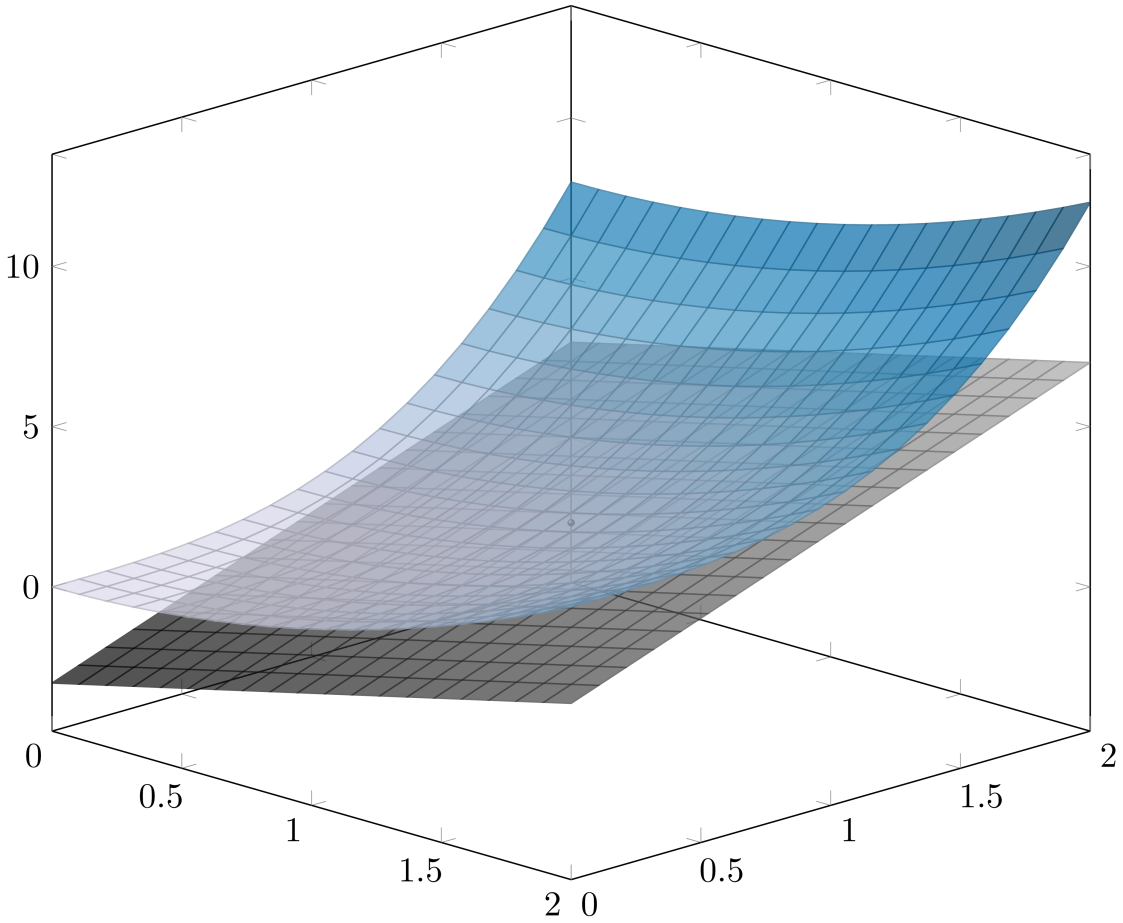
Calculus Beta

November 2019

Komprimeret statisk opslagsversion (pdf) af interaktiv bog



Indhold

1 Differential- og integralregning i én variabel **4**
1.1 Grænseværdi . . . 4
1.2 Kontinuerte og differentiable funktioner . . . 8
1.2.1 Kontinuitet . . . 8
1.2.2 Differentiabilitet . . . 8
1.3 Integration i én variabel . . . 13
1.3.1 Det ubestemte integral: Stamfunktioner . . . 13
1.3.2 Det bestemte integral: Arealer . . . 17
1.3.3 Differentialregningens fundamentalsætning . . . 19

2 Differentiation med to og flere variable **21**
2.1 Terminologi og notation . . . 21
2.2 Grænseværdi og kontinuitet . . . 25
2.2.1 Grænseværdier for funktioner af to variable . . . 25
2.2.2 Kontinuitet for funktioner af to variable . . . 27
2.3 Partielt afledede . . . 28
2.4 Tangent plan og differentialer . . . 31
2.5 Partielt afledede af højere orden . . . 33
2.6 Partielt afledede med 3 eller flere variable . . . 34
2.7 Kædereglen . . . 36

3 Retningsafledte og ekstremumsværdier for funktioner af to og flere variable **38**
3.1 Gradient og retningsafledte . . . 38
3.1.1 Tre og flere variable . . . 42
3.2 Extremumsværdier for kontinuerte funktioner . . . 44
3.2.1 Kritiske punkter og kritiske værdier . . . 45
3.2.2 Anden ordens kriteriet . . . 52
3.2.3 Største og mindste værdier på lukkede og begrænsede mængder. . . . 54
3.3 Lineær regression . . . 59

4 Integration med to eller flere variable **64**
4.1 Itererede integraler . . . 64
4.2 Planintegraler . . . 66
4.2.1 Områder af type I . . . 69
4.2.2 Områder af type II . . . 73
4.2.3 Planintegraler i polære koordinater . . . 74
4.3 Integration med flere variable . . . 84

5 Om vektorer i planen **86**
5.1 Vektorer i planen . . . 86
5.2 Cosinus og sinus til en vinkel . . . 87
5.3 Projektionen af en vektor på en anden vektor . . . 88
5.4 Cosinus og sinus for summen af to vinkler . . . 89

6 De komplekse tal **91**
6.1 Mandelbrotmængden . . . 91
6.2 Regneregler . . . 91
6.3 Geometrisk fortolkning og polær form . . . 93
6.3.1 De Moivres formel . . . 94
6.4 Andengradsligningen og højeregradsligninger . . . 95
6.4.1 Den gode gamle andengradsligning . . . 96
6.4.2 Algebraens fundamentalsætning . . . 97
6.5 Om komplekse tal og periodiske fænomener . . . 97

7 Introduktion til differentialligninger via eksempler **99**
7.1 Lineære differentialligninger med konstante koefficienter . . . 99
7.1.1 Homogene 2. ordens ligninger . . . 99
7.1.2 Homogene ligninger af højere orden . . . 101
7.1.3 Inhomogene ligninger . . . 102
7.2 Ikke-lineære differentialligninger og partielle differentialligninger . . . 103
7.2.1 Den logistiske ligning . . . 103
7.2.2 Laplace-ligningen og bølgeligningen . . . 105

8 Talfølger og uendelige rækker **106**
8.1 Talfølger og konvergens . . . 106
8.2 Uendelige rækker . . . 115
8.2.1 Konvergenskriterier . . . 117
8.2.2 Alternerende rækker og uniform konvergens . . . 120

9 Om at approksimere funktioner med polynomier **122**
9.1 Potensrækker . . . 122
9.2 Taylorrækker . . . 127
9.2.1 Taylors restleds vurdering . . . 132

10 Diskrete stokastiske variable **136**
10.1 Stokastiske eksperimenter og stokastiske variable . . . 139
10.2 Lotterimodellen . . . 143
10.3 Kombinatorik . . . 146
10.4 Uafhængighed . . . 151

11 Binomial–, Multinomial– og Poissonfordelingen **154**
11.1 Binomialfordelingen . . . 154
11.2 Multinomialfordelingen . . . 157
11.3 Poissonfordelingen . . . 161

12 Middelværdi, varians og kovarians − diskrete stokastiske variable **165**
12.1 Middelværdi for diskrete stokastiske variable 165
12.1.1 Fortolkning af middelværdien: Store Tals Lov 168
12.2 Varians for diskrete stokastiske variable 168
12.3 Kovarians for diskrete stokastiske variable 170

13 Kontinuerte stokastiske variable **173**
13.1 Kontinuerte stokastiske variable og tæthedsfunktioner 173
13.2 Eksempler på kontinuerte fordelinger. 175
13.3 Fordelingsfunktioner 179

14 Middelværdi og varians — kontinuerte stokastiske variable **182**
14.1 Middelværdi for kontinuerte stokastiske variable 182
14.2 Varians for kontinuerte stokastiske variable 185

15 Normal- og χ^2-fordelingen **188**
15.1 Normalfordelingen 188
15.2 χ^2-fordelingen 191

Kapitel 1

Differential- og integralregning i én variabel

Meningen med dette kapitel er at give et overblik over nogle af de vigtigste begreber og metoder i forbindelse med differentiation og integration af en funktion af en variabel.

1.1 Grænseværdi

Vi skal arbejde med funktioner af én reel variabel. Så den en er en forskrift, der til et reelt tal[1] x knytter et andet reelt tal $f(x)$. F.eks. funktionen $f(x) = x^2$, der til tallet x knytter tallet x^2. Men vi skal også arbejde med funktioner, der ikke er defineret for alle reelle tal. Som funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

der kun er defineret når $x \neq 0$. De tal, hvor funktionen f er defineret, udgør *definitionsmængden* for f. Definitionsmængden består altså af en del af de reelle tal − en såkaldt *delmængde* af de reelle tal [2]Den matematiske notation for de reelle tal.. For funktionen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

er den naturlige definitionsmængde I alle ikke-negative reelle tal; altså

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

[3]

Lad I være en delmængde af de reelle tal, og lad

$$f : I \to \mathbb{R}^{4}$$

være en funktion. Det kan f.eks. være funktionen defineret ved, at

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1-x}, \tag{1.1}$$

[1]De reelle tal: Dette er gængse betegnelse for de 'sædvanlige' tal; altså alle de tal der kan fremstilles som uendelige decimal tal. Som f.eks. $\pi = 3,1415.....$ De reelle tal udgør en del af 'de komplekse tal', som læseren måske er bekendt med, og indeholder 'de naturlige tal'; altså $1,2,3,4,5,\cdots$ og 'de hele tal', der foruden de naturlige tal også indeholder $0,-1,-2,-3,\cdots$.

[2]$\mathbb{R}$

[3]'$\{\cdots\}$' er de såkaldte 'Tuborg klammer', der sættes rundt om noget for at angive at der er tale om en mængde. '$\in$' betyder 'tilhører'. $x \in \mathbb{R}$ betyder at x tilhører (altså er element i) mængden $\mathbb{R}$.

[4]Notationen for en funktion der er defineret på mængden I, og som tager reelle værdier. Ideen er, at f tager noget fra I, og sender det over (derfor pilen $\to$) i et reelt tal; altså noget fra $\mathbb{R}$.

hvor vi tager mængden I til at være mængden af reelle tal forskellig fra 1. Altså

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}.$$

(1.1) DEFINITION.

Når x_0 og a er reelle tal, siger vi, at f har grænseværdien a for x gående mod x_0 *når afstanden mellem $f(x)$ og a kan gøres vilkårligt lille ved at vælge x i I meget tæt på, men ikke lig med x_0. Når det er opfyldt skriver vi*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

(1.2) EKSEMPEL.

For funktionen (1.1) gælder, at

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2. \tag{1.2}$$

Dette kan indses ved at udnytte, at $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$. Ved at bruge dette kan vi skrive

$$f(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x}.$$

Når x er et tal i definitionsmængden I er $1-x$ ikke 0, og vi kan derfor forkorte udtrykket:

$$f(x) = 1 + x.$$

Afstanden mellem $f(x)$ og 2 er den numeriske værdi af $f(x) - 2$; i symboler

$$|f(x) - 2|,$$

og når $x \neq 1$ er dette

$$|f(x) - 2| = |1 + x - 2| = |x - 1|.$$

Da $|x-1|$ er afstanden mellem x og 1, ser vi at afstanden mellem $f(x)$ og 2, der jo er tallet $|f(x) - 2|$, kan gøres ligeså lille som vi ønsker ved at vælge $x \neq 1$ tæt nok på 1. Dermed har vi vist, at grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod 1 i dette tilfælde er 2. Altså at (1.2) er rigtig.

(1.3) EKSEMPEL.

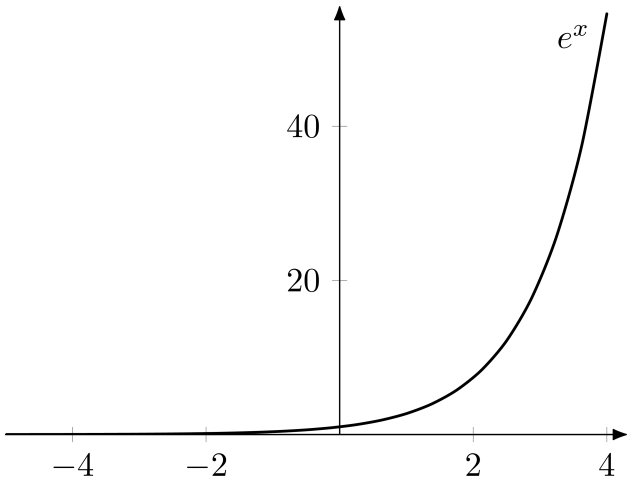
Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, som er givet ved forskriften

$$f(x) = e^{-1/x^2} = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

har som definitionsmængde I alle tal som ikke er 0. I symboler

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

Denne funktion f har grænseværdien 0 for x gående mod 0. Thi når x nærmer sig 0 vil $-\frac{1}{x^2}$ numerisk blive meget stor, men negativ, og exponential-funktionen af sådanne ('meget negative') tal kommer vilkårligt tæt på 0. Se grafen på Figur Figur 1.1.



Figur 1.1: Grafen for eksponential funktionen $f(x) = e^x$.

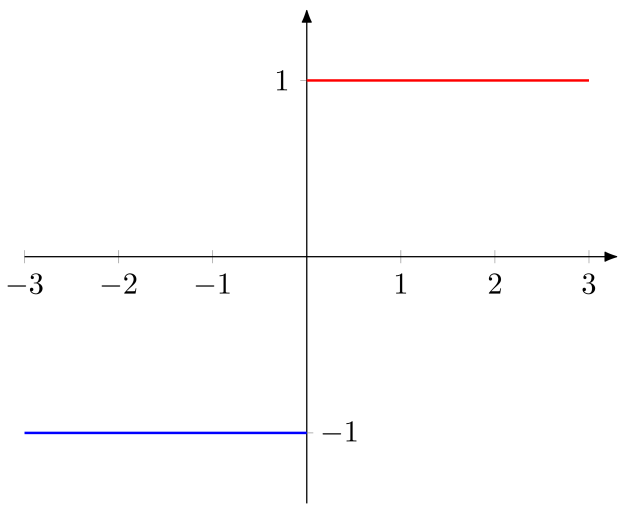
(1.4) EKSEMPEL.

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{når } x \neq 0, \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

har ikke nogen grænseværdi for x gående mod 0. Thi for $x > 0$ er $f(x) = 1$ og for $x < 0$ er $f(x) = -1$. Så uanset hvilket reelt tal t vi forsøger med, vil det *ikke* gælde at t er grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod 0. F.eks. er -1 ikke en grænseværdi af $f(x)$ for x gående mod 0 for vi kan vælge x ligeså tæt på 0 som vi vil, uden at afstanden fra $f(x)$ til -1 bliver mindre end 2.

Grafen for funktionen er vist i Figur 1.2.



Figur 1.2: Grafen for funktionen $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

(1.5) EKSEMPEL.

Udtrykket

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} \tag{1.3}$$

giver ikke umiddelbart mening når $x=-2$, fordi nævneren x^2+5x+6 er 0 når $x=-2$. Grænseværdien

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$$

findes til gengæld. Thi tæller og nævner i brøken kan skrives

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

og

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3),$$

henholdsvis. Så når $x\neq-2$ og $x\neq-3$ er

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+3}.$$

Når x kommer tæt nok på -2, vil tælleren $x-1$ komme ligeså tæt på -3, som vi måtte ønske, og tilsvarende vil nævneren $x+3$ komme ligeså tæt på 1 som vi måtte ønske. Brøken

$$\frac{x-1}{x+3}$$

vil således komme ligeså tæt på $\frac{-3}{1}=-3$ som vi måtte ønske. Dermed har vi indset, at

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x+3}=-3.$$

Nævneren i udtrykket (1.3) er også 0 når $x=-3$. Men udtrykket har ingen grænseværdi for x gående mod -3. For når x er meget tæt på -3, men ikke lig med -3, er den numeriske værdi af

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}=\frac{x-1}{x+3}$$

meget stor. (Fortegnet afhænger af, om x er mindre end -3 eller større end -3.) Og jo tættere x kommer på -3, jo større bliver

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6},$$

numerisk. Dermed kan der ikke findes noget tal a, som brøken kan komme vilkårligt tæt på, når x nærmer sig -3; grænseværdien

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$$

findes altså ikke.

1.2 Kontinuerte og differentiable funktioner

1.2.1 Kontinuitet

Kontinuitet er en egenskab ved en funktion, der betyder noget i retning af, at den er 'sammenhængende'. I dette afsnit bruger vi grænseværdibegrebet til at give en formel definition af kontinuitet. Dette vil gøre det muligt at arbejde analytisk med begrebet – uafhængigt af en evt. visualisering af grafen – og åbne op for senere at kunne definere kontinuitet for funktioner af flere variable.

(1.6) DEFINITION.

(Kontinuitet) En funktion $f : I \to \mathbb{R}$ defineret på en delmængde I af de reelle tal er kontinuert *i et punkt x_0 i I når grænseværdien*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

eksisterer og er lig med $f(x_0)$. Altså når der gælder, at

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Når $f : I \to \mathbb{R}$ er kontinuert i alle punkter i I siger vi, at f er *kontinuert*. De mest almindelige funktioner er alle kontinuerte, men det er på den anden side ikke svært at lave sig en funktion, der ikke er kontinuert. For eksempel er funktionen, hvis graf er vist på Figur 1.2, ikke kontinuert i 0.

Der gælder følgende sætninger.

(1.7) SÆTNING.

Når $f : I \to \mathbb{R}$ og $g : I \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner gælder:

(a) $f + g$ er kontinuert.

(b) fg er kontinuert.

(c) $\frac{f}{g}$ er kontinuert i et ethvert punkt x_0 i I, hvor $g(x_0) \neq 0$.

Lidt groft sagt følger det fra Sætning 7, at algebraiske manipulationer med kontinuerte funktioner altid resulterer i kontinuerte funktioner. F.eks. følger det, at

$$\frac{f(x) - 7g(x)}{f(x)^4 + g(x)^2 + 5}$$

er en kontinuert funktion når f og g begge er det.

1.2.2 Differentiabilitet

Kontinuerte funktioner er ganske vist 'sammenhængende', men de er ikke 'glatte'. Selvom der ikke er huller i grafen for en kontinuert funktion, behøver grafen ikke være glat; den kan have knæk. Differentiabilitet, som vi nu skal indføre, er et krav om en vis 'glathed' af funktionen. Samtidigt er det et fundamentalt redskab til at måle hvor meget og hvor hurtigt funktionen varierer.

(1.8) DEFINITION.

(Differentialkvotient) En funktion $f : I \to \mathbb{R}$ defineret på en delmængde I af de reelle tal er differentiabel *i et punkt $x_0 \in I$ når grænseværdien*

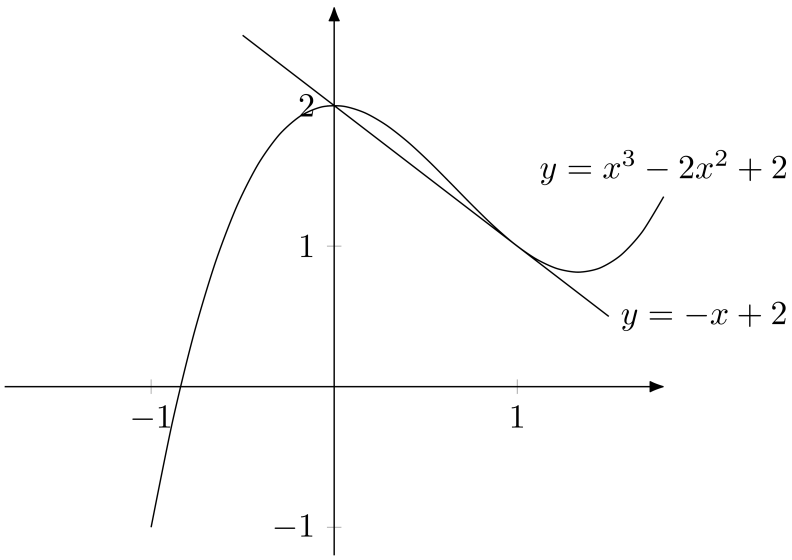
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eksisterer. Når denne grænseværdi findes, kaldes den for differentialkvotienten *af f i x_0, og betegnes $f'(x_0)$.*

Differentialkvotienten har en håndfast geometrisk fortolkning. Det er nemlig hældningskoefficienten for den linie, der er tangent til grafen for f i x_0. Tangenten selv er linien med ligning

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \tag{1.4}$$

hvor $y_0 = f(x_0)$. Se Figur 1.3 for en illustration.



Figur 1.3: Grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ og tangenten til grafen i punktet $x_0 = 1$.

Den følgende sætning siger, at differentiabilitet er et stærkere krav end kontinuitet.

(1.9) SÆTNING.

Hvis $f : I \to \mathbb{R}$ er differentiabel i $x_0 \in I$, så er f også kontinuert i x_0.

Hvis funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ er differentiabel i ethvert af punkterne i I, siger vi, at f er *differentiabel*. Når det er tilfældet har vi en ny funktion på I, nemlig funktionen der sender $x \in I$ over i differentialkvotienten for f i punktet x. I symboler

$$I \ni x \mapsto f'(x).$$

[5] Denne funktion betegnes ofte f' og kaldes *den afledte* funktion af f. En anden notation for den afledte, som også ofte bruges, er

$$\frac{df}{dx}.$$

Differentialkvotienten $f'(x_0)$ kan derfor også betegnes ved symbolet $\frac{df}{dx}(x_0)$ – værdien af funktionen $\frac{df}{dx}$ i punktet x_0.

Det følger fra Sætning 9, at

en differentiabel funktion er kontinuert.

Det omvendte er ikke rigtigt, generelt. En kontinuert funktion er ikke nødvendigvis differentiabel. Et eksempel, der viser det, er funktionen

$$f(x) = |x|,$$

som er kontinuert på hele den reelle akse $\mathbb{R}$, men ikke er differentibel i 0. Der findes også funktioner der er kontinuerte på hele den reelle akse, men som ikke er differentiable i noget punkt.

Det er et faktum, at alle de mest almindelige funktioner er differentiable. Det gælder f.eks.

(a) Polynomier (f.eks. $3x^7 + \sqrt{2}x^5 - 2x^2 + 5$);

(b) Eksponential funktionen $\exp(x) = e^x$;

(c) De trigonometriske funktioner [6]Cosinusfunktionen., $\sin x$, [7]Tangensfunktionen: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$., $\cot x$[8];

(d) Logaritme funktionen $\ln x$[9].

Nogle af disse funktioner er ikke defineret for alle værdier af x. F.eks. er tangens funktionen,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

kun defineret når $\cos x \neq 0$, dvs. når x ikke er et af tallene $\frac{\pi}{2} + k\pi$, hvor k er et helt tal[10], se Figur 1.4. Men de anførte funktioner er alle differentiable i de punkter, hvor de er defineret.

Der gælder en række regneregler for differentialkvotienter. De vigtigste er følgende:

(1.10) SÆTNING.

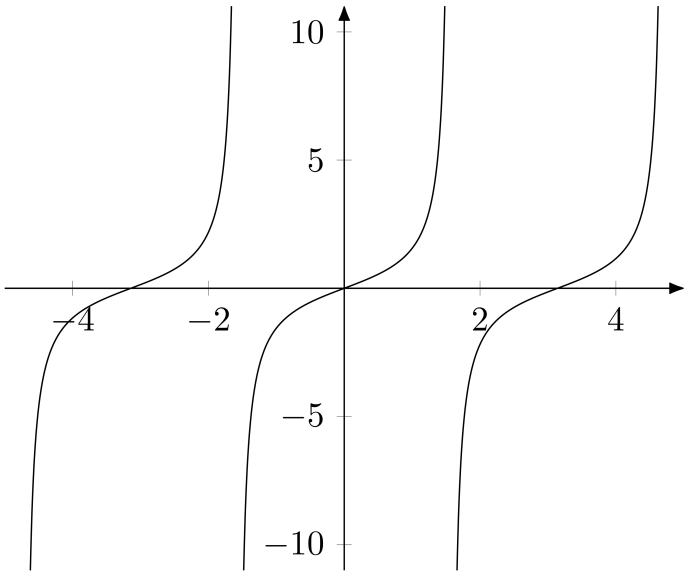
Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0. For ethvert tal $r \in \mathbb{R}$ er funktionen $f + rg$ differentiabel i x_0 og

$$(f + rg)'(x_0) = f'(x_0) + rg'(x_0).$$

Sætning 10 kan formuleres på andre, mere kortfattede måder:

$$(f + rg)' = f' + rg',$$

[5] altså den funktion der sender x fra I over i differentialkvotienten $f'(x)$ af f i punktet x.
[6] $\cos x$
[7] $\tan x$
[8] Cotangensfunktionen: $\cot = \frac{\cos}{\sin}$.
[9] Den inverse funktion til exp.
[10] De hele tal $\mathbb{Z}$ indeholder tallene $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$



Figur 1.4: En del af grafen for funktionen $\tan x$.

eller

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)+rg(x)\big) = \frac{df}{dx}(x) + r\frac{dg}{dx}(x),$$

eller

$$\frac{d}{dx}(f+rg) = \frac{df}{dx} + r\frac{dg}{dx}.$$

(1.11) SÆTNING.

Lad f og g være funktioner der begge er differentiable i et punkt x_0. Så er fg differentiabel i x_0 og

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Sætning 11 kan også formuleres mere kortfattet:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

eller

$$\frac{d}{dx}fg = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}.$$

(1.12) SÆTNING.

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0. Antag at $g(x_0) \neq 0$. Så er $\frac{f}{g}$ differentiabel i x_0 og

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

En kortfattet version af Sætning 12 er

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(1.13) SÆTNING.

(Kædereglen) Lad f og g være funktioner og $x_0 \in \mathbb{R}$ et tal som opfylder at g er defineret og differentiabel i x_0, og at f er defineret og differentiabel i $g(x_0)$. Så er den sammensatte funktion

$$x \longmapsto f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

differentiabel i x_0, og

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

En kortfattet version af Sætning 13 er

$$(f \circ g)' = g'f' \circ g.$$

Med udgangspunkt i disse tre sætninger kan man komme rigtigt langt med differentiation af diverse funktioner. Især når man tager udgangspunkt i en liste med de afledte funktioner f' for de almindeligste funktioner f. En meget kort liste er følgende

- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$;
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$;
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$;
- $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$;
- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$;

F.eks. kan man nu ved brug af Sætning 12 finde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\end{aligned}$$

hvor vi har brugt at $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Når en funktion f er invertibel, altså har en invers funktion f^{-1} som opfylder at

$$f^{-1} \circ f(x) = x,$$

så kan kan den afledte $(f^{-1})'$ af f^{-1} findes ved brug af kædereglen. Det vil blive vist og illustreret i de følgende videoer, hvor formlen

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

bliver udledt.

I mange anvendelser er det vigtigt at kunne afgøre om en funktion er voksende eller aftagende; for at afgøre om det $f(x)$ betyder i den konkrete anvendelse vil vokse, når x vokser, eller aftage, når x vokser. Differentialkvotienten af en funktion giver et nyttigt redskab til at afgøre om en funktion er aftagende eller voksende på hele eller en del af sit definitionsområde. Hvis man studerer en funktion ved at se på dens graf, er det som regel let at se, om funktionen vokser eller aftager, men når man ikke har er realisering af grafen, er differentialkvotienten et afgørende redskab til dette formål. Det er også vigtigt at have en definition af, hvad det vil sige, at en funktion vokser eller aftager, som ikke refererer til et billede af funktionens graf.

(1.14) DEFINITION.

Lad I være en delmængde af definitionsmængden for en funktion f. Vi siger, at f er voksende, *hhv.* aftagende *på I, når der gælder*

$$x, y \in I, x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y),$$

hhv.

$$x, y \in I, x \leq y \;\Rightarrow\; f(y) \leq f(x).$$

Symbolet $\Rightarrow$, der er brugt her, betyder 'medfører'. f er altså voksende, når 'x mindre end eller lig med y medfører, at $f(x)$ er mindre end eller lig med $f(y)$'. Læseren bedes tegne lidt, hvis det er nødvendigt, for at overbevise sig selv om, at denne definition stemmer overens med den mere intuitive fornemmelse af, hvad det vil sige at en funktion vokser eller aftager.

Der gælder

(1.15) SÆTNING.

Lad f være en funktion, som er defineret og differentiabel på et interval I.

(a) f er voksende på I, hvis og kun hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in I$.

(b) f er aftagende på I, hvis og kun hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in I$.

1.3 Integration i én variabel

At integrere en funktion er på flere måder det modsatte, eller omvendte, af at differentiere, og alene af den grund er det en vigtig operation. Samtidigt giver metoden et vigtigt redskab til bestemmelse af arealer.

1.3.1 Det ubestemte integral: Stamfunktioner

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en funktion. I mange tilfælde kan man finde en funktion $g : I \to \mathbb{R}$, der opfylder at f er den afledte funktion af g. Altså en funktion g om hvilket det gælder, at

$$g' = f. \tag{1.5}$$

En sådan funktion g er en *stamfunktion* til f eller et *integral* af f. F.eks. er $g(x) = x^3$ en stamfunktion til $f(x) = 3x^2$. Da differentialkvotienten af en konstant er 0 vil $g(x) + 7$ også være en stamfunktion til $f(x)$ hvis $g(x)$ er det. En stamfunktion er altså kun fastlagt op til addition med en konstant – heraf den lidt nedsættende betegnelse 'ubestemt'.

En stamfunktion til $f(x)$ betegnes ofte ved

$$\int f(x)\,dx,$$

eller endnu kortere blot ved

$$\int f.$$

Det er ikke altid så let at finde en stamfunktion, selv i tilfælde hvor man er sikker på, de findes. Der er to vigtige metoder som ofte anvendes til formålet. De beskrives kortfattet nedenfor i Sætning 16 og Sætning 19. Når disse to sætninger, og den metode der knytter sig til dem, kombineres med et reservoir af stamfunktioner til de mest almindelige funktioner, så kan man faktisk komme rigtigt langt mht. at finde stamfunktioner. Før i tiden fandt man lister over stamfunktioner i bøger eller integral-tabeller, men nu om dage kan mange findes på internettet. F.eks. kan man søge på *'lists of integrals'*. Selvom man ofte ikke finder præcist den stamfunktion, man søger, kan sådanne lister kombineres med de følgende to sætninger, og tilsammen udgør de et potent redskab til bestemmelse af stamfunktioner.

Den første af de to sætninger er en umiddelbar konsekvens af Sætning 11:

(1.16) SÆTNING.

(Partiel integration)

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Partiel integration bruges med fordel når man skal finde en stamfunktion til et produkt af to funktioner (fg' i Sætning 16), hvor man kender en stamfunktion til den ene (g', der har stamfunktion g), og hvor den anden funktion (f) bliver simplere ved differentiation, på en sådan måde, at en stamfunktion til $f'g$ kan findes.

(1.17) EKSEMPEL.

Sætning 16 kan f.eks. benyttes til at finde en stamfunktion til $x\sin x$. Sætter vi nemlig $g(x) = -\cos x$ og $f(x) = x$, får vi fra sætningen at

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \int fg' = fg - \int f'g = f(x)g(x) - \int(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x.\end{aligned}$$

(1.18) EKSEMPEL.

Da $\int e^x\,dx = e^x$ finder vi ved gentagen anvendelse af partiel integration, at

$$\begin{aligned}\int x^3e^x\,dx &= x^3e^x - \int 3x^2e^x\,dx = x^3e^x - 3x^2e^x + \int 6xe^x\,dx \\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - \int 6e^x\,dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Den anden fundamentale metode til at finde stamfunktioner er følgende; en umiddelbar konsekvens af Sætning 13:

(1.19) SÆTNING.

(Integration ved substitution)

$$\int (f' \circ g)g' = f \circ g.$$

(1.20) EKSEMPEL.

Sætning 19 kan f.eks. bruges til at bestemme en stamfunktion til xe^{x^2}. Sætter vi $g(x) = x^2$ og $f(x) = e^x$ er $g'(x) = 2x$ og $f'(x) = e^x$. Så er

$$f' \circ g(x) = f'(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^2}.$$

Vi har altså, at

$$\int xe^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int (f' \circ g)g',$$

da $\frac{1}{2}g'(x) = x$. Ved brug af Sætning 19 får vi så, at

$$\tfrac{1}{2}\int (f' \circ g)g' = \tfrac{1}{2}f \circ g.$$

Altså er

$$\int xe^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x^2}.$$

(1.21) EKSEMPEL.

Nogle gange skal man kæmpe lidt mere for at finde stamfunktionen ved brug af de to sætninger. F.eks. kan det ubestemte integral

$$\int x\sin(2x)\,dx$$

findes på følgende måde. Først skriver vi

$$x\sin(2x) = \frac{x}{2}2\sin(2x).$$

Så finder vi en stamfunktion til $2\sin(2x)$ ved substitution: Sætter vi $g(x) = 2x$ og $f(x) = -\cos x$, får vi fra Sætning 19, at

$$\int 2\sin(2x)\,dx = \int (f' \circ g)g' = f \circ g = -\cos(2x).$$

Ved at bruge denne identitet finder vi ved partiel integration at

$$\begin{aligned}\int x\sin(2x)\,dx &= \int \frac{x}{2}2\sin(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \int \frac{1}{2}\cos(2x)\,dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Vi bruger så substitution igen for at finde $\int \cos(2x)\,dx$:

$$\int \cos(2x)\,dx = \int \frac{1}{2} 2\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int (f' \circ g)g',$$

hvor vi nu har valgt $f(x) = \sin x$ og $g(x) = 2x$. Sætning 19 giver så at

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2} f \circ g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Indsætter vi dette i (1.7) fåes, at

$$\int x\sin(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

(1.22) EKSEMPEL.

I dette eksempel bruger vi Sætning 16 og Sætning 19 til at udlede formlerne

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x), \tag{1.8}$$

og

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x\cos x). \tag{1.9}$$

Med $f(x) = \sin x$ og $g = -\cos x$ får vi, at

$$\int \sin^2 x\,dx = \int fg' = fg - \int f'g = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx.$$

Indsætter vi, at $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, får vi

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x\cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \\ &= -\sin x\cos x - \int \sin^2 x\,dx + \int dx \\ &= -\sin x\cos x - \int \sin^2 x\,dx + x.\end{aligned}$$

Heraf følger, at

$$2\int \sin^2 x\,dx = x - \sin x\cos x,$$

og dermed $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$. Og så er

$$\int \cos^2 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\,dx = x - \tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x) = \tfrac{1}{2}(x + \sin x\cos x).$$

Dermed er vi nået frem til formlerne (1.8) og (1.9).

Ved brug af den trigonometriske identitet $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ kan (1.8) og (1.9) omskrives til

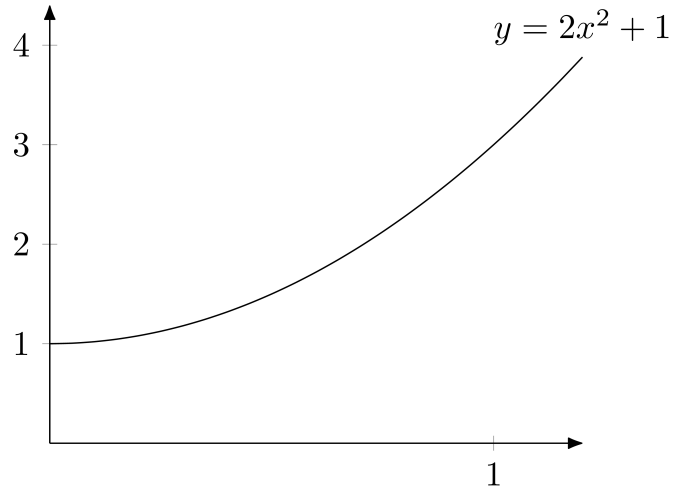
$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x, \tag{1.10}$$

og

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x. \tag{1.11}$$

1.3.2 Det bestemte integral: Arealer

Lad I være et interval på den reelle akse og $f : I \to \mathbb{R}$ en funktion. Det kan f.eks. være intervallet $I = [0,1]$ mellem 0 og 1, og funktionen $f(x) = 2x^2 + 1$, hvis graf er vist på Figur 1.5.



Figur 1.5

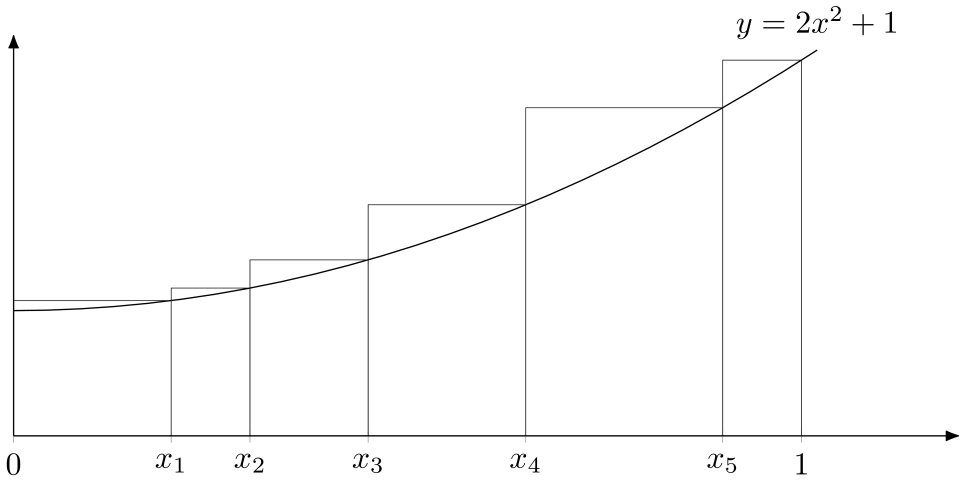
Men i det følgende kan I være et helt vilkårligt interval af typen $I = [a,b]$; altså

$$I = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Vælg nu en inddeling af I ved hjælp af delepunkter mellem a og b :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Se evt. Figur 1.6, hvor $n = 6$.



Figur 1.6: En oversum giver arealet af rektangler − tydeligvis større end arealet under grafen.

Intervallerne $[x_{i-1}, x_i]$ mellem x_{i-1} og x_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$, kalder vi for *deleintervallerne*. Vælger man så et punkt x_i' i deleintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ for hvert $i = 1,2,\ldots,n$, bliver tallet

$$f(x_i')(x_i - x_{i-1})$$

lig med arealet af et rektangel, der går fra x-aksen op til grafen for f over punktet x_i' – ihvertfald når vi antager at f er en positiv funktion, så grafen ligger over x-aksen. Summen

$$f(x_1')(x_1-x_0)+f(x_2')(x_2-x_1)+\cdots+f(x_n')(x_n-x_{n-1})$$

kalder vi for en *middelsum*. Hvis x_i' vælges, således at $f(x_i')$ er den største værdi som f antager på deleintervallet $[x_{i-1},x_i]$, siger vi, at summen er en *oversum*, og hvis x_i' vælges således at $f(x_i')$ er den mindste værdi som f antager på deleintervallet $[x_{i-1},x_i]$, siger vi, at summen er en *undersum*.

Det er et faktum, at under passende betingelser, som alle er opfyldt, hvis $f:I\to\mathbb{R}$ er kontinuert, findes der et tal, som betegnes ved

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1.12}$$

der har følgende egenskab: Når længderne af deleintervallerne $[x_{i-1},x_i], i=1,2,\ldots,n$, alle er tilstrækkeligt små, vil enhver oversum hørende til en sådan inddeling være ligeså tæt på tallet

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

som vi måtte ønske. Tallet (1.12) kalder vi for *integralet*[11] af f på intervallet I.

Det er ikke kun oversummerne, der nærmer sig integralet, når længden af deleintervallerne bliver meget små. Der gælder også, at når længden af deleintervallerne alle er tilstrækkeligt små, vil enhver undersum og enhver middelsum være ligeså tæt på intergralet $\int_a^b f(x)\,dx$ som vi måtte ønske.

Når funktionen f er positiv, så grafen for f ligger over x-aksen, vil integralet (1.12) være arealet af området mellem grafen for f og x-aksen. Hvis derimod f er negativ vil integralet være minus arealet af området mellem grafen for f og x-aksen.

Følgende indskudsregel er ofte nyttig ved beregning, og som vi skal se i næste afsnit, også ved mere teoretiske argumenter.

(1.23) SÆTNING.

(Indskudsreglen) Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuert, og c et tal der ligger mellem a og b (dvs. at $c\in[a,b]$), gælder

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Integralet (1.12) bliver meget ofte beregnet ved brug af en stamfunktion. Der gælder nemlig følgende

(1.24) SÆTNING.

Antag at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuert funktion, og at F er en stamfunktion til f (dvs. at $F'=f$). Så er

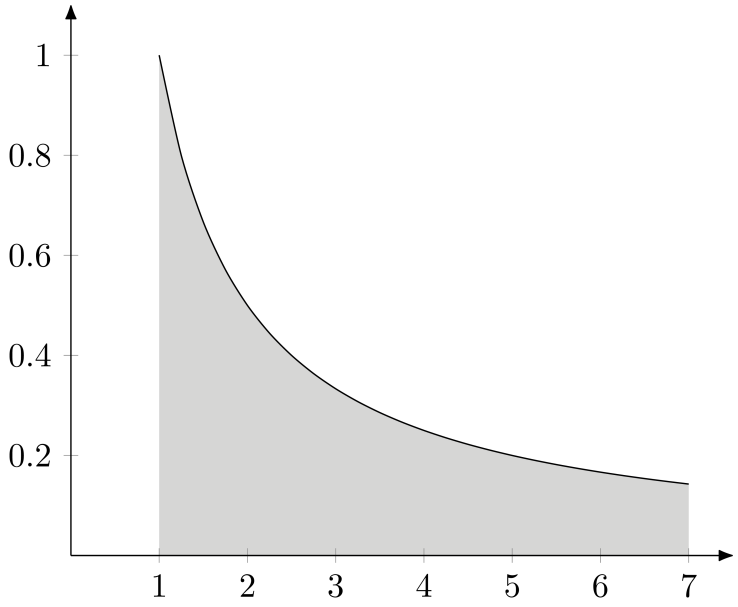
$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

[11] Det bestemte integral; integralet af funktionen f over intervallet fra a til b.

Denne uendeligt nyttige sætning er en konsekvens af differentialregningens fundamentalsætning, som er emnet for næste afsnit. En anden vigtig konsekvens er følgende: *Hvis f er en differentiabel funktion, så f' er konstant* 0, *er f en konstant funktion.*

(1.25) EKSEMPEL.

Ved brug af Sætning 24 behøver vi ikke tegne området i planen, der ligger over intervallet $[1,7]$ og under grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, for at kunne beregne dets areal. (Vi gør det nu alligevel, fordi vi kan. Se Figur 1.7)



Figur 1.7: Området over $[1,7]$ og under grafen for $\frac{1}{x}$.

Da $\ln x$ er en stamfunktion er arealet

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7.$$

Integration ved substitution for bestemte integraler:

1.3.3 Differentialregningens fundamentalsætning

Følgende sætning, der ofte kaldes differentialregningens fundamentalsætning, fortæller hvorledes det bestemte og det ubestemte integral er knyttet sammen. Den giver også en meget håndfast fortolkning af det forhold, at areal-bestemmelse ved brug af det bestemte integral er den inverse operation til differentiation.

(1.26) SÆTNING.

Lad I være et interval og $c \in I$ et tal i I. Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Så er funktionen

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \tag{1.13}$$

en stamfunktion til f på intervallet $\{x \in I : x > c\}$.

Der gælder altså, at funktionen (1.13) er differentiabel når $x \in I$ og $x > c$, med differentialkvotient $F'(x) = f(x)$.

I ord siger sætningen – i kortfattet version – at *enhver kontinuert funktion har en stamfunktion*, og at en stamfunktion er givet ved integralet

$$\int_c^x f(t)\,dt.$$

Sætning 24, som er den der oftest bruges til beregning af bestemte integraler, følger fra differentialregningens fundamentalsætning på følgende måde: Vælg c så $c < a$. Når F er en stamfunktion for f adskiller F sig fra $\int_c^x f(t)\,dt$ ved en konstant, da de jo begge er stamfunktioner til f. Derfor er

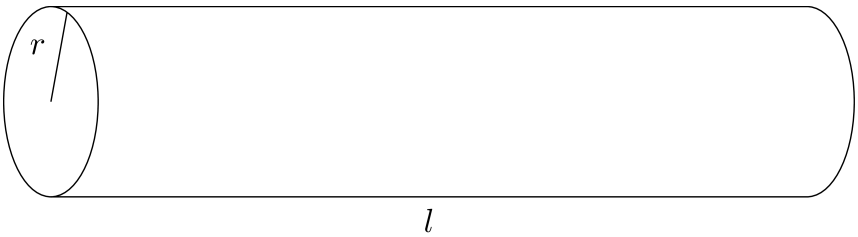
$$F(b) - F(a) = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Kapitel 2

Differentiation med to og flere variable

2.1 Terminologi og notation

Meget få ting i denne verden afhænger kun af én ting. Så når funktioner bruges til at beskrive fænomener af forskellig slags, er det nødvendigt at tillade, at funktionerne kan afhænge af flere variable. F.eks. er rumfanget af en cylinder en funktion af både radius og længden af cylinderen.



Figur 2.1: En cylinder med længde l or radius r.

Hvis r betegner radius af cylinderen, og l længden af den, er rumfanget V givet ved formlen

$$V = \pi r^2 l. \tag{2.1}$$

Det forhold, at V afhænger af både r og l kan udtrykkes i notationen ved, at rumfanget V skrives

$$V(r,l).$$

For at kunne generalisere opfatter vi (2.1) som en forskrift, der fastlægger værdien af $V(r,l)$ ud fra r og l.

(2.1) DEFINITION.

En funktion $f(x,y)$ af to variable x og y er en forskrift, der fastlægger værdien $f(x,y)$, når tal-parret (x,y) er kendt.

Rumfanget af en cylinder definerer funktionen $f(x,y)$ af to variable ved forskriften

$$f(x,y) = \pi x^2 y,$$

når vi lader x spille rollen som radius, og y rollen som længde.

Hvis vi er interesserede i rumfanget af en kasse i stedet for en cylinder, er formlen for rumfanget V givet ved formlen

$$V = hlb$$

hvor h, l og b betegner højde, længde og bredde af kassen, henholdsvis. I dette tilfælde får vi brug for en funktion $f(x,y,z)$, der afhænger af de tre tal x,y,z. Forskriften for funktionen bliver nu

$$f(x,y,z) = xyz.$$

Som læseren utvivlsomt kan forestille sig, er der andre størrelser og fænomener som det kræver kendskab til 4, 5 eller flere tal for at få fastlagt. Dette leder til flg. udvidelse af Definition 1:

(2.2) DEFINITION.

Lad $n \in \mathbb{N}$ være et naturligt tal. En funktion $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ af n variable $x_1,x_2,\ldots,x_n$ er en forskrift, der fastlægger værdien $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ud fra de n tal $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Rumfanget af en kasse er altså en funktion af 3 variable, mens rumfanget af en cylinder er en funktion af (kun) 2 variable.

Ligesom med funktioner af én variabel, er det ikke sikkert at funktionen er defineret for alle værdier af de variable. F.eks. giver udtrykket

$$f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$$

kun mening når $x^2+y^2 < 1$. Og selvom et matematisk udtryk som for eksempel

$$f(x,y) = \pi x^2 y$$

giver mening for alle talpar (x,y), kan der være god grund til kun at ville tillade bestemte værdier af x og y. F.eks. når $\pi x^2 y$ repræsenterer rumfanget af en cylinder, hvor x er radius og y er længden, er det naturligt kun at tillade positive værdier af x og y; altså $x > 0$ og $y > 0$.

De talpar (x,y) for hvilke vi kan og vil definere funktionen $f(x,y)$, kalder vi for *definitionsmængden* for funktionen f, og vi betegner den ved $\mathscr{D}(f)$. Og mere generelt er definitionsmængden for en funktion $f(x_1x_2,\ldots,x_n)$ af n variable den mængde af n-tupler $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, hvor vi kan og vil betragte de tilhørende funktionsværdier $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

(2.3) EKSEMPEL.

Udtrykket

$$f(x,y,z) = xyz \tag{2.2}$$

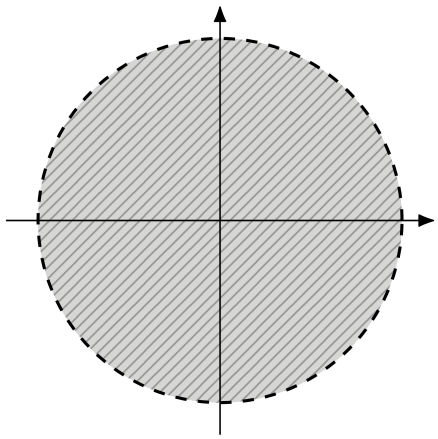
fastlægger en funktion f af de tre variable x,y,z. Fra et matematisk synspunkt er der ikke spor i vejen for, at vi som definitionsmængde bruger $\mathbb{R}^3$; rummet at alle tripler (x,y,z), hvor x,y,z er reelle tal. Men hvis $f(x,y,z)$ skal repræsentere rumfanget af en kasse med højde, bredde og længde givet ved x,y og z, hhv., er det mest naturlige at forlange, at x, y og z alle er positive, og så lade definitionsmængden $\mathscr{D}(f)$ være mængden

$$\mathscr{D}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\right\}.$$

(2.4) EKSEMPEL.

For funktionen

$$f(x,y) = \log(1-x^2-y^2), \tag{2.3}$$



$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1\}$$

Figur 2.2: Definitionsmængden for funktionen (2.3).

har vi ikke tilbudt nogen praktisk fortolkning, og det er derfor naturligt at vælge definitionsmængden så stor som mulig. Og (2.3) giver mening når $1 - x^2 - y^2 > 0$, så vi får definitionsmængden

$$\mathscr{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Det er mængden af koordinater (x,y) for punkterne i den åbne cirkelskive med centrum i $(0,0)$ og radius 1. Se Figur 2.2.

Ligesom for funktioner af én variabel, kan man indføre *grafen* $\mathscr{G}(f)$ for en funktion af to eller flere variable. Husk at grafen for en funktionen $f(x)$ af én reel variabel x består af talparrene $(x, f(x))$ – omend de fleste ved grafen for f forstår den tegning, der fremkommer, når disse punkter puttes ind i et retvinklet koordinat-system. For en funktion $f(x,y)$ af to variable med definitionsmængden $\mathscr{D}(f)$ er grafen $\mathscr{G}(f)$ for f de tripler af tal (x,y,z) hvor $(x,y) \in \mathscr{D}(f)$ og $z = f(x,y)$. I matematisk notation,

$$\mathscr{G}(f) = \left\{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathscr{D}(f)\right\}.$$

Ligesom for funktioner af én variabel er grafen for en funktion af to variable noget, man kan tegne, omend det er sværere, fordi grafen er en delmængde af rummet $\mathbb{R}^3$. Men med et tilpas talent for at tegne, eller ved brug af et passende computerprogram, kan man mange gange fremskaffe sig et billede af grafen, eller ihvertfald dele af grafen.

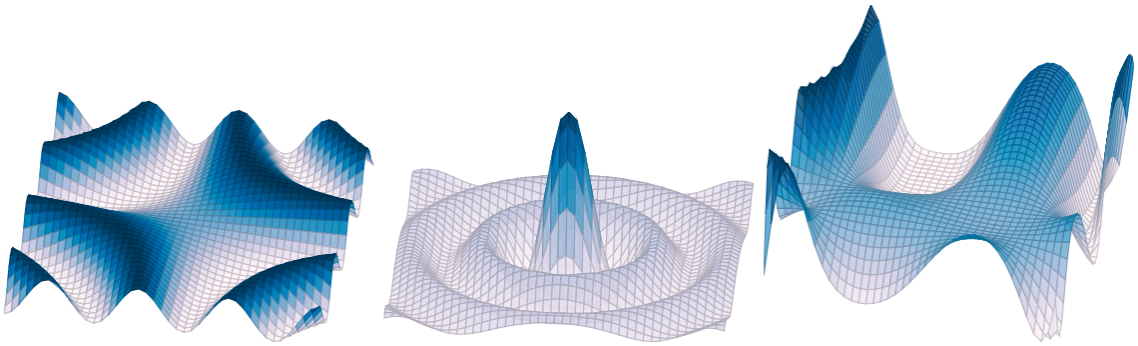
For funktioner af tre eller flere variable kan man stadigt definere grafen: For en funktion af de n variable, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, defineres grafen til at være

$$\mathscr{G}(f) = \left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots x_n)\right) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}(f)\right\}.$$

Her betegner $\mathbb{R}^{n+1}$ rummet af $n+1$-tupler $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ af tal, og $\mathscr{G}(f)$ er mængden af elementer i $\mathbb{R}^{n+1}$, hvor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ligger i f's definitionsmængde $\mathscr{D}(f)$ og $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Man kan arbejde symbolskt med grafen, mere eller mindre som man kan med funktioner af én eller to variable, men når $n \geq 3$ kan man ikke visualisere grafen, da den ligger i et rum med 4 eller flere dimensioner. Figur 2.3 viser eksempler på hvordan (dele af) grafen for en funktion af to variable kan se ud.

Selv for funktioner af to variable, hvor man i princippet (og ved brug af computer) kan skaffe sig et billede af grafen for funktionen man er interesseret i, er det ofte vanskeligt at skaffe sig



Figur 2.3: Nogle eksempler på grafer af funktioner af to variable.

tilstrækkelig detaljeret information alene ved at kikke på grafen. Nogle gange er det bedre at bruge andre redskaber til at visualisere funktionen. Et sådant redskab er *niveau kurver*. Lad

$$f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$$

være en funktion af de to variable x og y. Det kan f.eks. være funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \tag{2.4}$$

som vi kan definere når $x^2 + y^2 \leq 9$. Altså

$$\mathscr{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

For et tal $C \in \mathbb{R}$ er den tilsvarende *niveau kurve* for funktionen f de elementer i f's definitionsmængde, $\mathscr{D}(f)$, hvor f tager værdien C. I symboler er det mængden

$$\{(x,y) \in \mathscr{D}(f) : f(x,y) = C\}.$$

Så for funktionen (2.4) er det mængden

$$\left\{(x,y) \in \mathscr{D}(f) : \sqrt{9 - x^2 - y^2} = C\right\}.$$

Når $C = 2$ er det mængden

$$\left\{(x,y) \in \mathscr{D}(f) : \sqrt{9 - x^2 - y^2} = 2\right\}.$$

Da $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 2$ hvis og kun hvis $x^2 + y^2 = 5$, består niveau kurven i dette tilfælde af punkterne på cirklen i planen med centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{5}$.

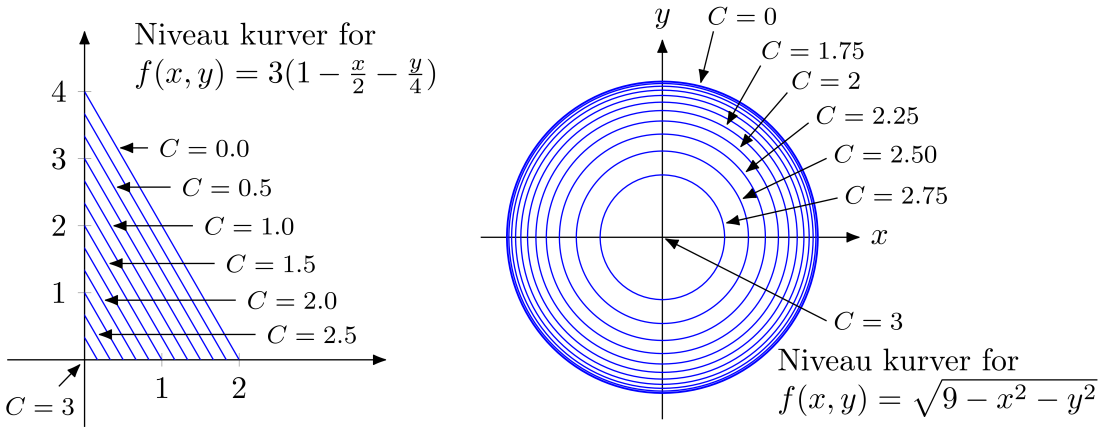
Et billede af niveau kurverne for en funktion kaldes nogle gange for et *kontur plot*.

For en funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ består f's *værdimængde* eller *billedmængde* af de tal som f rammer. Mere præcist ligger et reelt tal t i værdimængden for f, når der findes et element $z \in \mathscr{D}(f)$ så $t = f(z)$. F.eks. er værdimængden for funktionen (2.4) det lukkede interval mellem 0 og 3; i matematisk notation $[0,3]$. Og for funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

er værdimængden det halv-åbne interval

$$]0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t \leq 1\}.$$



Figur 2.4: Eksempler på niveaukurver.

2.2 Grænseværdi og kontinuitet

2.2.1 Grænseværdier for funktioner af to variable

I planen, udstyret med et retvinklet koordinat-system, er punkter repæsenteret ved talpar (x,y), hvor x er første koordinaten, og y er anden koordinaten. Afstanden mellem to punkter (x,y) og (x',y') er tallet

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}. \tag{2.5}$$

Ved hjælp af afstandsbegrebet kan vi overføre grænseværdi begrebet for funktioner af én variabel til funktioner af to variable:

(2.5) DEFINITION.

Når (x_0,y_0) er et punkt i planen, og a er et reelt tal, siger vi, at f har grænseværdien a for (x,y) gående mod (x_0,y_0), *når afstanden mellem $f(x,y)$ og a kan gøres vilkårligt lille ved at vælge (x,y) i $\mathscr{D}(f)$ meget tæt på, men ikke lig med (x_0,y_0).*

Når det er opfyldt, skriver vi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a.$$

Ligesom i forbindelse med funktioner af én variabel gælder der nogle regneregler for grænseværdier af funktioner af to variable, som iøvrigt ligner dem til forveksling.

(2.6) EKSEMPEL.

Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \tag{2.6}$$

kan vi definere for alle talpar $(x,y) \neq (0,0)$. Så vi kan vælge

$$\mathscr{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\right\}.$$

Der gælder, at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

For at vise det skal vi vise, at $x^2y/(x^2+y^2)$ kommer ligeså tæt på 0, som vi måtte ønske, når blot (x,y) kommer tæt nok på $(0,0)$, men uden at blive lig med $(0,0)$. Til det formål konstaterer vi først, at

$$|x^2y| = x^2|y| \leq (x^2+y^2)|y|.$$

Dette medfører, at

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |y|,$$

når $(x,y) \neq (0,0)$. Men $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, så vi finder, at

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \tag{2.7}$$

for alle $(x,y) \neq (0,0)$. Da $\sqrt{x^2+y^2}$ er afstanden fra (x,y) til $(0,0)$, ser vi fra (2.7), at $x^2y/(x^2+y^2)$ kommer vilkårligt tæt på 0, når (x,y) kommer tæt nok på $(0,0)$.

Som det næste eksempel viser, skal man ikke pille meget ved formlen (2.6), for at opførslen i nærheden af $(0,0)$ bliver helt anderledes.

(2.7) EKSEMPEL.

