Blatt 1

Aufgabe 1

a) Gegeben sei $|x-2|>1$

Wir führen nun folgende Fallunterscheidung durch:

Fall 1

$x-2>0$

$$x-2>1|+2$$
$$\Leftrightarrow x>3$$

Fall 2

$|x-2<0|$

$$-(x-2)>1$$
$$\Leftrightarrow -x+2>1|-2$$
$$\Leftrightarrow -x>-1|\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow x<1$$

b) Gegeben sei $x^2+y^2-2x+4y=0$:

Lösen wir zunächst die Gleichungen $x^2-2x=0$ und $y^2+4y=0$:

$$x^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+(\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2$$
$$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}|\surd$$
$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}|+\frac{1}{2} \ \vee \ x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}|+\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \ \vee \ x=0$$

$$y^2 + 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 2^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^2 = 4|\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow y + 2 = 2| - 2 \ \vee \ y + 2 = -2| - 2$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ y = -4$$

Somit erhalten wir für der Menge der Punkte der Ebene: $\{(0,0)\}$

Aufgabe 2

a) Gefordert wird ein Polynom 2ten Grades mit den Nullstellen $2+\sqrt{2}$ und $2-\sqrt{2}$. Die Bedinungen können formal wie folgt ausgedrückt werden:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ und f habe die Bedingungen

$$f(2+\sqrt{2}) = 0 \ \wedge \ f(2-\sqrt{2}) = 0$$

Dabei gehen wir wie folgt vor, um die Koeffizienten a, b und c zu ermitteln:

$$x = 2 + \sqrt{2}| - 2 \ \vee \ x = 2 - \sqrt{2}| - 2$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{2}|()^2 \ \vee x - 2 = -\sqrt{2}|()^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 2| - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1x^2 - 4x + 2x^0 = 0$$

Unsere Koeffizienten lauten also: $a = 1, b = -4$ und $c = 2$.

b) Wir führen einen Koeffzientenvergleich zwischen $(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$ und x^4+1 aus:

Mutliplizieren wir zunächst aus:

$$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$$

$$= (x^4 + bx^3 + x^2)(ax^3 + abx^2 + ax)(x^2 + bx + 1)$$

$$= x^4 + (a+b)x^3 + (x^2 + abx^2 + x^2) + (a+b)x + 1$$

$$= x^4 + (a+b)x^3 + (abx^2 + 2x^2) + (a+b)x + 1$$

$$= x^4 + (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 + (a+b)x + 1$$

Betrachten wir nun x^4+1:
Sei $f(x)=x^4+1$:

$$f(x)=x^4+1$$
$$=x^4+0x^3+0x^2+0x+1$$

Wir müssen also a,b so bestimmen, sodass für diese folgendes gilt:

$$a+b=0\ \wedge ab+2=0$$

Durch $a+b=0$ wissen wir: $a=-b$:
Setzen wir dies in die zweite Bedingung ein:

$$ab+2=0$$
$$\Leftrightarrow (-b)*b+2=0$$
$$\Leftrightarrow (-b)^2+2=0\,|-2$$
$$\Leftrightarrow (-b)^2=-2\,|\cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow b^2=2\,|\sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow b=\sqrt{2}\ \vee b=-\sqrt{2}$$

Dadurch, dass $a=-b$ gilt, können wir nun a bestimmen:

$$a=-b$$
$$\Leftrightarrow a=-\sqrt{2}$$

Somit erhalten wir:

$$a=-\sqrt{2}\ \wedge b=\sqrt{2}$$
$$\vee$$
$$a=\sqrt{2}\ \wedge b=-\sqrt{2}$$

Setzen wir a und b in den ausmulitplizierten ein:

$$x^4+(\sqrt{2}+(-\sqrt{2}))x^3+(\sqrt{2}*(-\sqrt{2})-2)x^2+(\sqrt{2}+(-\sqrt{2}))x+1$$

Dies entspricht: x^4+1.

c) Zu lösen ist: $x^3-2x+1=0$

Raten wir zunächst 1 als Nullstelle und führen Polynomdivision aus:

$$(x^3-2x+1)\div(x-1)=x^2+x+1$$

Bestimmen wir die Nullstellen von x^2+x+1:

$$x^2 + x - 1 = 0| + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + (\frac{1}{2})^2 = 1 + (\frac{1}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}|\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}| - \frac{1}{2} \ \vee x + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}| - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ \vee x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ \vee x = \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{2}$$

Aufgabe 3

Term	enthält 2	offene Umgebung	ϵ Umgebung
$\{1, 2, 3\}$	ja	nein	nein
$\{x \vert x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 4\}$	ja	nein	nein
$\{x \vert x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 4\}$	ja	nein	nein
$\{x \vert x \in \mathbb{R} : 0 < x < 4\} = (0; 4)$	ja	ja	ja mit ϵ=2
$(0, 4) \cap \mathbb{Q}$	ja	nein	nein
$[0, 4] \cap (1, 5] \cap [2, 3)$	ja	ja	ja mit $\epsilon = 1$
$\{x \vert x \in \mathbb{R} : \vert x \vert < 3\} = (-3, 3)$	ja	ja	nein
$\{x \vert x \in \mathbb{R} : \vert x - 2 \vert < 0.1\}$	ja	ja	ja mit $\epsilon = 0.1$

Aufgabe 4

Term	Infimum	Minimum	Supremum	Maximum
$\{4, 7, 11\}$	4	4	11	11
$\mathbb{N}$	0	0	-	-
$\{x \vert n \in \mathbb{N} : x = \frac{n-1}{n}\}$	0	0	1	-

Term	Infimum	Minimum	Supremum	Maximum
$\{x \vert n \in \mathbb{N} = \frac{3}{2n}\}$	0	-		
$\{x \vert m \in \mathbb{Z} : x = \frac{m}{1+\vert m \vert}\}$	-1	-	1	1
$[1, 4)$	1	1	4	/
$\{y \vert x \in (-1, 1) : y = \frac{1}{x^2+1}\}$	$\frac{1}{2}$	-	-	-