Blatt 5

Aufgabe 1

Sei $v \in \mathbb{Q}$ und der Wert x dB entspricht $10(\log(v))$.

a)

$$v = 1 = \frac{1}{1} \Rightarrow 10(\log_{10} 1) = 10 \cdot 0 = 0\ dB$$

$$v = 100 = \frac{100}{1} \Rightarrow 10(\log_{10} 100) = 10 \cdot 2 = 20\ db$$

$$v = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \Rightarrow 10(\log 10^{-3}) = 10 \cdot (-3) = -30\ db$$

$$v = \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 10(\log 10^{\frac{1}{2}}) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5\ dB$$

$$v = 50 = 5 \cdot 10 \Rightarrow 10(\log(5 \cdot 10)) = 10(\log(5) + \log(10)) = 10(0.7 + 1) = 10 \cdot 1.7 = 17\ dB$$

$$v = 250 = 2 \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow 10(\log(5 \cdot 5 \cdot 10))$$

$$= 10(2\log(5) + \log(10)) = 10(2 \cdot 0.7 + 1) = 10(1.4 + 1) = 10 \cdot 2.4 = 24\ dB$$

b)

$$40dB = 10 \cdot 4 = 10 \cdot \log(10^4) \Rightarrow v = 10^4 = 10,000$$

$$-70dB = 10 \cdot (-7) = 10 \cdot \log(10^{-7}) \Rightarrow v = 10^{-7} = \frac{1}{10,000,000}$$

Aufgabe 2

Sei in dieser Aufgabe $a \in \mathbb{R}$.

a)

$$f(x) = 4x^4 - 3ax^2 + 7x - a^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 16x^3 - 6ax + 7$$

b)

$$f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$$

c)

$$f(x) = x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 1x^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

d)

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = e^x((2x-2) + (x^2 - 2x + 2))$$

$$= e^x(2x - 2 + x^2 - 2x + 2) = e^x x^2$$

e)

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sin(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sin(x) - \ln(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

f)

$$f(x) = x^3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = 3x^2 \sin(x)\cos(x) + x^3 \cos(x)\cos(x) + x^3 \sin(x)(-\sin(x))$$

$$= 3x^2 \sin(x)\cos(x) + x^3 \cos^2(x) - x^3 \sin^2(x)$$

g)

$$f(x) = \frac{x\ln(x) - x}{2x+1}$$

$$f'(x) = \frac{((\ln(x) + x\frac{1}{x}) - 1)(2x+1) - 2(x\ln(x) - x)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{((\ln(x) + 1 - 1)(2x+1) - 2(x\ln(x) - x)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{ln(x)(2x+1) - 2(x\ln(x) - x)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x\ln(x) + \ln(x) - 2x\ln(x) + 2x}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{\ln(x) + 2x}{(2x+1)^2}$$

Aufgabe 3

Leiten wir nun die gegebenen Funktionen ab:

a)

$$f(x) = e^{4x} + \sin(3x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4e^{4x} + 3\cos(3x)$$

b)

$$f(x) = \ln(\frac{x^2}{2} + 1) = \ln(\frac{1}{2}x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 1} \cdot 2x$$

c)

$$f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)cos^2(x) + \sin(x) \cdot (-2\sin(x))$$

$$= \cos^3(x) - 2\sin^2(x)$$

d)

$$f(x) = (2x^3 + 5x)^4 \ln(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (4(2x^3 + 5x)^3(6x + 5))\ln(x) + (2x^3 + 5x)^4 \cdot \frac{1}{x}$$

e)

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2e^{2x})(e^{2x} - 1) - (e^{2x} + 1)(2e^{2x})}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$= \frac{(2e^{2x})(e^{2x} - 1 - e^{2x} - 1)}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$= \frac{(2e^{2x})(-2)}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

f)

$$f(x) = x^2\frac{e^{4x}}{(\ln(x))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x\frac{e^{4x}}{(\ln(x))^2} + x^2\frac{4e^{4x}(\ln(x))^2 - e^{4x}2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^4}$$

g)

$$f(x) = \cos^2(3e^{4x})$$
$$\Rightarrow f'(x) = 2\cos(3e^{4x}) \cdot 12e^{4x}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 4)$$

a) Bestimmen wir die Wertemenge W_f von f anhand der Gleichung:

$$f(x) = a$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = a$$
$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 4) = a | e^x$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4 = e^a | -4$$
$$\Leftrightarrow x^2 = e^a - 4 | \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{e^a - 4} \ \vee \ x = -\sqrt{e^a - 4}$$

Die Bedingung für $a \in W_f$ ist:

$$e^a - 4 < 0 | +4$$
$$\Leftrightarrow e^a < 4 | \ln$$
$$\Leftrightarrow a < \ln(4)$$

Somit gilt $W_f = \{a \mid a \in \mathbb{R} : a < \ln(4)\}$

b) Um die Tangente für f an der Stelle $x_0 = 1$ zu bestimmen, benötigen wir die Tangentengleichung:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Bestimmen wir also noch $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 4} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

Somit ist unsere Tangente:

$$y(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$= \ln(1^2 + 4) + \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 4} \cdot (x - 1)$$

$$y(x) = \ln(5) + \frac{2}{5} \cdot (x - 1)$$

c) Bei einer Tangente, welche parallel zur x-Achse ist, gilt bei der Tangentengleichung:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Bestimmen wir also ein x_0 mit $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 4} = 0 | \cdot x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 | \div 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Somit besitzt die Funktion eine Tangente parallel zur x-Achse bei $x = 0$.

d) Um zu schauen, an welcher Stelle f die Steigung $\frac{1}{2}$ hat, muss folgende Gleichung gelöst werden:

$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} | - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 4} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow = \frac{4x}{2(x^2 + 4)} - \frac{x^2 + 4}{2(x^2 + 4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x - (x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)} = 0 | \cdot 2(x^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow 4x - (x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 | + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$