Vektori

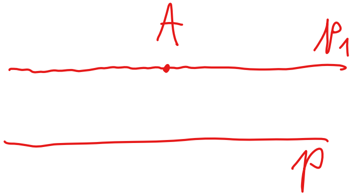
Doc. dr Emir Zogić

Linearna algebra 1, DUNP

Analitička geometrija

- Analitička geometrija bavi se proučavanjem euklidske geometrije ravni i prostora koristeći algebarske metode. Njen osnivač Rene Dekart nazvao ju je *metodom koordinata*. Osnovna ideja analitičke geometrije je da se tačke ravni i prostora opisuju koordinatama, dakle, parovima ili trojkama realnih brojeva, a ostali objekti (prave, ravni, krive, površi, itd.) jednačinama. Prema tome, ispitivanje odnosa medju objektima svodi se na rešavanje sistema jednačina.
- Polazište za uvodjenje analitičke geometrije su euklidska ravan ili prostor koje ćemo označavati sa E^2 i E^3 i koji su aksiomatski zasnovani. Osnovne elemente, tačku i pravu za E^2 i ravan za E^3 ne definišemo, već aksiomama, opisujemo njihove osnovne medjusobne odnose.

- Starogrčki matematičar Euklid je još u 3. veku p.n.e. u svom delu *Elementi* postavio osnovne aksiome:
  1. Od svake tačke do svake druge tačke može povući prava.
  2. Omedjen deo prave može se neprekidno produžiti po pravoj.
  3. Iz svakog središta sa svakim poluprečnikom može se opisati kružnica.
  4. Svi pravi uglovi su jednaki.
  5. Neka je data prava u ravni i tačka koja joj ne pripada. Tada postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz datu tačku i koja je paralelna datoj pravoj (ovo je ekvivalent 5. postulata).

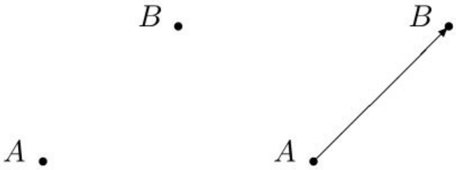


$p_1 \parallel p$

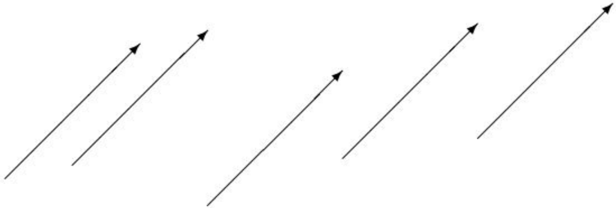
- Peta aksioma (peti postulat) ima vrlo važno istorijsko značenje - zbog svoje neobične dužine smatralo se da je možda već on posledica ostalih aksioma. Taj je problem bio nerešen skoro 2000 godina, tek se u 19. veku dokazalo da je peta aksioma zaista aaksioma karakteristična za euklidsku geometriju, a njenim negiranjem dobijamo nove geometrije, tzv. neeuklidske geometrije.
- Danas postoji i precznije aksiomatsko zasnivanje kao na primer aksiome Davida Hilberta (oko 1900. godine) i mnoge druga ekvivalentna aksiomatska zasnivanja.
- Naše polazište je, dakle, aksiomatski zasnovana euklidska ravan ili prostor, pri čemu koristimo bez dokaza neke činjenice elementarne geometrije izvedene iz aksioma.
- Uz metode analitičke geometrije, usko je vezan pojam vektora kao i operacije sa vektorima, a zatim razni oblici jednačina prave i jednačina ravni.

Vektori

Pre nego što definišemo vektor, podsetimo se da je **usmerena** ili **orijentisana duž** uredjeni par tačaka (A, B), $A, B \in E^3$, dakle, element skupa $E^3 \times E^3$. Tu usmerenu duž označavamo sa $\overrightarrow{AB}$, tačku A nazivamo početkom, a tačku B krajem usmerene duži $\overrightarrow{AB}$. Usmerenoj duži pridružujemo i dužinu $\overline{AB}$ kojoj pri crtanju stavljamo i strelicu



Iz pojma usmerene duži gradi se pojam vektora. Jednostavno rečeno, vektor je **skup** svih paralelnih usmerenih duži jednake dužine.

