Blatt 6

Aufgabe 1

a) Es soll der Grenzwert des folgenden Terms bestimmt werden:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Würden von diesem Term so den Grenzwert nehmen, bekämen wir $\frac{0}{0}$. Dementsprechend nutzen wir das Gesetz von L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{4x^3 - 4x}{2x - 2}$$

Auch hier bekämen wir wieder als Grenzwert $\frac{0}{0}$. Dementsprechend wenden wir L'Hôpital nochmal an:

$$\lim_{x \to 1} \frac{12x^2 - 4}{2} = \frac{12 - 4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

b) Gegeben ist der Term:

$$\frac{x}{e^x}$$

Würden wir den Grenzwert dieses Terms wie üblich betrachten bekämen wir den Grenzwert $\frac{\infty}{\infty}$. Dementsprechend verwenden wir den Satz von L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

c) Gegeben ist der Term:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Würden wir den Grenzwert dieses Terms wie üblich betrachten bekämen wir den Grenzwert $\frac{\infty}{\infty}$. Dementsprechend verwenden wir den Satz von L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}$$

Für diesen Term würden wir trotzdem den Grenzwert $\frac{\infty}{\infty}$ erhalten. Dementsprechend wenden wir den Satz von L'Hôpital nochmal an:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

d) Gegeben ist der Term:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sin(x) - \cos(x)}$$

Würden wir den Grenzwert dieses Terms wie üblich betrachten bekämen wir den Grenzwert $\frac{0}{0}$. Dementsprechend verwenden wir den Satz von L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x) - (-\sin(x))}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4})}$$

e) Gegeben ist der Term:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x + \sin(x)}$$

Würden wir den Grenzwert wie normal berechnen, erhalten wir $\frac{\infty}{\infty}$. Dementsprechend nutzen wir den Satz von L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x + \sin(x)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 + \cos(x)}$$

Hier haben wir das Problem, dass uns L'Hôpital auch nicht weiterhelfen wird, da die Ableitungen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ niemals einen konvergenten Term erreichen werden, wodurch wie durch L'Hôpital den Grenzwert nicht bestimmen können.

Aufgabe 2

Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \ln(x^2 + 4)$$

a) Die Extrema können wir bestimmen durch $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+4} \cdot (2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+4} = 0 | \cdot (x^2+4)$$
$$\Leftrightarrow 2x = 0 | \div 2$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

Setzen wir die Extremstelle und erhalten den y-Wert:

$$f(0) = \ln(0^2+4)$$
$$= \ln(4)$$

Somit ist das Extremum: $(0|\ln(4))$

Die Wendepunkte können wir bestimmen durch $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2+4) - 2x(2x)}{(x^2+4)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = 0 | \cdot (x^2+4)^2$$
$$\Leftrightarrow -2x^2+8 = 0 | -8$$
$$\Leftrightarrow -2x^2 = -8 | \div (-2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4 | \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee x = -2$$

Setzen wir $x = 2$ und $x = -2$ ein um die y-Werte der Wendepunkte zu bestimmen:

$$f(2) = \ln(2^2+4) = \ln(4+4) = \ln(8)$$
$$f(-2) = \ln((-2)^2+4) = \ln(4+4) = \ln(8)$$

Somit sind die Wendepunkte von f: $(2|\ln(8)) \ und \ (-2|\ln(8))$

b)

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Um zu zeigen, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, bestimmen wir die Nullstellen des Nennerterms.

$$e^x + e^{-x} = 0 | - e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^x = -e^{-x} | \ln$$

$$\Leftrightarrow x = -(-x)$$

$$\Leftrightarrow x = x | - x$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Da wir keine Nullstellen haben, ist f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Um zu zeigen, dass f streng monoton wachsend ist, müssen wir zeigen:

$$f'(x) > 0$$

Bestimmen wir zunächst $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Setzen wir $f'(x)$ in die Bedingung ein:

$$1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} > 0 | + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Aufgabe 4

Seien

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-4x}$$

a) Bestimmen wir die Taylorannäherung von f Genauigkeit von 3 Termen und dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k$$

$$= \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Bestimmen wir dafür zunächst $f'(x), f''(x)$ und $f'''(x)$:

$$f'(x) = -4e^{-4x}$$

$$f''(x) = 16e^{-4x}$$

$$f'''(x) = -64e^{-4x}$$

Setzen wir die Ableitungen nun in unser Taylorpolynom ein:

$$\frac{e^{-4\cdot 0}}{0!}x^0 + \frac{-4e^{-4\cdot 0}}{1!}x + \frac{16e^{-4\cdot 0}}{2!}x^2 + \frac{-64e^{-4\cdot 0}}{3!}x^3$$

$$= 1 - 4x + \frac{16}{2}x^2 - \frac{64}{6}x^3$$

$$= 1 - 4x + 8x^2 - \frac{64}{6}x^3$$

b) Bilden wir nun ein abstrakteres Gesetz für unsere Taylorreihe abhänging der Ableitungsvorschriften von f. Bei genauerem Hinschauen, fällt uns folgendes Muster auf:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k!} x^k$$

Und dies ist die Taylorreihe unserer Funktion f.

c) Bestimmen wir nun die Taylorreihe anhand der Taylorreihe von e, welche am Anfang gegeben war.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow e^{-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4x)^k}{k!}$$

Die Taylorreihe $T_n(x)$ lautet also:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-4x)^k}{k!}$$

Das Taylorpolynom $T_3(x)$ würde mit dieser Taylorreihe wie folgt aussehen:

$$T_3(x) = \frac{(-4x)^0}{0!} + \frac{(-4x)^1}{1!} + \frac{(-4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^3}{3!}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{4x}{1} + \frac{16x^2}{2} - \frac{64x^3}{6}$$

$$= 1 - 4x + \frac{16}{2}x^2 - \frac{64}{6}x^3$$

$$T_3(x) = 1 - 4x + 8x^2 - \frac{64}{6}x^3$$

d) Gegeben sei unser Taylorpolynom $T_3(x)$ für unsere Funktion f und wir sollen damit nun e annähern. Aktuell gilt:

$$T_3(x) \approx e^{-4x}$$

Um e also zu erhalten müssen wir wie folgt vorgehen:

$$e^{-4x} \approx T_3(x)$$

$$e^{-4\cdot(-\frac{1}{4})} \approx T_3(-\frac{1}{4})$$

$$\Leftrightarrow e^1 \approx T_3(-\frac{1}{4})$$

$$\Leftrightarrow e \approx T_3(-\frac{1}{4})$$

$$\Leftrightarrow e \approx 1 - 4\cdot(-\frac{1}{4}) + 8\cdot((-\frac{1}{4})^2) - \frac{64}{6}(-\frac{1}{4})^3$$

$$\Leftrightarrow e \approx 1 - (-1) + 8(\frac{1}{16}) + \frac{64}{6}\cdot\frac{1}{64}$$

$$\Leftrightarrow e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow e \approx \frac{12}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow e \approx \frac{16}{6}$$