Lad

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

når $(x,y) \neq (0,0)$. Vi søger at afgøre om grænseværdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \tag{2.8}$$

eksisterer. Vi lader først (x,y) gå mod $(0,0)$ 'langs x-aksen'. Hermed menes, at vi kigger på talpar $(x,0)$, hvor $x \neq 0$, og lader så x gå mod 0. Men for sådanne talpar $(x,0)$ er

$$f(x,0) = \frac{2x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0,$$

så vi ser, at $\lim_{x\to 0} f(x,0)$ findes og er lig med 0 :

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

Det samme sker når vi lader (x,y) gå mod $(0,0)$ langs med y-aksen:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0,$$

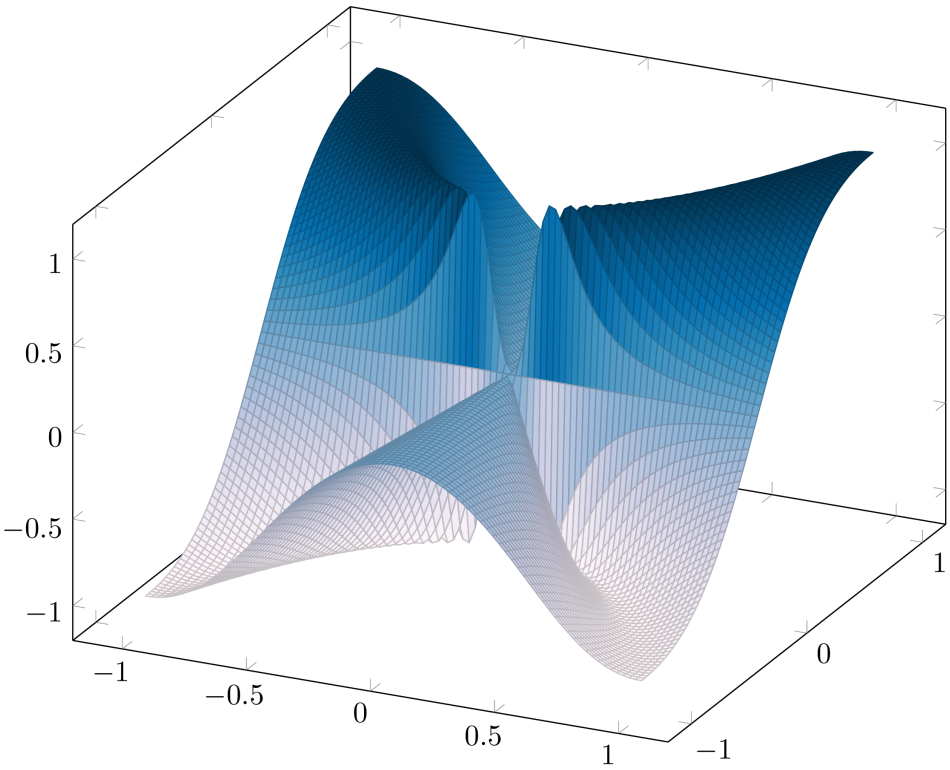
fordi $f(0,y) = 0$ for alle y. Alligevel er det ikke rigtigt, at $f(x,y)$ går mod 0 for (x,y) gående mod $(0,0)$. For hvis vi indsætter (x,x), finder vi, at

$$f(x,x) = \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$$

når $x \neq 0$. Så

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1.$$

Det følger, at grænseværdien (2.8) *ikke* eksisterer. I sprogbrugen fra Definition 5 kan man sige, at der ikke findes noget tal a, som opfylder, at $f(x,y)$ kommer vilkårligt tæt på a, når blot (x,y) kommer tæt nok på $(0,0)$. Og det er fordi, der vilkårligt tæt på $(0,0)$ findes punkter, f.eks. $(x,0)$ for små værdier af x, hvor $f(x,0) = 0$, men også punkter, som (x,x) for små værdier af x, hvor $f(x,x) = 1$.



Figur 2.5: Grafen for $\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ i en omegn af $(0,0)$.

2.2.2 Kontinuitet for funktioner af to variable

Når vi har indført grænseværdier for funktioner af to variable, er det blandt andet fordi, at vi nu hurtigt også kan indføre kontinuitet for sådanne funktioner:

(2.8) DEFINITION.

(Kontinuitet) En funktion $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ af to variable er kontinuert *i et punkt (x_0, y_0) i $\mathscr{D}(f)$, når grænseværdien*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

eksisterer og er lig med $f(x_0, y_0)$. Altså når der gælder, at

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

(2.9) EKSEMPEL.

Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x,y) = x^2 + y^2$ er kontinuert i alle punkter (x_0, y_0). For når (x,y) går mod (x_0, y_0), vil x gå mod x_0 og y mod y_0. Og når x går mod x_0, vil x^2 gå mod x_0^2, og tilsvarende vil y^2 gå mod y_0^2, fordi y går mod y_0. Heraf følger, at $x^2 + y^2$ går mod $x_0^2 + y_0^2$ når (x,y) går mod (x_0, y_0). I symboler,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

eller $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

(2.10) EKSEMPEL.

Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x,y) = \sin(x-y)$ er kontinuert i alle punkter (x_0, y_0). For når (x,y) går mod (x_0,y_0) vil x gå mod x_0 og y mod y_0. Og så vil $x-y$ gå mod $x_0 - y_0$. Og da sinus er en kontinuert funktion vil $\sin(x-y)$ gå mod $\sin(x_0-y_0)$. I symboler har vi altså, at

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sin(x-y) = \sin(x_0-y_0),$$

eller $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Når f er kontinuert i alle punkter i $\mathscr{D}(f)$ siger vi, at f er *kontinuert*. Helt i tråd med en tidligere sætning gælder følgende

(2.11) SÆTNING.

Når $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ og $g : \mathscr{D}(g) \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner gælder:

(a) $f+g$ er kontinuert i ethvert punkt (x_0,y_0), som ligger i både $\mathscr{D}(f)$ og $\mathscr{D}(g)$.

(b) fg er kontinuert i ethvert punkt (x_0,y_0), som ligger i både $\mathscr{D}(f)$ og $\mathscr{D}(g)$.

(c) f/g er kontinuert i et ethvert punkt (x_0,y_0), som ligger både i $\mathscr{D}(f)$ og $\mathscr{D}(g)$, og som opfylder at $g(x_0,y_0) \neq 0$.

Lidt groft sagt følger det fra den tidligere sætning, at algebraiske manipulationer med kontinuerte funktioner altid resulterer i kontinuerte funktioner.

2.3 Partielt afledede

Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable. Hvis vi holder y-værdien fast, får vi en funktion

$$x \mapsto f(x,y),$$

som kun afhænger af x. Når denne funktion af x er differentiabel, kan vi indføre dens afledede. Denne funktions værdi i et punkt x på den reelle akse er grænseværdien

$$\lim_{x'\to x} \frac{f(x',y)-f(x,y)}{x'-x}.$$

Hvis f.eks. $f(x,y) = x^2+y^2$ er det tallet

$$\lim_{x'\to x} \frac{x'^2+y^2-(x^2+y^2)}{x'-x} = \lim_{x'\to x} \frac{x'^2-x^2}{x'-x} = 2x.$$

Tilsvarende kan vi holde x fast og differentiere funktionen

$$y \mapsto f(x,y).$$

De to funktioner der fremkommer på denne måde er *de partielt afledede* funktioner af f. I lidt mere detalje:

(2.12) DEFINITION.

Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable. Den partielt afledede af $\boldsymbol{f}$ *med hensyn til den første variabel x er funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}$*[1] *defineret ved*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x',y) - f(x,y)}{x' - x},$$

under forudsætning af, at denne grænseværdi eksisterer. Den partielt afledede af $\boldsymbol{f}$ *med hensyn til den anden variabel y er funktionen $\frac{\partial f}{\partial y}$*[2] *defineret ved*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{y' \to y} \frac{f(x,y') - f(x,y)}{y' - y},$$

under forudsætning af, at denne grænseværdi eksisterer.

Kort sagt er $\partial f/\partial x$ funktionen, der fremkommer ved at holde y fast og differentiere med hensyn til x, og $\partial f/\partial y$ funktionen, der fremkommer ved at holde x fast og differentiere med hensyn til y. For funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ giver dette netop funktionerne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

(2.13) EKSEMPEL.

Vi finder de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ når

$$f(x,y) = x^2 \sin(x - y^2).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ finder vi ved at tænke på y som en konstant og så differentiere funktionen

$$x \mapsto x^2 \sin(x - y^2). \tag{2.9}$$

Dette gøres ved at betragte denne funktion som produktet af x^2 og $\sin(x - y^2)$. Differentialkvotienten af x^2 er $2x$ og differentialkvotienten af $\sin(x - y^2)$ mht. x er $\cos(x - y^2)$. Så fra produktreglen finder vi, at differentialkvotienten af funktionen (2.9) er

$$2x \sin(x - y^2) + x^2 \cos(x - y^2).$$

Altså er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin(x - y^2) + x^2 \cos(x - y^2).$$

På samme måde finder vi $\frac{\partial f}{\partial y}$ som den afledede af funktionen

$$y \mapsto x^2 \sin(x - y^2), \tag{2.10}$$

hvor det nu er x, der betragtes som konstant. Når x er konstant, er x^2 det også, så differentialkvotienten af (2.10) mht. y er derfor x^2 ganget med differentialkvotienten af $\sin(x - y^2)$ mht. y. Det er en sammensat funktion; først anvendes funktionen $y \mapsto x - y^2$, hvis differentialkvotient mht. y

[1] Betegnes også nogle gange f_x.
[2] Betegnes også nogle gange f_y.

er $-2y$, og dernæst funktionen $t \mapsto \sin t$ hvis differentialkvotient er $\cos t$. Ved brug af kædereglen finder vi så, at differentialkvotienten af (2.10) mht. y er $-2yx^2\cos(x-y^2)$. Altså er

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2yx^2\cos(x-y^2).$$

Der bruges ikke sjældent andre notationer i forbindelse med de partielt afledede. F.eks. f_1 for $\partial f/\partial x$ og f_2 for $\partial f/\partial y$ hvis man tænker på x som den første variable, og y som den anden. Eller

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

for den partielt afledede mht. x og

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

for den partielt afledede mht. y.

(2.14) EKSEMPEL.

Lad os definere en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved, at

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vi finder, at

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0,$$

for alle $x \neq 0$, og det følger, at

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0.$$

Dvs. at den partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ eksisterer i $(0,0)$ og er lig med 0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Så samme måde er

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

for alle $y \neq 0$, og det følger, at

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0.$$

Dvs. at den partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer i $(0,0)$ og er lig med 0 :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

De partielt afledede af f eksisterer altså i $(0,0)$; ja, faktisk eksisterer de i alle punkter (x,y) i $\mathbb{R}^2$. Alligevel er funktionen f ikke kontinuert i $(0,0)$; vi ved nemlig fra Eksempel 7, at grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ikke eksisterer. Specielt gælder det *ikke*, at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Moralen er, at eksistensen af de partielt afledede ikke sikrer, at funktionen er kontinuert, når der er 2 (eller flere) variable.

2.4 Tangent plan og differentialer

For en funktion $f(x)$ af én variabel angiver den afledede $f'(x)$ hældningskoefficienten for tangentlinien til grafen i punktet $(x, f(x))$. Noget tilsvarende gælder for de partielt afledede $\partial f/\partial x$ og $\partial f/\partial y$ af en funktion af to variable. For en sådan funktion er grafen en flade i rummet, og tangenten er en plan i rummet.

Mere præcist definerer vi *tangent planen* P til grafen for f i punktet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (eller blot (x_0, y_0)) til at bestå af de punkter (x, y, z) i rummet $\mathbb{R}^3$, som opfylder, at

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{2.11}$$

I analogi med tangentlinien til grafen for en funktion af én variabel, er P den plan i rummet der bedst approksimerer grafen for f omkring punktet $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

Tangent planen P for grafen i punktet $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ er selv graf for en funktion, nemlig funktionen

$$z(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{2.12}$$

og denne funktion z er en approksimation til f i en omegn af (x_0, y_0), i hvert fald når f er kontinuert i (x_0, y_0). Thi i såfald er

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} z(x, y) - f(x, y) \\
&\quad = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x_0, y_0) - f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&\quad = 0 + 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

hvilket jo netop betyder, at for (x, y) tæt på (x_0, y_0) vil $z(x, y)$ være tæt på $f(x, y)$. Funktionen (2.12) kaldes for *den lineære approksimation til* f i punktet (x_0, y_0). Bemærk at den lineære approksimation er fastlagt ved tallene $f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Det sker ikke helt sjældent, at man kan bestemme disse tal uden at kende meget til f, og man kan så bruge z som en 'approksimativ erstatning' for f i nærheden af (x_0, y_0).

(2.15) EKSEMPEL.

For funktionen $f(x, y) = x^2 + y^3$ har vi de partielt afledede

$$f_x(x, y) = 2x \quad \text{og} \quad f_y(x, y) = 3y^2.$$

I punktet $(x_0, y_0) = (1, 1)$ har vi altså at

$$f_x(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 \quad \text{og} \quad f_y(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3.$$

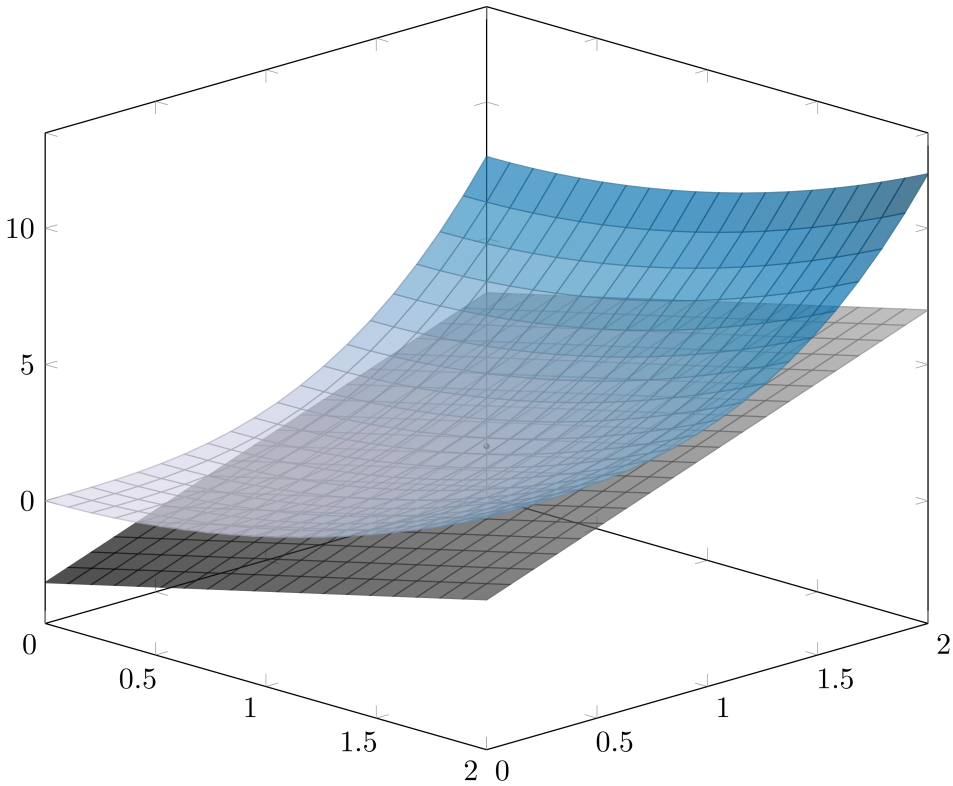
Da $f(1, 1) = 2$ ser vi, at tangentplanen for grafen til f i punktet $(1, 1)$ består af de tripler $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, som opfylder, at

$$z = 2 + 2(x - 1) + 3(y - 1) = 2x + 3y - 3,$$

og den lineære approksimation til f i punktet $(1, 1)$ er funktionen $z(x, y)$ givet ved

$$z(x, y) = 2x + 3y - 3.$$

Se Figur 2.6.



Figur 2.6: Grafen for funktionen $f(x,y) = x^2 + y^3$, med tangentplanen gennem punktet $(1,1,2)$.

(2.16) DEFINITION.

Den ændring som den lineære approksimation til f i punktet (x_0, y_0) får når x og y ændres fra x_0 og y_0 med størrelserne dx og dy, henholdsvis, kaldes for differentialet *for f i punktet (x_0, y_0). I symboler er*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,dy. \tag{2.13}$$

Ofte ser man formlen (2.13) opskrevet uden reference til punktet (x_0, y_0) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy, \tag{2.14}$$

og df omtales som differentialet af f uden nøjere angivelse af, hvilket punkt der refereres til.

(2.17) EKSEMPEL.

Hvis $f(x,y) = x^2y + xy$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + x.$$

Differentialet af f er derfor

$$df = (2xy + y)\,dx + (x^2 + x)\,dy.$$

Udfra denne formel kan man så bestemme den ændring, som den lineære approksimation til f oplever, når x ændres med størrelsen dx og y med størrelsen dy for ethvert punkt (x_0, y_0), man måtte

være interesseret i. Hvis det f.eks. er $(x_0, y_0) = (1,1)$, finder man at det tilhørende differentiale af f er

$$df = 3\,dx + 2\,dy.$$

(2.18) EKSEMPEL.

De partielt afledede af funktionen $f(x,y) = \sin(x - y^2)$ er

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x - y^2) \quad \text{og} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\cos(x - y^2).$$

Så det generelle differentiale af f er

$$df = \cos(x - y^2)\,dx - 2y\cos(x - y^2)\,dy.$$

2.5 Partielt afledede af højere orden

Når man har differentieret en funktion $f(x,y)$ af to variable mht. til x, og står med den partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$, er det igen en funktion af de to variable (x,y), og man kan (som oftest) tage de partielt afledede af $\frac{\partial f}{\partial x}$. Den partielt afledede af $\frac{\partial f}{\partial x}$ mht. x; altså

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x},$$

betegnes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

og kaldes *den partielt afledede af f af anden orden mht. x*. Men $\frac{\partial f}{\partial x}$ kan jo også differentieres partielt mht. y, hvilket giver os

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y},$$

som betegnes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

og kaldes *den blandede partielt afledede af f af anden orden*.

På ganske samme måde vil de partielt afledede af $\frac{\partial f}{\partial y}$ give to partielt afledede af anden orden af f; nemlig

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y},$$

der kaldes *den partielt afledede af f af anden orden mht. y*, og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x},$$

der også kaldes *den blandede partielt afledede af f af anden orden*.

Grunden til, at $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ har samme navn er, at de meget ofte er ens. Det skyldes følgende sætning:

(2.19) SÆTNING.

Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable, og antag at alle afledede af anden orden af f eksisterer og er kontinuerte. Da gælder, at

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.}$$

2.6 Partielt afledede med 3 eller flere variable

Partielt afledede af funktioner, der afhænger af mere end 2 variable, kan defineres på en måde, der er helt analog til tilfældet med 2 variable. Hvis der er tale om en funktion

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

af n reelle variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indføres de partielt afledede

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ f_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\ &\vdots \\ f_n &= \frac{\partial f}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

ved at

$$\begin{aligned} & f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &\quad = \lim_{x_k' \to x_k} \frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k', x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{x_k' - x_k}. \end{aligned}$$

Hvis f.eks. $f(x,y,z)$ er en funktion, der afhænger af de tre variable x, y og z, sætter vi

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) = f_x(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{x' \to x} \frac{f(x',y,z) - f(x,y,z)}{x' - x}, \\ f_2(x,y,z) = f_y(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lim_{y' \to y} \frac{f(x,y',z) - f(x,y,z)}{y' - y}, \end{aligned}$$

og

$$f_3(x,y,z) = f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lim_{z' \to z} \frac{f(x,y,z') - f(x,y,z)}{z' - z},$$

forudsat, selvfølgelig, at grænseværdierne eksisterer. Og de afledede af højere orden, som f.eks.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$$

bliver indført på samme måde som for funktioner af to variable.

Det er en konsekvens af Sætning 19, at sålænge de partielt afledede eksisterer og er kontinuerte, er rækkefølgen man differentierer i ligegyldig. F.eks. er

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x},$$

hvorimod, f.eks.,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}$$

generelt er forskellige funktioner, fordi der her ikke er differentieret det samme antal gange mht. x og mht. z. De blandede partielt afledede af højere orden er generelt kun ens, når der er differentieret lige mange gange mht. hver af de variable.

(2.20) EKSEMPEL.

Definer funktionen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ af de 4 variable x, y, z, v ved at

$$f(x,y,z,v) = xyv\cos(z^2+y).$$

Vi finder ved at differentiere med hensyn til x, at

$$f_x(x,y,z,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,v) = yv\cos(z^2+y),$$

og ved at differentiere med hensyn til y, at

$$f_y(x,y,z,v) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,v) = xv\cos(z^2+y) - xyv\sin(z^2+y).$$

På samme måde fåes, at

$$f_z(x,y,z,v) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,v) = -2zxyv\sin(z^2+y),$$

og

$$f_v(x,y,z,v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x,y,z,v) = xy\cos(z^2+y).$$

Vi finder også at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial v}(x,y,z,v) = \frac{\partial}{\partial y} xy\cos(z^2+y) = x\cos(z^2+y) - xy\sin(z^2+y),$$

og

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial y}(x,y,z,v) &= \frac{\partial}{\partial v}(xv\cos(z^2+y) - xyv\sin(z^2+y)) \\ &= x\cos(z^2+y) - xy\sin(z^2+y).\end{aligned}$$

Ikke overraskende er $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial v}$.

2.7 Kædereglen

Kædereglen i differentialregning er et værktøj til at finde de afledede for samensatte funktioner. For funktioner af én variabel er kædereglen formuleret tidligere. Der er også en kæderegel for funktioner af flere variable; flere, faktisk.

Hvis $f(x,y)$ er en funktion af to variable, og $g(t), h(t)$ to funktioner af én variabel t, vil funktionen

$$\psi(t) = f\big(g(t), h(t)\big) \tag{2.15}$$

være en funktion af t. F.eks. kunne $f(x,y) = xy^2$, $g(t) = t^4$ og $h(t) = \cos t$, og funktionen (2.15) ville da være

$$\psi(t) = t^4 \cos^2(t).$$

For funktionen (2.15) er kædereglen en formel, der udtrykker den afledede af ψ ved de partielt afledede af f og de afledede af g og h. Der gælder nemlig flg.

(2.21) SÆTNING.

Når de partielt afledede af f eksisterer og er kontinuerte, og g og h er differentiable funktioner, er ψ en differentiabel funktion, og den afledede $\psi'(t)$ af ψ er givet ved formlen

$$\boxed{\psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(g(t), h(t)\big)g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g(t), h(t)\big)h'(t).}$$

Der også andre, mere komplicerede udgaver af kædereglen. Hvis

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{og} \quad v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

er funktioner af de n variable $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kan vi definere en funktion H af $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ved, at

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\big(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), v(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big).$$

Kædereglen angiver i dette tilfælde, hvordan de partielt afledede af H kan bestemmes ud fra de partielt afledede for f, u og v:

(2.22) SÆTNING.

Når de partielt afledede af f, u og v eksisterer og er kontinuerte, er de partielt afledede af H givet ved formlerne

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(x_1, \ldots, x_n), v(x_1, \ldots, x_n)\big)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(x_1, \ldots, x_n), v(x_1, \ldots, x_n)\big)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

F.eks. kan n være 3, så u og v er funktioner af tre variable, r, s, t. I det tilfælde er

$$\boxed{H(r,s,t) = f\big(u(r,s,t), v(r,s,t)\big),}$$

og Sætning 22 fortæller os, at

$$\frac{\partial H}{\partial r}(r,s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(r,s,t),v(r,s,t)\big)\frac{\partial u}{\partial r}(r,s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(r,s,t),v(r,s,t)\big)\frac{\partial v}{\partial r}(r,s,t),$$
$$\frac{\partial H}{\partial s}(r,s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(r,s,t),v(r,s,t)\big)\frac{\partial u}{\partial s}(r,s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(r,s,t),v(r,s,t)\big)\frac{\partial v}{\partial s}(r,s,t),$$

og

$$\frac{\partial H}{\partial t}(r,s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(r,s,t),v(r,s,t)\big)\frac{\partial u}{\partial t}(r,s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(r,s,t),v(r,s,t)\big)\frac{\partial v}{\partial t}(r,s,t).$$

(2.23) EKSEMPEL.

Lad $f(x,y) = 3xy + x$ og $u(r,s,t) = rst$, $v(r,s,t) = r+s+t$. Så er

$$\begin{aligned} H(r,s,t) &= f(u(r,s,t),v(r,s,t)) = 3rst(r+s+t) + rst \\ &= 3r^2st + 3rs^2t + 3rst^2 + rst. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Vi finder, at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y+1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,s,t) = st, \quad \frac{\partial u}{\partial s}(r,s,t) = rt \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,s,t) = rs,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,s,t) = \frac{\partial v}{\partial s}(r,s,t) = \frac{\partial t}{\partial t}(r,s,t) = 1.$$

Ved brug af Sætning 22 finder vi så, at

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r}(r,s,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(r,s,t),v(r,s,t)\big)\frac{\partial u}{\partial r}(r,s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(r,s,t),v(r,s,t)\big)\frac{\partial v}{\partial r}(r,s,t) \\ &= \big(3v(r,s,t)+1\big)st + 3u(r,s,t) \\ &= \big(3(r+s+t)+1\big)st + 3rst = 6rst + 3s^2t + 3st^2 + st. \end{aligned}$$

På samme måde kan man finde de partielt afledede $\frac{\partial H}{\partial s}$ og $\frac{\partial H}{\partial t}$ ved brug af Sætning 22.

Bemærk at udregningen af $\frac{\partial H}{\partial r}(r,s,t)$ i Eksempel 23, som brugte Sætning 22, kan verificeres ved at differentiere (2.16) mht. r. Sådan vil det meget ofte være for konkrete funktioner; istedet for at bruge kædereglen er det hurtigere at differentiere direkte. Men kædereglen er et vigtigt redskab i mere abstrakte og generelle situationer, hvor man måske ikke kender funktionsudtrykket eksplicit. I forbindelse med en sætning i næste kapitel kan man se et eksempel på en teoretisk anvendelse af kædereglen.

Kapitel 3

Retningsafledte og ekstremumsværdier for funktioner af to og flere variable

3.1 Gradient og retningsafledte

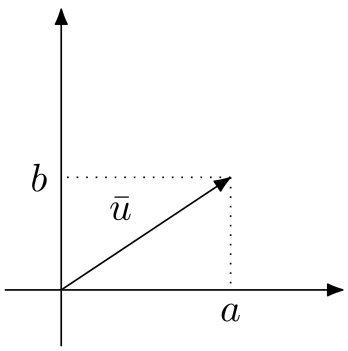
Lad $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ være en funktion af to variable. Når de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ eksisterer i et punkt $(x,y) \in \mathscr{D}(f)$, samler man ofte de to tal i en vektor

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

med $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ som 1. koordinat og $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ som 2. koordinat. Denne vektor er *gradienten af f* i (x,y).

Mens de partielt afledede registrerer hastigheden, hvormed funktionen ændrer sig i et givet punkt, når man varierer x, hhv. y, indeholder gradienten $\nabla f(x,y)$ information om denne hastighed, når (x,y) varierer langs enhver lige linie gennem det pågældende punkt. Det er dette forhold der nu skal forklares og præciseres.

En vektor $\vec{u} = (a,b)$ i $\mathbb{R}^2$ med længde 1 fastlægger en retning i planen:

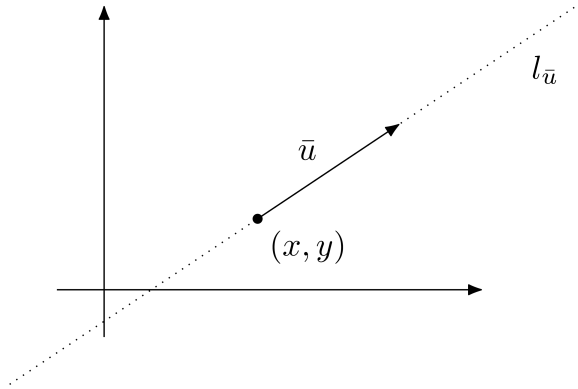


Figur 3.1: En enhedsvektor $\vec{u}$ i $\mathbb{R}^2$.

Ved at lade $\vec{u}$ stritte ud fra et punkt (x,y) får vi fastlagt en linie $l_{\vec{u}}$ gennem punktet (x,y). Punkterne på denne linie er punkterne i planen med koordinaterne

$$(x+ta, y+tb) = (x,y) + t\vec{u},$$

når t løber over alle de reelle tal t.



Figur 3.2: Linien $l_{\vec{u}}$ gennem (x,y) i retningen bestemt af $\vec{u}$.

Hvis vi forudsætter, at f er defineret i en omegn af (x,y), kan vi definere en funktion $g(t)$ ved, at

$$g(t) = f\big((x,y)+t\vec{u}\big) = f(x+ta, y+tb),$$

ihvertfald for små værdier af t. Denne funktion g fremkommer ved kun at bruge f på linien $l_{\vec{u}}$. Bemærk at

$$g(0) = f(x,y).$$

Den afledede af g i $t = 0$ er derfor et mål for den hastighed, hvormed f ændrer sig i punktet (x,y), når man ændrer de variable i retningen udfra (x,y) fastlagt ved vektoren $\vec{u}$. Bemærk at

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,y)+t\vec{u}\big) - f(x,y)}{t}.$$

Dette forklarer − forhåbenligt − følgende definition.

(3.1) DEFINITION.

Når $(x,y) \in \mathscr{D}(f)$ *og* $\vec{u}$ *er en enhedsvektor (altså en vektor af længde* 1*), definerer vi* den retningsafledte af f i punktet $\boldsymbol{(x,y)}$ og retningen $\vec{u}$ *som grænseværdien*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,y)+t\vec{u}\big) - f(x,y)}{t}.$$

Den retningsafledte betegnes $D_{\vec{u}}f(x,y)$; altså,

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,y)+t\vec{u}\big) - f(x,y)}{t}.$$

Hvis vi bruger enhedsvektoren $e_1 = (1,0)$ som $\vec{u}$, finder vi, at

$$D_{e_1}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,y)+te_1\big) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x+t,y)\big) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Så den partielt afledede mht. x er altså den retningsafledte, svarende til retningen bestemt ved e_1. Den tilsvarende linie l_{e_1} er jo også netop linien gennem (x,y), der er parallel med x-aksen. På samme måde finder vi, at når vi bruger enhedsvektoren $e_2 = (0,1)$ som $\vec{u}$, bliver den retningsafledte

$$D_{e_2}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

(3.2) BEMÆRKNING.

En vilkårlig vektor $\vec{v} = (a,b)$, som ikke er nulvektoren, peger også i en bestemt retning og fastlægger derfor også en retning i planen. Det er den samme retning som fastlægges af den tilsvarende enhedsvektor

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Vi vil derfor nogle gange tale om retningen fastlagt ved en vektor, selv om den ikke er en enhedsvektor. Derved mener vi den retning, som den tilhørende enhedsvektor fastlægger.

(3.3) EKSEMPEL.

I dette eksempel udregner vi den retningsafledte af funktionen

$$f(x,y) = x^2 + y$$

i retningen fastlagt ved vektoren

$$\vec{v} = (1,1).$$

Til det formål normerer vi først $\vec{v}$, dvs. vi finder den enhedsvektor $\vec{u}$, som peger i samme retning som $\vec{v}$, jvf. Bemærkning 2. Vi finder, at

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ifølge definitionen er $D_{\vec{u}}f(x,y)$ grænseværdien

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,y)+t\vec{u}\big) - f(x,y)}{t}.$$

Vi finder, at

$$\begin{aligned} f((x,y)+t\vec{u}) &= f\left(x+\frac{t}{\sqrt{2}}, y+\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \left(x+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + y + \frac{t}{\sqrt{2}} \\ &= x^2 + \frac{t^2}{2} + \frac{2tx}{\sqrt{2}} + y + \frac{t}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Så bliver differenskvotienten

$$\begin{aligned} \frac{f\big((x,y)+t\vec{u}\big) - f(x,y)}{t} &= \frac{\frac{t^2}{2} + \frac{2tx}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}}{t} \\ &= \frac{t}{2} + \frac{2x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t}{2} + \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

og dermed

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,y)+t\vec{u}\big) - f(x,y)}{t} = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Den følgende sætning viser, hvorledes de retningsafledte kan bestemmes ud fra gradienten $\nabla f(x,y)$:

(3.4) SÆTNING.

Antag at de partielt afledede af funktionen $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ eksisterer og er kontinuerte i en omegn af punktet $(x,y) \in \mathscr{D}(f)$. Hvis $\vec{u} = (a,b)$ er en enhedsvektor gælder, at

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)b. \tag{3.1}$$

Antagelserne, der gøres i Sætning 4, er nødvendige, men de er til gengæld altid opfyldte for de funktioner, vi skal beskæftige os med i dette kursus.

Hvis vi bruger skalar produktet $\cdot$ for vektorer, kan formlen (3.1) skrives

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}. \tag{3.2}$$

(3.5) EKSEMPEL.

Lad $f(x,y) = xy^2 + x$. Så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 1,$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Så gradienten $\nabla f(x,y)$ er vektoren

$$\nabla f(x,y) = (y^2 + 1, 2xy).$$

Vi kan nu ved hjælp af Sætning 4 beregne alle retningsafledte for funktionen: Hvis $\vec{u} = (a,b)$ er en enhedsvektor, får vi formlen

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = (y^2 + 1)a + 2bxy.$$

F.eks. bliver den retningsafledte af f i punktet $(1,2)$ og i retningen $\vec{u} = (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$ lig med

$$(2^2 + 1)\frac{3}{4} + 2\frac{\sqrt{7}}{4}2 = \frac{15}{4} + \sqrt{7} \approx 6.39.$$

Vi ser altså, at ved brug af Sætning 4 giver gradienten ∇f af f mulighed for at beregne alle de retningsafledte.

En af fordelene ved at udtrykke formel (3.1) ved brug af prik produktet, som det er gjort i (3.2), er, at vi får en vurdering på, hvor store de retningsafledte kan blive. Husk nemlig, at der gælder

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \cos\theta$$

når vi lader $\|\vec{x}\|$ betegne længden (eller *normen*) af en vektor $\vec{x}$ og θ betegner vinklen mellem $\vec{x}$ og $\vec{y}$. Når vi sætter numerisk tegn på fåes identiteten

$$\frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = |\cos\theta|.$$

Da $|\cos\theta| \leq 1$ giver dette os uligheden

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|, \tag{3.3}$$

som er rigtig for alle vektorer $\vec{x}$ og $\vec{y}$. Udnytter vi dette i (3.2), ser vi at

$$|D_{\vec{u}}f(x,y)| \leq \|\nabla f(x,y)\|, \tag{3.4}$$

fordi $\|\vec{u}\| = 1$. Denne ulighed, (3.4), siger, at retningsafledte ikke kan blive større end længden af gradienten i det pågældende punkt. Hvis gradienten $\nabla f(x,y)$ ikke er 0-vektoren bestemmer den en retning givet ved enhedsvektoren

$$\vec{\nabla} = \frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}.$$

Indsætter vi $\vec{\nabla}$ for $\vec{u}$ i (3.2), finder vi, at

$$D_{\vec{\nabla}}f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|} = \frac{\nabla f(x,y)\cdot\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}. \tag{3.5}$$

For enhver vektor $\vec{x}$ gælder, at $\vec{x}\cdot\vec{x} = \|\vec{x}\|^2$, så specielt har vi, at

$$\nabla f(x,y)\cdot\nabla f(x,y) = \|\nabla f(x,y)\|^2.$$

Indsætter vi det i (3.5), får vi, at

$$D_{\vec{\nabla}}f(x,y) = \|\nabla f(x,y)\|. \tag{3.6}$$

Det vil altså sige, at i retningen $\vec{\nabla}$, som er den retning gradienten $\nabla f(x,y)$ peger i, er den retningsafledte netop lig med længden af gradienten – hvilket var den størst mulige.

Alle disse overvejelser kan nu opsummeres i følgende

(3.6) SÆTNING.

Lad $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ være en funktion hvis partielt afledede eksisterer og er kontinuerte. Da gælder, at den maksimale værdi af den retningsafledte $D_{\vec{u}}f(x,y)$ er længden $\|\nabla f(x,y)\|$ af gradienten, og denne antages, når enhedsvektoren $\vec{u}$ har samme retning som gradienten $\nabla f(x,y)$.

3.1.1 Tre og flere variable

For en funktion $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ af n variable, hvor $n = 3,4,5,\ldots$, defineres gradienten

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$$

på en måde helt analog til tilfældet $n = 2$. Vi sætter de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ind som koordinater i en vektor:

$$\nabla f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right),$$

som altså nu er et element i $\mathbb{R}^n$, da der er n koordinater.

Når der er 3 variable x, y, z, er gradienten altså en vektor i rummet $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right).$$

F.eks. når $f(x,y,z) = x + xy + xyz$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 + y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy.$$

Så gradienten er vektoren

$$\nabla f(x,y,z) = (1 + y + yz, x + xz, xy).$$

Den retningsafledte for en funktion af flere variable kan også defineres på ganske samme måde som for to variable: En enhedsvektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ er nu en vektor i $\mathbb{R}^n$ af længde 1 :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_n^2} = 1,$$

og vi definerer

$$D_{\vec{u}} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + t\vec{u}\big) - f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}{t}.$$

Sammenhængen mellem de retningsafledte og gradienten er den samme som for funktioner af to variable:

$$D_{\vec{u}} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \vec{u}, \tag{3.7}$$

hvor prik produktet (eller skalar produktet, eller det indre produkt) $\cdot$ mellem to vektorer $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ er defineret ved, at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Formlen (3.7) kan dermed også skrives

$$\begin{aligned} &D_{\vec{u}} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_n \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) u_j = \nabla f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \vec{u}, \end{aligned}$$

når $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Og Sætning 6 gælder også for 3 eller flere variable:

(3.7) SÆTNING.

Lad $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ være en funktion hvis partielt afledede eksisterer og er kontinuerte. Da gælder, at den maksimale værdi af den retningsafledte $D_{\vec{u}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er længden $\|\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|$ af gradienten og denne antages, når enhedsvektoren $\vec{u}$ har samme retning som gradienten $\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(3.8) EKSEMPEL.

Gradienten af funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ er

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

og den retningsafledte

$$D_{\vec{u}} f(x,y,z)$$

i punktet $(x,y,z) = (3,2,1)$ mht. retningen givet ved enhedsvektoren $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ er

$$D_{\vec{u}} f(3,2,1) = (6,4,2) \cdot \vec{u} = \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

3.2 Extremumsværdier for kontinuerte funktioner

Dette afsnit handler om metoder til at finde de største og mindste værdier for en funktion af 2 og flere variable, og om at finde de punkter i definitionsmængden for funktionen, hvor de største eller mindste værdier antages.

For kontinuerte funktioner af en variabel gælder flg.

(3.9) SÆTNING.

Lad $I = [a,b]$ være et lukket interval på den reelle akse og $f : I \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så findes der et punkt $x_0 \in I$, hvor f antager sin største værdi. Dvs. at

$$f(x) \leq f(x_0) \tag{3.8}$$

for alle $x \in I$. Dette punkt x_0 er enten

(i) et af randpunkterne for intervallet, dvs. enten a eller b, eller

(ii) et punkt x_0 i det indre af intervallet, dvs. $a < x_0 < b$, hvor f er differentiabel og hvor $f'(x_0) = 0$, eller

(iii) et punkt $x_0 \in I$, hvor f ikke er differentiabel.

Her kommer et bevis for, at et globalt maksimumspunkt opfylder punkt i, ii eller iii.

Bemærk at (3.8) udtrykker, at x_0 er et punkt, hvor f antager sin største værdi på intervallet I. Bemærk også at der sagtens kan være flere punkter x_0, hvor f antager sin største værdi. For funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $I = [-1,1]$ er der to sådanne punkter; $x_0 = -1$ og $x_0 = 1$. Endnu mere ekstremt: Funktionen $f(x) = 7$ antager sin største (og mindste) værdi i alle punkter af I.

Sætning 9 fortæller os langt fra alt om, hvor f antager sin største værdi; kun hvor og hvordan vi skal lede efter sådanne punkter. I det følgende skal vi udvide metoden fra funktioner af én variabel til funktioner af vilkårligt mange variable.

(3.10) EKSEMPEL.

Hvis $I = [0,1]$ og $f(x) = x^2$ er der præcist et $x_0 \in I$, hvor (3.8) er opfyldt for alle $x \in I$, og det er i punktet $x_0 = 1$. Altså et eksempel på situation punkt i i Sætning 9.

(3.11) EKSEMPEL.

Hvis $I = [-1,1]$ og $f(x) = 1 - x^2$ er der præcist et $x_0 \in I$, hvor (3.8) er opfyldt for alle $x \in I$, og det er i punktet $x_0 = 0$. Bemærk at $f'(0) = 0$, svarende til punkt ii i Sætning 9.

(3.12) EKSEMPEL.

Hvis $I = [-1,1]$ og $f(x) = 1 - |x|$ er der præcist et $x_0 \in I$, hvor (3.8) er opfyldt for alle $x \in I$, og det er i punktet $x_0 = 0$. Bemærk at f ikke er differentiabel i 0, svarende til punkt iii i Sætning 9.

Det nyttige ved informationen, at punktet x_0 må opfylde punkt i, ii eller iii, består i, at meget ofte er der kun ganske få punkter, der opfylder en af de tre betingelser, og man kan så let finde x_0 simpelthen ved af checke alle de relevante punkter. Målet med resten af dette afsnit er, at indføre de begreber, der skal til, for opnå en tilsvarende forenkling, når man leder efter største værdier for funktioner af flere variable.

Eller mindste værdier: For en kontinuert funktion $f : I \to \mathbb{R}$ som ovenfor skal også de punkter, hvor f antager sin mindste værdi søges blandt punkter som opfylder punkt i, ii eller iii. Det er jo trods alt præcist de punkter, hvor funktionen $-f$ antager sin største værdi. Der gælder derfor følgende sætning, som er helt analog til Sætning 9:

(3.13) SÆTNING.

Lad $I = [a,b]$ være et lukket interval på den reelle akse og $f : I \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så findes der et punkt $x_0 \in I$, hvor f antager sin mindste værdi. Dvs. at

$$f(x) \geq f(x_0) \tag{3.9}$$

for alle $x \in I$. Dette punkt x_0 er enten

(i) et af randpunkterne for intervallet, dvs. enten a eller b, eller

(ii) et punkt x_0 i det indre af intervallet, dvs. $a < x_0 < b$, hvor f er differentiabel og hvor $f'(x_0) = 0$, eller

(iii) et punkt $x_0 \in I$, hvor f ikke er differentiabel.

På samme måde vil vi i det følgende håndtere mindste værdier helt analogt til største værdier.

3.2.1 Kritiske punkter og kritiske værdier

Lad $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ være en funktion af n variable. Et punkt $x \in \mathscr{D}(f)$ er et *lokalt maksimumspunkt* for f når

$$f(y) \leq f(x)$$

for alle y i en omegn af x, og et punkt $x \in \mathscr{D}(f)$ er et *lokalt minimumspunkt* for f når

$$f(y) \geq f(x)$$

for alle y i en omegn af x. Et punkt $x \in \mathscr{D}(f)$ er et *globalt maksimumspunkt*, hhv. et *globalt minimumspunkt*, for f når

$$f(y) \leq f(x),$$

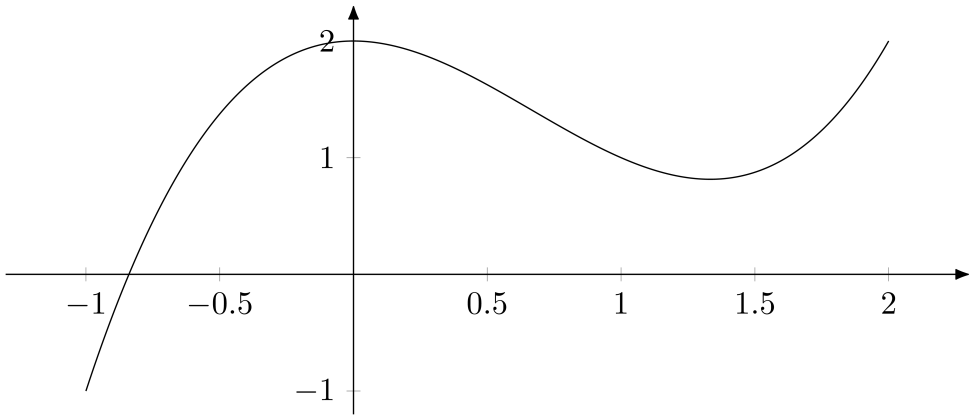
hhv.

$$f(y) \geq f(x),$$

for alle y i $\mathscr{D}(f)$.

(3.14) EKSEMPEL.

Lad $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. Grafen for f kan ses på Figur 3.3. Punktet $x = 0$ er et lokalt maksimumspunkt for f, mens $x = \frac{4}{3}$ er et lokalt minimumspunkt. Ingen af punkterne er globale; 0 er ikke et globalt maksimumspunkt, fordi der masser af punkter 'til højre for' $\frac{4}{3}$, hvor f antager større værdier end i 0, og $\frac{4}{3}$ er ikke et globalt minimumspunkt, fordi der er masser af punkter 'til venstre for' 0, hvor f antager mindre værdier end i $\frac{4}{3}$.



Figur 3.3

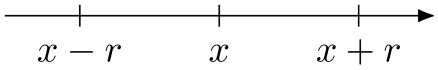
Et første skridt mod at kunne identificere de punkter, hvor f antager sin største eller mindste værdi, er at dele definitionsområdet $\mathscr{D}(f)$ for f op i *indre punkter* og *rand punkter*. Det er noget man kan gøre for alle delmængder af $\mathbb{R}^n$ – og har ikke noget at gøre med funktionen f. Vi indfører derfor disse begreber for en vilkårlig delmængde $\mathscr{D}$ af $\mathbb{R}^n$.

(3.15) DEFINITION.

Vi siger, at et punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}$ er et indre punkt *i $\mathscr{D}$ når der findes et $r > 0$ så alle punkter (eller n-tupler) $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, der opfylder, at*

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} < r, \tag{3.10}$$

ligger i $\mathscr{D}$.

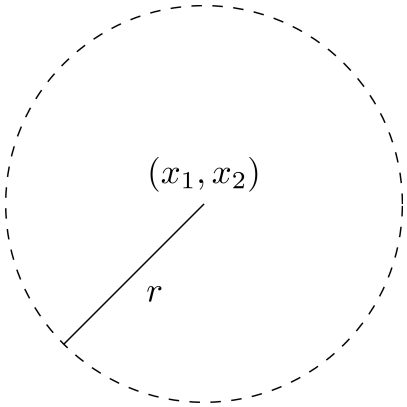


Figur 3.4: Intervallet fra $x-r$ til $x+r$.

Uligheden (3.10) er opfyldt netop når punktet y har en afstand til x som er mindre end r. Så hvis $n=1$, og der altså kun er en variabel, vil (3.10) være opfyldt når y ligger i intervallet mellem $x-r$ og $x+r$. Se Figur 3.4.

Det betyder, at når $n=1$ vil et punkt $x \in \mathscr{D}$ være et indre punkt når der findes et åbent interval med centrum i x som er helt indeholdt i $\mathscr{D}$.

Når $n=2$ har x har to koordinater $x=(x_1,x_2)$, og $y=(y_1,y_2)$ vil opfylde (3.10) netop når y ligger i den åbne cirkelskive med centrum i x og radius r. Se Figur 3.5. Så for $n=2$ vil et punkt $x \in \mathscr{D}$ være et indre punkt i $\mathscr{D}$ netop når der der findes en cirkelskive med centrum i x som er indeholdt i $\mathscr{D}$.



Figur 3.5: Den åbne cirkelskive med centrum i x og radius r.

Når $n=3$ vil (3.10) være opfyldt netop når $y=(y_1,y_2,y_3)$ ligger i kuglen med centrum i $x=(x_1,x_2,x_3)$ og radius r. Så for $n=3$ vil et punkt $x \in \mathscr{D}$ være et indre punkt i $\mathscr{D}$ netop når der der findes en kugle med centrum i x som er indeholdt i $\mathscr{D}$.

(3.16) EKSEMPEL.

Funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ kan vi definere for $x \geq 0$. Altså

$$\mathscr{D}(f)=[0,\infty[=\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Ehvert punkt $x>0$ er et indre punkt i $\mathscr{D}(f)$ fordi vi kan finde et interval med med centrum i x som er helt indeholdt i $\mathscr{D}(f)$; vi kan f.eks. vælge $r=\frac{x}{2}$. Så er intervallet

$$]x-r,x+r[=\left]x-\frac{x}{2},x+\frac{x}{2}\right[=\left]\frac{x}{2},\frac{3x}{2}\right[$$

indeholdt i $\mathscr{D}(f)$.

Punktet $x=0$ er *ikke* et indre punkt i $\mathscr{D}(f)$; uanset hvilket $r>0$ vi bruger vil intervallet $]x-r,x+r[=]-r,r[$ ikke være indeholdt i $\mathscr{D}(f)$; det vil indeholde punkter ($-\frac{r}{2}$, f.eks.), hvor (3.10) er opfyldt, men som ikke ligger i $\mathscr{D}(f)$.

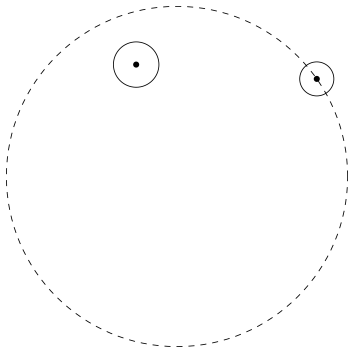
(3.17) EKSEMPEL.

Funktionen $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ kan vi definere, når $x^2+y^2 \leq 1$. Altså

$$\mathscr{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\right\},$$

som er cirkel-skiven med centrum i $(0,0)$. Alle punkter (x,y), som opfylder at $x^2+y^2 < 1$, er indre punkter i $\mathscr{D}(f)$ fordi vi for hver af disse punkter kan finde en (evt. meget lille) cirkelskive med centrum i (x,y) som er helt indeholdt i $\mathscr{D}(f)$. For punkter (x,y) hvor $x^2+y^2 = 1$, som altså ligger på enhedscirklen, kan dette ikke lade sig gøre; uanset hvilket $r > 0$ vi bruger, vil der være punkter med afstand til (x,y), som er mindre end r, men som ikke ligger i $\mathscr{D}(f)$.

Et punkt x i $\mathbb{R}^n$, som ikke er et indre punkt i $\mathscr{D}$ og som har den egenskab, at enhver omegn af x indeholder punkter fra $\mathscr{D}$, kaldes for et *randpunkt* for $\mathscr{D}$. I Eksempel 16 er $x = 0$ et randpunkt, og i Eksempel 17 er alle punkter (x,y), der ligger på enhedscirklen, og altså opfylder at $x^2+y^2 = 1$, randpunkter i $\mathscr{D}(f)$. Se Figur 3.6.



Figur 3.6: Et indre punkt og et randpunkt.

(3.18) DEFINITION.

Et indre punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{D}(f)$ *er et* kritisk punkt *for funktionen* $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$, *hvis* $\nabla f(x) = 0$.

Udtrykt i ord er et kritisk punkt for funktionen f et indre punkt i definitionsmængden for f, hvor gradienten for f eksisterer og er lig med 0.

(3.19) DEFINITION.

Et punkt $x \in \mathscr{D}(f)$ *er et* lokalt maximumspunkt, *hvis*

$$f(y) \leq f(x)$$

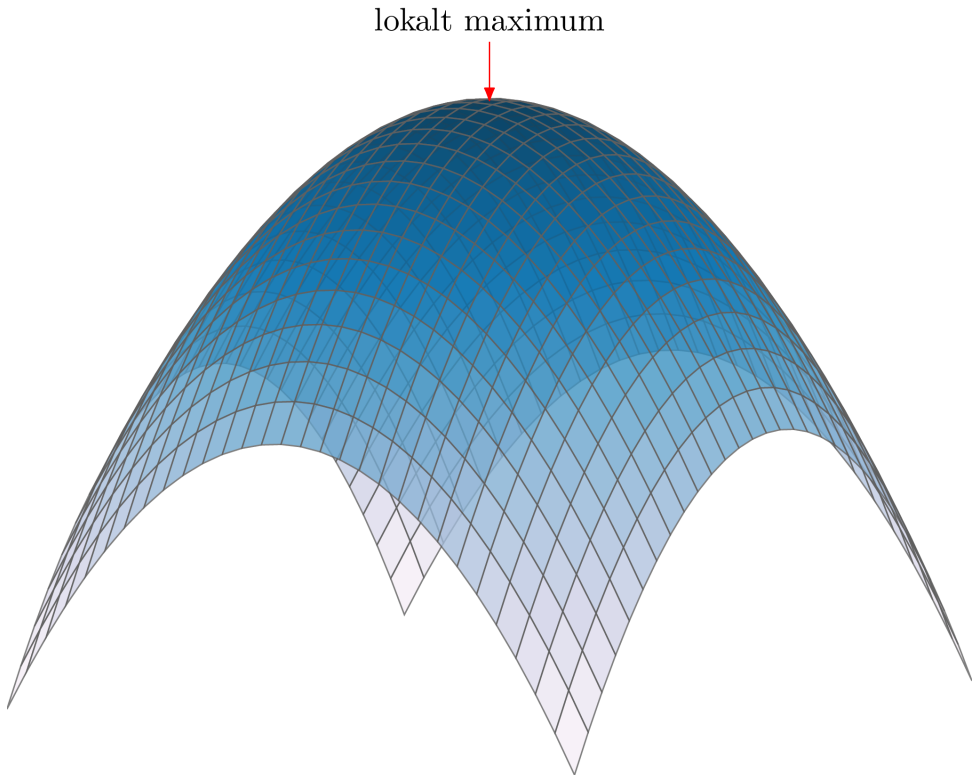
for alle y *i en omegn af* x.

(3.20) DEFINITION.

Et punkt $x \in \mathscr{D}(f)$ *er et* lokalt minimumspunkt, *hvis*

$$f(y) \geq f(x)$$

for alle y *i en omegn af* x.



Figur 3.7: Et eksempel på grafen over et lokalt maximumspunkt.

Et *lokalt ekstremumspunkt* for f er et punkt, som enten er et lokalt maximumspunkt eller et lokalt minimumspunkt. Sammenhængen mellem lokale ekstremumspunkter og kritiske punkter beskrives i følgende sætning.

(3.21) SÆTNING.

Lad $x \in \mathscr{D}(f)$ være et indre punkt i $\mathscr{D}(f)$ og antag at de partielt afledte af f eksisterer i x. Hvis x er et lokalt ekstremumspunkt for f er x et kritisk punkt for f, dvs.

$$\nabla f(x) = 0.$$

Når vi leder efter globale eller lokale ekstremumspunkter, er vi altså nødt til at kunne finde de kritiske punkter.
Kritiske punkter for funktioner af flere variable er en generalisering af betingelsen $f'(x_0) = 0$ for en funktion af én variabel. Denne betingelse kan beskrives grafisk ved, at tangenten til f's graf i punktet x_0 er vandret. I et kritisk punkt (x_0, y_0) for en funktion $f(x, y)$ af to variable er tangentplanen til grafen for f givet ved ligningen

$$z = f(x_0, y_0),$$

fordi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, jvf. definitionen af tangent plan. Dvs. at planen består af punkter med samme z-værdi, nemlig $z = f(x_0, y_0)$, hvilket jo er en plan parallel med x, y-planen. Men i analogi med, hvad der er tilfældet for en funktion af én variabel, kan tangentplanen godt være parallel med x, y-planen, selvom punktet ikke er et lokalt ekstremumspunkt. At tangentplanen for grafen for

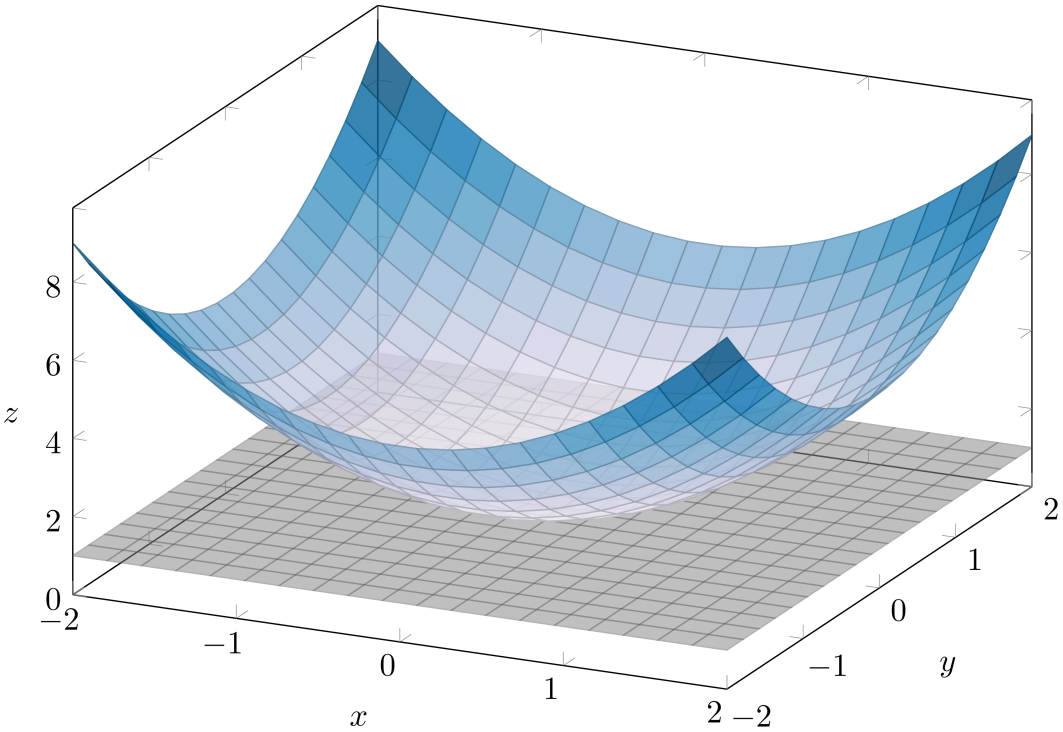
f i (x_0, y_0) er parallel med x, y-planen er en *nødvendig*, men ikke en *tilstrækkelig* betingelse for, at punktet (x_0, y_0) er et lokalt ekstremumspunkt.

(3.22) EKSEMPEL.

For funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ er der kun et kritisk punkt. Vi har jo, at

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y),$$

så $(x_0, y_0) = (0,0)$ er det eneste kritiske punkt for f. Da $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 \geq 1 = f(0,0)$, ser vi at $(0,0)$ *er* et ekstremumspunkt for f i dette tilfælde; faktisk et globalt minimumspunkt. Se Figur 3.8.



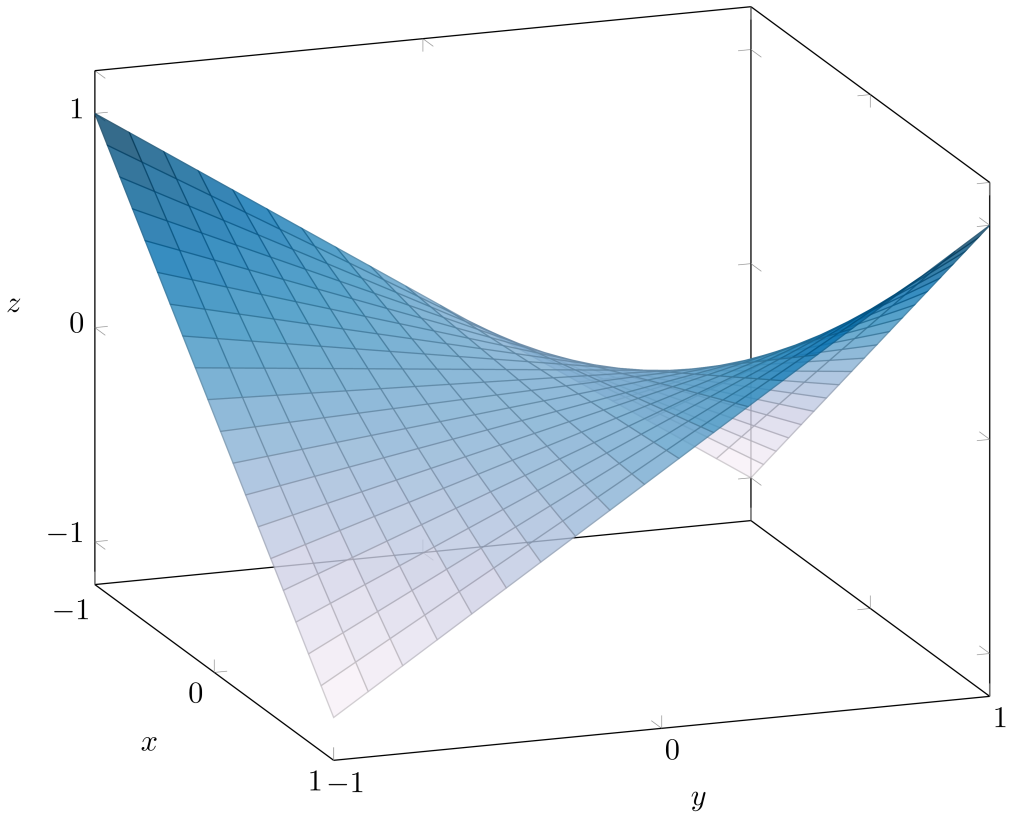
Figur 3.8: Grafen for $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$.