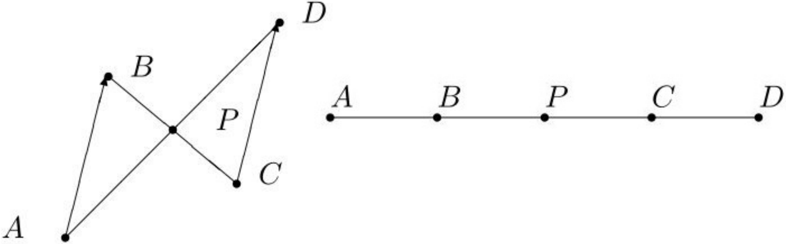


Da bismo precizno definisali pojam vektora, uvedimo najpre sledeću relaciju na skupu svih usmerenih duži u $E^3 \times E^3$.

Definicija. Za usmerene duži $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kažemo da su **ekvivalentne** ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko središte. Pišemo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Na sledećoj slici prikazane su ekvivalentne usmere duži $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$. Moguće su situacije: tačke A, B, C, D ne leže na istoj pravoj ili tačke A, B, C, D leže na istoj pravoj.

U prvoj situaciji možemo primetiti da je četvorougao $ABCD$ paralelogram (četvorougao je paralelogram ako i samo mu se dijagonale polove).



Prema tome, usmerene duži $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su ekvivalentne ako i samo ako je četvorougao $ABCD$ paralelogram ili tačke A, B, C, D leže na istoj pravoj i pri tom duži AC i BD imaju zajednv cko središte.

$(R)\ (\forall x)\ x \sim x,\quad (S)\ (\forall x,y)\ x\sim y \Rightarrow y \sim x$ Rel.

$(T)\ (\forall x,y,z)\ x\sim y \wedge y\sim z \Rightarrow x\sim z$ ekv.

Teorema 1. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $E^3 \times E^3$.

Relacija ekvivalencije razbija skup na kome je definisana na disjunktne podskupove koje nazivamo klasama ekvivalencije. Svaka klasa ekvivalencije sastoji se samo od elemenata skupa koji su medjusobno ekvivalentni.

Definicija. **Vektor** je klasa ekvivalencije po relaciji $\sim$ na skupu svih usmerenih duži $E^3 \times E^3$. Skup svih vektora označavamo sa V^3.

$\sim$ NA SKUPU E^3

$C_x = \{a \mid a \sim x\}$ klasa ekv.

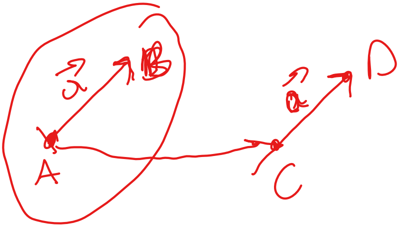
$\bigcup C_i = E^3$

- Klasu ekvivalencije odredjenu sa usmerenom duži $\overrightarrow{AB}$ označavamo sa $[\overrightarrow{AB}]$. Dakle, važi

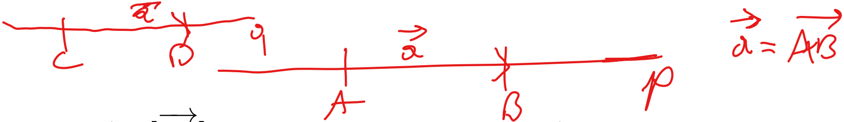
$$[\overrightarrow{AB}] = \left\{ \overrightarrow{PQ} \in E^3 \times E^3 \mid \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB} \right\}.$$

  Važi $\overrightarrow{AB} \in [\overrightarrow{AB}]$, pa kažemo da je usmerena duž $\overrightarrow{AB}$ **predstavnik** ili **reprezent** vektora $[\overrightarrow{AB}]$.
- Vektore kraće označavamo i sa $\vec{a}$, $\vec{b} \ldots$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}, \ldots$.
- Vektor $[\overrightarrow{AA}]$ nazivamo **nula-vektor** i označamo sa $\vec{0}$.
- Za vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ definišemo vektor $-\vec{a}$ kao vektor s predstavnikom $\overrightarrow{BA}$. Vektor $-\vec{a}$ nazivamo **suprotan vektor** vektora $\vec{a}$.

