
MATH60604 *Modélisation statistique*

Examen intratrimestriel

Questionnaire

Examen de pratique

Léo Belzile

Instructions: L'examen est d'une durée de 180 minutes.

Une feuille d'aide mémoire (recto, format lettre) est permise. L'utilisation d'un ordinateur ou de tout autre matériel électronique est interdit. Une calculatrice non programmable est autorisée.

La répartition des 40 points de l'examen se trouve dans la marge de droite.

Nom:

Prénom:

MATRICULE:

Question:	1	2	3	Total
Points:	12	12	16	40
Score:				

Question 1.**12**

En analyse des valeurs extrêmes, la théorie asymptotique dicte que les excès de Y au dessus d'un seuil élevé u est bien approximée par une loi de **Pareto généralisée**, avec $Z = Y - u \sim \text{GP}(\sigma, \xi)$ pour des paramètres d'échelle $\sigma > 0$ et de forme $\xi \in \mathbb{R}$. Les fonctions de répartition et de densité de la loi Pareto généralisée sont

$$F(z) = 1 - (1 + \xi z/\sigma)_+^{-1/\xi}, \quad f(z) = \sigma^{-1} (1 + \xi z/\sigma)_+^{-1/\xi-1},$$

où $(x)_+ = \max\{x, 0\}$; le cas $\xi = 0$ est défini par continuité (sous-famille exponentielle).

On considère les plus grandes réclamations d'assurance incendies (en millions de couronnes) à la Copenhagen Re, une compagnie de réassurance danoise, soumises entre janvier 1980 et la fin de décembre 1990 ($n_Y = 11$ années de données). On modélise les $n = 109$ excès de de seuils au delà de 10 millions de couronnes, correspond à une proportion de $\zeta = 0.0503$ des données complètes. Notre objectif est de fournir un **niveau de retour** à 100 ans pour une analyse de risque.

Le niveau de retour à T -années, dénoté $r(T)$, est un quantile élevé excédé avec probabilité p , où on prend $p = \zeta n_Y / T$, avec ζ la proportion d'observations au dessus du seuil, n_Y le nombre d'années d'observations et $T = 100$ le nombre d'années de l'horizon considéré. Si on inverse la fonction de répartition, on obtient la fonction quantile et la formule

$$r(T) = \frac{\sigma}{\xi} \left\{ (\zeta n_Y / T)^{-\xi} - 1 \right\}$$

- 1.1 Écrivez la fonction de log vraisemblance pour un échantillon de taille n d'excès de seuils indépendants z_i , ($i = 1, \dots, n$) si $\xi \neq 0$.

[2]

Solution: Si $\xi \neq 0$, on a sous indépendance $L(\sigma, \xi) = \prod_{i=1}^n f(z_i)$ ou

$$\ell(\sigma, \xi) = -n \ln \sigma + \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \xi z_i / \sigma)$$

- 1.2 Si on reparamétrise le modèle en terme de ξ et $\theta = \xi/\sigma$, montrer que l'on peut dériver une formule explicite pour la log vraisemblance profilée $\ell_p(\theta)$, ce qui permet de réduire le problème d'optimisation de 2D à 1D.. [2]

Solution: Avec la substitution, on obtient

$$\ell(\theta, \xi) = -n \ln \theta + n \ln \xi + \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \theta z_i)$$

et pour une valeur donnée de θ_0 ,

$$\left. \frac{\partial \ell(\theta, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\theta=\theta_0} = \frac{n}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \theta_0 z_i) = 0$$

et donc $\hat{\xi}_\theta = n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \theta z_i)$. La log vraisemblance profilée devient

$$\ell_p(\theta) = -n \ln \theta + n \ln \hat{\xi}_\theta + \left(1 + \frac{1}{\hat{\xi}_\theta}\right) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \theta z_i)$$

```

1 Log-vraisemblance: -374.893
2 Taille de l'échantillon: 109
3 Proportion au dessus du seuil: 0.0503
4
5 Estimation                Erreurs-type
6 echelle  forme            echelle  forme
7 6.975    0.497            1.1135   0.1363

