Matemáticas

Pregunta N°1
MAT1610-4-1

Sea $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la función real definida por:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \ , \qquad x \neq 0$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a la derivada de $f(x)$?

a) $+\frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b) $-\frac{2}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

c) $+\frac{1}{x^3} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

d) $-\frac{2}{x^3} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Pregunta N°2
MAT1610-9-2

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como,

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a la familia de primitivas de g?

a) $\frac{x^2-3x+3}{x^2+3} + C$

b) $1 - 2\ln(x^2 + 1) + C$

c) $x - \ln(x^2 + 1) + C$

d) $\ln(x^2 + 1) - 2x + \arctan x + C$

Pregunta N°3
MAT1620-3-2

Sea R la región del plano delimitada por:

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$|\sin x| \leq y \leq \cos x$$

¿Cuál es el área de la región R?

a) $\sqrt{2}$
b) 1
c) $2(\sqrt{2}-1)$
d) Ninguna de las anteriores

Pregunta N°4
MAT1620-3-3

Sea R la región del plano descrita por:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$x \leq y \leq \sqrt[3]{x}$$

Suponga que la densidad de la región es constante e igual a 1. ¿Cuál es el momento de la región R con respecto al eje y?

a) $1/2$
b) $6/21$
c) $1/4$
d) $2/21$

Pregunta N°5
MAT1620-5-2

¿Cuál de las siguientes series **converge**?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan(n)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^3-1}}{n^3+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$

Pregunta N°6
MAT1620-8-1

Sea Π el plano descrito por la siguiente ecuación cartesiana:

$$x - 2y + 3z = 2$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a una representación vectorial del plano Π?

a) $(x, y, z) = (0, -1,0) + \lambda(1,1,1) + \mu(-1,1,1)\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

b) $(x, y, z) = (1,1,1) + \lambda(1, -1, -1) + \mu(0, -3, -2)\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

c) $(x, y, z) = (0, -1,0) + \lambda(1, -1, -1) + \mu(-1,1,1)\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

d) $(x, y, z) = (1, -1,1) + \lambda(1,1,1) + \mu(0,3,2)\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Pregunta N°7
MAT1630-2-3

Sea Π el cuerpo descrito como

$$\Pi = \{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq z \leq 2 - 2|y|, \quad |x| \leq 1\}$$

Suponiendo que la densidad del cuerpo es constante, ¿cuál de las alternativas corresponde a la coordenada z_c del centro de masa de Π?

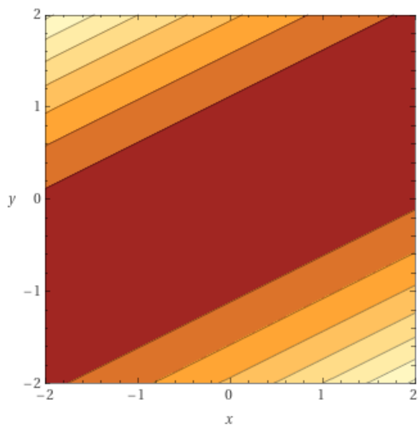
a) 1/3
b) 1/2
c) 2/3
d) 1

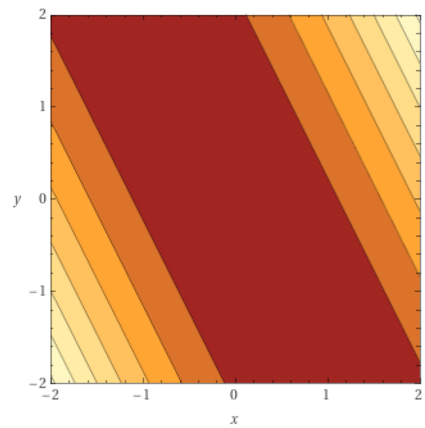
Pregunta N°8
MAT1630-5-1

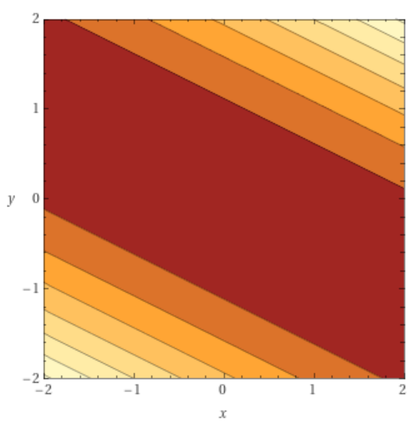
Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por la ecuación,