(3.23) EKSEMPEL.

For funktionen $f(x,y) = xy$ er der kun et kritisk punkt. Vi har jo, at

$$\nabla f(x,y) = (y, x),$$

så $(x_0, y_0) = (0,0)$ er det eneste kritiske punkt for f. Bemærk at $f(0,0) = 0$, mens der er masser af punkter (x,y) vilkårligt tæt på $(0,0)$ hvor $f(x,y) > 0$ og masser af punkter (x,y) vilkårligt tæt på $(0,0)$, hvor $f(x,y) < 0$. F.eks. er $f(t,-t) < 0 = f(0,0)$ for alle $t > 0$, og punkter af denne form findes vilkårligt tæt på $(0,0)$. Så $(0,0)$ er hverken et lokalt maximumspunkt eller et lokalt minimumspunkt for f. Se Figur 3.9.



Figur 3.9: Grafen for $f(x,y) = xy$.

I Eksempel 23 er punktet $(0,0)$ kritisk, men ikke et lokalt ekstremumspunkt. Et sådant punkt kaldes for et *saddelpunkt*. Dvs. at et saddelpunkt er kritisk punkt, som ikke er et lokalt ekstemumspunkt. I lidt mere detalje: Et kritisk punkt (x_0, y_0) for f, hvorom det gælder, at der i enhver omegn af (x_0, y_0) findes punkter (x,y) og (x', y') så

$$f(x,y) < f(x_0, y_0) < f(x', y'),$$

kaldes for et *saddelpunkt* for f, se fx Figur 3.10.

(3.24) EKSEMPEL.

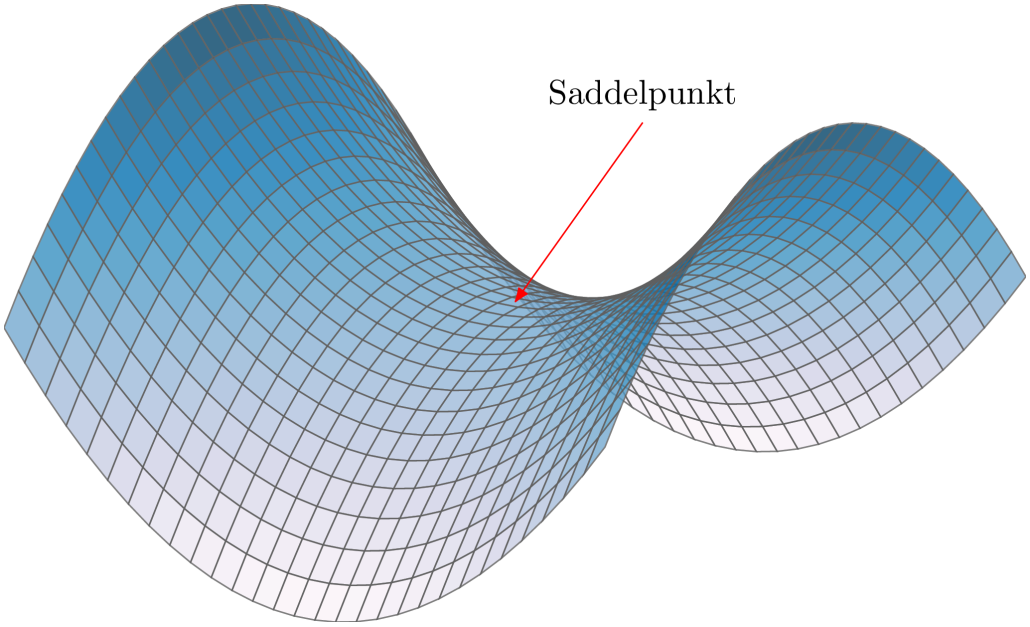
Funktionen $f(x,y) = x + y$ har ingen kritiske punkter, mens funktionen $g(x,y) = \cos(x-y)$ har uendeligt mange. Vi har nemlig, at

$$\nabla f(x,y) = (1,1),$$

som ikke bliver nul for noget talpar (x,y). Derimod er

$$\nabla g(x,y) = \big(-\sin(x-y), \sin(x-y)\big),$$

som bliver nul for alle talpar (x,y), hvor $x-y$ er et helt multiplum af π. F.eks. er $\nabla g(x,y) = 0$ på linien $x = y$.



Figur 3.10: Et saddelpunkt.

3.2.2 Anden ordens kriteriet

For en differentiabel funktion $f(x)$ af én variabel kan et punkt x_0 kun være et lokalt ekstremumspunkt hvis $f'(x_0) = 0$.Men betingelsen $f'(x_0) = 0$ er kun en nødvendig betingelse; ikke en tilstrækkelig: f' kan sagtens være nul i et punkt, som ikke er et lokalt ekstremumspunkt. Men der findes et kriterium, som i nogle tilfælde kan bruges til at afgøre, om et nulpunkt for f' er et ekstremums punkt; det såkaldte anden ordens kriterium:

(3.25) SÆTNING.

Lad $f(x)$ være en to gange differentiabel funktion af én variabel, og x_0 et punkt hvor $f'(x_0) = 0$.

(a) Hvis $f''(x_0) < 0$ er x_0 et lokalt maximumspunkt for f.

(b) Hvis $f''(x_0) > 0$ er x_0 et lokalt minimumspunkt for f.

Dette kriterium er nyttigt, selvom det ikke altid afgør sagen; hvis $f''(x_0) = 0$ fortæller Sætning 25 os intet.

For en differentiabel funktion f af flere variable har vi den analoge situation, at et punkt x kun kan være et lokalt ekstremumspunkt, hvis punktet er kritisk, ihvertfald hvis det er et indre punkt i definitionsmægden for f, men også at denne betingelse kun er nødvendig; ikke tilstrækkelig. Som for funktioner af én variable findes der en anden ordens test, der nogle gange kan afgøre, om et kritisk punkt er et lokalt maximumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddelpunkt. For funktioner af to variable siger anden ordens testen følgende:

(3.26) SÆTNING.

(Anden ordens testen) Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable og (x_0,y_0) et kritisk punkt for f. Antag at de partielt afledte af anden orden af f eksisterer og er kontinuerte i en omegn af (x_0,y_0). Sæt

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2.$$

(a) Hvis $D > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ er (x_0,y_0) et lokalt minimumspunkt for f.

(b) Hvis $D > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ er (x_0,y_0) et lokalt maximumspunkt for f.

(c) Hvis $D < 0$ er (x_0,y_0) et saddelpunkt for f.

Lad os prøve at bruge anden ordens testen på funktionerne fra Eksempel 22 og Eksempel 23. For funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ fra Eksempel 22 med det kritiske punkt $(0,0)$ finder vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Så $D = 4 > 0$ og vi er i tilfælde a fra Sætning 26. Anden ordens testen bekræfter her, hvad vi vidste i forvejen; $(0,0)$ er et lokalt minimumspunkt.

For funktionen $f(x,y) = xy$ fra Eksempel 23 med det kritiske punkt $(0,0)$ finder vi, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Så $D = -1$ og vi er i tilfælde c fra Sætning 26. Anden ordens testen bekræfter igen, hvad vi vidste i forvejen; $(0,0)$ er et saddelpunkt i dette tilfælde.

Hvis vi gik i detaljer med beviset for Sætning 26 ville det afsløres, at anden ordenstesten præsenterer en sammenhæng til lineær algbra og matricer. For en matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

kaldes tallet $ad - bc$ for *determinanten* af matricen. Tallet D, der er et afgørende input i Sætning 26, er derfor determinanten af matricen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

Denne matrix kaldes for *Hesse matricen* for f i (x_0,y_0), og det er faktisk den, der erstatter f'' i anden ordens testen for en funktion af én variabel, Sætning 9.

3.2.3 Største og mindste værdier på lukkede og begrænsede mængder.

Når man leder efter største og mindste værdier af funktioner, kan man ikke altid være sikker på, at de findes. F.ex. har funktionen $f(x) = e^{-x}$, hverken nogen mindste eller største værdi på den reelle akse. Og funktionen

$$g(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$

har godt nok en mindste værdi på intervallet $]0,1[= \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1\}$, men ingen største værdi. Meningen med dette afsnit er at beskrive funktioner, der altid har en største værdi og en mindste værdi, og beskrive nogle fundamentale metoder til at finde dem.

En delmængde $\mathscr{D}$ af $\mathbb{R}^n$ er *lukket*, når den indeholder alle sine randpunkter. F.eks. er

$$[0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\}$$

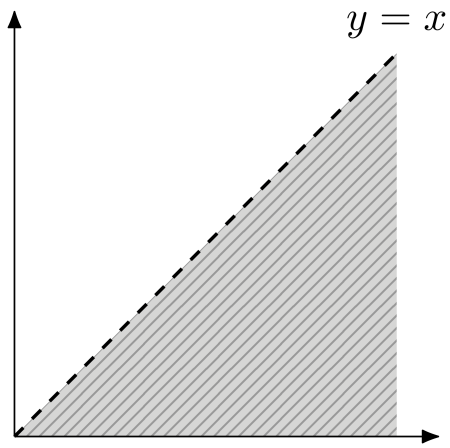
en lukket delmængde af $\mathbb{R}$. Thi randpunkterne af $[0,1]$ er tallene 0 og 1, som jo er med i mængden $[0,1]$. Som kontrast er mængden $[0,1[$ *ikke* lukket i $\mathbb{R}$, for 1 er et randpunkt, som ikke er med i mængden.

(3.27) EKSEMPEL.

Mængden $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y < x\right\}$ er ikke lukket i $\mathbb{R}^2$, men

$$\overline{\mathscr{D}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y \leq x\right\}$$

er lukket. De to mængder har de samme randpunkter; nemlig alle punkter (x,y) i $\overline{\mathscr{D}}$ hvor $x = 0$, $y = 0$ eller $x = y$. Figuren nedenfor er en tegning af mængden $\mathscr{D}$.



Figur 3.11: Mængden D.

En delmængde $\mathscr{D}$ af $\mathbb{R}^n$ er *begrænset,* når den er indeholdt i en (evt. meget stor) kugle. I matematiske symboler er $\mathscr{D}$ begrænset, når der findes et positivt tal $R > 0$ så

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2} \leq R$$

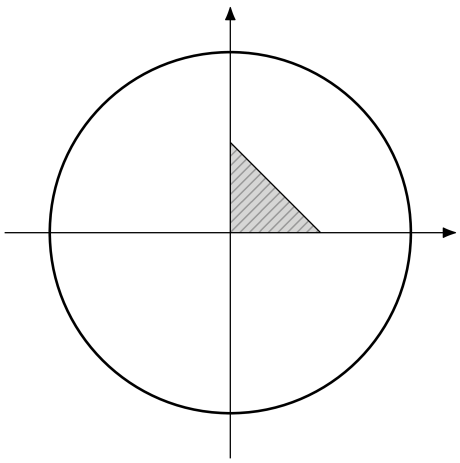
for alle elementer $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\mathscr{D}$. Det betyder nemlig at $\mathscr{D}$ er indeholdt i kuglen med centrum i $(0,0,\ldots,0)$ og radius R.

(3.28) EKSEMPEL.

Mængden $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\right\}$ er begrænset, men

$$\mathscr{D}' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y\right\}$$

er det ikke. Figuren nedenfor illustrerer at $\mathscr{D}$ er begrænset; den er indeholdt i en cirkelskive.



Figur 3.12: Mængden $\mathscr{D}$ lagt ind i en cirkelskive for at vise, at den er begrænset.

Vi har indført de to begreber, 'lukket' og 'begrænset', fordi de bruges til at beskrive de definitionsmængder for kontinuerte funktioner, hvor man kan være sikker på, at der findes største og mindste værdier for funktionen. Der gælder nemlig følgende vigtige

(3.29) SÆTNING.

Lad $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Antag at $\mathscr{D}(f)$ er lukket og begrænset. Så antager f både en største og en mindste værdi på $\mathscr{D}(f)$. Dvs. der findes punkter M, m i $\mathscr{D}(f)$, der opfylder, at

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M)$$

for alle $x \in \mathscr{D}(f)$.

Informationen i Sætning 29 er, at sålænge man holder sig til en kontinuert funktion på en lukket og begrænset mængde, kan man altid være sikker på, at der findes punkter, hvor den antager en største værdi, og punkter hvor den antager en mindste værdi. For en kontinuert funktion, hvis definitionsmængde ikke er både lukket og begrænset, behøver der ikke findes sådanne globale ekstremumspunkter.

Mht. at finde punkter hvor en kontinuert funktion på en lukket og begrænset mængde antager sin største og mindste værdi, benytter vi følgende sætning, som er en generalisering af Sætning 9 til funktioner af flere variable.

(3.30) SÆTNING.

Lad $f : \mathscr{D}(f) \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Antag at $\mathscr{D}(f)$ er lukket og begrænset. Så antager f sin største og mindste værdi blandt følgende punkter:

(i) Randpunkter i $\mathscr{D}(f)$.

(ii) Kritiske punkter, dvs. indre punkter x i $\mathscr{D}(f)$, hvor $\nabla f(x) = 0$.

(iii) Punkter, hvor de partielt afledte af f ikke findes.

I mange tilfælde er ingen punkter af type iii i Sætning 30, og så skal man altså lede efter de globale ekstremumspunkter for f blandt randpunkterne i $\mathscr{D}(f)$ og de kritiske punkter.

(3.31) EKSEMPEL.

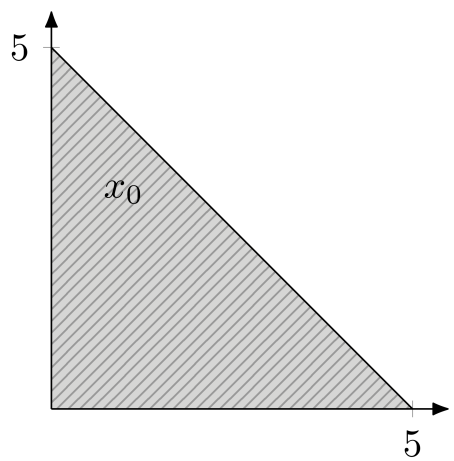
Det følger fra Sætning 29, at funktionen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

har en største og mindste værdi på mængden

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x, 0 \le y, x + y \le 5\right\}.$$

Se Figur 3.13.



Figur 3.13: Mængden D med det kritiske punkt for f.

For at finde den største og den mindste værdi, f antager på $\mathscr{D}$, og de punkter, hvor de antages, undersøger vi punkterne af type i, ii og iii i Sætning 30.

Type ii: For at bestemme de kritiske punkter udregner vi gradienten:

$$\nabla f(x,y) = (2x - 2, 2y - 6).$$

Så der er ét kritisk punkt $x_0 = (1,3)$. Vi noterer os at

$$f(1,3) = 4.$$

Type iii: Da de partielt afledede af f eksisterer for alle (x,y) er der ingen punkter af denne type.

Type i: Fra Figur 3.13 ser vi, at mængden af randpunkter i $\mathscr{D}$ kan deles op i tre stykker:

(1) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 5\}$,

(2) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 5\}$,

(3) $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x+y = 5\}$.

Vi tager dem en af gangen:

1: Når $(x,y) \in D_1$ er

$$f(x,y) = y^2 - 6y + 14 \tag{3.11}$$

og y ligger mellem 0 og 5. Ved brug af Sætning 9 ser vi at funktionen $y^2 - 6y + 14$ antager sin største og mindste værdi på $[0,5]$ når $y = 0$, $y = 5$ eller når den afledte $\frac{d}{dy}(y^2 - 6y + 14) = 2y - 6$ er nul; dvs. når $y = 3$. Da $f(0,0) = 14$, $f(0,5) = 9$ og $f(0,3) = 5$, ser vi, at f antager sin største værdi på D_1 når $(x,y) = (0,0)$ og sin mindste værdi på D_1 når $(x,y) = (0,3)$.

2: Når $(x,y) \in D_2$ er

$$f(x,y) = x^2 - 2x + 14 \tag{3.12}$$

og x ligger mellem 0 og 5. Ved brug af Sætning 9 ser vi, at funktionen $x^2 - 2x + 14$ antager sin største og mindste værdi på $[0,5]$ når $x = 0$, $x = 5$ eller når den afledte $\frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 14) = 2x - 2$ er nul; dvs. når $x = 1$. Da $f(0,0) = 14$, $f(5,0) = 29$ og $f(1,0) = 13$, ser vi, at f antager sin største værdi på D_2 når $(x,y) = (5,0)$ og sin mindste værdi på D_2 når $(x,y) = (1,0)$.

3: Når $(x,y) \in D_3$ er $y = 5 - x$ og vi finder, at

$$f(x,y) = 2x^2 - 6x + 9 \tag{3.13}$$

og x ligger mellem 0 og 5. Ved brug af Sætning 9 ser vi at funktionen $2x^2 - 6x + 9$ antager sin største og mindste værdi på $[0,5]$ når $x = 0$, $x = 5$ eller når den afledte $\frac{d}{dx}(2x^2 - 6x + 9) = 4x - 6$ er nul; dvs. når $x = \frac{3}{2}$. Da $f(0,5) = 9$, $f(5,0) = 29$ og $f(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}) = \frac{9}{2}$, ser vi at f antager sin største værdi på D_3 når $(x,y) = (5,0)$ og sin mindste værdi på D_3 når $(x,y) = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

Vi har nu undersøgt alle punkter af de tre typer fra Sætning 30, og kan konkludere at den største værdi som f antager på $\mathscr{D}$, er 29, som antages når $(x,y) = (5,0)$, og den mindste værdi er $\frac{9}{2}$, som antages når $(x,y) = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

(3.32) EKSEMPEL.

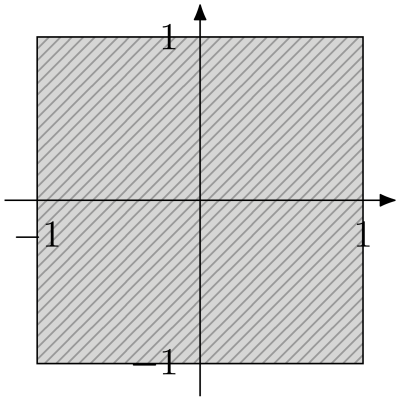
Det følger fra Sætning 29, at funktionen

$$f(x,y) = x^2y^2 + y^2$$

har en største og mindste værdi på mængden

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

For at finde den største og den mindste værdi f, antager på $\mathscr{D}$, og de punkter hvor de antages, undersøger vi punkterne af type i, ii og iii i Sætning 30.



Figur 3.14: Mængden $\mathscr{D}$.

Type ii: For at bestemme de kritiske punkter udregner vi gradienten:

$$\nabla f(x,y) = (2xy^2, 2yx^2 + 2y).$$

Bemærk at $\nabla f(x,y) = 0$ når $y = 0$. Hvis $y \neq 0$ er $2yx^2 + 2y = 2y(x^2+1) \neq 0$, så vi ser, at de kritiske punkter for f er punkter hvor $y = 0$. Vi noterer os nu blot, at

(a) $f(x,y) = 0$ når (x,y) er et kritisk punkt.

Type iii: Da de partielt afledte af f eksisterer for alle (x,y), er der ingen punkter af denne type.

Type i: Fra Figur 3.14 ser vi, at randen består af mængderne

(1) $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = -1\right\}$,

(2) $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = 1\right\}$,

(3) $D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, x = -1\right\}$,

(4) $D_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, x = 1\right\}$.

Vi tager dem en af gangen:

1: Når $(x,y) \in D_1$ er

$$f(x,y) = x^2 + 1, \tag{3.14}$$

og x løber mellem -1 og 1. Den største værdi f antager på D_1 er i punkterne $(1,-1)$ og $(-1,-1)$, og

$$f(-1,-1) = f(1,-1) = 2.$$

Den mindste værdi, f antager på D_1, er i punktet $(0,-1)$, hvor

$$f(0,-1) = 1.$$

Dette indser man ved at lave en funktions undersøgelse af (3.14) for $-1 \leq x \leq 1$, f.eks. ved at bruge Sætning 9 på funktionen $[-1,1] \ni x \mapsto x^2 + 1$. Dette giver nemlig, at denne funktion antager sin største og mindste værdi for $x = -1$, $x = 1$, som er randpunkterne for $[-1,1]$, eller hvor den afledte $\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$ er nul; altså for $x = 0$.

2: Når $(x,y) \in D_2$ har vi også, at

$$f(x,y) = x^2 + 1, \tag{3.15}$$

og vi finder på samme måde, at den største værdi, f antager på D_2, er i punkterne $(1,1)$ og $(-1,1)$, hvor

$$f(-1,1) = f(1,1) = 2.$$

Den mindste værdi, f antager på D_2, er i punktet $(0,1)$, hvor

$$f(0,1) = 1.$$

3: Når $(x,y) \in D_3$ er

$$f(x,y) = 2y^2, \tag{3.16}$$

og y løber mellem -1 og 1. (3.16) antager sin største værdi på $[-1,1]$, når $y = 1$ eller $y = -1$, og sin mindste værdi når $y = 0$. På den måde konkluderer vi, at den største værdi f antager på D_3 er i punkterne $(-1,-1)$ og $(-1,1)$, og

$$f(-1,-1) = f(-1,1) = 2.$$

Den mindste værdi f antager på D_3 er i punktet $(-1,0)$, hvor

$$f(-1,0) = 0.$$

4: Når $(x,y) \in D_4$ har vi også, at

$$f(x,y) = 2y^2, \tag{3.17}$$

og vi finder derfor på samme måde som ovenfor, at den største værdi, f antager på D_4, er i punkterne $(1,-1)$ og $(1,1)$, og

$$f(1,-1) = f(1,1) = 2.$$

Den mindste værdi, f antager på D_4, er i punktet $(1,0)$, hvor

$$f(1,0) = 0.$$

Ved brug af Sætning 30 kan vi nu konkludere, at 2 er den største værdi f antager på $\mathscr{D}$, og det sker i hjørnerne $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, og at den mindste værdi f antager på $\mathscr{D}$, er 0, og at den værdi antages i punkterne $(t,0)$, hvor $t \in [-1,1]$.

3.3 Lineær regression

Mange ting i denne verden afhænger lineært af hinanden – eller ihvertfald næsten. Vi nævner i flæng

(a) tryk og temperatur i en ideal gas,

(b) opløst mængde og temperatur i en ammoniumnitrat opløsning,

(c) hastighed og tid i et frit fald,

(d) uddannelseslængde og årsindtægt,

(e) blodtryk og alder,

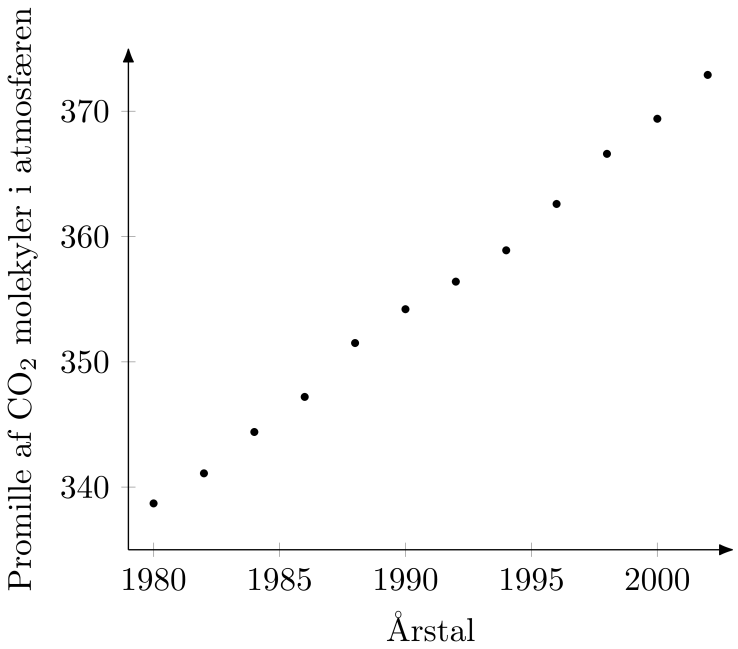
1980	338.7
1982	341.1
1984	344.4
1986	347.2
1988	351.5
1990	354.2
1992	356.4
1994	358.9
1996	362.6
1998	366.6
2000	369.4
2002	372.9

Figur 3.15: Måle data - årstal og CO_2 koncentration i atmosfæren

(f) blodsukkerniveau og sammentrækningsevne for venstre hjertekammer hos diabetikere.

Eller indholdet af CO_2 i atmosfæren og tid. Ihvertfald har man målt de tal for andelen i promille af CO_2 molekyler i atmosfæren, der fremgår af tabellen i Figur 3.15.

Hvis man lægger data fra tabellen i Figur 3.15 ind i et koordinat system (Figur 3.16), f.eks. med årstallene på x-aksen, og CO_2 koncentrationen på y-aksen, får man straks en mistanke om en lineær sammenhæng. Men punkterne ligger ikke *præcist* på en ret linie, så det er passende at spørge, hvilken ret linie der er tættest på at matche de anførte data. Selvfølgelig er det ikke helt klart, hvad der menes med 'tættest på' og 'matche', men der er en meget udbredt og generelt accepteret metode til at afgøre dette, og den kaldes *mindste kvadraters metode*.



Figur 3.16: Plot af data fra tabellen i Figur 3.15.

At y afhænger lineært af x betyder, at der findes tal $a,b \in \mathbb{R}$ så

$$y = ax + b. \tag{3.18}$$

Hvis tallene fra tabellen i Figur 3.15 skulle ligge på linien (3.18) skulle a og b opfylde, at

$$\begin{aligned}
&338.7 = a \cdot 1980 + b; \quad 341.1 = a \cdot 1982 + b; \quad 344.4 = a \cdot 1984 + b;\\
&347.2 = a \cdot 1986 + b; \quad 351.5 = a \cdot 1988 + b; \quad 354.2 = a \cdot 1990 + b;\\
&356.4 = a \cdot 1992 + b; \quad 358.9 = a \cdot 1994 + b; \quad 362.6 = a \cdot 1996 + b;\\
&366.6 = a \cdot 1998 + b; \quad 369.4 = a \cdot 2000 + b; \quad 372.9 = a \cdot 2002 + b.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Det er der ingen tal a,b der opfylder. Så det bedste man kan gøre, er at forsøge at vælge a og b så afstanden bliver så lille som muligt mellem 338.7 og $a \cdot 1980 + b$; mellem 341.1 og $a \cdot 1982 + b$; mellem 344.4 og $a \cdot 1984 + b$ osv. Det er imidlertid ikke så ligetil; man kan godt vælge a og b så $338.7 = a \cdot 1980 + b$ og $341.1 = a \cdot 1982 + b$, men så bliver afstanden mellem (f.eks.) 362.6 og $a \cdot 1996 + b$ ikke den samme som hvis man vælger a og b så $338.7 = a \cdot 1980 + b$ og $372.9 = a \cdot 2002 + b$. Så hvad skal man gøre?

Ideen er, at man betragter de målte værdier af CO_2 koncentrationen som et element $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^{12}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 338.7 \\ 341.1 \\ 344.4 \\ 347.2 \\ 351.5 \\ 354.2 \\ 356.4 \\ 358.9 \\ 362.6 \\ 366.6 \\ 369.4 \\ 372.9 \end{pmatrix}$$

og sammenligner med den vektor $\vec{y}$ i $\mathbb{R}^{12}$, der fremkommer fra højresiderne in (3.19):

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} a \cdot 1980 + b \\ a \cdot 1982 + b \\ a \cdot 1984 + b \\ a \cdot 1986 + b \\ a \cdot 1988 + b \\ a \cdot 1990 + b \\ a \cdot 1992 + b \\ a \cdot 1994 + b \\ a \cdot 1996 + b \\ a \cdot 1998 + b \\ a \cdot 2000 + b \\ a \cdot 2002 + b \end{pmatrix}.$$

Man vil så gerne vælge a og b så afstanden mellem $\vec{x}$ og $\vec{y}$ bliver så lille som muligt. På den måde tager man nemlig lige meget hensyn til alle data. Afstanden mellem de to vektorer er kvadratroden

af summen

$$\begin{aligned}(338.7-a\cdot 1980-b)^2+(341.1-a\cdot 1982-b)^2+(344.4-a\cdot 1984-b)^2\\ +(347.2-a\cdot 1986-b)^2+(351.5-a\cdot 1988-b)^2+(354.2-a\cdot 1990-b)^2\\ +(356.4-a\cdot 1992-b)^2+(358.9-a\cdot 1994-b)^2+(362.6-a\cdot 1996-b)^2\\ +(366.6-a\cdot 1998-b)^2+(369.4-a\cdot 2000-b)^2+(372.9-a\cdot 2002-b)^2.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Vi søger derfor a og b, så (3.20) bliver så lille som muligt. Som vi skal gøre rede for, følger det fra matematikken i afsnit 3.2 at der findes et sådant par (a,b), og at dette par er entydigt bestemt. Dermed opnår vi altså, at der er præcist en linie (3.18), som er den, der bedst matcher dataene fra tabellen i Figur 3.15. Denne metode til at finde den rette linie, der bedst matcher nogle måle data, hedder *mindste kvadraters metode,* fordi leddene i (3.20) er kvadrater.

Selvom forfatteren faktisk er meget interesseret i (læs: bekymret over) koncentrationen af CO_2 i atmosfæren, vil vi nu beskrive mindste kvadraters metode, og den bagved liggende matematik i et mere generelt (og dermed abstrakt) setup. På den måde opnår vi netop en indsigt og en metode, der omfatter langt flere situationer, inkl. fx dem der er nævnt i starten af dette afsnit.

Lad (u_1,v_1), (u_2,v_2), $(u_3,v_3),\ldots,(u_n,v_n)$ være n elementer i $\mathbb{R}^2$, repræsenterende n punkter i et koordinatsystem. For at finde den linie, som kommer tættest på at være en linie, som punkterne ligger på, ønsker vi at bestemme et talpar $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, som gør

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i-au_i-b)^2$$

mindst mulig. Vi indfører til det formål funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ved

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\sum_{i=1}^{n}(v_i-xu_i-y)^2\\ &=(v_1-xu_1-y)^2+(v_2-xu_2-y)^2+\cdots+(v_n-xu_n-y)^2.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Vi søger at finde det punkt $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, hvor $f(a,b)$ er mindst mulig. Til det formål finder vi de kritiske punkter for f : Da

$$\nabla f(x,y)=\Big(-2\sum_{i=1}^{n}(v_i-xu_i-y)u_i,\,-2\sum_{i=1}^{n}(v_i-xu_i-y)\Big),$$

ser vi, at de kritiske punkter er er de talpar (x,y) som opfylder, at

$$0=\sum_{i=1}^{n}(v_i-xu_i-y)u_i=\Big(\sum_{i=1}^{n}v_iu_i\Big)-x\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\Big)-y\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i\Big) \tag{3.22}$$

og

$$0=\sum_{i=1}^{n}(v_i-xu_i-y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}v_i\Big)-x\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i\Big)-ny. \tag{3.23}$$

Forudsætter man at

$$n\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\Big)\neq\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i\Big)^2, \tag{3.24}$$

finder man ved løsning af (3.22) og (3.23) at det eneste kritiske punkt er når $(x,y)=(a,b)$, hvor

$$\boxed{a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}v_iu_i-\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2},\qquad(3.25)}$$

og

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}. \tag{3.26}$$

Ved brug af Sætning 30 kan man vise, at talparret (a,b) givet ved (3.25) og (3.26) er det punkt, hvor funktionen (3.21) antager sin mindste værdi på $\mathbb{R}^2$. Ligningen for den linie, som kommer tættest på at være en linie gennem punkterne (u_i, v_i), $i = 1,2,\ldots,n$, har altså ligningen $y = ax+b$, hvor a er givet ved (3.25), og b er givet ved (3.26).

For at nå frem til (3.25) og (3.26) forudsatte vi, at $n(\sum_{i=1}^{n} u_i^2)$ ikke var lig med $(\sum_{i=1}^{n} u_i)^2$. Hvis disse to tal er ens giver de to formler ingen mening, da nævneren så er nul. Men man kan vise, at de to tal kun er ens når $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$, og så ligger punkterne $(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ jo allerede på en ret linie. Betingelsen (3.26) repræsenterer altså ikke nogen virkelig indskrænkning.

Kapitel 4

Integration med to eller flere variable

Efter at have indført teorien om hvordan man kan differentiere funktioner af 2 og flere variable, og hvordan det bl.a. kan anvendes til at finde største og mindste værdier af funktioner af flere variable, er tiden nu kommet til at se på hvordan teorien for det bestemte integral af en kontinuert funktion af én variabel lader sig generalisere.

4.1 Itererede integraler

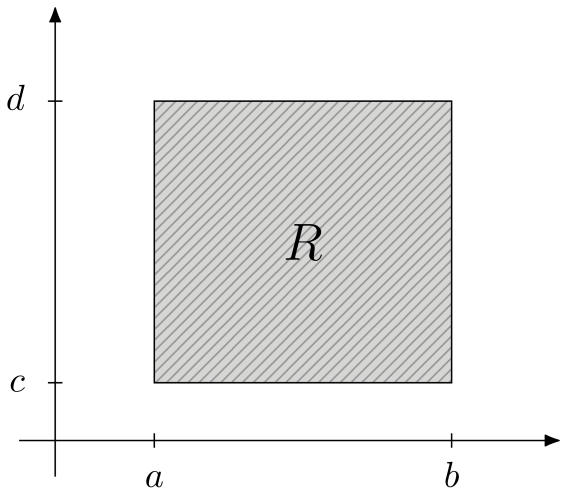
Lad R være et lukket rektangel i planen $\mathbb{R}^2$. Dvs. at R er delmængde af $\mathbb{R}^2$ på formen

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\},$$

hvor a,b,c,d er reelle tal så $a < b$ og $c < d$. Se Figur 4.1. En standard notation for et sådan rektangel er

$$R = [a,b] \times [c,d];$$

'produktet' af intervallet $[a,b]$ med intervallet $[c,d]$.



Figur 4.1: Rektanglet $[a,b] \times [c,d]$ indtegnet i et retvinklet koordinatsystem.

Lad $f(x,y)$ være en kontinuert funktion af to variable, som er defineret på R; i symboler [1]R er en delmængde af $\mathscr{D}(f)$, dvs. alle elementer i R er også elementer i $\mathscr{D}(f)$.. Lad x være et tal i

[1] $R \subseteq \mathscr{D}(f)$

intervallet $[a,b]$. Vi kan så definere en funktion g på intervallet $[c,d]$ ved at

$$g(y) = f(x,y).$$

Og vi kan integrere g :

$$\int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Det tal vi får på denne måde afhænger typisk af, hvilket x i intervallet $[a,b]$ vi har valgt. På denne måde får vi en funktion h defineret på $[a,b]$ ved at

$$h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Denne funktion h, viser det sig, er kontinuert, og vi kan derfor integrere den:

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Dette integral

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx,$$

der altså fremkommer ved at vi først integrerer f mht. y henover intervallet $[c,d]$, og derefter den fremkomne funktion af x henover intervallet $[a,b]$, kaldes for *et itereret integral*.

(4.1) EKSEMPEL.

Funktionen $f(x,y) = x^2y$ er kontinuert og vi kan beregne det itererede integral

$$\int_a^b \left(\int_c^d x^2y\,dy \right) dx$$

for ethvert rektangel $[a,b] \times [c,d]$. Hvis f.eks. $R = [0,1] \times [2,3]$ finder vi, at

$$\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_2^3 x^2y\,dy = x^2 \int_2^3 y\,dy = x^2 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_2^3 = x^2 \left(\tfrac{1}{2}3^2 - \tfrac{1}{2}2^2\right) = \tfrac{5}{2}x^2.$$

I dette tilfælde er funktionen $h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ altså givet ved, at

$$h(x) = \tfrac{5}{2}x^2,$$

og det itererede integral $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$ bliver derfor

$$\int_0^1 \left(\int_2^3 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \tfrac{5}{2}x^2\,dx = \tfrac{5}{6}.$$

Men hvorfor starte med at integrere med hensyn til y? Man kan jo også integrere først mht. x og derefter mht. y : Funktionen

$$k(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

er kontinuert, og vi kan derfor integrere den henover $[c,d]$:

$$\int_c^d k(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Denne metode til at integrere en funktion af to variable minder meget om den måde, vi differentierer partielt på: Vi holder den ene variabel fast og differentierer, hhv. integrerer med hensyn til den anden. Men metoden efterlader (mindst) to naturlige spørgsmål:

(a) Hvilken rækkefølge skal vi integrere i?

(b) Hvad betyder det tal, der fremkommer ved en itereret integrering?

Det første spørgsmål er meget enkelt:

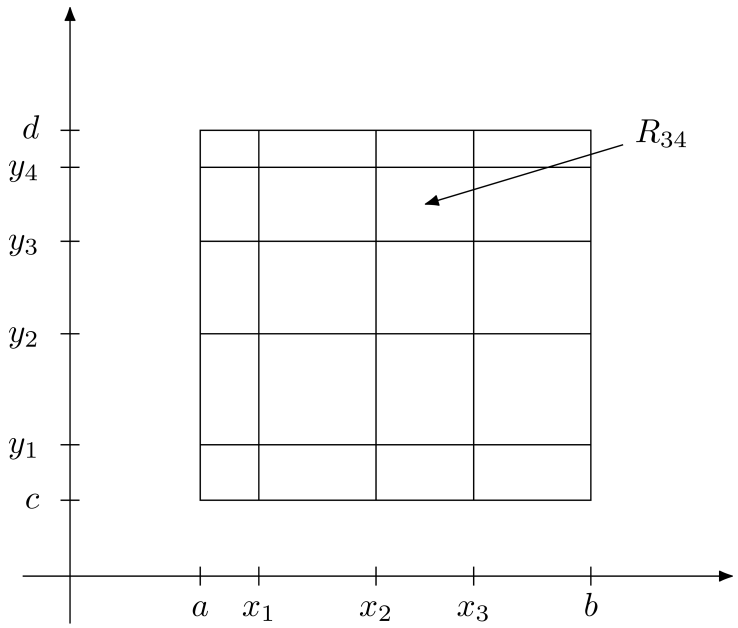
$$\text{Skal vi beregne } \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \text{ eller } \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx?$$

For at forstå det andet spørgsmål skal man huske på, at det bestemte integral af en positiv funktion af én variabel gav os et areal; arealet af området over x-aksen og under grafen for funktionen. Det er derfor naturligt AT spørge, om det itererede integral har en tilsvarende betydning.

Med disse to spørgsmål som 'cliffhanger' forlader vi de itererede integraler for en stund.

4.2 Planintegraler

Planintegraler kaldes også for *dobbeltintegraler*, og de kan indføres på følgende måde. Lad $R = [a,b] \times [c,d]$ være et lukket rektangel og $f : R \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Vi deler rektanglet op i mindre rektangler ved at indføre en række delepunkter i intervallerne $[a,b]$ og $[c,d]$. Se Figur 4.2.



Figur 4.2: Delepunkter i $[a,b]$ og $[c,d]$ giver os et 'net', der overdækker R.

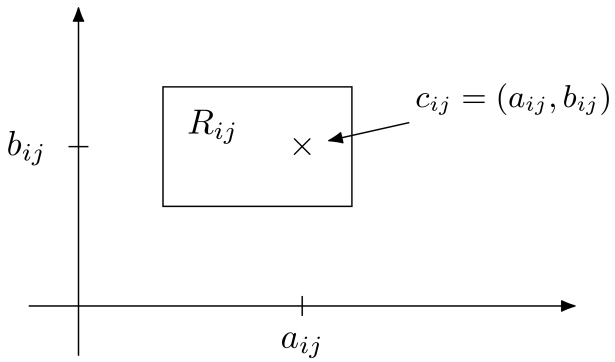
Delepunkterne i $[a,b]$ kalder vi $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ og delepunkterne i $[c,d]$ kalder vi $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_m$. Vi vælger $x_n = b$, $y_m = d$, og sætter $x_0 = a$, $y_0 = c$. I Figur 4.2 er $n = 4$ og $m = 5$. De mindre rektangler, der fremkommer i R betegner vi

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

hvor i løber fra 1 til n, og j fra 1 til m. På Figur 4.2 er rektanglet R_{34} udpeget. Tilsammen udgør disse mindre rektangler et *net*, der overdækker det store rektangel R. Vi lader Δ betegne dette net – altså, samlingen af de små rektangler, der er opstået ved at vælge dele-punkterne $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ og $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_m$. Længden af den længste diagonal i de små rektangler R_{ij} kalder vi for

maskevidden af nettet Δ, og vi betegner den ved $M(\Delta)$. Maskevidden er således et mål for 'finheden' af nettet. Jo mindre maskevidde, jo finere er nettet.

Givet et sådant net Δ vælger vi for hvert af de små rektangler R_{ij} et punkt $c_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$ i R_{ij}. Første koordinaten a_{ij} af c_{ij} er altså et eller andet tal i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ og anden koordinaten b_{ij} er et eller andet tal i intervallet $[y_{j-1}, y_j]$. En (muligvis forstørret) udgave af R_{ij} indeholdende det valgte punkt c_{ij} er vist i Figur 4.3.



Figur 4.3: Et af rektanglerne R_{ij} i nettet Δ med et udvalgt punkt c_{ij}.

Når vi har valgt sådanne punkter for alle de små rektangler, kan vi indføre tallet

$$\begin{aligned} &f(c_{00})(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + f(c_{10})(x_2 - x_1)(y_1 - y_0) \\ &\quad + \cdots + f(c_{nm})(x_n - x_{n-1})(y_m - y_{m-1}) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(c_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

En sådan sum kaldes for en *Riemann sum*. For alle i, j er

$$(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

arealet af rektanglet R_{ij}, så det generelle led

$$f(c_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \tag{4.2}$$

i Riemann summen er produktet af funktionsværdien $f(c_{ij})$ og arealet af rektanglet R_{ij}. Hvis f er positiv, er dette produkt rumfanget af en søjle i rummet, der står på rektanglet R_{ij} og stritter op til punktet $(a_{ij}, b_{ij}, f(c_{ij})$ på grafen for f. Se Figur 4.4.

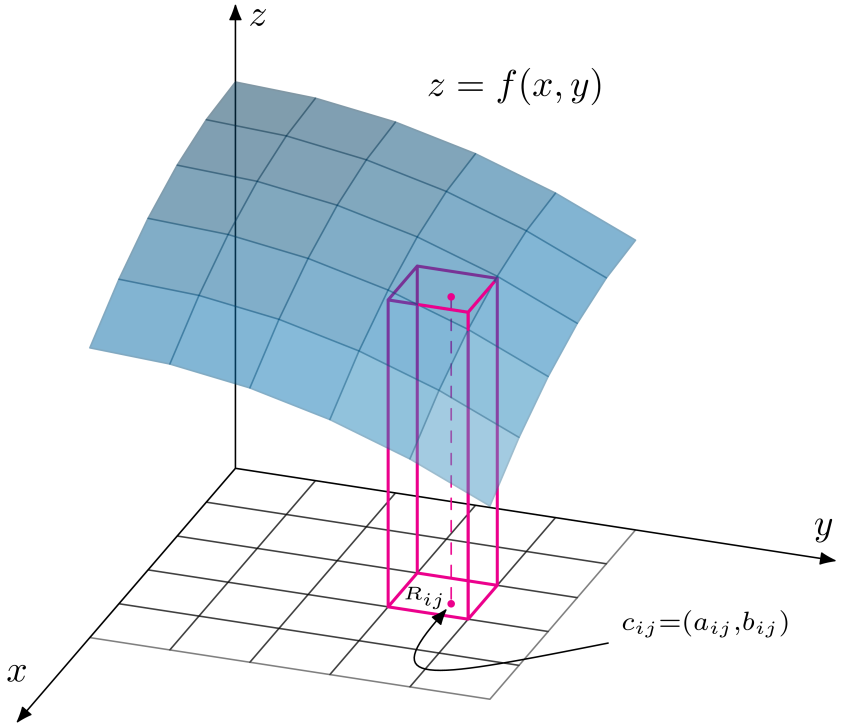
Dermed bliver Riemann summen rumfanget af foreningen af alle disse søjler, og fra en tegning virker det plausibelt, at denne sum er en approksimation til rumfanget af området i rummet $\mathbb{R}^3$, der ligger over rektanglet R, og under grafen for f. Se Figur 4.5.

Dette er rigtigt, når f er positiv. Men under alle omstændigheder vil Riemann summerne nærme sig et bestemt tal, altså have en grænseværdi, når maskevidden $M(\Delta)$ går mod 0 :

(4.2) SÆTNING.

(Planintegralet) Lad R være et lukket rektangel i $\mathbb{R}^2$ og $f : R \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så findes der et tal, som vi betegner

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\, dA,} \tag{4.3}$$



Figur 4.4: Søjlen hvis rumfang er tallet (4.2)

der opfylder, at det kan approksimeres vilkårligt godt med Riemann summer ved at vælge maske vidden $M(\Delta)$ tilstrækkeligt lille.

Udsagnet i Sætning 2 kan skrives i komprimeret form:

$$\lim_{M(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(c_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \iint_R f(x,y)\,dA,$$

og tallet (4.3) kaldes for *planintegralet* eller *dobbeltintegralet* (af f over R). Planintegralet kan altså approksimeres med endelige summer på nogenlunde samme måde som det bestemte integral for en funktion af én variabel. Det er således muligt at approksimere planintegralet vilkårligt godt med Riemann summer.

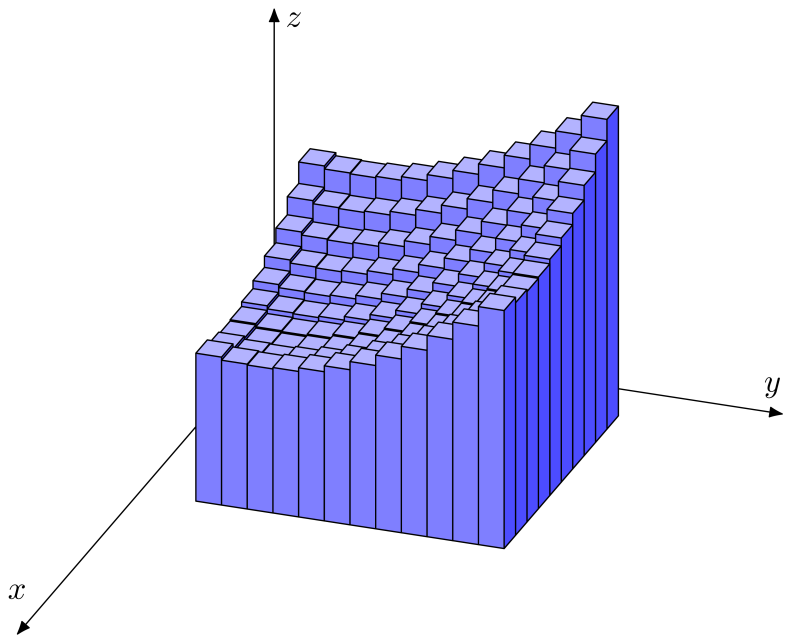
På samme måde som det bestemte integral af en positiv funktion af én variabel er arealet af det, der ligger under grafen, er planintegralet rumfanget af det der ligger under grafen:

(4.3) SÆTNING.

Lad R være et lukket rektangel i $\mathbb{R}^2$ og $f : R \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Når $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in R$, er planintegralet (4.3) lig med rumfanget $V(M)$ af mængden

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in R,\, 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}.$$

Sammenhængen mellem planintegralet og de itererede integraler der blev indført i afsnit 4.1, fremgår af følgende



Figur 4.5: Riemann summen (4.1) er rumfanget af alle de små søjler

(4.4) SÆTNING.

(Fubinis sætning) Lad $R = [a,b] \times [c,d]$ være et lukket rektangel i $\mathbb{R}^2$ og $f : R \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{4.4}$$

Bemærk at den sidste lighed i (4.4) fortæller os, at rækkefølgen vi integrerer i, er ligegyldig i et itereret integral; resultatet er det samme, nemlig planintegralet af f. Bl.a. af den grund er man ofte ikke så omhyggelig med paranteserne i forbindelse med itererede integraler, og skriver ofte blot

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Sammenholdt med Sætning 3 fortæller Sætning 4, at når den funktion, vi integrerer, er positiv, er det itererede integral lig med rumfanget af området mellem rektanglet R, vi integrerer over, og grafen for f. På denne måde giver de to sætninger, Sætning 2 og Sætning 4, svar på de to spørgsmål a og b, der afsluttede afsnit 4.1.

4.2.1 Områder af type I

Nu er funktioner af to variable ikke nødvendigvis definerede på rektangler, og man kan også være interesseret i at finde rumfang af områder i rummet, der ikke 'er støttet' på et rektangel. Derfor har vi brug for at udvide den foregående teori om planintegraler på flg. måde.

Lad $D \subseteq \mathbb{R}^2$ være et begrænset område i planen, og $f : D \to \mathbb{R}$ en funktion. Fordi D er begrænset, kan vi finde et rektangel R så $D \subseteq R$, og definerer så

$$\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$$

ved, at

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{når } (x,y) \text{ ligger i } D, \\ 0 & \text{når } (x,y) \text{ ikke ligger i } D. \end{cases}$$

Vi kan så sige, at planintegralet af f over D eksisterer når der findes et tal der kan approksimeres vilkårligt godt med Riemann summer for funktionen $\tilde{f}$ ved at lade maskevidden $M(\Delta)$ for nettet af rektangler, der overdækker R, være tilstrækkelig lille. Dette tal kalder vi så *planintegralet f over D*, og det betegnes

$$\iint_D f(x,y)\,dA.$$

Planintegralet har en række generelle egenskaber, hvoraf flere er helt analoge til tilsvarende egenskaber for det bestemte integral af en funktion af én variabel. Vi opsummerer nu de vigtigste.

(a) (Rumfang) Hvis $f(x,y) \geq 0$ for alle $(x,y) \in D$ er $\iint_D f(x,y)\,dA$ rumfanget af mængden

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\, 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}.$$

(b) (Linearitet) Hvis $r,t \in \mathbb{R}$ er

$$\boxed{\iint_D rf(x,y) + tg(x,y)\,dA = r\iint_D f(x,y)\,dA + t\iint_D g(x,y)\,dA.}$$

(c) (Voksende) Hvis $f(x,y) \leq g(x,y)$ for alle $(x,y) \in D$, er

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA.}$$

(d) (Trekants ulighed)

$$\boxed{\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dA.}$$

(e) (Additivt med hensyn til integrationsområder) Hvis $D_1, D_2, \ldots, D_n$ er områder således at fællesmængden $D_i \cap D_j$[2] har areal 0 for alle i, j, og hvis

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \cdots \cup D_n,$$

så er

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dA &= \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA + \cdots + \iint_{D_n} f(x,y)\,dA \\ &= \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)\,dA. \end{aligned}}$$

[2] Mængden bestående af alle elementer, der både forekommer i D_i og i D_j.

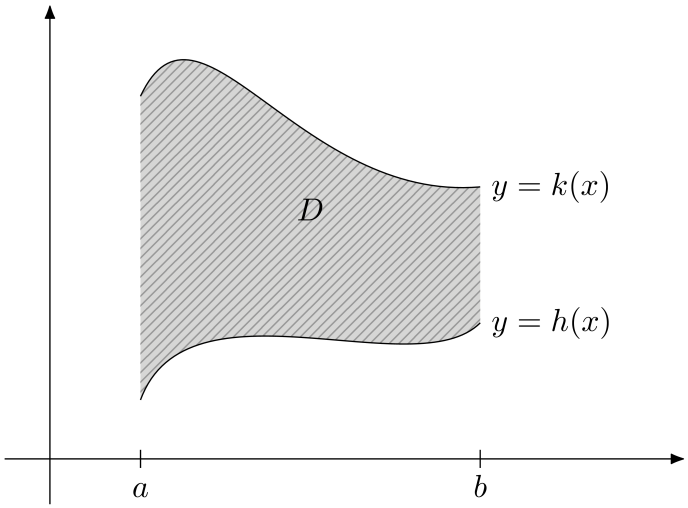
Der findes faktisk områder D i $\mathbb{R}^2$ for hvilke planintegralet af en kontinuert funktion på D ikke eksisterer, men vi skal her interessere os for relativt pæne områder, hvor den slags patologi ikke forekommer, og hvor planintegralet kan beregnes ved anvendelse af itererede integraler, næsten som for rektangler.

(4.5) DEFINITION.

En delmængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er af type I*, når der findes et interval $[a,b]$ og to kontinuerte funktioner $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ og $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ så $h(x) \leq k(x)$ for alle $x \in [a,b]$, og så*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\, h(x) \leq y \leq k(x)\right\}.$$

I ord er D af type I, når D består af de punkter i planen, der ligger mellem graferne for to funktioner, h og k, der er defineret på det samme interval, $[a,b]$. Se Figur 4.6.



Figur 4.6: Et område af type I.

(4.6) SÆTNING.

Lad

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\, h(x) \leq y \leq k(x)\right\}$$

være et område af type I, og $f : D \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så eksisterer planintegralet af f over D, og

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{k(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

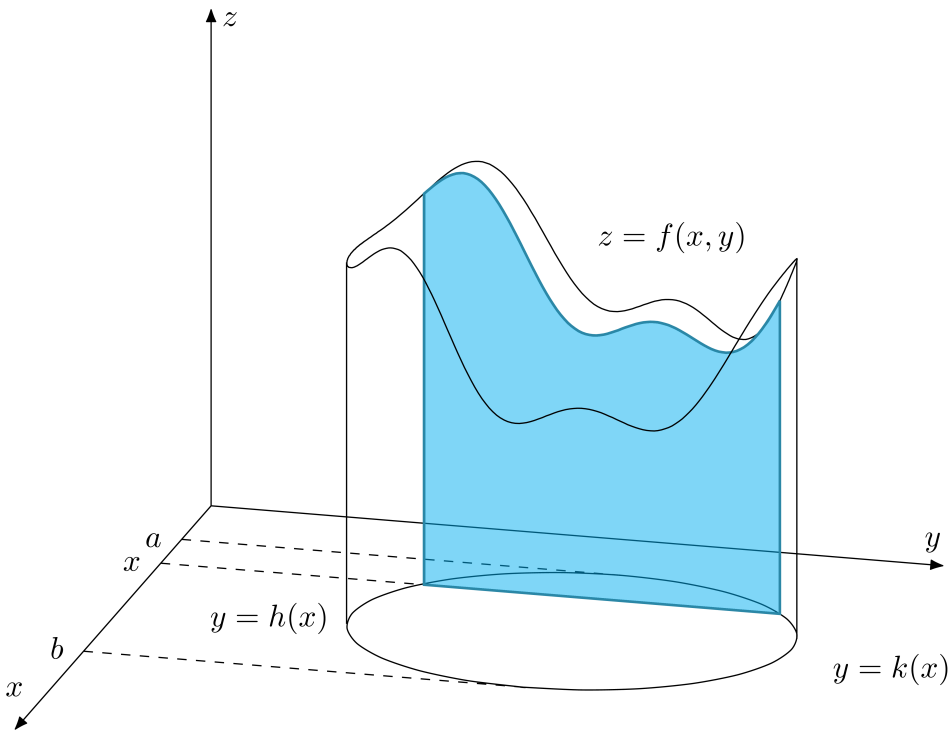
Desuden gælder, som i tilfældet hvor D er et rektangel, at når f er en positiv funktion er planintegralet

$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

lig med rumfanget $V(M)$ af mængden M, der består af de punkter i rummet, der ligger over D og under grafen for f. I matematisk notation,

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}.$$

Mængden M er illustreret på Figur 4.7.



Figur 4.7: Et eksempel på mængden M.

Ved hjælp af Sætning 6 kan man beregne rumfanget af relativt komplicerede mængder i rummet; f.eks. følgende. Lad

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

Så er D en halv cirkelskive, og mængden

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq \frac{y}{2}\right\}, \tag{4.5}$$

har form som en kile. Se Figur 4.8.

Da M består af de punkter i rummet, der ligger over D og under grafen for funktionen $f(x,y) = \frac{y}{2}$, kan rumfanget $V(M)$ af M beregnes, som planintegralet

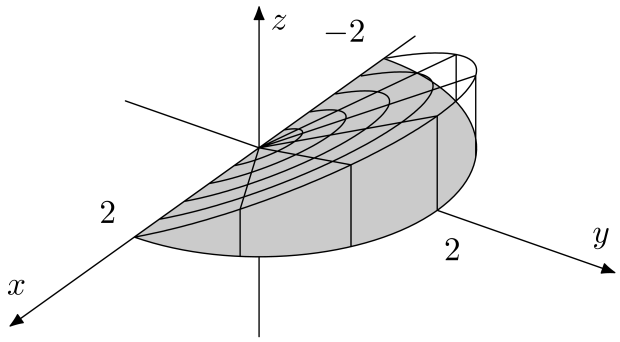
$$V(M) = \iint_D \frac{y}{2}\, dA.$$

Området D er af type I med $h = 0$ og $k(x) = \sqrt{4-x^2}$, så fra Sætning 6 får vi, at

$$V(M) = \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{2}\, dy \right) dx. \tag{4.6}$$

Vi beregner først

$$\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{2}\, dy = \left[\tfrac{1}{4}y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{4}.$$



Figur 4.8: Mængden M fra (4.5)

Indsætter vi det i (4.6), får vi, at

$$V(M) = \int_{-2}^{2} 1 - \frac{x^2}{4}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3}.$$

Rumfanget af kilen i Figur 4.8 er altså $\frac{8}{3}$. Om det er cm^3, m^3 eller noget andet afhænger af måleenheden.

4.2.2 Områder af type II

Områder af type II er områder af type I, hvor x og y har bytter roller. I mere detalje:

(4.7) DEFINITION.

En delmængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ er af type II*, når der findes et interval $[c,d]$ og to kontinuerte funktioner $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ og $k : [c,d] \to \mathbb{R}$ så $h(y) \le k(y)$ for alle $y \in [c,d]$, og så*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \le y \le d,\, h(y) \le x \le k(y)\right\}.$$

Figur 4.9 viser et eksempel på et område af type II.
For områder af type II gælder der følgende; en fuldstændig analog til Sætning 6:

(4.8) SÆTNING.

Lad

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \le y \le d,\, h(y) \le x \le k(y)\right\}$$

være et område af type II, og $f : D \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så eksisterer planintegralet af f over D, og

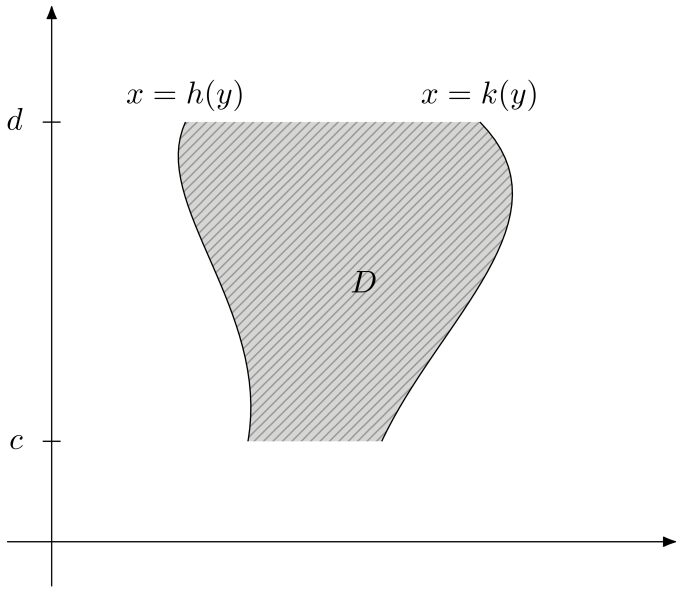
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{k(y)} f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Også for områder af type II gælder, at

$$\iint_D f(x,y)\,dA = V(M)$$

når

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in D,\, 0 \le z \le f(x,y)\right\}.$$

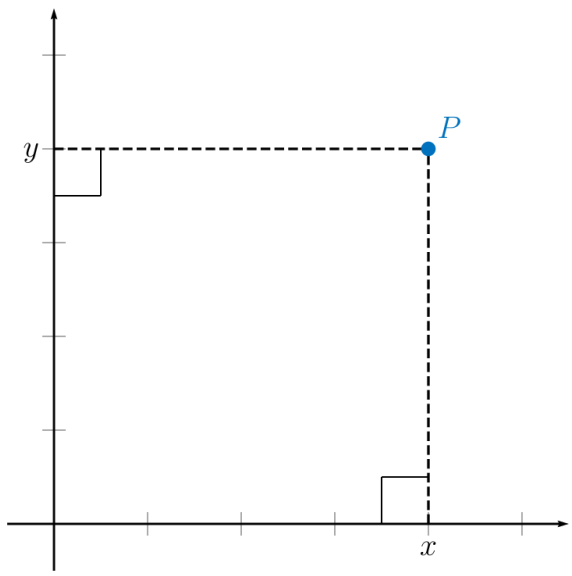


Figur 4.9: Et område af type II.

