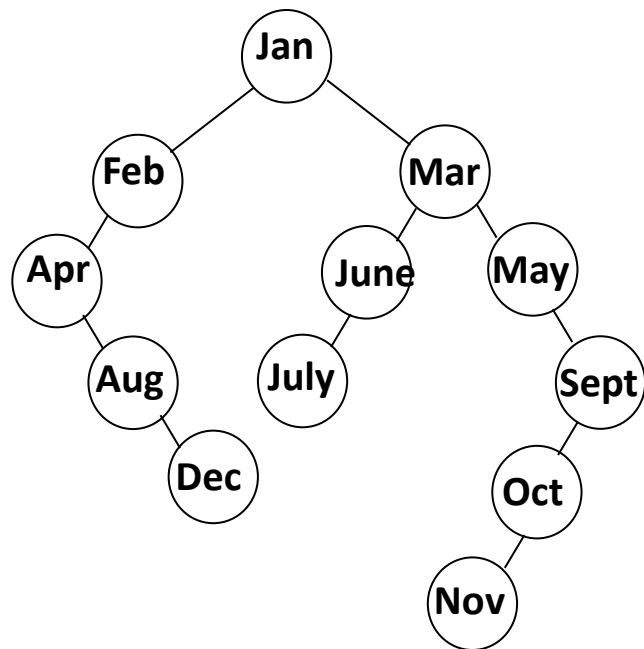


4.2 平衡二叉树

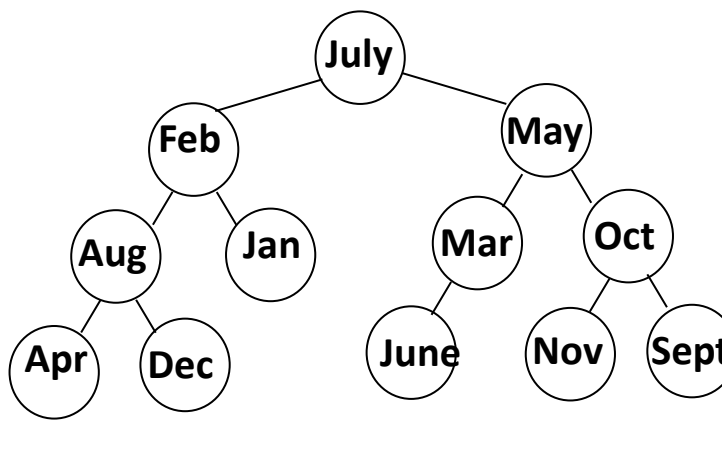
什么是平衡二叉树

【例】搜索树结点不同插入次序，将导致不同的深度和平均查找长度ASL



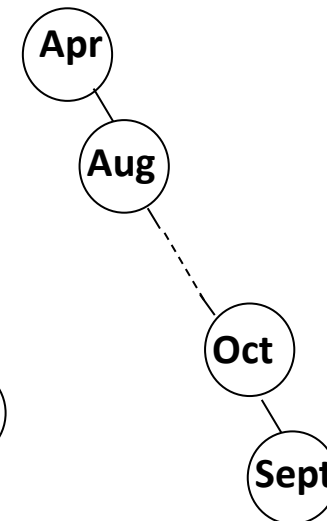
(a) 自然月份序列

$$ASL(a) = (1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 1) / 12 = 3.5$$