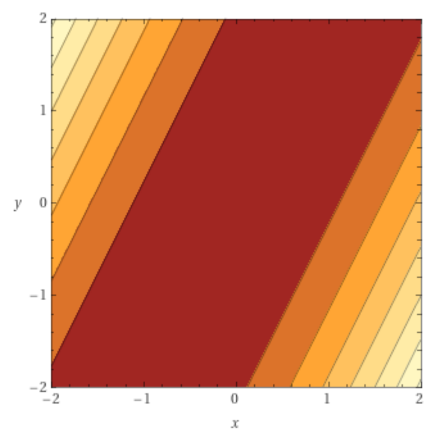
$$f(x, y) = (x + 2y)^2$$

¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor las curvas de nivel de la función f?

a) 

b) 

c) 

d) 

Pregunta N°9
MAT1630-6-2-20

Sea $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función real definida como

$$g(x, y) = e^{\arctan(x+y)}$$

Considere el punto $\boldsymbol{x_0} = (1,0)$ y el vector unitario $\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a la derivada direccional $\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{u}}$ en el punto $\boldsymbol{x_0}$?

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi/4}$
b) $\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\pi/4}$
c) $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pi/2}$
d) $\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\pi/2}$

Pregunta N°10
MAT1630-6-3

Sea $h: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función real definida como

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 y}{z} \qquad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \neq 0\}$$

Considere el punto $\boldsymbol{x_0} = (1,1,1)$ y el vector unitario

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,-1)$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a la derivada direccional $\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{u}}$ en el punto $\boldsymbol{x_0}$?

a) 0
b) $3/\sqrt{2}$
c) $\sqrt{2}$
d) $1/\sqrt{2}$

Pregunta N°11
MAT1640-2-2

En un circuito eléctrico alimentado con una fuente de voltaje de 10 V, el voltaje $V(t)$ (en volts) en un condensador se rige por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V-10}{\tau}$$

donde $\tau > 0$ es una constante conocida.

Si el condensador inicialmente está descargado, es decir, $V(0) = 0$, ¿cuánto tiempo tardará el condensador en alcanzar un voltaje de 7,5 V?

a) $\tau \ln 4$
b) $\tau \ln(4/3)$
c) $\tau \ln 2$
d) $\tau \ln(3/4)$

Pregunta N°12
MAT1640-2-4

Un estanque rectangular de área basal A está parcialmente lleno con agua. El estanque se llena a una tasa de Q litros por segundo. Además, en su base, cuenta con un pequeño orificio de área a, por el cual se escapa agua (en forma perpendicular al orificio) con rapidez media dada por $v = \sqrt{2gh}$, donde h es la altura de agua en el estanque y g es una constante.

¿Qué ecuación diferencial representa el comportamiento de la altura de agua en el estanque?

a) $h' = \frac{Q}{A} - \frac{\sqrt{2gh}}{a}$

b) $h' = \frac{Q}{A} + \frac{\sqrt{2gh}}{a}$

c) $Ah' = Q - a\sqrt{2gh}$

d) $Ah' = Q + a\sqrt{2gh}$

Pregunta N°13
MAT1640-3-2

Considere la siguiente ecuación diferencial para y como función de x,

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} - x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + y\sin x + x^3 = 0$$

Dadas las siguientes afirmaciones:

I. La ecuación es lineal.
II. La ecuación es homogénea.
III. La ecuación es de tercer orden.

¿Cuál(es) de ellas es(son) **VERDADERA(S)**?

a) Solo I
b) Solo III
c) Solo I y III
d) Todas

Pregunta N°14
MAT1640-6-2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para $x(t)$ e $y(t)$,

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - 2y$$

Sean a y b dos constantes reales que dependen de las condiciones iniciales del sistema. ¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a la solución $\{x(t), y(t)\}$ del sistema dado?

a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{3t} \\ -ae^{2t} - be^{3t} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{3t} \\ ae^{2t} - be^{3t} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{-3t} \\ -ae^{2t} - 4be^{-3t} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + be^{-3t} \\ ae^{2t} - 4be^{-3t} \end{pmatrix}$

Pregunta N°15
MAT1203-4-1-20

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, una matriz cuadrada de $n \times n$, que satisface la siguiente ecuación

$$A^2 - 3A + I = \mathbf{0}$$

donde I es la matriz identidad, y $\mathbf{0}$ es la matriz nula (ambas de $n \times n$).

