Altklausur WS22-23

Aufgabe 1

a) Es soll eine Folge angegeben werden, welche zwar beschränkt, aber nicht konvergent ist.

Eine solche Folge ist $a_n = (-1)^n$. Beschränkt ist sie, da dessen Supremum 1 und Infimum -1 ist. Jedoch ist a_n nicht beschränkt, da diese bestimmt divergiert.

b) Gegeben sei die Folge:

$$a_n = \frac{n^3 + n + 2}{6n^7 + 5n^4 + n^2 + 1}$$

Dessen Grenzwert soll bestimmt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} a_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n + 2}{6n^7 + 5n^4 + n^2 + 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^7(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \frac{2}{n^7})}{n^7(6 + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \frac{2}{n^7}}{6 + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{0+0+0}{6+0+0+0} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{0}{6} = 0
\end{aligned}$$

c) Die Summe und Differenz zweier divergenter Folgen, muss nicht immer divergent sein.

Gegenbeispiel:

1. Summe zweier divergenter Folgen:
   Gegeben seien $a_n = n, b_n = -n$:

$$c_n = a_n + b_n$$

$$c_n = n + (-n)$$

$$c_n = n - n$$

$$c_n = 0$$

In dem Fall konvergiert c_n (die Summe von a_n und b_n)

2. Differenz zweier divergenter Folgen:
   Gegeben seien $a_n = n$ und $b_n = n$:

$$c_n = a_n - b_n$$
$$c_n = n - n$$
$$c = 0$$

In diesem Fall konvergiert c_n (die Differenz von a_n und b_n).

Jedoch ist das Produkt zweier divergenter Folgen , immer divergent.

d) Gegeben sei die Folge

$$b_n = \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$$

Führen wir die folgende Umformung durch.

$$b_n = \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2+n}{2}$$
$$= \frac{n^2+n}{2n^2}$$

Bestimmen wir nun dessen Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2 \cdot 2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2}$$
$$= \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2

a) i) Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{5^n}$$

Prüfen wir dessen Konvergenzverhalten anhand des Quotientenkriteriums:

$$q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{(n+1)^4}{5^{n+1}}}{\frac{n^4}{5^n}}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^4}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^4}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^4}{5^n \cdot 5} \cdot \frac{5^n}{n^4}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^4}{5} \cdot \frac{1}{n^4}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^4}{5n^4}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 64}{5n^4}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^4(1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{64}{n^4})}{n^4 \cdot 5}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{64}{n^4}}{5}|$$

$$= \frac{1+0+0+0+0}{5} = \frac{1}{5}$$

Da das Verhältnis $q = \frac{1}{5}$ kleiner als 1 ist, konvergiert die Reihe.

b) Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+2}$$

Prüfen wir dessen Konvergenzverhalten anhand des Quotientenkriteriums:

$$q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{3}{2(n+1)+2}}{\frac{3}{2n+2}}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{3}{2(n+1)+2} \cdot \frac{2n+2}{3}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{2(n+1)+2} \cdot (2n+2)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{2n+2+2} \cdot (2n+2)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{2n+2}{2n+4}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{2n(1+\frac{1}{n})}{2n(1+\frac{2}{n})}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}|$$

$$= \frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

Da das Verhältnis $q = 1$ ist, können wir über das Quotientenkriterium keine Aussage bezüglich der Konvergenz dieser Reihe tätigen.

b) Die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^n \cdot 5^{-n}$$

Führen wir folgende Umformungen durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{e}{5})^n$$

Mit $\frac{e}{5} < 1$ handelt es sich bei dieser Reihe um eine geometrische Reihe, welche konvergiert.

