Altklausur SS22

Aufgabe 1

Es seien die folgenden gegeben:

$$a_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{2n} - \frac{n}{2}$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 2}{2x^3 - x^2 - 1}$$

a) Bestimmen wir den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{2n} - \frac{n}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{2n} - \frac{n^2}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 1 - n^2}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3n + 1}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(-3 + \frac{1}{n})}{n \cdot 2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3 + \frac{1}{n}}{2} = -\frac{3}{2}$$

b) Bestimmen wir den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

$$= f(2)$$

$$= \frac{2^4 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot 2^3 - 2^2 - 1}$$

$$= \frac{16 - 8 + 6 - 2}{2^4 - 4 - 1}$$

$$= \frac{16 - 8 + 6 - 2}{16 - 4 - 1}$$

$$= \frac{8 + 4}{12 - 1}$$

$$= \frac{12}{11}$$

c) Bestimmen wir den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 2}{2x^3 - x^2 - 1}$$

Da hier der Grenzwert $\frac{0}{0}$ wäre, nutzen wir den Satz von L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 4x + 3}{6x^2 - 2x}$$

$$= \frac{4 \cdot (1)^3 - 4 \cdot 1 + 3}{6 \cdot (1)^2 - 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 - 4 + 3}{6 - 2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Aufgabe 2

a) Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{3^k}$$

Bestimmen wir dessen Konvergenzverhalten anhand des Quotientenkriteriums:

$$q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{(\frac{4}{3})^{n+1}}{(\frac{4}{3})^n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |(\frac{4}{3})^{n+1} \cdot \frac{1}{(\frac{4}{3})^n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |(\frac{4}{3})^n \cdot (\frac{4}{3}) \cdot \frac{1}{(\frac{4}{3})^n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |(\frac{4}{3})| = \frac{4}{3}$$

Da $q = \frac{4}{3}$ größer als 1 ist, divergiert die Reihe.

b) Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2-7}{2^n}$$

Prüfen wir dessen Konvergenzverhalten anhand des Quotientenkriteriums:

Sei $a_n = \frac{n^2-7}{2^n}$:

$$q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{(n+1)^2-7}{2^{n+1}}}{\frac{n^2-7}{2^n}}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^2-7}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2-7}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2+2n+1-7}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n^2-7}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2+2n+1-7}{2} \cdot \frac{1}{n^2-7}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2+2n-6}{2(n^2-7)}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2+2n-6}{2n^2-14}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2(1+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2})}{n^2(2-\frac{14}{n^2})}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}{2-\frac{14}{n^2}}| = \frac{1}{2}$$

Da $q = \frac{1}{2}$ kleiner als 1 ist, konvergiert die Reihe.

c) Gegeben ist die Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

Bestimmen wir das Kovergenzverhalten anhand des Quotientenkriteriums:

Sei $a_n = \frac{n!}{n^n}$:

$$q = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n!(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^n(n+1)}{(n+1)^{n+1}}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^n(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{n^n}{(n+1)^n}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{(n+1)})^n$$

Hier nutzen wir die uns gegebene Bedingung: $\lim_{k\to\infty}(\frac{k}{(k+1)})^k = \frac{1}{e}$:

$$= \frac{1}{e}$$

Aufgabe 3

a) Wir bilden die erste Abbildung der Funktion:

$$f(x) = (5x-3)^{10}$$

$$f'(x) = 10(5x-3)^9 \cdot 5 = 50(5x-3)^9$$

b) Wir bilden die erste Abbildung der Funktion:

$$g(x) = \sqrt{1-3x} \cdot \sin(x)$$

$$= (1-3x)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1-3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x) + (1-3x)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$$

c) Wir bilden die erste Abbildung der Funktion:

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$h'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \sin^2(x)$.

a) Um zu zeigen, dass

$$f'''(x) = -4 \cdot f'(x) \;\wedge f^{(5)}(x) = 16 \cdot f'(x)$$

Bilden wir die Ableitungen von f:

$$f'(x) = 2(\sin(x))\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f''(x) = 2\cos(x)\cos(x) + 2\sin(x)(-\sin(x))$$

$$= 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$$

$$f'''(x) = 4(\cos(x)(-\sin(x))) - 4(\sin(x))\cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = -8(\cos(x))^2 + 8(\sin(x))^2$$

$$f^{(5)}(x) = 16(2\sin(x)\cos(x))$$

$$= 16f'(x)$$

b) Bestimmen wir nun anhand der Ableitungen das Taylorpolynom $T_4(x)$:

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^(k)(0)}{k!}(x-0)^k$$

$$= \frac{\sin^2(0)}{0!}x^0 + \frac{2\sin(0)\cos(0)}{1!}x + \frac{2\cos^2(0) - 2\sin^2(0)}{2!}x^2 - \frac{8\sin(0)\cos(0)}{3!}x^3 - \frac{8\cos^2(0) + 8\sin^2(0)}{4!}x^4$$

$$= 0x^0 + 0x + \frac{2 \cdot 1^2 - 0}{2!}x^2 - 0x^3 - \frac{8\cos(0)}{4!}x^4$$

$$= \frac{2}{2}x^2 - \frac{8}{24}x^4$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4$$

c) Um den Fehler zu ermitteln nutzen wir folgende Formel:

$$|f(x) - T_4(x)|$$

$$= |R_4(x)|$$

$$= |\frac{f^{(5)}(\alpha)}{5!} \cdot x^5|$$

$$= \frac{1}{5!}|f^{(5)}(\alpha) \cdot x^5|$$

$$= \frac{1}{5!}|32\sin(\alpha)\cos(\alpha)x^5|$$

$$= \frac{1}{5!}|32x^5|$$

$$= \frac{1}{5!}|32(\frac{1}{2})^5|$$

$$= \frac{1}{5!} \cdot 32 \cdot \frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

Aufgabe 5

a) Es soll die Stammfunktion für folgende Funktion gebildet:

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - (2xe^x - \int 2e^x dx)$$

$$= x^2 \cdot e^x - (2xe^x - 2\int e^x dx)$$

$$= x^2 \cdot e^x - (2xe^x - 2e^x)$$

$$F(x) = e^x(x^2 - 2x - 2)$$

b)Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$

Um die Fläche von f innerhalb des 2.Quadranten zu bestimmen, müssen wir dessen negative Nullstellen bestimmen, da diese als Integrationsgrenze dient:

$$-x^2 + 3x + 4 = 0| \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0| + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 = 4 + (\frac{3}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{16}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4} | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} | + \frac{3}{2} \ \vee x - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} | + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{2} \ \vee x = \frac{-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \ \vee \ x = -1$$

Wir betrachten also:

$$\int_{-1}^{0} -x^2 + 3x + 4dx$$

$$= -1 \cdot \int_{-1}^{0} x^2 - 3x - 4dx$$

$$= -1 \cdot [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x]$$

$$= -1(-(\frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 - 4 \cdot (-1)))$$

$$= -1(-1(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4))$$

$$= -1(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 4)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4$$

$$= -\frac{2}{6} + \frac{9}{6} + \frac{24}{6}$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{24}{6}$$

$$= \frac{31}{6}$$