

Apuntes de Álgebra Lineal

Carolina B. Becerra O.

Agosto 2020

Índice general

1. Vectores en \mathbb{R}^n	5
2. Sistema de ecuaciones	11
3. Matrices	17
4. Determinantes	29
5. Espacios vectoriales	33
6. Transformaciones lineales	41
7. Valores y vectores propios	43
8. Ortogonalidad	55
9. Matrices Simétricas	63

Capítulo 1

Vectores en \mathbb{R}^n

Definición 1.1. El conjunto de n tuplas ordenadas de números reales se denota por \mathbb{R}^n y a sus elementos se les llama vectores.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ tal que } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

A x_1, \dots, x_n se les llama componentes o coordenadas del vector v . Al vector cuyas componentes son todas 0 se le llama vector nulo y se denota por $\vec{0}$.

Definición 1.2. Vectores canónicos:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Definición 1.3. Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ la suma de u y v , denotada por $u + v$ es el vector cuyas componentes son la suma de las respectivas componentes de u y v . Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, la ponderación de u por el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ es el vector cuyas componentes son el producto de α por las respectivas componentes de u . Es decir:

$$\text{Si } u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ entonces } u + v = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \alpha u = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Proposición 1.4. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces las operaciones anteriores satisfacen:

- $u + v \in \mathbb{R}^n$.
- $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- $u + v = v + u$.
- $u + \vec{0} = u$.
- $u + (-u) = \vec{0}$.
- $\alpha u \in \mathbb{R}^n$.
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$. Notar que la suma del lado izquierdo es suma de números reales y la suma del lado derecho es suma de vectores.
- $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.
- $1 u = u$.

Observación 1.5. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^n$. $\alpha u = \vec{0}$ si y sólo si $\alpha = 0$ o $u = \vec{0}$.

Definición 1.6. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, el producto punto de u y v , denotado por $u \cdot v$, es la suma de los respectivos productos entre coordenadas. Es decir

$$\text{Si } u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ entonces } u \cdot v = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Proposición 1.7. Sea $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el producto punto satisface:

- $u \cdot v \in \mathbb{R}$.
- $u \cdot \vec{0} = 0$.
- $u \cdot v = v \cdot u$.
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.

- $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v.$
- $u \cdot u \geq 0$ y $u \cdot u = 0 \leftrightarrow u = \vec{0}.$

Ejemplo 1.8. $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \dots, n.$

Definición 1.9. Norma de un vector: Dado $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{u \cdot u}.$$

Definición 1.10. Vector unitario: vector que tiene norma 1.

Definición 1.11. Distancia entre vectores: $d(u, v) = \|u - v\|.$

Ejemplo 1.12. $\|e_i\| = 1$ para todo $i = 1 \dots n.$

$$d(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \sqrt{2} & \text{si } i \neq j. \end{cases} \text{ para todo } i, j = 1, \dots, n.$$

Proposición 1.13. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}^n.$ Entonces

- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|.$
- $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v.$
- $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

DEMOSTRACIÓN:

- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|.$

$$\text{Si } u = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ entonces } \alpha u = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

$$\text{Luego } \|\alpha u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha x_i^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\alpha| \|u\|.$$

- $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v.$

Usando las propiedades del producto punto se tiene que:

$$\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v.$$

- $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

□

Definición 1.14. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$. El ángulo θ entre dos vectores es tal que: $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$

Ejemplo 1.15. $\theta(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \pi/2 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$ para todo $i, j = 1, \dots, n.$

Definición 1.16. Sea $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una combinación lineal de los vectores v_1, \dots, v_m es el vector

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m,$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para algunos $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Definición 1.17. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto generado por S , denotado por $\text{Gen } S$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S .

Ejemplo 1.18. $\text{Gen}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n.$

Proposición 1.19. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

- $\text{Gen } \phi = \text{Gen}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}.$
- $\vec{0} \in \text{Gen } S.$
- $\text{Gen } S$ es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalar.
- $S \subset \text{Gen } S.$

Teorema 1.20. Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Si v_1 es combinación lineal de v_2, \dots, v_m , entonces

$$\text{Gen}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{Gen}\{v_2, \dots, v_m\}$$

Definición 1.21. Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

- S es **linealmente dependiente** (LD) si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ no todos nulos tal que $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}$. (se puede construir al vector cero de manera no trivial).
- S es **linealmente independiente** (LI) si no es LD, es decir si para cualquier combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}$, se tiene necesariamente que $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. (la única manera de construir al vector cero es la trivial).

Observación 1.22. Si $\vec{0} \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces S es LD.

Proposición 1.23. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces S es LD si y sólo si existe un vector de S que es combinación lineal del resto de los vectores de S .

Definición 1.24. Recta en \mathbb{R}^2 . Sea $u \in \mathbb{R}^2$, $d \in \mathbb{R}^2$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.25. Recta en \mathbb{R}^3 . Sea $u \in \mathbb{R}^3$, $d \in \mathbb{R}^3$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.26. Recta en \mathbb{R}^n . Sea $u \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ no nulo, $L = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x = u + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que L pasa por el origen.

Definición 1.27. Plano en \mathbb{R}^3 . Sea $u \in \mathbb{R}^3$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^3$ L.I., $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = u + \alpha d_1 + \beta d_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Si $u = \vec{0}$ se dice que Π pasa por el origen.

Definición 1.28. Sean $u \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$. El hiperplano definido por u y b es $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = b\}$. Si $b = 0$, se dice que pasa por el origen.

Ejemplo 1.29. En \mathbb{R}^4 sea $H = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \text{ tal que } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

$$x \in H \leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$x \in H \leftrightarrow x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ para } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Por lo tanto } H = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Observación 1.30. Todo hiperplano en \mathbb{R}^n que pasa por el origen es un conjunto generado por $(n - 1)$ vectores L.I. Todo hiperplano en \mathbb{R}^n es la suma de un vector posición y un conjunto generado por $(n - 1)$ vectores L.I. Todo hiperplano en \mathbb{R}^3 es un plano en \mathbb{R}^3 .

Observación 1.31. Problema importante: ¿Todo plano en \mathbb{R}^3 es un hiperplano?

Observación 1.32. Problema importante: Dado un conjunto S y un vector b en \mathbb{R}^n . ¿ $b \in \text{Gen } S$?

Capítulo 2

Sistema de ecuaciones

Definición 2.1. Una matriz es un arreglo ordenado de m vectores de \mathbb{R}^n . Notación: $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]$. Se dice que A es una matriz de tamaño $n \times m$, donde m es el número de columnas y n es el número de filas.

Si $v_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ para $j = 1, \dots, m$, entonces $A = (a_{i,j})$, donde $a_{i,j}$ son los coeficientes o entradas de la matriz.

Definición 2.2. Matriz nula es tal que todos sus coeficientes son 0.

Definición 2.3. Matriz cuadrada es tal que $n = m$.

Definición 2.4. Matriz identidad es una matriz cuadrada denotada por I tal que $I = [e_1 \ \dots \ e_n]$.

Definición 2.5. Dada $A = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m]$ de $n \times m$ y $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$, el producto de A por x es la combinación lineal $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_mv_m \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.6. Sea A de $n \times m$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A(x + y) = Ax + Ay$.
- $A(\alpha x) = \alpha Ax$.
- $A\vec{0} = \vec{0}$.

Observación 2.7. Todo sistema de ecuaciones se puede escribir de la forma matricial $Ax = b$.

Definición 2.8. Un sistema de ecuaciones $Ax = b$ es tal que A es una matriz de $n \times m$ asociada al sistema, $b \in \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^m$. $[A \ b]$ es la matriz ampliada del sistema.

El sistema es homogéneo si $b = \vec{0}$ y no homogéneo si $b \neq \vec{0}$. El sistema es consistente si tiene solución e inconsistente si no tiene solución.

Definición 2.9. Una matriz se dice que está en la forma escalonada (F.E.) si:

1. $a_{1,1} \neq 0$.
2. Si el pivote de la fila i está en la columna j , entonces el pivote de la fila $i + 1$ está en la columna k , tal que $j < k$. (Pivote: primer elemento distinto de 0 de la fila).
3. Las filas nulas están al final de la matriz.