```

Code 1: Estimations du maximum de vraisemblance pour les données de réassurance danoise (loi Pareto généralisée)

- 1.3 Un algorithme d'optimisation a retourné les estimations de la Code 1. Expliquez comment vous pourriez tester si $\xi = 0$ (modèle exponentiel) en utilisant (a) un test de Wald avec la sortie de Code 1 et (b) un test du rapport de vraisemblance, si en plus vous avez l'information suivante: [2]

```

1 > sum(dexp(y, rate = 1/mean(y), log = TRUE))
2 -397.2921

```

Code 2: Code pour une log vraisemblance exponentielle

Solution:

- Ajuster le sous-modèle exponentiel (dont l'EMV est la réciproque de la moyenne pour le paramètre de taux) pour obtenir la log vraisemblance $\ell_0(\hat{\sigma}_0, 0)$. Calculer la statistique du rapport de vraisemblance $R = 2\{\ell(\hat{\sigma}, \hat{\xi}) - \ell_0(\hat{\sigma}_0, 0)\} = 2 \times (-374.893 + 397.292) = 44.798$, avec $\ell(\hat{\sigma}, \hat{\xi})$ donnée dans la sortie. Comparer cette valeur numérique à une loi χ_1^2 .
- Calculer la statistique de Wald $W = (\hat{\xi} - 0)/\text{se}(\hat{\xi}) = 0.497/0.1363 = 3.646$ et comparer à une loi standard normale (on rejette $\mathcal{H}_0 : \xi = 0$ à niveau 5%, les données ne proviennent pas du modèle exponentiel).

- 1.4 On peut démontrer que l'information de Fisher d'un échantillon aléatoire simple de taille n de loi Pareto généralisée est [2]

$$I(\sigma, \xi) = n \begin{pmatrix} \sigma^{-2}(1+2\xi)^{-1} & \sigma^{-1}(1+\xi)^{-1}(1+2\xi)^{-1} \\ \sigma^{-1}(1+\xi)^{-1}(1+2\xi)^{-1} & 2(1+\xi)^{-1}(1+2\xi)^{-1} \end{pmatrix}$$

Expliquez comment on peut utiliser ce résultat pour obtenir les erreurs-types des paramètres σ et ξ .

Solution: Substituer les valeurs des EMV dans la matrice d'information, inverser cette dernière et extraire la racine carrée des éléments de la diagonale, soit $I^{-1}(\hat{\sigma}, \hat{\xi})$, pour recouvrer les erreurs-types.

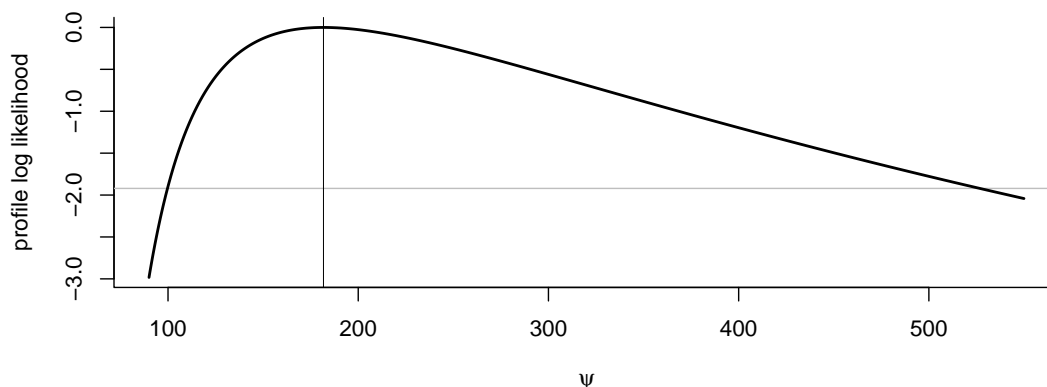


Figure 1: Log vraisemblance profilée pour le niveau de retour à 100 ans. La log vraisemblance profilée a été décalée pour être zéro lorsqu'évaluée aux EMV, et la ligne grise horizontale indique les points de coupure pour un intervalle de confiance basé sur la statistique du rapport de log vraisemblance à niveau 95%.

