Cours MP chapitre 1 : les séries numériques.

I. Généralités

La partie I aborde les séries dans un espace vectoriel de dimension finie.

1) Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u une suite de terme général $u_n \in E$, on appelle série associée la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\in IN}$ avec

$S_p = \sum_{k=0}^{p} u_k$. On parle de la série de terme général u_n.

Notation : on parle de la série $\sum u_p$

2) Définition

On dit que la série est convergente si la suite des sommes partielles est convergente. Dans les autres cas, on dit que la série est divergente.

En cas de convergence, la limite S = $\lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{p} u_k$ est appelée somme de la série. On la note $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$

La quantité $R_p = S - \sum_{k=0}^{p} u_k$ est alors appelée reste d'ordre p de la série.

La convergence d'une suite ou d'une série d'éléments d'un espace vectoriel s'exprime en fonction de la norme choisie. On garde en mémoire que dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3) Exemples

Ces premiers exemples sont pris dans IR,

a) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

On pose $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, les sommes partielles sont croissantes car les termes sont positifs.

C'est l'occasion de rappeler qu'une suite réelle monotone (dans ce cas croissante) n'a que deux comportements possibles:

- croissante et majorée et dans ce cas converge,
- croissante et non majorée et dans ce cas diverge vers $+\infty$.

Ici les sommes partielles sont majorées, en effet, deux méthodes élémentaires possibles:

- montrer que $\forall\ n > 1$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ par récurrence.
- montrer que $\forall\ k \geq 2$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$, puis $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, séparer en deux sommes et changement d'indice, on en déduit une majoration de S_n.

Ces deux méthodes ne nous donnent pas la limite λ de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, on sait seulement que la limite λ est ≤ 2.

b) La série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente

$u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$, donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, la suite des sommes partielles est croissante.

Deux techniques pour montrer que la série est divergente:

- Si on suppose que (S_n) converge, alors comme suite extraite, (S_{2n}) a même limite, mais par différence: $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ ne peut tendre vers 0.
- Montrer que les suites $u_n = S_n - \ln(n)$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$ sont adjacentes. On en déduit qu'elles ont même limite et par la même occasion, on prouve que $S_n \sim \ln(n)$ donc $S_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$.

Dans ce cas, on ne peut pas définir le reste d'ordre n.

4) Proposition

On ne modifie pas la nature d'une série (convergente, divergente) en modifiant un nombre fini de termes de la suite.

5) a) Proposition

Soit une série de terme général $u_n \in E$,
Si la série converge, alors le terme général u_n tend vers 0.

dém : $u_n = S_n - S_{n-1}$ et les deux sommes partielles ont même limite en cas de convergence de la série.

b) Corollaire

Si le terme général ne tend pas vers 0, la série ne converge pas.

Attention

C'est une condition nécessaire mais pas suffisante, par exemple $\frac{1}{n}$ tend vers 0, mais la série harmonique diverge.

6) Proposition

Comme les séries ne sont que les sommes partielles des suites dans un espace vectoriel de dimension finie, les structures algébriques vues en MPSI sont conservées:
Les séries vectorielles convergentes ont une structure d'espace vectoriel sur E (IK espace vectoriel).
Soit deux séries vectorielles de terme général u_n et v_n convergentes avec pour sommes respectives S et S',
$\forall(\lambda, \mu) \in IK^2$ la série de terme général $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ est convergente, de somme $\lambda S + \mu S'$.

7) Théorème fondamental d'équivalence suite/série

Soit une série quelconque, de terme général u_n. On retrouve ce terme général à partir de $S_n - S_{n-1} = u_n$ pour $n \geq 1$.
Ceci définit une bijection entre les séries et les suites.

Soit $(u_n) \in E^{IN}$ une suite vectorielle, la suite (u_n) converge dans E si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

démonstration :

posons $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$

La convergence de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ n'est rien d'autre que la convergence de la suite (T_n). Si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, alors (u_{n+1}) converge. Et réciproquement, si (u_n) converge, la suite (T_n) converge.

Il y a deux façons classiques d'exploiter ce résultat :

soit on exprime u_n comme une somme partielle à partir de $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) + u_0$

Soit en cas de convergence de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$, on a également $\lambda - u_n = \sum_{k=n}^{\infty}(u_{k+1} - u_k)$, où λ est la limite de la suite (u_n).

8) Convergence Absolue

Dans l'étude de la convergence d'une série ou d'une suite, deux situations sont à distinguer :

- on connaît ou on identifie la limite éventuelle λ de la suite ou de la série. Dans ce cas, on peut poser $\lambda - \sum_{k=0}^{n} u_k$ et étudier la norme de la différence.
- On ne connait pas la limite λ, et il ne reste comme ressource que l'étude de la contribution de chaque terme u_n dans la somme partielle. Donc on envisage essentiellement la norme $N(u_n)$ de ce terme.

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme N, soit $\sum u_n$ une série vectorielle. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série NUMERIQUE $\sum N(u_n)$ est une série convergente. C'est une série de réels positifs ou nuls.

Théorème

Soit E un espace de dimension finie, la convergence absolue d'une série de E implique la convergence.

Démonstration:
On revient d'abord au cas réel en considérant une norme particulière sur E. Soit $B=(e_1,\ldots,e_p)$ une base quelconque de E, on pose $N(x) = \sup\{|x_i|/i\in [1..p]\}$ où $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ (N est la norme infinie).