(b) 按July, Feb, May, Mar, Aug, Jan, Apr, Jun, Oct, Sept, Nov, Dec

$$ASL(b) = 3.0$$



(c) 月份字符串大小顺序

$$ASL(c) = 6.5$$

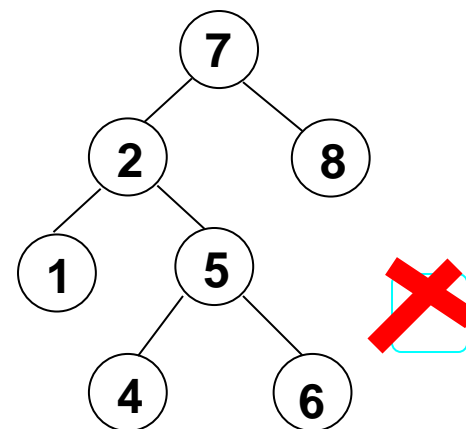
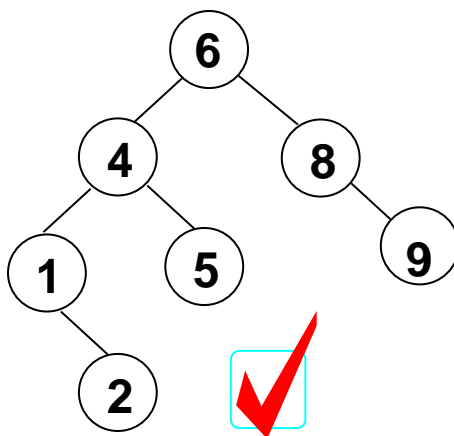
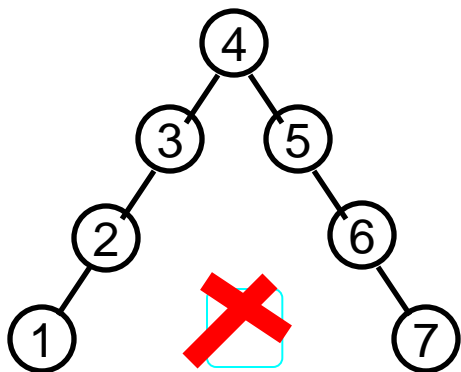
什么是平衡二叉树

“平衡因子 (Balance Factor, 简称BF) : $BF(T) = h_L - h_R$,
其中 h_L 和 h_R 分别为T的左、右子树的高度。

平衡二叉树 (Balanced Binary Tree) (AVL树)

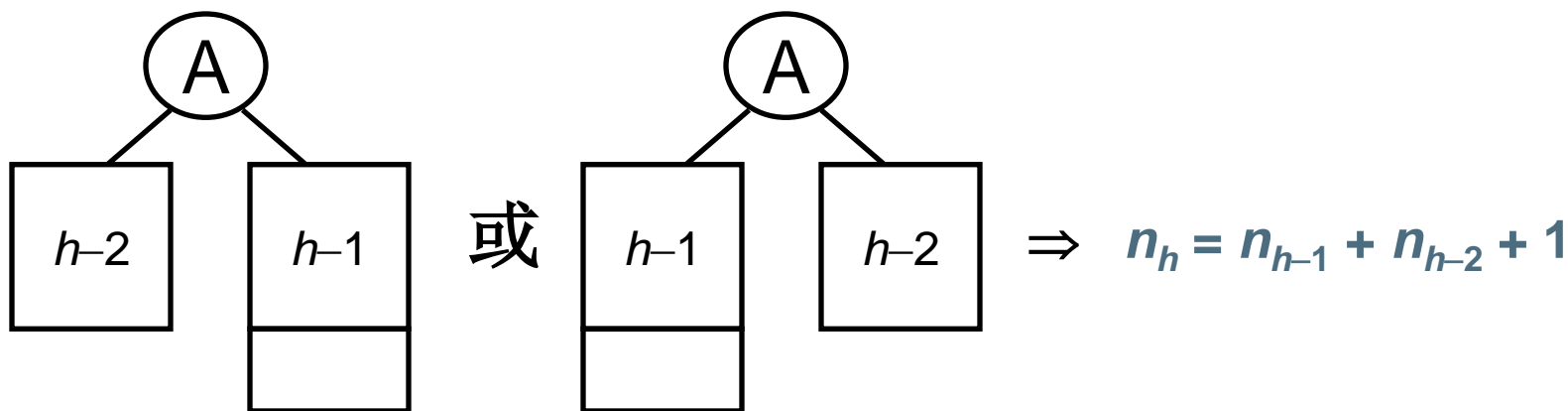
空树, 或者

任一结点左右子树高度差的绝对值不超过1, 即 $|BF(T)| \leq 1$



平衡二叉树的高度能达到 $\log_2 n$ 吗？

设 n_h 高度为 h 的平衡二叉树的最少结点数。结点数最少时：



斐波那契序列：

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \text{ for } i > 1$$

设 n_h 是高度为 h 的平衡二叉树的最小结点数.