¿Cuál de las siguientes alternativas equivale a una expresión para la inversa de A?

a) $I - 3A$
b) $3A - I$
c) $A - 3I$
d) $3I - A$

Pregunta N°16
MAT1203-7-1

Sea A una matriz de 5×5 cuyo determinante es 2. La matriz B se construye a partir de A, realizando las siguientes operaciones (en el orden descrito):

1. Intercambiar las filas 2 y 3.
2. Sumar 2 veces la fila 2 a la fila 4.
3. Multiplicar (toda la matriz) por -1.
4. Restar a la fila 2, la fila 1.
5. Dividir la segunda columna por 2.
6. Intercambiar las columnas 2 y 4.

¿Cuál es el determinante de la matriz B?

a) 2
b) 1/32
c) -1/16
d) -1

Pregunta N°17
MAT1203-9-1

Sea $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ (donde $\mathbb{P}_2$ son los polinomios de grado menor o igual a 2) la transformación lineal representada por la siguiente matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz M está expresada con respecto a las bases: $\{1, 1+x, x+x^2\}$ y $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

¿Cuál es la imagen del polinomio $p(x) = x^2$?

a) $(1, -1, 1)$
b) $(0,1,1)$
c) $(1,2,1)$
d) $(2, 2, 2)$

Pregunta N°18
MAT1203-12-1

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes alternativas es <u>**CORRECTA**</u>?

a) A es diagonalizable, pero B no lo es.
b) B es diagonalizable, pero A no lo es.
c) Ambas matrices son diagonalizables.
d) Ninguna de ellas es diagonalizable.

Probabilidades y Estadística

Pregunta N°19
EYP1113-1-3-20

Suponga que la probabilidad de que un chofer de taxi no sufra un accidente automovilístico en un año es 95%. Suponga además que la exposición a accidentes automovilísticos es independiente entre años consecutivos.

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde al valor más cercano a la probabilidad de que un chofer de taxi tomado al azar sufra, al menos, un accidente automovilístico durante cinco años?

a) 20%
b) 23%
c) 77%
d) 80%

Pregunta N°20
EYP1113-2-2

Un investigador ha desarrollado un test para la detección de una enfermedad viral. Se dice que ocurre un falso positivo si el test indica erróneamente que un paciente tiene la enfermedad, mientras que un falso negativo sucede si un paciente que posee la enfermedad no es diagnosticado con ella de acuerdo al resultado del test.

Suponga que la probabilidad de un falso positivo es 10%, y la de un falso negativo es 5%. Además, datos confiables indican que un 10% de la población posee la enfermedad.

Si, **de acuerdo al test**, un paciente está sano, ¿cuál de los siguientes intervalos contiene a la probabilidad de que el paciente **en realidad esté enfermo**?

a) [0%; 1%[
b) [1%; 3%[
c) [3%; 7%[
d) [7%; 100%]

Pregunta N°21
EYP1113-3-1-20

En una ferretería, el propietario midió los tiempos de espera de 15 clientes al azar, para investigar acerca del tiempo medio de espera, medido desde la llegada de un cliente hasta que es atendido. Asuma que los tiempos de espera tienen distribución normal.

De las mediciones se obtienen una media muestral de 5,3 minutos, y una desviación estándar de 1,2 minutos.

Según esta información, ¿cuál de las siguientes alternativas es la más cercana a un intervalo de 90% de confianza para el tiempo medio de espera **(en minutos)**?

a) $[4{,}88 \;;\; 5{,}72]$
b) $[4{,}80 \;;\; 5{,}80]$
c) $[4{,}75 \;;\; 5{,}85]$
d) $[4{,}64 \;;\; 5{,}96]$

Pregunta N°22
EYP1113-3-1

Suponga que, durante una tormenta eléctrica, la cantidad de rayos que se producen distribuye Poisson, con esperanza de 40 rayos por hora. Además, cada rayo tiene un 1% de probabilidad de caer en un punto donde es potencialmente dañino.

