Blatt 7

Aufgabe 1

a) Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$$

Das Taylorpolynom $T_7(x)$ ist gegeben mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Das Taylorpolynom ist:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{-1^k}{(2k+1)!}$$

Das Restglied für $T_7(x)$ ist:

$$R_7(x) = \frac{(-1)^4}{(2 \cdot 4 + 1)!} \, x^{(2 \cdot 4 + 1)}$$
$$= \frac{1}{9!} x^9$$

Die obere Schranke für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$R_7(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{9!} (\frac{\pi}{2})^9$$

b) Folgende Ungleichung soll gelöst werden:

$$|f(x) - T_7(x)| < 0.001$$

Einschub:
Wir wissen:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \mid - T_n(x)$$
$$\Leftrightarrow f(x) - T_n(x) = R_n(x)$$

Substituieren wir in unsere Ungleichung:

$$|R_n(x)| < 0.001$$

$$\Leftrightarrow |\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}| < 0.001$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(x) \cdot x^{n+1}| < 0.001$$

Da wir wissen, dass $f(x) = sin(x)$ und dessen Ableitungen Funktionswerte zwischen -1 und 1 besitzt können wir folgende Umformung machen:

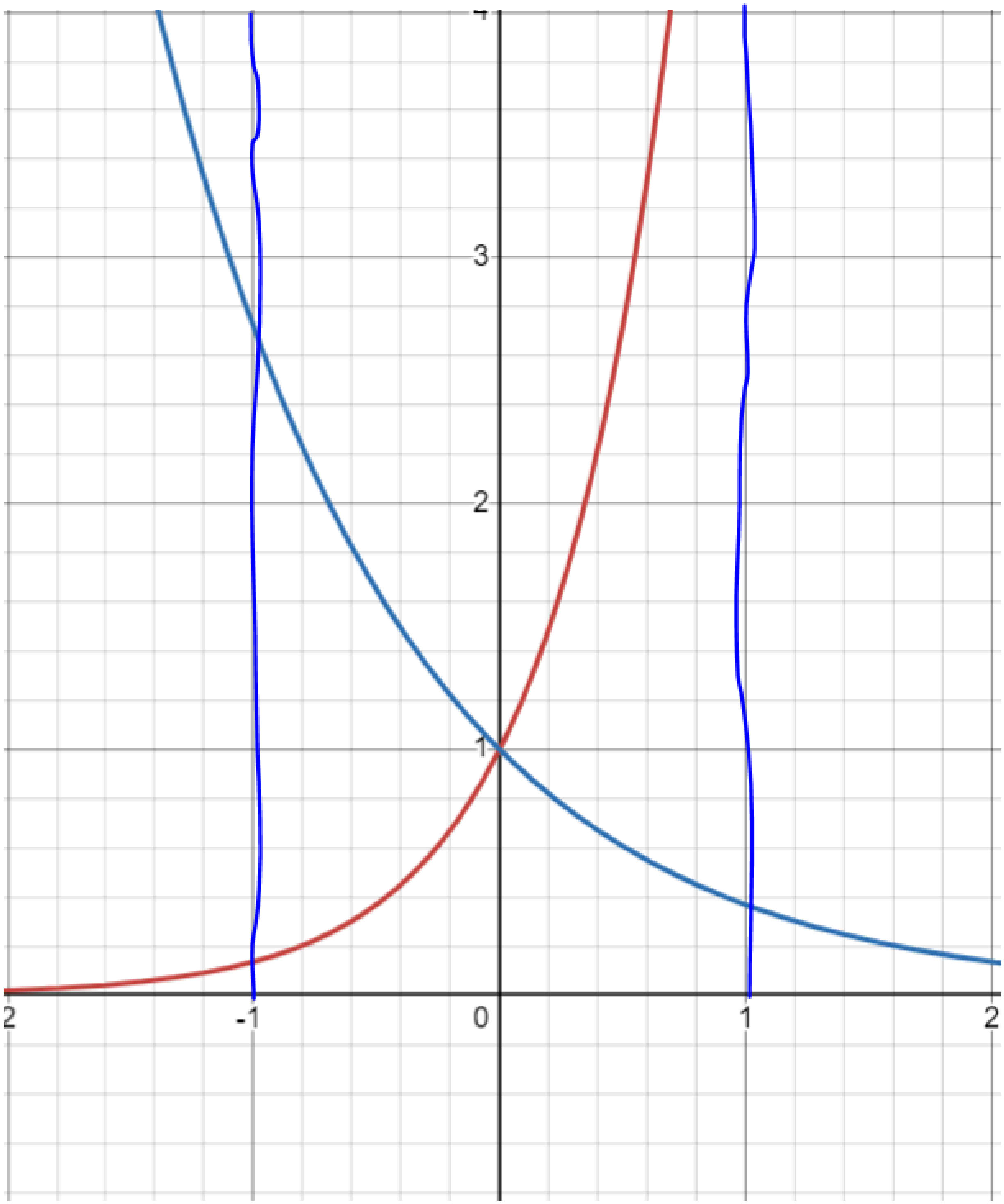
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} < 0.001$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 0.001$$

Hier kriegen wir durch Ausprobieren aus, dass die Ungleichung für $n = 7$ gilt.