h	n_h	F_h
0	1	1
1	2	1
2	4	2
3	7	3
4	12	5
5	20	8
6	33	13
7	54	21
8	88	34
9	

$$\Rightarrow n_h = n_{h-1} + n_{h-2} + 1$$

$$\Rightarrow n_h = F_{h+2} - 1, \quad (\text{对 } h \geq 0)$$

$$F_i \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^i$$

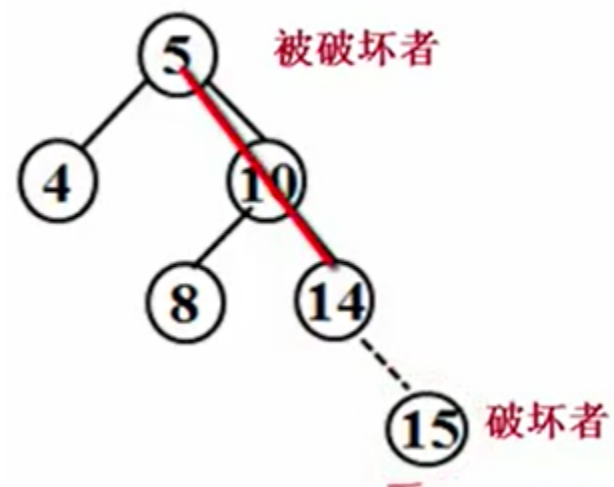
$$\Rightarrow n_h \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{h+2} - 1$$

$$\Rightarrow h = O(\log_2 n)$$

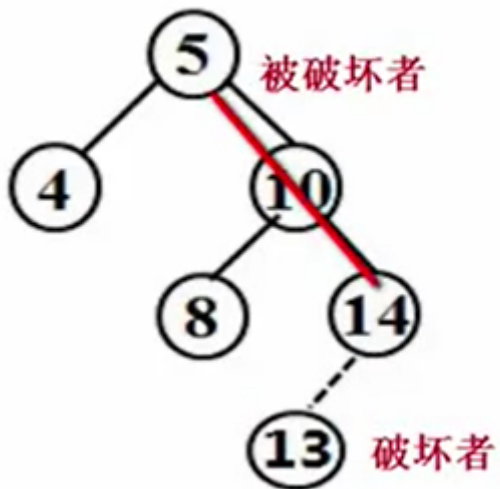
□ 给定结点数为 n 的AVL树的最大高度为 $O(\log_2 n)$!