Definición 2.10. Una matriz se dice que está en la forma escalonada reducida (F.E.R.) si:

1. Está es la F.E.
2. Todos los pivotes son iguales a 1.
3. Los vectores columna que contienen pivotes son canónicos.

Definición 2.11. Dada una matriz, las operaciones fila son:

1. Tipo *I*: Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
2. Tipo *II*: Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $F_i \rightarrow \lambda F_i$.
3. Tipo *III*: (pivotar) Sumar a una fila, un múltiplo escalar de otra: $F_i \rightarrow F_i + \lambda F_j$.

Observación 2.12. Para solucionar un sistema de ecuaciones se lleva la matriz ampliada a su F.E. o a su F.E.R., usando operaciones fila, luego se reinterpreta el sistema y se resuelve recursivamente hacia arriba. Si el sistema es consistente, a las variables que quedan en posiciones no pivotes se les llama variables libres.

Observación 2.13. Lo anterior funciona pues si $[A|b] \sim [A'|b']$, entonces $Ax = b \leftrightarrow A'x = b'$.

Teorema 2.14. Sea el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con A de $n \times m$, y M la F.E.R. de la matriz $M = [A \ b]$.

Para $b \neq \vec{0}$, el sistema

- es inconsistente si y sólo si M tiene una fila de la forma $[0 \dots 0 \ c]$ con $c \neq 0$,
- es consistente si y sólo si M no tiene una fila de la forma $[0 \dots 0 \ c]$ con $c \neq 0$, y en este caso:
 - tiene solución única si y sólo si M tiene m pivotes,
 - tiene infinitas soluciones si y sólo si M tiene menos de m pivotes (hay variables libres).

Para $b = \vec{0}$ el sistema es consistente ($\vec{0}$ es solución) y

- tiene solución única si y sólo si F.E. de A tiene m pivotes,
- tiene infinitas soluciones si y sólo si F.E. de A tiene menos de m pivotes (hay variables libres).

Definición 2.15. Rango de un sistema: número de pivotes de la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema. Rango de una matriz: número de pivotes de la forma escalonada del sistema homogéneo asociado a la matriz.

Teorema 2.16. Sea el sistema $Ax = b$, u tal que $Au = b$ y los conjuntos $C_1 = \{x : Ax = b\}$ y $C_2 = \{y : Ay = \vec{0}\}$. Entonces $x \in C_1$ si y sólo si $x - u \in C_2$.

Proposición 2.17. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y $A = [v_1 \dots v_m]$. S es L.I. si y sólo si el sistema $Ax = \vec{0}$ tiene solución única.

Proposición 2.18. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y A una matriz cuyas filas son los vectores del conjunto S . S es L.I. si y sólo si la F.E. de la matriz A no tiene filas nulas.

Teorema 2.19. Sea v_1, \dots, v_m un conjunto de vectores de \mathbb{R}^n . Si $m > n$, entonces v_1, \dots, v_m es L.D.

Observación 2.20. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$, $A = [v_1 \dots v_m]$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces $b \in \text{Gen}\{v_1, \dots, v_m\}$ si y sólo si el sistema $Ax = b$ es consistente.

Observación 2.21. Sea A de $n \times m$ y $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R}^n$, para resolver $Ax = b_1, Ax = b_2, \dots, Ax = b_r$ se escalona una única matriz $[A \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r]$ y se interpreta la solución para cada sistema por separado.

Observación 2.22. Para buscar la intersección de n hiperplanos, se resuelve el sistema asociado a las n ecuaciones.

Ejemplo 2.23. Finales

1. Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^7$ y $M = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$. Si $M(2e_1 - e_3 + e_4) = \vec{0}$, ¿cuál es el mínimo de filas nulas que tiene la F.E.R. de M ? Justifique.
2. Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudie la consistencia del siguiente sistema. En los casos en que exista solución, encuéntrelas.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 & = & a \end{array}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a & 3 \\ 0 & -1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto si $a = 3$, el sistema no tiene solución.

Si $a \neq 3$, entonces

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & a(5-a) \end{bmatrix}$$

Luego, si $a \neq 0$ y $a \neq 5$ el sistema no tiene solución.

Si $a = 0$ la solución es única: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -2$.

Si $a = 5$ la solución es única: $x_1 = 9$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 3$.

3. Demuestre que si un sistema de ecuaciones tiene dos soluciones distintas, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones.

Solución:

Sea u y v vectores distintos tales que solucionan el sistema $Ax = b$.

Entonces basta tomar cualquier vector de la forma: $x = u + \alpha(u - v)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y se tiene que:

$$Ax = A(u + \alpha(u - v)) = Au + \alpha(Au - Av) = b + \alpha(b - b) = b.$$

4. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ y $Ax = b$ un sistema de ecuaciones tal que la forma escalonada reducida de $[A \mid b]$ es la matriz,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \end{array} \right]$$

Determine si existen valores de p y de q para que:

- a) el sistema no tenga solución,

- b)* el sistema tenga solución única y en tal caso encuéntrala,
- c)* el sistema tenga infinitas soluciones y en tal caso encuéntrelas,
- d)* b pertenezca al conjunto generado por las columnas de A .
- e)* columnas de A sean L.I.,
- f)* filas de A sean L.I.

Capítulo 3

Matrices

Definición 3.1. Sea A una matriz de $n \times m$, se define una función $T_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$T_A(x) = Ax$$

Ejemplo 3.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $T_A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Observación 3.3. El dominio de esta función es \mathbb{R}^m . La imagen de $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ es $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 3.4. Sea A una matriz de $n \times m$, la función T_A se dice que es lineal pues para $x, y \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

- $T_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y)$,
- $T_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha T_A(x)$.

Observación 3.5. En adelante la función T_A se denotará por A .

Definición 3.6. $M_{n,m}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times m$ con coeficientes reales.

Definición 3.7. Sean $A = [v_1 \ \dots \ v_m]$, $B = [u_1 \ \dots \ u_m] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Las operaciones suma y multiplicación por escalar de matrices se definen por $A + B = [v_1 + u_1 \ \dots \ v_m + u_m]$, $\alpha A = [\alpha v_1 \ \dots \ \alpha v_m]$.

Observación 3.8. $-1 \cdot A = -A$.

Proposición 3.9. Sean $A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A + B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $A + B = B + A$.
- $A + 0 = A$.
- $A + (-A) = 0$.
- $\alpha A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- $1 A = A$.

Definición 3.10. Sea A de $n \times m$ y B de $m \times p$, tal que $B = [u_1 \ \dots \ u_p]$, el producto de A por B es la matriz $A \cdot B = [A \cdot u_1 \ \dots \ A \cdot u_p]$ de $n \times p$.

Proposición 3.11. Sean A, B, C matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $A(BC) = (AB)C$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $IA = AI = A$.
- $0A = A0 = 0$.

Observación 3.12. En general el producto de matrices no es conmutativo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BA.$$

Definición 3.13. Sea A de $n \times m$, la transpuesta de A denotada por A^T es de $m \times n$ y es la matriz que resulta de intercambiar las filas de A por las columnas de la A .

Ejemplo 3.14. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, entonces $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Proposición 3.15. Sean A, B matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

- $(A^T)^T = A$.
- $\alpha(A^T) = (\alpha A)^T$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Definición 3.16. Sea $A = (a_{i,j})$ de $n \times n$.

- A es triangular superior si $a_{i,j} = 0$ para todo $i > j$.
- A es triangular inferior si $a_{i,j} = 0$ para todo $i < j$.
- A es diagonal si $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$.
- A es simétrica si $A = A^T$.
- A es antisimétrica si $A = -A^T$.

Definición 3.17. Sea A de $n \times m$.

- $\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = \vec{0}\}$. Es el conjunto de pre-imágenes del vector cero. Es el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a la matriz A . Es un subconjunto de \mathbb{R}^m .
- $\text{Im}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m : Ax = b\}$. Es el recorrido de la función dada por la matriz A . Es el conjunto de todos los vectores b tal que el sistema $Ax = b$ es consistente. Es el conjunto generado por las columnas de la matriz A . Es un subconjunto de \mathbb{R}^n .

- $C(A)$ es el conjunto generado por las columnas de la matriz A . Es el recorrido de la función dada por la matriz A . Es el conjunto de todos los vectores b tal que el sistema $Ax = b$ es consistente. Es un subconjunto de \mathbb{R}^n . (Está generado por las columnas de la matriz que en su forma escalonada están en las posiciones pivotes).
- $F(A)$ es el conjunto generado por las filas de la matriz A . Es un subconjunto de \mathbb{R}^m . (Está generado por las filas no nulas de la forma escalonada de la matriz).

