lineal Simple

Modelo: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$

- Coeficiente de Determinación (R^2):
- Comando R: `lm(y ~ x, data=datos)`

Preguntas de Práctica Seleccionadas

Pregunta 1 (MAT1610 - Cálculo I)

Considere la función $f(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$. La función posee un máximo en:

a) $(1, -e^{-\frac{1}{2}})$
b) $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$
c) $(-1, -e^{-\frac{1}{2}})$
d) $(1, e^{-\frac{1}{2}})$

Pregunta 2 (MAT1620 - Cálculo II)

Sea R la región delimitada por $0 \leq y \leq 2 - |x|$. ¿Cuál es el momento de R con respecto al eje X?

a) 1
b) 4/3
c) 2
d) 8/3

Pregunta 3 (MAT1630 - Cálculo III)

Sea $f(x, y) = x^y$. La derivada direccional en el punto (1,2), en la dirección de $\mathbf{v} = (1, 1)$, es:

a) 2
b) 0
c) $\sqrt{2}$
d) 1

Pregunta 4 (MAT1630 - Cálculo III)

Sea un cuerpo en el espacio definido por las siguientes desigualdades en coordenadas cilíndricas: $0 \leq r \leq 2 + \sin(4\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$. ¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde al volumen del cuerpo?

a) 2π
b) 4π
c) $9\pi/2$
d) 9π

Pregunta 5 (MAT1640 - Ecuaciones)

Una población posee una tasa de crecimiento instantánea anual de 2 %. ¿Cuántos años le tomará aproximadamente a dicha población triplicar su tamaño?

a) $25 \ln(3)$
b) $50 \ln(3)$
c) $2 \ln(3)$
d) $3 \ln(2)$

Pregunta 6 (MAT1640 - Ecuaciones)

Considere la ecuación: $(x^2+y^2)\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = 0$. ¿Cuál alternativa la describe mejor?

a) No lineal, homogénea, orden 1.
b) Lineal, no homogénea, orden 2.
c) No lineal, no homogénea, orden 2.
d) Lineal, homogénea, orden 1.

Pregunta 7 (MAT1203 - Álgebra Lineal)

Plano Π: $x-2y+3z = 12$. Recta L: $\vec{r}(t) = (1,1,-2)+t(2,b,1)$. ¿Cuál es la condición sobre b para que $\Pi \cap L = \emptyset$ (paralelos)?

a) $b \geq 5/2$
b) $b \leq 5/2$
c) $b = 5/2$
d) No existe valor

Pregunta 8 (MAT1203 - Álgebra Lineal)

Sobre matrices simétricas, ¿cuáles son verdaderas?

I. Resta de simétricas es simétrica.
II. Si $AB = BA$, entonces AB es simétrica.
III. Matriz $n \times n$ tiene n valores propios reales.

a) I y II
b) II y III
c) I y III
d) Todas correctas

Respuesta 9 (EYP1113 - Probabilidades)

Si $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 4)$, ¿cuál es el valor estandarizado Z correspondiente a $X = 13$?

a) 1,5
b) 0,75
c) 3
d) 0,3

Solucionario

Tabla de Respuestas Correctas

1. **b)** $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$
2. **d)** $8/3$
3. **c)** $\sqrt{2}$
4. **c)** $9\pi/2$
5. **b)** $50 \ln(3)$
6. **a)** No lineal, homogénea, 1er orden.
7. **c)** $b = 5/2$
8. **a)** Sólo I y II

Solución Pregunta 1 (MAT1610)

Enunciado

Problema: Encontrar el máximo de $f(x) = -xe^{-x^2/2}$.

Paso 1: **Calcular la primera derivada.** Usamos la regla del producto.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \cdot e^{-x^2/2} + (-x) \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x) \\ &= -e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}(x^2 - 1) \end{aligned}$$

Paso 2: **Encontrar puntos críticos.** Igualamos $f'(x)$ a cero. Como $e^{-x^2/2} > 0$, solo $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$.

Paso 3: **Clasificar los puntos críticos.** Usamos la segunda derivada.

$$f''(x) = xe^{-x^2/2}(3 - x^2)$$

Evaluamos:
- $f''(1) = 2e^{-1/2} > 0 \implies$ Mínimo local.
- $f''(-1) = -2e^{-1/2} < 0 \implies$ Máximo local.

El valor máximo es $f(-1) = e^{-1/2}$.

Respuesta Correcta

b) $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$

Solución Pregunta 2 (MAT1620)

Enunciado

Problema: Calcular el momento M_x de la región delimitada por $0 \leq y \leq 2 - |x|$.