平衡二叉树的调整

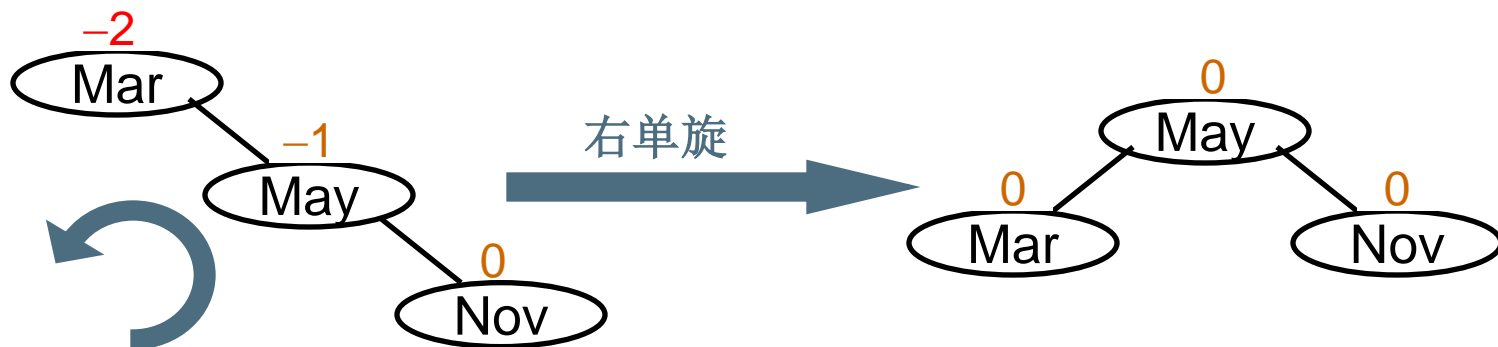
RR旋转



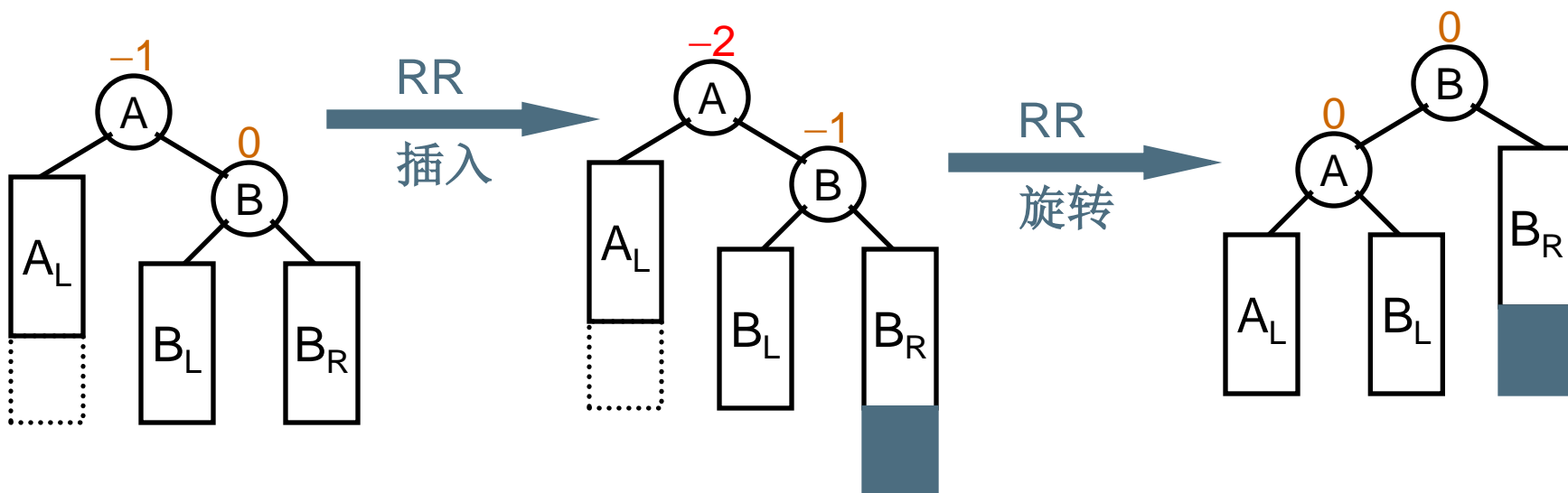
RR旋转

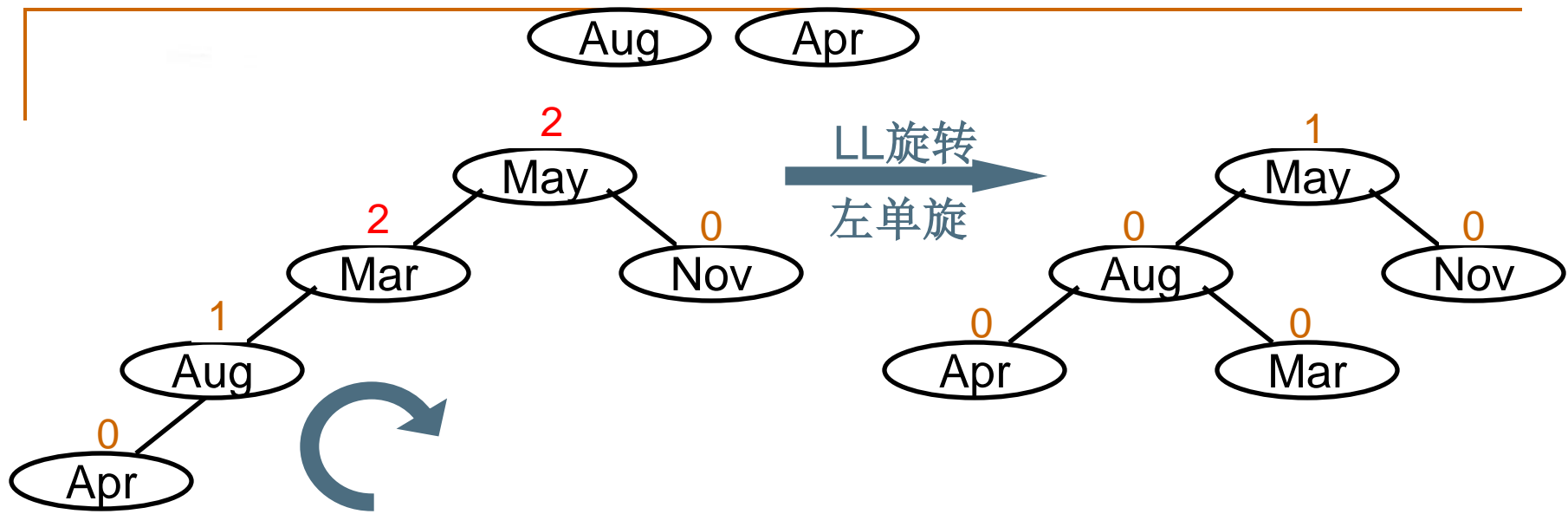