4.2.3 Planintegraler i polære koordinater

Der er mange områder i planen $\mathbb{R}^2$, hvor det er uhensigtsmæssigt at opdele ved hjælp af rektangler, som vi har gjort for at definere og beregne planintegraler ovenfor. Det gælder f.eks. cirkelskiver, eller dele af cirkelskiver. Til at håndtere disse områder vil vi indføre en ny type koordinatsystem.

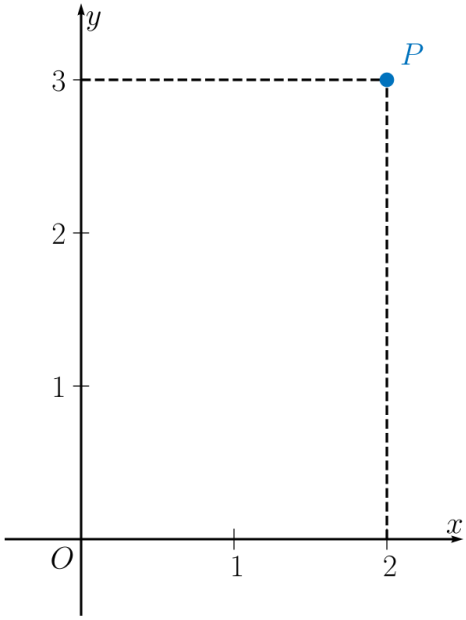
Ind til videre har vi betragtet punkter i det såkaldte *kartesiske koordinatsystem*. Her beskriver vi som bekendt et punkt P ud fra et koordinatsæt (x, y), som vi angiver ved at lade to linjer gå fra punktet og vinkelret på hver af de to akser. Punktet kan vi så også betragte i det såkaldte *polære*



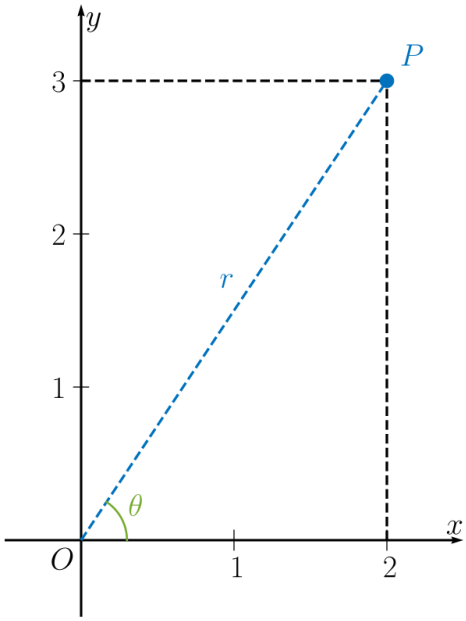
koordinatsystem. Lad os tage et eksempel.

4.9 Eksempel

Se på punktet P givet ved de kartesiske koordinater $(x, y) = (2, 3)$. Vi kan da angive punktet



ud fra længden fra orego til P samt vinklen mellem den positive x-akse og linjen fra orego til P. Vi kalder længden r og vinklen θ. Det naturlige spørgsmål er så, hvad (r,θ) er, når (x,y) er $(2,3)$. Til



at bestemme det anvender vi først Pythagoras' sætning, der giver, at

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + 3^2 = 13.$$

Dermed er $r = \sqrt{13}$[3].

Ved hjælp af den trigonometriske formel for tangens får vi

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{3}{2},$$

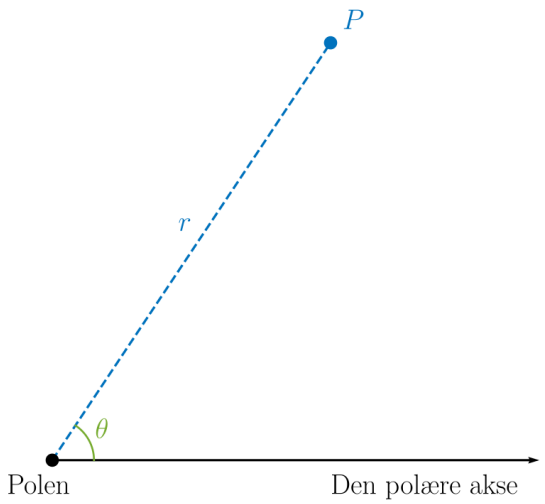
[3] r kan ikke være negativ, fordi det er en længde.

hvormed

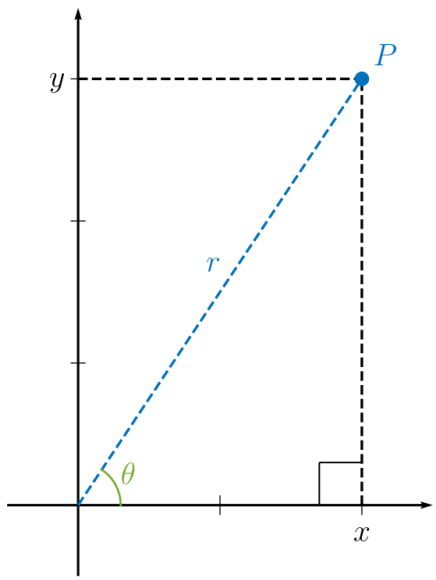
$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.983.$$

Så det polære koordinatsæt for punktet P er $(r,\theta) = (\sqrt{13}, 0.983)$.

Som vi så i eksemplet ovenfor, kan vi beskrive punktet P givet ved kartesiske koordinater (x,y) i et polært koordinatsysten. Der har P koordinater (r,θ), hvor $r \geq 0$ er længden fra polen[4] til punktet P, og θ er vinklen mellem den polære akse[5] og linjen fra polen til P.



Sammenhængen mellem kartesiske og polære koordinater kan vi beskrive ud fra følgende figur. I eksemplet så vi, hvordan vi kan konvertere et kartesisk koordinatsæt (x,y) til et polært (r,θ):



[4]Polen svarer til det, vi i det kartesiske koordinatsystem kalder 'orego'.

[5]Den polære akse er det, vi i det kartesiske koordinatsystem betragter som den positive x-akse.

$$r^2 = x^2 + y^2, \tag{4.7}$$
$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}, \quad \text{for } x \neq 0. \tag{4.8}$$

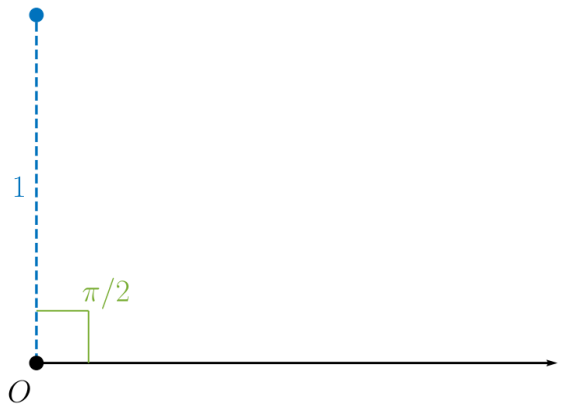
For omvendt at konvertere polære koordinater til kartesiske anvender vi de velkendte trigonometriske formler, der umiddelbart giver, at

$$x = r\cos(\theta), \tag{4.9}$$
$$y = r\sin(\theta). \tag{4.10}$$

(4.10) BEMÆRKNING.

I det kartesiske koordinatsystem har ethvert punkt en entydig repræsentation (x, y). Dette gør sig *ikke* gældende i det polære koordinatsystem. Betragt for eksempel punktet med polære koordinater

$$(r, \theta) = (1, \tfrac{\pi}{2}).$$



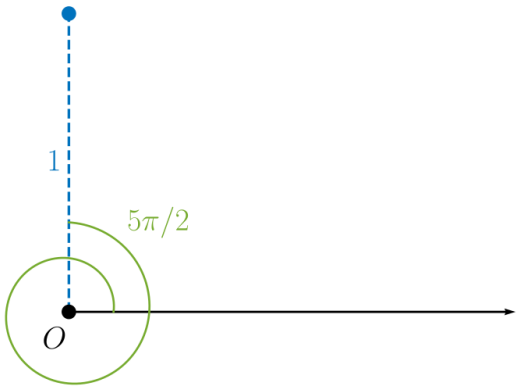
Imidlertid svarer $\frac{\pi}{2}$ til vinklen $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, hvormed $(1, \frac{\pi}{2})$ og $(1, \frac{5\pi}{2})$ er polære koordinatsæt for det samme punkt (se figuren nedenfor).

Det gælder generelt, at de polære koordinatsæt (r, θ) og $(r, \theta + n2\pi)$, hvor $n \in \mathbb{Z}$, repræsenterer samme punkt. Derfor vælger man ofte en begrænsning af θ, for eksempel $\theta \in [0, 2\pi[$ [6]hvilket gør, at ethvert punkt således kan repræsenteres entydigt ved et polært koordinatsæt.

[6]Man kunne også vælge, at

$$\theta \in [-\pi, \pi[,$$

hvor negative vinkler svarer til at tage vinklen mellem den polære akse og *med* uret hen til punktet.

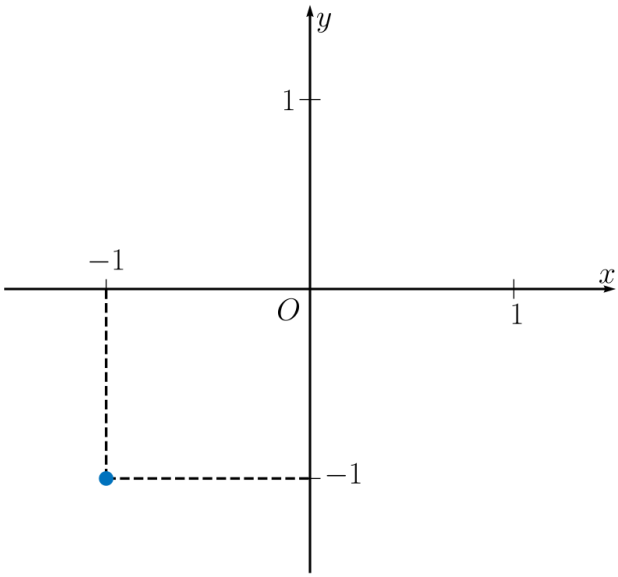


(4.11) EKSEMPEL.

Konverteringen fra et polært koordinatsæt til et kartesisk får vi umiddelbart ud fra ligningerne i (4.9).

Omvendt skal vi gøre os lidt mere umage, hvis vi gerne vil kende de polære koordinater for et punkt givet de kartesiske. Lad os se på punktet bestemt ved de kartesiske koordinater

$$(x,y) = (-1,-1).$$



Figur 4.10

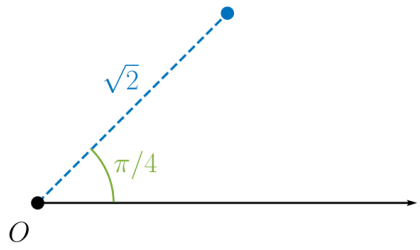
Ifølge ligningerne i (4.7) har vi:

$$r^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2,$$
$$\tan(\theta) = \frac{-1}{-1} = 1.$$

r får vi nemt ved $r = \sqrt{2}$, og θ kan vi beregne på computeren eller lommeregneren ved

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Indtegner vi dette punkt i det polære koordinatsystem ser det dog ud som i figuren nedenfor. Men



punktet stemmer ikke overens med det i Figur 4.10. Derfor er det vigtigt, at tjekke, hvilken kvadrant punktet ligger i. $(x,y) = (-1,-1)$ ligger i tredje kvadrant, mens det polære koordinat $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ligger i første kvadrant. Når ikke de er i samme kvadrant, lægger man π til den beregnede vinkel for at få θ. Det vil sige, at

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4},$$

og de polære koordinater er altså $(r,\theta) = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$.

4.12 Hvorfor skal man lægge pi til vinklen?

Når vi har beregnet det polære koordinatsæt (r,θ) ud fra de kartesiske koordinater (x,y) som i eksemplet ovenfor, og (r,θ) og (x,y) ligger i hver sin kvadrant, skal vi lægge π til den beregnede vinkel for at få det korrekte polære koordinatsæt.

Dette skyldes, at for en vinkel θ er

$$\tan(\theta) = \tan(\theta + \pi). \tag{4.11}$$

For eksempel med værdierne fra eksemplet ovenfor er

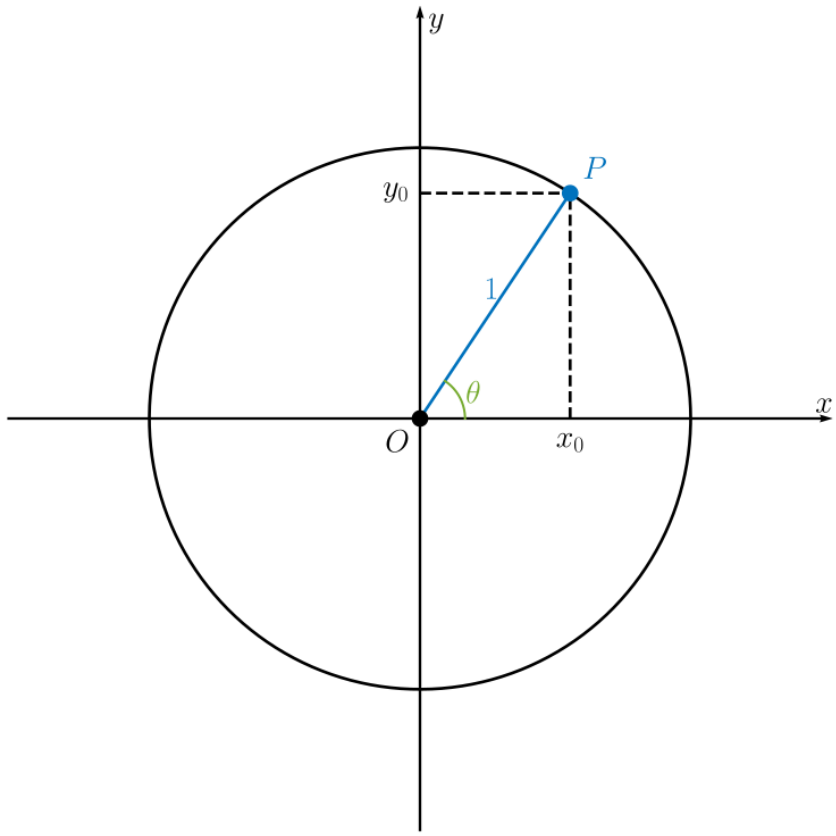
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1.$$

Vi vil nu bevise (4.11).

For en vinkel θ er tangens defineret ved

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \text{hvor } \cos\theta \neq 0. \tag{4.12}$$

Lad os se på vinklen i enhedscirklen, hvor (x_0, y_0) er de kartesiske koordinater for punktet på enhedscirklen svarende til vinklen θ mellem den positive x-akse og linjen fra orego til punktet.



Per definition af sinus og cosinus og sammen med ligning (4.12) er

$$\tan\theta = \frac{y_0}{x_0}.^{7} \tag{4.13}$$

Vi ser nu på vinklen $\theta + \pi$, hvilket igen ifølge definitionen af tangens giver

$$\tan(\theta+\pi) = \frac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)}. \tag{4.14}$$

Indtegner vi denne vinkel i samme figur som ovenfor, ser det sådan her ud: Her bliver $(-x_0, -y_0)$ det kartesiske koordinatsæt til punktet på enhedscirklen med vinklen $\theta + \pi$. Igen per definition af sinus og cosinus og sammen med (4.14) er

$$\tan(\theta+\pi) = \frac{-y_0}{-x_0} = \frac{y_0}{x_0},$$

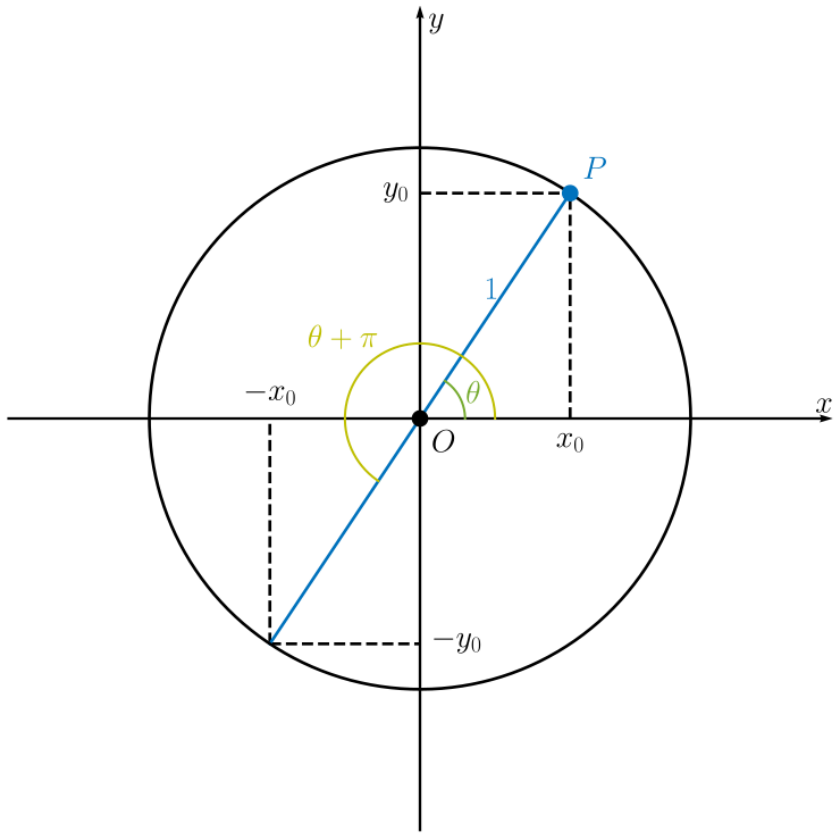
hvilket ifølge ligning (4.13) netop er lig med $\tan\theta$ som ønsket.

I modsætning til kartesiske koordinater gør polære koordinater det let at beskrive cirkelskiver, eller dele af cirkelskiver. For områder af denne type er det som regel også lettest at inddele ved brug af *polære rektangler*; dvs. områder af formen

$$\Omega = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : r_1 \le r \le r_2,\, \alpha \le \theta \le \beta\right\},$$

der består af de punkter i planen, hvis polære koordinater ligger rektanglet $[r_1, r_2] \times [\alpha, \beta]$.

[7] Bemærk, at selvom vinklen er tegnet som værende mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$, gælder definitionen af tangens, sinus og cosinus uændret for vilkårlige vinkler, udover vinkler hvori cosinus er 0.



Benytter man polære rektangler i stedet for almindelige rektangler i definitionen af Riemann summer, får man stadigt summer der approksimerer planintegralet, men de itererede integraler, der fremkommer, bliver på naturlig måde udtrykt ved polære koordinater. For områder der er lette at beskrive i polære koordinater bliver de fremkomne itererede integraler også lettere at beregne end ved brug at sædvanlige koordinater.

Den følgende sætning beskriver, hvorledes planintegraler henover et polært rektangel kan beregnes, og er en 'polær-koordinat-version' af Sætning 4.

(4.13) SÆTNING.

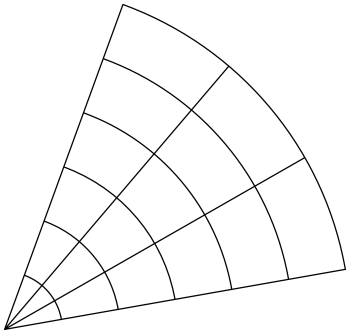
Lad Ω være et polært rektangel,

$$\Omega = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : r_1 \le r \le r_2,\, \alpha \le \theta \le \beta\right\},$$

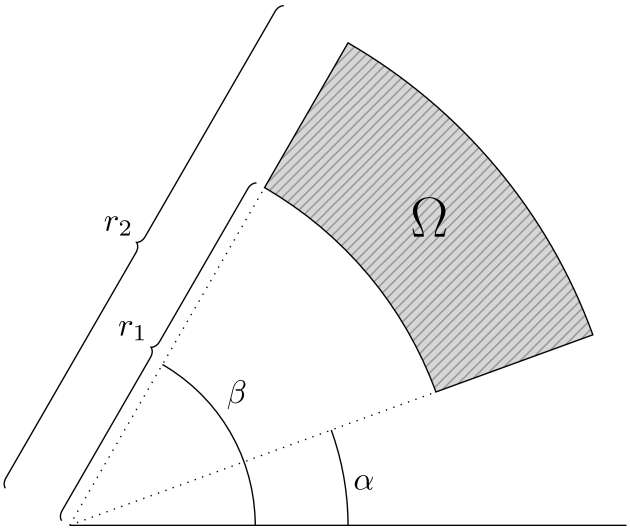
og $f : \Omega \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så eksisterer planintegralet af f over Ω, og

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_{r_1}^{r_2} \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

Det polære rektangel i Sætning 13 er vist på Figur 4.12.



Figur 4.11: Et polært rektangel delt op i mindre polære rektangler.



Figur 4.12: Det polære rektangel i Sætning 13

(4.14) EKSEMPEL.

Vi beregner planintegralet $\iint_D 3x+4y^2\,dA$, hvor

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y,\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}.$$

Ved at tegne D ser man, at D faktisk er et polært rektangel

$$D = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le r \le 2,\, 0 \le \theta \le \pi\right\}.$$

Se Figur 4.13.

For at bruge Sætning 13 til beregning af planintegralet indsætter vi først $r\cos\theta$ og $r\sin\theta$ for x og y i funktions udtrykket $3x+4y^2$, der skal integreres. Dette giver, at

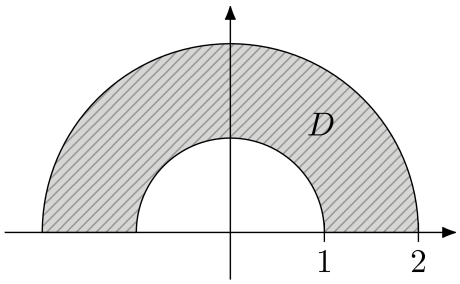
$$3x+4y^2 = 3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta,$$

og fra Sætning 13 får vi, at

$$\iint_D 3x+4y^2\,dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Vi beregner først det inderste integral:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)\,r\,dr &= \cos\theta \int_1^2 3r^2\,dr + \sin^2\theta \int_1^2 4r^3\,dr \\ &= \cos\theta\left[r^3\right]_1^2 + \sin^2\theta\left[r^4\right]_1^2 = 7\cos\theta + 15\sin^2\theta.\end{aligned}$$



Figur 4.13: Området D er en halv annulus − og et eksempel på et polært rektangel.

Dermed er vi kommet frem til, at

$$\iint_D 3x+4y^2\,dA = 7\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + 15\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta.$$

For at udføre den første integration er det nok at vide, at $\sin\theta$ er stamfunktion til $\cos\theta$. Dermed får man, at

$$7\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = 7\big[\sin\theta\big]_0^{\pi} = 0.$$

Fra den tidligere lighed ved vi, at $\int\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(\theta-\cos\theta\sin\theta\right)$, så

$$15\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{15}{2}\big[\theta-\cos\theta\sin\theta\big]_0^{\pi} = \frac{15}{2}\pi.$$

Dermed får vi altså, at

$$\iint_D 3x+4y^2\,dA = \frac{15}{2}\pi.$$

Følgende sætning handler om planintegraler over områder, der i polære koordinater er af type II; dvs. at r-koordinaten, der er den første af de polære koordinater, er begrænset af to funktioner, der afhænger af den anden af de polære koordinater; vinklen θ.

(4.15) SÆTNING.

Lad $-\pi \le \alpha < \beta \le \pi$, og lad $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ og $k:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner der opfylder, at $0\le h(\theta)\le k(\theta)$ for alle $\theta\in[\alpha,\beta]$. Sæt

$$D = \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \alpha\le\theta\le\beta,\, h(\theta)\le r\le k(\theta)\right\},$$

og lad $f:D\to\mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Så eksisterer planintegralet af f over D, og

$$\iint_D f\,dA = \int_\alpha^\beta\left(\int_{h(\theta)}^{k(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\right)d\theta.$$

(4.16) EKSEMPEL.

Vi benytter her Sætning 15 til at udregne planintegralet

$$\iint_D x^2 + y^2 \, dA,$$

hvor

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x \right\}.$$

Bemærk at D også kan skrives

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

hvoraf man kan se, at D er en cirkelskive med centrum i $(1,0)$ og radius 1. Da funktionen $x^2 + y^2$ er positiv, er planintegralet vi nu skal beregne, rumfanget af en figur der ligger over D.

I polære koordinater er

$$D = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : r \leq 2\cos\theta, \, \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right\}$$

som er et område af den type Sætning 15 handler om; sæt $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $h(\theta) = 0$ og $k(\theta) = 2\cos\theta$. Idet

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

får vi fra Sætning 15, at

$$\iint_D x^2 + y^2 \, dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^3 \, dr \right) d\theta.$$

Vi beregner først det inderste integral:

$$\int_0^{2\cos\theta} r^3 \, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\cos\theta} = 4\cos^4\theta.$$

Derfor gælder

$$\iint_D x^2 + y^2 \, dA = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Se i øvrigt Figur 4.14.

4.3 Integration med flere variable

Det siger næsten sig selv, at man også kan definere itererede integraler for funktioner af 3 eller flere variable. Når $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er en kontinuert funktion af n variable, defineret på en n-dimensional kasse

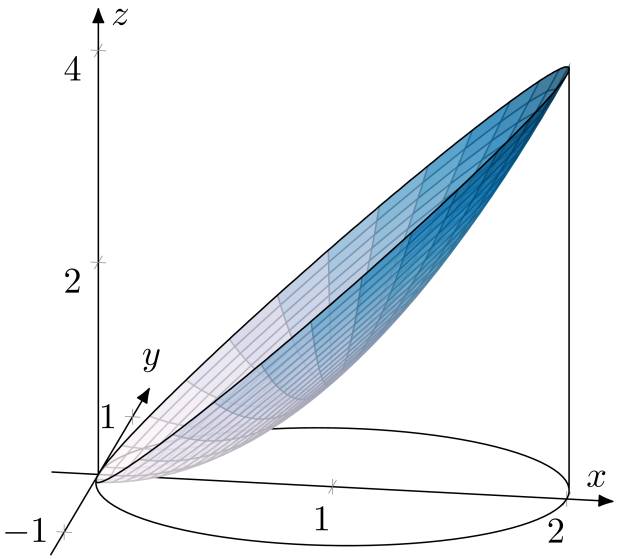
$$\begin{aligned} R &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2], \ldots, x_n \in [a_n, b_n] \}, \end{aligned}$$

kan vi udregne

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, dx_n \right) dx_{n-1} \ldots \right) dx_1.$$

For eksempel, hvis $n = 3$ og $f(x,y,z) = xy + zy$ kan vi udregne

$$\int_{-1}^{5} \left(\int_2^7 \left(\int_0^1 xy + zy \, dz \right) dy \right) dx.$$



Figur 4.14: Eksempel 16 viser at mængden $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}$ har volumenet $\frac{3\pi}{2}$.

Ved at indføre Riemann summer på samme måde som ved to variable kan det vises, at integrations rækkefølgen er ligegyldig; man får det samme tal hvis man udregner

$$\int_2^7 \left(\int_{-1}^5 \left(\int_0^1 xy + zy\, dz \right) dx \right) dy$$

eller

$$\int_2^7 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^5 xy + zy\, dx \right) dz \right) dy.$$

Og man kan også definere integration over mere generelle delmængder af $\mathbb{R}^3$ eller $\mathbb{R}^n$ ved brug af de samme ideer som er beskrevet ovenfor i tilfældet $n = 2$. Når $n = 3$ kalder man de fremkomne integraler for *rumintegraler* og de skrives

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV,$$

hvor B er den delmængde af rummet, der integreres over, og hvor integranden f er defineret.

Fubinis sætning gælder også i højere dimensioner. For funktioner af 3 variable har vi flg. analog af Sætning 4:

(4.17) SÆTNING.

(Fubinis sætning - anden version) Lad

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$$

være en lukket kasse i $\mathbb{R}^3$ og $f : B \to \mathbb{R}$ en kontinuert funktion. Så er

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Kapitel 5

Om vektorer i planen

I dette kapitel opfriskes vektorer i planen for at introducere de trigonometriske additionsformler.

Additionsformlerne er ekstremt vigtige for at forstå de komplekse tal i næste kapitel.

5.1 Vektorer i planen

En vektor v i planen er givet ved dens koordinater $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, som er ordnede par af reelle tal $x, y \in \mathbb{R}$. Af typografiske hensyn skrives vektoren v også som (x, y).

Det er meget naturligt at lægge to vektorer sammen og gange en vektor med et tal på følgende måde: Betragt vektorerne

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

samt tallet λ. Så er summen $u + v$ lig med

$$\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

og skalarmultiplikationen λu lig med

$$\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}.$$

Vi betegner mængden af vektorer givet ved deres koordinater som $\mathbb{R}^2$. Fra din baggrund i matematik ved du at prikproduktet mellem u og v er givet ved formlen

$$u \cdot v = ac + bd.$$

Prikproduktet har en masse gode egenskaber, herunder

$$(\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v)$$
$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w,$$

(5.1) DEFINITION.

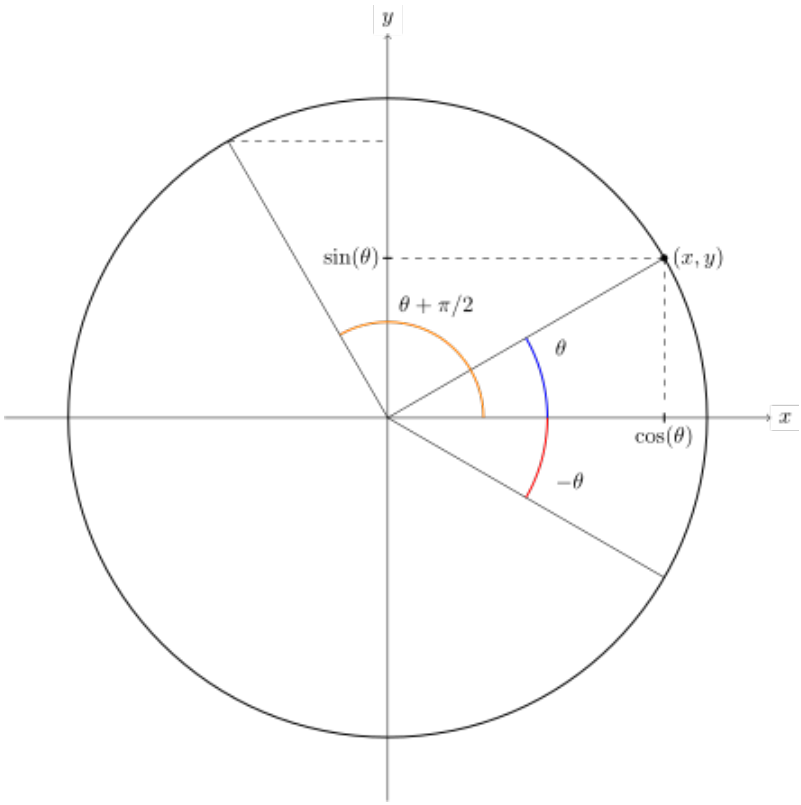
Længden af vektoren u er givet ved formlen

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (NB\text{: } |u|^2 = u \cdot u).$$

En vektor v siges at være en enhedsvektor, hvis den har længde 1 dvs $|v| = 1$.
Vektorerne u og v siges at være vinkelrette på hinanden hvis $u \cdot v = 0$.

5.2 Cosinus og sinus til en vinkel

Vi repeterer cosinus og sinus af vinkler. Enhedscirklen nedenfor er netop defineret som mængden af enhedsvektorer dvs vektorer med længde 1.



Enhedsvektoren (x, y) på tegningen er entydigt givet ud fra dens vinkel θ med x-aksen. *Cosinus,* $\cos(\theta)$, *til vinklen* θ *er defineret som* x*-koordinaten og sinus,* $\sin(\theta)$, *som* y*-koordinaten til enhedsvektoren*. Denne definition giver omgående den velkendte formel

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Ud fra tegningen ovenfor kan man også aflæse følgende ligninger:

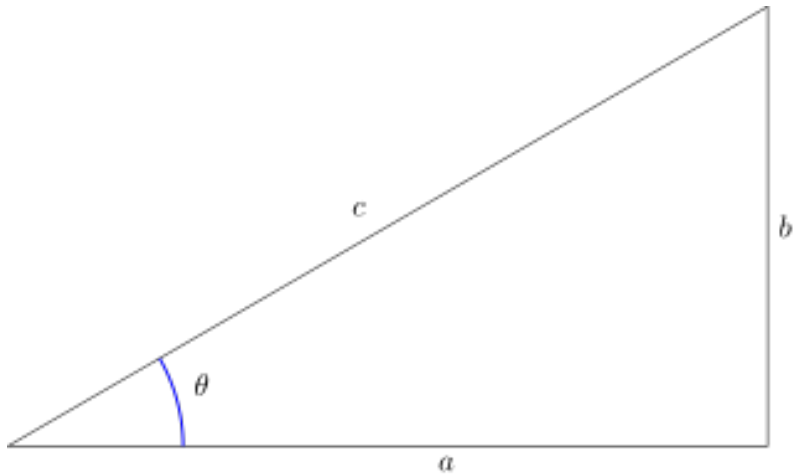
$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \\ \cos(\theta + \pi/2) &= -\sin(\theta) \\ \sin(\theta + \pi/2) &= \cos(\theta) \end{aligned} \tag{5.1}$$

For den retvinklede trekant i Figur 5.1 kan man også via definitionen af cosinus og sinus ud fra enhedscirklen finde frem til formlerne

$$c\cos(\theta) = a \tag{5.2}$$

$$c\sin(\theta) = b \tag{5.3}$$

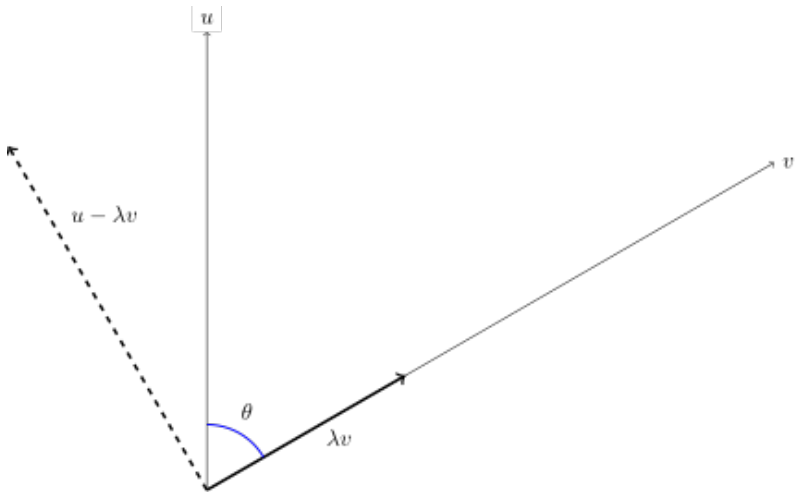
Disse formler er meget nyttige, når man skal regne på vektorer i planen.



Figur 5.1: Retvinklet trekant

5.3 Projektionen af en vektor på en anden vektor

Givet to vektorer u og v som nedenfor, hvor meget (λ) skal vi forkorte eller forlænge v med for at afstanden mellem λv og u bliver mindst mulig?



Der er her tale et minimeringsproblem. Vi kender vektorerne u og v og skal finde tallet λ så længden

$$|u - \lambda v|$$

af vektoren $u - \lambda v$ bliver minimal. Det er præcis det samme som at finde λ, som minimerer funktionen

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |u - \lambda v|^2 = (u - \lambda v) \cdot (u - \lambda v) = u \cdot u - 2\lambda u \cdot v + \lambda^2 v \cdot v \\ &= |v|^2 \lambda^2 - 2(u \cdot v)\lambda + |u|^2. \end{aligned}$$

Faktisk er $f(\lambda)$ en parabel (i λ), som vender benene opad og med bundpunkt for

$$\lambda = -\frac{-2(u \cdot v)}{2|v|^2} = \frac{u \cdot v}{|v|^2}.$$

Med denne værdi for λ gælder

$$(u - \lambda v) \cdot v = 0$$

dvs vektorerne $u - \lambda v$ og v er vinkelrette. Måske ikke så overraskende ud fra tegningen ovenfor. Vektoren λv kaldes for projektionen af u på v.

Ud fra formlerne for retvinklede trekanter får vi

$$|u|\cos(\theta) = |v|\lambda$$

og dermed den smukke formel for cosinus til vinklen θ mellem vektorerne u og v:

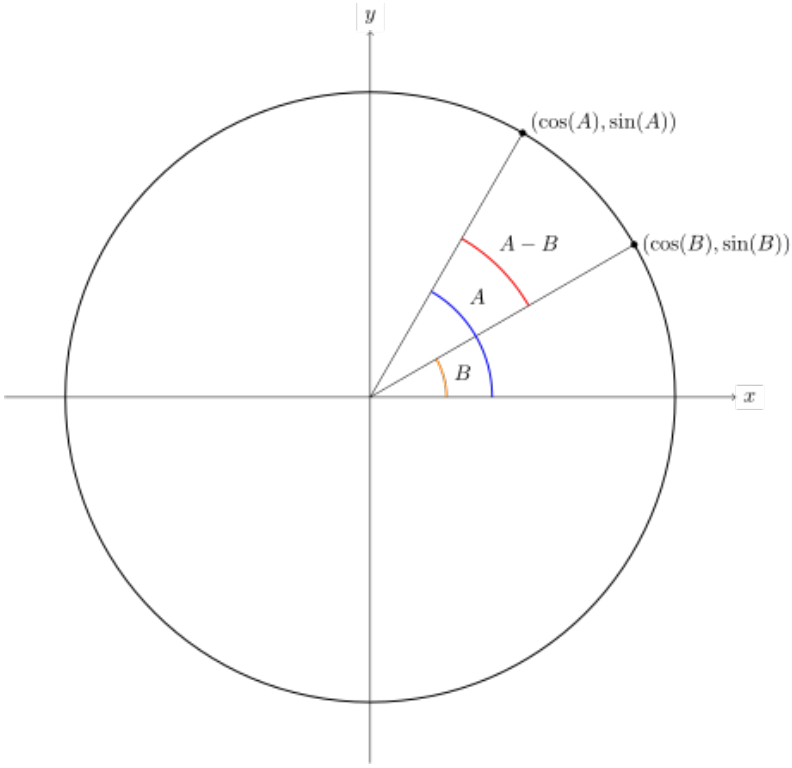
$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{|u||v|}. \tag{5.4}$$

5.4 Cosinus og sinus for summen af to vinkler

Man kan ret nemt overbevise sig om at $\cos(A+B)$ ikke er lig med

$$\cos(A) + \cos(B)$$

for to vinkler A og B. For eksempel er $1 = \cos(0) = \cos(0+0)$ ikke lig med $\cos(0) + \cos(0) = 2$. Men findes der en formel, som udtrykker $\cos(A+B)$ ved hjælp af cosinus og sinus til A og B?



Ud fra tegningen ovenfor kan vi udlede en formel for cosinus til differencen mellem de to vinkler A og B. Da de to vektorer er enhedsvektorer er deres prikprodukt ud fra den smukke formel (5.4) netop lig med cosinus til forskellen mellem deres vinkler dvs.

$$\cos(A-B) = \begin{pmatrix} \cos(A) \\ \sin(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(B) \\ \sin(B) \end{pmatrix} = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B). \tag{5.5}$$

Ved at lave et mindre hack og udskifte B med $-B$ i formlen (5.5) får vi

$$\cos(A+B) = \cos(A-(-B)) = \cos(A)\cos(-B) + \sin(A)\sin(-B)$$

Ved nu at benytte $\cos(-B) = \cos(B)$ og $\sin(-B) = -\sin(B)$ (se de grundlæggende trigonometriske formler) kommer vi frem til formlen

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B). \tag{5.6}}$$

Hvad med additionsformler for sinus? Her benyttes igen de trigonometriske formler til at slutte

$$-\sin(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{samt} \quad \cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

dvs

$$\sin(A+B) = -\cos\left(A+B+\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\cos(A)\cos\left(B+\frac{\pi}{2}\right) - \sin(A)\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

og dermed

$$\boxed{\sin(A+B) = \cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B). \tag{5.7}}$$

Nu overlades det som en opgave til læseren at overbevise sig om at den sidste formel

$$\boxed{\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \sin(B)\cos(A) \tag{5.8}}$$

gælder.

Kapitel 6

De komplekse tal

Man kan ikke finde et reelt tal, som løser ligningen

$$x^2 + 1 = 0,$$

– intet reelt tal ganget med sig selv giver -1. Enhver enkel lommerregner vil blinke en fejlmeddelelse, hvis du forsøger at tage kvadratroden til -1. Derimod vil et moderne computer algebra system som Maple eller Mathematica formentlig give dig symbolet I som output. Dette I er et eksempel på et komplekst tal.

Lad os først komme ind på hvor anderledes (og mere spændende) de komplekse tal er med et eksempel fra computergrafik.

6.1 Mandelbrotmængden

Geometrisk opholder de komplekse tal sig i to dimensioner, mens de almindelige tal kun bevæger sig på en linje i en dimension.

Man kan benytte de komplekse tal til at generere såkaldte fraktaler som Mandelbrotmængden nedenfor. Mandelbrotmængden er blevet kaldt et af de smukkeste og mest komplicerede objekter i moderne matematik. I næste afsnit ser vi nærmere på addition og multiplikation af komplekse tal. Mandelbrotmængden er frembragt ene og alene ved at iterere multiplikationer og additioner med komplekse tal.

6.2 Regneregler

Mandelbrotmængden fremkommer ved mange iterationer bestående af multiplikationer og additioner med komplekse tal. Vi har brug for at vide hvad komplekse tal er og hvordan man regner med dem.

En specielt vigtig regneregel for reelle tal hedder den distributive lov. Den siger at

$$x(y+z) = xy + xz$$

for $x, y, z \in \mathbb{R}$. En anden velkendt regel siger at faktorernes orden er ligegyldig eller at multiplikation er kommutativ dvs $xy = yx$.

Lad os antage at vi oven i de reelle tal kaster et opdigtet eller *imaginært* tal i ind, som har egenskaben at

$$i^2 = -1.$$

Hvis a,b,c,d er reelle tal og vi antager at i adlyder de almindelige regneregler får vi følgende udregning:

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (a+bi)c+(a+bi)di \\ &= ac+bic+adi+bidi \\ &= ac+bci+adi+bdi^2 \\ &= ac+bci+adi-bd \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

Dvs to tal på formen $x+yi$, hvor x og y er reelle tal, ganger sammen til et tal af samme *standard form*.

Faktisk kan man vise at, når man definerer multiplikation som ovenfor og addition som

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$

så får man en mængde af nye tal, som opfylder alle velkendte regneregler for reelle tal, som f.eks.

$$\begin{aligned}x(yz) &= (xy)z \\ x(y+z) &= xy+xz \\ xy &= yx \\ 1x &= x\end{aligned}$$

Hvorfor benyttes notationen i for $\sqrt{-1}$? Begrundelsen er historisk og daterer sig tilbage til 1500-tallet, hvor den italienske matematiker Cardano havde behov for at regne med opdigtede eller *imaginære* tal for at finde en formel til løsning af tredjegradsligninger. Det komplekse tal i kaldes for *den imaginære enhed*.

(6.1) DEFINITION.

De komplekse tal er mængden

$$\mathbb{C} = \{x+yi \mid x,y \in \mathbb{R}\},$$

hvor multiplikation *er givet som*

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

og addition *som*

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i.$$

For et komplekst tal $z = x+iy$ defineres

(a) Realdelen *som*

$$\Re(z) = x$$

(b) Imaginærdelen *som*

$$\Im(z) = y.$$

(c) Det komplekst konjugerede tal

$$\overline{z} = x-iy$$

To komplekse tal er identiske hvis og kun hvis deres real- og imaginærdele er ens.

Ved hjælp af formlen for multiplikation af komplekse tal ses for $z = c + di$, at

$$z\bar{z} = (c+di)(c-di) = c^2 + d^2$$

ved indsættelse af $a = c$, $b = d$, $c = c$ og $d = -d$. Denne observation gør at vi kan udlede følgende divisionsformel:

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(c-di)(a+bi)}{(c-di)(c+di)} \\ &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.\end{aligned}$$

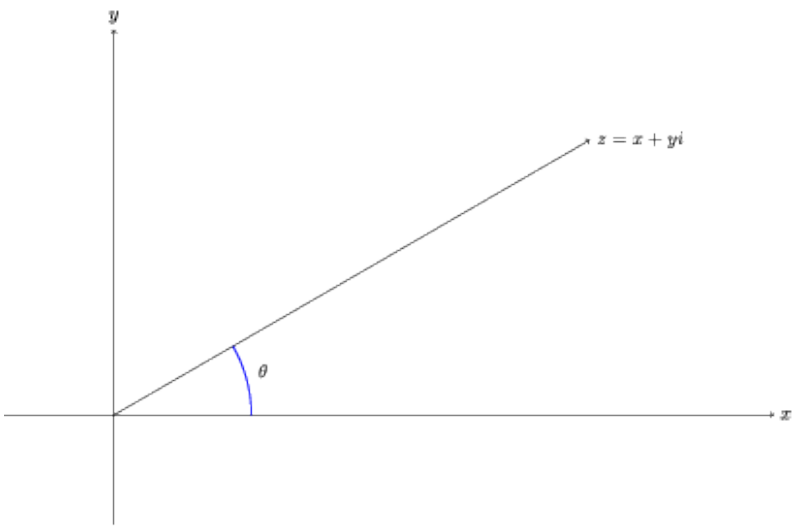
Divisionen af to komplekse tal giver altså igen et komplekst tal. Vi antager at nævneren $c+di$ ikke er lig 0 dvs c og d ikke begge er 0 eller ækvivalent hermed at $c^2 + d^2 \neq 0$.

En meget vigtig egenskab er at hvis $a + bi \neq 0$, så findes $c + di$ så $(a+bi)(c+di) = 1$. Vi ved godt denne regel er korrekt for de reelle tal dvs, hvis $x \neq 0$ så findes et reelt tal y så $xy = 1$. Her kan vi bare sætte $y = 1/x$. På samme måde kan vi sætte $c + di = 1/(a+bi)$.

6.3 Geometrisk fortolkning og polær form

Den geometriske fortolkning af de komplekse tal blev først introduceret af den danske matematiker Caspar Wessel (1745-1818) i 1797.

Det forekommer ret naturligt at opfatte et komplekst tal $z = x + iy$, som punktet (x, y) i et koordinatsystem.



Med dette geometriske billede ligger det lige for at indføre følgende definitioner.

(6.2) DEFINITION.

Lad $z = x + iy$ være et komplekst tal. Længden af vektoren (x, y) kaldes modulus for z og betegnes $|z|$. Vinklen som (x, y) danner med x-aksen kaldes argumentet for z og defineres som en vinkel i intervallet $[0, 2\pi)$. For et reelt tal $x \in \mathbb{R}$ definerer vi det komplekse tal

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x). \tag{6.1}$$

Læg mærke til at hvis θ er argumentet for det komplekse tal z, så er

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}. \tag{6.2}$$

Det er fordi at $z/|z|$ præcis svarer til vektoren (x,y) ganget med dens reciprokke længde. Denne vektor er en enhedsvektor, som danner vinklen θ med x-aksen. Dvs den svarer præcis til det komplekse tal $e^{i\theta}$.

Ligningen (6.2) giver den smukke geometriske repræsentation

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{6.3}$$

af det komplekse tal z. Fremstillingen (6.3) kaldes for den polære form af z.

Denne repræsentation fortjener at blive kaldt smuk, fordi den afspejler sig mirakuløst i multiplikationen af komplekse tal: Lad z_1 og z_2 være to komplekse tal med argumenter hhv θ_1 og θ_2. Så er

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{6.4}$$

Med ord har vi gjort rede for at

> Man multiplicerer to komplekse tal ved at multiplicere deres længder og addere deres argumenter.

Det sidste lighedstegn i (6.4) har vi rent faktisk ikke vist og det er da også et af hovedresultaterne:

(6.3) SÆTNING.

For to tal $x,y \in \mathbb{R}$ gælder formlen

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}.$$

Læg iøvrigt mærke til verdens smukkeste formel

$$e^{i\pi} = -1. \tag{6.5}$$

Formlen kombinerer på minimal vis fire af de allervigtigste konstanter i matematikken: e, i, π og 1 og følger af definitionen i (6.1).

6.3.1 De Moivres formel

Abraham de Moivre var en fransk matematiker, som udover at beskæftige sig med sandsynlighedsteori også fik sit navn udødeliggjort gennem *De Moivres formel*. Denne formel siger i al sin enkelhed at der for et naturligt tal n og et reelt tal x gælder

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx). \tag{6.6}$$

Det er ikke svært at bevise formlen via Sætning 3 ovenfor, som medfører at

$$(\cos(x)+i\sin(x))^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx)+i\sin(nx).$$

Ikke desto mindre er (6.6) et mirakel, som markerer den stærke forbindelse mellem komplekse tal og trigonometriske funktioner. For eksempel kan man benytte De Moivres formel til at udlede formler som

$$\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x). \tag{6.7}$$

6.4 Andengradsligningen og højeregradsligninger

Lad os rette opmærksomheden mod ligningen

$$z^n = 1, \tag{6.8}$$

hvor n er et naturligt tal. Hvis vi kun begrænser os til de reelle tal, har (6.8) højst to løsninger (feks for $n=2$) og nogle gange kun en (feks for $n=3$). I de komplekse tals domæne har vi to dimensioner og kan boltre os både lodret og vandret. En løsning z til (6.8) bliver nødt til at have modulus 1 dvs $z = e^{i\varphi}$ med $\varphi \in [0,2\pi)$. Da

$$z^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi) = 1$$

har vi altså $m2\pi = n\varphi$ for et helt tal $m \in \mathbb{Z}$. Hvis φ er argumentet for z har vi altså kun mulighederne $m = 0,1,\ldots,n-1$.

Dermed kan alle løsninger til (6.8) skrives som passende potenser af $\varepsilon_n = e^{i2\pi/n}$:

$$\varepsilon_n^m = e^{m\frac{2\pi i}{n}},$$

hvor $m = 0,1,\ldots,n-1$. Vi har faktisk bevist at (6.8) altid har n forskellige løsninger over de komplekse tal.

6.4 Eksempel

Lad os som eksempel tage ligningen $z^3 = 1$. Den har løsningerne, som fremkommer ved at tredele enhedscirklen;

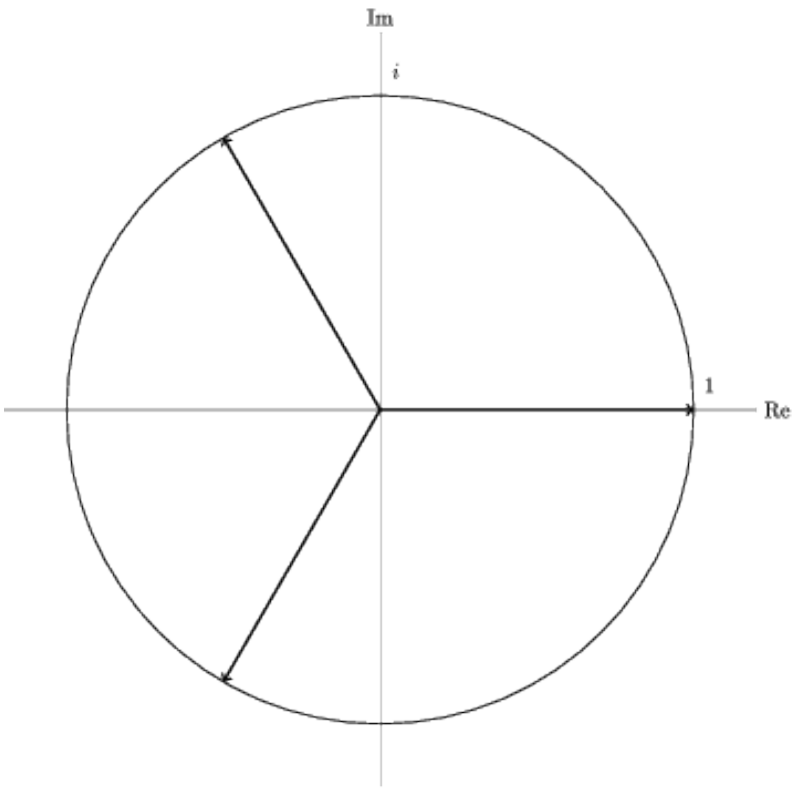
i $\mathbb{C}$ dvs

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

(6.5) SÆTNING.

Lad n være et naturligt tal og $a = re^{i\theta}$ et komplekst tal med modulus $r \neq 0$ og argument θ. Så har ligningen

$$z^n = a \tag{6.9}$$



løsningen

$$z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}.$$

Ligningen (6.9) *har n forskellige løsninger og de er*

$$z_0, z_0\varepsilon_n, \ldots, z_0\varepsilon_n^{n-1},$$

hvor $\varepsilon_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

6.4.1 Den gode gamle andengradsligning

Her støder vi på det verdensberømte trick (completing the square):

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Ved en lettere omskrivning ses at løsninger til andengradsligningen $az^2 + bz + c = 0$ opfylder

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Det giver så den klassiske formel

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

som giver rigtig god mening også for komplekse tal a, b, c. Vi har nemlig set i Sætning 5 at ligningen

$$w^2 = b^2 - 4ac \tag{6.10}$$

altid kan løses dvs andengradsligninger over de komplekse tal har altid løsninger! Det gør ikke nogen forskel hvilken af de to modsat rettede løsninger w vi vælger i (6.10) som $\sqrt{b^2-4ac}$. Den klassiske formel gælder stadig pga $\pm$.

6.4.2 Algebraens fundamentalsætning

Vi så ovenfor at andengradsligninger altid har løsninger i de komplekse tal. Det helt enestående er at dette resultat også gælder for n-te grads ligninger dvs ligninger af formen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

hvor $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ og $a_n \neq 0$. Vi har blot vist det for $n = 2$, men det gælder for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$!

Denne perle kaldes for algebraens fundamentalsætning. Det er spændende at læse om historien bag denne sætning.

Der er endnu ikke opdaget et algebraisk bevis for sætningen a la det vi lavede for $n = 2$.

6.5 Om komplekse tal og periodiske fænomener

Cosinus og sinus er rasende interessante funktioner. De er matematikkens fremmeste våben i beskrivelsen af periodiske fænomener som feks planetbaner og bølgebevægelser. De bliver endnu mere anvendelige, når man betragter dem ved hjælp af den komplekse eksponentialfunktion e^{ix}.

En periodisk funktion $f(t)$ er en funktion, som gentager sig selv efter et bestemt tidsrum T dvs $f(t) = f(t+T)$. For eksempel er både sinus og cosinus periodiske funktioner med periode $T = 2\pi$.

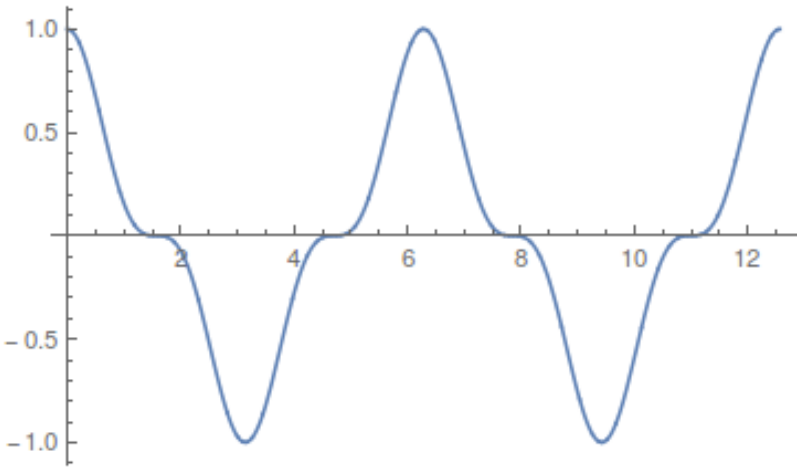
Uden at afsløre den fulde sandhed kan jeg her skrive at man normalt kigger på cosinus og sinus funktioner på formen

$$A\cos(Nx) \qquad \text{og} \qquad A\sin(Nx), \tag{6.11}$$

hvor A er et tal, som angiver højden (amplituden) af bølgerne og N er et tal, som beskriver antal bølger per tidsenhed (frekvensen). Cosinus og sinusfunktionerne i (6.11) samles under et i funktionerne Ae^{iNx}.

Disse funktioner er byggeklodser for naturligt forekommende periodiske fænomener.

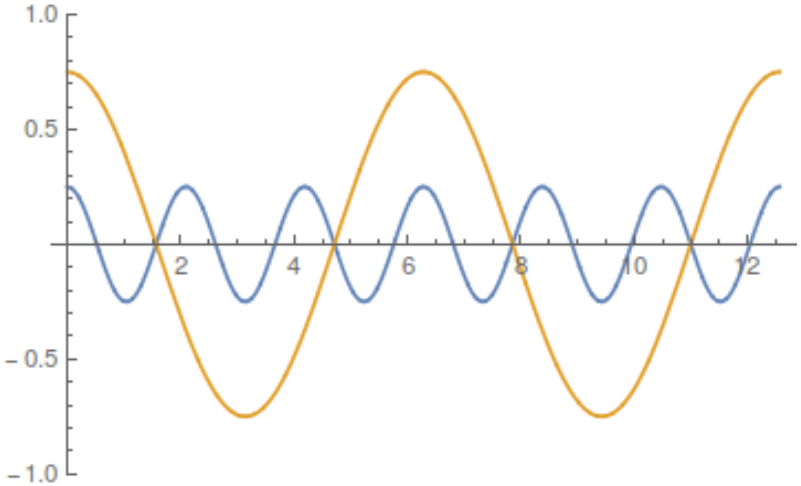
Feks er den periodiske funktion $\cos(x)^3$:



sum af de to periodiske funktioner $\frac{1}{4}\cos(3x)$ og $\frac{3}{4}\cos(x)$:

Dette kan aflæses af formlen i (6.7), som vi netop fik ved hjælp af

$$(e^{ix})^3 = e^{i(3x)}.$$



Vi vender tilbage til opløsningen af et signal (en periodisk funktion) i komponenterne Ae^{iNx} senere. Faktisk er det sådan man digitaliserer feks musik.

Kapitel 7

Introduktion til differentialligninger via eksempler

Differentialligninger er ligninger, hvor den ubekendte er en funktion, og hvor ligningen udtrykker krav til de afledte, evt. også de afledte af højere orden for funktionen. Løsninger til ligningen er så funktioner, der opfylder disse krav. Hvis der er tale om ligninger for funktioner af flere variable, med krav til de partielt afledte af funktionen, taler man om *partielle differentialligninger*. Dette kapitel giver en introduktion til differentialligninger, med focus på nogle få klasser af sædvanlige differentialligninger og enkelte eksempler på partielle differentialligninger.