- 1.5 Donnez l'estimation du maximum de vraisemblance (EMV) du niveau de retour à 100 ans pour les données de réassurance danoises. [2]

Solution: Les EMVs sont invariants, alors il suffit de calculer avec la formule de $r(T)$ avec les valeurs $T = 100$, $n_Y = 11$, $\zeta = 0.0503$ et $\hat{\sigma} = 6.975$, $\hat{\xi} = 0.497$ pour obtenir $\hat{r}(100) = 171.72$ millions de couronnes danoises.

- 1.6 La Figure 1 montre la log vraisemblance profilée pour le niveau de retour à 100 ans; la ligne horizontale grise indique les points de coupure pour un intervalle de confiance à 95% basé sur la loi asymptotique χ^2_1 de la statistique du rapport de log vraisemblance profilée. Au vu de la loi d'échantillonnage de ce paramètre, est-ce que l'intervalle de Wald serait semblable? [2]

Solution: La distribution d'échantillonnage du niveau de retour est fortement asymétrique, alors l'intervalle symétrique de Wald de même niveau qui serait centré aux EMV aurait probablement un faible taux de couverture empirique, puisqu'il sous-estimerait le risque extrême. L'intervalle de confiance basé sur la log vraisemblance profilée montre un intervalle de grosso modo (100, 550).

Question 2.

12

Grossmann et Kross (2014) étudient la question suivante : « Les gens sont-ils plus sages lorsqu'ils réfléchissent aux problèmes des autres qu'aux leurs ? Ils ont assigné au hasard des participants à

- raisonner sur leur propre problème à partir d'une perspective immersive (condition auto, immersive),
- raisonner sur le problème de leur ami à partir d'une perspective immersive (condition immersion, autre),
- raisonner sur leur propre problème d'un point de vue distancié (condition auto, distanciée), ou
- raisonner sur le problème de leur ami à partir d'une perspective distanciée (condition « autre, distancié).

L'étude ci-dessous a également considéré l'âge comme un facteur distinct.

Les variables comprennent

- **limites** : variable de réponse, le score moyen centré pour la question sur la « reconnaissance des limites de la connaissance ».
- **cible** : facteur, la cible est-elle la personne qui participe (auto) ou un.e ami.e. (autre).
- **perspective** : facteur, perspective immersive ou distanciée.
- **age** : groupe d'âge, soit jeune (20–40 ans) ou vieux, (60–80 ans).

Tableau 1: Coefficients et erreurs-types pour le modèle factoriel complet à trois voies.

	coef.	erreur-type
(cst)	0.207	0.144
cible [auto]	0.024	0.204
perspective [immersive]	−0.121	0.203
age [vieux]	−0.225	0.216
cible [auto]:perspective [immersive]	−0.211	0.284
cible [auto]:age [vieux]	0.059	0.308
perspective [immersive]:age [vieux]	0.020	0.306
cible [auto]:perspective [immersive]:age [vieux]	−0.195	0.433