Observación 3.18. $\text{Im}(A) = C(A) = F(A^t)$.

Teorema 3.19. Sea A de $n \times m$. Entonces

- A es 1-1 (inyectiva) si y sólo si $\text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$.
- A es sobreyectiva si y sólo si $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.20. Sea A de $n \times m$. Entonces

Filas de A son L.D.

- \Leftrightarrow Existe una fila que es combinación lineal del resto.
- $\Leftrightarrow f_n = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1}$ (sin perder generalidad)
- \Leftrightarrow La FER de A tiene por lo menos una fila nula (haciendo las operaciones del tipo III necesarias).

Filas de A son L.I.

- \Leftrightarrow La F.E.R. de A tiene no tiene filas nulas.
- \Leftrightarrow Todas las filas de la F.E.R. de A contienen pivotes.
- \Leftrightarrow Rango de A es n .

A es 1-1

- $\Leftrightarrow \text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$.
- $\Leftrightarrow Ax = \vec{0}$ tiene solución única.
- \Leftrightarrow Columnas de A son L.I.
- \Leftrightarrow Rango de A es m .

- A es sobre
- $\Leftrightarrow \text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
- $\Leftrightarrow Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
- $\Leftrightarrow Ax = e_i$ es consistente para todo vector canónico.
- \Leftrightarrow La FER de $[A \ e_1 \ \dots \ e_n]$ no tiene filas de la forma $[0 \ \dots \ 0 \ u]$ con u un vector no nulo.
- \Leftrightarrow Filas de A son L.I.
- \Leftrightarrow Rango de A es n .

Definición 3.21. A de $n \times n$ se dice invertible si existe una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = I$.

Observación 3.22. Si A es invertible, entonces existe C tal que $CA = I$.
(Se demuestra que $B=C$ y que es única).

Teorema 3.23. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

- A es invertible.
- \Leftrightarrow Existe B tal que $AB = I$.
- \Leftrightarrow Existen u_1, \dots, u_n tal que $A[u_1 \ \dots \ u_n] = [e_1 \ \dots \ e_n]$.
- $\Leftrightarrow Ax = e_i$ es consistente para todo vector canónico.
- $\Leftrightarrow A$ es sobre.
- \Leftrightarrow Filas de A son L.I.
- \Leftrightarrow Rango de A es n .
- \Leftrightarrow Existe B tal que $BA = I$.
- $\Leftrightarrow Ax = \vec{0}$ tiene solución única.
- $\Leftrightarrow A$ es inyectiva.
- \Leftrightarrow Columnas de A son L.I.
- \Leftrightarrow Rango de A es n .

Observación 3.24. Para obtener la inversa de una matriz A , se busca la F.E.R. de $[A \mid I]$, $[I \mid A^{-1}]$.

Proposición 3.25. Sean A y B de $n \times n$. Entonces

- A es invertible si y sólo si $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
- Si A es invertible, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A es invertible si y sólo si A^t es invertible. En este caso $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- Si A es invertible y $\alpha \neq 0$, entonces αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

- Si A es invertible, entonces para todo $r \in \mathbb{N}$, A^r es invertible y se tiene $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r = A^{-r}$.
- Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Observación 3.26. Sean A_1, \dots, A_k matrices cuadradas e invertibles. Entonces $(A_1 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = (A_k)^{-1} \cdot \dots \cdot (A_1)^{-1}$.

Proposición 3.27. Sean A, B, C, D matrices tal que las siguientes operaciones están bien definidas. Entonces

- Si A es invertible y $AB = AC$, entonces $B = C$.
- Si A es invertible y $BA = CA$, entonces $B = C$.
- Si A es invertible y $AB = BA$, entonces $BA^{-1} = A^{-1}B$.
- Si A es invertible, puede ocurrir que $A^{-1}BA \neq B$.
- Si A y B son invertibles, y $ACB = D$, entonces $C = A^{-1}DB^{-1}$.

Observación 3.28. Una matriz diagonal es invertible (o no singular) si y sólo si todos los elementos de su diagonal son no nulos.

Observación 3.29. Una matriz triangular superior (o inferior) es invertible si y sólo si todos los elementos de su diagonal son no nulos.

Ejemplo 3.30. ■ Productos notables. $(A + B)^2$.

- Estudio de $u^t u$ y $u u^t$.
- Sea A, B de $n \times 1$ tal que $1 - A^t B \neq 0$. Demuestre que

$$(I - AB^t)^{-1} = I + \frac{1}{(1 - A^t B)} AB^t.$$

- La triangularidad se mantiene en el producto y al tomar inversas.

Definición 3.31. E_I (E_{II} , E_{III}) es una matriz elemental del tipo I (II, III), si es la matriz que resulta de hacer una operación elemental del tipo I (II, III) a la matriz identidad. Se dice que la matriz E representa dicha operación elemental.

Observación 3.32.

tipo	matriz	operación	transpuesta	operación	inversa	operación
<i>I</i>	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$	E_I	$F_i \leftrightarrow F_j$
<i>II</i>	E_{II}	$F_i \rightarrow \lambda F_i$	E_{II}	$F_i \rightarrow \lambda F_i$	$\widetilde{E_{II}}$	$F_i \rightarrow 1/\lambda F_i$
<i>III</i>	E_{III}	$F_i \rightarrow F_i + \alpha F_j$	$\widetilde{E_{III}}$	$F_j \rightarrow F_j + \alpha F_i$	$\widetilde{\widetilde{E_{III}}}$	$F_i \rightarrow F_i - \alpha F_j$

Observación 3.33. Si A es de $n \times m$ y B es la matriz de $n \times m$ que resulta de hacerle a A una operación elemental, entonces $EA = B$, donde E es la matriz que representa dicha operación elemental.

Proposición 3.34. Si A es de $n \times m$ y $B = \text{F.E. de } A$, entonces $E_k \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 A = B$, donde E_i son las matrices elementales que representan las operaciones elementales que llevan la matriz A en la matriz B .

Teorema 3.35. A de $n \times n$ es no singular si y sólo si A se puede escribir como producto de matrices elementales.

Teorema 3.36. A de $n \times n$ es no singular si y sólo si F.E.R de A es la matriz identidad

Teorema 3.37. Si A es de $n \times m$ y U es una forma escalonada de A , tal que U se obtiene sin necesidad de hacer operaciones del tipo I, entonces existe L triangular inferior invertible, tal que

$$A = LU$$

Teorema 3.38. Si A es de $n \times m$ y U es una forma escalonada de A , tal que U se obtiene con la necesidad de hacer operaciones del tipo I, entonces existe L triangular inferior invertible y P una matriz producto de lementales del tipi I, tal que

$$PA = LU$$

Observación 3.39. Si $A = LU$, para resolver $Ax = b$ se hace el cambio de variable $Ux = y$.

Observación 3.40. Si $PA = LU$, para resolver $Ax = b$ se multiplica el sistema por P y luego se hace el cambio de variable $Ux = y$.

Definición 3.41. Si A es de $n \times n$ la forma cuadrática asociada a A es $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$q_A(v) = v^t A v$$

Observación 3.42. Si A es de $n \times n$, se tiene que

$$q_A = q_{A^t} = q\left(\frac{A+A^t}{2}\right)$$

La matriz simétrica $B = \left(\frac{A+A^t}{2}\right)$, es la única tal que

$$q_A = q_B$$

En adelante las matrices que definen a formas cuadráticas serán cuadradas y simétricas.

Definición 3.43. Dada A de $n \times n$, la submatriz principal A_k para $k = 1, \dots, n$ es la matriz que resulta de eliminar la últimas $n - k$ filas y las últimas $n - k$ columnas de A . Notar que $A_n = A$.

Proposición 3.44. Si A es de $n \times n$ y sus submatrices principales A_1, \dots, A_{n-1} son invertibles, entonces A admite la descomposición LU . Si además A es invertible y L tiene sólo unos en su diagonal, entonces L y U son únicas.

Teorema 3.45. Sea $A = A^t$. Si $A = LU$, entonces existe D diagonal tal que $A = LDL^t$. (Entonces el signo de A es igual al signo de D).

Definición 3.46. Una matriz (o su forma cuadrática asociada) se dice:

- positiva definida si $\forall v \neq \vec{0}, q_A(v) > 0$.
- negativa definida si $\forall v \neq \vec{0}, q_A(v) < 0$.
- semidefinida positiva si $\forall v \neq \vec{0}, q_A(v) \geq 0$.
- semidefinida negativa si $\forall v \neq \vec{0}, q_A(v) \leq 0$.

