

第一讲 基本概念

浙江大学 陈 越

1.3 应用实例： 最大子列和问题

给定 N 个整数的序列 $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$,
求函数 $f(i, j) = \max\{0, \sum_{k=i}^j A_k\}$ 的最大值。

算法1

```
int MaxSubseqSum1( int A[], int N )
{
    int ThisSum, MaxSum = 0;
    int i, j, k;
    for( i = 0; i < N; i++ ) { /* i是子列左端位置 */
        for( j = i; j < N; j++ ) { /* j是子列右端位置 */
            ThisSum = 0; /* ThisSum是从A[i]到A[j]的子列和 */
            for( k = i; k <= j; k++ )
                ThisSum += A[k];
            if( ThisSum > MaxSum ) /* 如果刚得到的这个子列和更大 */
                MaxSum = ThisSum; /* 则更新结果 */
        } /* j循环结束 */
    } /* i循环结束 */
    return MaxSum;
}
```

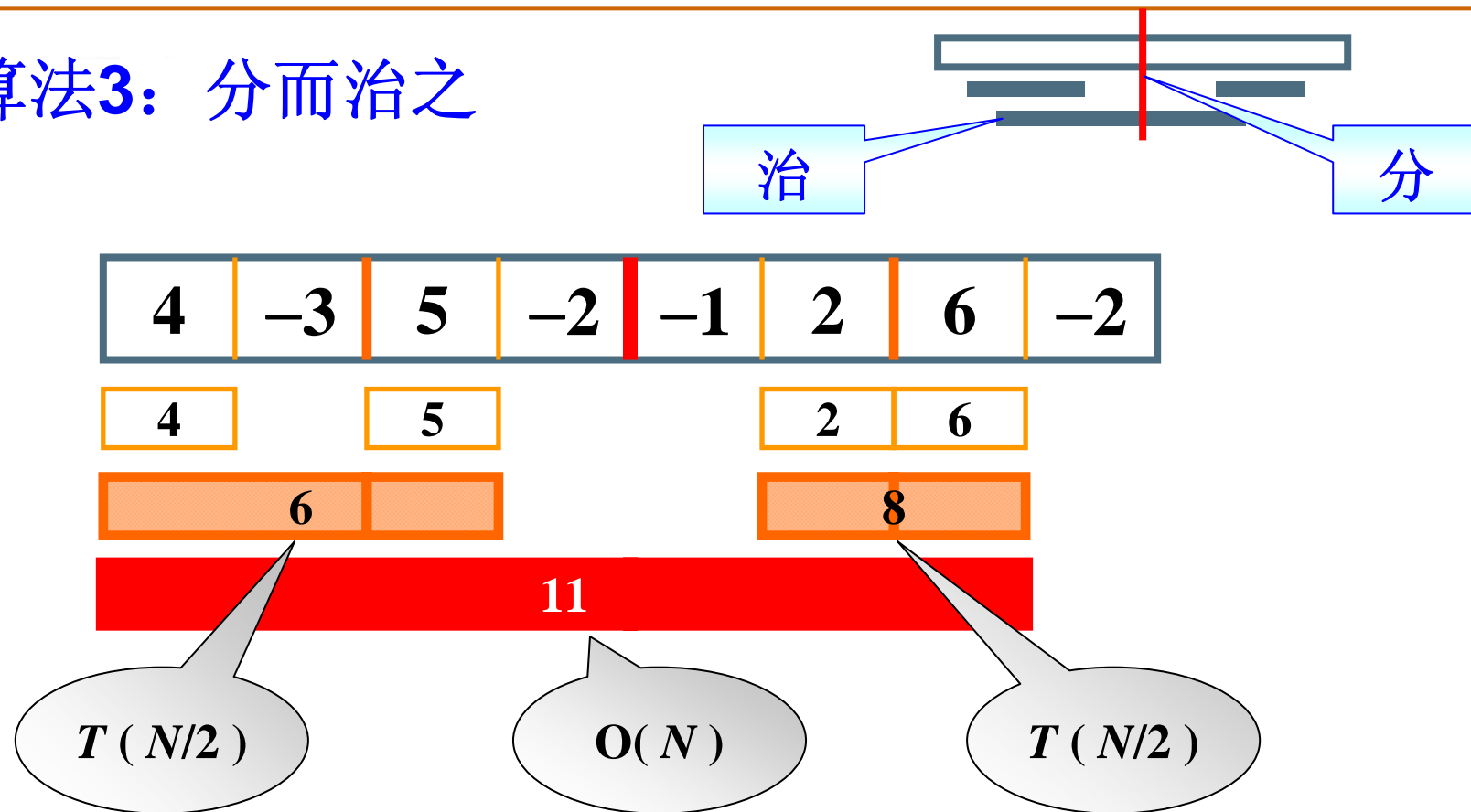
$T(N) = O(N^3)$

算法2

```
int MaxSubseqSum2( int A[], int N )
{ int ThisSum, MaxSum = 0;
  int i, j;
  for( i = 0; i < N; i++ ) { /* i是子列左端位置 */
    ThisSum = 0; /* ThisSum是从A[i]到A[j]的子列和 */
    for( j = i; j < N; j++ ) { /* j是子列右端位置 */
      ThisSum += A[j];
      /*对于相同的i, 不同的j, 只要在j-1次循环的基础上累加1项即可*/
      if( ThisSum > MaxSum ) /* 如果刚得到的这个子列和更大 */
        MaxSum = ThisSum; /* 则更新结果 */
    } /* j循环结束 */
  } /* i循环结束 */
  return MaxSum;
}
```

$$T(N) = O(N^2)$$

算法3：分而治之



$$\begin{aligned} T(N) &= 2T(N/2) + cN, \quad T(1) = O(1) \\ &= 2[2T(N/2^2) + cN/2] + cN \\ &= 2^k O(1) + ckN \quad \text{其中 } N/2^k = 1 \\ &= O(N \log N) \end{aligned}$$

算法4：在线处理

```
int MaxSubseqSum4( int A[], int N )
{ int ThisSum, MaxSum;
  int i;
  ThisSum = MaxSum = 0;
  for( i = 0; i < N; i++ ) {
    ThisSum += A[i]; /* 向右累加 */
    if( ThisSum > MaxSum )
      MaxSum = ThisSum; /* 发现更大和则更新当前结果 */
    else if( ThisSum < 0 ) /* 如果当前子列和为负 */
      ThisSum = 0; /* 则不可能使后面的部分和增大，抛弃之 */
  }
  return MaxSum;
}
```

$$T(N) = O(N)$$

“在线”的意思是指每输入一个数据就进行即时处理，在任何一个地方中止输入，算法都能正确给出当前的解。

运行时间比较 (秒)

| 算 法 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|-------------|----------|----------|---------------|---------|
| 时间复杂度 | | $O(N^3)$ | $O(N^2)$ | $O(N \log N)$ | $O(N)$ |
| 输入 规模 | $N=10$ | 0.00103 | 0.00045 | 0.00066 | 0.00034 |
| | $N=100$ | 0.47015 | 0.01112 | 0.00486 | 0.00063 |
| | $N=1,000$ | 448.77 | 1.1233 | 0.05843 | 0.00333 |
| | $N=10,000$ | NA | 111.13 | 0.68631 | 0.03042 |
| | $N=100,000$ | NA | NA | 8.0113 | 0.29832 |