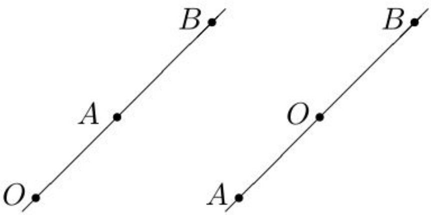
Teorema 2. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i $C \in E^3$. Tada postoji jedinstvena tačka $D \in E^3$ takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{CD}]$.



$AB \parallel CD$



- Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$. **Modul** ili **dužina** vektora $\vec{a}$ je dužina duži AB. Modul označavamo sa $|\vec{a}|$. INTENZITET
- **Pravac** vektora $\vec{a}$ je pravac prave AB. Za nula-vektor pravac ne definišemo.
  Kažemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **kolinearni** ako su istog pravca.
- **Smer** vektora je "relativan" pojam, tj. definišemo je u odnosu na druge vektore. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. Na osnovu Teoreme 2 možemo odabrati njihove predstavnike s početkom u istoj tački O, $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$. Kažemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **istog smera** ako tačke A, B leže s iste strane tačke O, a **suprotnog smera** ako leže s različitih strana.



Teorema 3. Vektor je jednoznačno odredjen svojim modulom, smerom i pravcem.

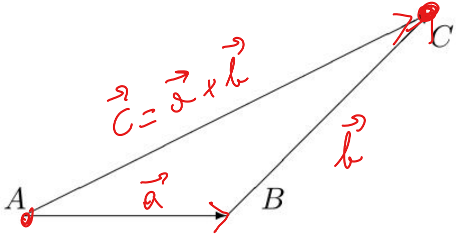
Defincija. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$, $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$. **Zbir vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} + \vec{b}$ odredjen predstavnikom $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AC}].$$

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}}$$

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

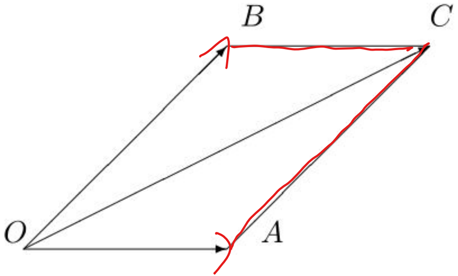
$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$$



Kažemo da smo vektore sabrali po **pravilu trougla**.

Sabiranje vektora može se definisati i na sledeći način: neka je $O \in E^3$ proizvoljna tačka i neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori dati svojim predstavnicima s početnom tačkom O, $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$. Zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$, pri čemu je $C \in E^3$ jedinstvena tačka takva da je četvorougao $OACB$ paralelogram:

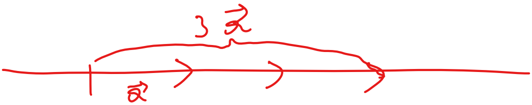
$$\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{OC}].$$



Ovakvo sabiranje vektora zovemo **sabiranje vektora po pravilu paralelograma**

Definicija. Množenje vektora skalarom je operacija $\mathbb{R} \times V^3 \to V^3$ koja uredjenom paru $(\alpha, \vec{a})$ pridružuje vektor u oznaci $\alpha\vec{a}$ za koga je

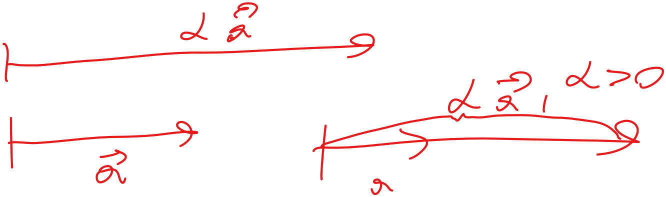
1. modul: $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. pravac: isti kao pravac vektora $\vec{a}$, ako su oba vektora $\vec{a}$ i $\alpha\vec{a}$ različita od nula-vektora,
3. smer: istog smera kao $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$ i suprotnog smera kao $\vec{a}$ ako je $\alpha < 0$.



