Blatt 2

Aufgabe 1

Begeben ist die Folge $a_n = \frac{12n+4}{4n+7}$; $\epsilon = 0.001$, zu bestimmen ist N_ϵ ab welchem gilt, dass n < $N_\epsilon : |a_n - 3| < \epsilon$:

$$|a_n - 3| < \epsilon \mid +3$$

$$\Leftrightarrow |\frac{12n+4}{4n+7} - 3| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |\frac{12n+4}{4n+4} - \frac{3(4n+7)}{4n+7}| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |\frac{12n+4-3(4n+7)}{4n+7}| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |\frac{12n+21-3(4n+7)-17}{4n+7}| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |\frac{3(4n+7)-3(4n+7)-17}{4n+7}| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |\frac{-17}{4n+7}| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{4n+7} < \epsilon| \cdot (4n+7) \div \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{\epsilon} < 4n+7| - 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{\epsilon} - 7 < 4n| \div 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\frac{17}{\epsilon} - 7) < n$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{4\epsilon} - \frac{7}{4} < n$$

Wir setzen nun $\epsilon = 0.01$ ein:

$$\frac{17}{4 \cdot 0.01} - \frac{7}{4} < n$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{4 \cdot \frac{1}{100}} - \frac{7}{4} < n$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{\frac{4}{100}} - \frac{7}{4} < n$$

$$\Leftrightarrow 17 \cdot \frac{1}{\frac{4}{100}} - \frac{7}{4} < n$$

$$\Leftrightarrow 17 \cdot \frac{100}{4} - \frac{7}{4} < n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1700}{4} - \frac{7}{4} < n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1693}{4} < n$$

Nun bestimmen wir anhand dieser Bedingung N_ϵ

$$N_\epsilon = \lceil \frac{1693}{4} \rceil$$

$$\Leftrightarrow N_\epsilon = 424$$

Aufgabe 2

a) Seien:

$$a_n = (-1)^n \frac{2n}{n+1} + 4$$

$$b_n = (-1)^n \frac{2n}{n+1} + 4$$

$$c_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
a_n	3	5.3	2.5	5.6	2.3	5.7	2.2	5.7
b_n	3	4.6	3.5	4.4	3.6	4.28	3.75	4.22
c_n	2.5	2.3	2.25	2.2	2.16	2.14	2.125	2.11

b) Damit eine Folge beschränkt ist, muss diese ein Infimum und Supremum haben:

Sequence	**Infimum**	**Minimum**	**Supremum**	**Maximum**
a_n	3	3	6	-
b_n	3	3	4.6	-

a_n hat kein monotones Wachstumsverhalten, da sowohl
$a_1 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1}$ als auch $a_1 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1}$ nicht für a_n gelten.

b_n hat kein monotones Wachstumsverhalten, da sowohl
$b_1 \leq .. \leq b_n \leq b_{n+1}$ als auch $b_1 \geq ... \geq b_n \geq b_{n+1}$ nicht für b_n gelten.

Somit sind a_n, b_n zwar beschränkt, aber nicht monoton.

c) Um zu zeigen, dass c_n durch 3 beschränkt ist, muss folgende Bedingung gelten:

$$c_n \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+3}{n+1} \leq 3| \cdot (n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2n+3 \leq 3(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2n+3 \leq 3n+3| - 3$$

$$\Leftrightarrow 2n \leq 3n| \div n$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 3$$

Da die Aussage $2 \leq 3$ gilt, und wir dies aus der Aussage $c_n \leq 3$ umegeformt haben, gilt auch die Aussage $2 \leq 3$.

Um zu zeigen, dass c_n streng monoton fallend ist, muss die Aussage $c_{n+1} < c_n$ gelten:

$$c_{n+1} < c_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} < \frac{2n+3}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+2+3}{n+2} < \frac{2n+3}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+5}{n+2} < \frac{2n+3}{n+1}| \cdot (n+2)$$

$$\Leftrightarrow 2n+5 < \frac{(2n+3)(n+2)}{n+1}| \cdot (n+1)$$

$$\Leftrightarrow (2n+5)(n+1) < (2n+3)(n+2)$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 2n + 5n + 5 < 2n^2 + 4n + 3n + 6$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + 7n + 5 < 2n^2 + 7n + 6| - (2n^2 + 7n)$$

$$\Leftrightarrow 5 < 6$$

Da die Aussage $5 < 6$ eine Tautologie ist und aus der Aussage $c_{n+1} < c_n$, ist die Aussage $c_{n+1} < c_n$ korrekt.

d) Durch den Vorzeichenwechsel mit $(-1)^n$ in a_n und a_n kein monotones Wachstumsverhalten hat, konvergiert a_n nicht (siehe monotone Konvergenz).

e) Sei $g_1 = lim_{n \to \infty} b_n$. Bestimmen wir also zunächst $lim_{n \to \infty} b_n$:

$$lim_{n \to \infty} b_n$$

$$= lim_{n\to\infty}\,(-1)^n \frac{2}{n+1} + 4 = 4$$

Somit ist $g_1 = 4$.