Pour tout vecteur u_n on pose $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i$. La convergence absolue de $\sum N(u_n)$ est équivalente à la convergence absolue des p séries numériques $\sum_n |u_{n,i}|$. La convergence de la série $\sum u_n$ est équivalente à la convergence des p séries numériques $\sum_n u_{n,i}$. Il reste à prouver que la convergence absolue d'une série dans IR implique la convergence.

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle absolument convergente, alors la série $\sum u_n$ converge;

Démonstration
On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, d'abord la suite (S_n) est bornée. En effet

pour $\varepsilon=1$, $\exists n_0 \in$ IN, $\forall n \in$ IN, $n>n_0 \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leq 1$ comme reste partiel d'une série absolument convergente.

Donc $|S_n - S_{n_0}| \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \leq 1$, il en résulte que la suite (S_n) est bornée dans IR.
D'après le théorème de Bolzano Weierstrass, elle admet au moins une valeur d'adhérence λ.
λ est limite d'une suite extraite $(S_{\varphi(k)})$.
Supposons que (S_n) ne converge pas vers λ :
$\exists \varepsilon>0$, $\forall n_0 \in$ IN, $\exists\, n_1 \in$ IN, $n_1>n_0$ et $|S_{n_1} - \lambda| > \varepsilon$ (1)

Or pour $\varepsilon>0$ fixé, $\exists n_0 \in$ IN, $\forall (n,n_1) \in$ IN^2, $n>n_0$ et $n_1>n_0 \Rightarrow \sum_{k=n_1}^{n} |u_k| \leq \varepsilon \Rightarrow |S_n - S_{n_1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

On fixe n_0 conformément à (2), on choisit n_1 conformément à (1), et pour tout $n=\varphi(k)>n_0$, il en résulte que $|S_n - \lambda| > \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est une contradiction.

Attention, la convergence n'implique pas la convergence absolue !

La série harmonique alternée $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge , sa somme vaut ln(2)

Une technique de base sur ce classique est la suivante:

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$,

$$S_{2n} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+2} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p} - 2\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+2} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=n+1}^{2n+1} \frac{1}{p}$$

On peut alors utiliser une somme de Riemann:

$$\sum_{p=n+1}^{2n+1} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$$

Enfin $S_{2n+1} = S_{2n} - 1/(2n+1)$ les suites extraites de rang pair et impair des sommes partielles convergent vers la même limite, donc la série converge et a pour limite ln(2).

Or la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}$ ne converge pas absolument puisque $\sum_n \frac{1}{n+1}$ diverge.

II Cadre des séries numériques : Les séries de référence.

1) Les séries géométriques

Théorème

Soit $q \in IR$, on définit $u_n = q^n$, la série de terme général u_n converge si et seulement si $|q| < 1$.

Dém :

La somme partielle se calcule : $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$

Donc en cas de convergence $\sum_{k=0}^{\infty} u_n \to \frac{1}{1-q}$

2) Les séries de Riemann

a) Définition

Soit $\alpha \in IR$, on appelle série de Riemann, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, pour $n > 0$.

b) Exemples :

les séries vues en exemple ci dessus sont des cas particuliers de séries de Riemann.

c) Théorème

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Démonstration

Nous allons comparer la série à une intégrale, c'est une technique très importante dans ce chapitre.

D'abord, on peut remarquer pour $\alpha \leq 0$, d'une manière très élémentaire $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série ne peut converger. Ensuite on a une série à termes positifs, la convergence est donc équivalente à la majoration des sommes partielles.

Ensuite pour $\alpha > 0$, on a $f : t \to \frac{1}{t^\alpha}$ est une fonction décroissante sur IR^{+*}.

Donc par encadrement $\forall\, t \in [k,k+1]$, avec $k \geq 1$: $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$,

on intègre l'inégalité: $\frac{1}{k^\alpha} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$

on somme les inégalités en utilisant Chasles: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha}$

Dans la somme de droite, on fait un changement d'indice: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \geq \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha}$

Enfin on bascule l'encadrement: $1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha}dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}dt$

Maintenant, la forme de la fonction permet de calculer une primitive:

Si $\alpha = 1$, $\int_1^{n} \frac{1}{t}dt = \ln(n) \Rightarrow 1 + \ln(n) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$ donc la série diverge.

Si $\alpha \neq 1$, $\int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}[t^{1-\alpha}]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}[n^{1-\alpha} - 1]$

deux sous cas,

Si $0 < \alpha < 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}[(n+1)^{1-\alpha} - 1] \to +\infty$ et la série diverge.

Si $\alpha > 1$, $1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha}dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{1-\alpha}[n^{1-\alpha} - 1] \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et le terme de gauche a une limite en $+\infty$, c'est donc une suite bornée, donc majorée. La somme partielle est donc majorée et converge.

d) Comportement du reste

Théorème

Pour une série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, lorsque $\alpha > 1$, $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Démonstration

Une façon d'encadrer le reste est de produire le même encadrement mais avec un deuxième indice:

d'après la définition du reste :

$R_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha}$, on pose donc $R_n(p) = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha}$ et on encadre l'expression en considérant n fixé et $p > n$:

C'est la même fonction que précédemment qui est utilisée:

$\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \geq \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{(k+1)^\alpha}$ conduit à :

$$\int_{n+2}^{p+2} \frac{1}{t^\alpha}dt \geq R_n(p) \geq \int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{t^\alpha}dt$$

les deux intégrales se calculent et n'oublions pas que n est fixé, $p \to +\infty$

par exemple $\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}[t^{1-\alpha}]_{n+1}^{p+1} = \frac{1}{1-\alpha}[(n+1)^{1-\alpha} - (p+1)^{1-\alpha}] \to \frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha}$

si on passe à la limite, par théorème d'encadrement:

$\frac{1}{1-\alpha}(n+2)^{1-\alpha} \geq R_n(p) \geq \frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha}$ et désormais on peut prendre l'équivalent quand $n \to +\infty$

$R_n(p) \sim \frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{1-\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha}$

3) La série exponentielle

Théorème

$\forall\ x \in IR$, la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_n \frac{x^n}{n!} = e^x$

Démonstration

On utilise la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction exp.

