Blatt 4

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion:

$$f : \mathbb{R}, \{0, 1\} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - x}$$

Bestimmen wir die folgenden Grenzwerte:

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-x} \Rightarrow$ ist nicht existent!
- $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-x}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1) + 3(x-1)}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+3)}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3}{x} = 4$$

- $\lim_{x\to 2}$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - x}$$

$$= \frac{2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 - 3}{2^2 - 2}$$

$$= \frac{8 - 4 + 6 - 3}{4 - 2}$$

$$= \frac{4 + 6 - 3}{2} = \frac{7}{2}$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!}$$

Betrachten wir dafür:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2^0} \cdot \frac{1}{0!}) + (\frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{1!}) + (\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2!}) + (\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3!}) + \ldots + (\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!})$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}) + (\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6}) + \ldots + (\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!})$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \ldots + (\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!})$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}$$

$$\approx \frac{48}{48} + \frac{24}{48} + \frac{6}{48} + \frac{1}{48}$$

$$\approx \frac{79}{48} \approx 1.6$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = e^{2x} - 3$$

a) Berechnen wir zunächst dessen Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

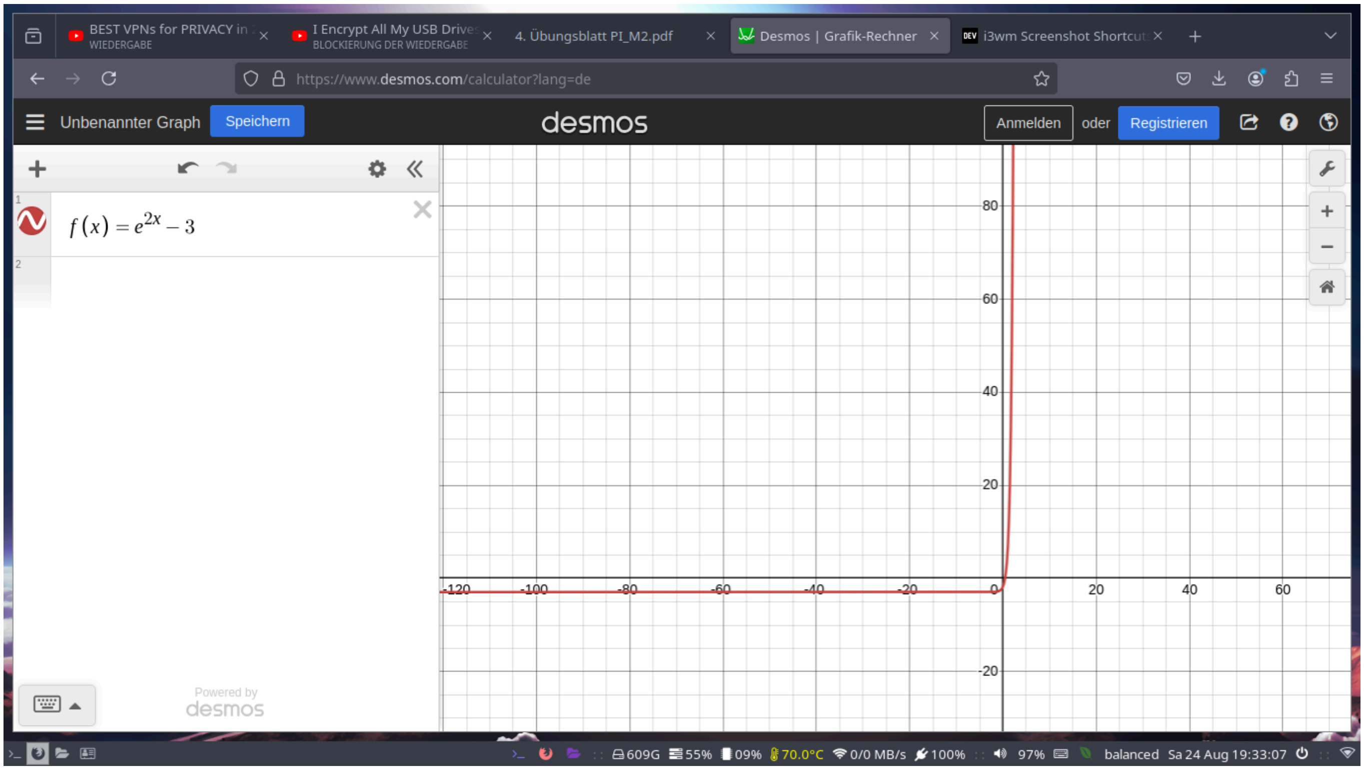
$$\Leftrightarrow e^{2x} - 3 = 0 | + 3$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 3 | \ln$$

$$\Leftrightarrow 2x = ln(3) | \div 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{2}$$

b)



Es ist zu sehen, dass die Funktion stetig ist und somit auch umkehrbar an der ersten Winkelhalbierenden.

c) Die Wertemenge W_f für f lautet: $(-3, \infty)$.