Observación 3.47. Si D es diagonal, con elementos d_1, \dots, d_n en su diagonal, entonces D (o q_D) es

- positiva definida si $d_i > 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

- negativa definida si $d_i < 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.
- semidefinida positiva si $d_i \geq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.
- semidefinida negativa si $d_i \leq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Proposición 3.48. Sea $A = A^t$. Si A es positiva definida, entonces

- A es invertible.
- A_k es positiva definida, para todo $k = 1, \dots, n$.
- A_k es invertible, para todo $k = 1, \dots, n$.

Teorema 3.49. Sea $A = A^t$. A es positiva definida si y sólo si existe L triangular inferior invertible con unos en su diagonal, y D diagonal, con elementos en la diagonal positivos, tal que $A = LDL^t$.

Observación 3.50. En el teorema anterior se define a \sqrt{D} como la matriz diagonal, que en su diagonal tiene las raíces positivas de los elementos de la diagonal de D . Entonces

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = R^tR$$

que es llamada la descomposición con raíz cuadrada de una matriz positiva definida (Descomposición de Cholesky).

Ejemplo 3.51. Finales

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = LU \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^t \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = R^t R
\end{aligned}$$

2. Escriba una matriz que no tenga inversa por la derecha ni por la izquierda.
3. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Demuestre que A es no singular si y sólo si $ad - bc \neq 0$.
4. Sea A una matriz 1-1 de $n \times m$. Demuestre que si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es L.I., entonces $\{Av_1, \dots, Av_r\}$ es L.I.
5. Sea $A = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6]$ una matriz de 4×6 , tal que su forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

- a) Determine un conjunto generador de vectores L.I. para $C(A)$.
 - b) Determine el $\text{Nul}(A)$.
 - c) Determine si $\{v_1, v_2, v_4\}$ es L.I. o L.D.
6. Sea A de $n \times m$ tal que admite la factorización $A = LU$. Demuestre que si U tiene inversa por la izquierda, entonces A tiene inversa por la izquierda.

7. Suponga que U se obtiene de hacer en A el intercambio de la fila 1 con la 2 y luego restar la fila 2 a la fila 3. Use $PA = LU$ para resolver el sistema $Ax = b$ donde:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. Use Cholesky para clasificar las siguientes formas cuadráticas y exprese-las como una suma ponderada de cuadrados.

- $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 2y^2 + 15z^2$.
- $x^2 + 4xy + 2xz + 4yz + y^2 + z^2$.

9. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que AA^t es positiva definida.

10. Encuentre la factorización de Cholesky de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

11. Sea A de 3×4 tal que la F.E.R. de $[A \mid I]$ es

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Sin calcular A ni A^t :

a) Determine el $\text{Nul}(A)$.

b) Determine el $\text{Nul}(A^t)$.

c) Determine la solución general de $A^t x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

d) Sea A una matriz $1 - 1$ de $n \times 3$. Demuestre que la imagen por A del hiperplano $x_2 = 0$ es un conjunto generado por dos vectores L.I.

Capítulo 4

Determinantes

Definición 4.1. Determinante es una función: $\text{Det} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $|I| = 1$
- Si $E_I A = B \rightarrow -|A| = |B|$
- Si $E_{II} A = B \rightarrow \lambda|A| = |B|$
- Si $E_{III} A = B \rightarrow |A| = |B|$

Observación 4.2. Tomando $A = I$ en la definición: $|E_I| = -1$, $|E_{II}| = \lambda$, $|E_{III}| = 1$. Reemplazando en la definición queda que si E es una matriz elemental, entonces $|EA| = |E| \cdot |A|$.

Observación 4.3. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $|A| = ad - bc$

Proposición 4.4. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- Si A tiene dos filas iguales, entonces $|A| = 0$.
- Si A tiene una fila nula, entonces $|A| = 0$.
- Si A es triangular o diagonal, entonces $|A| = \prod a_{i,i}$.

Teorema 4.5. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

Teorema 4.6. Sean A y B matrices cuadradas. Entonces $|AB| = |A| \cdot |B|$.
(Usar: A y B son invertibles si y sólo si AB es invertible.)

Proposición 4.7. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- $|A^t| = |A|$
- Si A es invertible, entonces $|A^{-1}| = 1/|A|$

Definición 4.8. Menor i, j de una matriz A es el determinante de la matriz que resulta de eliminar de A la fila i y la columna j . Notación: $M_{i,j} =$. Cofactor i, j de una matriz A es $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$

Teorema 4.9. $|A| = a_{i,1}C_{i,1} + \dots + a_{i,n}C_{i,n}$ para todo $i = 1, \dots, n$. (caso $i = 1$)

Proposición 4.10. Sea A una matriz de cuadrada. Entonces

- Si $PA = LU$, entonces $(-1)^k |A| = \prod u_{i,i}$
- Si $A = LDL^t$, entonces $|A| = \prod d_{i,i}$

Definición 4.11. Sea A una matriz cuadrada. La adjunta de A : $\text{Adj}(A) = (c_{i,j})^t$.

Teorema 4.12. Sea A una matriz cuadrada. Entonces $A \cdot \text{Adj}(A) = \text{Adj}(A) \cdot A = |A| I$

Proposición 4.13. Sea A una matriz cuadrada. Si A es invertible, entonces $A^{-1} = 1/|A| \text{Adj}(A)$

Proposición 4.14. Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y $Ax = b$ un sistema de ecuaciones. Si A es invertible, entonces $x = A^{-1}b = 1/|A| \text{Adj}(A)b$, es decir, para $j = 1, \dots, n$ se tiene que

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

donde A_j es la matriz A excepto en la columna j que es reemplazada por b .

Proposición 4.15. Sea A una matriz simétrica. A es positiva definida si y sólo si, los determinantes de las submatrices principales son todos positivos.

Ejemplo 4.16. Finales

1. Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 5$, encuentre $|2A|$, $|4A|$, $|2^k A|$, $|A^5|$, $|-A|$, $|A^{-1}|$, $||A|A^{-1}|$, $|A^{-3}|$, $||A|A|$
2. Sean $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$, encuentre el $|A|$ si
 $A = \begin{bmatrix} v_1 - v_3 + v_4 & -v_2 - v_3 & v_3 - v_1 & v_1 + v_2 + 2v_4 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$
3. Sea A de 5×5 tal que $\text{Det}(A - I) = 0$.
 Demuestre que existe $v \in \mathbb{R}^5$ tal que $Av = v$.
4. Dé un ejemplo de matrices tal que $|A + B| \neq |A| + |B|$.
5. Sea $a \in \mathbb{R}$, calcule el determinante de la siguiente matriz de $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}$$

Solución:

Si $a = 1$, quedan todas las filas iguales y entonces el determinante es 0.

Haciendo las operaciones: $F_i \rightarrow F_i - F_{i+1}$, para $i = 1, \dots, n-1$ queda:

$$= \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_i \rightarrow (1/(a-1))F_i$, para $i = 1, \dots, n-1$ queda:

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_n \rightarrow F_n - F_1, \dots, F_n \rightarrow F_n - F_{n-1}$ queda:

$$= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+n-1 \end{vmatrix}.$$

Queda una matriz diagonal, entonces el determinante pedido es:

$$(a-1)^{n-1}(a+n-1).$$

Capítulo 5

Espacios vectoriales

Definición 5.1. Un conjunto no vacío V es un espacio vectorial sobre los reales si existen dos operaciones: suma y multiplicación por escalar tal que:

- $+$ es cerrada: $\forall u, v \in V \ u + v \in V$
- $+$ es asociativa: $\forall u, v, w \in V \ (u + v) + w = u + (v + w)$
- $+$ es conmutativa: $\forall u, v \in V \ u + v = v + u$
- Existe un neutro para la $+$: $\exists \vec{0}_V \forall u : \vec{0}_V + u = u + \vec{0}_V = u$
- Existe un inverso para la $+$: $\forall u \exists (-u) : u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$
- \cdot es cerrada: $\forall u \in V, \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha \cdot u \in V$
- $\forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- $\forall u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
- $\forall u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ (\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta u)$
- $\forall u \in V \ 1 \cdot u = u$

A los elementos de V se les llama vectores.

Ejemplo 5.2. Algunos espacios vectoriales:

- \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R} .
- $P_n(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{R} .

- $M_{n,m}(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{R} .
- $C[a, b]$ sobre \mathbb{R} .