Rappelons cette formule:

Pour f = exp de classe C^∞ sur IR, $\forall\ x \in IR$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

soit

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt \text{ or } \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt\right| \leq \sup_{[0,x]}(e^t)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

on pose $v_n = \frac{|x|^n}{n!}$, pour x = 0 , il n'y a rien à faire, pour $x \neq 0$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|x|}{n+1}$

Donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$, ce qui signifie que pour n assez grand $|v_{n+1}| < |v_n|$,

donc la suite v décroît et est minorée par 0, elle converge. Sa limite λ est nécessairement 0, sinon $\frac{v_{n+1}}{v_n} \to \frac{\lambda}{\lambda} = 1$ ce qui est contradictoire.

Nous avons donc majoré le reste intégral. La série exponentielle converge avec

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \to e^x$$

III Cadre des séries numériques : les méthodes de comparaison

1) Comparaison avec des séries à termes équivalents, négligeables ou dominants.

a) Théorème

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes POSITIFS, on note $S_n(u)$ le terme général de la série $\sum u_n$ (la somme partielle de la suite u) et $S_n(v)$ celui de la série $\sum v_n$. De même on note $R_n(u)$ le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ si elle converge, et $R_n(v)$ le reste d'ordre n de la série $\sum v_n$ si elle converge. On suppose $\forall\ n \in IN$, $0 \leq u_n \leq v_n$ Alors on a les résultats suivants i) $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge et $R_n(u) \leq R_n(v)$ ii) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge et $S_n(u) \leq S_n(v)$

Démonstration

C'est un encadrement sur les sommes partielles.

b) Corollaire

Les comparaisons entre une série étudiée et une série de référence peuvent se faire par l'intermédiaire des outils de comparaison vus en Sup, parfois plus sophistiqués qu'une inégalité directe : o , O et équivalents.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes POSITIFS, avec les notations du théorème ci dessus:

i) $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge et $R_n(u) = O(R_n(v))$

ii) $u_n = o(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge et $S_n(u) = o(S_n(v))$

iii) $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge et $R_n(u) \sim R_n(v)$

iv) $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum v_n$ diverge et $S_n(u) \sim S_n(v)$

C'est un point central de ce chapitre.

Démonstration

Tout d'abord, pour les comportements de même nature des deux suites, c'est un problème d'encadrement. Tous les cas se traitent de la même manière.

Considérons par exemple le cas iii)

Comme $u_n \sim v_n$, il existe un rang à partir duquel $u_n \le 2v_n$

Comme la série $\sum 2v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge par application du théorème a).

Pour la comparaison des restes, revenons à la définition de l'équivalence:

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in IN\ ,\ \forall k \in IN\ ,\ k > n_0 \Rightarrow v_k(1-\varepsilon) \le u_k \le v_k(1+\varepsilon)$

On somme ces inégalités pour $n > n_0$, il vient $R_n(v)(1-\varepsilon) \le R_n(u) \le R_n(v)(1+\varepsilon)$, ce qui traduit l'équivalence des deux restes.

Noter que ces deux restes sont de limite nulle puisque les séries convergent.

Observons le cas iv) pour l'équivalence des sommes partielles. En effet, il se peut que les premiers termes des deux suites soient très différents, mais la divergence des sommes partielles va assurer l'équivalence des infiniment grands.

Donc supposons $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ diverge,

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in IN\ ,\ \forall k \in IN\ ,\ k > n_0 \Rightarrow u_k(1-\varepsilon) \le v_k \le u_k(1+\varepsilon)$

On considère $S_n(v)$ pour $n > n_0$, il vient par encadrement:

$$\sum_{k=0}^{n_0} v_k + \sum_{k=n_0+1}^{n}(1-\varepsilon)u_k \le \sum_{k=0}^{n} v_k \le \sum_{k=0}^{n_0} v_k + \sum_{k=n_0+1}^{n}(1+\varepsilon)u_k$$

On fait apparaître $S_n(u)$:

$$\sum_{k=0}^{n_0} v_k + (1-\varepsilon)(S_n(u) - \sum_{k=0}^{n_0} u_k) \le \sum_{k=0}^{n} v_k \le \sum_{k=0}^{n_0} v_k + (1+\varepsilon)(S_n(u) - \sum_{k=0}^{n_0} u_k)$$

Comme $S_n(u) \to +\infty$, il ne manque finalement qu'un nombre fini et fixe de termes à droite et à gauche. On rassemble tout ce qui s'arrête à n_0 :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n_0} v_k - (1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0} u_k)}{S_n(u)} + (1-\varepsilon) \le \frac{S_n(v)}{S_n(u)} \le \frac{\sum_{k=0}^{n_0} v_k - (1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0} u_k)}{S_n(u)} + (1+\varepsilon)$$

pour $n \to +\infty$, $\dfrac{\sum_{k=0}^{n_0} v_k - (1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0} u_k)}{S_n(u)} \to 0$ car le numérateur ne dépend pas de n, il en est de même pour la majoration de droite.