Teorema 4. Za svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ važi $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

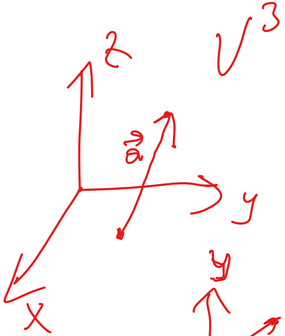
Napomena. Razliku vektora $\vec{a} - \vec{b}$ definišemo kao $\vec{a} + (-\vec{b})$.

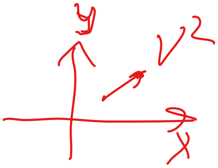
Napomena. Vektori $\vec{a}$ i $\alpha\vec{a}$ su kolinearni.



Teorema 6. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ proizvoljni vektori i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada važi:

1. $\vec{a} + \vec{b} \in V^3$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$;
5. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
6. $\alpha\vec{a} \in V^3$;
7. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;
8. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
9. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
10. $1\vec{a} = \vec{a}$.





- Primećujemo da skup V^3 predstavlja zapravo **vektorski prostor nad** $\mathbb{R}$ (realan vektorski prostor).
- Vektor smo definisali polazeći od pojmova tačke, prave i ravni kao i aksiomatski uvedene euklidske geometrije. Možemo krenuti i obratno: polazeći od aksiomatski uvedenog pojma vektora kao elementa apstraktnog vektorskog prostora i zadanog skupa tačaka, možemo definisati elemente euklidske geometrije (pravu i ravan). Takav pristup definiše tzv. **afini prostor**.

Skalarni proizvod vektora

Skalarni proizvod je preslikavanje $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \cdot \vec{b}$ skupa V^2 u skup $\mathbb{R}$ definisano sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Svojstva:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $k \in \mathbb{R}$,
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ i $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{a} = \vec{0}$,
5. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$-skalarni kvadrat.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cancelto{1}{\cos \angle(\vec{a}, \vec{a})}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2}$$

- **Intenzitet** (*dužina, modul*) vektora $\vec{a}$ se računa po formuli $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

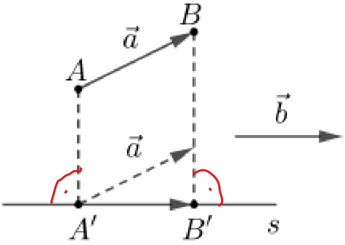
  $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

- Kosinus ugla α koji zahvataju vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ zadat je formulom

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su *normalni* (*ortogonalni*) ako i samo ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Neka su tačke A i B takve da je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i neka su tačke A' i B' redom ortogonalne projekcije tačaka A i B na osu s koja ima pravac i smer vektora $\vec{b} \neq \vec{0}$. **Ortogonalna vektor-projekcija** vektora $\vec{a}$ na osu s je vektor $\overrightarrow{A'B'}$. **Ortogonalna skalar-projekcija** je broj čija je apsolutna vrednost jednaka $|\overrightarrow{A'B'}|$, a znak pozitivan ili negativan u zavisnosti od toga da li je vektor $\overrightarrow{A'B'}$ istog ili suprotnog smera sa vektorom $\vec{b}$. Koristimo oznaku $pr_{\vec{b}}\vec{a}$.