7.1 Lineære differentialligninger med konstante koefficienter

7.1.1 Homogene 2. ordens ligninger

Lad a, b og c være reelle tal, $a \neq 0$. I differentialligningen

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{7.1}$$

er den ubekendte y en funktion af én reel variabel, som opfylder at

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

for alle x. Hvilke funktioner $y(x)$, der opfylder (7.1), afhænger af tallet

$$D = b^2 - 4ac,$$

som er *diskriminanten* for ligningen. Bemærk at D også er diskriminanten for 2. grads polynomiet

$$ax^2 + bx + c. \tag{7.2}$$

For at beskrive løsningerne til (7.1) deler vi op i følgende tre tilfælde:

Hvis $D > 0$: I dette tilfælde har polynomiet (7.2) to reelle rødder, r_1 og r_2, givet ved formlerne

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

En funktion y er en løsning til (7.1), hvis og kun hvis der er tal $A, B \in \mathbb{R}$ så

$$\boxed{y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}.} \tag{7.3}$$

Hvis $D = 0$: I dette tilfælde er der én rod r for polynomiet (7.2), nemlig

$$r = \frac{-b}{2a}, \tag{7.4}$$

og en funktion y er en løsning til (7.1), hvis og kun hvis der er tal $A, B \in \mathbb{R}$ så

$$\boxed{y(x) = Ae^{rx} + Bxe^{rx}. \qquad (7.5)}$$

Hvis $D < 0$: I dette tilfælde har polynomiet (7.2) to komplekse rødder, r_1 og r_2, givet ved formlerne

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Lad k være den fælles realdel af r_1 og r_2, dvs.

$$k = \frac{-b}{2a}.$$

Så er $r_1 = k + i\omega$ og $r_2 = k - i\omega$, hvor

$$\omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

I dette tilfælde er en funktion y en løsning til (7.1), hvis og kun hvis der er tal $A, B \in \mathbb{R}$ så

$$\boxed{y(x) = Ae^{kx}\cos(\omega x) + Be^{kx}\sin(\omega x). \qquad (7.6)}$$

Det er ikke svært at checke at de anførte funktioner er løsninger. Lad os f.eks. tage tilfældet $D = 0$. Vi differentierer funktionen (7.5) og finder, at

$$y'(x) = Are^{rx} + Be^{rx} + Brxe^{rx},$$

og

$$y''(x) = Ar^2e^{rx} + 2Bre^{rx} + Br^2xe^{rx}.$$

Dermed bliver

$$\begin{aligned} &ay''(x) + by'(x) + cy(x) \\ &\quad = Aar^2e^{rx} + 2Bare^{rx} + Bar^2xe^{rx} + Abre^{rx} + Bbe^{rx} + Bbrxe^{rx} + Ace^{rx} + Bcxe^{rx} \\ &\quad = Ae^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) + Be^{rx}(2ar + b) + Bxe^{rx}(ar^2 + br + c). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Nu er $ar^2 + br + c = 0$, fordi r er rod i (7.2), mens $2ar + b = 0$ pga. (7.4), så vi ser fra (7.7) at $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, hvilket jo netop betyder, at y er en løsning til (7.1).

På samme måder checker man, at (7.3) er en løsning til (7.1) når $D > 0$, og at (7.6) er en løsning når $D < 0$. Men udsagnet ovenfor er, at formlen (7.3) giver *alle* løsninger ved at variere A og B når $D > 0$, at (7.5) giver alle løsninger ved at variere A og B når $D = 0$ og at (7.6) giver alle løsninger ved at variere A og B når $D < 0$. Med andre ord, det er *den fuldstændige løsning* til ligningen (7.1), der er angivet.

(7.1) EKSEMPEL.

For differentialligningen

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \tag{7.8}$$

er diskriminanten $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$, så løsningerne er givet ved (7.3), med

$$r_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{og} \quad r_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Dvs. at enhver løsning y til ligningen (7.8) er af formen

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^x.$$

For at fastlægge en bestemt løsning kan man f.eks. bede om, at løsningen opfylder et par *begyndelsesværdi-betingelser*, som f.eks at

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 1. \tag{7.9}$$

Da $y'(x) = 3Ae^{3x} + Be^x$ vil disse ekstra betingelser være opfyldt netop når

$$Ae^{3\cdot 0} + Be^0 = 0$$

og

$$3Ae^{3\cdot 0} + Be^0 = 1,$$

dvs. når $A + B = 0$ og $3A + B = 1$; altså $A = \frac{1}{2}$ og $B = -\frac{1}{2}$. Den eneste løsning til (7.1), der samtidigt opfylder begyndelsesværdi-betingelsen (7.9), er altså funktionen

$$y(x) = \tfrac{1}{2}e^{3x} - \tfrac{1}{2}e^x.$$

7.1.2 Homogene ligninger af højere orden

Løsningsmetoden beskrevet ovenfor kan generaliseres til differentialligninger af højere orden. Det er ligninger af samme type, men som involverer den afledte af tredje eller højere orden. F.eks. $3y''' + 2y'' - y' + 5y = 0$. Helt generelt er det ligninger af formen

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0, \tag{7.10}$$

hvor $y^{(k)}$ er den k'te afledte af y, og hvor alle a_k'erne er reelle tal. Den fuldstændige løsning til (7.10) kan skrives

$$\boxed{y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \qquad (7.11)}$$

hvor $C_1, C_2, \ldots, C_n$ er reelle tal, der kan vælges frit, og hvor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ er funktioner, der bestemmes ud fra rødderne til polynomiet

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Det følger fra algebraens fundamentalsætning, at P kan faktorises

$$P(z) = a(z - r_1)^{m_1} (z - r_2)^{m_2} \cdots (z - r_k)^{m_k},$$

hvor $r_1, r_2, \ldots, r_k$ er rødderne for P; altså de komplekse tal z hvor $P(z) = 0$, og $m_1, m_2, \ldots, m_k$ er naturlige tal med sum n; $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Hver af rødderne r_l bidrager med m_l af funktionerne y_j fra (7.11) på følgende måde:

(1) Hvis r_l er en reel rod for P bidrager den med funktionerne

$$\boxed{e^{r_l x}, \quad xe^{r_l x}, \quad x^2 e^{r_l x}, \ldots, \quad x^{m_l - 1} e^{r_l x}.}$$

(2) Hvis $r_l = a + ib$ er en kompleks rod for P, er $\overline{r_l} = a - ib$ det også (jvf. Opgave 7.1.2) og disse to rødder bidrager med med funktionerne

$$\boxed{e^{ax}\cos(bx), \quad xe^{ax}\cos(bx), \quad x^2 e^{ax}\cos(bx), \ldots, \quad x^{m_l - 1} e^{ax}\cos(bx),}$$

og

$$\boxed{e^{ax}\sin(bx), \quad xe^{ax}\sin(bx), \quad x^2 e^{ax}\sin(bx), \ldots, \quad x^{m_l - 1} e^{ax}\sin(bx).}$$

7.1.3 Inhomogene ligninger

Lad $k(x)$ være en funktion og a, b, c reelle tal. Ligningen

$$ay'' + by' + cy = k \tag{7.12}$$

minder meget om (7.1) med den iøjnefaldende forskel, at nullet på højresiden er erstattet af k. Mens ligningen (7.1) er *homogen*, siges (7.12) at være *inhomogen* når $k \neq 0$. (Terminologien har at gøre med, at hvis y er en løsning til (7.1), er λy det også for alle reelle tal λ. Den egenskab har ligningen (7.12) ikke.)

Antag nu at vi på en eller anden måde har fundet én løsning f_0 til (7.12); dvs. at $af_0'' + bf_0' + cf_0 = k$. Vi kan så finde samtlige løsninger til (7.12) på følgende måde: Når y løser (7.12) vil funktionen $y - f_0$ være en løsning til den homogene ligning (7.1); thi

$$\begin{aligned} a(y - f_0)'' + b(y - f_0)' + c(y - f_0) &= a(y'' - f_0'') + b(y' - f_0') + c(y - f_0) \\ &= ay'' + by' + cy - (af_0'' + bf_0' + cf_0) \\ &= k - k = 0. \end{aligned}$$

Altså er $y - f_0$ en af løsningerne til den homogene ligning (7.1) som vi behandlede i afsnit 7.1.1. Dvs. at $y = f + f_0$ hvor $f = y - f_0$ er en løsning til den homogene ligning (7.1). Omvendt, hvis $y = f + f_0$, hvor f er en løsning til (7.1), vil y være en løsning til (7.12) da

$$\begin{aligned} a(f + f_0)'' + b(f + f_0)' + c(f + f_0) &= a(f'' + f_0'') + b(f' + f_0') + c(f + f_0) \\ &= af'' + bf' + cf + (af_0'' + bf_0' + cf_0) \\ &= 0 + k = k. \end{aligned}$$

Det gælder altså, at

> *den fuldstændige løsning til (7.12) består af funktionerne $f + f_0$, hvor f gennemløber løsningerne til den homogene ligning (7.1).*

Metoden til at finde alle løsningerne til differentialligningen (7.12) består nu i, at man først søger efter en eller anden løsning f_0 – en såkaldt *partikulær løsning* – og dernæst finder den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning (hvor $k = 0$), f.eks. ved brug af afsnit 7.1.1. Den fuldstændige løsning til (7.12) fremkommer så ved at addere den partikulære løsning f_0 til den fuldstændige løsning for den homogene ligning (7.1).

(7.2) EKSEMPEL.

Lad $k(x) = 3x+2$ og betragt den inhomogene differential ligning

$$y'' - 4y' + 3y = k. \tag{7.13}$$

Fra Eksempel 1 kender vi den fuldstændige løsning til den homogene ligning $y'' - 4y' + 3y = 0$, så hvad vi mangler er 'blot' at finde en partikulær løsning. Da k er et polynomium, gætter vi på, at en sådan partikulær løsning også kan vælges som et polynomium. Ved at lave nogle forsøg finder vi – evt. efter mange trælse forsøg – at $f_0(x) = x+2$ er en løsning; thi

$$\frac{d^2}{dx^2}(x+2) - 4\frac{d}{dx}(x+2) + 3(x+2) = 0 - 4 + 3x + 6 = 3x + 2 = k(x).$$

Sammenholder vi med, hvad vi fandt i Eksempel 1, ser vi, at den fuldstændige løsning til (7.13) består af funktionerne

$$f(x) = Ae^{3x} + Be^x + x + 2,$$

hvor A og B kan varieres over alle reelle tal.

Hvis vi bruger de samme begyndelsesværdi-betingelser som i Eksempel 1, altså

$$f(0) = 0 \quad \text{og} \quad f'(0) = 1, \tag{7.14}$$

bliver betingelserne på A og B udtrykt i ligningerne

$$A + B + 2 = 0 \quad \text{og} \quad 3A + B + 2 = 1,$$

der har løsningerne $A = \frac{1}{2}$ og $B = -\frac{5}{2}$. Så der er præcist én løsning til (7.13), der opfylder begyndelsesværdi betingelserne (7.14), nemlig funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{2}e^{3x} - \tfrac{5}{2}e^x + x + 2.$$

7.2 Ikke-lineære differentialligninger og partielle differentialligninger

7.2.1 Den logistiske ligning

Lad a og b være positive tal. Differentialligningen

$$y' = y(b - ay), \tag{7.15}$$

der også kan skrives

$$y' - y(b - ay) = 0, \tag{7.16}$$

kaldes *logistisk*. En funktion $y(x)$ er løsning til (7.15) når

$$y'(x) = by(x) - ay(x)^2.$$

Ligningen (7.15) afskiller sig kvalitativt fra ligningerne (7.1) ved, at den ikke er lineær. En differentialligning er nemlig *lineær*, når den har den egenskab, at når $f(x)$ og $g(x)$ er løsninger, og s,t er tal, så er funktionen

$$sf(x) + tg(x)$$

også en løsning. Denne egenskab, som altså kaldes linearitet, har ligningerne (7.1), men (7.16) har den ikke. Lineære differentialligninger har mange (pæne) egenskaber, som ikke-lineære differential ligninger mangler, og de sidste er ofte noget vanskeligere at løse. Den logistiske differentialligning er et eksempel på en ikke-lineær differentialligning, og en meget vigtig af slagsen fordi den dukker op i mange forskellige sammenhænge.

Lad A være et reelt tal. Så er funktionen

$$\boxed{y(x) = \frac{b/a}{1 + Ae^{-bx}} \qquad (7.17)}$$

en løsning til den logistiske ligning (7.15). Det kan checkes ved direkte udregning.

Det er rigtigt, men vanskeligere at vise, at (7.17) er den fuldstændige løsning; altså giver os samtlige løsninger ved at variere A.

7.3 Om at løse den logistiske differentialligning

Den logistiske ligning kan løses på følgende måde: Antag at y er en løsning til (7.15). Vi sætter så

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

Så er

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{z(x)} = \frac{1}{z(x)}\left(b - \frac{a}{z(x)}\right) = \frac{b}{z(x)} - \frac{a}{z(x)^2}.$$

Da

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{z(x)} = -\frac{z'(x)}{z(x)^2},$$

finder vi ved at gange igennem med $z(x)^2$ at

$$-z'(x) = bz(x) - a,$$

eller

$$z' + bz = a. \qquad (7.18)$$

Dette er en inhomogen ligning af den type, der blev behandlet i afsnit 7.1.3, men den blev ikke løst der, fordi vi der kun behandlede ligninger af anden orden, dvs. hvor den anden afledte indgik. Ikke desto mindre kan vi løse ligningen på følgende måde.

Den konstante funktion $\frac{a}{b}$ er en partikulær løsning. Den homogene ligning

$$z' + bz = 0 \qquad (7.19)$$

har løsningen $z_0(x) = e^{-bx}$. Hvis g er en vilkårlig løsning til (7.19) er

$$(gz_0^{-1})' = \frac{g'z_0 - z_0'g}{z_0^2} = \frac{-bgz_0 + bz_0g}{z_0^2} = 0.$$

Heraf følger, at gz_0^{-1} er konstant, dvs. der findes $B \in \mathbb{R}$ så

$$g(x) = Be^{-bx}. \tag{7.20}$$

Dermed har vi vist, at (7.20) er den fuldstændige løsning til den homogene ligning (7.19), og derfor består den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning (7.18) af funktionerne

$$\frac{a}{b} + Be^{-bx}.$$

Heraf følger, at

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\frac{a}{b} + Be^{-bx}} = \frac{b/a}{1 + Ae^{-bx}},$$

når vi sætter $A = \frac{bB}{a}$.

7.2.2 Laplace-ligningen og bølgeligningen

Lad $f(x,y)$ være en funktion af to variable. f siges at være en *harmonisk funktion*, når den er løsning til *Laplace-ligningen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{7.21}$$

Rigtig mange funktioner er løsning til denne partielle differential ligning og dermed harmoniske funktioner.

En anden vigtig partiel differentialligning er *bølgeligningen*. Faktisk er der en bølgeligning for ethvert reelt tal c; nemlig den partielle differential ligning

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{7.22}$$

Som navnet antyder, optræder bølgeligningen i forbindelse med bølge fænomener, og ligesom Laplace ligningen har den mange løsninger.

Kapitel 8

Talfølger og uendelige rækker

Vi skal i dette kapitel have introduceret den matematiske teori for, hvordan man lægger uendeligt mange tal sammen. Ikke 'mange tal' eller 'rigtigt mange tal', men faktisk uendeligt mange tal. Så det er en proces lidt uover det sædvanlige, og det kræver metoder meget anderledes, end de der bruges til at lægge mange tal sammen. Udgangspunktet er teorien for talfølger, som vi starter med.

8.1 Talfølger og konvergens

Alle kender talfølger — eller ihvertfald én, nemlig

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots \tag{8.1}$$

Dette afsnit handler netop om sådanne talfølger – følger af tal, og især om hvordan de opfører sig, når man kommer rigtigt langt ud i dem. F.eks. er

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots \tag{8.2}$$

også en talfølge, men den opfører sig jo tydeligvis noget anderledes end talfølgen (8.1), der bare vokser og vokser udover alle grænser. Iøvrigt ganske ligesom talfølgen

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots, \tag{8.3}$$

som ganske vist kun indeholder lige tal, men som alligevel vokser udover alle grænser, jo længere man kommer ud i den. Helt anderledes er det med talfølgen (8.2); den bliver tværtimod mindre og mindre, jo længere vi kommer frem, og elementerne nærmer sig 0, jo længere vi kommer ud. Andre talfølger er noget mere kedelige, som f.eks.

$$8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, \ldots, \tag{8.4}$$

hvor der jo mildt sagt ikke sker så meget; følgen er konstant lig med tallet 8.

Talfølger kan også fremkomme på andre måder. F.eks. kan de fremkomme ved at gentage den samme operation igen og igen. Det kan være funktionen

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

som man anvender på tallet 7. D.v.s. at vi laver en følge hvis første element er tallet 7, det næste er $g(7) = \frac{1}{1+7}$, det næste er

$$g(g(7)) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+7}},$$

det næste

$$g(g(g(7))) = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+7}}}$$

og så videre. I det sidste eksempel er meningen (forhåbentlig) klar nok, men det bliver mere og mere bøvlet at skrive det næste element i følgen ned, jo længere man kommer ud. For at kunne arbejde med talfølger er det derfor nødvendigt at indføre noget notation, der gør det lettere. Vi kunne jo vælge at kalde det første element i følgen, som er tallet 7 for a_0. Altså,

$$a_0 = 7.$$

Det næste kan vi kalde a_1, måske fordi det fremkommer ved at anvende funktionen g én gang. Altså

$$a_1 = g(7) = g(a_0).$$

Vi kan så passende kalde det næste element for a_2; det er jo fremkommet ved at anvende g to gange. Altså

$$a_2 = g(g(7)) = g(a_1).$$

Og så videre. Fordelen er, at vi nu problemfrit kan skrive og regne med tallet

$$a_{87},$$

som altså er tallet der fremkommer ved iterativt at anvende funktionen g syvogfirs gange, startende med tallet 7. Tilsvarende kan vi hurtigt skrive f.eks.

$$a_{217},$$

mens det ville være stort set umuligt at anføre dette tal på anden måde. Vi har selvfølgelig ikke beregnet tallet a_{217}; vi har blot lavet noget matematisk notation, der gør det muligt at skrive om og regne med tallet.

Vi vil bruge denne skrivemåde i det følgende, således at[1]

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots \tag{8.5}$$

vil angive en generel talfølge. For at spare plads vil vi endda komprimere notationen yderligere og simpelthen skrive

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

for en talfølge. Eller $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ hvis vi foretrækker at starte med indexet 0. Eller måske $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ for talfølgen

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_4, b_6, b_7, \ldots,$$

hvis vi af uransagelige grunde foretrækker bogstavet b.

Vi vil ikke kun arbejde med følger af reelle tal, men også følger af komplekse tal. F.eks. er følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, hvor

$$a_n = \sin\left(\tfrac{1}{n}\right) + i\cos\left(\tfrac{1}{n}\right),$$

[1] Det er ikke forbudt at starte med a_0, så følgen bliver $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Hvad der er det bedste afhænger af forskellige ting, men er ofte en smagssag.

et eksempel på en talfølge med komplekse tal. Her er

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin 1 + i\cos 1, \\ a_2 &= \sin\left(\tfrac{1}{2}\right) + i\cos\left(\tfrac{1}{2}\right), \\ a_3 &= \sin\left(\tfrac{1}{3}\right) + i\cos\left(\tfrac{1}{3}\right), \\ a_4 &= \sin\left(\tfrac{1}{4}\right) + i\cos\left(\tfrac{1}{4}\right), \\ &\ldots \text{og så videre.} \end{aligned}$$

Eller talfølgen

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, \ldots,$$

der kan defineres ved formlen

$$a_n = i^n.$$

Den fundamentale definition angående talfølger er følgende:

(8.1) DEFINITION.

Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en talfølge og a et tal. Så har $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ grænseværdien *a (for n gående mod uendelig), når afstanden mellem a_n og a kan gøres ligeså lille, som vi måtte ønske, ved at lade n blive tilstrækkelig stor. Når det er opfyldt siger vi, at følgen $\{a_n\}$* er konvergent med grænseværdi *a, og vi skriver*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{8.6}$$

En anden måde at skrive (8.6) er

$$a_n \to a \quad \text{når } n \to \infty,$$

der læses 'a_n går mod a, når n går mod uendelig'. F.eks. vil $\frac{1}{n}$ gå mod 0, når n går mod uendelig.

En talfølge som ikke er konvergent; altså ikke har en grænseværdi, kaldes *divergent*.

8.2 Alternative formuleringer

Der er andre måder at formulere definitionen af konvergens for en talfølge, som måske kan hjælpe med at forstå hvad der menes. Et eksempel er flg.

En talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi a, når afstanden

$$|a_n - a|$$

mellem a_n og a kan gøres mindre end hvad som helst ved at gøre n tilstrækkelig stor. Men ikke engang den formulering tilfredsstiller en rigtig matematiker. Han (eller hun) bruger følgende:

En talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi a, når der for alle $\varepsilon > 0$ findes et naturligt tal N så

$$|a_n - a| \le \varepsilon$$

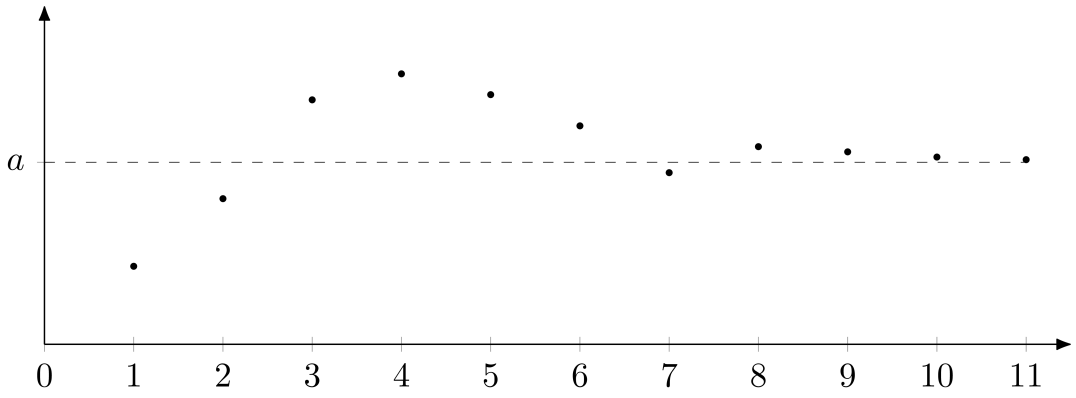
for alle $n \ge N$.

I

(8.3) EKSEMPEL.

Følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, hvor

$$a_n = 1 + \frac{2}{n},$$



Figur 8.1: Et billede af en positiv talfølge $\{a_n\}$ der konvergerer mod a; de indtegnede punkter har koordinaterne (n, a_n).

er konvergent med grænseværdi 1. Man kan argumentere for det på flere måder. En måde er, at sige at afstanden mellem a_n og 1 er

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| = \frac{2}{n},$$

som jo kan gøres ligeså lille, som vi måtte ønske, ved at gøre n stor nok. Hvis vi f.eks. vil gøre afstanden mindre end 10^{-6} (en million'te del), skal vi lade n være større end $2 \cdot 10^6$; altså større end 2 millioner. Thi når $n \geq 2 \cdot 10^6$ er

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} 10^{-6}$$

og dermed

$$\left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| = \frac{2}{n} \leq 2 \cdot \frac{1}{2} 10^{-6} = 10^{-6}.$$

Der gælder en række regneregler for grænseværdier af talfølger, der ofte bruges ved håndtering af talfølger.

(8.4) SÆTNING.

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion og $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en konvergent talfølge i I med grænseværdi $a \in I$. Definer en ny talfølge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved

$$b_n = f(a_n).$$

Så er $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent med grænseværdi $f(a)$.

En kort formulering af Sætning 4 er: Når f er kontinuert i a gælder, at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

(8.5) EKSEMPEL.

Da logaritme funktionen $\ln x$ er kontinuert og tager værdien 0 i 1, følger det fra Sætning 4 at

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

(8.6) EKSEMPEL.

Følgen

$$a_n = \frac{n^3}{3n^3+n^2}$$

er konvergent med grænseværdi $\frac{1}{3}$. Det kan f.eks. indses ved brug af Sætning 4 på følgende måde. Ved division med n^3 i både tæller og nævner ser man, at

$$a_n = \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = f\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

når vi sætter $f(x) = \frac{1}{3+x}$. Da f er kontinuert i 0 og $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ fortæller Sætning 4 at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f(0) = \tfrac{1}{3}.$$

Den næste sætning angiver en række regneregler, der kan bruges til at finde grænseværdier for følger, der er fremkommet fra andre følger ved addition, subtraktion, multiplikation og division.

(8.7) SÆTNING.

Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ være to konvergente talfølger med grænseværdi a og b, hhv. Dvs.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Så gælder

(a) Følgen $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent og

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n+b_n = a+b.}$$

(b) Følgen $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent og

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n-b_n = a-b.}$$

(c) Følgen $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent og

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab.}$$

(d) Når $b \neq 0$ gælder, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

(e) Når $t \in \mathbb{C}$ er et tal, er talfølgen $\{ta_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent og

$$\lim_{n\to\infty} ta_n = ta.$$

Konvergensforholdet for en talfølge af komplekse tal kan oversættes til et spørgsmål om konvergensen af to reelle talfølger. Der gælder nemlig følgende:

(8.8) SÆTNING.

Lad $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge af komplekse tal og sæt

$$a_n = \operatorname{Re} z_n \quad og \quad b_n = \operatorname{Im} z_n.$$

Så er $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent, hvis og kun hvis $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ begge er konvergente.
Når det er opfyldt, er

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i \lim_{n\to\infty} b_n.$$

En komprimeret udgave af Sætning 8 er

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n. \tag{8.7}$$

(8.9) DEFINITION.

(a) En følge af reelle tal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er voksende, *når der gælder, at*

$$a_n \leq a_{n+1}$$

for alle n.

(b) En følge af reelle tal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er aftagende, *når der gælder, at*

$$a_{n+1} \leq a_n$$

for alle n.

(c) En følge af reelle tal, der enten er voksende eller aftagende, kaldes monoton.

(d) En talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er begrænset, *når der findes et positivt tal, som er større end $|a_n|$ for alle n.*

F.eks. er talfølgen $a_n = \frac{1}{n}$ aftagende, følgen $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ er voksende, mens følgen $a_n = (-1)^n$ ikke er monoton. Følgen $a_n = (-1)^n$ er begrænset, men $a_n = (-1)^n n$ er det ikke. Følgen $a_n = n$, som angiver den følge, alle danske skolebørn lærer at kende, er voksende, og altså monoton, men ikke begrænset.

8.10 Alternativ formulering af 'begrænset'

Definitionen af 'begrænset' i Definition 9 formuleres blandt matematikere på følgende måde (eller noget der ligner): Talfølgen $\{a_n\}$ er begrænset, når der findes et positivt tal $R > 0$ så

$$|a_n| \leq R$$

for alle n.

Det sker ikke helt sjældent, at man kan vise om en (reel) talfølge, at den er konvergent, uden faktisk at have et bud på hvad grænseværdien kan være. Det skyldes ofte følgende fundamentale sætning.

(8.11) SÆTNING.

En monoton reel talfølge er konvergent hvis og kun hvis den er begrænset.

Selvom denne sætning tilsyneladende kun udtaler sig om eksistensen af grænseværdien, og intet siger om hvad grænseværdien er, kan den faktisk også bruges til at *finde* grænseværdien. Sætningen skal blot suppleres med lidt kreativitet og nogle gode ideer, som de efterfølgende to eskempler viser.

(8.12) EKSEMPEL.

Definer følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \tag{8.8}$$

når $n \geq 1$. Selvom vi ikke har en formel, der angiver a_n for ethvert n, har vi alligevel fået fastlagt en talfølge. F.eks. er

$$a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{6+1} = \sqrt{7},$$
$$a_3 = \sqrt{6 + a_2} = \sqrt{6 + \sqrt{7}} \approx 2.9403,$$

osv. Vi siger at (8.8) sammen med $a_1 = 1$ fastlægger følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *rekursivt*. Man kan vise, at følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er voksende og begrænset; faktisk er $1 \leq a_n \leq 3$ for alle n. Fra Sætning 11 følger nu at $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent, dvs. at grænseværdien

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

eksisterer. Fra (8.8) følger, at

$$a = \sqrt{6 + a},$$

og derfor også at $a^2 = 6 + a$. Denne ligning har to løsninger; nemlig $a = -2$ og $a = 3$. Men da $1 \leq a_n \leq 3$ for alle n, kan a ikke være mindre end 1, så vi konkluderer at $a = 3$.

Dette eksempel viser, hvordan man nogen gange kan finde grænseværdien for en følge ved at udnytte regnereglerne for grænseværdier. Men det helt afgørende var, at vi vidste, at grænseværdien eksisterer, takket være Sætning 11.

8.13 Ovenstående eksempel med flere detaljer

Definer følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}, \tag{8.9}$$

$n \geq 1$. Bemærk at $a_2 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} > 1$. Vi kan så bevise ved induktion at

$$a_{k+1} > a_k \tag{8.10}$$

for alle $k = 1,2,3,\ldots$. Lad $p(k)$ være udsagnet, at (8.10) er opfyldt. Da $a_2 = \sqrt{7} > 1 = a_1$ er $p(1)$ sand. Antag så at $p(k)$ er sand. Da har vi ved brug af både (8.9) og (8.10) at

$$a_{k+2} = \sqrt{6+a_{k+1}} > \sqrt{6+a_k} = a_{k+1}.$$

Denne ulighed viser, at $p(k+1)$ er sand og dermed har vi bevist at $p(k)$ er sand for alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$[2]. Altså har vi bevist, at følgen $\{a_n\}$ er voksende.

For at se, at følgen også er begrænset konstaterer vi, igen ved et induktionsargument, at

$$a_k \leq 3. \tag{8.11}$$

Dette er tydeligvis sandt for $k = 1$, og fra (8.9) følger at

$$a_{k+1} = \sqrt{6+a_k} \leq \sqrt{6+3} = 3$$

når $a_k \leq 3$. På denne måde følger det ved induktion, at (8.11) er sand for alle k.

Altså er følgen $\{a_n\}$ både voksende og begrænset. Ifølge Sætning 11 er den så også konvergent, og vi lader a være grænseværdien. For at finde a kvadrerer vi først (8.9) og finder, at

$$a_{n+1}^2 = 6 + a_n. \tag{8.12}$$

Da $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ finder vi ved brug af Sætning 7 at

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}a_{n+1} = aa = a^2.$$

Anvender vi dernæst Sætning 7 på (8.12) får vi, at

$$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = 6 + \lim_{n\to\infty} a_n = 6 + a. \tag{8.13}$$

Ved at løse ligningen (8.13) finder man at

$$a = 3 \quad \text{eller} \quad a = -2.$$

Men da vi ved at $1 = a_1 \leq a_k \leq 3$ for alle k, følger det, at $1 \leq a \leq 3$. Så $a = 3$.

(8.14) EKSEMPEL.

[2] Mængdedifferencen mellem $\mathbb{N}$ og $\{0\}$, dvs. mængden bestående af de elementer fra $\mathbb{N}$, der ikke samtidig er elementer af $\{0\}$.

Lad A være et reelt tal større end eller lig med 1. Definer talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekursivt ved at $a_1 = A$ og

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right), \tag{8.14}$$

når $n \geq 2$. Dette er endnu et eksempel på en rekursivt defineret talfølge. Denne her er også monoton, men aftagende. Den er også begrænset, og det følger så ved brug af Sætning 11 at den er konvergent. Grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

viser sig at være $\sqrt{A}$. Så ved at vælge n meget stor er a_n altså en meget præcis approksimation til $\sqrt{A}$. Bemærk at a_n beregnes ud fra A ved division og addition. I gamle dage brugtes metoden derfor til at bestemme kvadratrødder af tal ≥ 1.

8.15 Ovenstående eksempel med flere detaljer

Lad A være et reelt tal større end eller lig med 1. Definer talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rekursivt ved at $a_1 = A$ og

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right), \tag{8.15}$$

når $n \geq 2$. Bemærk at denne rekursive formel kan bruges fordi $a_1 > 0$, og fordi formlen (8.15) har den egenskab at

$$a_{n-1} > 0 \;\Rightarrow\; a_n > 0.$$

Dette sikrer, at alle a_n'erne er forskellige fra 0, således at vi ikke kommer til at dividere med 0 i (8.15). Vi vil vise, at $\{a_n\}$ er konvergent, og at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{A}. \tag{8.16}$$

Dette gøres i tre trin:

(1) Vi viser først, at $\{a_n\}$ er aftagende.

(2) Vi viser dernæst, at $\{a_n\}$ er begrænset.

(3) Fra 1 og 2 følger det ved brug af Sætning 11, at $\{a_n\}$ er konvergent. Til sidst viser vi, at grænseværdien er $\sqrt{A}$; altså at $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{A}$.

Ved brug af (8.15) får vi

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{A}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - A). \tag{8.17}$$

Vi regner så videre på $a_n^2 - A$, og bruger igen (8.15):

$$\begin{aligned} a_n^2 - A &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right)^2 - A = \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + \frac{A^2}{a_{n-1}^2} + 2A\right) - A \\ &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + \frac{A^2}{a_{n-1}^2} - 2A\right) = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{A}{a_{n-1}}\right)^2. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Af (8.18) ser vi at $a_n^2 - A \geq 0$, og når dette indsættes i (8.17), får vi så at $a_n - a_{n+1} \geq 0$ eller $a_n \geq a_{n+1}$. Dermed har vi vist, at $\{a_n\}$ er aftagende.

Da $\{a_n\}$ er aftagende, har vi også at $a_n \leq a_1 = A$. Da vi ved at $a_n > 0$ for alle n, har vi altså at $|a_n| \leq A$ for alle n.

Vi ved nu fra Sætning 11, at $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ findes. Desuden følger fra (8.15) at

$$a_n a_{n-1} = \tfrac{1}{2}(a_{n-1}^2 + A). \tag{8.19}$$

Ved brug af Sætning 7 finder vi, at $\lim_{n\to\infty} a_n a_{n-1} = a^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}^2$. Fra Sætning 7 og (8.19) følger at

$$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_n a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_{n-1}^2 + A) = \tfrac{1}{2}(a^2 + A).$$

Løser man ligningen $a^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + A\right)$ fås at $a = \sqrt{A}$ eller $a = -\sqrt{A}$. Men da $a_n \geq 0$ for alle n må $a \geq 0$. Altså er $a = \sqrt{A}$.

Vi ser altså, at vi har fundet en måde til at approksimere kvadratroden at et tal; for store værdier af n er a_n meget tæt på $\sqrt{A}$. Metoden blev brugt tidligere, længe før eksistensen af computere og regnemaskiner, til at bestemme kvadratrødder.

8.2 Uendelige rækker

En uendelig række er et forsøg på, at lægge uendeligt mange tal sammen. Nogle gange kan det lade sig gøre, andre gange ikke.

Den formelle definition af en uendelig række er følgende

(8.16) DEFINITION.

Lad $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *være en talfølge. Den* uendelige række *med leddene* a_n *er følgen* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *af* afsnitssummer

$$s_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n. \tag{8.20}$$

Denne uendelige række, hvor vi forsøger at lægge alle tallene i følgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sammen, er altså blot afsnitssummerne (8.20), og vi betegner den kort ved symbolet

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Umiddelbart virker det måske underligt, at en uendelig række defineres til at være en følge; følgen af afsnitssummer. Men når man vil forsøge at lægge alle tallene i følgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sammen, altså forsøge at give mening til

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots,$$

er det eneste fornuftige vel at starte med at lægge de første mange led sammen, og så se hvad der sker. Summen af de første k led er jo netop den k'te afsnitssum s_k, og hvis den nærmer sig et tal når k vokser (altså er en konvergent følge), er grænseværdien en rimeligt ædruelig kandidat til summen af alle tallene i følgen $\{a_n\}$. Derfor:

(8.17) DEFINITION.

Hvis talfølgen $\{s_k\}$ af afsnitssummerne (8.20) er konvergent, siger vi, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent*, og vi skriver så*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

hvor $s = \lim_{k\to\infty} s_k$. I denne situation kalder vi s for rækkens sum. *Hvis derimod følgen af afsnitsummer $\{s_k\}$* ikke *er konvergent (altså er divergent) siger vi, at den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er* divergent.

(8.18) EKSEMPEL.

Lad $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være følgen $a_n = n$. Så er

$$s_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + k$$

og den uendelige række kan skrives

$$\sum_{n=0}^{\infty} n. \tag{8.21}$$

Da $s_k \geq k$ er følgen $\{s_k\}$ af afsnitssummer ikke begrænset, og vokser udover alle grænser, og derfor er rækken (8.21) divergent. Fordi leddene er positive i dette eksempel anføres divergensen af rækken nogle gange ved blot at skrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = \infty.$$

(8.19) EKSEMPEL.

Lad $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \tag{8.22}$$

er konvergent. Det kan vi overbevise os om på flg. måde. Den k'te afsnitssum er

$$s_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^k}.$$

Hvis vi ganger s_k med $\frac{1}{2}$ fåes

$$\frac{1}{2}s_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = s_k - 1 + 2^{-(k+1)}.$$

Flytter man lidt rundt på den ligning, finder man, at

$$s_k = 2 - 2^{-k}.$$

Da $\lim_{k\to\infty} 2^{-k} = 0$ (meget hurtigt endda), ser vi altså, at følgen af afsnitssummer $\{s_k\}$ er konvergent med grænseværdi 2. Det betyder, at den uendelige række (8.22) er konvergent med sum 2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$$

Ovenstående eksempel kan generaliseres på følgende måde.

(8.20) SÆTNING.

(Geometriske rækker) Lad $z \in \mathbb{C}$ være et tal med absolut værdi

$$|z| < 1.$$

Så er den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + \cdots \tag{8.23}$$

konvergent med sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \tag{8.24}$$

En uendelig række på formen (8.23) kaldes for en *geometrisk række*. Bemærk at, hvis vi vælger $z = \frac{1}{2}$, får vi netop rækken fra Eksempel 19.

8.2.1 Konvergenskriterier

Når man får en uendelig række stukket ud, eller snubler over en ved et uheld, er det første spørgsmål, man bør stille sig, om rækken er konvergent eller divergent. Hvis den er divergent, er den ubrugelig (ihvertfald i princippet), men hvis den er konvergent, bliver det næste naturlige spørgsmål at finde dens sum. Der er en lang række sætninger og metoder, der kan bruges til at afgøre, om en uendelig række er konvergent eller ej, og vi skal nu præsentere nogle af dem.

(8.21) SÆTNING.

En uendelig række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kan kun være konvergent hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

I ord er udsagnet i Sætning 21, at en uendelig række kun kan være konvergent, hvis leddene i rækken (altså a_n'erne) konvergerer mod 0. Når man (på en eller anden måde) møder en uendelig række, er det første, man skal gøre, derfor at undersøge om leddene går mod 0. Hvis det *ikke* er tilfældet, skal man skynde sig videre; rækken er divergent.

(8.22) EKSEMPEL.

I Sætning 20 så vi, at den geometriske række

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

er konvergent når $|z| < 1$ (og vi fandt dens sum). Når $|z| \geq 1$ fortæller Sætning 21 os at rækken er divergent. Thi $|z^n| = |z|^n \geq 1$ for alle n når $|z| \geq 1$, og leddene kan derfor ikke gå mod 0.

Det er vigtigt at forstå, at det omvendte af udsagnet i Sætning 21 ikke er rigtigt: Det er *ikke* rigtigt, at en uendelig række er konvergent blot fordi leddene går mod 0! At leddene skal gå mod 0 er en *nødvendig* betingelse for, at rækken kan være konvergent, men langt fra en tilstrækkelig betingelse.

(8.23) EKSEMPEL.

Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

er divergent, selvom leddene går mod 0. Det er en af de meget få divergente uendelige rækker, der har fået et navn. Den hedder *den harmoniske række*. Men følgen af afsnitssummer

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{k}$$

vokser ud over alle grænser, og den harmoniske række er derfor divergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(8.24) SÆTNING.

(Sammenligningskriteriet) Lad $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ være følger at ikke-negative tal. Antag at

$$a_n \leq b_n \tag{8.25}$$

for alle n. Så gælder:

(a) Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er konvergent, er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ det også.

(b) Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er divergent, er $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ det også.

(8.25) EKSEMPEL.

Vi ved at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{8.26}$$

er konvergent. Sammen med sammenligningskriteriet kan dette udnyttes til at vise, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots \tag{8.27}$$

er konvergent. Til det formål bedes læseren vise, at

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \tag{8.28}$$

for alle $n \geq 1$. Da rækken (8.26) er konvergent er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

det også, så vi kan anvende Sætning 24a til at konkludere, at (8.27) er konvergent.

Vi er nu kommet til et af de mest potente konvergenskriterier: *Integralkriteriet*. Lad f være en ikke-negativ funktion defineret på $[1,\infty[$, dvs. for alle positive tal større end eller lig med 1. Restriktionen af f til de positive naturlige tal giver anledning til rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Fx. fremkommer rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

på denne måde ved at bruge funktionen $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Som det er tilfældet med denne funktion, antager vi i den følgende sætning udover kontinuitet, at f skal være aftagende, dvs. opfylde implikationen

$$x \leq y \;\Rightarrow\; f(y) \leq f(x).$$

(8.26) SÆTNING.

(Integralkriteriet) Lad $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ være en kontinuert og aftagende funktion. Så er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{8.29}$$

konvergent, hvis og kun hvis følgen

$$\left\{ \int_1^k f(x)\,dx \right\}_{k=1}^{\infty}$$

er konvergent.

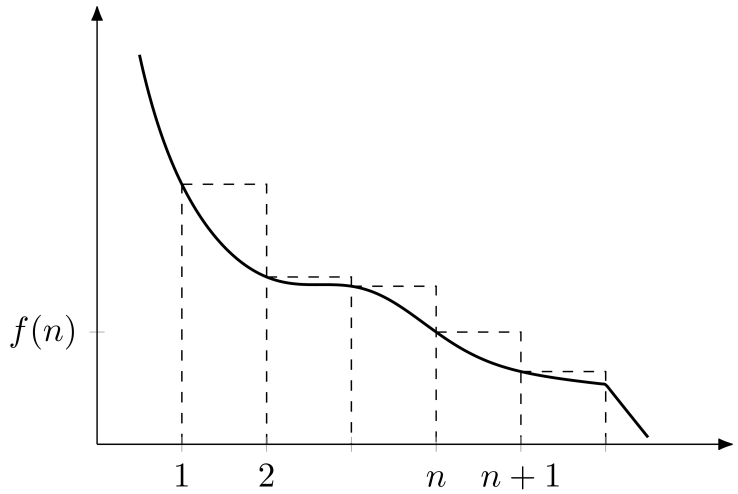
(8.27) EKSEMPEL.

Lad $p \in \mathbb{R}$. For ethvert $x > 0$ kan vi så definere x^p som

$$x^p = e^{p \log x}.$$

Bemærk at det stemmer overens med den sædvanlige definition af x^p når $p \in \mathbb{N}$, nemlig som x ganget med sig selv p gange. Ved hjælp af integralkriteriet kan vi nu vise, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{8.30}$$



Figur 8.2: Grafen for en funktion f, som i Integralkriteriet.

er konvergent hvis og kun hvis $p > 1$. Det gøres på følgende måde: Først ser vi, at når $p \leq 0$ vil leddene i (8.30) ikke gå mod 0, og rækken er derfor divergent, jvf. Sætning 21. Så vi behøver kun at overveje hvad der sker når $p > 0$. For sådanne p er funktionen

$$\frac{1}{x^p} = x^{-p} = e^{-p\log x} \tag{8.31}$$

aftagende, og vi kan bruge integralkriteriet, Sætning 26. Når $p \neq 1$ har funktionen (8.31) stamfunktionen

$$\frac{1}{-p+1} e^{(-p+1)\log x}.$$

Så derfor er

$$\int_1^k \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{-p+1} e^{(-p+1)\log k} - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{-p+1}\left(\frac{1}{k^{p-1}} - 1\right).$$

Følgen

$$\frac{1}{k^{p-1}} = e^{(-p+1)\log k}$$

vokser ud over alle grænser for $k \to \infty$ når $-p+1 > 0$ og konvergerer mod 0 når $-p+1 < 0$. Så for $p \neq 1$ følger det fra integralkriteriet, at (8.30) er konvergent, hvis og kun hvis $p > 1$. I tilfældet $p = 1$ er (8.30) netop den harmoniske række, som er divergent, jvf. Eksempel 23.

8.2.2 Alternerende rækker og uniform konvergens

En uendelig række, hvor leddene er reelle, kaldes *alternerende*, når leddene hele tiden skifter fortegn. I symboler er kravet, at den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende række, når a_n er et reelt tal $\neq 0$ og

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$$

for alle n. Alternerende uendelige rækker har en meget større chance for at være konvergente end generelle uendelige rækker. Der gælder nemlig følgende

(8.28) SÆTNING.

En alternerende uendelig række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*, som opfylder, at* $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ *for alle* n*, er konvergent hvis og kun hvis* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(8.29) EKSEMPEL.

Det følger fra Sætning 28 at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$$

er konvergent.

Selvom alternerende rækker har visse pæne egenskaber, som ikke deles af alle uendelige rækker, har de også en stor fejl: Deres sum afhænger i meget høj grad af den rækkefølge, man lægger leddene sammen i. Bytter man for meget rundt, kan summen ændres helt vilkårligt, eller rækken kan blive divergent. Bl.a. af den grund indfører vi nu et krav til en uendelig række, som er stærkere end at forlange konvergens; vi forlanger, at rækken er *absolut* konvergent.

(8.30) DEFINITION.

En uendelig række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *er* absolut konvergent*, når den uendelige række*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

er konvergent.

De absolut konvergente rækker er dem, man kan være trygge ved; i den forstand at de opfører sin NÆSTEN som endelige summer.

(8.31) SÆTNING.

En absolut konvergent uendelig række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *er konvergent, og der gælder følgende ulighed om summen:*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Alternerende rækker giver mange eksempler på konvergente rækker, som ikke er absolut konvergente. Det gælder f.eks. rækken i Eksempel 29.

Kapitel 9

Om at approksimere funktioner med polynomier

9.1 Potensrækker

En af mange anvendelser af teorien om uendelige rækker er til studiet af funktioner. For at forklare hvordan, bemærk først at formlen, der angiver summen af den geometriske række

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

også kan opfattes på den måde, at den giver en beskrivelse af funktionen

$$z \mapsto \frac{1}{1-z},$$

som noget der mistænkeligt ligner et polynomium, når man skriver leddene ud:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \cdots \tag{9.1}$$

Hvis vi stopper summationen efter, f.eks., k led, så får vi faktisk et rigtigt polynomium; lad os kalde det p_k. Altså

$$p_k(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^k.$$

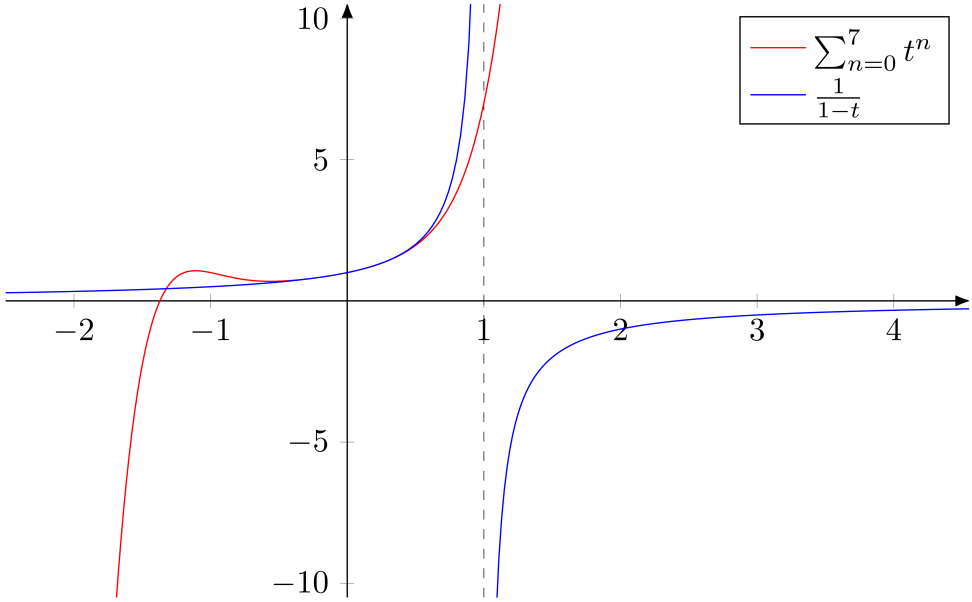
Sætningen om geometriske rækker fortæller os, at følgen $\{p_k(z)\}$ konvergerer mod $\frac{1}{1-z}$:

$$\lim_{k\to\infty} p_k(z) = \frac{1}{1-z}$$

når $|z| < 1$. Følgen $p_1(z) = 1 + z$, $p_2(z) = 1 + z + z^2$, $p_3(z) = 1 + z + z^2 + z^3$, osv., giver os altså en følge af polynomier, der approksimerer funktionen $\frac{1}{1-z}$ når $|z| < 1$.

Dette forhold at en funktion, der ikke selv er et polynomium, som for eksempel funktionen $\frac{1}{1-z}$, kan approksimeres med polynomier, er et meget mere generelt fænomen, og der findes masser af funktioner, som man ikke kender et lukket algebraisk udtryk for, men hvor man kan finde al den information om funktionen, man har brug for, fordi man har en god approksimation af funktionen med polynomier. Dette afsnit handler om nogle af de metoder, der findes til at approksimere forskellige funktioner med polynomier, og hvordan man kan differentiere og integrere funktioner ved brug af approksimationen med polynomier.

(9.1) DEFINITION.



Figur 9.1: Grafen for $\frac{1}{1-t}$ sammenlignet med grafen for $1+t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6+t^7$.

En potensrække *er en uendelig række af formen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

hvor x er en reel variabel, og $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ er en følge af reelle tal.

Den geometriske række er en potensrække, når vi kun tillader reelle tal som z i (9.1) og vælger følgen $\{a_n\}$ i Definition 1 til at være den konstante funktion 1. Hvis vi istedet vælger $a_n = n$, får vi rækken

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \tag{9.2}$$

som altså også er en potensrække. Inden vi går igang med at bruge potensrækker til at approksimere funktioner med polynomier, skal vi først se lidt på konvergensforholdene for potensrækker. Om den geometriske række (9.1) ved vi, hvornår den konvergerer; det sker hvis og kun hvis $|x| < 1$. Noget tilsvarende gælder mere generelt:

(9.2) SÆTNING.

For enhver potensrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.3}$$

findes et $R \geq 0$, således at (9.3) konvergerer når $|x| < R$ og divergerer når $|x| > R$.

Faktisk er potensrækken (9.3) absolut konvergent når $|x| < R$!

Tallet R, som kan være ∞ (altså 'plus uendelig'), kaldes for potensrækkens *konvergens radius*. Bemærk, at enhver potensrække konvergerer, når vi sætter $x = 0$, og der er masser af potensrækker

hvor $x = 0$ er den eneste værdi af x, for hvilken rækken konvergerer. Disse potensrækker ser man ikke meget til, for de er ret ubrugelige. Men de findes. Et eksempel er potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n, \tag{9.4}$$

som fremkommer når vi vælger følgen $\{a_n\}$ i Definition 1 til at være $n!$[1] For denne potensrække er konvergens radius $R = 0$.

Der findes også rigtigt mange potensrækker, hvor konvergens radius R er 'plus uendelig', hvilket betyder, at de konvergerer for alle tal x. Det er f.eks. tilfældet for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n, \tag{9.5}$$

der, som vi senere skal se, giver en approksimation af exponential-funktionen med polynomier.

Når man får givet en potensrække, er konvergens radius R det første, man bør finde; for at vide for hvilke x rækken er konvergent. Det er ikke altid helt let, men ofte kan R findes ved hjælp af følgende sætning.

(9.3) SÆTNING.

Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække. Hvis grænseværdien

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

findes, evt. som $+\infty$, er R konvergens radius for potensrækken.

(9.4) EKSEMPEL.

For rækken (9.4) er

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2}{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots 2} = \frac{1}{n+1},$$

som konvergerer mod 0 når $n \to \infty$. Derfor er konvergensradius 0 for potensrækken (9.4) ifølge Sætning 3. Det betyder, at rækken er divergent når $|x| > R = 0$; altså for alle $x \neq 0$.

(9.5) EKSEMPEL.

For potensrækken (9.2) finder vi at

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} 1/(1+\frac{1}{n}) = 1$ fortæller Sætning 3, at konvergens radius er $R = 1$. Altså er rækken (9.2) (absolut) konvergent når $|x| < 1$ og divergent når $|x| > 1$. Vi bemærker at når $|x| = 1$, vil leddene i (9.2) ikke gå mod 0, og rækken er derfor divergent når $|x| = 1$.

[1] $n!$ er notationen for produktet $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2$ når $n \geq 2$ og $1! = 0! = 1$.

(9.6) EKSEMPEL.

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n. \tag{9.6}$$

Her er $a_n = \frac{1}{n^2}$, så

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Så vi ser, at

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1,$$

og dermed er konvergensradius $R = 1$ for potensrækken (9.6) ifølge Sætning 3. For denne potensrække gælder, at den også er konvergent når $x = \pm R$. Thi når vi indsætter $x = \pm 1$ i (9.6) får vi rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

som begge er konvergente.

Når potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergens radius $R > 0$, og $a \in \mathbb{R}$ er et eller andet tal, kan man indsætte $x - a$ istedet for x i rækken når $|x-a| < R$ og har så en konvergent række:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{9.7}$$

for $x \in]a-R, a+R[$. Fx kan vi indsætte $x-2$ i (9.1) når $x \in]1,3[$, og finder så, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x},$$

for $x \in]1,3[$. Bemærk, at det, der er sket er, at vi har 'flyttet' eller 'translateret' den oprindelige potensrække med 2. Da det er en rimeligt uskyldig forandring, er det ikke ualmindeligt, at den nye række, der generelt altså ser ud som i (9.7), også bliver omtalt som en potensrække. Det vil også ske i denne tekst, når det er hensigtsmæssigt.

Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med konvergens radius $R > 0$. Vi kan så definere en funktion

$$f :]-R, R[\to \mathbb{R}$$

ved at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Denne funktion kalder vi for potensrækkens *sumfunktion*. Ikke nok med at sumfunktionen er differentiabel; den afledte er givet ved potensrækken, der fremkommer ved at differentiere potensrækken, der definerer f, ledvist:

(9.7) SÆTNING.

Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med konvergens radius $R > 0$ og lad f være sumfunktionen for f. Så er f differentiabel og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{9.8}$$

for alle $x \in]-R, R[$.

Vi bemærker, at den uendelige række (9.8) kan skrives

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

når vi sætter $b_n = (n+1)a_{n+1}$, og den er derfor selv en potensrække. Denne potensrække, der altså er fremkommet ved at differentiere leddene i den oprindelige potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, har samme konvergensradius R som den.

(9.8) EKSEMPEL.

Ved hjælp af Sætning 7 kan man skaffe sig potensrække fremstillinger af nye funktioner ud fra kendte. F.eks. på flg. måde. Ved differentiation af funktionnen $\frac{1}{1-x}$ får man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

og ved ledvis differentiation af $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ får man

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^7 + \cdots$$

Det følger så fra Sætning 7 at

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^7 + \cdots$$

for $x \in]-1, 1[$.

Kort sagt siger Sætning 7 at sumfunktionen for en potensrække kan differentieres ved at differentiere potensrækken ledvist. Der gælder en tilsvarende sætning mht. integration af sumfunktionen for en potensrække:

(9.9) SÆTNING.

Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ være en potensrække med konvergens radius $R > 0$ og lad f være sumfunktionen for f. Så er R også konvergens radius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_4}{5} x^5 + \frac{a_5}{6} x^6 + \frac{a_6}{7} x^7 + \cdots \tag{9.9}$$

og sumfunktionen for potensrækken (9.9) er en stamfunktion til f.

Lidt komprimeret kan sætningen skrives på en linie:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(9.10) EKSEMPEL.

Ligesom Sætning 7 kan også Sætning 9 bruges til at finde potensrække fremstillinger af nye funktioner ud fra kendte. F.eks. kan man udnytte at

$$\int \frac{1}{1-x} \, dx = -\log(1-x)$$

til at få følgende potensrække fremstilling af funktionen $\log(1-x)$:

$$\begin{aligned} \log(1-x) &= -\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ &= -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots \end{aligned} \tag{9.10}$$

for alle $-1 < x < 1$.

9.2 Taylorrækker

Vi vender nu problemstillingen om potensrækker på hovedet. Det gør vi ved, i stedet for at tage udgangspunkt i en potensrække, at starte med en given funktion, som f.eks. $f(x) = \sin x$, og forsøger så at beskrive den ved brug af potensrækker. Mere præcist forsøger vi at finde en potensrække, så f er dens sumfunktion. Vi antager altså, at vi er givet en funktion

$$f : I \to \mathbb{R},$$

og vil så forsøge at realisere f som sumfunktion for en potensrække. Det er imidlertid klart, at vi ikke kan gøre os håb om noget sådant uden visse antagelser om f. Det følger nemlig fra Sætning 7, at f må være differentiabel, hvis den skal være sumfunktion for en potensrække. Og mere end det. Sætning 7 siger også, at den afledte funktion af en sumfunktion selv er sumfunktion for en potensrække; nemlig den række der fremkommer ved ledvist at differentiere den potensrække, der fremstiller f. Så f' må også være differentiabel. Altså må f være to gange differentiabel, hvis den skal være sumfunktion for en potensrække. Og det argument kan vi gentage: Også f' må være to gange differentiabel, så f må faktisk være tre gange differentiabel osv. Konklusionen er altså, at hvis f skal være sumfunktion for en potensrække, må den nødvendigvis kunne differentieres uendeligt mange gange; være uendeligt ofte differentiabel.

Den næste overvejelse handler så om, *hvilken* potensrække vi kan gøre os håb om evt. kunne give os f som sumfunktion. Lad os antage, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.11}$$

er en potensrække, der har f som sumfunktion i en omegn af 0; altså at rækken (9.11) har en konvergensradius $R > 0$ og at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \tag{9.12}$$

for alle $x \in]-R, R[$. Som vi nu skal se, er der kun et valg af a_n'er, hvor det kan være opfyldt: Indsætter vi $x = 0$ i (9.12) finder vi, at

$$f(0) = a_0.$$

Og hvis vi differentierer højre og venstre side i (9.12), får vi ved brug af Sætning 7 at

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots \tag{9.13}$$

Sætter vi $x = 0$ i (9.13), finder vi at

$$f'(0) = a_1.$$

Og denne procedure kan vi fortsætte. Differentierer vi (9.13) får vi, at

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{9.14}$$

$$= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + 4 \cdot 5a_5 x^3 + \cdots \tag{9.15}$$

Indsætter vi $x = 0$ in (9.14) finder vi, at

$$f''(0) = 2a_2.$$

Ved at fortsætte med at differentiere og indsætte $x = 0$ finder man ud af, at koefficienterne a_n i potensrækken nødvendigvis må være bestemt af de afledte funktioner af f, mere præcist af disse funktioners værdi i 0, hvis (9.12) skal være opfyldt.

For at nedskrive relationen mellem a_n'erne og f indfører vi notationen

$$f^{(n)}$$

for den funktion, der fremkommer ved at differentiere f n gange. Altså

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f''' \qquad \text{osv.}$$

Ved brug af denne notation kan vi skrive, at der skal gælde, at

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{9.16}$$

hvis potensrækken (9.11) skal ha' f som sumfunktion. Med andre ord er potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

den eneste potensrække, der har en chance for at have f som sumfunktion.

(9.11) DEFINITION.

Lad f være en reel funktion, der er uendeligt ofte differentiabel i en omegn af 0. *Potensrækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

er Taylorrækken *for f med udviklingspunkt i* 0.

(9.12) EKSEMPEL.

Vi finder Taylorrækken (med udviklings punkt i 0) for $\sin x$. Bemærk at når $f(x) = \sin x$ er

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(x) = \cos x, && f^{(2)}(x) = -\sin x, && f^{(3)}(x) = -\cos x, \\ &f^{(4)}(x) = \sin x, && f^{(5)}(x) = \cos x, && \text{osv.} \end{aligned}$$

Indsætter vi $x = 0$ finder vi, at

$$\begin{aligned} &f^{(0)}(0) = 0, && f^{(1)}(0) = 1, && f^{(2)}(0) = 0, && f^{(3)}(0) = -1, \\ &f^{(4)}(0) = 0, && f^{(5)}(0) = 1, && \text{osv.} \end{aligned}$$

Generelt er

$$f^{(2n)}(0) = 0$$

for alle n, og

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

for alle n. Ved brug af (9.16) finder vi at koefficienterne a_n i Taylorrækken for $\sin x$ er

$$a_{2n} = 0 \quad \text{og} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

Dermed bliver Taylorrækken for $\sin x$ potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \frac{1}{13!}x^{13} - \cdots$$

(9.13) EKSEMPEL.