Donc $\exists\ N \in IN\ ,\ n > N \Rightarrow -\varepsilon < \dfrac{\sum_{k=0}^{n_0} v_k - (1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0} u_k)}{S_n(u)} < \varepsilon$ et $-\varepsilon < \dfrac{\sum_{k=0}^{n_0} v_k - (1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0} u_k)}{S_n(u)} < +\varepsilon$

On rassemble ce qui vient d'être obtenu:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists N \in IN\ ,\ \forall\ n \in IN\ \ n > N \Rightarrow\ (1-2\varepsilon) \le \dfrac{S_n(v)}{S_n(u)} \le (1+2\varepsilon)$ d'où

l'équivalence des sommes partielles.

2) Exemples d'utilisation :

a) Critère de Riemann

Soit une série de terme général u_n positif, soit $\alpha \in$ IR tel que $n^\alpha u_n \to a > 0$

Si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge.

Si $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ diverge.

On a également si $n^\alpha u_n \to 0$ avec $\alpha > 0$, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration

On a une série équivalente à une série de Riemann.

b) Exemples:

Convergence et calcul de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$; $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$

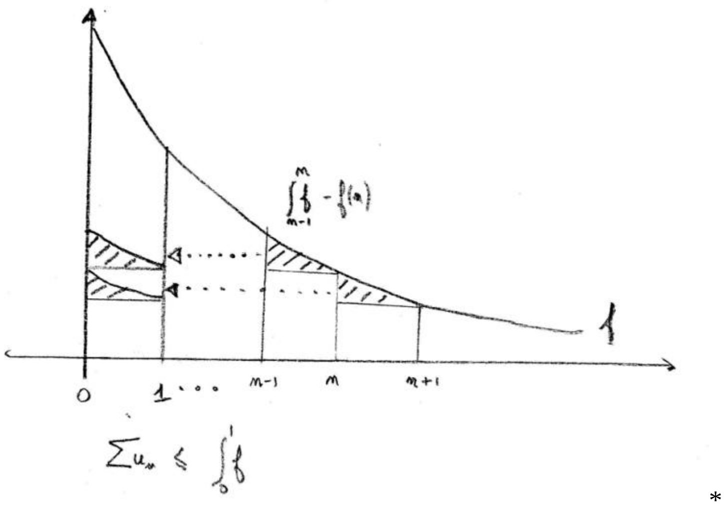
3) Comparaison des séries à des intégrales

a) Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ (on rappelle qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est intégrable sur ce segment), à valeurs dans IR+, et décroissante.

La série de terme général $u_n = \int_{n-1}^{n} f - f(n)$ est convergente.

Un petit dessin:



*

Démonstration :

$\forall$ t $\in$ [k–1,k], f(k) $\leq$ f(t) $\leq$ f(k–1) $\Rightarrow 0 \leq \int_{k-1}^{k} f - f(k) \leq$ f(k–1) – f(k) , donc les termes de la série sont positifs

On somme ces inégalités : $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq$ f(0) – f(n) $\leq$ f(1) cqfd.

b) Corollaire

La série $\sum_n f(n)$ converge $\Leftrightarrow$ f intégrable sur IR+

On verra ce que signifie f intégrable sur IR+ dans le chapitre sur l'intégration sur un intervalle.

Dans notre progression il suffit de constater que les sommes partielles sont majorées par f(1) – f(n);

c) Application

On utilise ce critère quand la série est définie par une fonction décroissante positive dont on peut (sait?) calculer une primitive.

Par exemple: $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$, le critère de Riemann ne donne rien.

Or constate que $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ est décroissante et positive à partir de $[2,+\infty[$

Or $\displaystyle\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]_2^n \to \frac{1}{\ln 2}$ par valeurs inférieures. Donc la série est convergente.

Cette intégrale s'appelle une intégrale de Bertrand, on peut généraliser la méthode en remplaçant l'exposant deux par un exposant quelconque, par contre l'intégration nécessite alors un changement de variables.

d) Remarque ultime

Retenez que pour une fonction décroissante, il est toujours fructueux de comparer une série de terme général f(n) avec une intégrale de f, que la série converge ou non. La remarque s'applique également au reste d'ordre n.

4) Critère de d'Alembert

a) Théorème

> Soit $\sum_n u_n$, une série à termes strictement positifs.
>
> On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\lambda \geq 0$ quand $n \to +\infty$.
>
> - $0 \leq \lambda < 1 \Rightarrow \sum_n u_n$ converge.
> - $\lambda > 1 \Rightarrow \sum_n u_n$ diverge
> - $\lambda = 1$ ne permet pas de conclure.

Démonstration

On place un réel q entre λ et 1.

Dans le cas $\lambda < q < 1$, on écrit $q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda < q$, il existe un rang à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{q^{n+1}}{q^n} \Rightarrow$

$\dfrac{u_{n+1}}{q^{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{q^n}$, donc la suite de terme général $\dfrac{u_n}{q^n}$ est décroissante et positive, donc con verge et est bornée.

Ce qui signifie que $u_n = O(q^n)$, or la série $\sum q^n$ converge. Donc la série $\sum_n u_n$ également.