¿Cuál de las alternativas es más cercana a la probabilidad de que, durante una hora de tormenta, se produzca al menos un rayo potencialmente dañino?

a) 0,4%
b) 33%
c) 40%
d) 66%

Pregunta N°23
EYP1113-3-2

Usted cuenta con un inhalador de dosis medida, pero no sabe cuántas dosis le quedan. Suponga que, cada vez que usted presiona el inhalador, existe una probabilidad $p = 10\%$ de que el inhalador ya no funcione (porque se agotaron sus dosis en el uso anterior).

¿Cuál es el valor esperado de las dosis disponibles en el inhalador?

a) 11
b) 10
c) 9
d) 1

Pregunta N°24
EYP1113-3-4-20

Un fabricante de automóviles asegura a su proveedor de convertidores catalíticos que, en promedio, los convertidores catalíticos en sus vehículos se estropean antes de alcanzar los 95 mil kilómetros. Para comprobarlo, tomó una muestra de 12 vehículos y midió el kilometraje hasta que el convertidor catalítico deja de funcionar. Se obtuvo una media de 86,2 mil kilómetros y una desviación estándar de 12,4 mil kilómetros.

Asuma que dichas distancias medidas tienen distribución normal, y son independientes.

Con la información dada, ¿existe evidencia estadística para asegurar que el kilometraje medio al momento de que el convertidor catalítico deja de funcionar, es menor a los 95 mil kilómetros?

a) Con un 1% de significancia **sí**
b) Con un 1% de significancia **no**, pero con un 5% de significancia **sí**
c) Con un 5% de significancia **no**, pero con un 10% de significancia **sí**
d) Con un 10% de significancia **no**

Pregunta N°25
EYP1113-3-6

La cantidad máxima de decibeles permitidos en una fiesta es 35. Suponga que, dada una fiesta cualquiera, la intensidad sonora de los parlantes (en decibeles o "dB") distribuye normal, con media de 31 dB y desviación estándar de 5 dB (además, suponga independencia entre las variables involucradas).

Si en un vecindario se realizan 5 fiestas en una noche de sábado (por supuesto, cuando acabe la pandemia), ¿cuál es, aproximadamente, la probabilidad de que 2 o más fiestas superen la máxima intensidad sonora permitida?

a) 21,2%
b) 28,7%
c) 30,4%
d) 40,9%

Pregunta N°26
EYP1113-3-10

Una empresa está diseñando un alargador eléctrico ("zapatilla eléctrica") para uso doméstico. El alargador debe, al menos, permitir simultáneamente la conexión de una laptop y de una pantalla adicional.

Suponga que el consumo de potencia de una laptop distribuye normal con media de 200 W y desviación estándar de 30 W. Además, el consumo de una pantalla distribuye normal con media de 50 W y desviación estándar de 10 W. Suponga que ambos consumos son independientes.

Considere las siguientes afirmaciones sobre la suma de los consumos de ambos dispositivos:

I. Su valor esperado es 250 W.
II. Su desviación estándar es 40 W.
III. Distribuye t-student con 2 grados de libertad.

¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores es(son) **VERDADERA(S)?**

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo II y III
d) Todas

Pregunta N°27
EYP1113-4-2-20

Un ingeniero industrial desea ajustar un modelo de regresión lineal para explicar el costo (Y) esperado de un pedido de láminas semiconductoras (obleas), como función a su volumen (X) en unidades.