Bestimmen wir nun dessen Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (\frac{e}{5})^i$$

$$= \frac{1}{1-\frac{e}{5}} = \frac{1}{\frac{5}{5}-\frac{e}{5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5-e}{5}} = \frac{5}{5-e}$$

Aufgabe 3

a)

Funktion	n-te Ableitung
e^x	e^x
x^n	$n!$
x^{n-1}	0
e^{2x}	$2^n e^{2x}$

b) i) Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 10x^2 \cdot (4x+7)^{20}$$

$$f'(x) = 20x(4x+7)^{20} + 10x^2 \cdot 80(4x+7)^{19}$$

$$f'(x) = 20x(4x+7)^{20} + 800x^2(4x+7)^{19}$$

ii) Gegeben sei die Funktion:

$$g(x) = \sin((x+1)(x-1))$$

$$= \sin(x^2-1)$$

$$g'(x) = \cos(x^2-1) \cdot 2x$$

iii) Gegeben sei die Funktion:

$$h(x) = (\frac{x+1}{x-1})^2$$

$$h'(x) = 2(\frac{x+1}{x-1})(\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)^2})$$

$$= 2(\frac{x+1}{x-1})(\frac{x^2-1}{(x-1)^2})$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x^2 + 2\sin(x)$

a) Bestimmen wir dessen 4 Ableitungen:

$$f'(x) = 2x + 2\cos(x)$$

$$f''(x) = 2 + (-2\sin(x)) = 2 - \sin(x)$$

$$f'''(x) = -2\cos(x)$$

$$f''''(x) = 2\sin(x)$$

b) Berechnen wir das Taylor-Polynom anhand der vorigen gelbildeten Ableitungen:

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Mit $x_0 = 0$ sieht unser Taylorpolynom wiefolgt aus:

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$= \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4$$

$$= \frac{f(0)}{1} + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4$$

$$= (0^2 + 2\sin(0)) + (2 \cdot 0 + 2\cos(0))x + \frac{(2 - 2\sin(0))}{2}x^2 + \frac{-2\cos(0)}{6}x^3 + \frac{2\sin(0)}{24}x^4$$

$$= 0 + 2x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{-2}{6}x^3 + 0x^4$$

$$= 2x + x^2 - \frac{2}{6}x^3$$

$$= 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

c) Wir wissen:

$$f(\frac{1}{2}) = 1.208851$$

Bestimmen wir nun $T(\frac{1}{2})$:

$$T(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3$$

$$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{24}{24} + \frac{6}{24} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{30}{24} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{29}{24}$$

Der Bruch $\frac{29}{24}$ entspricht 1.20833 und stimmt mit $f(\frac{1}{2})$ in 3 Stellen hinter dem Komma überein.

Aufgabe 5

a) Gegeben seien die Funktionen:

$$f(x) = x^{-\frac{3}{2}}; g(x) = 2x \cdot e^{3x^2}$$

Bestimmen wir deren Stammfunktionen:

$$\int x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{3}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+\frac{2}{2}} x^{-\frac{3}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int 2x \cdot e^{3x^2} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int 6x \cdot e^{3x^2} dx$$

Wir nutzen nun das Substitutionsverfahren mit $u = 3x^2$:

$$= \frac{1}{3} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{3} e^u$$

Wir tun u nun rücksubstituieren und erhalten:

$$\frac{1}{3} e^{3x^2}$$

b) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = x^2; g(x) = 8x^2$$

Um deren eingeschlossene Fläche im Intervall $[-3; 3]$ zu bestimmen muss folgende Berechnung durchgeführt werden:

$$|\int_{-3}^{3} f(x)dx - \int_{-3}^{3} g(x)dx|$$

$$= |\int_{-3}^{3} x^2 dx - \int_{-3}^{3} 8 - x^2 dx|$$

$$= |[\frac{1}{3}x^3]_{-3}^{3} - [8x - \frac{1}{3}x^3]_{-3}^{3}|$$

$$= |(\frac{27}{3} + \frac{27}{3}) - ((24 - \frac{27}{3}) - (-24 + \frac{27}{3}))|$$

$$= |(9 + 9) - ((24 - 9) - (-24 + 9))|$$

$$= |18 - (15 + 24 - 9)|$$

$$= |18 - (15 + 15)| = |18 - 30| = |-12| = 12$$