Dans le cas $\lambda > 1$, on place $1 < q < \lambda$, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda > q$, il existe un rang à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \dfrac{q^{n+1}}{q^n} \Rightarrow$

$\dfrac{u_{n+1}}{q_{n+1}} \geq \dfrac{u_n}{q^n} \geq \dfrac{u_0}{q^0} \Rightarrow u_n \geq q^n \dfrac{u_0}{q^0}$, donc la série diverge par comparaison à la série de terme général q^n qui diverge trivialement.

b) Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

5) Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration

C'est une application de la comparaison d'une série à une intégrale.

On pose $u_n = \ln(n!) = \ln(1) + \ldots + \ln(n)$, donc on va encadrer le terme ln(k) par :

$\forall k \geq 2, \quad \int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt$

$\Rightarrow \int_{1}^{n} \ln(t)dt \leq u_n \leq \int_{2}^{n+1} \ln(t)dt$, on a déjà un équivalent de $u_n \sim n\ln(n)$

On pose alors $v_n = u_n - (n + \frac{1}{2})\ln(n) + n$ et on montre que v_n admet une limite finie.

Comme vu en remarque dans la première partie, il suffit de prouver que $v_{n+1} - v_n$ est le terme général d'une série convergente.

Or $v_{n+1} - v_n = 1-(n + \frac{1}{2})\ln(1 - \frac{1}{n+1}) \sim \frac{1}{12n^2}$ donc la série converge et (v_n) admet une limite λ.

Donc $\exp(v_n)$ admet une limite et on en déduit qu'il existe $\mu \in$ IR / $n! \sim \mu\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

La valeur de μ se calcule avec les intégrales de Wallis:

$I_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2.2^{2n}(n!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$

IV séries alternées

1) a) Théorème

Dans $\mathbb{C}$, la convergence absolue d'une série implique sa convergence.

Démonstration

$\mathbb{C}$ est un IR espace de dimension 2, donc le résultat sur les séries vectorielles . C'est à dire que toute suite de Cauchy converge. (voir cours sur les espaces vectoriels normés).

b) Corollaire

L'étude d'une série $\sum u_p$ complexe ou réelle de terme général de signe non constant peut être réalisée en appliquant des critères sur les séries positives à la série $\sum |u_p|$. On notera qu'on obtient dans ce cas des critères de convergence, mais pas la somme de la série.

2) Théorème sur les séries alternées

a) Définition

Une série $\sum u_n$ est dite alternée si u_n est de la forme $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n > 0$

b) Exemple

$\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}$

c) Théorème de convergence des Séries Alternées: critère spécial des séries alternées.

Soit $\sum (-1)^n a_n$ une série alternée avec $a_n > 0$, si le terme général a_n tend vers <u>0 en décroissant</u> alors $\sum (-1)^n a_n$ converge.

De plus, dans ce cas, le reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé a_{n+1} .

Si on pose $S = \sum (-1)^n a_n$, $S - \sum_{k=0}^{n} u_k = R_n$ alors $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Démonstration

Les sommes partielles extraites de rang pair et impair sont adjacentes:

$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} < 0$ donc (S_{2n}) décroît. De même $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} > 0$ donc (S_{2n+1}) croît.
Et $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \to 0$.
Enfin d'après le théorème sur les suites adjacentes, si on appelle S la limite commune, on a l'encadrement:

$$S_{2n+1} < S < S_{2n} \Rightarrow |S - S_{2n}| < |S_{2n} - S_{2n+1}| = a_{2n+1} \text{ et de même avec } |S - S_{2n+1}|$$

d) Exemple

$\sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge car $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 en décroissant, et sans connaître la limite on peut écrire:

$$|R_n| = \left|\sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right| \leq \frac{1}{n+2}$$

V Ensembles dénombrables

1) a) Définition

Un ensemble I est dit dénombrable si et seulement si il est en bijection avec IN.

b) exemple

$\mathbb{Z}$ est dénombrable: on pose $\varphi(2n) = n$ et $\varphi(2n+1) = -n-1$. φ établit une bijection de IN sur $\mathbb{Z}$.

c) Définition

Un ensemble I est fini ou dénombrable s'il est en bijection avec une partie de IN.

Cette définition rassemble simplement les cas finis et dénombrables.

Il faut maintenant passer de dénombrable sur le plan de la définition à une manière de dénombrer les éléments d'un ensemble : c'est une caractérisation des ensembles dénombrables.

2) Proposition

Soit I un ensemble, I est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une suite (J_n) de sous-ensembles finis, croissante pour l'inclusion, telle que $I = \bigcup_{n \in IN} J_n$

Démonstration:
Si I est dénombrable, il existe une bijection φ de IN sur I, c'est-à-dire que les éléments de I sont indexés par IN : $I = \varphi(IN)$, on pose $x_n = \varphi(n)$ et $J_n = \{x_i, 0 \leq i \leq n\}$. Les (J_n) forment la suite de sous-ensembles finis, croissante pour l'inclusion telle que $I = \bigcup_{n \in IN} J_n$.
Si I est fini, c'est plus simple, on pose $J_n = I$ pour tout n.

Réciproquement, si $I = \bigcup_{n \in IN} J_n$ avec les (J_n) suite croissante de sous-ensembles finis pour l'inclusion.
On définit φ de la manière suivante.
Pour tous les élément $x \in J_0$, on indexe les éléments de 0 à $\text{card}(J_0) - 1$.
Pour tous les éléments $x \in J_1 \backslash J_0$, on indexe les éléments de $\text{card}(J_0)$ à $\text{card}(J_1) - 1$.
Par récurrence, on suppose construit une indexation de 0 à $\text{card}(J_n) - 1$ des éléments de J_n.
Comme l'ensemble J_{n+1} est fini, l'ensemble $J_{n+1} \backslash J_n$ est fini (éventuellement vide), on indexe ses éléments de $\text{card}(J_n)$ à $\text{card}(J_{n+1}) - 1$.
On vérifie aisément que tout élément x de I est indexé par ce procédé.
Ce procédé théorique permet de construire explicitement des bijections de IN sur un ensemble dénombrable.