平衡二叉树的调整

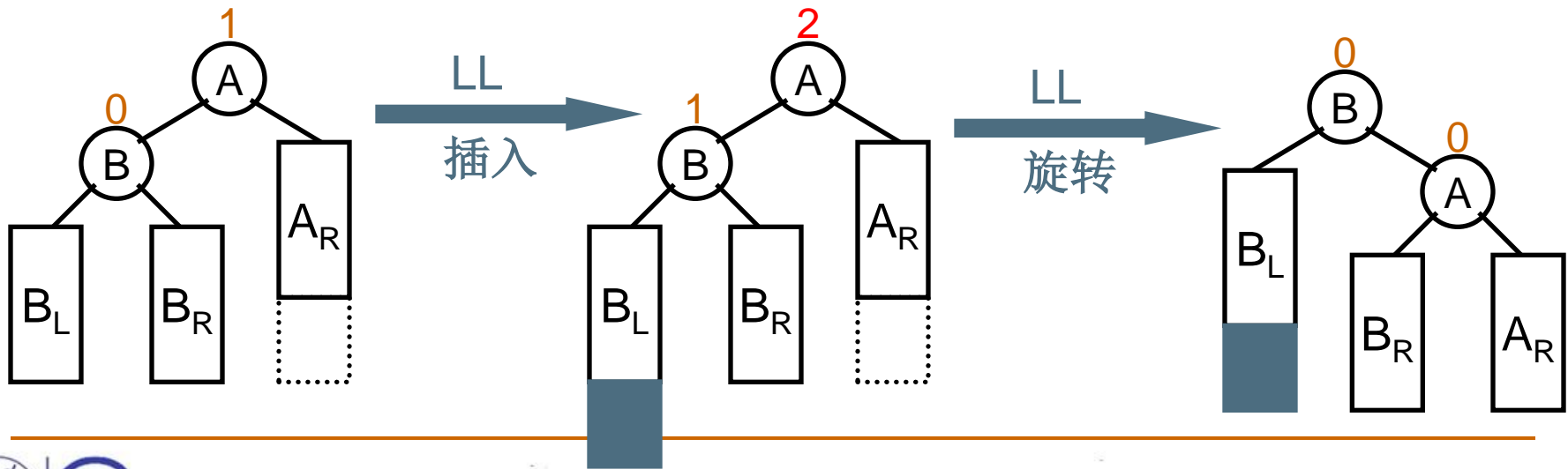


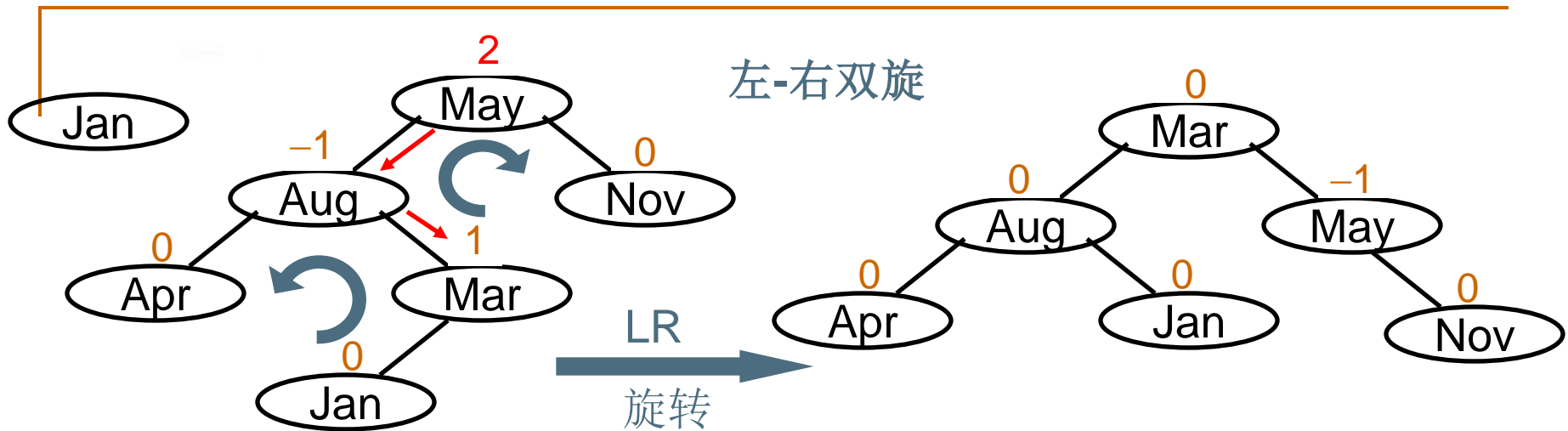
不平衡的“发现者”是Mar，“麻烦结点”Nov在发现者右子树的右边，因而叫RR插入，需要RR旋转（右单旋）