Proposición 5.3. Si V es un espacio vectorial sobre K , entonces

- $\vec{0}_V$ es único.
- $-(u + v) = (-u) + (-v)$.
- $-u$ es único.
- $\alpha \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V$.
- $0 \cdot u = \vec{0}_V$.
- $\alpha \cdot u = \vec{0}_V$ si y sólo si $\alpha = 0$ o $u = \vec{0}_V$.

Definición 5.4. Una combinación lineal de vectores v_1, \dots, v_m es un vector de la forma $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$.

Ejemplo 5.5. En $C[0, \pi]$, $1 \cdot \sin^2 + 1 \cdot \cos^2 = 1$.

Definición 5.6. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$.

- S es linealmente independiente si la única manera de construir al vector cero es la trivial:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0} \rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

- S es linealmente dependiente si es posible construir al vector cero de manera no trivial:

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ no todos nulos, tal que } \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \vec{0}$$

Teorema 5.7. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. S es LD si y sólo si existe $v \in S$ que es combinación lineal del resto de los vectores de S .

Definición 5.8. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. El conjunto generado por S es $\text{Gen } S = \text{Gen}\{v_1, \dots, v_m\} = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \text{ tal que } \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$

Observación 5.9. $\{\vec{0}_V\}$ es L.D. y $\{\vec{0}_V\} = \text{Gen}\{\vec{0}_V\}$

Proposición 5.10. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. v_j es combinación lineal de vectores de $S \leftrightarrow \text{Gen } S = \text{Gen}(S - \{v_j\})$

Proposición 5.11. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$. Si S es LI y $v \in \text{Gen } S$, entonces v se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de S .

Definición 5.12. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $U \subseteq V$. U es un subespacio de V si es distinto del vacío y con las operaciones heredadas de V es un espacio vectorial. Notación: $U \leq V$

Proposición 5.13. $U \leq V$ si y sólo si U es no vacío, es cerrado bajo la suma y es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Observación 5.14. Todo conjunto generado es un subespacio.

Teorema 5.15. Si $V = \text{Gen}\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es L.I., entonces todo conjunto L.I. de V contiene a lo más n elementos.

Definición 5.16. $B \subset V$ es una base de V si B es LI y $\text{Gen } B = V$.

Teorema 5.17. Si B es una base de V y la cardinalidad de B es n , entonces todas las bases de V tienen n elementos. Se dice que la dimensión de V es n . Notación: $\text{Dim}(V) = n$.

Observación 5.18. Se dice que $\{\vec{0}\}$ tiene como base al conjunto vacío y su dimensión es 0.

Proposición 5.19. Si $\text{Dim}(V) = n$, entonces

- S es LI $\rightarrow \#S \leq n$.
- $\text{Gen } S = V \rightarrow \#S \geq n$.

Proposición 5.20. Si $\text{Dim}(V) = n$ y $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, entonces

- S es LI $\rightarrow \langle S \rangle = V$.
- $\text{Gen } S = V \rightarrow S$ es L.I.

Observación 5.21. Si U es subespacio de V y $\text{Dim}(V) = n$, entonces $\text{Dim}(U) \leq \text{Dim}(V)$

Proposición 5.22. Sea A de $n \times m$. Entonces

- $C(A)$ es un subespacio de \mathbb{R}^n de dimensión igual al rango de A .
- $F(A)$ es un subespacio de \mathbb{R}^m de dimensión igual al rango de A .
- A^t es de $m \times n$, $F(A^t) = C(A)$ y $C(A^t) = F(A)$.

Definición 5.23. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $v \in V$ tal que $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. El vector coordenado de x en la base B es:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Proposición 5.24. Sean $u, v \in V$ y B una base de V . Entonces

- $[u + v]_B = [u]_B + [v]_B$.
- $[\alpha u]_B = \alpha [u]_B$.
- $\{u_1, \dots, u_m\}$ es L.I. si y sólo si $\{[u_1]_B, \dots, [u_m]_B\}$ es L.I.
- $u \in \text{Gen}\{u_1, \dots, u_m\}$ si y sólo si $[u]_B \in \text{Gen}\{[u_1]_B, \dots, [u_m]_B\}$.

Definición 5.25. Sean $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ bases de V . Se define la matriz $P = [[v_1]_2 \dots [v_n]_2]$.

Proposición 5.26. Sean $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ bases de V .

- Para todo $x \in V$: $P \cdot [x]_1 = [x]_2$.
- P es invertible.
- $(P)^{-1} \cdot [x]_2 = [x]_1$

Ejemplo 5.27. Finales

1. Sea $\{u_1, u_2, u_3\}$ un conjunto L.I. en \mathbb{R}^4 . Considere las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 & u_3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & u_1 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ es un conjunto L.I. en $M_{4,3}(\mathbb{R})$.

2. Sea A de 5×4 . Demuestre que el siguiente conjunto U es un subespacio de \mathbb{R}^5 .

$$U = \{b \in \mathbb{R}^5 : Ax = b \text{ es consistente}\}$$

3. Sea $U = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(-1) = 0\}$

- a) Demuestre que U es subespacio de $P_3(\mathbb{R})$
- b) Encuentre una base de U
- c) Determine $\dim U$

4. Considere el espacio vectorial $V = C[0, 2\pi]$ y el conjunto

$$U = \{f(x) \in V : f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0\}$$

Demuestre que U es subespacio de V .

5. Sea A de 4×3 , $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Demuestre que si $Ax = \vec{0}$ tiene solución única, entonces $\{A, AB, AC\}$ es un conjunto L.I. en $M_{4,3}(\mathbb{R})$.

Solución:

Sea $\alpha A + \beta AB + \gamma AC = 0$ (matriz nula). p.d.: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Sea $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ tal que $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$.

Y entonces $AB = [v_3 \ v_1 \ v_2]$ y $AC = [v_3 \ v_2 \ v_1]$.

Entonces $[\alpha v_1 + (\beta + \gamma)v_3 \ \beta v_1 + (\alpha + \gamma)v_2 \ \gamma v_1 + \beta v_2 + \alpha v_3] = 0$

Dado que $Ax = \vec{0}$ tiene solución única, entonces se tiene que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es L.I.

De la segunda columna se tiene que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

6. Sean $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y los subespacios

$$U_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : u_1^t A u_1 = 0\} \text{ y } U_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : u_2^t A u_2 = 0\}.$$

a) Demuestre que U_1 es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

Solución:

U_1 es no vacío pues tomando $A = 0$ la matriz nula se tiene que $u_1^t 0 u_1 = 0$.

Dadas $A, B \in U_1$, se tiene que $u_1^t (A + B) u_1 = u_1^t A u_1 + u_1^t B u_1 = 0 + 0 = 0$.

Dada $A \in U_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $u_1^t (\alpha A) u_1 = \alpha (u_1^t A u_1) = \alpha 0 = 0$.

Por lo tanto U_1 es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Calcule bases y dimensión de U_1 y U_2 .

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U_1 \text{ si } a - c - b + d = 0.$$

$$\text{Por lo tanto } U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

La dimensión de U_1 es 3 pues $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U_2 \text{ si } 4a + 2b + 2c + d = 0.$$

$$\text{Por lo tanto } U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

La dimensión de U_2 es 3 pues $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$ es L.I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 6

Transformaciones lineales

Definición 6.1. Sean V y W espacios vectoriales. $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal si $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ y $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Proposición 6.2. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

- $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.
- $T(-v) = -T(v)$.

Observación 6.3. Si B es una base de V , entonces T queda determinada por cómo actúa sobre la base.

Definición 6.4. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- $\text{Nul}(T) = \{v \in V : T(v) = \vec{0}_W\}$.
- $\text{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V : T(v) = w\}$.

Proposición 6.5. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- $\text{Nul}(T)$ es un subespacio de V y su dimensión es la nulidad de T .
- $\text{Im}(T)$ es un subespacio de W y su dimensión es el rango de T .

Observación 6.6. Si B es una base de V , entonces $\text{Gen } T(B) = \text{Im}(T)$.

Definición 6.7. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- Si T es inyectiva se dice que es un monomorfismo.
- Si T es sobre se dice que es un epimorfismo.
- Si T es inyectiva y sobre se dice que es un isomorfismo y se denota por $V \cong W$.

Teorema 6.8. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- T es inyectiva si y sólo si $\text{Nul}(T) = \{\vec{0}_V\}$.
- T es sobre si y sólo si $\text{Im}(T) = W$.