d) Ermitteln wir nun die Umkehrfunktion für f:

$$f(x) = e^{2x} - 3$$

$$y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{2x} - 3 | + 3$$

$$\Leftrightarrow y + 3 = e^{2x} | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(y + 3) = 2x | \div 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(y + 3)}{2} = x$$

Aufgabe 4

a) Gegeben ist:

$$\ln(x^2) = 2\ln(x) \; |e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x^2)} = e^{2\ln(x)}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x^2)} = (e^{\ln(x)})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x^2$$

b) Zu vereinfachen ist folgender Term:

$$\ln(\frac{a^2b}{e}) - \frac{4\ln(a) + \ln(b)}{2} + 1$$

$$= \ln(\frac{a^2b}{e}) - \frac{\ln(a^4) + \ln(b)}{2} + 1$$

$$= \ln(\frac{a^2b}{e}) - \frac{\ln(a^4b)}{2} + 1$$

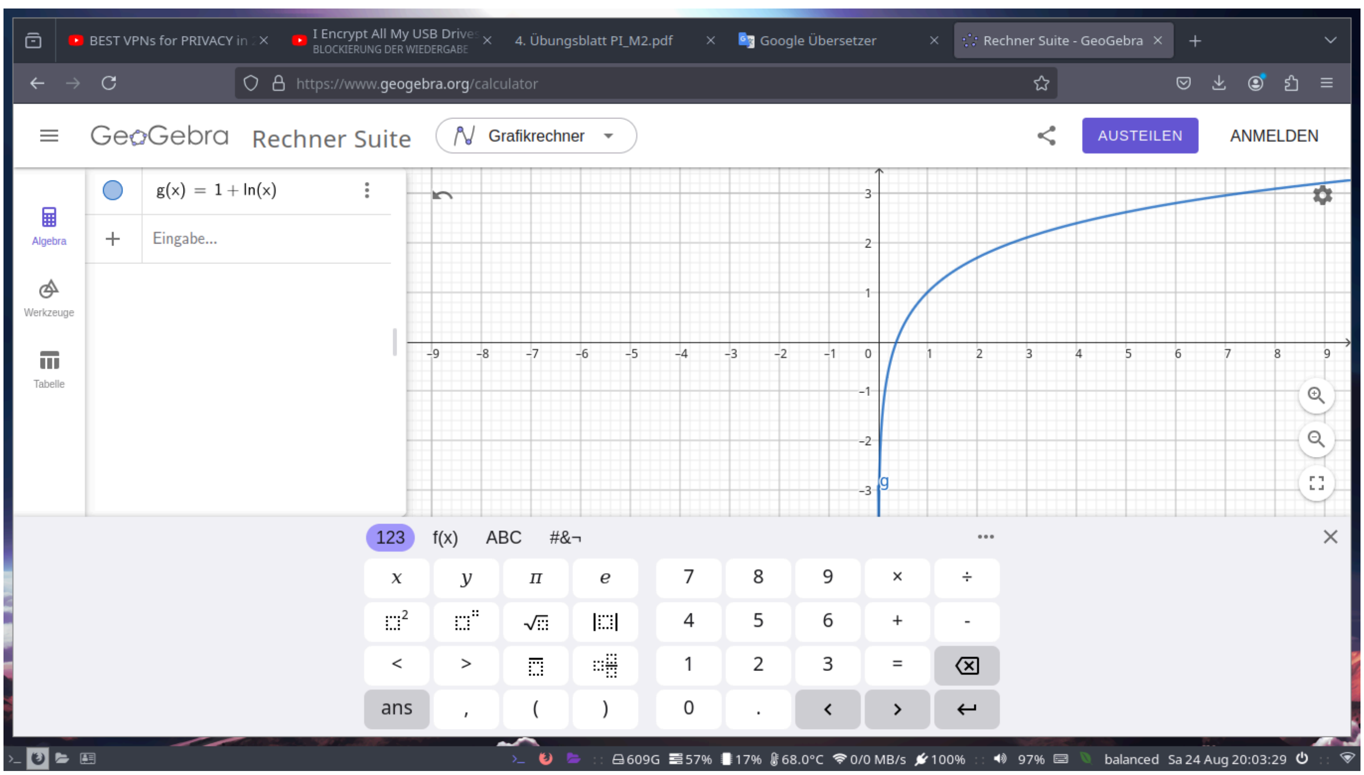
c) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(ex)$

Vereinfachen wir die Funktion:

$$\ln(ex)$$

$$= \ln(e) + \ln(x)$$

$$= 1 + \ln(x)$$



Aufgabe 5

a) Gegeben sei folgende Gleichung:

$$\ln(x^2 - 1) = -1|e^x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = e^{-1} | +1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = e^{-1} + 1 | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{e^{-1} + 1} \vee x = -\sqrt{e^{-1} + 1}$$

b) Gegeben sei die folgende Gleichung:

$$e^{x^2-1} - e^x = 0 | + e^x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = x | - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 | + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + (\frac{1}{2})^2 = 1 + (\frac{1}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \ | + \frac{1}{2} \vee \ x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} | + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \ \vee \ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$