

Aufgabe 1

a) Es soll eine Folge angegeben werden, welche zwar beschränkt, aber nicht konvergent ist.

Eine solche Folge ist $a_n = (-1)^n$. Beschränkt ist sie, da dessen Supremum 1 und Infimum -1 ist. Jedoch ist a_n nicht beschränkt, da diese bestimmt divergiert.

b) Gegeben sei die Folge:

$$a_n = \frac{n^3 + n + 2}{6n^7 + 5n^4 + n^2 + 1}$$

Dessen Grenzwert soll bestimmt:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 2}{6n^7 + 5n^4 + n^2 + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 \left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \frac{2}{n^7} \right)}{n^7 \left(6 + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + \frac{2}{n^7}}{6 + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 + 0}{6 + 0 + 0 + 0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{6} = 0 \end{aligned}$$

c) Die Summe und Differenz zweier divergenter Folgen, muss nicht immer divergent sein.

Gegenbeispiel:

1. Summe zweier divergenter Folgen:

Gegeben seien $a_n = n, b_n = -n$:

$$c_n = a_n + b_n$$

$$c_n = n + (-n)$$

$$c_n = n - n$$

$$c_n = 0$$

In dem Fall konvergiert c_n (die Summe von a_n und b_n)

2. Differenz zweier divergenter Folgen:

Gegeben seien $a_n = n$ und $b_n = n$:

$$c_n = a_n - b_n$$

$$c_n = n - n$$

$$c = 0$$

In diesem Fall konvergiert c_n (die Differenz von a_n und b_n).

Jedoch ist das Produkt zweier divergenter Folgen , immer divergent.

d) Gegeben sei die Folge

$$b_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Führen wir die folgende Umformung durch.

$$b_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{n^2 + n}{2n^2}$$

Bestimmen wir nun dessen Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 + \frac{1}{n})}{n^2 \cdot 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2}$$

$$= \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2

a) i) Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{5^n}$$

Prüfen wir dessen Konvergenzverhalten anhand des Quotientenkriteriums:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^4}{5^{n+1}}}{\frac{n^4}{5^n}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^4}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^4} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^4}{5^n \cdot 5} \cdot \frac{5^n}{n^4} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^4}{5} \cdot \frac{1}{n^4} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^4}{5n^4} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 64}{5n^4} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^4 \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{64}{n^4}\right)}{n^4 \cdot 5} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{64}{n^4}}{5} \right| \\ &= \frac{1 + 0 + 0 + 0 + 0}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Da das Verhältnis $q = \frac{1}{5}$ kleiner als 1 ist, konvergiert die Reihe.

b) Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+2}$$

Prüfen wir dessen Konvergenzverhalten anhand des Quotientenkriteriums:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3}{2(n+1)+2}}{\frac{3}{2n+2}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3}{2(n+1)+2} \cdot \frac{2n+2}{3} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2(n+1) + 2} \cdot (2n+2) \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2n + 2 + 2} \cdot (2n+2) \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+2}{2n+4} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n(1 + \frac{1}{n})}{2n(1 + \frac{2}{n})} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right| \\
&= \frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

Da das Verhältnis $q = 1$ ist, können wir über das Quotientenkriterium keine Aussage bezüglich der Konvergenz dieser Reihe tätigen.

b) Die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^n \cdot 5^{-n}$$

Führen wir folgende Umformungen durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{5}\right)^n$$

Mit $\frac{e}{5} < 1$ handelt es sich bei dieser Reihe um eine geometrische Reihe, welche konvergiert.

Bestimmen wir nun dessen Grenzwert:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{e}{5}\right)^i \\
&= \frac{1}{1 - \frac{e}{5}} = \frac{1}{\frac{5}{5} - \frac{e}{5}} \\
&= \frac{1}{\frac{5-e}{5}} = \frac{5}{5-e}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

Funktion	n-te Ableitung
e^x	e^x
x^n	$n \cdot x^{n+1}$
x^{n-1}	$(n-1)x^{n-2}$
e^{2x}	$2^n e^{2x}$

b) i) Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 10x^2 \cdot (4x + 7)^{20}$$

$$f'(x) = 20x(4x + 7)^{20} + 10x^2 \cdot 80(4x + 7)^{19}$$

$$f'(x) = 20x(4x + 7)^{20} + 800x^2(4x + 7)^{19}$$

ii) Gegeben sei die Funktion:

$$g(x) = \sin((x + 1)(x - 1))$$

$$= \sin(x^2 - 1)$$

$$g'(x) = \cos(x^2 - 1) \cdot 2x$$

iii) Gegeben sei die Funktion:

$$h(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

$$h'(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x^2-1}{(x-1)^2}\right)$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x^2 + 2 \sin(x)$

a) Bestimmen wir dessen 4 Ableitungen:

$$f'(x) = 2x + 2 \cos(x)$$

$$f''(x) = 2 + (-2 \sin(x)) = 2 - \sin(x)$$

$$f'''(x) = -2 \cos(x)$$

$$f''''(x) = 2 \sin(x)$$

b) Berechnen wir das Taylor-Polynom anhand der vorigen gebildeten Ableitungen:

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Mit $x_0 = 0$ sieht unser Taylorpolynom wie folgt aus:

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 \\ &= \frac{f(0)}{1} + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24} x^4 \\ &= (0^2 + 2 \sin(0)) + (2 \cdot 0 + 2 \cos(0))x + \frac{(2 - 2 \sin(0))}{2} x^2 + \frac{-2 \cos(0)}{6} x^3 + \frac{2 \sin(0)}{24} x^4 \\ &= 0 + 2x + \frac{2}{2} x^2 + \frac{-2}{6} x^3 + 0x^4 \\ &= 2x + x^2 - \frac{2}{6} x^3 \\ &= 2x + x^2 - \frac{1}{3} x^3 \end{aligned}$$

c) Wir wissen:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.208851$$

Bestimmen wir nun $T\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \\ &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{24}{24} + \frac{6}{24} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{30}{24} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{29}{24} \end{aligned}$$

Der Bruch $\frac{29}{24}$ entspricht 1.20833 und stimmt mit $f\left(\frac{1}{2}\right)$ in 3 Stellen hinter dem Komma überein.

Aufgabe 5

a) Gegeben seien die Funktionen:

$$f(x) = x^{-\frac{3}{2}}; g(x) = 2x \cdot e^{3x^2}$$

Bestimmen wir deren Stammfunktionen:

$$\begin{aligned} & \int x^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{-\frac{3}{2} + 1} x^{-\frac{3}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{-\frac{3}{2} + \frac{2}{2}} x^{-\frac{3}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int 2x \cdot e^{3x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int 6x \cdot e^{3x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (e^{3x^2})^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} (e^{3x^2})^2 \end{aligned}$$

b) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = x^2; g(x) = 8x^2$$

Um deren eingeschlossene Fläche im Intervall $[-3; 3]$ zu bestimmen muss folgende Berechnung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-3}^3 f(x) dx - \int_{-3}^3 g(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{-3}^3 x^2 dx - \int_{-3}^3 8 - x^2 dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^3 - \left[8x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^3 \right| \\ &= \left| \left(\frac{27}{3} + \frac{27}{3} \right) - \left((24 - \frac{27}{3}) - (-24 + \frac{27}{3}) \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |(9 + 9) - ((24 - 9) - (-24 + 9))| \\
 &= |18 - (15 + 24 - 9)| \\
 &= |18 - (15 + 15)| = |18 - 30| = |-12| = 12
 \end{aligned}$$