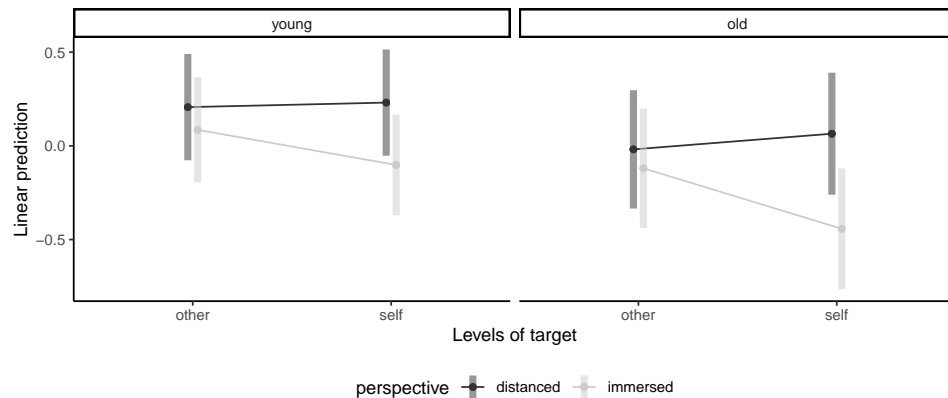


Figure 2: Moyennes marginales avec intervalles de confiance à 95% pour chaque sous-groupe

Tableau 2: Tableau d'analyse de variance (décomposition des carrés de type 2) pour le modèle factoriel complet à trois facteurs.

	somme des carrés	ddl	stat. F	valeur- p
cible	1.12	1	0.87	0.35
perspective	7.59	1	5.88	0.02
age	6.12	1	4.74	0.03
cible:perspective	2.45	1	1.90	0.17
cible:age	0.04	1	0.03	0.86
perspective:age	0.16	1	0.13	0.72
cible:perspective:age	0.26	1	0.20	0.65
residuals	570.17	442		

Tableau 3: Moyennes marginales estimées pour les quatre groupes expérimentaux.

perspective	cible	moyenne marg.	erreur-type	borne inf.	borne sup.
distancée	autre	0.09	0.11	-0.12	0.31
immersive	autre	-0.02	0.11	-0.23	0.20
distancée	auto	0.15	0.11	-0.07	0.36
immersive	auto	-0.27	0.11	-0.48	-0.06

Tableau 4: Contrastes marginaux pour le modèle à deux facteurs.

contraste	estimation	erreur-type	stat. t	valeur- p
C_1	0.311	0.131	2.366	0.018
C_2	-0.109	0.134	-0.818	0.414
C_3	0.420	0.153	2.742	0.006
C_4	0.111	0.153	0.727	0.468