Exemples
- IN^2 est dénombrable, on considère les ensembles $J_n = \{(p,q) \in IN^2 / p+q \leq n\}$.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable , on considère $J_n = \{p/q \,/\, |p|+q \leq n\}$ $n \geq 1$.

Corollaire

Tout sous ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

3) Proposition

Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration
Par récurrence sur le nombre d'ensembles intervenant dans le produit. Si E et F sont dénombrables, on montre essentiellement que E×F est dénombrable. On introduit (J_n) et (K_n) deux suites croissantes exhaustives pour l'inclusion de sous-ensembles finis respectivement pour E et F.
Les parties $L_n = E_n \times F_n$ sont croissantes pour l'inclusion et leur réunion est E×F.

4) Proposition

IR n'est pas dénombrable.

Démonstration
Montrons que le segment [0,1] n'est pas dénombrable.
Supposons que [0,1] soit dénombrable.
Les élémenst de [0,1] sont donc indexables et forment une suite (x_n).
Si $x_0 \geq 1/2$, posons $y_0=0$.
Si $x_0<1/2$, posons $y_0=1$.

Dans les deux cas, $y_0= 1-E(2x_0)$. C'est-à-dire $x_0 \neq 2^{-y_0}$
Plus généralement, tout réel x de [0,1] admet une approximation par défaut en base 2, de la même manière qu'il admet une approximation décimale :
En posant $a_n(x) = E(2^{n+1}x) - 2E(2^n x)$, il vient immédiatement pour tout N :
$\sum_{i=0}^{N} a_i(x)2^{-i} \leq x < \sum_{i=0}^{N} a_i(x)2^{-i} + 2^{-N}$, c'est la même formule d'encadrement d'un réel en approximation décimale, mais obtenue en base 2.
On va construire la suite (y_n) en examinant à chaque indice le n° terme de la décomposition en base 2 de l'élément x_n.
Nous venons de définir $y_0 = 1 - a_0(x_0)$. Posons $y_n = 1 - a_n(x_n)$.

Considérons maintenant l'élément $x = \sum_{i=0}^{\infty} y_i 2^{-i}$, $x\in[0,1]$.
Soit m son indice dans l'indexation des réels de [0,1], $x=x_m$.
Il apparaît que $a_m(x_m) = 1 - a_m(x_m)$, ce qui est une contradiction.

VI Familles sommables de nombres complexes.

1) Famille sommable de nombres réels positifs.
Le procédé introduit ici sera revu dans le cas des intégrales généralisées.
Définition

Soit $S = (u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs, I un ensemble dénombrable. On dit que S est sommable s'il existe un majorant M>0 tel que : $\forall$ $F \subset I$, F fini, la somme partielle des éléments indexés par F est majorée par M : $\sum_{i\in F} u_i \leq M$. Dans ce cas, $\left\{ \sum_{i\in F} u_i \,/\, F \subset I, F \text{ fini} \right\}$ est un ensemble majoré. On note $\sum_{i\in I} u_i$ sa borne sup. Lorsque S n'est pas sommable, on note $+\infty$ sa somme : $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Dans le cas d'une indexation par IN, nous retrouvons la situation des séries numériques à termes positifs.
Mais comme on vient de le voir, il existe des ensembles dénombrables où l'indexation par IN n'est pas évidente.
Une deuxième subtilité intervient, c'est la question de l'ordre de sommation et de la méthode de sommation :

2) Théorème de sommation par paquets

Soit $(I_n)_{n\in IN}$ une partition de I, et S = $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs. La famille S est sommable si et seulement si:
i) pour tout n ∈ IN, la sous-famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est elle-même sommable.

ii) La série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ est une série convergente.

Dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Ce théorème répond aux deux questions : peut-on réordonner les termes, et procéder à des sommations intermédiaires.
La démonstration est indiquée comme étant hors-programme.
Mais elle n'est pas sans intérêt…

- Supposons S sommable, posons $\sum_{i\in I} u_i = \lambda$ sa somme.

i) $\forall n \in$ IN, $I_n \subset I$, donc toute sommation sur un sous-ensemble fini de I_n admet le même majorant λ. La famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est donc également sommable.

ii) $\forall$ p ∈ IN, $S_p = \sum_{n=0}^{p}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ est donc une somme finie de sommes finies, et on a là une somme partielle croissante, et majorée toujours par le même λ. Donc (S_p) est une suite croissante majorée, donc convergente. On vient de démontrer que la série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ est une série convergente, et que sa somme vérifie : $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \le \lambda$.

iii) Il reste à démontrer que sa somme est λ.

Soit ε>0, par caractérisation de la borne supérieure, il existe un ensemble fini F tel que : $\left|\lambda - \sum_{i\in F} u_i\right| < \varepsilon$

Soit i ∈ F, il existe un indice j tel que $i \in I_j$. Comme F est un ensemble fini, il existe un entier n_0 tel que $F \subset \bigcup_{n=0}^{n_0} I_n$, il suffit en effet de prendre n_0 supérieur au maximum des indices j précités.