Vi finder Taylorrækken (med udviklingspunkt i 0) for funktionen

$$f(x) = \log(1-x).$$

Til det formål differentierer vi løs:

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(x) = \frac{-1}{1-x}, && f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}, && f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}, \\ &f^{(4)}(x) = \frac{-3\cdot 2}{(1-x)^4}, && f^{(5)}(x) = \frac{-4\cdot 3\cdot 2}{(1-x)^5}, && \text{osv.} \end{aligned}$$

Det generelle udtryk bliver

$$f^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

Og dermed

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{(n-1)!}{n!} = -\frac{1}{n}.$$

Altså er Taylorrækken for funktionen $\log(1-x)$ potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{7}x^7 - \cdots$$

Sammenlign med Eksempel 10.

Hvis funktionen vi er interesseret i, ikke er defineret eller uendeligt ofte differentiabel i 0, som jo er forudsætningen i Definition 11, men i et andet tal a, kan man bruge den næste definition i stedet.

(9.14) DEFINITION.

Lad f være en reel funktion der er uendeligt ofte differentiabel i en omegn af et reelt tal a. Potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

er Taylorrækken *for f med udviklingspunkt i a.*

(9.15) EKSEMPEL.

Den naturlige logaritme funktion $\log x$ er undeligt ofte differentiabel i punktet 1, og vi kan derfor finde Taylorrækken for $\log x$ med udviklingspunkt i 1. Sætter vi

$$f(x) = \log x$$

finder vi, at

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3\cdot 2}{x^4}, \quad f^{(5)}(x) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{x^5}.$$

Generelt gælder, at

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

og derfor, at

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

for $n = 1,2,3,4,\ldots$ Altså er

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

for $n = 1,2,3,4,\ldots$ Taylorrækken for $\log x$ med udviklingspunkt i 1 er altså potensrækken

$$(x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \tfrac{1}{5}(x-1)^5 - \tfrac{1}{6}(x-1)^6 + \cdots \tag{9.17}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\tfrac{1}{n}(x-1)^n. \tag{9.18}$$

Det næste spørgsmål er så, om $\log x$ er sumfunktion for dens Taylorrække (9.17). Det kan vi besvare ved brug af identiteten (9.10) fra Eksempel 10: Den fortæller os nemlig, at

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots \tag{9.19}$$

for alle $-1 < x < 1$. Det udnytter vi på følgende måde. Når $0 < t < 2$ er $-1 < 1-t < 1$, og vi kan derfor indsætte $1-t$ for x i (9.19) og finder, at

$$\begin{aligned} \log t &= \log\bigl(1-(1-t)\bigr) \\ &= -(1-t) - \tfrac{1}{2}(1-t)^2 - \tfrac{1}{3}(1-t)^3 - \tfrac{1}{4}(1-t)^4 - \tfrac{1}{5}(1-t)^5 - \cdots \end{aligned} \tag{9.20}$$

Da $-(1-t) = (t-1)$, $(1-t)^2 = (t-1)^2$, $(1-t)^3 = -(t-1)^3$, $(1-t)^4 = (t-1)^4$, $(1-t)^5 = -(t-1)^5$, osv., og helt generelt

$$(1-t)^n = (-1)^n (t-1)^n,$$

kan (9.20) skrives

$$\begin{aligned} \log t &= \log\bigl(1-(1-t)\bigr) \\ &= (t-1) - \tfrac{1}{2}(t-1)^2 + \tfrac{1}{3}(t-1)^3 - \tfrac{1}{4}(t-1)^4 + \tfrac{1}{5}(t-1)^5 - \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \tfrac{1}{n}(t-1)^n. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Sammenligner vi med (9.17) ser vi, at $\log x$ er sumfunktionen for dens Taylorrække med udviklingspunkt i 1 når $0 < x < 2$.

Der findes uendeligt ofte differentiable funktioner, for hvilke Taylorrækken er konvergent, men hvor sumfunktionen kun stemmer overens med funktionen selv i udviklingspunktet. Det er derfor nødvendigt at have redskaber, der kan bruges til at afgøre om Taylorrækken fremstiller funktionen eller ikke. Med matematisk notation er spørgsmålet, om der er tal x, hvor følgen af afsnitssummer for Taylorrækken; altså følgen

$$\begin{aligned} &f(a), \\ &f(a) + f^{(1)}(a)(x-a), \\ &f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2, \\ &f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3, \\ &\text{osv.}, \end{aligned} \tag{9.22}$$

konvergerer mod $f(x)$? Kort sagt, hvornår gælder at

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(x)?$$

Det er bl.a. det *Taylors restleds vurdering*, som er emnet for næste afsnit, handler om.

9.2.1 Taylors restleds vurdering

Lad f være en uendeligt ofte differentiabel funktion og

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{9.23}$$

Taylorrækken for f med udviklingspunkt i a. Lad os antage at konvergensradius R for (9.23) er positiv, altså at $R > 0$.

For at afgøre om f er sumfunktionen for dens Taylorrække, skal vi afgøre om summen af rækken (9.23) er $f(x)$. Vi skal altså afgøre om følgen

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad k = 1,2,3,4,\ldots$$

af polynomier konvergerer mod $f(x)$. Eller anderledes formuleret, om afstanden

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right|$$

går mod 0, når k går mod uendelig.

Til det formål lader vi $R_k(x)$ være forskellen mellem $f(x)$ og $\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, altså

$$R_k(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Så har vi, at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

hvis og kun hvis

$$\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0.$$

Funktionen $R_k(x)$ kaldes ofte for det *k'te restled*.

Der gælder

(9.16) SÆTNING.

Hvis M er et positivt tal, der opfylder, at $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ når $|x-a| \leq d$, så er

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{9.24}$$

når $|x-a| \leq d$.

Formuleringen i Sætning 16 kan måske synes temmelig teknisk, men sætningen kan i mange tilfælde bruges til at vise, at f er sumfunktionen for dens Taylorrække.

(9.17) EKSEMPEL.

For $f(x) = \sin x$ gælder $f'(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ osv. For at bruge Sætning 16 er det nok at konstatere, at

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1$$

for alle n og x. Så hvis $R_k(x)$ er det k'te restled for Taylorrækken for $\sin x$ i udviklingspunktet a, er

$$|R_x(x)| \leq \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}$$

for alle k og x. Vi ved at

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0.$$

Heraf følger, ved brug af (9.24) at $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$, og dermed at $\sin x$ er sumfunktionen for sin Taylorrække, uanset hvilket udvilingspunkt a vi vælger. Taylorrækken for $\sin x$ med udviklingspunkt 0 fandt vi i Eksempel 12, og kan derfor nu konkludere, at

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

(9.18) EKSEMPEL.

Taylorrækken for $f(x) = e^x$ med udviklingspunkt i 0 er potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Det k'te restled $R_k(x)$ er så

$$e^x - \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}.$$

For at bruge Sætning 16 bruger vi, at $f^{(n)}(x) = e^x$ for alle n. For ethvert $d > 0$ er e^d den største værdi, som e^x antager på intervallet $[-d, d]$, så vi har altså at

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq e^d$$

når $|x| \leq d$, og fra Sætning 16 følger så, at

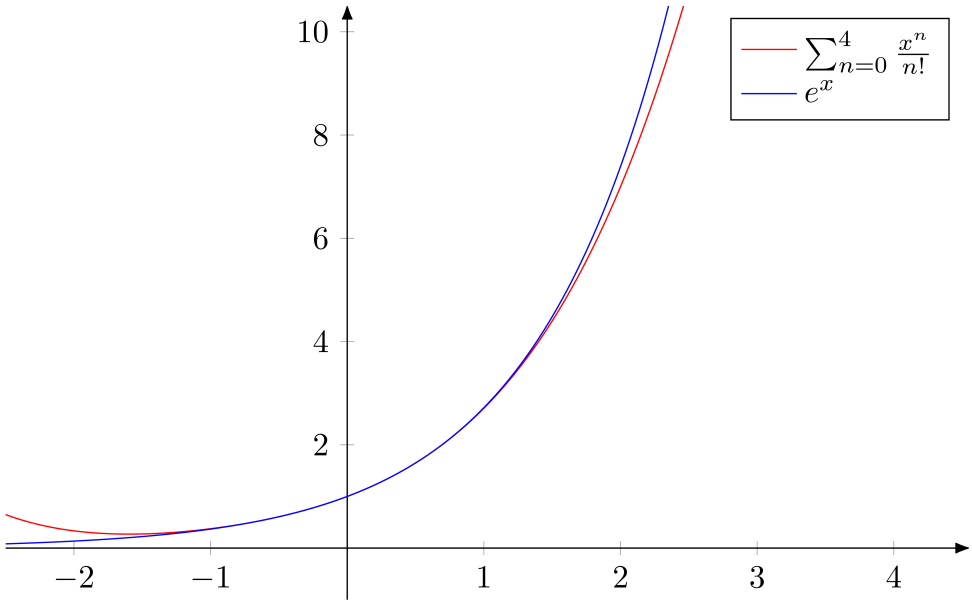
$$|R_k(x)| \leq e^d \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \tag{9.25}$$

når $|x| \leq d$. Dette gælder for alle k, og vi ved at

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0.$$

Heraf følger, ved brug af (9.25), at $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$ når $|x| \leq d$. Men $d > 0$ var et vilkårligt tal, så vi kan konkludere, at $\lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0$ for alle reelle tal x, og dermed at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



Figur 9.2: Grafen for e^x og for $\sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!}$.

for alle reelle tal x.

En anden vigtig anvendelse af Sætning 16 er, at den giver en vurdering af, hvor stor en fejl man begår, når man approksimerer $f(x)$ med

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ifølge Sætning 16 er denne fejl ikke mere end

$$M\frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

(9.19) EKSEMPEL.

(Binomialrækken) Når a er et positivt reelt tal, kan vi definere den k'te potens a^k af a for alle reelle tal k ved, at

$$a^k = e^{k \log a}.$$

Bemærk at når k er et helt tal, giver denne definition det samme som den mere 'platfodede'; f.eks. er a^7 det samme som a 'ganget med sig selv 7 gange'. Da $1+x$ er positiv når $|x| < 1$ kan vi definere en funktion $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ ved, at

$$g(x) = (1+x)^k.$$

Taylorrækken med udviklingspunkt i 0 for g er konvergent for alle $x \in]-1,1[$, og giver os flg. potensrække fremstilling af $(1+x)^k$:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 \tag{9.26}$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}x^4 + \cdots. \tag{9.27}$$

Ved at indføre notationen

$$\binom{k}{n}$$

for tallet

$$\frac{k(k-1)(k-2)\cdot(k-n+1)}{n!},$$

når n er et naturligt tal $n \geq 1$, og vi definerer $\binom{k}{0} = 1$, kan rækken (9.26) skrives mere komprimeret:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n. \tag{9.28}$$

Den uendelige række (9.28) kaldes for *binomialrækken*.

9.20 Taylors restleds vurdering anvendt på cos(x)

Lad $f(x) = \cos x$. Så er $f'(x) = -\sin x$, $f^{(2)}(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ og forfra. Så

$$f^{(2n+1)}(0) = 0$$

og

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n.$$

Taylorrækken for $\cos x$ med udviklingspunkt i 0 er altså potensrækken

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}.$$

Og Sætning 16 fortæller at

$$|R_k(x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Så forskellen mellem $R_8(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8$ og $\sin x$ er højest

$$\frac{|x|^9}{9!}.$$

Hvis $|x| \leq 1$ er dette mindre end

$$2.8 \cdot 10^{-6} \approx \text{tre million}'\text{te dele.}$$

Kapitel 10

Diskrete stokastiske variable

Sandsynlighedsteoriens oprindelse har sit udspring i menneskets interesse for at deltage i diverse uforudsigelige spil, der formentlig er næsten lige så gammel som det tænkende menneske selv. Således har man i arkæologiske udgravninger i Ægypten kunnet konstatere, at man i hvert fald i år 3500 før vores tidsregning (og formentlig meget tidligere) benyttede såkaldte astragulus knogler som en slags terninger i forbindelse med, hvad der må formodes at have været, primitive typer af 'hazard spil'.

Figur 10.1: En astragulus knogle.

10.1 Nærmere beskrivelse af astragulus knogler og deres 'terninge-egenskaber'

Astragalusknoglen er en knogle fra anklen hos visse klovdyr. Den udmærker sig ved, at den kan lande på 4 forskellige sider, hvis man kaster med den.

For hver af de to smalle sider, er der ca. 10% chance for, at knoglen lander på netop den side. For hver af de to brede sider er der ca. 40% chance for, at knoglen lander på netop den side. Astragulusknoglerne er blevet brugt til spil fra i hvert fald år 3500 før vores tidsregning, idet de optræder på ægyptiske gravmalerier fra den periode. Det er dog højst tænkeligt, at knoglerne er blevet brugt til spil allerede langt tidligere.

Et konkret spil gik ud på at kaste med 4 atragulusknogler. Siderne på hver knogle fik værdierne 1, 3, 4, 6, idet de to smalle sider fik værdierne 2 og 3, mens de to brede sider fik værdierne 1 og 6. Det ringeste udfald, man kunne få, var $(1,1,1,1)$, som blev kaldt for 'hunden'. Det bedste udfald, man kunne få, var $(1,3,4,6)$, som blev kaldt for 'venus'. Dette spil er bl.a. beskrevet i et brev fra den romerske Kejser Augustus (63 f.kr. til 14 e.kr.) til den senere Kejser Tiberius. De første versioner af terninger, som dem vi kender i dag, har formentlig være bearbejdede astragulusknogler. De ældste eksempler kan dateres helt tilbage til ca. 3500 f.kr. Se J. Hoffmann-Jørgensen, *Proba-*

bility with a view towards Statistics, vol I, Chapman & Hall (1994) for en detaljeret beskrivelse af atragulusknogler og deres brug i spil.

De første tiltag (fra 1500-tallet) indenfor sandsynlighedsteorien var ligeledes forsøg på at beregne 'chancer' for bestemte udfald i forskellige typer af uforudsigelige spil med henblik på at tilrettelægge en mulig 'vinder-strategi'.

10.2 Historisk note om de første nedskrevne tiltag indenfor sandsynlighedsteori

De første skriftlige optegnelser af sandsynlighedsteoretisk karakter, som man kender til, blev udarbejdet af Girolamo Cardano (1501-1576).

Cardano blev uddannet som læge i Padua i Italien, men han havde af forskellige grunde vanskeligt ved at blive optaget i et medicinsk selskab, hvilket var en forudsætning for, at man kunne praktisere medicin i datidens større europæiske byer. Han måtte derfor i en årrække ernære sig som landsbylæge. Omkring 1540 blev han dog endelig optaget i Milanos medicinske selskab, og sidenhen blev han faktisk en meget anerkendt læge. I den mellemliggende periode supplerede han sin sparsomme indkomst fra lægegerningen ved at deltage i talrige af datidens hazard-spil, og han var kendt for at være en notorisk spillefugl. Samtidig var han uden tvivl noget af et geni, og sideløbende med sine mange spil-aktiviteter skrev han således en slags dagbog, hvori han gjorde sig dybe og indsigtsfulde overvejelser omkring de sandsynligheder, der naturligt optrådte i de mange spil, han deltog i. Han holdt sine optegnelser hemmelige for ikke at give hans modspillere indblik i den indsigt, han havde tilegnet sig. Derfor blev hans optegnelser først kendte over 100 år efter hans død, på

et tidspunkt hvor sandsynlighedsteoriens grundlag allerede var blevet udviklet af forskellige andre forfattere (baseret på en brevveksling mellem Pascal og Fermat beskrevet nedenfor).

I sin bog indførte Cardano to grundlæggende antagelser:

(1) Hvis to begivenheder A og B ikke kan indtræffe samtidig, så vil sandsynligheden for, at én af dem indtræffer, være summen af sandsynlighederne for, at hhv. A og B indtræffer (sammenlign med Regel 7c).

(2) Hvis to begivenheder A og B ikke influerer på hinanden, så vil sandsynligheden for, at de begge indtræffer, være produktet af sandsynlighederne for, at hhv. A og B indtræffer (sammenlign med Definition 24).

Den egentlige grundlæggelse af sandsynlighedsteorien tilskriver man normalt en brevveksling fra sommeren 1654 mellem to af datidens store matematikere:

Figur 10.2: Blaise Pascal (1623-1662)

Figur 10.3: Pierre de Fermat (1601-1665)

Det første brev i brevvekslingen var et brev fra Pascal til Fermat, som desværre er bortkommet. Men i det efterfølgende brev fra Fermat til Pascal gør Fermat opmærksom på en fejlslutning i Pacals første brev. Pascal anerkender i det tredje brev sin fejlslutning og giver endvidere løsninger til en række problemstillinger af sandsynlighedsteoretisk karakter. Hen over sommeren 1654 korresponderer de to matematikere heftigt pr. brev og diskuterer sig frem til et matematisk stringent model for grundlæggende sandsynlighedsteori, der nogenlunde svarer til det, vi i dag kalder for lotterimodellen (se Definition 8). I efteråret 1654 ophører brevvekslingen, da Pascal kommer ud for en voldsom hestevognsulykke og efterfølgende flytter til et kloster i nærheden af Paris.

Se J. Hoffmann-Jørgensen, *Probability with a view towards Statistics, vol I*, Chapman & Hall (1994) for nærmere omtale af Pascal og Fermat og deres brevveksling.

Siden da har sandsynlighedsteorien udviklet sig til en avanceret eksakt videnskab, der udvikler sig sammen med og i kraft af den nyeste matematik. Ikke desto mindre er sandsynlighedsteoriens fornemste opgave fortsat at udvikle matematiske modeller, der bedst muligt kan forudse, hvordan forskellige uforudsigelige størrelser (prisen på et værdipapir, udbredelsen af en bestemt type virus, størrelsen på en population etc.) kan forventes at udvikle sig i fremtiden. Finanskriser m.m. illustrerer med voldsom tydelighed, hvor vanskelig en opgave, der kan være tale om. I forlængelse af ovennævnte udgør sandsynlighedsteorien naturligt det matematiske grundlag for statistik.

Før vi overhovedet er kommet ind på en formel beskrivelse af, hvad sandsynligheder er for noget, vil de fleste læsere formentlig have en ret god intuitiv fornemmelse af sandsynligheder, og hvordan man ræsonnerer med dem. Dog skal man være varsom med at stole på sin intuition i forbindelse med sandsynlighedsteoretiske overvejelser.

10.1 Stokastiske eksperimenter og stokastiske variable

Sandsynlighedsregningen giver, som antydet ovenfor, en matematisk beskrivelse af eksperimenter, som kan resultere i flere forskellige udfald, og hvor man ikke på forhånd entydigt kan forudsige, hvilket af de mulige udfald eksperimentet vil resultere i. Man benytter terminologien, at udfaldet af eksperimentet er *stokastisk*, og vi vil kalde den slags eksperimenter for *stokastiske eksperimenter*. Denne betegnelse dækker over en lang række situationer fra hverdagen, f.eks. et møntkast, et præsidentvalg, målingen af koncentrationen af et bestemt stof efter en kemisk reaktion, prisfastsættelsen af et bestemt værdipapir på børsen og mange, mange flere. Sandsynlighedsteorien leverer en bred teoretisk ramme, som kan håndtere samtlige disse situationer matematisk, og netop for at opnå én samlet teori, som kan dække alle disse situationer, bliver teorien i udgangspunktet nødt til at være *abstrakt*. Læseren kan dog med fordel have sit yndlings eksempel på et stokastisk eksperiment i baghovedet undervejs, og teksten er i vid udstrækning forsøgt opbygget og illustreret gennem konkrete eksempler.

Stokastiske eksperimenter beskrives ofte bekvemt vha. *stokastiske variable*, og vi skal i dette og de efterfølgende afsnit studere forskellige typer af og eksempler på stokastiske variable. Lad os nu starte med et simpelt og velkendt eksempel.

(10.3) EKSEMPEL.

Betragt det stokastiske eksperimentet, der består i at kaste en (fair) terning én gang. Lad X betegne udfaldet af eksperimentet, således at

$$X \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Da det er uforudsigeligt, hvilken af de seks mulige værdier, X antager, kaldes X for en stokastisk variabel. Idet X kun antager værdier i en endelig mængde, siges X endvidere at være en *diskret* stokastisk variabel.

Lad j være et vilkårligt tal i $\{1,2,\ldots,6\}$. Hvis man gentager terningekastet et stort antal gange, må man forvente, at *frekvensen*[1] af kast, som giver udfaldet j, er omtrent $1/6$. Terningen er jo forudsat at være fair, så alle 6 mulige udfald må forventes at forekomme nogenlunde lige hyppigt. Jo flere gentagelser af terningekastet, der foretages, jo tættere må frekvensen forventes at komme

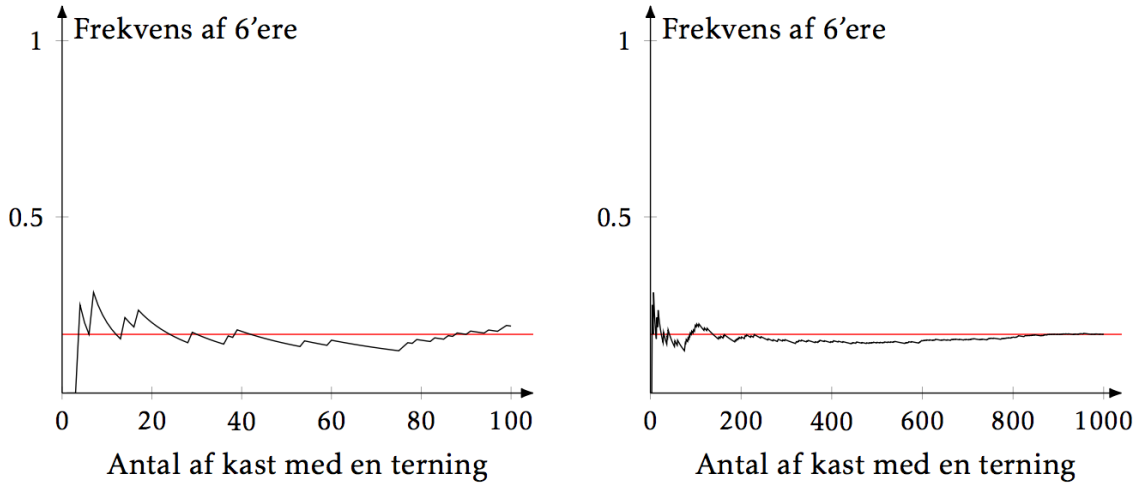
[1] Med frekvensen af kast, som giver f.eks. en sekser, menes antallet af kast, der har givet en sekser, divideret med det samlede antal udførte kast.

på $1/6$. Dette udtrykkes ved at sige, at *sandsynligheden for, at eksperimentet giver udfaldet j, er* $1/6$. Matematisk skrives dette:

$$P(X = j) = 1/6,$$

hvor P henviser til det engelske ord *probability*.

Figur 10.4 viser frekvensen af 6'ere som funktion af antallet af kast ved hhv. 100 og 1000 kast med en fair terning. Som det fremgår, kommer frekvensen af 6'ere meget tæt på $1/6$, når man har kastet terningen et stort antal gange.



Figur 10.4: Graferne ovenfor angiver frekvensen af 6'ere som funktion af antallet af kast i forbindelse med hhv. 100 og 1000 kast med en fair terning. Punkterne svarende til de enkelte kast er forbundet med en ret linje, så man opnår en stykkevis lineær graf. Som det i hvert fald fremgår tydeligt af den sidste af graferne, så kommer frekvenserne efter et stort antal kast til at ligge meget tæt på $1/6 \approx 0.1667$ (svarende til den vandrette røde linje), der netop er sandsynligheden for at slå en 6'er med en fair terning.

Sandsynligheder er additive i den forstand, at f.eks.

$$P(X \in \{1,5\}) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = P(X = 1) + P(X = 5),$$

hvilket er i overensstemmelse med den ovenfor beskrevne *frekvens-fortolkning af sandsynligheder*: Hvis man kaster terningen et stort antal gange, må man forvente, at der er omtrent dobbelt så mange af kastene, der giver en 1'er *eller* en 5'er, i forhold til antallet af kast, der giver en 1'er. Specielt noterer vi, at sandsynlighederne for samtlige mulige udfald summer til 1:

$$P(X \in \{1,2,3,4,5,6\}) = \sum_{j=1}^{6} P(X = j) = \sum_{j=1}^{6} \tfrac{1}{6} = 6(\tfrac{1}{6}) = 1.$$

(10.4) EKSEMPEL.

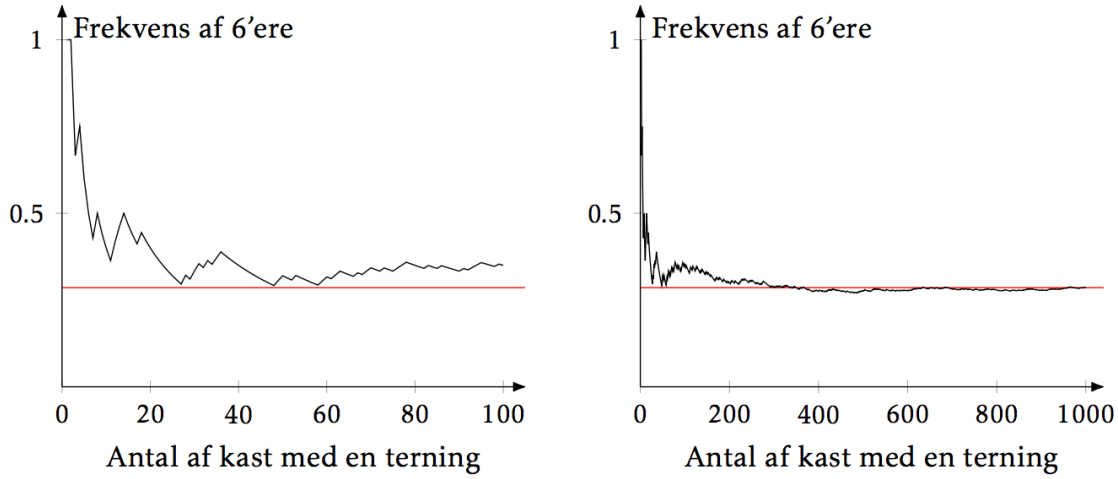
Lad os nu antage, at vi har fået konstrueret en falsk terning, således at sandsynligheden for at slå en 'sekser' er dobbelt så stor som for de øvrige værdier. Lad igen X betegne udfaldet af et slag med terningen. Hvis vi lader p betegne sandsynligheden for at slå en 1'er, gælder der altså, at

$$\begin{aligned} P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = p, \\ \text{og} \quad P(X = 6) = 2p. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Da sandsynlighederne af samtlige udfald stadig skal summe til 1, kan vi slutte, at

$$1 = \sum_{j=1}^{6} P(X = j) = \Big(\sum_{j=1}^{5} p\Big) + 2p = 5p + 2p = 7p, \quad \text{således at } p = \tfrac{1}{7}.$$

Sandsynligheden for at slå en 1'er er altså $\frac{1}{7}$, mens sandsynligheden for at slå en 6'er er $\frac{2}{7}$. Ifølge frekvensfortolkningen af sandsynligheder betyder dette, at hvis man slår et stort antal gange med den falske terning, så vil frekvensen af 6'ere approksimativt være $\frac{2}{7}$, mens frekvensen af f.eks. 3'ere approksimativt vil være $\frac{1}{7}$. Figur 10.5 viser frekvensen af 6'ere som funktion af antallet af kast ved hhv. 100 og 1000 kast med den falske terning.



Figur 10.5: Graferne ovenfor angiver frekvensen af 6'ere som funktion af antallet af kast i forbindelse med hhv. 100 og 1000 kast med den falske terning fra Eksempel 4. Punkterne svarende til de enkelte kast er forbundet med en ret linje, så man opnår en stykkevis lineær graf. Som det i hvert fald fremgår tydeligt af den sidste af graferne, så kommer frekvenserne efter et stort antal kast til at ligge meget tæt på $2/7 \approx 0.2857$ (svarende til den vandrette røde linje), der netop er sandsynligheden for at slå en 6'er med den falske terning.

At give en præcis og konsistent matematisk definition af, hvad en stokastisk variabel egentlig er, kræver faktisk en del avanceret matematik. Til vores brug er det dog alt rigeligt med følgende intuitive beskrivelse, der også opsummerer nogle af de skrivemåder og konventioner, vi allerede naturligt har benyttet i eksemplerne ovenfor.

(10.5) DEFINITION.

(Stokastiske begreber)

(a) *Et* stokastisk eksperiment *er et eksperiment, hvis udfald vides at ligge i en på forhånd beskrevet mængde S, men således at det er uforudsigeligt, præcis hvilken af værdierne i S eksperimentet resulterer i. Mængden S kaldes for udfaldsmængden for eksperimentet.*

(b) *En* stokastisk variabel *er en størrelse, ofte betegnet med X, der angiver udfaldet (eller en størrelse afledt af udfaldet) af et stokastisk eksperiment. Mængden af mulige værdier, som X kan antage, kaldes for udfaldsmængden for X og betegnes med S_X.*

(c) *Hvis X er en stokastisk variabel med udfaldsmængde S_X, så kaldes X en* diskret stokastisk variabel*, hvis S_X kan skrives på formen $S_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ for et passende naturligt tal n, eller hvis S_X kan skrives på formen $S_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.*

(d) *Hvis X er en diskret stokastisk variabel med udfaldsmængde S_X, kan man for hvert x i S_X betragte sandsynligheden for, at X antager netop værdien x. Denne betegnes $P(X = x)$ og kaldes for* punktsandsynligheden *i x. For enhver delmængde A af S_X gælder der da, at*

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x), \tag{10.2}$$

hvor venstresiden betegner sandsynligheden for, at X antager en værdi i A, mens højresiden er summen over punktsandsynlighederne for alle x i A.

Som et specialtilfælde af (10.2) noterer vi, at for en diskret stokastisk variabel X med udfaldsmængde S_X, skal summen af alle punktsandsynlighederne give 1:

$$\sum_{x \in S_X} P(X = x) = P(X \in S_X) = 1. \tag{10.3}$$

Vi ved jo med sikkerhed, at X antager en værdi i S_X, eftersom S_X består af samtlige mulige udfald for X.

(10.6) EKSEMPEL.

Lad os igen betragte den falske terning fra Eksempel 4. Vi ønsker da at beregne sandsynligheden for, at X antager en lige værdi, altså sandsynligheden $P(X \in \{2,4,6\})$. Ved brug af formel (10.2) og formel (10.1) finder vi, at

$$\begin{aligned} P(X \in \{2,4,6\}) &= \sum_{j \in \{2,4,6\}} P(X = j) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) \\ &= \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{2}{7} = \tfrac{4}{7}. \end{aligned}$$

Vi skal herefter formulere en række vigtige regneregler for stokastiske variable. Forinden minder vi om, at to delmængder A og B af den samme mængde S kaldes *disjunkte*, hvis $A \cap B$[2] $= \emptyset$, dvs. hvis A og B ikke har nogen fælles elementer. Mere generelt siger man, at delmængder $A_1, A_2, \ldots, A_n$ af S er (parvis) disjunkte, hvis $A_i \cap A_j = \emptyset$, når $i \neq j$.

(10.7) REGNEREGLER.

(Stokastiske variable) Lad X være en stokastisk variabel med udfaldsmængde S_X, og lad A og B være delmængder af S_X. Da gælder følgende regneregler:

(a) $P(X \in A \cup B$[3]$) = P(X \in A) + P(X \in B) - P(X \in A \cap B)$.

(b) $P(X \in A \cup B) \leq P(X \in A) + P(X \in B)$.

(c) *Hvis A og B er disjunkte, gælder der, at*

$$P(X \in A \cup B) = P(X \in A) + P(X \in B).$$

[2] Fællesmængden af mængderne A og B, dvs. mængden bestående af alle elementer, der både forekommer i A og i B.

[3] Foreningsmængden af mængderne A og B, dvs. mængden bestående af alle elementer der forekommer i (mindst) en af mængderne A og B.

(d) $P(X \notin A$[4]$) = P(X \in S_X \setminus A) = 1 - P(X \in A)$.

(e) Hvis $A_1, A_2 \ldots, A_n$ *er disjunkte delmængder af* S_X*, gælder der, at*

$$P(X \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(X \in A_1) + P(X \in A_2) + \cdots + P(X \in A_n).$$

Vi afslutter dette afsnit med at bemærke, at Regel 7e faktisk kan generaliseres til uendeligt mange disjunkte mængder, dvs. der gælder formlen:

$$P\big(X \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \in A_k)^{5}, \tag{10.4}$$

hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ er en uendelig følge af disjunkte mængder. At det forholder sig sådan forudsætter en mere avanceret fremstilling af sandsynlighedsteorien end den her givne, og vi skal derfor ikke komme nærmere ind på argumentationen for nærværende.

10.2 Lotterimodellen

En grundlæggende model, der kan benyttes til at beskrive en lang række stokastiske eksperimenter er *lotteri-modellen*, der f.eks. kan beskrives på følgende måde:

En urne indeholder N kugler, der er numereret med numrene $1, 2, \ldots, N$. En kugle trækkes tilfældigt fra urnen, og vi lader X betegne den stokastiske variable, der angiver nummeret på den trukne kugle. Udfaldsmængden for X er således $S_X = \{1, 2, \ldots, N\}$, og da kuglen trækkes helt tilfældigt fra urnen, må der for vilkårlige j, k i $\{1, 2, \ldots, N\}$ gælde, at der er samme sandsynlighed for at X giver j, som for at X giver k, eller i symboler:

$$P(X = j) = P(X = k).$$

Sagt på en anden måde så gælder for ethvert j i $\{1, 2, \ldots, N\}$, at

$$P(X = j) = P(X = 1).$$

Sammenholdes dette med formlen (10.3), kan vi slutte, at

$$1 = \sum_{j=1}^{N} P(X = j) = \underbrace{P(X = 1) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 1)}_{N \text{ led}} = N \cdot P(X = 1),$$

og dermed at

$$P(X = j) = P(X = 1) = \frac{1}{N} \qquad \text{for ethvert } j \text{ i } \{1, 2, \ldots, N\}.$$

For enhver delmængde A af $\{1, 2, \ldots, n\}$ følger det så videre fra (10.2), at

$$P(X \in A) = \sum_{j \in A} P(X = j) = \sum_{j \in A} \frac{1}{N} = \underbrace{\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N}}_{\#A \text{ led}} = \frac{\#A}{N},$$

hvor $\#A$ betegner *antallet* af elementer i A.

[4] X er *ikke* et element i mængden A

[5] '$\cup_{k=1}^{n} A_k$' betyder foreningsmængden af mængderne $A_1, \ldots, A_n$, dvs. mængden bestående af alle elementer der forekommer i (mindst) en af mængderne $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

For de fleste mennesker er det naturligvis ret sjældent, at man konkret står i den situation, der beskrives i lotteri-modellen. Styrken ved modellen er, at mange konkrete stokastiske eksperimenter fra 'hverdagen' kan repræsenteres ved (eller overføres til) lotteri-modellen. F.eks. kan et kast med en fair terning repræsenteres ved lotteri-modellen med $N = 6$: At udvælge én ud af seks kugler (med numrene $1, 2, \ldots, 6$) tilfældigt fra en urne, svarer til at kaste en fair terning én gang. Bemærk imidlertid også, at et kast med en falsk terning ikke (umiddelbart) kan repræsenteres ved lotteri-modellen, da denne forudsætter, at kuglerne trækkes helt tilfældigt, dvs. alle kugler har samme sandsynlighed for at blive udtrukket.

(10.8) DEFINITION.

(Lotteri-modellen) Betragt et stokastisk eksperiment med en tilhørende stokastisk variabel X. Antag, at udfaldsmængden S_X består af N forskellige elementer, og at disse N elementer alle har samme sandsynlighed for at blive X's værdi, når eksperimentet udføres.

For enhver delmængde A af S_X gælder der da, at

$$P(X \in A) = \frac{\#A}{N}, \tag{10.5}$$

hvor $\#A$ betegner antallet af elementer i A.

(10.9) EKSEMPEL.

I europæisk roulette er der 37 felter på det roterende hjul: 18 røde, 18 sorte og et grønt (nulfeltet). Af de 18 røde felter har de 10 et ulige nummer og de resterende 8 et lige nummer. For de sorte felter er det omvendt.

Vi ønsker at bestemme sandsynligheden for, at kuglen ved et enkelt spil med rouletten lander på et ulige nummer.

Da alle felter har samme sandsynlighed for at blive endestation for kuglen, kan vi repræsentere det betragtede eksperiment ved lotterimodellen med $N = 37$: Et spil med rouletten svarer til tilfældigt at udvælge en kugle fra en urne med 18 røde kugler, 18 sorte kugler, en grøn kugle, og hvor kuglerne er påført de samme numre som felterne på hjulet.

For at bestemme den beskrevne sandsynlighed skal vi så blot bestemme antallet af felter på hjulet, der har et ulige nummer, hvilket ifølge ovenstående beskrivelse er 10+8=18. Sandsynligheden for at kuglen lander på et ulige felt bliver derfor $\frac{18}{37} \approx 0.4865$.

(10.10) EKSEMPEL.

Betragt eksperimentet, der består i at kaste en fair mønt og en fair terning samtidig, og lad X og Y være de associerede stokastiske variable givet ved:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{hvis mønten viser plat,} \\ 2, & \text{hvis mønten viser krone.} \end{cases}$$

$$Y = \text{antal øjne som terningen viser,}$$

Vi ønsker at bestemme udfaldsmængde og punktsandsynligheder for den stokastiske vektor $Z = (X, Y)$ og den stokastiske variable $W = XY$.

Vi starter med Z, og noterer umiddelbart, at eftersom X kan antage værdierne 1 og 2, mens Y kan antage værdierne $1,2,3,4,5,6$, bliver udfaldsmængden for Z som følger:

$$\begin{aligned} S_Z = \{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\\ &(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6)\}. \end{aligned}$$

Da både mønten og terningen er fair, har alle disse 12 udfald samme sandsynlighed for at blive resultatet af eksperimentet, og vi kan derfor repræsentere eksperimentet ved lotterimodellen med $N = 12$. Specielt følger det, at punktsandsynlighederne for Z er givet ved

$$P(Z = (j,k)) = P(Z \in \{(j,k)\}) = \frac{\#\{(j,k)\}}{12} = \frac{1}{12}$$

for vilkårligt (j,k) i S_Z.

Lad os derefter betragte $W = XY$. Udfaldsmængden for W er mængden af mulige produkter af første koordinat og anden koordinat blandt de 12 par i S_Z. Vi finder således, at

$$S_W = \{1,2,3,4,5,6,8,10,12\}.$$

Med hensyn til punktsandsynlighederne finder vi, at

$$\begin{aligned}
P(W=1) &= P(Z=(1,1)) &&= \tfrac{1}{12},\\
P(W=2) &= P(Z \in \{(1,2),(2,1)\}) = \tfrac{2}{12} &&= \tfrac{1}{6},\\
P(W=3) &= P(Z=(1,3)) &&= \tfrac{1}{12},\\
P(W=4) &= P(Z \in \{(1,4),(2,2)\}) = \tfrac{2}{12} &&= \tfrac{1}{6},\\
P(W=5) &= P(Z=(1,5)) &&= \tfrac{1}{12},\\
P(W=6) &= P(Z \in \{(1,6),(2,3)\}) = \tfrac{2}{12} &&= \tfrac{1}{6},\\
P(W=8) &= P(Z=(2,4)) &&= \tfrac{1}{12},\\
P(W=10) &= P(Z=(2,5)) &&= \tfrac{1}{12},\\
P(W=12) &= P(Z=(2,6)) &&= \tfrac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Læseren opfordres til at kontrollere, at summen af punktsandsynlighederne for W giver 1.

(10.11) EKSEMPEL.

I en population af kaniner er der 900 hanner og 1000 hunner. Det skønnes, at 10% af hannerne bærer genet a, og at 5% af hunnerne bærer genet b. Hvis en han, der bærer genet a, parrer sig med en hun, der bærer genet b, vil afkommet udvikle en bestemt stofskiftesygdom. Ved et eksperiment udvælges tilfældigt en han og en hun, og man ønsker at kende sandsynligheden for, at de udvalgte kaniners afkom vil udvikle den nævnte stofskiftesygdom.

Vi kan tankemæssigt forestille os, at hannerne er nummereret med numrene $1,2,\ldots,900$, og hunnerne med numrene $1,2,\ldots,1000$. Vi er så interesserede i den stokastiske vektor (X,Y), hvor X angiver nummeret på den udvalgte han, og Y angiver nummeret på den udvalgte hun.

Da alle kombinationer af en han og en hun har samme sandsynlighed for at blive udvalgt, kan vi benytte lotteri-modellen, og den søgte sandsynlighed kan derfor bestemmes som $\frac{\#A}{N}$, hvor N er antallet af samtlige mulige kombinationer af (numrene på) en han og en hun, mens $\#A$ er antallet af samtlige kombinationer af (numrene på) en han med genet a og en hun med genet b. For at bestemme disse (og mere komplicerede) antal, er det nyttigt med nogle generelle principper for,

hvordan man optæller forskellige typer af antal. Dette hører under den gren af matematikken, der kaldes for *kombinatorik*, og som er emnet for det næste afsnit. Vi vender tilbage til dette eksempel i Eksempel 14 nedenfor, når vi har udviklet nogle redskaber til at bestemme antallene $\#A$ og N.

10.3 Kombinatorik

Kombinatorik handler i udgangspunktet om at tælle antallet af måder hvorpå diverse konfigurationer af givne objekter kan forekomme. Hvis man f.eks. foretager et kast med to terninger, en rød og en blå, så er der 6 mulige udfald for den røde terning og 6 mulige udfald for den blå terning og dermed i alt $6 \cdot 6 = 36$ mulige udfald for kastet med de to terninger:

$$\begin{aligned}
&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\
&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\
&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6).
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Dette er et simpelt eksempel på anvendelse af det såkaldte multiplikationsprincip:

(10.12) REGNEREGLER.

(Multiplikationsprincippet) Antag at et eksperiment består af to dele, hvor den første del af eksperimentet kan give n forskellige udfald. Antag endvidere, at der for hvert af de n mulige udfald af første del af eksperimentet er m forskellige mulige udfald for den anden del af eksperimentet. Da er der ialt $m \cdot n$ forskellige udfald for det samlede eksperiment.

(10.13) EKSEMPEL.

En urne indeholder 10 kugler, der er nummereret $1, 2, \ldots, 10$. Vi ønsker at bestemme antallet af mulige udfald for eksperimentet, der består i at udvælge to kugler – en efter en – tilfældigt fra urnen. Der er 10 mulige udfald, når man udtrækker den første kugle, og for hver af disse udfald er der 9 mulige udfald, når man trækker den anden kugle. Ialt er der således (ifølge multiplikationsprincippet) $10 \cdot 9 = 90$ mulige udfald, når man udtrækker to kugler. Bemærk, at vi ved optællingen her skelner imellem udfaldet, hvor der først udvælges kuglen med nr. 10 og dernæst kuglen med nr. 9, og udfaldet hvor det er omvendt. Med andre ord tager vi *rækkefølgen* hvori de to kugler udvælges med i betragtning. Ser man bort fra rækkefølgen bliver der kun 45 mulige udfald af eksperimentet.

(10.14) EKSEMPEL.

Lad os vende tilbage til situationen fra Eksempel 11: Vi betragter 900 han-kaniner og 1000 hun-kaniner, hvoraf 10% af hannerne bærer genet a, mens 5% af hunnerne bærer genet b. Hvis generne a og b krydses vil afkommet udvikle en stofskiftesygdom. Vi ønsker at bestemme sandsynligheden for, at afkommet af en tilfældigt udvalgt han og en tilfældigt udvalgt hun vil udvikle

den pågældende stofskiftesygdom. Som vi så i Eksempel 11, kan denne sandsynlighed via lotteri-modellen bestemmes som $\frac{\#A}{N}$, hvor N er antallet af samtlige mulige kombinationer af en han og en hun, mens $\#A$ er antallet af samtlige kombinationer af en han med genet a og en hun med genet b. Da der er 900 hanner og 1000 hunner, er der ifølge multiplikationsprincippet $900 \cdot 1000 = 900.000$ mulige kombinationer af en han og en hun. Af de 900 hanner bærer 90 (nemlig 10%), på genet a, mens 50 ud af de 1000 hunner (nemlig 5%) bærer på genet b. Ifølge multiplikationsprincippet er der derfor $90 \cdot 50 = 4500$ mulige kombinationer af en han med gen a og en hun med gen b. Sandsynligheden for at udvælge et par, hvis afkom vil udvikle den pågældende stofskiftesygdom, bliver derfor

$$\frac{\#A}{N} = \frac{4500}{900.000} = 0.005.$$

(10.15) EKSEMPEL.

Vi ønsker at bestemme antallet af forskellige måder, hvorpå et (sædvanligt) sæt spillekort med 52 kort kan blandes. Med andre ord ønsker vi at bestemme, hvor mange forskellige rækkefølger 52 kort kan lægges i. Der er 52 muligheder for at vælge det nederste kort. Når det nederste kort er lagt, er der 51 muligheder for at vælge det næstnederste kort. Ifølge multiplikationsprincippet er der således $52 \cdot 51$ muligheder for at lægge de to nederste kort. Når de to nederste kort er lagt, er der 50 muligheder for at vælge det 3. nederste kort og dermed ifølge multiplikationsprincippet $52 \cdot 51 \cdot 50$ muligheder for at lægge de 3 nederste kort. Ved at gentage dette argument ialt 52 gange følger det, at der er ialt $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ mulige rækkefølger, som de 52 kort kan lægges i. Dette antal kaldes for 52 *fakultet* og betegnes med $52!$. De fleste lommeregnere har en 'fakultetstast', der vil kunne afsløre, at $52! \approx 8.065817517 \times 10^{67}$ (hvilket er et temmelig stort tal!). Sandsynligheden for, at et tilfældigt blandet sæt kort ligger i en specifik på forhånd angivet rækkefølge er dermed ifølge lotteri-modellen forsvindende lille, nemlig $\frac{1}{52!}$, som de færreste lommeregnere vil kunne skelne fra tallet 0.

(10.16) DEFINITION.

(Fakultetsfunktionen) For ethvert naturligt tal n defineres tallet $n!$, ved formlen:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Per konvention sætter man endvidere $0! = 1$.

Tallet $n!$ kaldes for n fakultet*, og det angiver, hvor mange forskellige rækkefølger n forskellige objekter kan placeres i.*

Vi bemærker, at fakultetsfunktionen er entydigt bestemt udfra regnereglerne:

$$0! = 1, \quad \text{og} \quad n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{for alle naturlige tal } n. \tag{10.7}$$

(10.17) EKSEMPEL.

Lad os igen betragte et sædvanlig sæt spillekort med 52 kort, og lad os bestemme sandsynligheden for, at de 4 øverste kort i et tilfældigt blandet sæt kort består af kortene spar es, spar konge, spar dronning og spar knægt (ligegyldigt i hvilken rækkefølge de 4 kort forekommer). Som vi så i Eksempel 15 er der ialt $N = 52!$ forskellige rækkefølger, som de 52 kort kan lægges i. Ifølge lotteri-modellen mangler vi derefter at bestemme $\#A$, som her er antallet af samtlige mulige rækkefølger af

de 52 kort, hvor de 4 nævnte kort er placeret som de øverste. Lad os først bemærke, at de 4 nævnte kort kan ligge i $4! = 24$ forskellige rækkefølger som de øverste 4 kort. Hver af disse 24 muligheder kan kombineres med $48!$ forskellige rækkefølger af de resterende 48 kort. Ifølge multiplikationsprincippet er der derfor $4! \cdot 48!$ forskellige muligheder for at blande kortene, således at de 4 nævnte kort ligger øverst, og den søgte sandsynlighed bliver derfor ifølge lotterimodellen:

$$\frac{4! \cdot 48!}{52!} = \frac{4! \cdot 48!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48!} = \frac{4!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = 0.000003694.$$

Bemærk, at sandsynligheden er den samme, hvis de betragtede 4 kort erstattes af 4 andre kort (ligegyldigt hvilke).

(10.18) EKSEMPEL.

(Binomialkoefficienter) Lad os forestille os, at vi betragter 20 kugler, hvoraf 5 er røde, mens de resterende 15 er sorte. Vi forestiller os videre, at vi anbringer kuglerne på række i et til formålet afpasset glasrør. Vi ønsker så at bestemme, hvor mange forskellige 'mønstre' af røde og sorte kugler, man kan danne. Med andre ord: På hvor mange forskellige måder kan man udvælge fem pladser (til de røde kugler) ud af de ialt 20 pladser i røret? Lad os betegne dette antal med A. Bemærk, at vi ved bestemmelsen af A ikke bekymrer os om den indbyrdes rækkefølge af hverken de røde eller de sorte kugler, da vi ikke kan kende forskel på f.eks. de røde alligevel. For et bestemme A vil vi imidlertid rent tankemæssigt forestille os, at kuglerne er numererede med numrene $1, 2, \ldots, 20$; f.eks. således at de røde kugler har numrene $1, 2, 3, 4, 5$. Som vi har set ovenfor, er der så $20!$ forskellige rækkefølger, de 20 numererede kugler kan placeres i. Dette antal af rækkefølger kan vi imidlertid også bestemme på en anden måde, idet enhver rækkefølge af de 20 kugler også kan udvælges på følgende måde: Først udvælges 5 pladser blandt de 20 i røret til de røde kugler. Dette kan netop gøres på A forskellige måder. Når de 5 pladser er valgt, er der herefter $5!$ forskellige rækkefølger, som de 5 røde kulger kan lægges i på de 5 udvalgte pladser. Endvidere kan de sorte kugler placeres i $15!$ forskellige rækkefølger på de resterende 15 pladser i røret. Ifølge multiplikationsprincippet er der således ialt $A \cdot 5! \cdot 15!$ forskellige rækkefølger, som de 20 kugler kan placeres i. På den måde opnår vi identiteten:

$$20! = A \cdot 5! \cdot 15!,$$

og vi har dermed bestemt antallet A som

$$A = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15504.$$

Dette tal kaldes en *binomialkoefficient*, og det betegnes med $\binom{20}{5}$.

(10.19) DEFINITION.

(Binomialkoefficienter) Lad n være et naturligt tal. For ethvert tal j i $\{0, 1, \ldots, n\}$ defineres binomialkoefficienten $\binom{n}{j}$ *da ved formlen:*

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}. \tag{10.8}$$

Pr. konvention sætter man endvidere $\binom{0}{0} = 1$.

Tallet $\binom{n}{j}$ angiver antallet af måder, hvorpå man kan udvælge j pladser ud af n mulige pladser.

Bemærk, at hvis man har udvalgt j pladser ud af n mulige, så har man jo faktisk også udvalgt $n-j$ pladser ud af n mulige (nemlig de $n-j$ pladser, som ikke var blandt de j udvalgte). Det følger derfor, at der gælder formlen:

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}. \tag{10.9}$$

En anden vigtig formel for binomialkoefficienterne er følgende:

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1}, \tag{10.10}$$

der gælder for alle naturlige tal n, der er større end eller lig med 2, og alle j i mængden $\{1,2,\ldots,n-1\}$.

Formel (10.10) er grundlaget for *Pascals trekant*:

(10.20) DEFINITION.

(Pascals Trekant) I Pascals trekant er binomialkoefficienterne opstillet i et trekantsformet skema på følgende måde:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

I Pascals trekant er det j'te element i den n'te række netop binomialkoefficienten $\binom{n}{j}$. Nederst i Definition 20 er disse binomialkoefficienter udregnet som tal. Pointen med trekanten er så, at det j'te element i den n'te række kan bestemmes som summen af de to tal ovenover i den foregående række (når $n \geq 2$, og $j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$). F.eks. gælder der, at $6 = \binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3+3$. At

det generelt forholder sig sådan, er netop hvad formlen (10.10) fortæller. Bemærk også symmetrien omkring 'midten' af de enkelte rækker i Pascals trekant, der præcis skyldes formlen (10.9). Ovenfor har vi kun angivet de første 5 rækker i Pascals trekant, men den fortsætter naturligvis i det uendelige.

Binomialkoefficienterne er bl.a. nyttige, hvis man skal bestemme potenser af en sum af to tal.

(10.21) SÆTNING.

(Binomialformlen) Lad N være et naturligt tal. For vilkårlige reelle tal x og y gælder der da, at

$$(x+y)^N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} x^j y^{N-j}.$$

(10.22) EKSEMPEL.

(Multinomialkoefficienter) En kunstner har fået til opgave at udsmykke en teatersal med 100 siddepladser. I den forbindelse planlægger kunstneren at male sæderne i teatret, således at 30 af pladserne bliver gule, 25 af pladserne bliver blå, 25 af pladserne bliver røde, og de sidste 20 pladser bliver hvide. Kunstneren ønsker nu at bestemme antallet af forskellige mønstre, det er muligt at farvelægge sæderne i, under hensyntagen til de angivne antal.

Enhver farvelægning af de 100 sæder i teatret (med de anførte kunstneriske restriktioner) kan udføres på følgende måde: Først udvælges de 30 pladser, der skal farves gule; dette kan gøres på $\binom{100}{30}$ forskellige måder. Når de 30 gule sæder er udvalgt, består resten af opgaven i at farvelægge de resterende 70 pladser i farverne blå, rød og hvid med de førnævnte restriktioner. Igen kan vi her starte med at udvælge de 25 ud af de 70 pladser, der skal farves blå, hvilket kan gøres på $\binom{70}{25}$ forskellige måder. Når også de 25 blå pladser er valgt, mangler kunstneren blot at udvælge 25 pladser blandt de tilbageværende 45 pladser til de røde pladser, idet de sidste 20 pladser da nødvendigvis skal farves hvide. Dette kan gøres på $\binom{45}{25}$ forskellige måder. Det følger nu ved anvendelse af multiplikationsprincippet, at kunstnerens farvelægning af de 100 sæder kan udføres på ialt

$$\binom{100}{30} \cdot \binom{70}{25} \cdot \binom{45}{25} = \frac{100!}{30!70!} \frac{70!}{25!45!} \frac{45!}{25!20!} = \frac{100!}{30!25!25!20!} = 6.010735331 \times 10^{56}$$

forskellige måder. Kunstneren har således temmelig mange muligheder for at udfolde sine kunstneriske visioner. Tallet $\frac{100!}{30!25!25!20!}$ kaldes for en multinomialkoefficient, og det betegnes med $\binom{100}{30\,25\,25\,20}$.

Bemærk, at man også kan tænke på $\binom{100}{30\,25\,25\,20}$ som antallet af måder, hvorpå man kan farvelægge cellerne i et kvadratisk skema med 10 rækker og 10 søjler, således at 30 af cellerne bliver gule, 25 af cellerne bliver blå, 25 af cellerne bliver røde, og 20 af cellerne bliver hvide. Her kan man betragte enhver af disse farvelægninger som en specifik kode, man kan tildele en klient, hvis man f.eks. bedriver bankvirksomhed eller lignende. At $\binom{100}{30\,25\,25\,20}$ er et meget stort tal illustrerer så blot potentialet i at benytte 2-dimensionale farvelagte billeder til kryptologi.

(10.23) DEFINITION.

(Multinomialkoefficienter) Lad n og k være naturlige tal, og lad $r_1, \ldots, r_k$ være tal i $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, således at

$$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k.$$

Da defineres multinomialkoefficienten $\binom{n}{r_1\, r_2 \cdots r_k}$ *ved formlen:*

$$\binom{n}{r_1\, r_2 \cdots r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}.$$

Tallet $\binom{n}{r_1\, r_2 \cdots r_k}$ *angiver antallet af måder hvorpå, man kan opdele en mængde med n elementer i k (disjunkte) mængder* $M_1, M_2, \ldots, M_k$, *således at*

$$\#M_1 = r_1, \#M_2 = r_2, \ldots, \#M_k = r_k,$$

dvs. M_1 *indeholder* r_1 *elementer,* M_2 *indeholder* r_2 *elementer, osv.*

I Eksempel 22 betragtede vi multinomialkoefficienten $\binom{n}{r_1\, r_2 \cdots r_k}$, i tilfældet hvor $n = 100$, $k = 4$, $r_1 = 30$, $r_2 = r_3 = 25$, og $r_4 = 20$.

10.4 Uafhængighed

Lad X og Y være to stokastiske variable, der er afledt af det samme stokastiske eksperiment. Intuitivt siger man da, at X og Y er *uafhængige*, hvis enhver information, man måtte have om Y, ikke influerer på vurderingen af sandsynligheder vedrørende X (og vice versa). Hvis man f.eks. foretager et kast med to terninger, en rød og en blå, og X og Y betegner udfaldet af hhv. den røde og den blå terning, så vil enhver viden om værdien af Y, ikke få os til at revurdere punktsandsynlighederne for X. Lad os mere konkret betragte f.eks. sandsynligheden $P(X \in \{1,2\} \text{ og } Y \in \{1,3,6\})$ for at den røde terning giver enten 1 eller 2, *samtidig med* at den blå terning giver enten 1, 3 eller 6. Der er 36 mulige udfald af eksperimentet (jvf. skemaet (10.6)), og hvis vi antager, at terningerne er fair, har samtlige 36 udfald samme sandsynlighed. Vi kan derfor benytte lotterimodellen til at slutte, at

$$P(X \in \{1,2\} \text{ og } Y \in \{1,3,6\}) = \frac{\#A}{36},$$

hvor $\#A$ er antallet af mulige udfald, hvor den røde terning viser 1 eller 2, samtidig med at den blå terning viser 1, 3, eller 5. Ifølge multiplikationsprincippet er der $2 \cdot 3 = 6$ af den slags udfald (sammenlign evt. med skemaet (10.6)), så vi slutter, at

$$P(X \in \{1,2\} \text{ og } Y \in \{1,3,6\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Her vil vi dog specielt hæfte os ved, at

$$\frac{6}{36} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(X \in \{1,2\}) \cdot P(Y \in \{1,3,5\}),$$

og vi er således nået frem til formlen:

$$P(X \in \{1,2\} \text{ og } Y \in \{1,3,6\}) = P(X \in \{1,2\}) \cdot P(Y \in \{1,3,5\}).$$

Denne multiplikative struktur viser sig netop at være den matematiske måde at beskrive uafhængighed på:

(10.24) DEFINITION.

(Uafhængighed) Lad X og Y være to stokastiske variable, der er afledt af det samme stokastiske eksperiment, og med udfaldsmængder hhv. S_X *og* S_Y. *Vi siger da, at X og Y er* uafhængige, *hvis der for vilkårlige delmængder A og B af hhv.* S_X *og* S_Y *gælder, at*

$$P(X \in A, \text{ og } Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B). \tag{10.11}$$

Det er helt afgørende for sandsynlighedsteorien og dens mangfoldige anvendelser i den 'virkelige verden', at den grundlæggende intuitive ide om uafhængighed har den meget enkle matematiske formulering (10.11). At det forholder sig sådan illustreres nærmere i det følgende eksempel.

(10.25) EKSEMPEL.

Vi betragter en population af 1000 kaniner, hvoraf de 10% (altså 100 kaniner) er albinoer. Man har endvidere registreret kaninernes alder og inddelt dem i tre aldersgrupper:

(g) Gruppe 1: Kaniner der er under 2 år gamle.

(g) Gruppe 2: Kaniner der er mellem 2 og 5 år gamle.

(g) Gruppe 3: Kaniner der er mere end 5 år gamle.