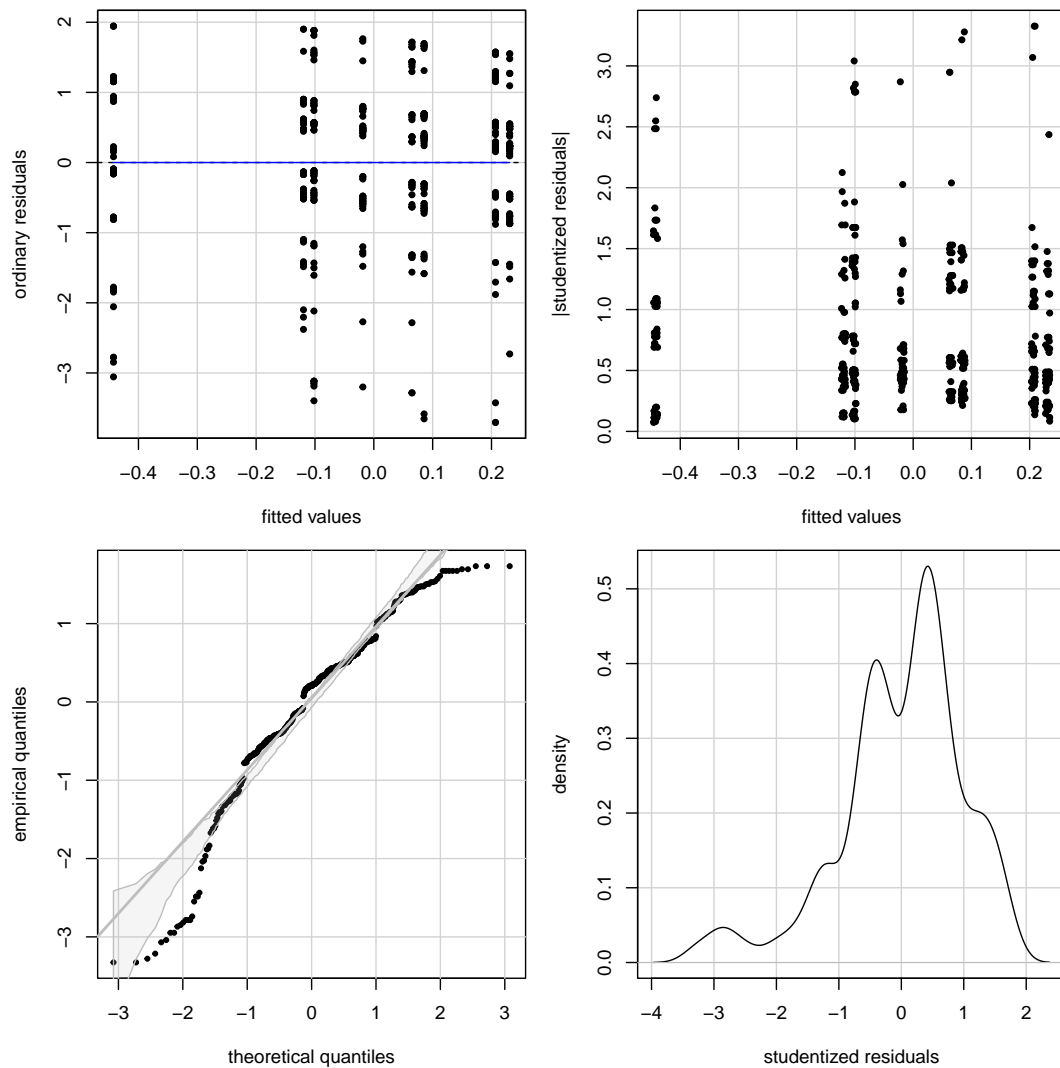


Figure 3: Diagnostics graphiques pour le modèle ANOVA à trois facteurs: nuage de point des résidus ordinaires en fonction des valeurs ajustées (en haut à gauche), valeur absolue des résidus studentisés externes vs valeurs ajustées (en haut à droite), diagramme quantile-quantile Student des résidus studentisés externe (en bas à gauche) et densité empirique des résidus studentisés externes (en bas à droite).

- 2.1 Interprétez l'ordonnée à l'origine du modèle factoriel ajusté dont les coefficients sont rapportés dans le Tableau 1. [2]

Solution: Le score limite moyen pour la catégorie de référence (jeune, perspective distancée, cible autre)

- 2.2 Selon le Tableau 2, combien de participants ont été recrutés pour l'étude? [2]

Solution: Il y a huit sous-groupes (coefficients) dans le Tableau 1, et 442 degrés de liberté pour les résidus (Tableau 2), donc $n = 450$ participants.

- 2.3 Sur la base de l'analyse de variance rapportée au Tableau 2, est-il correct de marginaliser et combiner les deux groupes d'âge afin d'étudier l'effet de cible et perspective (effets marginaux)? Indiquez l'avantage de cette façon de faire. [2]

Solution: Oui, puisque ni l'interaction entre trois facteurs ou les interactions par paires avec la variable âge ne sont statistiquement significatives. Les effets marginaux permettent de gonfler la taille de l'échantillon et donc la puissance de tests pour les contrastes.

- 2.4 Écrivez les vecteurs de poids pour les quatre contrastes suivants, en respectant l'ordre des sous-groupes répertoriés dans le Tableau 3: [2]

C_1 (____, ____, ____, ____) autre (immersive et distance) vs auto-immersive
 C_2 (____, ____, ____, ____) autre (immersive et distancée) vs auto-distancée
 C_3 (____, ____, ____, ____) auto-distancée vs auto-immersive
 C_4 (____, ____, ____, ____) autre-distancée vs autre-immersive

Solution: Les vecteurs de poids doivent être proportionnels à $C_1 = (1, 1, 0, -2)$, $C_2 = (1, 1 - 2, 0)$, $C_3 = (0, 0, 1, -1)$ et $C_4 = (1, -1, 0, 0)$.