Aufgabe 2

Dies ist der Graph:



Die Fläche im Intervall $[-1, 1]$ beträgt:

$$\int_{-1}^{0} e^{2x} dx - \int_{0}^{1} e^{-x} dx$$

$$= [\frac{1}{2} e^{2x}]_{-1}^{0} \ - \ [-1e^{-x}]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} [e^{2x}]_{-1}^{0} \ - \ [-e^{-x}]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{0} - e^{2}) - (-e^{-1} + e^{0})$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^2) - (-\frac{1}{e} + 1)$$

Aufgabe 3

a) Lösen wir folgendes Integral:

$$\int xe^{3x}dx$$

Hierbei nutzen wir partielle Integration mit

$$f(x) = x \wedge g(x) = e^{3x}$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$= x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}$$

$$= x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}(\frac{1}{3}e^{3x})$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}(x - \frac{1}{3})$$

b) Lösen wir folgendes Integral:

$$\int x^2 \cos(x^3 + 4)dx$$

Formen wir das Integral wie folgt um:

$$\frac{1}{3}\int 3x^2 \cdot \cos(x^3 + 4)dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin(x^3 + 4)$$

c) Zu lösen ist das folgende Integral:

$$\int \cos(2x)(\sin(2x))^4 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)(\sin(2x))^4 dx$$

Hier haben wir das Schema $\int g'(x)f(g(x))dx$ mit $g(x) = \sin(2x)$ und dementsprechend nutzen wir das Substitutionsschema:

Sei $u = \sin(2x)$:

$$\frac{1}{2}\int u^4 du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} u^5$$

$$= \frac{1}{10} u^5$$

Tun wir u nun rücksubstituieren:

$$\Rightarrow \frac{1}{10}(\sin(2x))^5$$

d) Gegeben ist folgendes Integral:

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

Hier haben wir das Schema:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Dementsprechend wird das Integral wie folgt berechnet:

$$[\ln(|e^x + e^{-x})|]_{-1}^{1}$$

$$= \ln(|e^1 + e^{-1}|) - \ln(|e^{-1} + e^1|)$$

e) Zu lösen ist folgendes Integral:

$$\int_0^1 (2x+3)^{20} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 2(2x+3)^{20} dx$$

Hier haben wir das Schema

$$\int_0^1 f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

mit $g(x) = 2x + 3$. Dementsprechend nutzen wir das Substitutionsprinzip:

Sei $u = 2x + 3$:

$$\frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(1)} u^{20} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_3^5 u^{20} du$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{21}u^{21}]_3^5$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{21}[u^{21}]_3^5$$

$$= \frac{1}{42}[u^{21}]_3^5$$

$$= \frac{1}{42}(3^5 - 3^3)$$

Aufgabe 4

a) Gegeben ist die Taylorreihe von e mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-0)^k$$

Geben wir nun anhand dieser Reihe, die Taylorreihe für e^{-x^2} an:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x^2 - 0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x^2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}$$

Somit ist also unsere Taylorreihe T_n für e^{-x^2}:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x^2)^k}{k!}$$

b) Berechnen wir nun anhand dieser Reihe, das Polynom $T_6(x)$:

$$T_6(x) = \sum_{k=0}^{6} \frac{(-x^2)^k}{k!}$$

$$= \frac{(-x^2)^0}{0!} + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \frac{(-x^2)^5}{5!} + \frac{(-x^2)^6}{6!}$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}$$

$$T_6(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720}$$

Berechnen wir nun $\int_0^1 T_6(x)dx$:

$$\int_0^1 T_6(x)dx$$

$$= \int_0^1 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720}$$

$$= \int_0^1 1 - \int_0^1 x^2 + \int_0^1 \frac{x^4}{2} - \int_0^1 \frac{x^6}{6} + \int_0^1 \frac{x^8}{24} - \int_0^1 \frac{x^{10}}{120} + \int_0^1 \frac{x^{12}}{720}$$

$$= \int_0^1 1 - \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 - \frac{1}{6}\int_0^1 x^6 + \frac{1}{24}\int_0^1 x^8 - \frac{1}{120}\int_0^1 x^{10} + \frac{1}{720}\int_0^1 x^{12}$$

$$= [x]_0^1 - [\frac{1}{3}x^3]_0^1 + \frac{1}{2}[\frac{1}{5}x^5]_0^1 - \frac{1}{6}[\frac{1}{7}x^7]_0^1 + \frac{1}{24}[\frac{1}{9}x^9]_0^1 - \frac{1}{120}[\frac{1}{11}x^{11}]_0^1 + \frac{1}{120}[\frac{1}{13}x^{13}]$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0.75$$

Vergleichen wir den Näherungswert $\int_0^1 T_6(x)dx$ mit $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ durch Erechnen des Verhältnisses beider Integrale:

$$\frac{\int_0^1 e^{-x^2}dx}{\int_0^1 T_6(x)dx} \approx 0.99$$

Joa...nd schlecht würd ich mal sagen, nh?