Paso 1: **Configurar la integral.** $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx$. Por simetría (de -2 a 2), calculamos de 0 a 2 y multiplicamos por 2. Para $x \geq 0$, $y = 2 - x$.

$$M_x = 2\int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)^2\,dx = \int_0^2 (4 - 4x + x^2)\,dx$$

Paso 2: **Evaluar la integral.**

$$M_x = \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left(8 - 8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

Respuesta Correcta

d) 8/3

Solución Pregunta 3 (MAT1630)

Enunciado

Problema: Derivada direccional de $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$ dirección $\mathbf{v} = (1, 1)$.

Paso 1: **Gradiente.** $\nabla f = \langle yx^{y-1}, x^y \ln(x) \rangle$. En $(1, 2)$: $\nabla f(1, 2) = \langle 2, 0 \rangle$.
Paso 2: **Vector unitario.** $||\mathbf{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \implies \mathbf{u} = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \rangle$.
Paso 3: **Producto punto.** $D_{\mathbf{u}} f = \langle 2, 0 \rangle \cdot \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \rangle = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Respuesta Correcta

c) $\sqrt{2}$

Solución Pregunta 4 (MAT1630)

Enunciado

Problema: Volumen en cilíndricas: $\int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin(4\theta)} \int_0^1 r\, dz\, dr\, d\theta$.

Paso 1: **Integral en z.** $\int_0^1 r\, dz = r$.

Paso 2: **Integral en r.** $\int_0^{2+\sin(4\theta)} r\, dr = \frac{1}{2}(2+\sin(4\theta))^2$.

Paso 3: **Integral en θ.** Expandir: $\frac{1}{2}(4 + 4\sin(4\theta) + \sin^2(4\theta))$. La integral de $\sin(4\theta)$ en periodo completo es 0. La integral de $\sin^2(4\theta)$ es π. Integral de 4 es 8π. Total: $\frac{1}{2}(8\pi + \pi) = \frac{9\pi}{2}$.

Respuesta Correcta

c) $9\pi/2$

Solución Pregunta 5 (MAT1640)

Enunciado

Problema: Tiempo para triplicar población con tasa 2 % ($k = 0{,}02$).

Paso 1: **Modelo.** $P(t) = P_0 e^{kt} = P_0 e^{0{,}02t}$.
Paso 2: **Resolver.** $3P_0 = P_0 e^{0{,}02t} \implies 3 = e^{0{,}02t}$.
Paso 3: **Despejar t.** $\ln(3) = 0{,}02t \implies t = \frac{\ln(3)}{0{,}02} = 50 \ln(3)$.

Respuesta Correcta

b) $50 \ln(3)$

Solución Pregunta 6 (MAT1640)

Enunciado

Problema: Clasificar $(x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0$.

Paso 1: **Orden.** Primera derivada (dy/dx), primer orden.
Paso 2: **Linealidad.** Término y^2 o $1/y$ implica NO lineal.
Paso 3: **Homogeneidad.** Grado 2 en todos los términos (x^2, y^2, xy). Es Homogénea.

Respuesta Correcta

a) No lineal, homogénea, 1er orden.

Solución Pregunta 7 (MAT1203)

Enunciado

Problema: Intersección vacía entre recta L y plano $\Pi : x - 2y + 3z = 12$.

Paso 1: **Vectores.** $\mathbf{n}_\Pi = \langle 1, -2, 3 \rangle$, $\mathbf{v}_L = \langle 2, b, 1 \rangle$.

Paso 2: **Condición.** $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \implies 2 - 2b + 3 = 0 \implies 2b = 5 \implies b = 5/2$.

Paso 3: **Verificación.** Punto de recta no debe estar en plano. Confirmado en desarrollo previo.

Respuesta Correcta

c) $b = 5/2$

Solución Pregunta 8 (MAT1203)

Enunciado

Problema: Afirmaciones sobre matrices simétricas.

Paso 1: **I. Diferencia es simétrica.** VERDADERO. $(A-B)^T = A^T - B^T = A - B$.

Paso 2: **II. Si $AB = BA$, producto es simétrico.** VERDADERO. $(AB)^T = B^T A^T = BA$. Si $BA = AB$, entonces $(AB)^T = AB$.

Paso 3: **III. Valores propios reales distintos.** FALSO. Son reales, pero pueden repetirse (ej: Identidad).

Respuesta Correcta

a) Sólo I y II