2.5 À l'aide de la sortie du Tableau 4, commentez sur l'analyse des contrastes.

[2]

Solution: Les contrastes C_1 et C_3 , qui comprennent la perspective auto-immersive versus autre, ou auto-distancés, indiquent des différences significatives. Les participants sont moins conscients de leurs propres limites (Figure 2).

2.6 Sur la base de la Figure 3, quel postulat de validité du modèle linéaire n'est pas respecté? Justifiez votre réponse et discutez des impacts de ce postulat sur l'inférence.

[2]

- spécification incorrecte de la moyenne
- additivité
- homoscédasticité
- normalité
- absence de valeurs aberrantes

Solution: Le postulat de normalité n'est pas respecté: on voit clairement dans le diagramme quantile-quantile et la densité des résidus la présence d'un mélange de loi (multimodalité). Cela n'affectera pas les conclusions des tests d'hypothèses et les contrastes pour la moyenne (bien que la taille de l'échantillon ne soit pas très grande), mais les intervalles de prédictions n'auront probablement pas un bon taux de couverture.

Question 3.

16

La stratégie “réfléchir à voix haute” et la compréhension de lecture. Les données de Baumann *et coll.* (1992) étudient l'effet de différentes méthodes d'instruction sur la compréhension de lecture. La base de données avec $n = 66$ observations de l'échantillon équilibré contient les variables suivantes:

- `pretest2`: score (sur 15) sur le questionnaire de compréhension de lecture, administré avant l'expérience
- `posttest2`: response, score (sur 18) sur une version améliorée du questionnaire de compréhension de lecture, administré après l'expérience
- `groupe`: groupe expérimental, soit « Think-Aloud » (TA), dans lequel les élèves ont appris diverses stratégies de contrôle de la compréhension pour la lecture d'histoires (par exemple : auto-questionnement, prédiction, relecture) par le biais de la réflexion à haute voix; (b) un groupe lecture dirigée-activité de réflexion (DRTA), dans lequel les élèves ont appris une stratégie de prédiction-vérification pour lire et répondre aux histoires; ou (c) un groupe activité de lecture dirigée (DRA), un groupe contrôle dans lequel les élèves se sont engagés dans une lecture guidée non interactive d'histoires.

On ajuste des modèles pour le score `posttest2` avec la contrainte de **somme à zéro** pour la variable catégorielle `groupe`. Les matrices de modèles incluent les valeurs binaires suivantes comme au Tableau 5 pour les trois groupes.

	(cst)	groupe1	groupe2
DR	1	1	0
DRTA	1	0	1
TA	1	-1	-1

Tableau 5: Matrice du modèle pour les trois variables binaires avec contrainte de somme à zéro.

```
1 > model1 <- lm(posttest2 ~ groupe, data = BSJ92)
2 > model2 <- lm(posttest2 ~ offset(pretest2) + groupe, data = BSJ92)
3 > model3 <- lm(posttest2 ~ pretest2 + groupe, data = BSJ92)
4 > model4 <- lm(posttest2 ~ pretest2 * groupe, data = BSJ92)
```

Code 3: Syntaxe **R** pour les quatre modèles ajustés

```
1 > anova(model3, model4)
2 Analysis of Variance Table
3
4 Model 3: posttest2 ~ pretest2 + groupe
5 Model 4: posttest2 ~ pretest2 * groupe
6 Res.Df    RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
7 1      62 332.19
8 2      60 331.07  2    1.1264 0.1021 0.9031
```

Code 4: Comparaison de modèles 3 et 4

Tableau 6: Coefficients et erreurs-type pour différents modèles linéaires pour la variable réponse posttest2.

	estimation	erreur-type
(cst)	6.712	0.293
groupe1	-1.167	0.414
groupe2	-0.485	0.414