Det formodes, at aldersfordelingen (i de tre grupper) er *uafhængig* af, om man betragter albino-kaniner eller ej. For at beskrive denne formodning matematisk betragter vi eksperimentet, der består i at udvælge en af de 1000 kaniner tilfældigt. Vi betragter i tilknytning hertil de stokastiske variable X og Y defineret ved:

$$X = \text{nummeret på aldersgruppen for den udvalgte kanin,}$$

og

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{hvis den udvalgte kanin er albino,} \\ 0, & \text{hvis den udvalgte kanin ikke er albino.} \end{cases}$$

Den nævnte formodning svarer da netop til, at X og Y er uafhængige (i den intuitive forstand). For at se, at dette matematisk munder ud i formlen (10.11) indfører vi antallene:

$$\begin{aligned} A_j &= \text{antallet af albino-kaniner i Gruppe } j, && (j = 1,2,3), \\ B_j &= \text{antallet af ikke-albino-kaniner i Gruppe } j, && (j = 1,2,3). \end{aligned}$$

De 1000 kaniner er så antalsmæssigt fordelt efter følgende skema:

Farve	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Ialt
Albino	A_1	A_2	A_3	100
Ikke-albino	B_1	B_2	B_3	900

Med dette skema for øje kan formodningen om, at aldersfordelingen er uafhængig af, om kaninen er albino eller ej, nu beskrives meget eksplicit: Fordelingen af kaniner i de tre aldersgrupper (=søjler) skal være (nogenlunde) den samme, uafhængigt af om man betragter albino-kaninerne (første række i skemaet) eller ikke-albino-kaninerne (anden række i skemaet). Bemærk, at dette naturligvis ikke betyder, at der skal gælde identiteterne: $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$ og $A_3 = B_3$, eftersom der jo samlet er langt flere ikke-albinoer end albinoer. Betydningen er derimod, at *brøkdelen* af albino-kaninerne, der ligger i aldersgruppe 1, skal være (omtrent) den samme som brøkdelen af ikke-albino-kaniner, der ligger i aldersgruppe 1, og tilsvarende med aldersgruppe 2 og 3. Med den indførte notation svarer dette til ligningerne:

$$\frac{A_1}{100} = \frac{B_1}{900}, \quad \frac{A_2}{100} = \frac{B_2}{900}, \quad \text{og} \quad \frac{A_3}{100} = \frac{B_3}{900}. \tag{10.12}$$

I det følgende tager vi udgangspunkt i, at disse formler er gyldige (altså i formodningen om at aldersfordelingen er uafhængig af, om man betragter albinoer eller ikke-albinoer), og vi vil så beskrive, hvordan dette leder til formlen (10.11) i den matematiske definition af uafhængighed. For at udtrykke (10.12) i termer af X og Y bemærker vi ved brug af lotterimodellen, at hvis man udvælger en kanin tilfældigt fra den betragtede population, så gælder der, at

$$P(X = j, \text{ og } Y = 1) = \frac{A_j}{1000}, \qquad (j = 1,2,3),$$

og

$$P(X = j, \text{ og } Y = 0) = \frac{B_j}{1000}, \qquad (j = 1,2,3).$$

For hvert j i $\{1,2,3\}$ finder vi videre, at

$$\begin{aligned} P(X = j) &= \frac{A_j + B_j}{1000} = \frac{A_j}{1000} + \frac{B_j}{1000} = \frac{A_j}{100} \cdot \frac{100}{1000} + \frac{B_j}{900} \cdot \frac{900}{1000} \\ &= \frac{A_j}{100}\left(\frac{100}{1000} + \frac{900}{1000}\right) = \frac{A_j}{100} = \frac{B_j}{900}, \end{aligned}$$

hvor vi i fjerde og sjette identitet netop benytter (10.12). Det fremgår altså, at sandsynligheden for at vælge en kanin fra gruppe j er den samme samlet som for albinoer eller ikke-albinoer separat. Fra ovenstående kan vi endelig slutte, at

$$P(X = j, \text{ og } Y = 1) = \frac{A_j}{1000} = \frac{A_j}{100} \cdot \frac{100}{1000} = P(X = j) \cdot P(Y = 1)$$

for $j = 1,2,3$, og tilsvarende, at

$$P(X = j, \text{ og } Y = 0) = \frac{B_j}{1000} = \frac{B_j}{900} \cdot \frac{900}{1000} = P(X = j) \cdot P(Y = 0)$$

for $j = 1,2,3$. Disse formler er naturligvis kun specialtilfælde af (10.11) (svarende til, at de der betragtede mængder A og B, begge kun indeholder ét element), men som Sætning 26 nedenfor viser, så er dette nok til at sikre, at (10.11) gælder generelt. Omvendt kan man på lignende vis overbevise sig om, at (10.11) medfører gyldigheden af (10.12), der igen repræsenterer den intuitive opfattelse af uafhængighed.

For diskrete stokastiske variable kan betingelsen (10.11) formuleres enklere vha. punktsandsynligheder.

(10.26) SÆTNING.

Lad X og Y være to diskrete *stokastiske variable, der er afledt af det samme stokastiske eksperiment, og med udfaldsmængder hhv. S_X og S_Y.*

Da er X og Y uafhængige, hvis og kun hvis der for alle x i S_X og y i S_Y gælder, at

$$P(X = x, \text{ og } Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y). \tag{10.13}$$

Kapitel 11

Binomial–, Multinomial– og Poissonfordelingen

11.1 Binomialfordelingen

Vi starter dette afsnit med et instruktivt eksempel.

(11.1) EKSEMPEL.

Lad os betragte det stokastiske eksperiment, der består i at kaste en mønt 20 gange. Lad os sige, at vi noterer et 0 for hvert kast, der giver plat, og et 1 for hvert kast, der giver krone. Udfaldet af eksperimentet er så en serie af 20 tal, der alle er enten 0 eller 1. Lad X_j betegne udfaldet af det j'te kast (således at $X_j \in \{0,1\}$). Lad videre p betegne sandsynligheden for, at et enkelt kast med mønten giver krone. Da der er tale om kast med den samme mønt, gælder der så, at

$$P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = \cdots = P(X_{20} = 1) = p,$$

og at

$$P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = \cdots = P(X_{20} = 0) = 1 - p.$$

Det er klart, at de stokastiske variable $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ må være uafhængige, og for enhver serie af tal $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ af 0'er og 1'ere gælder der derfor, at

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \text{ og } X_2 = x_2, \text{ og } \ldots, \text{ og } X_{20} = x_{20}) &= \prod_{j=1}^{20} P(X_j = x_j) \\ &= p^K \cdot (1-p)^{20-K} \end{aligned} \tag{11.1}$$

hvor K angiver antallet af 1'ere blandt $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$. Med andre ord er K den stokastiske variable, der angiver *antallet* af kast, der giver krone.

Lad os nu sige, at vi er interesserede i at bestemme sandsynligheden $P(K = 11)$ for at netop 11 af kastene giver krone. Bemærk, at for enhver serie $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ af 0'er og 1'ere med netop 11 1'ere, er der ifølge (11.1) sandsynligheden $p^{11}(1-p)^9$ for at kastene resulterer i netop denne serie. Den samlede sandsynlighed for at få en serie af kast med netop 11 gange krone bliver derfor ifølge definitionen af stokastiske begreber $A \cdot p^{11}(1-p)^9$, hvor A betegner antallet af mulige serier af kast med netop 11 gange krone. Antallet A kan også fortolkes som antallet af måder, hvorpå man kan vælge 11 pladser i rækken af de 20 kast (nemlig de kast, der skal resultere i krone), og dette antal er jo præcis binomialkoefficienten $\binom{20}{11}$. Vi kan således konkludere, at

$$P(K = 11) = \binom{20}{11} p^{11}(1-p)^9.$$

På samme måde følger det for ethvert j i $\{0,1,2,\ldots,20\}$, at

$$P(K=j)=\binom{20}{j}p^j(1-p)^{20-j}.$$

Man udtrykker dette ved at sige, at K er binomialfordelt med antalsparameter 20 og sandsynlighedsparameter p.

(11.2) DEFINITION.

(Binomialfordelingen) Betragt et stokastisk eksperiment, hvor man er interesseret i, hvorvidt en bestemt begivenhed indtræffer eller ej. Antag, at sandsynligheden for at begivenheden indtræffer ved en enkelt udførelse af eksperimentet er lig med $p \in [0,1]$. Antag videre, at der foretages n uafhængige gentagelser af eksperimentet, og lad K være den stokastiske variable, der angiver antallet af gange, den søgte begivenhed indtræffer, i løbet af de n gentagelser. Da har K udfaldsmængden $S_K=\{0,1,2,\ldots,n\}$, og for hvert j i $\{0,1,2,\ldots,n\}$ gælder der, at

$$P(K=j)=\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.$$

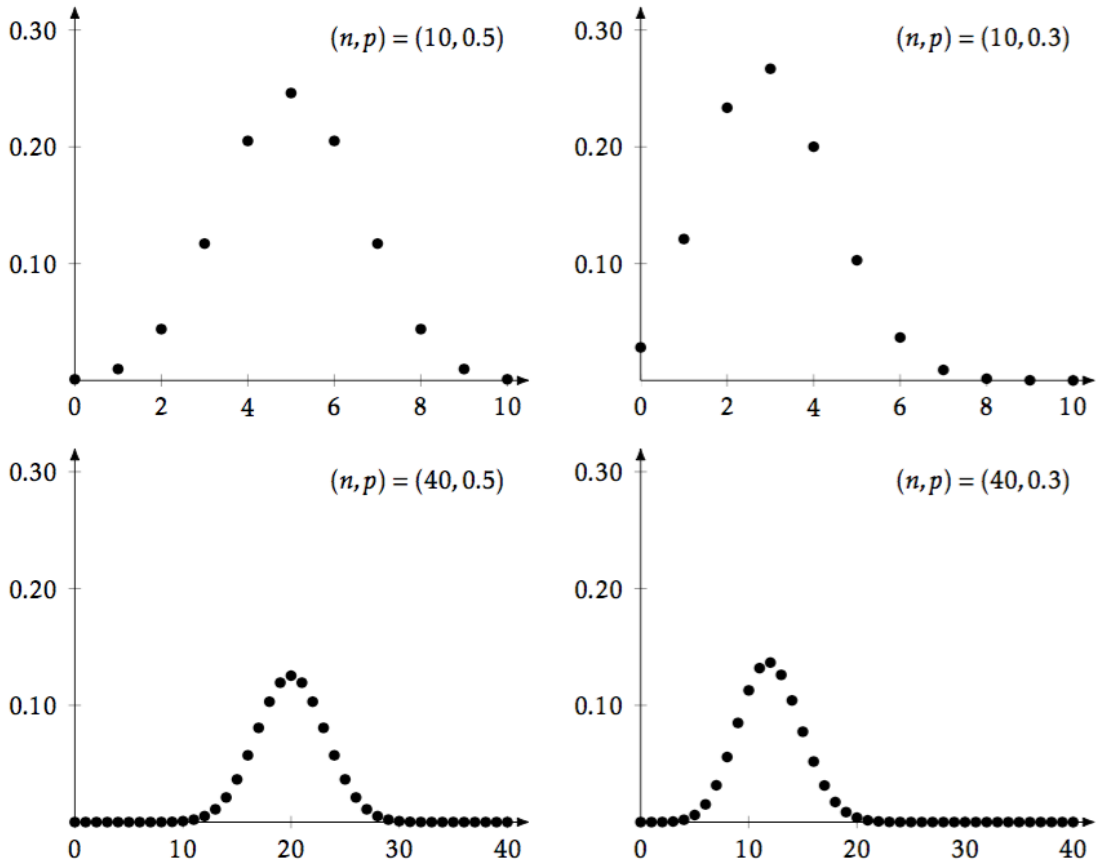
Man siger i denne situation, at K er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p.

(11.3) EKSEMPEL.

(Hypotesetest i binomialfordelingen) Et medicinalfirma har udviklet en vaccine imod zica-virus. Firmaet påstår, at personer, der er blevet vaccineret med deres præparat, har væsentlig lavere risiko for at udvikle sygdommen, hvis de udsættes for zica-virus, end personer der ikke er vaccinerede. For at teste effekten af vaccinen udføres et klinisk forsøg, hvor 100 mus vaccineres med firmaets vaccine og derefter udsættes for zica-virus. Endvidere udsættes 100 andre mus, der ikke er blevet vaccineret, også for zica-virus. Af de 100 vaccinerede mus udviklede 45 sygdommen, mens 54 af de ikke-vaccinerede mus udviklede sygdommen. Spørgsmålet er nu, om man på den baggrund kan konkludere noget kvalitativt om, hvorvidt vaccinen overhovedet har en effekt.

Der er to sandsynlighedsteoretiske modeller i spil: Den første model lægger op til, at vaccinen har en effekt. I denne model forestiller vi os, at alle 100 vaccinerede mus har den samme sandsynlighed p_v for at udvikle sygdommen, mens de 100 ikke-vaccinerede mus har en (formentlig større) sandsynlighed p_u for at udvikle sygdommen. Vi lader Y_v og Y_u betegne antallet af mus, der udvikler sygdommen, blandt hhv. de vaccinerede og de ikke-vaccinerede mus. Idet vi rimeligvis kan antage, at den enkelte mus' risiko for at udvikle sygdommen er uafhængig af de øvrige mus, følger det så, at Y_v er binomialfordelt med antalsparameter 100 og sandsynlighedsparameter p_v, mens Y_u er binomialfordelt med antalsparameter 100 og sandsynlighedsparameter p_u. Uafhængighedsantagelserne ovenfor indebærer yderligere, at de stokastiske variable Y_v og Y_u er uafhængige. Sandsynligheden for, at eksperimentet giver det observerede resultat, bliver derfor i denne model:

$$\begin{aligned}P(Y_v=45 \text{ og } Y_u=54) &= P(Y_v=45)\cdot P(Y_u=54)\\ &= \binom{100}{45}p_v^{45}(1-p_v)^{100-45}\binom{100}{54}p_u^{54}(1-p_u)^{100-54}\\ &= \binom{100}{45}\binom{100}{54}p_v^{45}(1-p_v)^{55}p_u^{54}(1-p_u)^{46}.\end{aligned} \tag{11.2}$$



Figur 11.1: Plots af punktsandsynlighederne for forskellige binomialfordelinger. I de to øverste plots er antalsparameteren 10 og sandsynlighedsparametrene hhv. 0.5 og 0.3. I de to nederste plots er antalsparameteren 40 og sandsynlighedsparametrene igen hhv. 0.5 og 0.3.

Den anden model lægger op til, at vaccinen ingen effekt har, altså at vaccinerede og ikke-vaccinerede mus har samme risiko for at udvikle sygdommen. I forhold til overvejelserne ovenfor udtrykker dette præcis, at $p_u = p_v$. Hvis vi lader p betegne den fælles værdi af p_u og p_v, bliver Y_u og Y_v i denne model således begge binomialfordelt med antalsparameter 100 og sandsynlighedsparameter p, og sandsynligheden for at eksperimentet giver det observerede resultat bliver derfor:

$$\begin{aligned} P(Y_v = 45 \text{ og } Y_u = 54) &= \binom{100}{45} p^{45}(1-p)^{100-45} \binom{100}{54} p^{54}(1-p)^{100-54} \\ &= \binom{100}{45}\binom{100}{54} p^{45+54}(1-p)^{55+46} \\ &= \binom{100}{45}\binom{100}{54} p^{99}(1-p)^{101}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

For at vurdere, om det er rimeligt at antage, at $p_u = p_v$, altså at vaccinen ingen effekt har, vil man naturligt sammenligne de to sandsynligheder (11.2) og (11.3). Helt overordnet vil man sige, at det er rimeligt at antage, at $p_u = p_v$, hvis de to sandsynligheder (11.2) og (11.3) er nogenlunde lige store. I første omgang støder man her ind i det problem, at vi i sagens natur ikke kender de 'sande værdier' af p_u, p_v, eller den evt. fælles værdi p, og vi kan derfor ikke umiddelbart bestemme (11.2) og (11.3) som tal. Som et grundlæggende statistisk princip *vælger* man så p_u og p_v til at være de sandsynligheder i $[0,1]$, der passer bedst med de observerede data, dvs. de værdier af p_u og p_v,

der maksimerer udtrykket (11.2). Ved brug af differentialregning er det ikke svært at indse at disse 'optimale' værdier af p_u og p_v er:

$$\hat{p}_u = \tfrac{54}{100} = 0.54, \quad \text{og} \quad \hat{p}_v = \tfrac{45}{100} = 0.45^{1}.$$

På samme måde vil man vælge at betragte det p i $[0,1]$, der maksimerer (11.3), og som tilsvarende viser sig være $\hat{p} = \frac{99}{200} = 0.495$. Om det er rimeligt at antage, at $p_u = p_v$ vil man så i sidste ende bedømme, ved at udregne kvotienten:

$$Q = \frac{\binom{100}{45}\binom{100}{54}(0.495)^{101}(1-0.495)^{99}}{\binom{100}{45}\binom{100}{54}(0.45)^{45}(1-0.45)^{55}(0.54)^{54}(1-0.54)^{46}}$$

$$= \frac{(0.495)^{101}(0.505)^{99}}{(0.45)^{45}(0.55)^{55}(0.54)^{54}(0.46)^{46}},$$

og vurdere hvor tæt på 1 den er. Jo tættere på 1, Q er, jo mere rimeligt er det at konkludere, at vaccinen ingen effekt har. Ved udregning finder man, at $Q \approx 0.427$, og spørgsmålet er så, om dette tal er langt nok fra 1 til, at man vil turde afvise hypotesen om, at $p_u = p_v$. Ifølge statistiske grundprincipper besvarer man dette spørgsmål ved, under antagelse af at hypotesen er korrekt, at bestemme sandsynligheden for at eksperimentet giver et resultat, der passer dårligere med hypotesen, end det man rent faktisk har observeret. Med andre ord vil man i den betragtede situation bestemme sandsynligheden $P(Q \leq 0.427)$, under antagelsen om at $p_u = p_v$. Som en tommelfingerregel vil man afvise hypotesen, hvis $P(Q \leq 0.427) \leq 0.05$, mens man vil betragte hypotesen som bekræftet, hvis $P(Q \leq 0.427)$ er væsentlig større end 0.05. Hvis $P(Q \leq 0.427)$ kun er lidt større end 0.05, vil man normalt ikke turde afvise hypotesen, og det kræver en vis statistisk erfaring, før man kan udtale sig mere skråsikkert.

Vi mangler altså nu blot at bestemme tallet $P(Q \leq 0.427)$ under antagelse af, at $p_u = p_v$, hvilket umiddelbart er ganske vanskeligt. Bemærk imidlertid, at

$$P(Q \leq 0.427) = P(-2\ln(Q) \geq -2\ln(0.427)),$$

og her vil man i de fleste indledende kurser i statistik lære, at størrelsen $-2\ln(Q)$ er approksimativt χ^2-fordelt med 1 frihedsgrad. Vi skal i et af de følgende kapitler indføre og studere 'χ^2-fordelingen', men på dette sted kan vi nøjes med at tage ad notam, at man ved tabel-opslag eller lignende i χ^2-fordelingen kan konstatere, at $P(-2\ln(Q) \geq -2\ln(0.427)) = P(-2\ln(Q) \geq 1.702) \approx 0.192$.

Hvis hypotesen om, at $p_u = p_v$, er korrekt, og man foretager en lang række af kliniske forsøg, som det udførte, så vil man altså i næsten hvert femte forsøg få et resultat, der passer *ligeså godt eller dårligere* med hypotesen, end det man observerede i det faktisk udførte forsøg. På den baggrund vil man normalt ikke turde afvise hypotesen, og konklusionen bliver så, at man på baggrund af det udførte forsøg ikke kan konstatere nogen signifikant effekt af vaccinen.

11.2 Multinomialfordelingen

I det foregående afsnit så vi, hvordan binomialfordelingen kan benyttes til at beskrive antallet af gange et bestemt udfald forekommer i en serie af uafhængige gentagelser af et bestemt eksperiment.

[1] De anførte optimale værdier af p_u og p_v er 'heldigvis' også de naturlige snusfornuftige gæt på, hvad de sande værdier af p_u og p_v er, hvilket igen er i overensstemmelse med frekvensfortolkningen af sandsynligheder (jvf. eksemplet om den fair terning).

Er man interesseret i at holde styr på antallet af gange, alle de forskellige mulige udfald af eksperimentet er forekommet i løbet af den gennemførte serie, har man brug for den mere raffinerede multinomialfordeling.

(11.4) EKSEMPEL.

(Test af om en terning er fair) Lad os forestille os, at vi er blevet udstyret med en terning, og vi ønsker at vurdere, om den er fair. Til det formål kaster vi terningen 30 gange, og vi registrerer så antallet af gange, vi opnår hhv. 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Disse antal betragter vi som stokastiske variable, og betegner dem med hhv. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 og A_6. Hvis terningen er fair, må vi forvente, at $A_1, A_2, \ldots, A_6$ alle er stort set lige store, dvs. at de alle ligger omkring værdien 5. Hvis det viser sig, at $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = (6,4,2,6,8,4)$, vil mange formentlig være ret skeptiske overfor terningens fairness. På den anden side er det jo slet ikke *umuligt*, at 30 kast med en fair terning kan resultere i netop antallene $6,4,2,6,8,4$ og for at kvantisere vores evt. skepsis, ønsker vi derfor at bestemme sandsynligheden for, at præcis dette sker.

Vi ønsker altså at bestemme sandsynligheden for, at 30 kast med en terning resulterer i vektoren $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = (6,4,2,6,8,4)$. Vi lader $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{30}$ betegne udfaldene af de enkelte kast. Da vi ikke ved, om terningen er fair, indfører vi endvidere sandsynlighederne for, at et enkelt kast med terningen giver hhv. $1, 2, \ldots, 6$:

$$p_1 = P(X_1 = 1), \quad p_2 = P(X_1 = 2), \ldots, \quad p_6 = P(X_1 = 6). \tag{11.4}$$

Disse kan i udgangspunktet være vilkårlige tal i $[0,1]$; dog naturligvis således at $p_1 + p_2 + \cdots + p_6 = 1$. En fair terning svarer så til tilfældet, hvor $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$.

Lad os herefter for givne tal $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ fra $\{1,2,3,4,5,6\}$ bestemme sandsynligheden for, at de 30 kast med terningen netop resulterer i serien $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{30}$. Vi betegner denne sandsylighed med $P(X_1 = x_1, \ldots, X_{30} = x_{30})$, og da der er tale om uafhængige kast med terningen, følger det, at

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_{30} = x_{30}) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdots P(X_{30} = x_{30}).$$

Her er hver af de 30 faktorer på højresiden et af tallene $p_1, p_2, \ldots, p_6$, idet hvert X_j jo blot er en kopi af X_1 og derfor har de samme punktsandsynligheder (11.4), som X_1. Produktet på højresiden kan derfor udregnes som

$$p_1^{A_1} p_2^{A_2} p_3^{A_3} p_4^{A_4} p_5^{A_5} p_6^{A_6},$$

eftersom A_j jo netop angiver *antallet* af tal i serien $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$, som er lig med j. Specielt fremgår det, at enhver serie $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$, der resulterer i, at $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = (6,4,2,6,8,4)$, vil have sandsynligheden $p_1^6 p_2^4 p_3^2 p_4^6 p_5^8 p_6^4$ for at blive resultatet af kastene. For at bestemme sandsynligheden $P\big((A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = (6,4,2,6,8,4)\big)$ skal vi derefter ifølge definitionen af stokastiske begreber lægge denne sandsynlighed til sig selv lige så mange gange, som der er forskellige serier af kast $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$, der resulterer i, at $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = (6,4,2,6,8,4)$. Dette antal svarer til antallet af måder, hvorpå man ud af de 30 kast med terningen kan udvælge 6 pladser til de kast, der skal give 1, 4 pladser til de kast, der skal give 2, 2 pladser til de kast, der skal give 3, osv. Med andre ord er det søgte antal lig med multinomialkoefficienten $\binom{30}{642684}$. Vi når således frem til, at den søgte sandsynlighed er:

$$P\big((A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = (6,4,2,6,8,4)\big) = \binom{30}{642684} p_1^6 p_2^4 p_3^2 p_4^6 p_5^8 p_6^4. \tag{11.5}$$

Hvis terningen er fair, har vi, at $p_1 = p_2 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$, og i denne situation når vi således frem

til sandsynligheden

$$P\big((A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)=(6,4,2,6,8,4)\big)=\binom{30}{642684}\left(\frac{1}{6}\right)^{6+4+2+6+8+4}$$
$$=\frac{30!}{6!4!2!6!8!4!}\left(\frac{1}{6}\right)^{30}\approx 0.00005,$$

hvilket naturligvis er en meget lille sandsynlighed, som måske umiddelbart vil bekræfte vores skepsis overfor terningens fairness. Her skal man dog holde sig for øje, at der er rigtig mange mulige udfald for vektoren $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$, hvorfor det er forventeligt, at sandsynligheden for et enkelt specifikt udfald (som $(6,4,2,6,8,4)$) er meget lille. Vi kan f.eks. sammenligne ovenstående sandsynlighed med den forventeligt største punktsandsynlighed for $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$, hvis terningen er fair, nemlig

$$P\big((A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)=(5,5,5,5,5,5)\big)=\binom{30}{555555}\left(\frac{1}{6}\right)^{30}\approx 0.004.$$

Hvis terningen er fair, er sandsynligheden for at eksperimentet giver det observerede resultat således 8-9 gange mindre end den forventeligt største sandsynlighed. Dette afkræfter næppe en evt. skepsis til, at terningen kan være fair, men det er på den anden side uklart, hvor skråsikkert man på denne baggrund tør udelukke, at terningen kan være fair.

Som det forhåbentlig fremgår af ovenstående, så er der i situationer som den her betragtede behov for mere sofistikerede metoder til at sige noget kvalitativt omkring rimeligheden af den betragtede hypotese. Konkret vil man som i Eksempel 3 tage udgangspunkt i kvotienten

$$Q=\frac{\binom{30}{642684}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{30}}{\binom{30}{642684}\cdot\hat{p}_1^6\cdot\hat{p}_2^4\cdot\hat{p}_3^2\cdot\hat{p}_4^6\cdot\hat{p}_5^8\cdot\hat{p}_6^4}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{30}}{\hat{p}_1^6\cdot\hat{p}_2^4\cdot\hat{p}_3^2\cdot\hat{p}_4^6\cdot\hat{p}_5^8\cdot\hat{p}_6^4},\tag{11.6}$$

og vurdere hvor tæt på 1 den er. Her er $\hat{p}_1,\hat{p}_2,\ldots,\hat{p}_6$ som i Eksempel 3 valgt som de værdier af $p_1,p_2,\ldots,p_6$ i $[0,1]$, der maksimerer (11.5) under betingelsen: $p_1+p_2+\cdots+p_6=1$. Det viser sig (ikke overraskende), at $\hat{p}_j$ netop er frekvensen af kast blandt de 30, der gav j, dvs.

$$\hat{p}_1=\frac{6}{30},\quad \hat{p}_2=\frac{4}{30},\quad \hat{p}_3=\frac{2}{30},\quad \hat{p}_4=\frac{6}{30},\quad \hat{p}_5=\frac{8}{30},\quad \hat{p}_6=\frac{4}{30}.$$

Ved udregning finder man så, at

$$Q\approx 0.0973,$$

og man vil så i sidste ende vurdere rimeligheden af hypotesen om, at terningen er fair, ved at bestemme sandsynligheden for – under antagelse af at terningen *er* fair – at 30 kast med terningen giver et resultat, der passer dårligere med hypotesen end det observerede. Med andre ord vil man bestemme *testsandsynligheden*:

$$P(Q\le 0.0973)=P\big(-2\ln(Q)\ge -2\ln(0.973)\big).$$

Her kan det vises, at den stokastiske variable $-2\ln(Q)$ er approksimativt χ^2-fordelt med 5 frihedsgrader[2], og ved tabelopslag eller lignende kan man derfor konstatere, at

$$P(-2\ln(Q)\ge -2\ln(0.973))\approx 0.4588.$$

Hvis man et stort antal gange gennemfører eksperimentet, der består i at kaste en fair terning 30 gange og notere antallene $A_1,A_2,\ldots,A_6$, da vil man altså i knap halvdelen af eksperimenterne få

[2] At der er netop 5 frihedgrader skyldes, at der er 5 frie variable i nævneren i (11.6) (f.eks. $\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_5$), mens der ikke er nogen frie variable i tælleren (værdien er fastlagt til $\frac{1}{6}$).

et udfald, der passer lige så godt eller dårligere end resultatet $(6,4,2,6,8,4)$ med hypotesen om, at terningen er fair. På den baggrund vil man absolut ikke afvise, at terningen kan være fair; man vil tværtimod sige at eksperimentet i nogen grad bekræfter, at terningen er fair[3].

Vi afslutter dette eksempel med at notere, at (11.5) udtrykker, at vektoren $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$ er multinomialfordelt med antalsparameter 30 og sandsynlighedsparametre p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 (se nedenfor).

(11.5) DEFINITION.

(Multinomialfordelingen) Betragt et stokastisk eksperiment med k forskellige mulige udfald $u_1,u_2,\ldots,u_k$, og lad X være den stokastiske variable, der angiver udfaldet af eksperimentet. Betragt for hvert j i $\{1,\ldots,k\}$ punktsandsynligheden:

$$p_j = P(X = u_j) \in [0,1].$$

Antag videre, at der foretages n uafhængige gentagelser af eksperimentet, og lad $A_1,A_2,\ldots,A_k$ være de stokastiske variable, der angiver antallet af gange eksperimentet resulterer i udfaldene hhv. $u_1,u_2,\ldots,u_k$ i løbet af de n gentagelser.

Da har vektoren $A = (A_1,A_2,\ldots,A_k)$ udfaldsmængden

$$S_A = \big\{(a_1,a_2,\ldots,a_k) : a_1,a_2,\ldots,a_k \in \{0,1,\ldots,n\},\ og\ a_1+a_2+\cdots+a_k = n\big\}.$$

For hvert $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ fra S_A gælder der endvidere, at

$$P\big((A_1,A_2,\ldots,A_k) = (a_1,a_2,\ldots,a_k)\big) = \binom{n}{a_1\,a_2\cdots a_k} p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}, \tag{11.7}$$

hvor $\binom{n}{a_1\,a_2\cdots a_k}$ er multinomialkoefficienten.

Man siger i denne situation, at $(A_1,A_2,\ldots,A_k)$ er multinomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparametre $p_1,p_2,\ldots,p_k$.

Bemærk, at tilfældet $k = 2$ essentielt svarer til binomialfordelingen. Hvis (A_1,A_2) er multinomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparametre $p, 1-p$, da er A_1 binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p. Endvidere er A_2 fuldstændig bestemt af A_1, eftersom $A_2 = n - A_1$.

(11.6) EKSEMPEL.

Fordelingen af den danske befolkning efter de 4 grundlæggende blodtyper A, B, AB og O er som anført i følgende skema:

Blodtype	A	B	AB	O
Procentdel af danske befolkning	44	11	4	41

Hvis man udvælger en person tilfældigt fra den danske befolkning, er der således (ifølge lotterimodellen) sandsynligheder 0.44, 0.11, 0.04 og 0.41 for at personen har blodtype hhv. A, B, AB og O.

Ved et klinisk forsøg vil man udvælge 100 danskere tilfældigt, og bl.a. registrere deres blodtype. På grund af stikprøvens lille størrelse i forhold til den samlede befolkning, kan vi betragte forsøget,

[3] Selvom tallet $Q = 0.0973$ umiddelbart kan synes at være meget langt fra 1, skal man altså heller ikke på dette sted drage forhastede konklusioner. Det viser sig nemlig (som beskrevet i teksten), at der er relativt stor sandsynlighed for, at Q ved eksperimenter som det betragtede, vil give en værdi som er endnu mindre, selv når terningen faktisk *er* fair.

som om man 100 (uafhængige) gange gentager eksperimentet, der består i at udvælge én person tilfældigt i den danske befolkning og registrere personens blodtype. Hvis vi lader A_1, A_2, A_3, A_4 betegne antallet af personer blandt de 100 udvalgte, der har blodtype hhv. A, B, AB og O, så følger det dermed, at vektoren (A_1, A_2, A_3, A_4) er multinomialfordelt med antalsparameter $n = 100$, og sandsynlighedsparametre $p_1 = 0.44$, $p_2 = 0.11$, $p_3 = 0.04$ og $p = 0.41$ (jvf. Definition 5). For vilkårlige antal a_1, a_2, a_3, a_4 mellem 0 og 100, således at $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 100$, gælder der følgelig, at

$$P\big((A_1, A_2, A_3, A_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4)\big) = \binom{100}{a_1\, a_2\, a_3\, a_4}(0.44)^{a_1}(0.11)^{a_2}(0.04)^{a_3}(0.41)^{a_4}.$$

F.eks. kan vi bestemme sandsynligheden for at den udvalgte stikprøves sammensætning præcis rammer fordelingen i hele befolkningen efter de 4 blodtyper:

$$\begin{aligned} P\big((A_1, A_2, A_3, A_4) = (44, 11, 4, 41)\big) &= \binom{100}{44\,11\,4\,41}(0.44)^{44}(0.11)^{11}(0.04)^{4}(0.41)^{41} \\ &\approx 0.0022. \end{aligned}$$

Man skal således være meget heldig, hvis stikprøven præcis skal ramme den eksakte fordeling i den danske befolkning, hvilket naturligvis hænger sammen med, at udfaldsmængden for vektoren (A_1, A_2, A_3, A_4) er meget, meget stor. Ved at summere over relevante punktsandsynligheder kan man bestemme sandsynligheder for, at stikprøvens fordeling efter blodtype i passende forstand ligger tæt på den eksakte fordeling i hele befolkningen.

11.3 Poissonfordelingen

I det foregående har vi i konkrete eksempler udelukkende betragtet diskrete stokastiske variable med endelig udfaldsmængde $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, hvor $n \in \mathbb{N}$. Vi skal i dette afsnit give et eksempel på en diskret stokastisk variabel, der har den uendelige udfaldsmængde $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Vi tager udgangspunkt i potensrækkeudviklingen for eksponentialfunktionen, der for ethvert reelt tal λ viser, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ er konvergent med sum e^{λ}. Med andre ord gælder der, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 1.$$

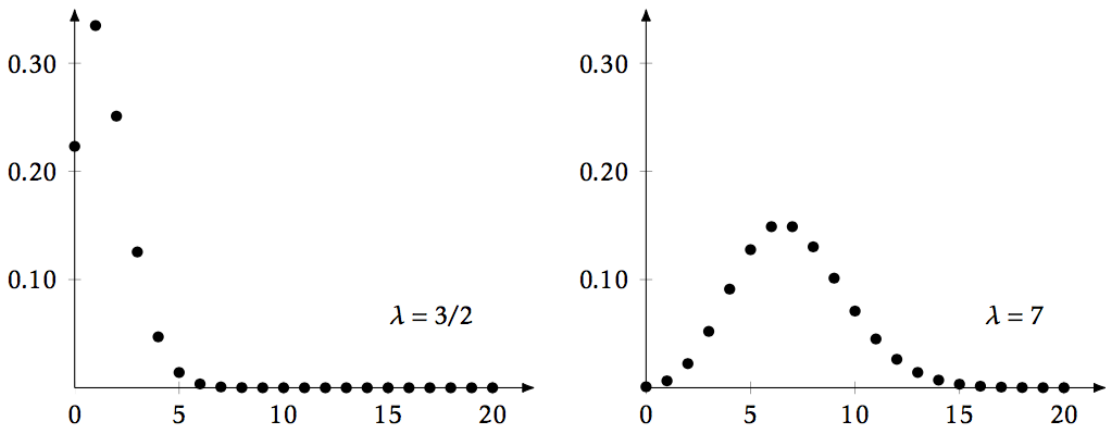
Hvis $\lambda > 0$, kan tallene $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, derfor betragtes som punktsandsynlighederne for en stokastisk variabel med udfaldsmængde $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

(11.7) DEFINITION.

(Poissonfordelingen) Lad λ være et givet positivt reelt tal. En diskret stokastisk variabel X med udfaldsmængde $S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ siges da at være Poissonfordelt *med parameter λ, hvis der for ethvert n i $\{0, 1, 2, \ldots\}$ gælder, at*

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Udfra introduktionen af Poissonfordelingen ovenfor kan den måske virke som et kunstigt eksempel på en stokastisk variabel baseret på eksponentialfunktionens rækkeudvikling. Det viser sig imidlertid, at Poissonfordelte stokastiske variable er meget velegnede til at beskrive antallet af gange en bestemt begivenhed indtræffer indenfor et nærmere beskrevet tidsrum – for eksempel:



Figur 11.2: Plot af punktsandsynlighederne for Poisson-fordelingerne med parametre hhv. $\frac{3}{2}$ og 7.

(a) antallet af taxaer der passerer Langelandsgade nr. 108 mandag formiddag mellem kl. 10 og kl. 11.

(b) antallet af telefonopkald til Yousee's servicetelefon fredag aften mellem kl. 21 og kl. 23.

(c) antal trafikulykker pr. dag i et givet område.

(d) antal fødsler pr. dag i et givet område

Et anderledes eksempel på en Poisson-fordelt stokastisk variabel er:

resume antal bakterier af en bestemt type i en drikkevandsprøve.

At kunne foretage realistiske forudsigelser om antal af ovenstående type er oplagt af væsentlig betydning i forbindelse med dimensionering af personale og materiel; f.eks. antallet af taxachauffører, der skal være på arbejde på et givet tidspunkt, antallet af åbne telefonlinier på Yousee's servicetelefon, antallet af tilgængelige ambulancer i Region Syddanmark, osv. osv. Grunden til, at Poisson-fordelingen kan benyttes til at beskrive antal som de ovenfor anførte, er, at punktsandsynlighederne for en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p ligger tæt på punktsandsynlighederne for en Poissonfordelt stokastisk variabel med parameter λ, såfremt n er meget stor, og $n \cdot p \approx \lambda$. Dette er formuleret præcist i sætningen nedenfor (se også Figur 11.3).

(11.8) SÆTNING.

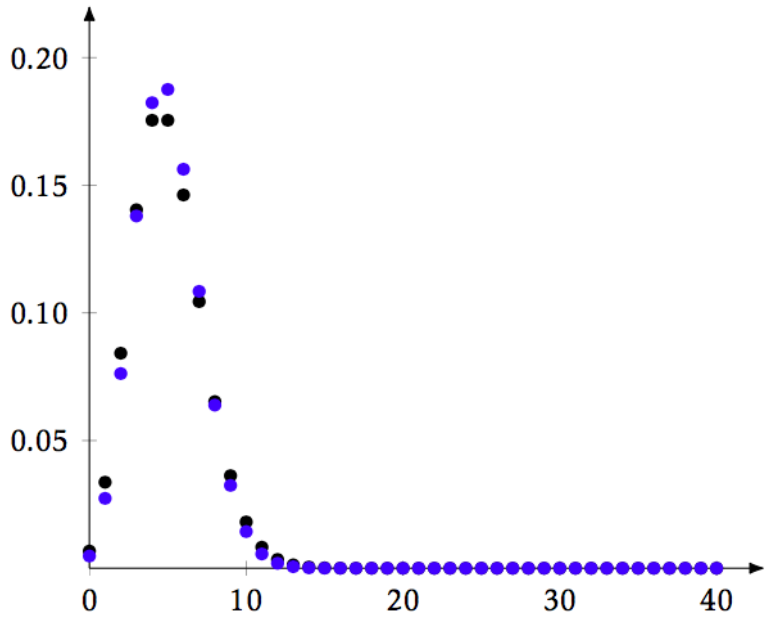
(Poissons Grænsesætning) Betragt for hvert n i $\mathbb{N}$ en binomialfordelt stokastisk variabel X_n med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter $p_n \in]0,1]$. Betragt yderligere en stokastisk variabel X, der er Poissonfordelt med parameter $\lambda \in]0,\infty[$.

Hvis $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$, da gælder der for ethvert k i $\mathbb{N}$, at

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

eller helt udskrevet:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{11.8}$$



Figur 11.3: Til illustration af Poissons Grænsesætning er her plottet punktsandsynligheder for Poisson-fordelingen med parameter 5 (de sorte prikker) og binomialfordelingen med antalsparameter 40 og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{8}$ (de blå prikker). Bemærk, at $40 \cdot \frac{1}{8} = 5$. For værdier på førsteaksen større end 13 er punktsandsynlighederne så tæt på hinanden, at de sorte prikker bliver overskrevet af de blå!

Det følgende eksempel illustrerer ved brug af Sætning 8, hvorfor Poisson-fordelingen er yderst velegnet til at beskrive antal som de ovenfor anførte.

(11.9) EKSEMPEL.

I forbindelse med et fysisk eksperiment er en Geiger-tæller opsat til at måle en bestemt type af radioaktivitet. Vi lader X betegne den stokastiske variable, der angiver, hvor mange radioaktive partikler Geiger-tælleren registrerer i løbet af den første time af eksperimentet, og vi ønsker så at bestemme punktsandsynlighederne for X. Erfaringsmæssigt (fra mange udførelser af eksperimentet) ved man, at der i gennemsnit registreres 27.5 radioaktive partikler i løbet af eksperimentets første time.

For at bestemme punktsandsynlighederne for X kan vi tage udgangspunkt i en anden stokastisk variabel X_1, der må forventes at approksimere X ret godt, og hvis punktsandsynligheder vi umiddelbart kan angive. Lad nemlig X_1 betegne antallet af *minutter* blandt de første 60 minutter i eksperimentet, indenfor hvilke Geiger-tælleren registrerer (mindst) en partikel. Eftersom der forventeligt registreres 27.5 radioaktive partikler i løbet af de første 60 minutter, er det rimeligt at sætte sandsynligheden for, at tælleren registrerer (mindst) en partikel i løbet af et bestemt minut i den første time, til at være $p_1 = 27.5/60 \approx 0.458$ (i overensstemmelse med frekvensfortolkningen af sandsynligheder). Dermed bliver X_1 binomialfordelt med antalsparameter 60 og sandsynlighedsparameter $p_1 = 27.5/60$.

Imidlertid er X_1 kun en approksimation af X, da der ved bestemmelsen af X_1 ikke tages højde for, at der kan forekomme flere registreringer af radioaktive partikler indenfor det samme minut. En bedre approksimation til X er derfor den stokastiske variable X_2, der angiver antallet af sekunder blandt de første 3600 sekunder i eksperimentet, indenfor hvilke Geiger-tælleren registrerer (mindst) en partikel. Sandsynligheden for at registrere en partikel i løbet af et bestemt sekund kan

med stor rimelighed sættes til at være $p_2 = 27.5/3600 \approx 0.00764$, og det følger derfor, at X_2 er binomialfordelt med antalsparameter 3600 og sandsynlighedsparameter $p_2 = 27.5/3600$.

Strengt taget kan Geiger-tælleren godt registrere flere partikler indenfor det samme sekund, og en endnu bedre approksimation af X opnås derfor ved at optælle antallet X_3 af hundrede-dele af sekunder blandt eksperimentets første 360000, indenfor hvilke der registreres (mindst) en partikel. Denne approksimation X_3 bliver så binomialfordelt med antalsparameter 360000 og sandsynlighedsparameter $27.5/360000 \approx 0.0000764$.

Realistisk set er der kun teoretisk forskel på X_3 og X, men i princippet kan man forstætte overvejelserne og definere en hel følge $X_1, X_2, X_3, \ldots$ af stokastiske variable, hvor X_ℓ er binomialfordelt med antalsparameter n_ℓ og sandsynlighedsparameter $p_\ell = 27.5/n_\ell$, og hvor $n_\ell \to \infty$ for $\ell \to \infty$. Det er så klart fra set-up'et, at der må gælde, at $X = \lim_{\ell\to\infty} X_\ell$, og dermed at $P(X = k) = \lim_{\ell\to\infty} P(X_\ell = k)$ for ethvert k. Eftersom konstruktionen af X_ℓ'erne specielt sikrer, at $n_\ell \cdot p_\ell = 27.5$ for alle ℓ, følger det nu umiddelbart ved brug af Sætning 8, at

$$P(X = k) = \lim_{\ell\to\infty} P(X_\ell = k) = \lim_{\ell\to\infty} \binom{n_\ell}{k} p_\ell^k (1 - p_\ell)^{n_\ell - k} = e^{-27.5} \frac{(27.5)^k}{k!}.$$

Med andre ord er X altså Poisson-fordelt med parameter 27.5 (jvf. Definition 7).

Selvom det måske kun er fra et teoretisk synspunkt, at man vil skelne i mellem X og variablen X_3 beskrevet ovenfor, er der imidlertid også fra et praktisk synspunkt stor fordel ved at gå til grænsen og identificere Poisson-fordelingen fremfor den approksimerende binomialfordeling. Således er det beregningsmæssigt væsentligt nemmere at bestemme tallet $P(X = k) = e^{-27.5} \frac{(27.5)^k}{k!}$ fremfor tallet $P(X_3 = k) = \binom{360000}{k} (\frac{27.5}{360000})^k (1 - \frac{27.5}{360000})^{360000-k}$, der er besværligt blot at opskrive!

Kapitel 12

Middelværdi, varians og kovarians – diskrete stokastiske variable

12.1 Middelværdi for diskrete stokastiske variable

Betragt igen eksperimentet, som består i at kaste en fair terning én gang, og lad X betegne udfaldet af terningekastet, således at

$$X \in \{1,2,3,4,5,6\}, \quad \text{og} \quad P(X=j) = \tfrac{1}{6}, \quad j \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Vi definerer så *middelværdien* $\mathrm{E}(X)$ af X, som gennemsnittet af de mulige værdier X antager:

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \tfrac{21}{6} = 3\tfrac{1}{2}.$$

Tallet $\mathrm{E}(X)$ kaldes også for den forventede værdi (engelsk: expected value, heraf det gængse symbol E for middelværdien) af X. At vi benytter gennemsnittet af X's værdier, er et udtryk for, at X antager alle sine værdier med lige stor sandsynlighed. Hvis terningen ikke er fair, således at nogle værdier for X er mere sandsynlige end andre, så vil man i stedet benytte et vægtet gennemsnit af X's værdier. Hvis f.eks. sandsynligheden for at slå en 'sekser' er dobbelt så stor som for de øvrige værdier, så har vi set (jvf. eksemplet om den falske terning), at

$$P(X=6) = \tfrac{2}{7}, \quad \text{og} \quad P(X=j) = \tfrac{1}{7}, \qquad (j=1,2,\ldots,5),$$

og man sætter derfor

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{7}(1+2+3+4+5) + \tfrac{2}{7}(6) = \tfrac{27}{7} = 3\tfrac{6}{7}.$$

Formelt har vi altså udregnet $\mathrm{E}(X)$ som det vægtede gennemsnit:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{6} j \cdot P(X=j).$$

(12.1) DEFINITION.

(Middelværdi, endelig udfaldsmængde) Lad X være en diskret stokastisk variabel med udfaldsmængde $S_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq$ [1] $\mathbb{R}$. *Så defineres* middelværdien $\mu = \mathrm{E}(X)$ *af X ved:*

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot P(X=x_j).$$

[1] 'Indeholdt i'. $A \subseteq B$ betyder at A en mængde der er indeholdt i B, dvs. ethvert element i A er også element i B.

I forbindelse med stokastiske eksperimenter er det ikke ualmindeligt, at man er interesseret i en bestemt stokastisk variabel X, men af den ene eller anden grund observerer man ikke X selv men derimod en transformation af X, dvs. en stokastisk variabel på formen $Y = f(X)$, hvor f er en reel funktion defineret på udfaldsmængden for X. Man har i den forbindelse brug for at kunne udregne punktsandsynligheder og middelværdi af den transformerede variable Y.

(12.2) SÆTNING.

(Middelværdi af transformeret stokastisk variabel) Lad X være en diskret stokastisk variabel med udfaldsmængde $S_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Betragt videre en funktion $f\colon \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{R}$ og den transformerede stokastiske variable $Y = f(X)$, og lad $S_Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ være udfaldsmængden for Y.

(a) Punktsandsynlighederne for Y er givet ved

$$P(Y = y_k) = \sum_{j \in A_k} P(X = x_j), \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

hvor

$$A_k = \big\{ j \in \{1, 2, \ldots, n\} : f(x_j) = y_k \big\}.$$

(b) Middelværdien af Y udregnes som:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(f(X)) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) P(X = x_j).$$

Bemærk, at vi i Sætning 2 ikke forudsætter, at X har værdier i $\mathbb{R}$; X kan f.eks. fint have vektorværdier. Men da f har værdier i $\mathbb{R}$, har den transformerede variable $Y = f(X)$ naturligvis også reelle værdier, hvorfor det giver mening at udregne $\mathrm{E}(Y)$.

(12.3) REGNEREGLER.

(Middelværdi) Lad X og Y være diskrete stokastiske variable med udfaldsmængder hhv. $S_X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ og $S_Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \mathbb{R}$, og lad a være en givet reel konstant. Da gælder følgende regneregler:

(a) $\mathrm{E}(aX) = a\mathrm{E}(X)$.

(b) $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.

(c) Hvis X og Y er uafhængige, gælder der, at $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

(d) $\mathrm{E}(a) = a$.

Lad os herefter som et vigtigt eksempel udregne middelværdien for en binomialfordelt stokastisk variabel.

(12.4) SÆTNING.

(Middelværdi for binomialfordelingen) Lad X være en stokastisk variabel, der er binomialfordelt med antalparameter $n \in \mathbb{N}$ og sandsynlighedsparameter $p \in [0,1]$. Da gælder der, at

$$\mathrm{E}(X) = np.$$

For en diskret stokastisk variabel X med uendelig udfaldsmængde $S_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$, vil man i analogi med Definition 1 naturligt definere $\mathrm{E}(X)$ som den uendelige række $\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j)$. Her kan man imidlertid godt risikere, at rækken $\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j)$ ikke er konvergent, og for at kunne definere $\mathrm{E}(X)$ er man derfor nødt til at forudsætte, at denne række er konvergent. Med andre ord findes der diskrete stokastiske variable (med uendelig udfaldsmængde), der ikke har middelværdi. Normalt vil man endda forudsætte, at rækken $\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j)$ er absolut konvergent, dvs. at $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(X = x_j) < \infty$. Dette sikrer nemlig, at $\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j)$ ikke ændrer sig, hvis man omordner leddene.

(12.5) DEFINITION.

(Middelværdi, uendelig udfaldsmængde) Lad X være en diskret stokastisk variabel med udfaldsmængde $S_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$.

Hvis $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(X = x_j) < \infty$, så defineres middelværdien $\mathrm{E}(X)$ *af X som den uendelige sum:*

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j) = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} x_j P(X = x_j).$$

Lad os som et vigtigt eksempel bestemme middelvædien for Poisson-fordelingen.

(12.6) SÆTNING.

(Middelværdi for Poisson-fordelingen) Lad X være en stokastisk variabel, der er Poisson-fordelt med parameter $\lambda > 0$. Da har X middelværdi, som er givet ved

$$\mathrm{E}(X) = \lambda.$$

Parameteren λ angiver altså faktisk middelværdien for X.

(12.7) BEMÆRKNING.

Regneregler 3 gælder uændret for diskrete stokastiske variable med uendelig udfaldsmængde, men naturligvis under forudsætning af at de indgående middelværdier er veldefinerede, dvs. at de tilsvarende uendelige rækker i Definition 5 er konvergente.

12.1.1 Fortolkning af middelværdien: Store Tals Lov

Som afslutning på dette afsnit vil vi kort beskrive endnu et aspekt af sammenhængen mellem middelværdier og gennemsnit. Vi har i afsnittet 'Stokastiske eksperimenter og stokastiske variable' omtalt frekvensfortolkningen af sandsynligheder: Hvis en stokastisk variabel X beskriver udfaldet af et stokastisk eksperiment, og A er en delmængde af udfaldsmængden for X, da vil $P(X \in A)$ approksimativt kunne bestemmes som frekvensen af eksperimenter, der resulterer i et udfald fra A, hvis man foretager et stort antal uafhængige gentagelser af det pågældende eksperiment. Noget tilsvarende gør sig gældende for middelværdier, idet middelværdien $\mathrm{E}(X)$ af en reel stokastisk variabel X tilsvarende kan approksimeres med *gennemsnittet* af udfaldene i et stort antal uafhængige gentagelser af eksperimentet. For at formulere dette mere præcist, kan vi (teoretisk) forestille os, at vi foretager en uendelig række af uafhængige gentagelser af det betragtede eksperiment, og hvis vi så lader $X_1, X_2, X_3, \ldots$ betegne udfaldene af disse eksperimenter, så gælder der helt præcist, at

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{E}(X). \tag{12.1}$$

Dette resultat kaldes for *Store Tal Lov* og er et af de helt grundlæggende resultater i sandsynlighedsteorien. Figur 12.1 viser grafer over gennemsnittene i (12.1) som funktion af antallet af gentagelser af det eksperiment, der består i at kaste en fair terning hhv. 30, 100, 1000 og 10000 gange.

12.2 Varians for diskrete stokastiske variable

En anden numerisk størrelse (udover middelværdien), man typisk betragter i forbindelse med en stokastisk variabel X, er variansen af X. Variansen af X er et udtryk for, i hvor høj grad X's værdier er koncentreret omkring middelværdien for X.

(12.8) DEFINITION.

(Varians og spredning, endelig udfaldsmængde) Lad X være en diskret stokastisk variabel med udfaldsmængde $S_X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, og sæt $\mu = \mathrm{E}(X)$.

(a) Variansen $\mathrm{Var}(X)$ *af X defineres da ved formlen:*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big).$$

(b) Endvidere defineres standard-afvigelsen (eller spredningen) $\sigma(X)$ ved formlen:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Med X som i definitionen ovenfor kan $\mathrm{E}((X-\mu)^2)$ udregnes ved brug af Sætning 2, og man opnår dermed formlen:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 P(X = x_j). \tag{12.2}$$

Denne formel viser, at variansen er et mål for den gennemsnitlige (kvadratiske) afstand fra elementerne i udfaldsmængden til middelværdien μ, hvor 'gennemsnitlige' skal forstås som det vægtede gennemsnit givet ved punktsandsynlighederne for X (ganske som ved definitionen af $\mathrm{E}(X)$). En stor varians (eller spredning) er således et udtryk for, at X's værdier med stor sandsynlighed ligger forholdsvis langt fra middelværdien, mens en lille varians udtrykker, at X's værdier med stor sandsynlighed er koncentreret omkring middelværdien.

Selvom formlen (12.2) således giver en umiddelbar naturlig fortolkning af, hvad variansen repræsenterer, viser det sig ofte nemmere at udregne variansen ved brug af Regel 9a nedenfor:

(12.9) REGNEREGLER.

(Varians) Lad X og Y være diskrete stokastiske variable afledt af det samme stokastiske eksperiment og med udfaldsmængder hhv. $S_X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ og $S_Y = \{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq \mathbb{R}$. Lad videre a være en reel konstant.

Da gælder følgende regneregler:

(a) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$.

(b) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big(X(X-1)\big) - \mathrm{E}(X)\big(\mathrm{E}(X) - 1\big)$.

(c) $\mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X)$.

(d) $\mathrm{Var}(a) = 0$.

(e) $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$, *hvis X og Y er uafhængige.*

(12.10) SÆTNING.

(Varians for binomialfordelingen) Lad X være en stokastisk variabel, der er binomialfordelt med antalparameter $n \in \mathbb{N}$ og sandsynlighedsparameter $p \in [0,1]$. Da gælder der, at

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Som for middelværdier skal vi også betragte varians for diskrete stokastiske variable med uendelig udfaldsmængde.

(12.11) DEFINITION.

(Varians, uendelig udfaldsmængde) Lad X være en diskret stokastisk variabel med udfaldsmængde $S_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$.

Hvis $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 P(X = x_j) < \infty$, så defineres variansen $\mathrm{Var}(X)$ *ved formlen:*

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - \mu)^2 P(X = x_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} (x_j - \mu)^2 P(X = x_j),$$

hvor $\mu = \mathrm{E}(X)$.

(12.12) BEMÆRKNING.

(1) I forlængelse af Definition 11 er det på sin plads at bemærke, at antagelsen om, at $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 P(X = x_j) < \infty$, også medfører, at $\sum_{j=1}^{\infty} (x_j - \mu)^2 P(X = x_j) < \infty$, samt at $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(X = x_j) < \infty$, således at også $\mu = \mathrm{E}(X)$ er veldefineret.

(2) Regneregler 9 gælder uændret for diskrete stokastiske variable med uendelig udfaldsmængde, men naturligvis under forudsætning af at de indgående middelværdier og/eller varianser er veldefinerede, dvs. at de tilsvarende uendelige rækker i Definition 5 og Definition 11 er konvergente. Beviserne er helt analoge til beviserne for Regneregler 9, idet man blot skal arbejde med uendelige rækker i stedet for endelige summer (og i den forbindelse naturligvis overveje konvergensforhold). Specielt har man også i situationen betragtet i Definition 11, at $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$, hvilket også udledes i beviset for punkt 1

Som et vigtigt eksempel vi vi herefter udregne variansen i Poisson-fordelingen.

(12.13) SÆTNING.

(Varians for Poisson-fordelingen) Lad X være en stokastisk variabel, der er Poisson-fordelt med parameter $\lambda > 0$. Da er variansen af X givet ved:

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Parameteren λ angiver altså både middelværdi og varians for X (jvf. Sætning 6).

12.3 Kovarians for diskrete stokastiske variable

Hvis man betragter to stokastiske variable X og Y afledt af det samme stokastiske eksperiment, er man ofte interesseret i, hvordan X og Y afhænger af hinanden. Kovariansen mellem X og Y, som vi skal indføre nedenfor, er en numerisk størrelse, som giver en indikation af afhængigheden mellem X og Y. Hvis X og Y er uafhængige, gælder der således, at kovariansen er 0 (se Regel 15d nedenfor).

(12.14) DEFINITION.

(Kovarians) Lad X og Y være diskrete stokastiske variable afledt af det samme stokastiske eksperiment og med udfaldsmængder hhv. $S_X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ og $S_Y = \{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq \mathbb{R}$. Sæt

$$\mu = \mathrm{E}(X), \quad \text{og} \quad \nu = \mathrm{E}(Y).$$

Da defineres kovariansen $Cov(X,Y)$ mellem X og Y ved formlen:

$$Cov(X,Y) = \mathrm{E}\big((X-\mu)(Y-\nu)\big).$$

Symbolet Cov henviser til det engelske *covariance*. Med X og Y som i definitionen ovenfor kan $\mathrm{E}\big((X-\mu)(Y-\nu)\big)$ udregnes ved brug af Sætning 2, og man opnår dermed formlen:

$$\mathrm{E}\big((X-\mu)(Y-\nu)\big) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)(y_k-\nu)P(X = x_j \text{ og } Y = y_k). \tag{12.3}$$

Ofte er det imidlertid nemmere at udregne $\mathrm{Cov}(X,Y)$ ved brug af Regel 15a nedenfor:

(12.15) REGNEREGLER.

(Kovarians) Lad X, Y og Z være diskrete stokastiske variable afledt af det samme stokastiske eksperiment og med udfaldsmængder hhv. $S_X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $S_Y = \{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq \mathbb{R}$ og $S_Z = \{z_1, \ldots, z_l\} \subseteq \mathbb{R}$. Da gælder følgende regneregler:

(a) $Cov(X,Y) = \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$.

(b) $Cov(X,X) = \mathrm{Var}(X)$.

(c) $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2Cov(X,Y)$.

(d) *Hvis X og Y er uafhængige, gælder der, at* $Cov(X,Y) = 0$.

(e) $Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)$ *for vilkårlige reelle konstanter a og b.*

(f) $Cov(X,Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$.

(12.16) BEMÆRKNING.

Definition 14 og Regneregler 15 gælder uændret for diskrete stokastiske variable X og Y med uendelige udfaldsmængder $S_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ og $S_Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$, såfremt de opfylder betingelserne:

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 P(X = x_j) < \infty, \quad \text{og} \quad \sum_{j=1}^{\infty} y_j^2 P(X = y_j) < \infty.$$

Beviserne for regnereglerne er uændrede i forhold til beviserne for Regneregler 15, eftersom de kun benytter regnereglerne 3 og 9 (jvf. også bemærkningerne 7 og 122).

(12.17) EKSEMPEL.