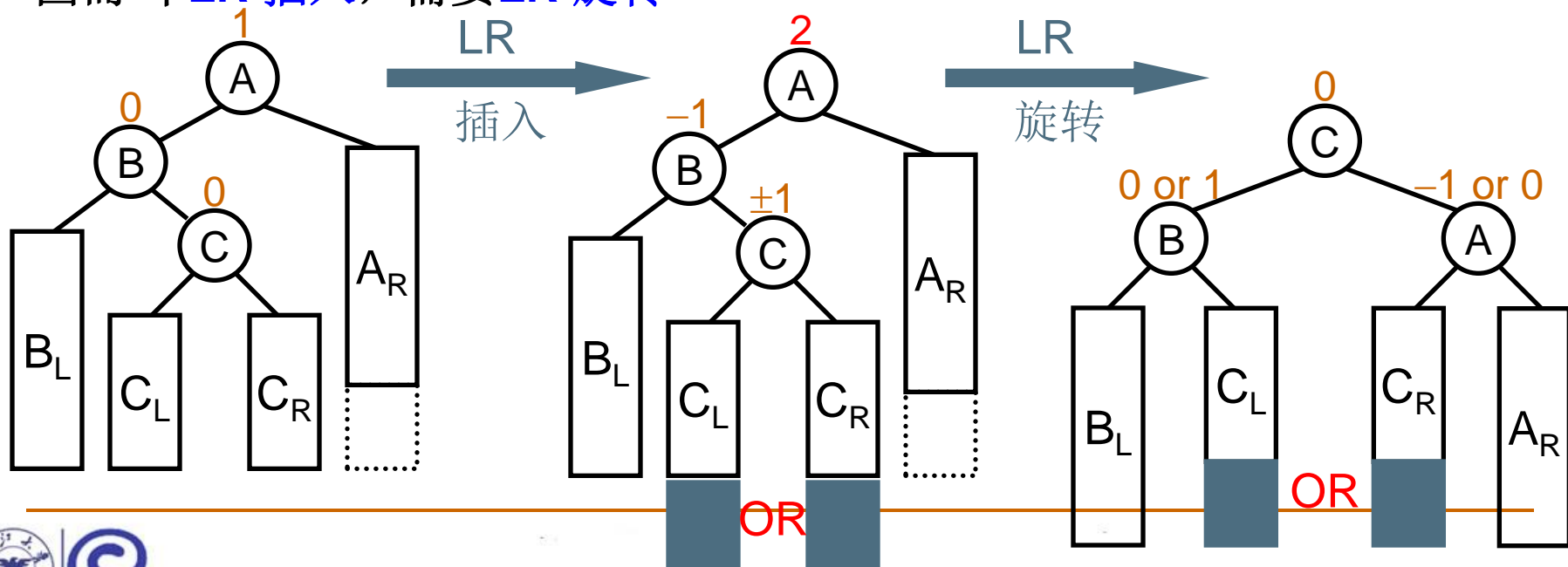
👉 “发现者”是Mar，“麻烦结点”Apr 在发现者左子树的左边，因而叫 **LL 插入**，需要**LL 旋转（左单旋）**