Teorema 6.9. Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

$$\text{Dim Nul}(T) + \text{Dim Im}(T) = \text{Dim}(V).$$

Ejemplo 6.10. Finales

1. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Demuestre

- a) Si T es inyectiva, entonces $\text{Dim } V \leq \text{Dim } W$
- b) Si T es sobreyectiva, entonces $\text{Dim } W \leq \text{Dim } V$

2. Sean V de dimensión 3 y W de dimensión 4 espacios vectoriales tal que $V = \text{Gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ y $W = \text{Gen}\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sea $T : V \rightarrow W$ lineal tal que

$$\begin{aligned} T(v_1 - v_3) &= w_1 + w_2 \\ T(v_1 - v_2 - v_3) &= w_1 + w_3 \\ T(v_1 - v_2 - 2v_3) &= w_1 + w_4 \end{aligned}$$

¿Es T 1-1 ? ¿Es T sobre? Justifique.

3. Sea $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal dada por

$$T(p(x)) = p''(1) + p'(1)x + p(1)x^2$$

Calcule bases para $\text{Nul}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

Capítulo 7

Valores y vectores propios

Observación 7.1. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, supongamos que define una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(u) = Au$.

Si un objeto se encuentra en la posición del plano dada por el vector u_0 , se puede hablar del movimiento de este objeto en el plano dando su posición $u_k = A^k u_0$ en el tiempo k .

Por ejemplo si $u_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ es la posición inicial de un objeto en el plano, entonces la posición en la unidad de tiempo k -ésima es

$$u_k = A^k u_0 = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ veces}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Así } u_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5/2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 21/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 47/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Pero la matriz A que define a T tiene una **particularidad**:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1/2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

¿De qué sirve que la matriz A tenga esa **particularidad**?

$$\text{Usamos que } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos por A^k queda:

$$A^k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 13A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5A^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reemplazando la **particularidad** se tiene que:

$$A^k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5(1/2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Luego la posición en el tiempo k -ésimo está dada por:

$$u_k = 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5(1/2)^k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos entonces preguntar qué pasa si k tiende a infinito, es decir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■ ¿Qué significa esa **particularidad** ?

■ ¿Cómo saber si una matriz tiene esa **particularidad** ?

Definición 7.2. Sea A de $n \times n$, $v \neq \vec{0}$ es un vector propio de A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. Se dice que λ es el valor propio de A asociado a v . Notamos que $v \neq \vec{0}$ pues $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y no es ninguna **particularidad**.

Observación 7.3. Dada una matriz cuadrada, ¿cómo obtener los valores y vectores propios (si es que existen). En la definición se necesita que:

$$Av = \lambda v$$

$$Av - \lambda v = \vec{0}$$

$$Av - \lambda I v = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I) v = \vec{0}$$

$$v \in \text{Nul}(A - \lambda I)$$

$(A - \lambda I)$ es no invertible

$$\text{Det}(A - \lambda I) = 0$$

Proposición 7.4. Sea A de $n \times n$. λ es valor propio de A si y sólo si $|A - \lambda I| = 0$.

Ejemplo 7.5. ■ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.

Se resuelve $\text{Det} \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1/2 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(1/2 - \lambda) = 0$.

Los valores propios son $\{\mathbf{1}, \mathbf{1/2}\}$.

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{1}$ son $v \in \text{Nul}(A - (1)I)$.

Como $A - (1)I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{1/2}$ son $v \in \text{Nul}(A - (1/2)I)$.

Como $A - (1/2)I = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} -2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$ con $\beta \in \mathbb{R}$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.

Se resuelve $\text{Det} \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 = 0$.

Los valores propios son $\{\mathbf{1}\}$.

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{1}$ son $v \in \text{Nul}(A - (1)I)$.

Como $A - (1)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.

Se resuelve $\text{Det} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)^2 = 0$.

Los valores propios son $\{\mathbf{0}\}$.

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{0}$ son $v \in \text{Nul}(A - (0)I)$.

Como $A - (0)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$.

Se resuelve $\text{Det} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0.$

Los valores propios son $\{\mathbf{0}, \mathbf{2}\}.$

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{0}$ son $v \in \text{Nul}(A - (0)I).$

Como $A - (0)I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$ luego $v = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{2}$ son $v \in \text{Nul}(A - (2)I).$

Como $A - (2)I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$ luego $v = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ con $\gamma \in \mathbb{R}.$

■ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

Para obtener valores propios queremos que $\text{Det}(A - \lambda I) = 0.$

Se resuelve $\text{Det} \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0.$

Los valores propios son $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}.$

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{2}$ son $v \in \text{Nul}(A - (2)I).$

Como $A - (2)I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$ luego $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}.$

Los vectores propios para $\lambda = \mathbf{3}$ son $v \in \text{Nul}(A - (3)I).$

Como $A - (3)I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ con $\gamma \in \mathbb{R}$.

Matriz	Valores propios	Vectores propios	Cantidad de vectores propios L.I.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$	2
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\{0\}$	$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$	2
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\{0, 2\}$	$\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$	3
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\{2, 3\}$	$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$	2

Definición 7.6. Sea A de $n \times n$. La ecuación característica de A es $|A - xI| = 0$. La multiplicidad algebraica de λ , valor propio, es la multiplicidad como raíz de $|A - xI| = 0$. (m.a.)

Observación 7.7. Sea A de $n \times n$. Si v_1 y v_2 son vectores propios asociados al valor propio λ , y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αv_1 y $v_1 + v_2$ son vectores propios asociados a λ .

Definición 7.8. Sea A de $n \times n$ y λ un valor propio de A . $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}$ es el espacio propio asociado a λ . La dimensión de E_λ es la multiplicidad geométrica de λ . (m.g.). $E_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda I)$.

Proposición 7.9. Sea A de $n \times n$. Entonces

$$\blacksquare \quad 1 \leq m.g. \leq m.a. \leq n$$

- A tiene a lo más n valores propios.
- Si A es diagonal, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal.
- Si A es triangular superior o inferior, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal.
- A es no invertible si y sólo si 0 es valor propio de A . (Esto NO significa que una matriz no invertible no pueda tener valores propios distintos de cero. Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$).
- Si λ es valor propio de A , entonces λ^m es valor propio de A^m , para $m \in \mathbb{N}$.
- Si λ es valor propio de A y A es invertible, entonces λ^{-1} es valor propio de A^{-1} .
- Los valores propios de una matriz son los mismos que los de su transpuesta. Esto es porque $\text{Det}(A - \lambda I) = \text{Det}(A^T - \lambda I)$. Esto NO significa que los vectores propios son los mismos. Por ejemplo:

Matriz	Valores propios	Vectores propios
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\{1, 2\}$	$E_1 = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, E_2 = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\{1, 2\}$	$E_1 = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, E_2 = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- Si u es vector propio asociado al valor propio λ_1 y v es vector propio asociado al valor propio λ_2 , entonces $\{u, v\}$ es L.I.

- Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A , entonces $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$.
- Existen matrices que NO tiene valores propios reales. Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ pues su ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$.
- Las siguientes expresiones de un determinante son iguales:

$$\begin{array}{l} \text{Det}(P^{-1}AP - \lambda I) \\ \text{Det}(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\ \text{Det}(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ \text{Det}(P^{-1}) \text{Det}(A - \lambda I) \text{Det}(P) \\ \text{Det}(A - \lambda I) \text{Det}(P^{-1}) \text{Det}(P) \\ \text{Det}(A - \lambda I) \end{array}.$$

Definición 7.10. Dos matrices A y B se dicen similares si existe una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = B$. Si dos matrices son similares entonces tienen la misma ecuación característica y los mismos valores propios.

Por ejemplo $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P$
con $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto A y B son similares.

Pero también $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = P^{-1}AP = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P$
con $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto A y D son similares.

Proposición 7.11. Si A y B son similares, entonces tienen los mismos valores propios (tienen la misma ecuación característica). Si L es tal que $L^{-1}AL = B$ y v es vector propio de B asociado a λ , entonces Lv es vector propio de A asociado a λ .

Definición 7.12. Una matriz cuadrada A (o transformación lineal T) es diagonalizable si y sólo si es similar a una matriz diagonal.

Observación 7.13. Dada una matriz A si queremos que exista una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP$ sea igual a una matriz diagonal D , entonces

$$AP = PD$$

Si P tiene columnas v_j y D tiene elementos λ_j en la diagonal entonces:

$$A[v_1 \cdots v_n] = [v_1 \cdots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando se tiene:

$$[Av_1 \cdots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_n v_n]$$

Lo que se traduce en que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de vectores propios.

Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es diagonalizable con $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Proposición 7.14. Si A y B son similares, entonces A es diagonalizable si y sólo si B es diagonalizable.

Teorema 7.15. A es diagonalizable si y sólo si existen n vectores propios L.I. de A . (Es decir cuando $\sum m.g = \sum m.a. = n$).

Corolario 7.16. Si A tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.

Observación 7.17. Si A es diagonalizable, entonces A^m es diagonalizable, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Observación 7.18. Si A es tal que $Au = \lambda u$, entonces $A^k u = \lambda^k u$. Luego $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k u = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k \right) u$.

Observación 7.19. Si $Av = \lambda v$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v =$

- 0 si $|\lambda| < 1$,
- v si $\lambda = 1$,
- no existe si $|\lambda| > 1$.

Definición 7.20. Dado un polinomio $q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ y A matriz cuadrada, se define a $q(A)$ como la matriz $a_0I + a_1A + \dots + a_mA^m$.

Observación 7.21. Dado un polinomio $q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ y D matriz diagonal, se tiene que $q(D)$ es la matriz diagonal cuya diagonal se forma con los elementos de la diagonal de D evaluados en $q(x)$.

Teorema 7.22. Sea A matriz cuadrada y $p(x) = \text{Det}(xI - A)$, entonces $p(A)$ es la matriz nula.

Observación 7.23. Sea A es diagonalizable y $q(x)$ un polinomio. Entonces

$$\blacksquare A = L \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} L^{-1} \rightarrow q(A) = L \begin{bmatrix} q(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(d_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & q(d_n) \end{bmatrix} L^{-1}$$

$$\blacksquare A = L \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} L^{-1} \rightarrow e^A = L \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n} \end{bmatrix} L^{-1}$$

Ejemplo 7.24. Finales

1. Sea A de $n \times n$ tal que $A^8 = 7A^7$. Pruebe que si 7 no es valor propio de A , entonces A es singular.
2. Demuestre que la matriz $\begin{bmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a \end{bmatrix}$ es diagonalizable si y sólo si $|a| > 1$

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que $5x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$.
Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Solución:

Matricialmente queda

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

Polinomio característico de la matriz: $(x - 1/5)(x - 1)$.

Valores propios: $1/5, 1$.

$$E_1 = \langle (1, 1)^t \rangle.$$

$$E_{1/5} = (1, 5)^t.$$

$$L^{-1}AL = D \rightarrow A = LDL^{-1} \rightarrow A^n = LD^nL^{-1}.$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ 5/4 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{5x_1 - x_0}{4}.$$

4. Sea A una matriz de 3×3 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ y la forma escalonada

reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Calcule e^A .

Solución:

De la escalonada reducida $\text{Nul}(A) = \text{Gen}\{(0, 1, 0)^t, (1, 0, 1)^t\}$.

Por lo tanto 0 es un valor propio de A con m.g. = 2.

Además $A(1, 2, 3)^t = 2(1, 2, 3)^t$.

Por lo tanto 2 es un valor propio de A con m.g. = 1. (no puede ser mayor pues la matriz es de 3×3).

La diagonalización queda:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$$A = LDL^{-1} \text{ entonces } e^A = Le^DL^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3-e^2}{2} & 0 & \frac{e^2-1}{2} \\ 1-e^2 & 1 & e^2-1 \\ \frac{3-3e^2}{2} & 0 & \frac{3e^2-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Capítulo 8

Ortogonalidad

Definición 8.1. ■ Dados $u, v \in V$, u es ortogonal a v si $u \cdot v = 0$.
Notación: $u \perp v$.

- $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ es ortogonal si el conjunto no contiene a $\vec{0}$ y $u_i \cdot u_j = 0$ para todo $i \neq j$
- $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ es ortonormal si el conjunto es ortogonal y $u_i \cdot u_i = 1, \forall i$.

Observación 8.2. $u \perp \vec{0}$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Observación 8.3. Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ ortogonal y $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$, entonces

$$\alpha_i = \frac{u \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$$

Observación 8.4. Todo conjunto ortogonal es L.I., y por lo tanto una base de su conjunto generado.

Definición 8.5. Dado $U \leq \mathbb{R}^n$, el ortogonal a U es $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : u \cdot w = 0\}$.

Proposición 8.6. Sea \mathbb{R}^n con el producto punto usual.

- Si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base de U , entonces $U^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : u_i \cdot w = 0 \text{ para } i = 1, \dots, m\}$.
- $\vec{0} \in U^\perp$

- U^\perp es un subespacio de \mathbb{R}^n .
- $\{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^{n\perp} = \{\vec{0}\}$.
- $U^{\perp\perp} = U$
- $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$.
- Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base de U y A de $n \times m$ la matriz $A = [u_1 \dots u_m]$. Entonces $U^\perp = \text{Nul}(A^t)$.
- Dado $v \in \mathbb{R}^n$, existen únicos $u \in U$ y $w \in U^\perp$ tal que $v = u + w$.

Proposición 8.7. Sea $S = \{u_1, \dots, u_m\}$ un conjunto de vectores en \mathbb{R}^n y A de $n \times m$ la matriz $A = [u_1 \dots u_m]$. Entonces

- S es LI si y sólo si $A^t A$ es positiva definida.
- S es ortogonal si y sólo si $A^t A$ es diagonal y positiva definida.
- S es ortonormal si y sólo si $A^t A = I$.

Definición 8.8. Sea U subespacio de \mathbb{R}^n y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \in U$ y $w \in U^\perp$ donde $v = u + w$.

- La proyección ortogonal sobre U es $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $P(v) = u$.
- La proyección ortogonal sobre U^\perp es $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $Q(v) = w$.

Proposición 8.9. Sea U subespacio de \mathbb{R}^n y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \in U$ y $w \in U^\perp$ donde $v = u + w$.

- Si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base de U y A de $n \times m$ es la matriz $A = [u_1 \dots u_m]$, entonces $u = Ax$, donde x es tal que $A^t Ax = A^t v$.
- Si $\{w_1, \dots, w_r\}$ es una base de U^\perp y B de $n \times r$ es la matriz $B = [w_1 \dots w_r]$, entonces $w = By$, donde y es tal que $B^t By = B^t v$.

Proposición 8.10. Sea U subespacio de \mathbb{R}^n , P la proyección ortogonal sobre U y Q la proyección ortogonal sobre U^\perp . Entonces

- P y Q son transformaciones lineales.
- $P + Q = I$ (como t.l.).
- $\text{Nul}(P) = U^\perp$, $\text{Im}(P) = U$.
- $\text{Nul}(Q) = U$, $\text{Im}(Q) = U^\perp$.
- $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (como t.l.).
- Si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base de U y A de $n \times m$ es la matriz $A = [u_1 \dots u_m]$, entonces la matriz de P con respecto a la base canónica es $P = A(A^t A)^{-1} A^t$.
- Si $\{w_1, \dots, w_r\}$ es una base de U^\perp y B de $n \times r$ es la matriz $B = [w_1 \dots w_r]$, entonces la matriz de Q con respecto a la base canónica es $Q = B(B^t B)^{-1} B^t$.
- P y Q son simétricas.
- $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$ (como matrices).
- $P + Q = I$ (como matrices).
- $2P - I = R$ es matriz de reflexión, es simétrica y $R^2 = I$.
- P , Q y R son diagonalizables. Para P : $E_1 = U$ y $E_0 = U^\perp$. Para Q : $E_1 = U^\perp$ y $E_0 = U$. Para R : $E_1 = U$ y $E_{-1} = U^\perp$.

Proposición 8.11. Gram Schmidt: Dado $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ L.I., una base ortogonal de $\langle S \rangle$ es $\{u_1, \dots, u_m\}$, donde:

- $u_1 = v_1$
- $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$
- $u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$
- \dots

Observación 8.12. Descomposición QR .

Sea $A = [v_1 \cdots v_m]$ una matriz con columnas L.I. El problema es encontrar una matriz cuyas columnas formen un conjunto ortonormal que genere lo mismo que las columnas de A , es decir se busca una matriz Q tal que:

$$Q = [u_1 \cdots u_m], \quad \text{Im}(Q) = \text{Im}(A) \quad \text{y} \quad Q^t Q = I.$$

Sea R la matriz cambio de base de $m \times m$, es decir $A = QR$. Entonces

$$A^t A = (QR)^t QR = R^t Q^t QR = R^t IR = R^t R.$$

Dado que A es inyectiva, luego $A^t A$ es positiva definida y basta tomar su descomposición con raíz cuadrada R . Obteniendo R se calcula $Q = AR^{-1}$.