- Iz $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{pr_{\vec{b}}\vec{a}}{|\vec{a}|}$ imamo da je

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

- Sada možemo pisati i $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|pr_{\vec{b}}\vec{a}$.
- Takoe važi da je $\overrightarrow{A'B'} = pr_{\vec{b}}\vec{a}\,\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.
- Ako je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tada je $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

$\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (1,0,2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 = 7$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

1. Dati su vektori $\vec{a} = (2, 1, 5)$ i $\vec{b} = (3, 1, 1)$. Odrediti $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, $pr_{\vec{b}}\vec{a}$.

Rešenje. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 1, 5) \cdot (3, 1, 1) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 12$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$, $|\vec{b}| = \sqrt{11}$,

$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{30}\sqrt{11}} \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\frac{12}{\sqrt{30 \cdot 11}}$,

$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{11}}$. Vektor date projekcije je

$pr_{\vec{b}}\vec{a}\,\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{11}}\frac{(3,1,1)}{\sqrt{11}} = \left(\frac{36}{11}, \frac{12}{11}, \frac{12}{11}\right)$.

2. Ako je $\vec{a} = (1, -3, 3)$, $\vec{b} = (-2, 0, 2)$, izračunati $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

Rešenje.
$(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 = 19 - 4 \cdot 8 = -13$,
jer je $|\vec{a}| = \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19}$ i $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 0 + 4} = \sqrt{8}$.

$(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{a} - 4\vec{b}\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 + \cancel{2\vec{a}\vec{b}} - \cancel{2\vec{a}\vec{b}} - 4|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{19}$, $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{8}$

$|\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 = 19 - 4 \cdot 8 = -13.$

3. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ takvi da je $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Naći $(\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

Rešenje.
$(\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - \vec{a}\vec{b} + 6\vec{a}\vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 2 \cdot 1^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 3 \cdot 4^2 = 2 + 5|\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) - 48 = 2 + 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 48 = -36.$

4. Ako je $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 30$, naći $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Rešenje.
$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 169 - 2\vec{a}\vec{b} + 529 = \boxed{698 - 2\vec{a}\vec{b}}.$
Koristeći da je $|\vec{a} + \vec{b}| = 30$, dobijamo $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 169 + 2\vec{a}\vec{b} + 529 = 698 + 2\vec{a}\vec{b} = 30^2 = 900$, odakle je $2\vec{a}\vec{b} = 900 - 698 = 202$. Sada je

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 698 - 2\vec{a}\vec{b} = 698 - 202 = 496,$$

pa je $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{496} = 4\sqrt{31}$.

5. Odrediti $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, tako da vektori $\vec{a} = (-1, 0, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, t)$ imaju isti ugao kao i vektori $\vec{x} = (2, 1, 0)$, $\vec{y} = (t, 0, 0)$.

Rešenje. Kako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1, 0, 3)(1, 2, t) = -1 + 3t$, $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5 + t^2}$, to je

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3t - 1}{\sqrt{10}\sqrt{5 + t^2}}. \qquad (*)$$

$\sqrt{t^2} = t,\ t \geq 0$

$\sqrt{t^2} = |t|,\ t \in \mathbb{R}$

S druge strane je $\vec{x} \cdot \vec{y} = (2, 1, 0)(t, 0, 0) = 2t$, $|\vec{x}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{t^2} = |t|$, to je

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{2t}{\sqrt{5}|t|}. \qquad (**)$$

$|t|^2 = t^2$

Iz $(*)$ i $(**)$ imamo

$$\frac{3t - 1}{\sqrt{10}\sqrt{5 + t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{5}|t|},$$

$\Rightarrow \sqrt{5}|t|(3t-1) = 2t\sqrt{10(5+t^2)}\ \Big/^2$

odakle se sredjivanjem dobija $t^2 - 6t - 39 = 0$, ˇija su rešenja $t_1 = 3 + 4\sqrt{3}$ i $t_2 = 3 - 4\sqrt{3}$.