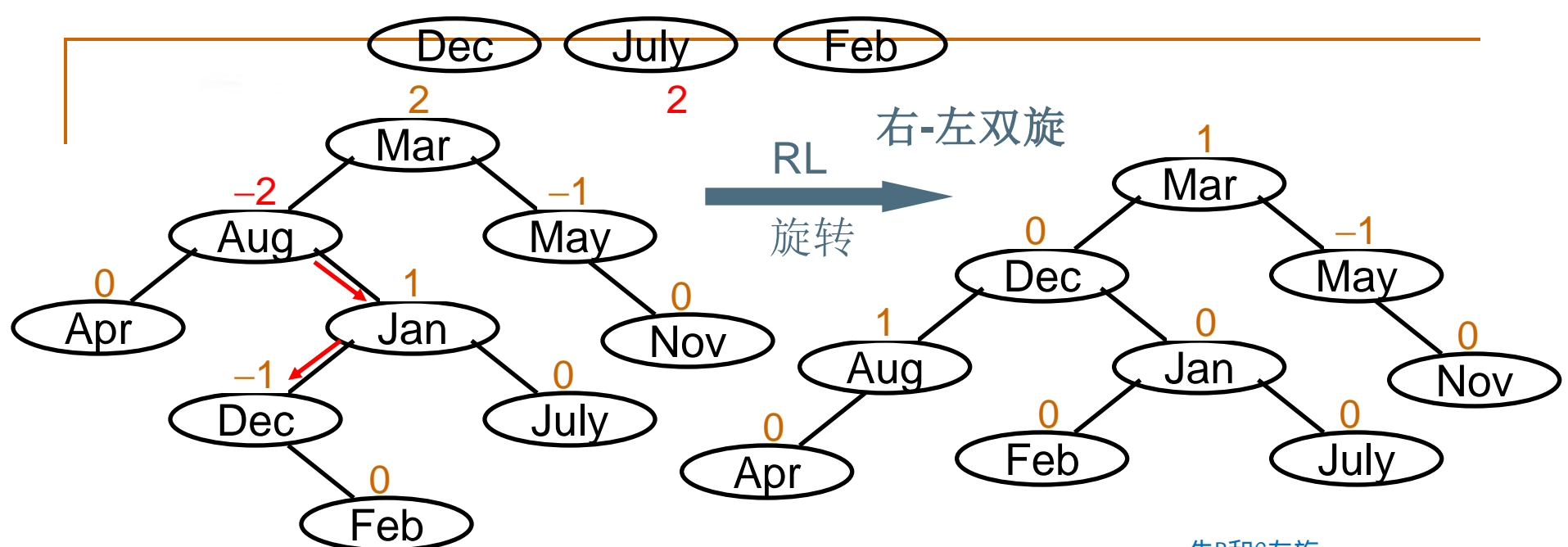




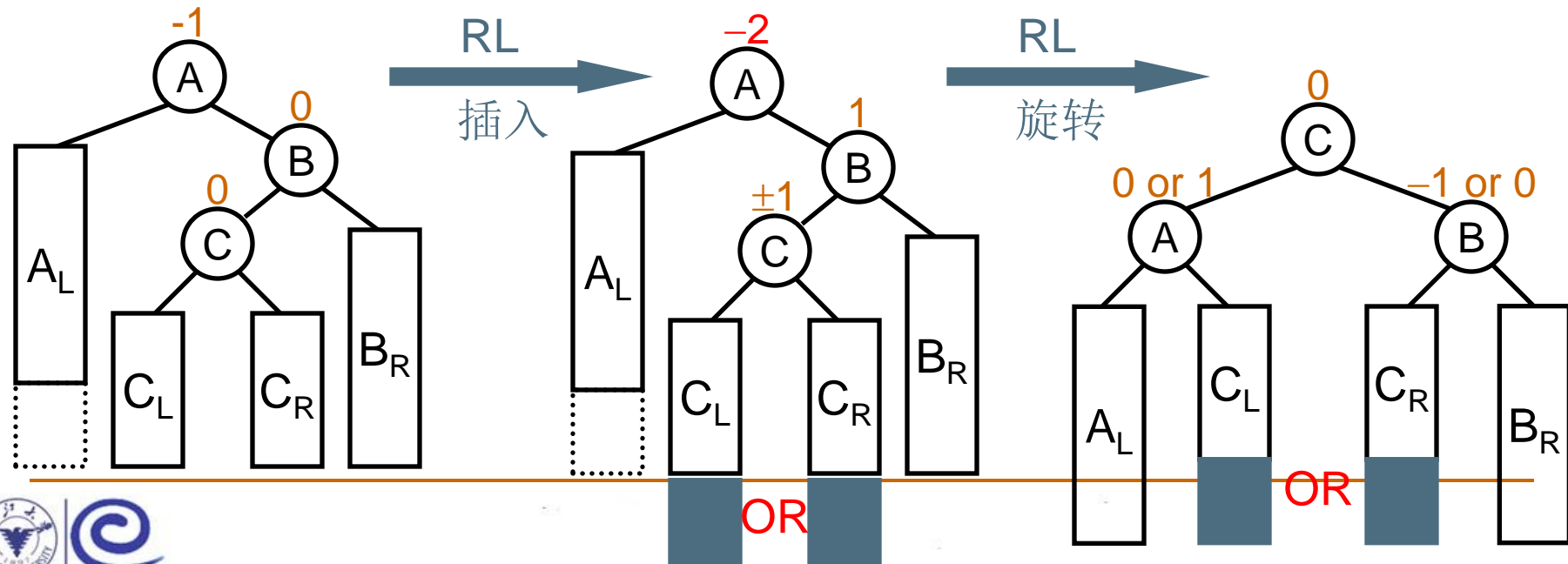
“发现者”是May，“麻烦结点”Jan在左子树的右边，因而叫 LR 插入，需要LR 旋转