Ejemplo 8.13. Sea $U = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Determine una

base ortonormal de U .

Solución:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Entonces}$$

$$\begin{aligned} A^t A &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} = R^t R \end{aligned}$$

$$\text{Luego } R^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Entonces } Q = \begin{bmatrix} 1\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1\sqrt{3} & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{3} & -1\sqrt{2} & 1\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Entonces } U = \left\langle \begin{bmatrix} 1\sqrt{3} \\ 0 \\ 1\sqrt{3} \\ 1\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2\sqrt{6} \\ 0 \\ 1\sqrt{6} \\ 1\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Proposición 8.14. Sea el sistema $Ax = b$ inconsistente y x^* tal que $\|Ax^* - b\|$ es mínima. Entonces x^* es tal que Ax^* es la proyección de b sobre $\text{Im}(A)$.

Ejemplo 8.15. Finales

1. Determine la proyección de $v = e_1 - e_3 + e_4 + e_5 \in \mathbb{R}^5$ sobre el hiperplano $x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 = 0$.
2. Determine la matriz de proyección sobre el hiperplano $x_1 - x_2 + x_4 = 0$.
3. Sea U subespacio de \mathbb{R}^3 de dimensión 2 tal que

$$P_U(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - e_3) \quad P_U(e_2) = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + e_3)$$

Determine la matriz de proyección sobre U .

4. Encuentre $\min_{x-y-2z=2} (x-3)^2 + (2y-1)^2 + (z+5)^2$ usando proyecciones
5. Sea U el hiperplano en \mathbb{R}^4 , dado por la ecuación $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$. Calcule bases de U y de U^\perp . Calcule la proyección de $v = (2, -1, 3, 0)^t$ sobre U y sobre U^\perp . Calcule la matriz de proyección sobre U y sobre U^\perp .

Solución:

Base de U : $\{(1, 0, -2, 0)^t, (0, 1, 1, 0)^t, (0, 0, 2, 1)^t\}$.

Base de U^\perp : $\{(2, -1, 1, -2)^t\}$.

$$\text{Matriz de proyección sobre } U^\perp: Q = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Usando $P + Q = I$.

$$\text{Matriz de proyección sobre } U: P = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Proyección de v sobre U : Pv , proyección de v sobre U^\perp : Qv .

$$Pv = \frac{1}{10}(4, -2, 22, 16)^t.$$

$$Qv = \frac{1}{10}(16, -8, 8, -16)^t.$$

6. Sea U subespacio de \mathbb{R}^n , P matriz de proyección sobre U y Q matriz de proyección sobre U^\perp . Demuestre que PQ es la matriz nula.

Solución:

Manera 1:

Sea A tal que sus columnas forman una base de U . Entonces $P = A(A^t A)^{-1} A^t$.

Sea B tal que sus columnas forman una base de U^\perp . Entonces $Q = B(B^t B)^{-1} B^t$.

$$\text{Entonces } PQ = A(A^t A)^{-1} A^t B(B^t B)^{-1} B^t.$$

Pero $A^t B$ es la matriz nula, pues las filas de A^t son ortogonales a las columnas de B .

$$\text{Entonces } PQ = 0.$$

Manera 2:

Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base de U .

Sea $\{w_1, \dots, w_r\}$ una base de U^\perp .

Entonces si $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r$.

$$PQx = PQ(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r) = P(\vec{0} + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_r w_r) = \vec{0}.$$

Luego $PQx = \vec{0}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces PQ es la matriz nula.

7. Sea $P = \begin{bmatrix} 6/7 & -2/7 & 1/7 & 1/7 \\ -2/7 & 3/7 & 2/7 & 2/7 \\ 1/7 & 2/7 & 6/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 & -1/7 & 6/7 \end{bmatrix}$ matriz de proyección sobre $U \leq \mathbb{R}^4$. Determine una base de U y de U^\perp .

Solución:

$$P \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Im}(P) = C(P) = U.$$

Entonces $U = \langle (1, 0, 0, 1)^t, (0, 1, 0, 2)^t, (0, 0, 1, -1)^t \rangle$.

O bien $U = \langle (6/7, -2/7, 1/7, 1/7)^t, (-2/7, 3/7, 2/7, 2/7)^t, (1/7, 2/7, 6/7, -1/7)^t \rangle$.

$$\text{Nul}(P) = U^\perp.$$

Entonces $U^\perp = \langle (-1, -2, 1, 1)^t \rangle$.

Capítulo 9

Matrices Simétricas

Definición 9.1. U de $n \times n$ es ortogonal si $U^t U = I$.

Teorema 9.2. Sea U de $n \times n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- U es ortogonal.
- $\|Ux\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- $Ux \cdot Uy = x \cdot y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es ortonormal, entonces $\{Uv_1, \dots, Uv_m\}$ es ortonormal.

Proposición 9.3. Sea A simétrica. Entonces

- A tiene sólo valores propios reales.
- Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A tal que $v_1 \in E_{\lambda_1}$ y $v_2 \in E_{\lambda_2}$, entonces $v_1 \cdot v_2 = 0$.

Definición 9.4. Una matriz A se dice ortogonalmente diagonalizable si existe U ortogonal y D diagonal, tal que $U^t A U = D$.

Teorema 9.5. A es simétrica si y sólo si A es ortogonalmente diagonalizable.

Corolario 9.6. A simétrica es positiva definida si y sólo si todos sus valores propios son positivos.

Definición 9.7. Si A es simétrica y v_1, \dots, v_n son vectores propios (ortonormales) asociados a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces la descomposición espectral de A es:

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^t + \dots + \lambda_n v_n v_n^t.$$

Observación 9.8. Si A es de $n \times m$, se tiene que

1. $\text{Nul}(A^t A) = \text{Nul}(A)$.
2. $\text{Im}(A^t A) = \text{Im}(A^t)$.

Teorema 9.9. Sea A de $n \times m$. Entonces existen U de $m \times m$ y V de $n \times n$ matrices ortogonales tal que

$$V^t A U = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & s_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Observación 9.10. ¿Cómo obtener U ?

La matriz $A^t A$ es simétrica y semi definida positiva. Entonces existe U de $m \times m$ matriz ortogonal tal que

$$U^t A^t A U = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times m} \quad \text{con } d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r > 0.$$

Sea U_1 matriz de $m \times r$ que contiene vectores propios de valores propios no nulos y U_2 matriz de $m \times (m - r)$ que contiene los vectores propios del valor propio 0. Entonces se tiene que:

- $U = [U_1 \ U_2]$.
- Los vectores columna de U_1 forman una base de $\text{Im}(A^t A) = \text{Im}(A^t)$.
- Los vectores columna de U_2 forman una base de $\text{Nul}(A^t A) = \text{Nul}(A)$.

$$\blacksquare (AU_1)^t(AU_1) = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Observación 9.11. ¿Cómo obtener V ?

Sea V_1 de $n \times r$ la matriz $V_1 = AU_1\sqrt{D}^{-1}$.

Sea V_2 de $n \times (n-r)$ la matriz cuyas columnas completan una base ortogonal con las columnas de V_1 .

Entonces se considera $V = [V_1 \ V_2]$.

Ejemplo 9.12. Finales

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Encuentre la descomposición espectral de A .
2. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Determine la descomposición espectral de A .

Solución:

Valores propios: 3, 6.

$$E_3 = \langle (1, 0, -1)^t, (0, 1, -1)^t \rangle.$$

$$E_6 = \langle (1, 1, 1)^t \rangle.$$

Bases ortonormales:

$$E_3 = \langle (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^t, (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^t \rangle.$$

$$E_6 = \langle (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^t \rangle.$$

Entonces la descomposición queda:

$$A = 3 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/6 & -2/6 & 1/6 \\ -2/6 & 4/6 & -2/6 \\ 1/6 & -2/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obtener la descomposición en valores singulares de A .

Solución:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ con valores propios } \{4, 2, 0\}.$$

$$E_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, E_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ y } E_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ con } U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ y } U_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Entonces los valores singulares de A son: $\{2, \sqrt{2}\}$.

$$V_1 = AU_1\sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ y } V_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ y entonces } V^t A U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$