6. Naći intenzitet vektora $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ako je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

Rešenje. $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{p} - 2\vec{q})(\vec{p} - 2\vec{q}) = |\vec{p}|^2 - 4\vec{p}\vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = 2^2 - 4|\vec{p}||\vec{q}| \cos\angle(\vec{p}, \vec{q}) + 4(\sqrt{3})^2 = 4 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4(\sqrt{3})^2 = 4$, pa je $|\vec{a}| = 2$.

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{p} - 2\vec{q})(\vec{p} - 2\vec{q}) = |\vec{p}|^2 - 4\vec{p}\vec{q} + 4|\vec{q}|^2$$

$$= 2^2 - 4 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\angle(\vec{p}, \vec{q}) + 4 \cdot 3$$

$$= 4 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + 12 = 4 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 12$$

$$= 4$$

7. Neka su $\vec{p} = \alpha\vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{q} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ ortogonalni vektori, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori ($|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$).

$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ $\quad \|\vec{AB}\| = 2$

(*a*) Ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ortogonalni vektori, odrediti α.

$A \xrightarrow{2\text{ cm}} B$ $\quad |\vec{AB}| = 2$ cm

(*b*) Za $\alpha = 1$ naći ugao izmedju vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

$|\vec{m}| = 1$ cm

Rešenje. Pošto su $\vec{p}$ i $\vec{q}$ ortogonalni vektori, to je $\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{0}$, odnosno $(\alpha\vec{m} + 2\vec{n})(5\vec{m} - 4\vec{n}) = 0$, odnosno

$$5\alpha|\vec{m}|^2 + (10 - 4\alpha)\vec{m}\vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5\alpha - 8 + (10 - 4\alpha)\vec{m}\vec{n} = 0.$$

(*a*) $\vec{m} \perp \vec{n} \;\Leftrightarrow\; \vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, pa je $5\alpha - 8 + (10 - 4\alpha) \cdot 0 = 0 \;\Leftrightarrow\; 5\alpha = 8$, odakle je $\alpha = \frac{8}{5}$.

(*b*) Za $\alpha = 1$ imamo $5 \cdot 1 - 8 + (10 - 4 \cdot 1)\vec{m}\vec{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}$. Sada je

$$\cos\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

14:15

pa je $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

8. Odrediti vektor $\vec{v}$ ako je $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{v} \cdot \vec{b} = 2$ i $\vec{v} \cdot \vec{c} = 3$, gde je $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\vec{b} = (3, -1, 5)$ i $\vec{c} = (1, -2, 4)$.

Rešenje. Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$. Iz datih uslova dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 3z &= 1 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ x - 2y + 4z &= 3 \end{aligned},$$

$(x, y, z) \cdot (2, -4, 3)$

$= 2x - 4y + 3z$

čije rešenje je $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$. Dakle, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$

Vektorski proizvod. Mešoviti proizvod.

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$, jeste vektor $\vec{c}$ definisan na sledeći način:

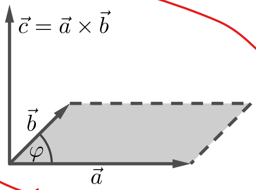
(1) intenzitet vektora $\vec{c}$ dat je sa

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi, \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

što geometrijski predstavlja površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

(2) vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ normalan je na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. nosač vektora $\vec{c}$ normalan je na ravan odredjenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

(3) vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, posle svodjenja na zajednički početak, orijentisani su u odnosu jedan prema drugom kao i ortovi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ i čine tzv. **desnu trojku** vektora.

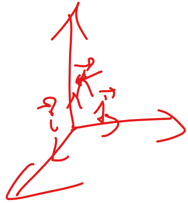


$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

Svojstva:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$, $k \in \mathbb{R}$.
- Površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
- Površina trougla konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka je $\dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$.
- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Ako je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tada je



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|$

$i \perp j$, $j \perp k$,

$i \perp k$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} A - \vec{j} B + \vec{k} C = \vec{i} A + \vec{j}(-B) + \vec{k} C$$

$$= (A, -B, C)$$

Mešoviti proizvod je preslikavanje $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ skupa V^3 u skup $\mathbb{R}$ definisano sa

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Svojstva:

- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$,
- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$,
- $[k\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = k[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, $k \in \mathbb{R}$,
- $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]$.
- Zapremina paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednaka je $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.
- Zapremina 4-strane piramide konstruisane nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednaka je $\dfrac{|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|}{3}$.
- Zapremina trostrane piramide konstruisane nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednaka je $\dfrac{|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|}{6}$.
- Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

Ako je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, tada je

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1. Ako je $\vec{a} = (5, 2, -3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 4)$, naći $\vec{a} \times \vec{b}$.