(a) Coefficients pour le Modèle 1 pour le score post-test 2 en fonction du groupe expérimental (paramétrisation somme nulle).

	estimation	erreur-type
(cst)	5.301	0.722
pretest2	0.276	0.130
groupe1	-1.213	0.404
groupe2	-0.481	0.403

(b) Coefficients pour le Modèle 2 pour le score post-test 2 en fonction du groupe expérimental (paramétrisation somme nulle) et pretest2.

	estimation	erreur-type
(cst)	5.398	0.765
pretest2	0.256	0.140
groupe1	-1.619	0.994
groupe2	-0.236	1.113
pretest2:groupe1	0.079	0.176
pretest2:groupe2	-0.047	0.204

(c) Coefficients pour le Modèle 3 pour le score post-test 2 en fonction du groupe expérimental (paramétrisation somme nulle), pretest2 et leur interaction.

Tableau 7: Moyennes marginales estimées pour groupe pour le Modèle 3.

groupe	moyenne marginale	erreur-type	ddl	borne inf.	borne sup.
DR	5.499	0.494	62	4.512	6.487
DRTA	6.231	0.494	62	5.245	7.218
TA	8.406	0.494	62	7.418	9.393

Tableau 8: Contrastes par paires (différences deux à deux) basés sur les moyennes marginales du Modèle 3.

contraste	estimation	erreur-type	ddl	stat. t	valeur- p'
DR – DRTA	-0.732	0.698	62	-1.048	0.550
DR – TA	-2.906	0.699	62	-4.157	$< 10^{-3}$
DRTA – TA	-2.174	0.698	62	-3.114	0.008

- 3.1 Calculez la moyenne empirique du score post-test 2 pour chaque groupe expérimental à l'aide du Tableau 6. [2]

Solution: On regarde le tableau Tableau 6 (a): la moyenne du groupe DR est $\hat{\mu}_{DR} = 6.712 - 1.167 = 5.54$, celle du groupe DRTA est $\hat{\mu}_{DRTA} = 6.712 - 0.485 = 6.227$ et enfin celle du groupe TA $\hat{\mu}_{TA} = 6.712 + 1.167 + 0.485 = 8.364$.

- 3.2 Il est fréquent (mais souvent invalide) d'ajuster un modèle de variance pour la différence post/pré, soit $\text{posttest2} - \text{pretest2}$ (Modèle 2) plutôt que d'ajuster un modèle linéaire comme le Modèle 3. Le Modèle pour la différence est équivalent à un modèle avec un terme de décalage (une variable explicative avec une coefficient fixe de 1). Est-ce que les données supportent le choix du Modèle 2. [2]

Solution: On peut tester à l'aide d'un test de Wald $\mathcal{H}_0 : \beta_{\text{pretest2}} = 1$ dans le Modèle 2 versus $\mathcal{H}_0 : \beta_{\text{pretest2}} \neq 1$. La statistique de Wald vaut $W = (0.276 - 1)/0.13 = -5.57$, à comparer à une loi Student- t avec 62 degrés de liberté. On rejette clairement l'hypothèse nulle.

- 3.3 Supposons que l'on veut comparer les quatre modèles répertoriés dans le Code 3: lesquels sont emboîtés? [2]

Solution: Les modèles 1–3–4 et 2–3–4 sont emboîtés: les deux premiers imposent des valeurs différentes pour β_{pretest2} , soit 0 ou 1, et donc ne peuvent être emboîtés l'un dans l'autre.