Comme les u_i son positifs ou nuls, on obtient :

$$\lambda - \varepsilon \le \sum_{i\in F} u_i \le S_{n_0} = \sum_{n=0}^{n_0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \le \lambda$$

La croissance des sommes partielles permet de conclure.

- Si S n'est pas sommable, il se peut très bien que pour tout n ∈ IN, la sous-famille $(u_i)_{i\in I_n}$ soit quand même sommable. On peut par exemple considérer le cas où I_n={n}. Mais même si chaque sous famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable, on montre qua la série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ diverge. En reprenant les éléments de démonstration du cas précédent, soit H > 0, comme S n'est pas sommable, il existe F fini tel que $\sum_{i\in F} u_i > H$. Avec l'existence d'un indice n_0 tel que $F \subset \bigcup_{n=0}^{n_0} I_n$, on obtient alors $H < \sum_{n=0}^{n_0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

3) Familles sommables de nombres complexes.

a) Définition

Soit S = $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, I un ensemble dénombrable.
On dit que S est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Une famille sommable indexée par IN est une série absolument convergente.

b) Commentaire

A priori, même dans les paragraphes précédents, lorsque la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable comme famille de réels positifs, on n'a pas proposé d'ordonnancement particulier de I dénombrable pour en calculer la somme. On a écrit que toute partition de I conduit au même résultat pour calculer un groupement par paquets. Et on a fait la remarque que deux indexations différentes de I peuvent être vues comme deux partitions différentes.
En effet, par exemple dans I= IN, on peut considérer la partition correspondante à $I_n = \{n\}$, et si φ est une bijection de IN sur lui-même, on peut considérer $I'_n=\{\varphi(n)\}$.
Ainsi, le théorème de sommations par paquets prouve en corollaire que toute sommations après permutation des indices de I dénombrable, donne le même résultat pour une famille sommable de réels positifs.
Dans le cas d'une famille complexe sommable, on va prouver que la somme est invariante par permutation de l'ensemble des indices. Ensuite on prouvera le théorème de sommation par paquets pour une famille complexe sommable. Dans le cas complexe, ce théorème englobe l'invariance par permutation des indices, mais le programme officiel précise que la démonstration de l'invariance de la somme par permutation des indices est non exigible, mais au programme.

On va donc commencer par passer du caractère sommable au calcul effectif de la somme.

c) Théorème d'invariance par permutation des indices

Soit $S = (u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable où I est un ensemble dénombrable
Soit une suite (J_n) de sous-ensembles finis, croissante pour l'inclusion, telle que $I = \bigcup_{n\in IN} J_n$
On pose $S_{J_n} = \sum_{i\in J_n} u_n$, la suite (S_{J_n}) converge dans $\mathbb{C}$, et sa limite λ ne dépend pas du choix de la suite (J_n).
On pose $\lim S_{J_n} = \sum_{i\in I} u_i$

Lemme de découpage

Soit $S = (u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable, alors en posant pour tout i : $u_i = x_i + iy_i$, les familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables.
De plus, pour tout x_i, on pose $x_i^+ = x_i$ si $x_i \geq 0$, et $x_i^+ = 0$ si $x_i < 0$ et $x_i^- = 0$ si $x_i \geq 0$, $x_i^- = -x_i$ si $x_i < 0$, de sorte que $x_i = x_i^+ - x_i^-$ pour tout x_i et les familles (x_i^+) et (x_i^-) sont positives. Alors les familles (x_i^+) et (x_i^-) sont sommables, et $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-$. Le résultat est analogue pour la famille $(y_i)_{i\in I}$.

Démonstration
Comme $|u_i|\geq |x_i|$, on en déduit le caractère sommable de la famille $(x_i)_{i\in I}$, il en est de même pour $|x_i|\geq x_i^+$, et les autres cas également.
De plus pour la famille (x_i^+), montrons que la limite de $S_{J_n}(x^+) = \sum_{i\in J_n} x_i^+$ ne dépend pas du choix de (J_n) :

$(x_i^+)_{i\in I}$ étant sommable, on pose μ^+ la borne supérieure de $\left\{\sum_{i\in F} x_i^+ \,/\, F \subset I, F \text{ fini}\right\}$, on a vu que $\forall\varepsilon>0\ \exists\ F\subset I$, F fini, tel que $\left|\mu^+ - \sum_{i\in F} x_i^+\right| < \varepsilon$.

En choisissant n_0 tel que $F \subset J_{n_0}$, il vient : $\mu^+ - \varepsilon \leq \sum_{i\in F} x_i^+ \leq S_{J_{n_0}}(x^+) \leq \mu^+$

Finalement, pour toute suite croissante pour l'inclusion (J_n), il vient :

$\sum_{i\in J_n} u_i = \sum_{i\in J_n} x_i^+ - \sum_{i\in J_n} x_i^- + i\left(\sum_{i\in J_n} y_i^+ - \sum_{i\in J_n} y_i^-\right)$ et on passe à la limite dans chaque somme.

d) Théorème

Soit I un ensemble dénombrable, l'ensemble des familles de nombres complexes sommables indexées par I est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. L'application qui à une famille sommable associe sa somme est linéaire.

Il reste le théorème de sommation par paquets pour les familles sommables complexes. La démonstration est hors programme.

4) Théorème de sommation par paquets pour une famille complexe sommable.

Soit $(I_n)_{n\in IN}$ une partition de I, et $S = (u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors :

i) pour tout $n \in IN$, la sous-famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est elle-même sommable.

ii) La série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ est une série convergente.

et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

VII Le cas des familles indexées par IN²

1) Série double

a) Définition

Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in IN\times IN}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par IN×IN. On appelle série double la série indexée par le terme général $u_{p,q}$.

b) Théorème de sommation pour les séries doubles positives réelles.

