

第八讲 图（下）

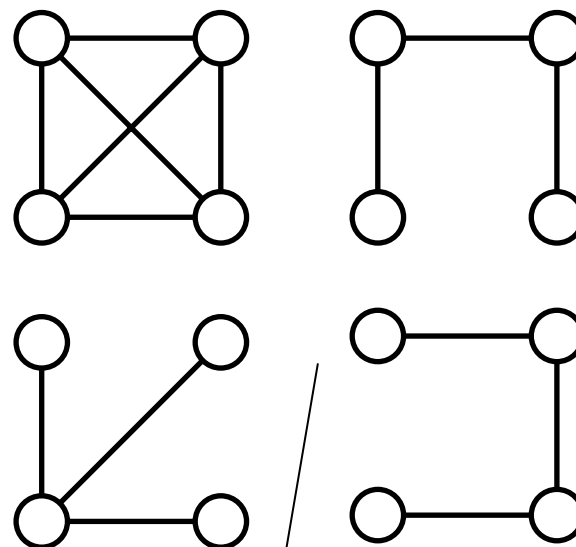
浙江大学 陈 越

8.1 最小生成树问题

什么是最小生成树 (Minimum Spanning Tree)

最小生成树存在 \leftrightarrow 图连通

- 是一棵树
 - 无回路
 - $|V|$ 个顶点一定有 $|V| - 1$ 条边
- 是生成树
 - 包含全部顶点
 - $|V| - 1$ 条边都在图里
- 边的权重和最小



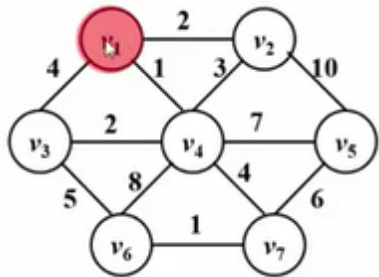
向生成树中任加一条边
都一定构成回路

贪心算法

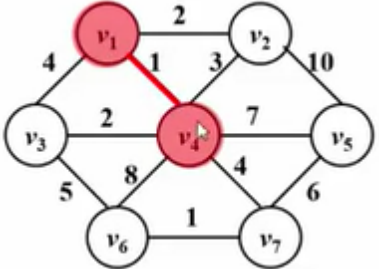
解决问题我是一步一步解决的

- 什么是“贪”： 每一步都要最好的
- 什么是“好”： 权重最小的边
- 需要约束：
 - 只能用图里有的边
 - 只能正好用掉 $|V| - 1$ 条边
 - 不能有回路

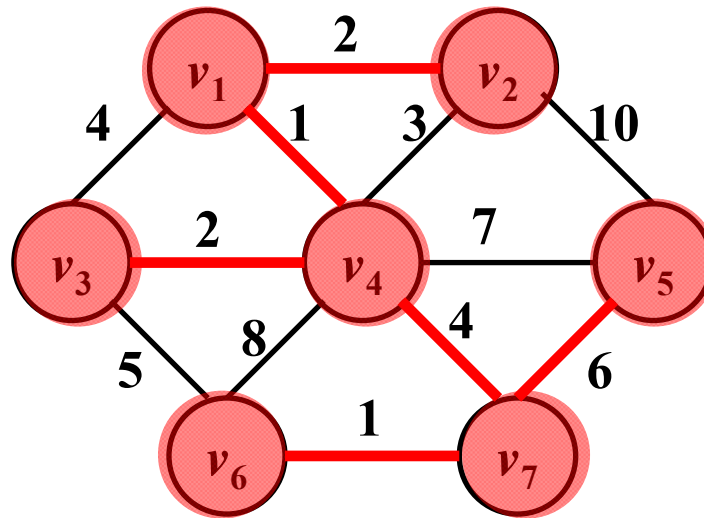
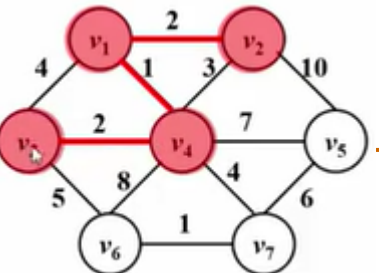
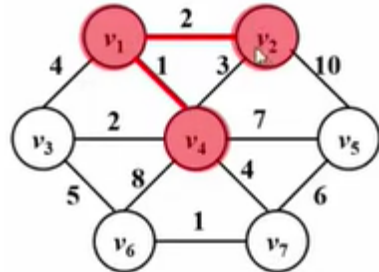
Prim算法 — 让一棵小树长大



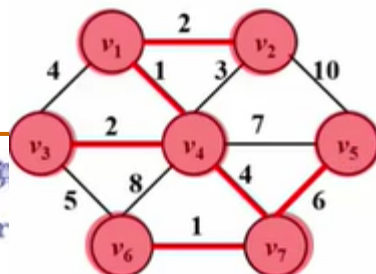
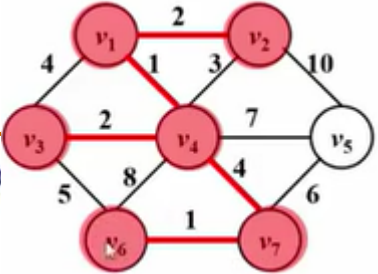
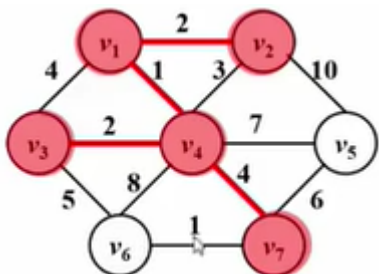
找 v_1 周围的一条最小边



从 v_2 和 v_3 中(两个都是权重为2, 并且和 v_1, v_4 相邻)
选了一条边, v_2



是不是有点像Dijkstra算法.....