Luego de observar $n = 20$ pedidos, calculó los primeros y segundos momentos centrales de volumen x_i (en miles de unidades) y costo y_i (en miles de pesos).

$$\bar{x} = 1{,}67 \ , \quad \bar{y} = 18{,}56 \ , \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 7{,}57 \ , \quad \sum (y_i - \bar{y})^2 = 598{,}12 \ ,$$
$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 66{,}09$$

¿Cuál de las siguientes alternativas es la más cercana a la ecuación de la recta de regresión ajustada por mínimos cuadrados, que relaciona el costo (en miles de pesos) como función del volumen del pedido (en miles de unidades)?

a) $y = -160{,}37 + 8{,}73 \cdot x$
b) $y = 3{,}98 + 8{,}73 \cdot x$
c) $y = -0{,}38 + 0{,}11 \cdot x$
d) $y = 18{,}37 + 0{,}11 \cdot x$

Pregunta N°28
EYP1113-6-3

Se cuenta con `n` datos de una muestra de una variable aleatoria X, que distribuye normal con valor esperado μ y desviación estándar `sigma`. El promedio de los datos es `meanx`. Se desea contrastar la hipótesis de que $\mu = \mu_0$ (`mu0`) pero, lamentablemente, usted no recuerda la hipótesis alternativa. Las variables `n`, `sigma`, `meanx` y `mu0` se encuentran disponibles en el entorno de R.

La hipótesis alternativa es una de las siguientes:

$$H_a: \mu > \mu_0 \qquad H_a: \mu < \mu_0 \qquad H_a: \mu \neq \mu_0$$

El output en la consola de R es el siguiente:

```
> z0 = (meanx - mu0) / (sigma/sqrt(n))
> z0
[1] -2.345208
> p_val = 2*pnorm(z0)
> p_val
[1] 0.01901647
> alfa = 0.05
> p_val < alfa
[1] TRUE
```

Hints:

- `pnorm` entrega la función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar.
- `sqrt` extrae la raíz cuadrada.
- Las líneas que inician con “>” representan una instrucción, mientras que las que comienzan con “`[1]`” muestran el resultado de la expresión inmediatamente anterior.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **CORRECTA**?

a) La hipótesis alternativa $H_a: \mu \neq \mu_0$ es consistente con los cálculos desarrollados.
b) Bajo la hipótesis nula, la probabilidad de que una muestra aleatoria de tamaño `n` presente un promedio inferior a `meanx` es 5%.
c) Con nivel de significancia `alfa`, no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula.
d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

Pregunta N°29
EYP1113-6-7

Antonia está realizando un estudio demográfico, y debe analizar la edad de inmigración a nuestro país. Suponga que edad de inmigración distribuye normal con varianza conocida e igual a 6,3 años (según el informe más reciente del INE).

Lamentablemente, Antonia cuenta con un número reducido de datos, solo $n = 500$ inmigrantes, cuyo promedio de edades de inmigración es 24,3 años. Dado que la información es limitada, ella ha construido un intervalo de confianza al 95% en base a los datos anteriores.

Considere las siguientes afirmaciones:

I. El intervalo de confianza calculado contiene a la edad de 24 años.
II. De acuerdo a los datos y al nivel de confianza estipulado, el promedio de edad de inmigración a nivel nacional podría ser 25 años.
III. Para dicho nivel de confianza, el máximo error de estimación permitido en el promedio de edad de inmigración es aproximadamente 0,55 años.

¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores es(son) **CORRECTA(S)**?

a) Solo I
b) Solo I y II
c) Solo I y III
d) Ninguna de las anteriores

Pregunta N°30
EYP1113-8-2

Las variables X e Y, cuyos valores se calculan a lo largo de un año, se definen como:

X: Dividendos pagados por compañías petroleras a nivel mundial (en billones de dólares)
Y: Número de doctorados en biología o biomedicina otorgados en Estados Unidos

Para los datos entre los años 1996 y 2009, se ha construido la siguiente recta de regresión entre ambas variables:

$$Y = 41{,}48X + 4.768{,}3$$

Cuyo coeficiente de determinación es $R^2 = 0{,}94$.

Dadas las siguientes afirmaciones:

I. El coeficiente de correlación es aproximadamente $r = 0{,}97$.
II. Existe una relación causal entre las variables descritas.
III. De acuerdo con el modelo, el valor esperado de Y en un año en que los dividendos pagados por compañías petroleras sumaron 20 billones de dólares, es aproximadamente 5.598.

¿Cuáles de las afirmaciones anteriores pueden aseverarse a partir de la información entregada?

a) Solo I y II
b) Solo I y III
c) Solo II y III
d) Todas