Soit $S=(u_{p,q})_{(p,q)\in IN\times IN}$ une famille de nombres réels positifs,

La famille S est sommable si et seulement si $\forall\ p \in IN$, la série $\sum_q u_{pq}$ converge vers un réel a_p , et si $\sum_p a_p$ converge.

Dans ce cas, on peut inverser l'ordre de sommation :

$\forall q \in IN$, la série $\sum_p u_{pq}$ converge également vers un réel b_q et $\sum_q b_q$ converge.

De plus $\sum_{p=0}^{\infty} a_p = \sum_{q=0}^{\infty} b_q$, les sommes sont égales.

On parle de sommation par tranche, on dit qu'en cas de convergence, on peut inverser l'ordre de sommation.
Ce théorème est la conséquence de la partition de I = INxIN en parties de la forme $I_n = \{n\}xIN$ et du théorème de sommation par paquets.

c) Exemple:

$\sum_{p>1,q>1} \frac{1}{p^q}$, on regarde d'abord en sommant par rapport à q pour avoir une série géométrique convergente, comme p > 1, la raison est toujours inférieure strictement à 1.

$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{p^q} = \frac{\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p(p-1)}$, ceci est le terme général d'un série convergente d'après le critère de Riemann, on décompose la fraction en éléments simples:

$$\sum_{p>1} \frac{1}{p(p-1)} \to 1$$

d) Théorème de sommation pour les séries doubles complexes.

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in IN\times IN}$ une famille de nombres réels ou complexes, si la famille $(|u_{p,q}|)_{(p,q)\in IN\times IN}$ est une famille sommable (c'est à dire que le théorème 3 s'applique à la famille des $|u_{pq}|$) , alors on a :

$\forall$ p $\in$ IN , la série $\sum_q u_{pq}$ converge vers un réel a_p , et $\sum_p a_p$ converge ,

de même,

$\forall$q $\in$ IN , la série $\sum_p u_{pq}$ converge également vers un réel b_q et $\sum_q b_q$ converge.

De plus $\sum_{p=0}^{\infty} a_p = \sum_{q=0}^{\infty} b_q$, les sommes sont égales.

2) Produit de deux séries

a) Définition

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes (série signifie indexées par IN), on appelle série produit la

On définit la série double par $w_{pq} = u_p v_q$.

b) Théorème

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes absolument convergentes, de sommes respectives S et T, la série produit est une famille sommable. Sa somme est ST.

Démonstration

La famille $(|w_{pq}|)$ est sommable, puisqu'en considérant la partition de IN^2 définie par $J_n = \{n\}\times IN$, on trouve une somme partielle $|u_n|\left(\sum_{k=0}^{\infty}|v_k|\right)$, qui est le terme général d'une série convergente. Le théorème de sommation par paquets appliqué à cette partition entraîne que la somme vaut ST.

c) Produit de Cauchy.

Dans le cas d'une série produit, on utilise une autre partition de INxIN souvent plus fructueuse.

On introduit la partition suivante : $\forall n \in IN$, $I_n = \{(p,q) \in INxIN/\ p+q = n\}$.
Ceci correspond à une somme diagonale. La série construite a pour terme général :

z_n défini par $z_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_nv_0$

La série de terme général z_n s'appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

Proposition

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes de sommes respectives S et T, la série produit de Cauchy $\sum z_n$ est absolument convergente, et sa somme vaut ST.

Exemple

considérons $u_n = \frac{x^n}{n!}$ et $v_n = \frac{y^n}{n!}$ pour x et y deux réels. Les deux séries sont absolument convergentes.

On constate que la définition de z_n donne $z_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$

La série produit de Cauchy vérifie $\sum z_k = e^{(x+y)} = (\sum x_k)(\sum y_k) = e^x e^y$

Le problème majeur est de savoir comment sommer les termes, d'abord tous les indices p, puis tous les q ? ou l'inverse, ou en parcourant les indices (p,q) selon une règle différente?

d) Et pour les séries non absolument convergentes ?

Les choses se compliquent dès qu'on n'a plus convergence absolue!
Dans la plupart des cas, la façon de sommer modifie le résultat.

Voici un exemple. Posons $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, le critère spécial des séries alternées s'applique, la série $\sum u_n$ converge, notons S sa somme.

Pour la série double de terme général $u_p v_q = \frac{(-1)^{p+q}}{\sqrt{(p+1)(q+1)}}$, sommons d'abord les termes en fixant p , on obtient $\sum_{q=0}^{Q} u_p v_q = \frac{(-1)^p}{\sqrt{(p+1)}}\sum_{q=0}^{Q} v_q$ qui admet une limite quand Q tend vers l'infini: $\frac{(-1)^p}{\sqrt{(p+1)}} S$

Donc $\lim_{P\to\infty}\left(\lim_{Q\to\infty}\left(\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q} u_p v_q\right)\right) = S^2$

Maintenant considérons une sommation en diagonale, produit de Cauchy:

$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{p+q=n} u_p v_q\right)$ on a $w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$

or si on étudie $x \to (x+1)(n+1-x)$ sur $[0,n]$, on constate que $\sqrt{(k+1)(n+1+k)} \geq (\frac{n}{2}+1)$, donc par sommation, le terme général w_n ne tend pas vers 0. La série produit ne converge pas…