- 3.4 Écrivez l'équation de la moyenne théorique de chaque groupe pour le Modèle 4 et montrez que le Modèle 3 est une simplification de ce dernier. Écrivez les hypothèses nulles et alternatives en fonction des paramètres du modèle et concluez sur la base de la sortie de Code 4. [2]

Solution: Avec les paramètres dans l'ordre d'apparition du tableau, les équations pour la moyenne sont

$$E(\text{posttest2} | \cdot) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + (\beta_3 + \beta_4)\text{pretest2}, & \text{group} = \text{DR} \\ \beta_0 + \beta_2 + (\beta_3 + \beta_5)\text{pretest2}, & \text{group} = \text{DRTA} \\ \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 + (\beta_3 - \beta_4 - \beta_5)\text{pretest2}, & \text{group} = \text{TA}. \end{cases}$$

et on recouvre le Modèle 3 en imposant la contrainte $\mathcal{H}_0 : \beta_4 = \beta_5 = 0$, qui force les pentes à être les mêmes pour pretest2 pour chaque groupe expérimental (pentes parallèles). Code 4 montre le résultat du test- F , avec une statistique de $F(2, 60) = 0.10$ et une valeur- p de 0.9. Il n'y a aucune preuve à effet de quoi les pentes sont différentes.

- 3.5 Les auteurs ont calculé les moyennes marginales par groupe sur la base du Modèle 3, et les différences entre paires. Sur la base de ses dernières, est-ce qu'on peut deviser un classement de la méthode d'enseignement la plus effective (sachant que les scores les plus élevés sont préférables)? [2]

Solution: TA est significativement différent à la fois de DR et de DRTA (??), et ?? nous indique que la moyenne de TA est la plus élevée alors ce traitement est plus effectif et pourrait être recommandé.

- 3.6 Si les pentes de `pretest2` pour chaque groupe ne sont pas parallèles, expliquez pourquoi la comparaison de moyennes marginales est trompeuse. [2]

Solution: Si les pentes ne sont pas parallèles (Modèle 4), alors la différence par groupe expérimental dépend de la valeur de `pretest2`, sinon la différence de moyenne peu importe la valeur de `pretest2` sur laquelle on conditionne.

- 3.7 On rapporte le résultat du test de Levene pour l'homogénéité de variance, [2]

```
1 > car::leveneTest(rstudent(model3) ~ groupe,
2 +               data = BSJ92,
3 +               center = "mean")
```

Code 5: Syntaxe R pour le test de Levene

et le tableau résultant indique la statistique $F(2, 63) = 1.51$, et une valeur- p de $p = 0.23$. À quoi sert ce test? Concluez quant à l'hypothèse et expliquez les impacts sur vos conclusions, si aucun.

Solution: C'est un test F pour un modèle d'analyse de variance avec ici $K_{ij} = |r_{ij} - \bar{r}_j|$ comme variable réponse, où r_{ij} est le i e résidu studentisé externe ($i = 1, \dots, 22$) du groupe $j = 1, 2, 3$. L'objectif du test est de vérifier que la variance de chaque sous-groupe est égale (homoscédasticité).

Aparté théorique: sous l'hypothèse nulle, toutes les variables sont Student- t avec $\nu = n - p - 2$ degrés de liberté, paramètre de localisation nulle et d'échelle un. Si on supposait uniquement des différences entre les écarts-type (moyenne correctement modélisée), alors K_{ij} suivrait une loi Student- t réfléchie, dont la moyenne est proportionnelle à $\sigma_j f(\nu)$. Sous l'hypothèse nulle, on a $\mathcal{H}_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ versus l'alternative où au moins un des groupes DR, DRTA ou TA a une variance différence. Puisque la valeur- p est supérieure au niveau du test $\alpha = 0.05$, on ne rejette pas l'hypothèse nulle et on ne peut conclure qu'il y a des preuves de différences entre les variances du groupe. Il n'y aucune modification à apporter, cela permet de valider que notre approximation pour les test n'est pas fautive.

- 3.8 Étant donné que `pretest2` et `posttest2` sont fortement corrélées, est-ce que cela n'est pas une violation du postulat d'indépendance entre observations? Discutez. [2]

Solution: Non. L'analyse est effectuée conditionnellement à la valeur de `pretest2`, donc on n'a pas de problème de dépendance puisque les variables réponses proviennent d'élèves différents.