Prim算法 — 让一棵小树长大

```
void Dijkstra( Vertex s )
{ while (1) {
    v = 未收录顶点中dist最小者;
    if ( 这样的v不存在 )
        break;
    collected[v] = true;
    for ( v 的每个邻接点 w )
        if ( collected[w] == false )
            if ( dist[v]+E<v,w> < dist[w] ){
                dist[w] = dist[v] + E<v,w> ;
                path[w] = v;
            }
    }
}
```

$\text{dist}[V] = E_{(s,V)}$ 或 正无穷

$\text{parent}[s] = -1$

Prim算法中的dist[V]应该初始化为

```
void Prim()
{ MST = {s};
  while (1) {
    v = 未收录顶点中dist最小者;
    if ( 这样的v不存在 )
        break;
    将v收录进MST:  $\text{dist}[V] = 0$ ;
    for ( v 的每个邻接点 w )
        if (  $\text{dist}[w] \neq 0$  ) w未被收录
            if (  $E_{(v,w)} < \text{dist}[w]$  ){
                 $\text{dist}[w] = E_{(v,w)}$  ;
                parent[w] = v;
            }
    }
    if ( MST中收的顶点不到|v|个 )
        Error ( “生成树不存在” ); 或者说整个图不连通
  }
}
```

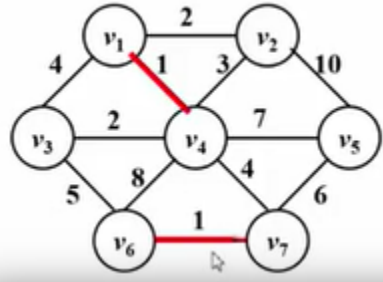
$T = O(|V|^2)$

稠密图合算

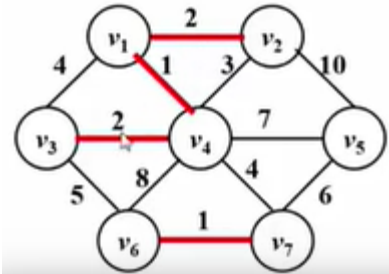
如果图是比较稀疏的，边的数量比较少，差不多和定点数是同一个数量级的。此时比较适用于下面这个方法

Kruskal算法 — 将森林合并成树

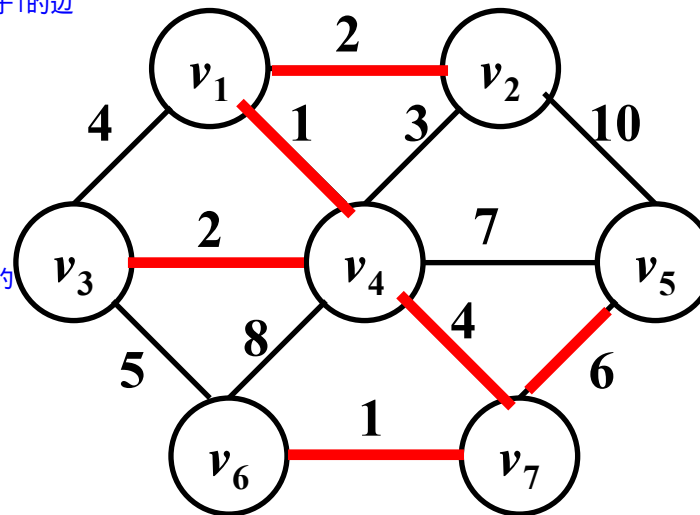
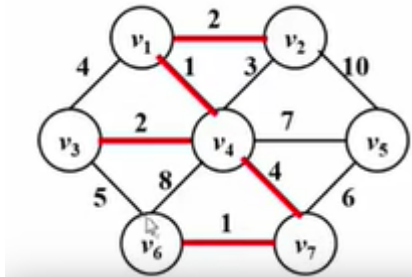
方法：每次找权重最小的边，把它收进来
在初始的时候，认为每个顶点都是一棵树，通过
不断地把边并进来，就把两棵树合并成了一棵树
。最后把所有顶点都并入了一棵树



所有最小的等于1的边



并入所有最小的
等于2的边



Kruskal算法 — 将森林合并成树

```
void Kruskal ( Graph G )
{
    MST = { } ;
    while ( MST 中不到 |V| -1 条边 && E 中还有边 ) {
        从 E 中取一条权重最小的边 E(v,w) ; /* 最小堆 */
        将 E(v,w) 从 E 中删除 ;
        if ( E(v,w) 不在 MST 中构成回路 ) /* 并查集 */
            将 E(v,w) 加入 MST ;
        else
            彻底无视 E(v,w) ;
    }
    if ( MST 中不到 |V| -1 条边 )
        Error ( “生成树不存在” );
}
```

$$T = O(|E| \log |E|)$$