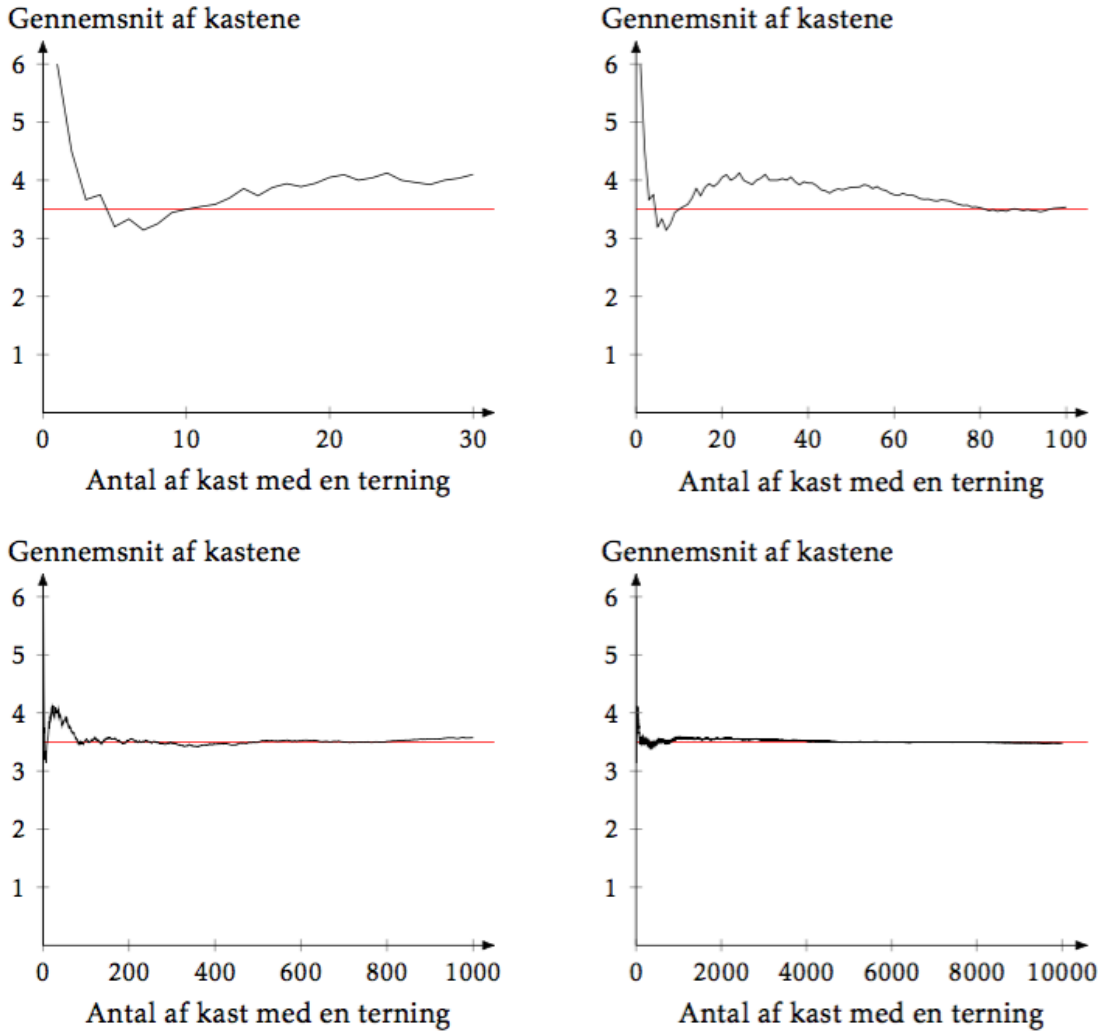
To fair terninger – en rød og en blå – kastes 25 gange. Vi lader X betegne den stokastiske variable, der angiver antallet af gange, den røde terning viser 6, mens Y er den stokastiske variable, der angiver antallet af gange, en af de to terninger viser 6. Hvis begge terninger viser 6, tæller det altså med to for Y.

Vi ønsker, at bestemme kovariansen $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Hertil indfører vi en tredje stokastisk variabel Z, der er antallet af gange den blå terning viser 6. Det følger så, at $Y = X + Z$, og at X og Z er uafhængige. Ved brug af Regel 15f, d og b finder vi derfor, at

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(X,X+Z) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Z) \\ &= \mathrm{Var}(X) + 0 = \mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

Bemærk afslutningsvist, at X er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{6}$. Det følger derfor fra Sætning 10, at

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Var}(X) = 25 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{6}\right) = 25 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} = \tfrac{125}{36} \approx 3.472.$$



Figur 12.1: Graferne ovenfor angiver løbende gennemsnit som funktion af antallet af kast i forbindelse med hhv. 30, 100, 1000 og 10000 uafhængige kast med en fair terning. Punkterne svarende til de enkelte kast er forbundet med en ret linje, så man opnår en stykkevis linær graf. Som det i hvert fald fremgår tydeligt af den sidste af graferne, så kommer de løbende gennemsnit efter et stort antal kast til at ligge meget tæt på 3.5 (svarende til den vandrette røde linje), der netop er middelværdien af den stokastiske variable, der angiver udfaldet af et kast med en fair terning. At det forholder sig sådan, er præcis udsagnet i Store Tals Lov.

Kapitel 13

Kontinuerte stokastiske variable

Vi har i de tidligere kapitler studeret diskrete stokastiske variable X, hvis opførsel og egenskaber i sidste ende er bestemt af punktsandsynlighederne $P(X = x)$ for x i udfaldsmængden S_X. Vi skal i dette kapitel indføre og studere en anden type af stokastiske variable, de *kontinuerte* stokastiske variable, der adskiller sig markant fra de diskrete, bl.a. derved at deres punktsandsynligheder alle er lig med 0. Det giver således generelt ikke mening at bestemme sandsynligheden for, at en kontinuert stokastisk variabel Y ligger i en mængde B ved at betragte summen $\sum_{y \in B} P(Y = y)$, der i alle tilfælde må tilskrives værdien 0 (også hvis B f.eks. er hele udfaldsmængden for Y). Det matematiske greb, der gør det muligt alligevel at udvikle en meningsfuld og fuldt anvendelig teori, er så at erstatte summen ovenfor med et integral $\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$, hvor funktionen f kaldes tæthedsfunktionen for Y. Vi skal i den forbindelse gøre effektiv brug af den slagkraftige teori for integraler, der er blevet udviklet i den foregående del af kurset. Kontinuerte stokastiske variable benyttes typisk til at beskrive størrelser, der i udgangspunktet kan antage enhver værdi i et helt interval, eksempelvis målinger af vægt, længde, areal m.m.

13.1 Kontinuerte stokastiske variable og tæthedsfunktioner

Det følgende eksempel illustrerer, at man helt naturligt kan støde på stokastiske variable, hvis punktsandsynligheder alle er lig med 0. Eksemplet illustrerer endvidere, hvordan man naturligt ledes til at beskrive fordelingen af sådanne stokastiske variable vha. integraler.

(13.1) EKSEMPEL.

På en bordplade indtegnes et sædvanligt to-dimensionalt koordinatsystem. En snurretop placeres i origo og bringes til at snurre. Vi forestiller os, at snurretoppen forbliver i origo, mens den snurrer. På snurretoppen er indtegnet en vektor udfra snurretoppens centrum.

Lad X være den stokastiske variable, som angiver vinklen i intervallet $]-\pi,\pi]$, som vektoren på snurretoppen danner med 1-aksens positive retning, når snurretoppen standser. Det er intuitivt klart, at X så kan antage alle værdier i $]-\pi,\pi]$, og den kaldes derfor for en *kontinuert stokastisk variabel*.

Det er også intuitivt klart, at alle udfald for X er 'lige sandsynlige', dvs. der findes en konstant c i $[0,1]$ således at

$$P(X = \theta) = c \qquad \text{for alle } \theta \text{ i }]-\pi,\pi].$$

Da der er uendeligt mange forskellige tal i $]-\pi,\pi]$, må der så gælde at $c = 0$. For hvis $c > 0$, så kunne vi vælge et n i $\mathbb{N}$, således at $nc > 1$. Vælges derpå vilkårlige *forskellige* tal $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ i

$]-\pi,\pi]$, så følger det, at

$$1 \geq P(X \in \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}) = \sum_{j=1}^{n} P(X = \theta_j) = \sum_{j=1}^{n} c = nc > 1,$$

og vi opnår således en modstrid. Antagelsen $c > 0$ fører altså til en modstrid, og vi slutter derfor, at der må gælde, at $c = 0$. Med andre ord kan vi konkludere, at

$$P(X = \theta) = 0 \qquad \text{for alle } \theta \text{ i }]-\pi,\pi],$$

og i forhold til teorien udviklet i de foregående kapitler, virker det derfor umiddelbart håbløst at forsøge at foretage sandsynlighedsteoretiske overvejelser i denne situation. Det er det imidlertid langt fra; nøglen er, at man i stedet for at fokusere på sandsynligheden for, at X antager en specifik værdi i $]-\pi,\pi]$, skal betragte sandsynligheden for, at X antager værdier i et delinterval af $]-\pi,\pi]$. Hvis I og J er to delintervaller af $]-\pi,\pi]$ af samme længde, er det således intuitivt klart (overvej), at

$$P(X \in I) = P(X \in J).$$

Idet hele $]-\pi,\pi]$ har længde 2π, må der så yderligere gælde, at

$$P(X \in I) = \frac{\text{længden af } I}{2\pi}.$$

For vikårlige punkter x_1, x_2 i $]-\pi,\pi]$, hvor $x_1 < x_2$, får vi altså formlen

$$P(X \in [x_1, x_2]) = \frac{x_2 - x_1}{2\pi}, \tag{13.1}$$

og på den baggrund kan vi fint bestemme alle relevante sandsynligheder vedrørende X. I relation til begrebet tæthedsfunktion, der indføres nedenfor, bemærker vi afslutningsvist, at højresiden i (13.1) kan skrives som integralet af den konstante funktion $\frac{1}{2\pi}$ over intervallet $[x_1, x_2]$, og der gælder således at

$$P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{d}x.$$

for alle x_1, x_2 i $]-\pi,\pi]$, hvor $x_1 < x_2$.

Den stokastiske variabel i Eksempel 1 er et eksempel på en kontinuert stokastisk variabel, som vi nu skal indføre generelt. I den følgende definition betragtes et interval I med endpunkterne a og b, hvor $a < b$. Intervallet I kan være åbent, halvåbent eller lukket, og det er tilladt at $a = -\infty$, og/eller at $b = \infty$.

(13.2) DEFINITION.

(Tæthedsfunktion) Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion defineret på intervallet I.

(a) Funktionen f siges at være en tæthedsfunktion*, hvis den opfylder følgende to betingelser:*

(g) $f(x) \geq 0$ for alle x i I.

(g) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ (bemærk at integralet her kan være et uegentligt integral).

(b) Antag, at f er en tæthedsfunktion på I. En stokastisk variabel X siges at have f som tæthedsfunktion, hvis følgende to betingelser er opfyldt:

(g) $P(X \in I^c) = 0$[1].

(g) For alle x_1, x_2 i $[a,b]$, hvor $x_1 < x_2$, gælder der, at

$$P(X \in J) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \tag{13.2}$$

for ethvert interval J med endepunkter x_1 og x_2.

(13.3) BEMÆRKNING.

(1) Bemærk at formlen (13.2) også forudsættes at gælde, i tilfælde hvor $x_1 = a$, og/eller $x_2 = b$, og integralet på højresiden kan derfor være et uegentligt integral (hvis f.eks. $a = -\infty$, og/eller $b = \infty$).

(2) I forbindelse med formlen (13.2) er det yderligere værd at understrege, at den gælder i hvert af tilfældene: $J =]x_1, x_2[$, $J =]x_1, x_2]$, $J = [x_1, x_2[$ og $J = [x_1, x_2]$. Specielt har disse intervaller altså samme sandsynlighed, og det skyldes, at $P(X = x_1) = P(X = x_2) = 0$, når X er en kontinuert stokastisk variabel. Dette er i overensstemmelse med, at $\int_x^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ for alle x i I.

(3) Med tanke på sammenhængen mellem integraler og arealer er en tæthedsfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ altså en positiv funktion, således at det samlede areal under grafen for f er lig med 1. Hvis X er en stokastisk variabel med tæthedsfunktion f, og $x_1 < x_2$ er to tal fra I, kan vi endvidere fortolke sandsynligheden $P(X \in [x_1, x_2])$ som arealet under grafen for f over intervallet $[x_1, x_2]$ (se Figur 13.1).

13.2 Eksempler på kontinuerte fordelinger.

I dette afsnit skal vi give en række vigtige eksempler på kontinuerte stokastiske variable. Den vigtigste af de kontinuerte fordelinger, normalfordelingen, vil dog blive behandlet i et selvstændigt afsnit.

(13.4) DEFINITION.

(Ligefordelingen på $]a,b]$) Lad a og b være reelle tal, således at $a < b$, og betragt funktionen $f\colon]a,b] \to [0,\infty[$ givet ved:

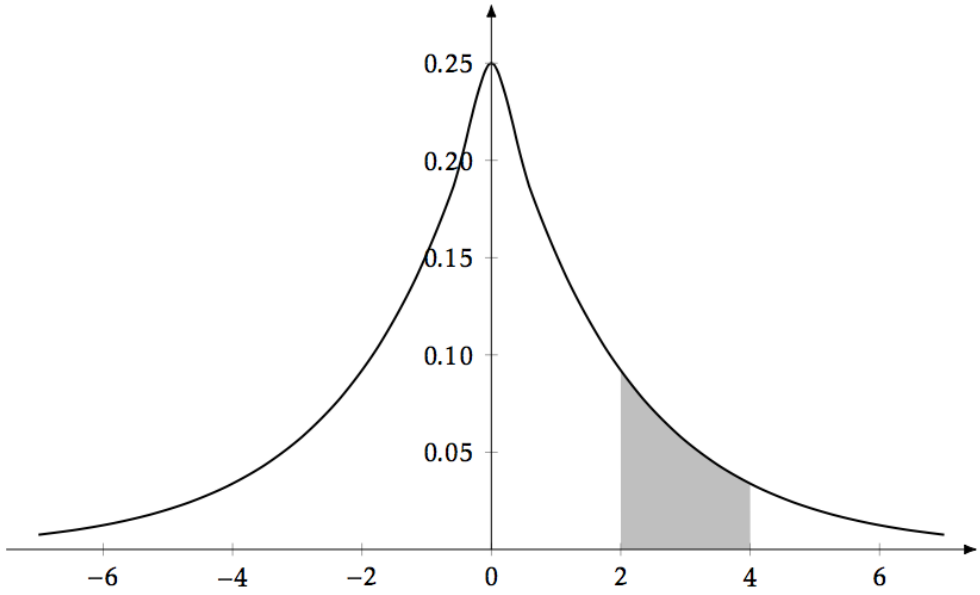
$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad (x \in]a,b]).$$

Da er f en tæthedsfunktion, og en stokastisk variabel, der har f som tæthedsfunktion, siges at være ligefordelt *på $]a,b]$. Der gælder så, at*

$$P(X \in J) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$$

for alle x_1, x_2 i $]a,b]$, hvor $x_1 < x_2$, og for ethvert interval J med endepunkter x_1 og x_2.

[1] I^c er komplementærmængden til I, dvs. mængden af alle elementer i den betragtede grundmængde, som *ikke* er elementer af I.



Figur 13.1: Grafen for tæthedsfunktionen $f(x) = \frac{1}{4}e^{-|x|/2}$, $x \in \mathbb{R}$. For en stokastisk variabel X med tæthedsfunktion f angiver f.eks. arealet under grafen over intervallet $[2,4]$ sandsynligheden $P(X \in [2,4])$, for at X antager en værdi i $[2,4]$.

13.5 Argumenter i forbindelse med definitionen ovenfor.

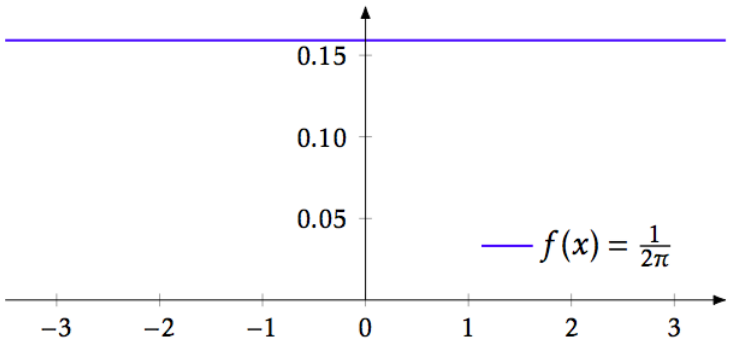
Vi skal vise at f faktisk er *en tæthedsfunktion samt formlen for $P(X \in J)$.*

At f er en tæthedsfunktion følger af, at den konstante funktion $\frac{1}{b-a}$ har stamfunktion $\frac{1}{b-a}x$, således at

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{b-a}x\right]_a^b = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1.$$

Antag derefter, at X er en stokastisk variabel med tæthedsfunktion f. Hvis $x_1, x_2 \in]a,b]$, således at $x_1 < x_2$, og J er et interval med endepunkter x_1, x_2, følger det tilsvarende, at

$$P(X \in J) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{b-a}x\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{b-a}(x_2 - x_1) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$



Figur 13.2: Grafen for tæthedsfunktionen for ligefordelingen på $]-\pi,\pi]$.

Før vi går videre til næste eksempel, noterer vi, at den stokastiske variable X fra Eksempel 1 er ligefordelt over $]-\pi,\pi]$.

(13.6) DEFINITION.

(Cauchy-fordelingen) Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$ givet ved:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Da er f en tæthedsfunktion, og en stokastisk variabel X, der har f som tæthedsfunktion, siges at være Cauchy-fordelt. *Der gælder så, at*

$$P(X \in J) = \frac{1}{\pi}\big(\tan^{-1}(x_2) - \tan^{-1}(x_1)\big),$$

for alle x_1, x_2 i $\mathbb{R}$, hvor $x_1 < x_2$, og for ethvert interval J med endepunkter x_1 og x_2. Her er $\tan^{-1}$ *den inverse funktion til funktionen* $\tan\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

13.7 Argumenter i forbindelse med definitionen ovenfor.

Vi skal vise at f faktisk er en tæthedsfunktion samt formlen for $P(X \in J)$.

Da funktionen $\tan^{-1}$ er en stamfunktion til funktionen $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, følger det, at

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{N\to\infty} \big[\tan^{-1}(x)\big]_{-N}^{N} \\ &= \lim_{N\to\infty} \big(\tan^{-1}(N) - \tan^{-1}(-N)\big) = \tfrac{\pi}{2} - \big(-\tfrac{\pi}{2}\big) = \pi.\end{aligned}$$

Vi kan dermed slutte, at integralet $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ er konvergent med værdien π, og dermed at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1,$$

således at f er en tæthedsunktion.

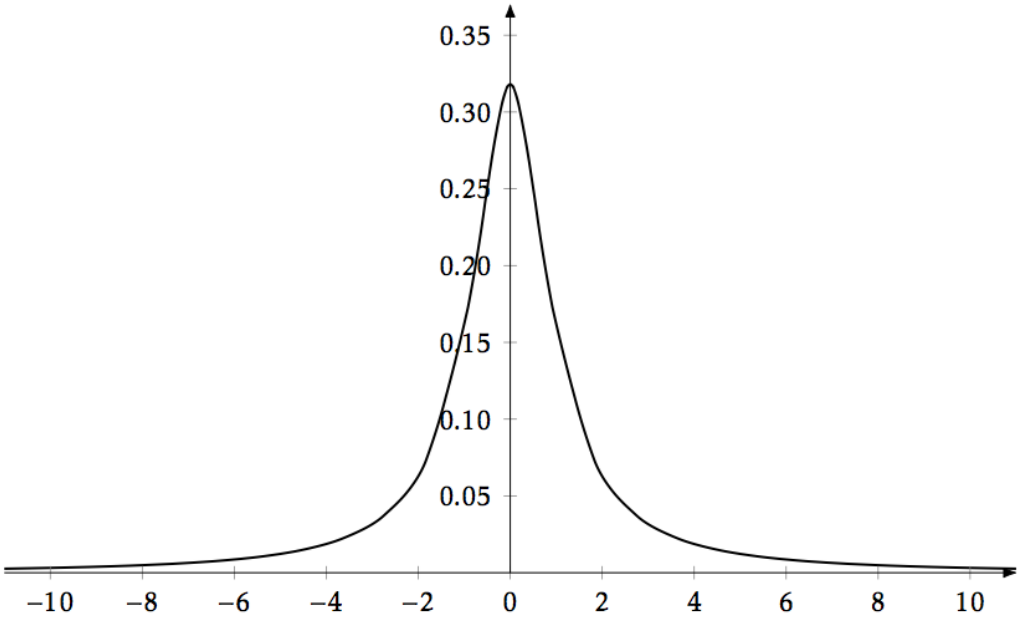
Antag derefter, at X er en stokastisk variabel, der har f som sin tæthedsfunktion. Hvis $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, således at $x_1 < x_2$, og J er et interval med endepunkter x_1, x_2, finder vi så, at

$$\begin{aligned}P(X \in J) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\big[\tan^{-1}\big]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{\pi}\big(\tan^{-1}(x_2) - \tan^{-1}(x_1)\big),\end{aligned}$$

som ønsket.

Cauchy-fordelingen er et special-tilfælde af den såkaldte t-fordeling, der spiller en central rolle i forbindelse med test af statistiske hypoteser, som man bliver introduceret for i de fleste grundlæggende statistik-kurser.

Vi afslutter dette afsnit med at indføre eksponentialfordelte stokastiske variable.



Figur 13.3: Grafen for tæthedsfunktionen for Cauchy-fordelingen.

(13.8) DEFINITION.

(Eksponentialfordelingen) Lad k være en positiv konstant, og betragt funktionen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = k \cdot e^{-kx}, \qquad (x \in [0,\infty[).$$

Da er f en tæthedsfunktion, og en stokastisk variabel, der har f som tæthedsfunktion, siges at være eksponentialfordelt *med parameter k. Der gælder så, at*

$$P(X < 0) = 0, \quad og \quad P(X \in J) = e^{-kx_1} - e^{-kx_2}$$

for ethvert interval J med endepunkter x_1, x_2, hvor $0 \le x_1 < x_2$.

13.9 Udregninger i forbindelse med definitionen ovenfor.

Vi skal vise at f faktisk er en tæthedsfunktion samt formlen for $P(X \in J)$.

Idet funktionen $F(x) = -e^{-kx}$ på intervallet $[0,\infty[$ er en stamfunktion til f, følger det, at

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^R ke^{-kx}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \big[-e^{-kx}\big]_0^R$$
$$= \lim_{R\to\infty} (1 - e^{-kR}) = 1.$$

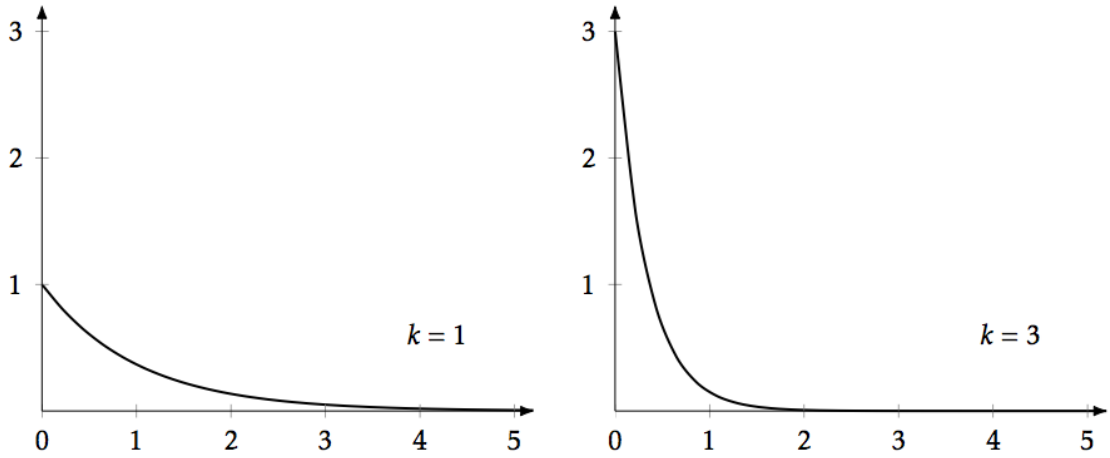
Dermed er integralet $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, og f er en tæthedsfunktion.

Antag derefter, at X er en stokastisk variabel, der har f som tæhedsfunktion. Hvis $x_1, x_2 \in [0,\infty[$, således at $x_1 < x_2$, og J er et interval med endepunkter x_1, x_2, finder vi så, at

$$P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} ke^{-kx}\,\mathrm{d}x = \big[-e^{-kx}\big]_{x_1}^{x_2} = e^{-kx_1} - e^{-kx_2},$$

som ønsket.

Som et eksempel på en eksponentialfordelt stokastisk variabel kan nævnes *ventetiden* mellem to henfald fra en radioaktiv kilde.



Figur 13.4: Tæthedsfunktionerne for eksponentialfordelinger med parametre hhv. 1 og 3.

13.3 Fordelingsfunktioner

En alternativ måde, hvorpå man kan beskrive den sandsynlighedsteoretiske opførsel af en stokastisk variabel, er via den såkaldte fordelingsfunktion.

(13.10) DEFINITION.

Lad X være en kontinuert stokastisk variabel med tæthedsfunktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, hvor I er et interval i $\mathbb{R}$ med endepunkter a og b, og $-\infty \le a < b \le \infty$. Fordelingsfunktionen *for X er da funktionen $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ givet ved*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \textit{hvis } x \le a, \\ \int_a^x f(t)\,dt, & \textit{hvis } x \in]a,b[, \\ 1, & \textit{hvis } x \ge b. \end{cases} \tag{13.3}$$

Lad os i forbindelse med Definition 10 præcisere, at hvis $a = -\infty$, da skal første række i 'gaffelforskriften' på højresiden af (13.3) ignoreres. Og hvis $b = \infty$, skal nederste række i gaffelforskriften ignoreres.

(13.11) EKSEMPEL.

Lad X være en stokastisk variabel, der er eksponentialfordelt med parameter $k > 0$ (jvf. Definition 8). Med andre ord har X tæthedsfunktion $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ givet ved

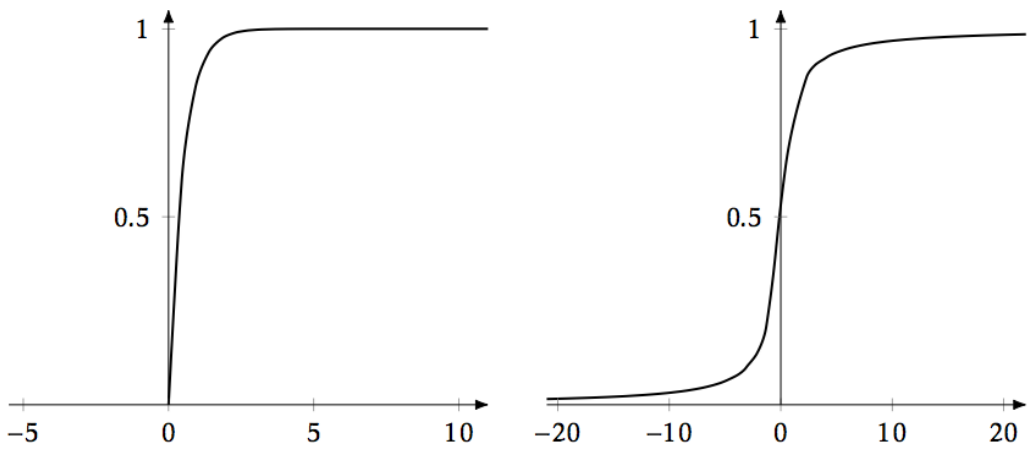
$$f(x) = ke^{-kx}, \qquad (x \in [0,\infty[).$$

Bemærk i forhold til Definition 10, at $I = [0,\infty[$, således at $a = 0$, og $b = \infty$. For hvert x i $]0,\infty[$ ser vi, at

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x ke^{-kt}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-kt}\right]_0^x = 1 - e^{-kx}.$$

Det følger derfor, at fordelingsfunktionen F_X for X er givet ved:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } x \le 0, \\ 1 - e^{-kx}, & \text{hvis } x \in]0,\infty[. \end{cases}$$



Figur 13.5: Figuren til venstre er grafen for fordelingsfunktionen F_X, når X er eksponentialfordelt med parameter 2. Figuren til højre er grafen for fordelingsfunktionen for en Cauchy-fordelt stokastisk variabel.

Grafen for F_X er angivet i figuren nedenfor sammen med grafen for fordelingsfunktionen for en Cauchy-fordelt stokastisk variabel.

Vi noterer specielt, at F_X er en voksende og kontinuert funktion, samt at $F_X(x) \to 1$ for $x \to \infty$. Som det fremgår af Regneregler 12, er disse egenskaber (og flere til) generelt gældende for alle fordelingsfunktioner for *kontinuerte* stokastiske variable (jvf. Bemærkning 13).

(13.12) REGNEREGLER.

(Fordelingsfunktionen) Lad X være en kontinuert stokastisk variabel med fordelingsfunktion F_X. Da gælder følgende udsagn:

(a) For ethvert x i $\mathbb{R}$ gælder der, at

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

(b) Hvis J er et interval i $\mathbb{R}$ med endepunkter x og y, hvor $-\infty < x < y < \infty$, så gælder der, at

$$P(X \in J) = F_X(y) - F_X(x).$$

(c) F_X er voksende og kontinuert.

(d) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, og $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

(e) Hvis F_X er differentiabel, og F_X' er kontinuert, så er F_X' tæthedsfunktion for X.

Som i Definition 2 er det værd at understrege, at formlen i Regel 12b gælder i hvert af tilfældene $J =]x,y[$, $J = [x,y[$, $J =]x,y]$ og $J = [x,y]$, i overensstemmelse med at $P(X = x) = 0 = P(X = y)$, eftersom X er en kontinuert stokastisk variabel.

(13.13) BEMÆRKNING.

Vi afslutter dette afsnit med at bemærke, at man også for en diskret stokastisk variabel Z (med udfaldsmængde S_Z) kan indføre fordelingsfunktionen F_Z for Z, f.eks. ved formlen:

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = \sum_{z \in S_Z \, z \leq x} P(Z = z).$$

I forhold til Regneregler 12 er funktionen F_Z igen voksende, og $\lim_{x \to -\infty} F_Z(x) = 0$, ligesom $\lim_{x \to \infty} F_Z(x) = 1$. Imidlertid er Regel 12b generelt kun rigtig for intervaller på formen $J =]x, y]$, idet der for diskrete stokastiske variable kan være forskel på f.eks. $P(Z \in [x, y])$ og $P(Z \in]x, y])$:

$$P(Z \in [x, y]) = P(Z = x) + P(Z \in]x, y]),$$

hvor det jo er muligt, at $P(Z = x) > 0$. Af samme grund er F_Z ikke en kontinuert funktion, men den er dog højrekontinuert, dvs.

$$F_Z(x) = \lim_{y \downarrow x} F_Z(y) \qquad \text{for alle } x \text{ i } \mathbb{R}.$$

Her betegner $\lim_{y \downarrow x} F_Z(y)$ grænseværdien for $F_Z(y)$, når y går imod x *fra højre*, dvs. man betragter kun y i $]x, \infty[$, og lader dem komme vilkårligt tæt på x. Og så vil $F_Z(y)$ altså komme vilkårligt tæt på $F_Z(x)$. Grænseværdien $\lim_{y \uparrow x} F_Z(y)$ defineres tilsvarende, og her vil der generelt gælde, at

$$\lim_{y \uparrow x} F_Z(y) = P(Z \in]-\infty, x[) \leq P(Z \in]-\infty, x]) = F_Z(x),$$

hvor uligheden kan være skarp (dvs. F_Z er ikke kontinuert fra venstre).

Kapitel 14

Middelværdi og varians — kontinuerte stokastiske variable

14.1 Middelværdi for kontinuerte stokastiske variable

Som for diskrete stokastiske variable skal vi også indføre middelværdi for kontinuerte stokastiske variable. Overgangen fra det diskrete til det kontinuerte tilfælde foregår løst sagt ved at erstatte punktsandsynligheder med tætheder og summer med integraler.

I hele afsnittet betragtes et interval I med endepunkter $a < b$. Intervallet kan være åbent, lukket eller halvåbent, og det tillades at $a = -\infty$, og/eller at $b = \infty$.

(14.1) DEFINITION.

(Middelværdi, kontinuert variabel) Lad X være en stokastisk variabel med kontinuert tæthedsfunktion $f : I \to [0, \infty[$. Vi definerer da middelværdien $\mathrm{E}(X)$ *af X ved formlen:*

$$\mathrm{E}(X) = \int_a^b x f(x)\, dx, \tag{14.1}$$

under forudsætning af at integralet $\int_a^b |x| f(x)\, dx$ er konvergent, dvs. at $\int_a^b |x| f(x)\, dx < \infty$. Hvis $\int_a^b |x| f(x)\, dx = \infty$, siger vi, at X ikke *har middelværdi.*

(14.2) BEMÆRKNING.

(1) Som for diskrete stokastiske variable kan middelværdien betragtes som et slags vægtet gennemsnit af de mulige værdier af X. Her er vægtningen givet ved tæthedsfunktionen f, og i stedet for at summe over værdierne af $x f(x)$ integrerer man.

(2) Betingelsen $\int_a^b |x| f(x)\, \mathrm{d}x < \infty$ i Definition 1 sikrer specielt, at integralet $\int_a^b x f(x)\, \mathrm{d}x$ også er konvergent, og den er automatisk opfyldt, hvis $a > -\infty$, og $b < \infty$, idet

$$\int_a^b |x| f(x)\, \mathrm{d}x \le \max\{|a|, |b|\} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \max\{|a|, |b|\} < \infty$$

i denne situation. Med andre ord vil X altid have middelværdi, når definitionsintervallet I for tæthedsfunktionen er begrænset.

(14.3) EKSEMPEL.

(Middelværdien for eksponentialfordelingen) Lad X være eksponentialfordelt med parameter $k > 0$. Med andre ord har X tæthedsfunktion $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ givet ved

$$f(x) = ke^{-kx}, \qquad (x \in [0,\infty[).$$

Bemærk, at

$$\int_0^\infty |x| f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty xke^{-kx}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^R xke^{-kx}\,\mathrm{d}x.$$

For hvert $R > 0$ finder vi ved partiel integration, at

$$\begin{aligned}\int_0^R xke^{-kx}\,\mathrm{d}x &= \left[-xe^{-kx}\right]_0^R + \int_0^R e^{-kx}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-kx} - \tfrac{1}{k}e^{-kx}\right]_0^R \\ &= \tfrac{1}{k} - Re^{-kR} - \tfrac{1}{k}e^{-kR}.\end{aligned}$$

Vi slutter således, at

$$\int_0^\infty xke^{-kx}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left(\tfrac{1}{k} - Re^{-kR} - \tfrac{1}{k}e^{-kR}\right) = \tfrac{1}{k} < \infty,$$

hvor vi bl.a. har benyttet, at $Re^{-kR} \to 0$ for $R \to \infty$, eftersom eksponentialfunktionen vokser hurtigere end potensfunktioner for $R \to \infty$. Da integralet $\int_0^\infty |x| ke^{-kx}\,\mathrm{d}x$ altså specielt er endeligt, kan vi konkludere, at X har middelværdi, og at

$$\boxed{\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty xke^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}.}$$

(14.4) EKSEMPEL.

(Cauchy-fordelingen har ikke middelværdi) Lad X være en Cauchy-fordelt stokastisk variabel, dvs. X har tæthedsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Vi ønsker at undersøge, om X har middelværdi. Vi skal således afgøre, hvorvidt integralet $\int_{-\infty}^\infty |x| f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ er konvergent eller divergent.

For $R > 0$ finder vi, at

$$\int_{-R}^R \frac{|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^R \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^R \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{1+R^2} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(1+R^2),$$

hvor vi i første lighedstegn har benyttet, at $\frac{|x|}{1+x^2}$ er symmetrisk omkring 0. I tredje lighedstegn har vi benyttet substitutionen:

$$u = 1+x^2, \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x.$$

Det følger, at

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \ln(1+R^2) = \infty.$$

Vi slutter således, at X *ikke* har middelværdi. Dette er et udtryk for, at tæthedsfunktionen for f har 'tykke haler'.

Lad X være en kontinuert stokastisk variabel associeret til et stokastisk eksperiment. Som for diskrete stokastiske variable, er det ikke ualmindeligt, at man i stedet for X selv observerer en transformation $\phi(X)$ af X, hvor ϕ er en passende relevant funktion. Blandt andet af den grund er det væsentligt at kunne beregne middelværdien af den transformerede stokastiske variable $\phi(X)$, såfremt $\phi(X)$ altså har middelværdi.

(14.5) SÆTNING.

Lad X være en stokastisk variabel med kontinuert tæthedsfunktion $f\colon I \to [0,\infty[$.

(a) Antag, at $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ er en kontinuert differentiabel funktion, og at $\phi'(x) \neq 0$ for alle x i I. Lad videre J betegne værdimængden for ϕ, dvs. $J = \{\phi(x) : x \in I\}$. Da er den stokastiske variable $\phi(X)$ igen kontinuert, og dens tæthedsfunktion $h\colon J \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$h(y) = \frac{f(\phi^{-1}(y))}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|}, \qquad (y \in J),$$

hvor $\phi^{-1}\colon J \to I$ er den inverse funktion til ϕ.

(b) Antag, at $g\colon I \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion, og betragt den stokastiske variable $g(X)$. Der gælder da, at

$$\mathrm{E}\big(g(X)\big) = \int_a^b g(x)f(x)\,dx,$$

under forudsætning af at $\int_a^b |g(x)|f(x)\,dx < \infty$. Hvis $\int_a^b |g(x)|f(x)\,dx = \infty$, har $g(X)$ ikke middelværdi.

I forbindelse med Sætning 5b er det nærliggende at påpege analogien til sætningen om middelværdien for en transformeret diskret stokastisk variable. Vi bemærker endvidere, at betingelsen: $\int_a^b |g(x)|f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ automatisk er opfyldt, hvis g er begrænset[1], og $a > -\infty$, og $b < \infty$.

(14.6) EKSEMPEL.

Lad X være en stokastisk variabel, der er eksponentialfordelt med parameter $k > 0$, dvs. X har tæthed $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ givet ved:

$$f(x) = ke^{-kx}, \qquad (x \in [0,\infty[).$$

Vi ønsker at bestemme middeværdien af den stokastiske variable $\mathrm{E}(X^2)$, såfremt den eksisterer. Ifølge Sætning 5b skal vi således afgøre, om integralet $\int_0^\infty x^2ke^{-kx}\,\mathrm{d}x$ er endeligt, altså om grænseværdien

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R x^2ke^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

er endelig. For hvert R udregner vi $\int_0^R x^2ke^{-kx}\,\mathrm{d}x$ ved partiel integration:

$$\int_0^R x^2ke^{-kx}\,\mathrm{d}x = \big[-x^2e^{-kx}\big]_0^R + \int_0^R 2xe^{-kx}\,\mathrm{d}x = -R^2e^{-kR} + 2\int_0^R xe^{-kx}\,\mathrm{d}x.$$

[1] En funktion $g\colon I \to \mathbb{R}$ siges at være begrænset, hvis der findes et tal R i $]0,\infty[$, således at $|g(x)| \leq R$ for alle x i I.

Vi finder således, at

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2ke^{-kx}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}(-R^2e^{-kR}) + 2\lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-kx}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + 2\int_0^\infty xe^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k}\int_0^\infty xke^{-kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{k}\mathrm{E}(X) = \frac{2}{k}\frac{1}{k} = \frac{2}{k^2},\end{aligned}$$

hvor vi i andet lighedstegn benytter, at $R^2e^{-kR} \to 0$ for $R \to \infty$ grundet styrkeforholdet mellem eksponetialfunktioner og potensfunktioner (ved grænseovergang mod ∞). I næstsidste lighedstegn benytter vi Eksempel 3. Da $\int_0^\infty x^2ke^{-kx}\,\mathrm{d}x < \infty$, har X^2 altså middelværdi, og der gælder ifølge Sætning 5b, at

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2ke^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k^2}.$$

Vi afslutter dette afsnit med nogle regneregler for middelværdi af kontinuerte stokastiske variable, der er helt analoge til dem, vi tidligere har set for diskrete stokastiske variable.

(14.7) REGNEREGLER.

(Middelværdi) Lad X og Y være kontinuerte stokastiske variable afledt af det samme stokastiske eksperiment, og lad c og d være givne reelle konstanter. Antag endvidere, at X og Y begge har middelværdi.

Da gælder følgende regneregler:

(a) Den stokastiske variable $cX + d$ har igen middelværdi, og $\mathrm{E}(cX + d) = c\mathrm{E}(X) + d$.

(b) Den stokastiske variable $X + Y$ har igen middelværdi, og $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.

14.2 Varians for kontinuerte stokastiske variable

I analogi til det foregående afsnit, hvor vi indførte middelværdi for kontinuerte stokastiske variable, skal vi i dette afsnit indføre varians for kontinuerte stokastiske variable. I hele afsnittet betragtes et interval I med endepunkter a og b, hvor $-\infty \le a < b \le \infty$.

(14.8) DEFINITION.

(Varians og spredning, kontinuert variabel) Lad X være en kontinuert stokastisk variabel med tæthedsfunktion $f\colon I \to [0,\infty[$, og antag, at X har middelværdi

$$\mathrm{E}(X) = \mu \in \mathbb{R}.$$

(a) Variansen $\mathrm{Var}(X)$ *af X defineres da ved*

$$\mathrm{Var}(X) = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\,dx,$$

såfremt integralet er konvergent, dvs. såfremt $\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\,dx < \infty$. Hvis integralet er divergent har X ikke *varians.*

(b) Hvis X har varians, defineres spredningen $\sigma(X)$ *af X ved formlen:*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Som for diskrete stokastiske variable kan $\mathrm{Var}(X)$ betragtes som et slags vægtet gennemsnit over (kvadrat-) afstanden til $\mathrm{E}(X)$ for de værdier, som X antager, og hvor vægtningen er givet ved tæthedsfunktionen f. Groft sagt er en stor varians således udtryk for, at X's værdier med stor sandsynlighed ligger langt fra $\mathrm{E}(X)$, mens en lille varians svarer til, at X's værdier med stor sandsynlighed er koncentreret omkring $\mathrm{E}(X)$.

Andre analogier til teorien for diskrete stokastiske variable er, at variansen også for kontinuerte stokastiske variable er identisk med $\mathrm{E}((X-\mu)^2)$ (se Regel 9a nedenfor), og at variansen oftest udregnes som $\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ (se Regel 9c nedenfor).

(14.9) REGNEREGLER.

(Varians) Lad X være en kontinuert stokastiske variabel med tæthedsfunktion $f\colon I \to [0,\infty[$, og antag, at X har middelværdi $\mathrm{E}(X) = \mu$. Lad videre c og d være reelle tal. Da gælder følgende udsagn:

(a) Hvis X har varians, gælder der, at

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big).$$

(b) X har varians, hvis og kun hvis den stokastiske variable X^2 har (endelig) middelværdi, dvs. hvis og kun hvis $\int_a^b x^2 f(x)\,dx < \infty$.

(c) Hvis X har varians, kan den udregnes ved formlen:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2.$$

(d) Hvis X har varians, da har $cX+d$ ligeledes varians, og der gælder, at

$$\mathrm{Var}(cX+d) = c^2\mathrm{Var}(X).$$

(14.10) EKSEMPEL.

(Varians for eksponentialfordelingen) Lad X være eksponentialfordelt med parameter k. I eksemplerne 3 og 6 har vi set, at

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{k}, \qquad \text{og} \qquad \mathrm{E}(X^2) = \frac{2}{k^2}.$$

Det følger derfor umiddelbart ved brug af Regel 9c, at

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \frac{2}{k^2} - \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^2},$$

og dermed at

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k}.}$$

Vi afslutter dette afsnit med en kort omtale af *uafhængighed* for kontinuerte stokastiske variable. To kontinuerte stokastiske variable X og Y (afledt af det samme stokastiske eksperiment), siges at være uafhængige, hvis der for vilkårlige intervaller J og J' i $\mathbb{R}$ gælder, at

$$P(X \in J \text{ og } Y \in J') = P(X \in J) \cdot P(Y \in J')$$

i analogi med uafhængighed for diskrete stokastiske variable. I bekræftende fald gælder der endvidere nedenstående regneregler (i analogi med regnereglerne om kovarians og middelværdi).

(14.11) REGNEREGLER.

(Uafhængige stokastiske variable) Lad X og Y være to kontinuerte stokastiske variable, der er afledt af det samme stokastiske eksperiment, og antag, at X og Y er uafhængige. *Da gælder følgende udsagn:*

(a) Hvis X og Y begge har middelværdi, da har den stokastiske variable XY igen middelværdi, og der gælder, at

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

(b) Hvis X og Y begge har varians, da har den stokastiske variable $X+Y$ også varians, og der gælder, at

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Kapitel 15

Normal- og χ^2-fordelingen

15.1 Normalfordelingen

Normalfordelingen kaldes også for Gauss-fordelingen efter Carl Friedrich Gauss, der i starten af 1800-tallet studerede normalfordelte stokastiske variable i forbindelse med matematiske modeller for fejlene i astronomiske målinger. Normalfordelingen var dog allerede i midten af 1700-tallet blevet indført af Abraham de Moivre, der identificerede grafer for tæthedsfunktioner for normalfordelinger (se Figur 15.1) som 'grænsekurver' for grafer over punktsandsynligheder for binomialfordelinger med store antalsparametre (se Figur 15.2 nedenfor). Senere i 1700-tallet optrådte normalfordelingen endvidere i Pierre-Simon Laplaces arbejder omkring den såkaldte centrale grænseværdisætning (se Bemærkning 2). Normalfordelingen er uden sammenligning den vigtigste (kontinuerte) fordeling, hvilket vi vil begrunde nærmere i Bemærkning 2. Vi starter dog med blot at indføre normalfordelingen helt formelt.

(15.1) SÆTNING.

(Normalfordelingen)

(a) Betragt funktionen $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{15.1}$$

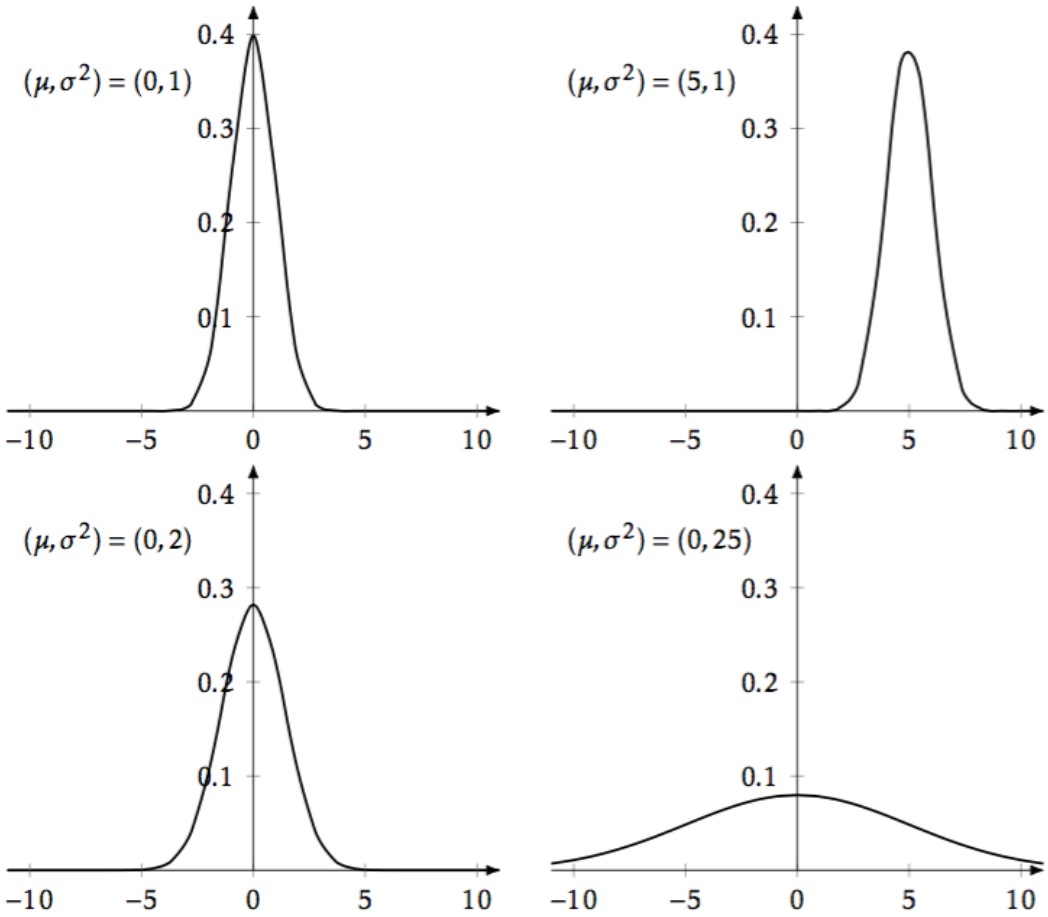
Da er f en tæthedsfunktion, og en stokastisk variabel X, der har f som tæthedsfunktion, siges at være (normeret) normalfordelt.

(b) Lad μ være et reelt tal, lad σ være et positivt tal og betragt funktionen $f_{\mu,\sigma^2}\colon \mathbb{R} \to [0,\infty[$ givet ved

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{15.2}$$

Da er f en tæthedsfunktion, og en stokastisk variabel X, der har f som tæthedsfunktion, siges at være normalfordelt med parametre (μ, σ^2).

Bemærk i forlængelse af Sætning 1, at funktionen f fra 1a er identisk med funktionen $f_{0,1}$ fra Sætning 1b, dvs. den normerede normalfordeling er normalfordelingen med parametre $(0,1)$.



Figur 15.1: Graferne for tæthedsfunktionerne for normalfordelingerne med parametre hhv. $(0,1)$, $(5,1)$, $(0,2)$ og $(0,25)$. Bemærk, at for normalfordelingen med parametre (μ,σ^2) har tæthedsfunktionen maximum for $x = \mu$, mens σ^2 er et udtryk for i hvor høj grad tæthedsfunktionen er koncentreret omkring μ. Jo større σ^2 er, des mindre er fordelingen koncentreret omkring μ. Vi skal senere se (jvf. Regel 3b-c), at normalfordelingen med parametre (μ,σ^2) netop har middelværdi μ og varians σ^2.

(15.2) BEMÆRKNING.

(Hvorfor er normalfordelingen så vigtig?) Som nævnt ovenfor, er normalfordelingen den vigtigste af alle kontinuerte fordelinger. Dette skyldes bl.a., at hvis man adderer et stort antal uafhængige stokastiske variable, der alle har den samme fordeling, da vil summen (under milde betingelser) approksimativt være normalfordelt. Lad os helt konkret betragte n uafhængige stokastiske variable $Z_1,\ldots,Z_n$, der alle er binomialfordelt med antalsparameter $n = 1$ og sandsynlighedsparameter $p \in]0,1[$. Med andre ord har Z_k udfaldsmængden $S_{Z_k} = \{0,1\}$, og $P(Z_k = 1) = p = 1 - P(Z_k = 0)$ for alle k i $\{1,2,\ldots,n\}$. Det følger da fra definitionen af binomialfordelingen, at summen $S_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p. For store værdier af n vil man imidlertid kunne observere, at denne binomialfordeling i passende forstand bliver approksimeret godt af normalfordelingen med parametre $(np, np(1-p))$ (jvf. Figur 15.2). F.eks. vil der således for store værdier af n og vilkårlige reelle tal $a < b$ gælde, at $P(a \le S_n \le b) \approx P(a \le X \le b)$, hvor X er en stokastisk variabel, der er normalfordelt med parametre $(np, np(1-p))$. At det forholder sig sådan, er et specialtilfælde af den såkaldte *centrale*

grænseværdisætning, der er et af de mest grundlæggende resultater i sandsynlighedsteorien.

I forbindelse med naturvidenskabelige og tekniske eksperimenter vil udførte målinger ofte været behæftede med en fejl, der kan betragtes som summen af et stort antal små og af hinanden uafhængige fejl, som yderligere med rimelighed kan siges at følge den samme fordeling. Som konsekvens af den centrale grænseværdisætning, vil man derfor typisk observere, at den samlede målefejl er normalfordelt, og normalfordelingen er således helt afgørende for statistiske modeller af fejlbehæftede data.

I forlængelse af ovenstående er normalfordelingen bl.a. velegnet til at beskrive naturligt forekommende størrelser, som er behæftede med tilfældige fejl, eller om man vil: Størrelser som 'svinger tilfældigt' omkring en 'idealværdi'. Lad f.eks. X være den stokastiske variable, der angiver massen af et stykke kobbertråd, som en bestemt maskine producerer. Ideelt set burde massen af kobbertråden antage en bestemt værdi x_0, men i praksis vil der være en tilfældig variation i massen. En naturlig statistisk model for X bliver så:

$$X = x_0 + Z, \qquad \text{hvor } Z \text{ er normalfordelt med parametre } (0, \sigma^2),$$

og σ er et passende (lille) positivt tal. Med andre ord er X normalfordelt med parametre (x_0, σ^2) (jvf. Regel 3a nedenfor). Her kan man tænke på Z som et udtryk for tilfældig (= stokastisk) støj eller fejl på målingerne af kobbertrådens masse. Andre eksempler på normalfordelte størrelser er:

(a) Længden af et stykke kobbertråd, som en bestemt maskine producerer.

(b) Patienters reaktion ved tuberkolose vaccination (f.eks. målt som diameteren af det hævede område).

(c) Vægten af æggene for en bestemt type høns.

(d) Svangerskabsperioden for en bestemt dyreart.

(e) Fejlen ved en satelits opmåling af en afstand på f.eks. 100 km.

Vi afslutter dette afsnit med en række vigtige regneregler for normalfordelte stokastiske variable.

(15.3) REGNEREGLER.

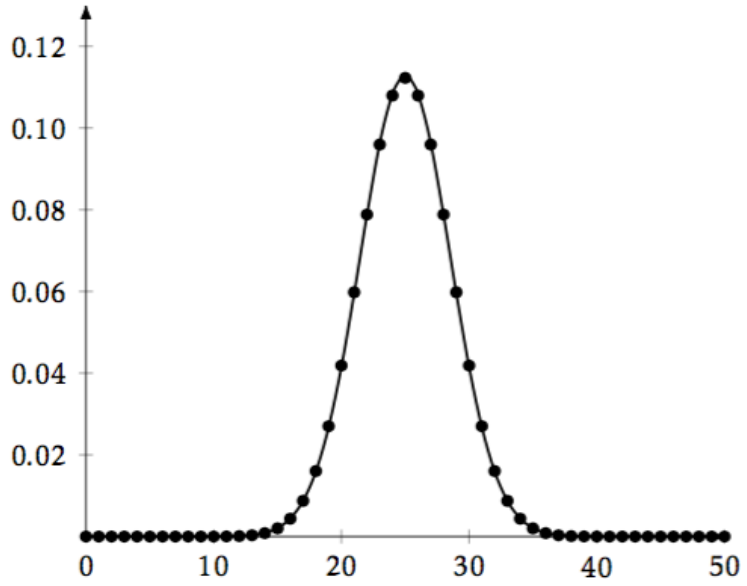
(Normalfordelte stokastiske variable) Lad X være en stokastisk variabel, der er normalfordelt med parametre (μ, σ^2). Da gælder følgende udsagn:

(a) Hvis $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, og $\beta \neq 0$, da er den stokastiske variable $\beta X + \alpha$ normalfordelt med parametre $(\beta\mu + \alpha, \beta^2\sigma^2)$.

(b) $\mathrm{E}(X) = \mu$.

(c) $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

(d) Lad Y være endnu en stokastisk variabel, der er normalfordelt med parametre (ν, ρ^2), og antag, at X og Y er uafhængige. Da er summen $X + Y$ normalfordelt med parametre $(\mu + \nu, \sigma^2 + \rho^2)$.



Figur 15.2: Til illustration af den Centrale Grænseværdisætning (omtalt i Bemærkning 2) er her plottet punktsandsynligheder for binomialfordelingen med antalsparameter 50 og sandsynligheds-parameter $\frac{1}{2}$ (de sorte prikker). Kurven er grafen for tæthedsfunktionen for normalfordelingen med parametre $(25, 12.5)$. Bemærk, at $25 = 50 \cdot \frac{1}{2}$, og at $12.5 = 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2})$, dvs. 25 og 12.5 er netop middelværdi og varians både for den illustrerede binomialfordeling.

15.2 χ^2-fordelingen

I eksemplerne om hypotesetest i binomialfordelingen og om test af, om en terning er fair, har vi beskrevet hvordan χ^2-fordelingen (læs: Chi-i-anden-fordelingen) optræder i forbindelse med forskellige test af statistiske hypoteser om et forelagt datamateriale. At det forholder sig sådan skyldes bl.a. χ^2-fordelingens nære sammenhæng med normalfordelingen, som vi skal anføre i Sætning 5 nedenfor, og det indebærer, at χ^2-fordelte stokastiske variable udgør en yderst vigtig klasse af kontinuerte stokastiske variable.

For at indføre χ^2-fordelingen formelt starter vi med for ethvert naturligt tal k at indføre den positive konstant c_k givet ved:

$$c_k = \begin{cases} \sqrt{2\pi}, & \text{hvis } k = 1, \\ 2^{k/2}(\frac{k}{2} - 1)!, & \text{hvis } k \text{ er et lige tal}, \\ \sqrt{2\pi} \cdot (k-2) \cdot (k-4) \cdots 3 \cdot 1, & \text{hvis } k \text{ er et tal i } \{3, 5, 7, \ldots\}. \end{cases} \tag{15.3}$$

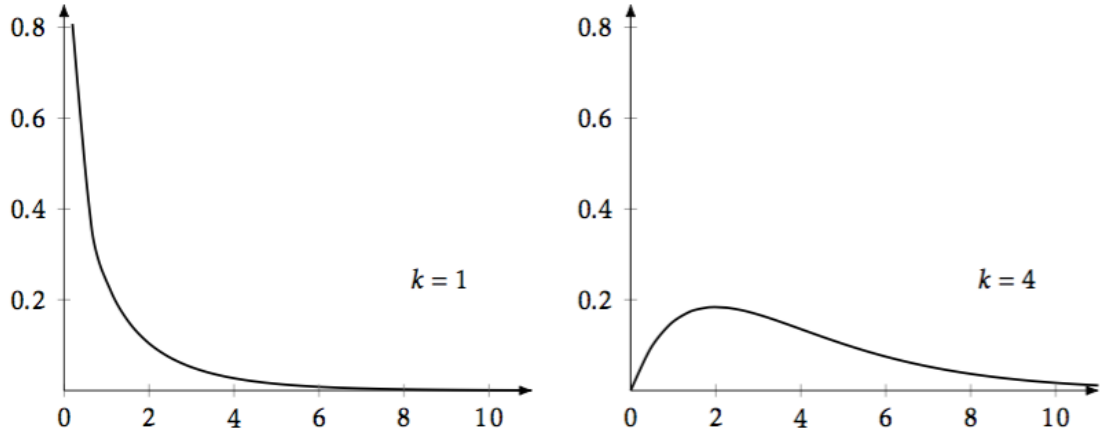
Bemærk, at hvis k er et tal i $\{3, 5, 7, \ldots\}$ (altså et ulige tal større end eller lig med 3), da er produktet $(k-2)(k-4) \cdots 3 \cdot 1$ produktet af alle ulige tal, der er (skarpt) mindre end k. Hvis f.eks. $k = 9$, får man produktet $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$.

(15.4) SÆTNING.

(χ^2-fordelingen) Lad k være et naturligt tal, og betragt funktionen $f_k \colon [0, \infty[\to [0, \infty[$ givet ved

$$f_k(x) = c_k^{-1} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x/2}, \qquad (x \in [0, \infty[), \tag{15.4}$$

hvor c_k er konstanten givet ved (15.3). Da er f_k en tæthedsfunktion, og en stokastisk variabel X, der har f_k som tæthedsfunktion, siges at være χ^2-fordelt *med k* frihedsgrader.



Figur 15.3: Tæthedsfunktionerne for χ^2-fordelingerne med hhv. 1 og 4 frihedsgrader.

Vigtigheden af χ^2-fordelingen skyldes bl.a. nedenstående resultat om sammenhængen mellem normalfordelingen og χ^2-fordelingen.

(15.5) SÆTNING.

(Normalfordeling vs. χ^2-fordelingen) Lad n være et naturligt tal, og lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uafhængige stokastiske variable, der alle er normeret normalfordelte (jvf. Sætning 1).

Da er kvadratsummen

$$S = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

χ^2-fordelt med n frihedgrader.

Vi afslutter denne korte gennemgang af χ^2-fordelingens vigtigste egenskaber med at anføre dens middelværdi og varians.

(15.6) SÆTNING.

(Middelværdi og varians for χ^2-fordelingen) Lad k være et naturligt tal, og lad X være en stokastisk variabel, der er χ^2-fordelt med k frihedgrader. Da er middelværdi og varians for X givet ved:

$$\mathrm{E}(X) = k, \quad og \quad \mathrm{Var}(X) = 2k.$$