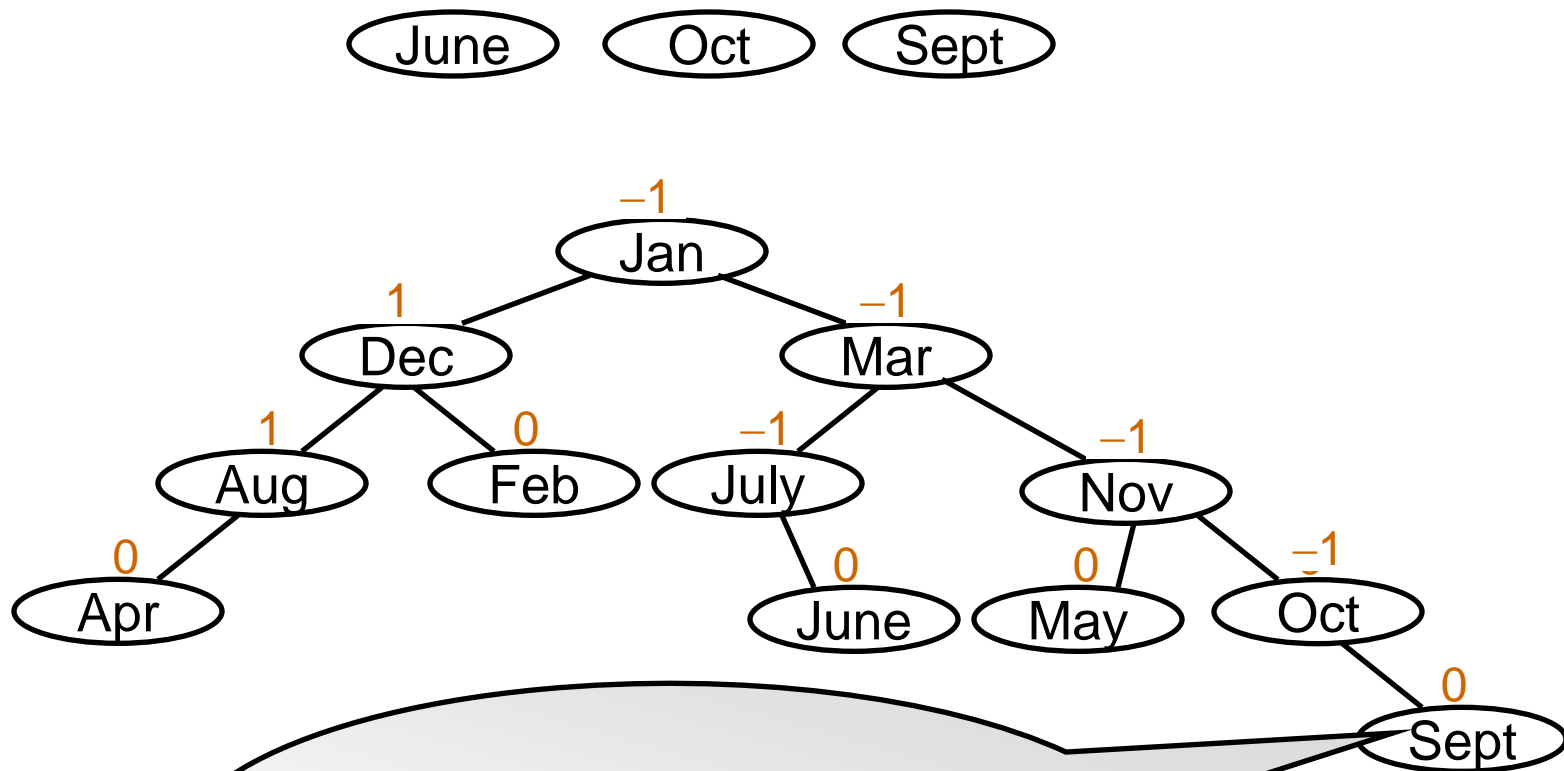
B与C做右单旋，
A与C做左单旋





👉 一般情况调整如下:





注意：有时候插入元素即便不需要调整结构，也可能需要重新计算一些平衡因子。