Nun muss gezeigt werden, dass folgendes gilt:

$$lim_{n\to\infty}\,(b_n - g_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty}\,(b_n - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty}\,((-1)^n \frac{2}{n+1} + 4 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty}\,(-1)^n \frac{2}{n+1} = 0$$

Sei $g_2 = lim_{n\to\infty}\,c_n$. Bestimmen wir zunächst $lim_{n\to\infty}\,c_n$:

$$lim_{n\to\infty}\,c_n$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} + \frac{3}{n+1}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2}{n(1+\frac{1}{n})} + \frac{3}{n+1}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} + \frac{3}{n+1}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} + \frac{n \cdot \frac{3}{n}}{n(1+\frac{1}{n})}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} + \frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

Somit ist $g_2 = 2$. Wir setzen g_2 nun in $(c_n - g_2) \leq 0$ ein:

$$(c_n - g_2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (c_n - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n+3)}{n+1} - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n+3)}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n+3) - 2(n+1)}{n+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n+3)-(2n+2)}{n+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq 0$$

Aufgabe 3

Eine Nullfolge, die wir nehmen können ist $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und eine Folge, welche bestimmt gegen ∞ divergiert ist $b_n = n$. Das Produkt beider ist wie folgt:

$$c_n = a_n \cdot b_n$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \cdot n$$

$$= (-1)^n$$

Dabei ist c_n zwar nicht konvergent, jedoch trotzdem beschränkt mit 1 als obere und -1 als untere Schranke.

Aufgabe 4

a) Bestimmen wir den Grenzwert von dem folgendem Term mit Grenzwertgesetzen:

$$lim_{n\to\infty} \frac{103n^2 - 53n + 41}{n^2 + 5}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{n^2(103 - \frac{5}{3}n + \frac{41}{n^2})}{n^2(1 + \frac{5}{n^2})}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{103 - \frac{5}{3}n + \frac{41}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}}$$

$$= \frac{103}{1} = 103$$

b) Bestimmen wir den Grenzwert von dem folgenden Termin mit Grenzwertgesetzen:

$$lim_{n\to\infty} \frac{103n^3}{n^2+5} - \frac{103n^2}{n+19}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{103n^3 \cdot (n+19)}{(n^2+5)(n+19)} - \frac{103n^2(n^2+5)}{(n^2+5)(n+19)}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{103n^4 + 1957n^3}{(n^2+5)(n+19)} - \frac{103n^4 + 515n^2}{(n^2+5)(n+19)}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{103n^4 + 1957n^3 - 103n^4 + 515n^2}{(n^2+5)(n+19)}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{1957n^3 + 515n^2}{(n^2+5)(n+19)}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{1957n^3 + 515n^2}{n^3 + 19n^2 + 5n + 95}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1957 + \frac{515}{n})}{n^3(1 + \frac{19}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{95}{n^3})}$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{1957 + \frac{515}{n}}{1 + \frac{10}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{95}{n^3}}$$

$$= \frac{1957}{1} = 1957$$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Folge:

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}) für\ n \geq 2$$

a) Betrachten wir zunächst die ersten fünf Folgeglieder:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{3}{a_1}) = \frac{1}{2}(1+3) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + \frac{3}{a_2}) = \frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + \frac{3}{a_3}) = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} + \frac{3}{\frac{7}{4}}) = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} + 3 \cdot \frac{4}{7}) = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} + \frac{12}{7}) = \frac{7}{8} + \frac{12}{14} = 1.7321$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + \frac{3}{a_4}) = 1.7320$$

b) Sei g der Grenzwert unserer Folge. Zu zeigen ist, dass g der Gleichung

$$g = \frac{1}{2}(g + \frac{3}{g})$$

genügt. Dies tun wir durch Grenzwertsätze. Betrachten wir zunächst den Grenzwert von a_n:

$$lim_{n\to\infty}\ a_n$$

$$= lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n})$$

$$= lim_{n\to\infty}\ (\frac{1}{2}\cdot a_n) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{a_n}$$

$$= lim_{n\to\infty}\ (\frac{1}{2}\cdot a_n) + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a_n}$$

Sei $b_n = \frac{1}{a_n}$:

$$\Rightarrow lim_{n\to\infty}\ (\frac{1}{2}\cdot a_n) + \frac{3}{2}\cdot b_n$$

$$= lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{2}\cdot a_n + \frac{3}{2}\cdot b_n$$

Wir tun nun b_n rücksubstituieren:

$$= lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{2}\cdot a_n + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a_n}$$

Wir wissen, dass g unser Grenzwert für a_n ist. Nutzen wir dies in Kombination mit dem ersten und dritten Grenzwertsatz, so erhalten wir folgenden Grenzwert:

$$\frac{1}{2}\cdot g + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{g}$$

$$= \frac{1}{2}(g + \frac{3}{g})$$

Dies entspricht unserer Gleichung $g = \frac{1}{2}(g + \frac{3}{g})$ und somit genügt g dieser.

c) Bestimmen wir nun anhand der Gleichung den Grenzwert g:

$$g = \frac{1}{2}(g + \frac{3}{g})$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{1}{2}g + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{g} | - \frac{1}{2}g$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}g = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{g} | \cdot g$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}g^2 = \frac{3}{2} | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow g^2 = 3 | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow g = \sqrt{3}\ \vee g = -\sqrt{3}$$