Rešenje. Imamo

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}(8+3) - \vec{j}(20-6) + \vec{k}(5+4) =$$

$$= 11\vec{i} - 14\vec{j} + 9\vec{k} = (11, -14, 9).$$

2. Dokazati Lagranžov identitet $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$.

Rešenje. Kako je $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ i $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2$, to je

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}))^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (|\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}))^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2.$$

3. Dokazati Jakobijev identitet $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{0}$.

Rešenje. Imamo

$$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})+\vec{y}\times(\vec{z}\times\vec{x})+\vec{z}\times(\vec{x}\times\vec{y}) = -(\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{x}-(\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y}-(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} =$$

$$= (\vec{z} \times \vec{y}) \times \vec{x} + (\vec{x} \times \vec{z}) \times \vec{y} + (\vec{y} \times \vec{x}) \times \vec{z} = (\vec{z}\vec{x})\vec{y} - (\vec{y}\vec{x})\vec{z} +$$

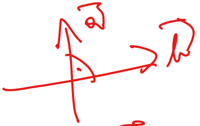
$$+(\vec{x}\vec{y})\vec{z} - (\vec{z}\vec{y})\vec{x} + (\vec{y}\vec{z})\vec{x} - (\vec{x}\vec{z})\vec{y} = \vec{0}.$$

4. Dokazati da su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni vektori ako je
$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$. $\quad / \cdot \vec{c} \qquad \vec{0}\cdot\vec{c} = 0$

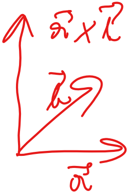
Rešenje. Ako datu jednakost skalarno pomnožimo sa $\vec{c}$, dobijamo

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=0,$$

odnosno $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+0+0=0$ (jer je $\vec{b}\times\vec{c}\perp\vec{c}$ i $\vec{c}\times\vec{a}\perp\vec{c}$), odakle sledi da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.



$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$



$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$

$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

5. Ako je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$, odrediti površinu paralelograma odreenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rešenje. $P = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}\vec{b}) = 3 \cdot 5 \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 15 \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Ako kvadriramo $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$, dobijamo $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 16$, odnosno $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$, odakle je $\vec{a}\vec{b} = 9$ (jer je $|\vec{a}| = 3$ i $|\vec{b}| = 5$). Kako je $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{9}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}$, to iz $\sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) + \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ sledi

$$\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5},$$

pa je konačno $P = 15 \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 15 \cdot \frac{4}{5} = 12$.

6. Neka su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zaklapaju ugao od $\frac{\pi}{4}$. Odrediti površinu paralelograma čije su dijagonale $\vec{e} = 2\vec{m} - \vec{n}$ i $\vec{f} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$.

Rešenje. Imamo

$$P = \frac{1}{2}|\vec{e} \times \vec{f}| =$$

$$= \frac{1}{2}|(2\vec{m} - \vec{n}) \times (4\vec{m} - 5\vec{n})| = \frac{1}{2}|8\vec{m} \times \vec{m} - 10\vec{m} \times \vec{n} - 4\vec{n} \times \vec{m} + 5\vec{n} \times \vec{n}| =$$

$$= \frac{1}{2}|0 - 10\vec{m} \times \vec{n} + 4\vec{m} \times \vec{n} + 0| = \frac{1}{2}| - 6\vec{m} \times \vec{n}| = \frac{1}{2} \cdot 6|\vec{m} \times \vec{n}| =$$

$$= 3|\vec{m}||\vec{n}| \sin \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$