Ecole polytechnique de Louvain

LINMA1510 - Automatique linéaire

Laboratoire 1 - Contrôle du niveau d'eau dans un réservoir

Groupe 62
Antoine Paris Philippe Verbist

30 avril 2016

TO DO

— refaire des mesures pour h_3,
— et pour touts les paramètres possibles de K_P, K_I(5 graphes au total),
— compléter la figure 4.1
— une fois les calculs refaits, continuer la section "spécifications" (calculer KP,KI)
— faire la même chose pour la simplification pôle-zéro

1 Modèle et données

Le modèle repose sur les équations suivantes :
— équation de continuité :

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{1}{S_R} q_{P3} - \frac{1}{S_R}(q_{F30} + q_{S30}) \tag{1.1}$$

— loi de Toricelli :

$$q_{F30} = S_{F30}\sqrt{2gh_3} \tag{1.2}$$
$$q_{S30} = S_{S30}\sqrt{2gh_3}. \tag{1.3}$$

En outre, nous avons les données suivantes

$$S_R = 43\,\text{cm}^2 \tag{1.4}$$
$$g = 981\,\text{cm/s}^2 \tag{1.5}$$

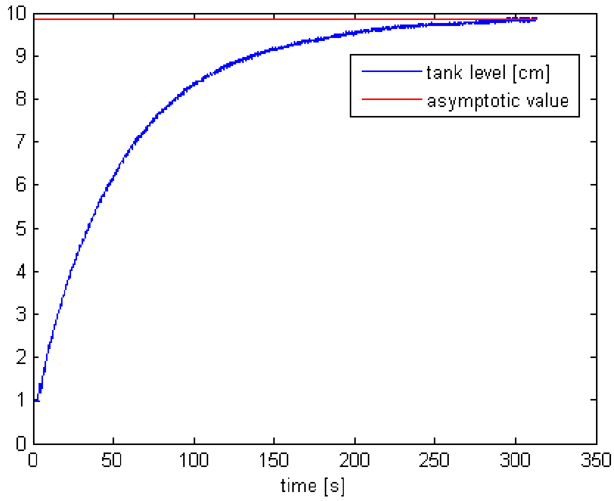

FIGURE 2.1 – Point d'équilibre du système en boucle ouverte, avec $u_0 = 30\,\mathrm{mL\,s^{-1}}$

2 Expliquer les valeurs choisies pour $\overline{q}_{P3}$ et $\overline{h}_3$. Expliquer le calcul de la surface S_{S30}

La valeur de q_{P3} a été imposée lors de l'expérience à u_0. La hauteur h_3 correspond à la valeur d'équilibre lorsque la valve frontale S_{F30} est fermée et la valve S_{S30} ouverte (voir la figure 2.1). Leur valeur chiffrée vaut

$$q_{P3} = 30\,[\mathrm{mL/s}] \tag{2.1}$$
$$h_3 = 9.84\,[\mathrm{cm}]. \tag{2.2}$$

Nous avons travaillé dans les mêmes conditions expérimentales pour calculer S_{S30} ($q_{F30} = 0$ et $\frac{dh_3}{dt} = 0$). Ainsi, à l'équilibre, en reprenant les équations 1.1 et 1.3, nous avons

$$\cancel{\frac{dh_3}{dt}} = \frac{1}{S_R}\overline{q}_{P3} - \frac{1}{S_R}(\cancel{q_{F30}} + q_{S30}) \tag{2.3}$$
$$\Leftrightarrow \overline{q}_{P3} = S_{S30}\sqrt{2g\overline{h}_3} \tag{2.4}$$
$$\Leftrightarrow S_{S30} = \frac{\overline{q}_{P3}}{\sqrt{2g\overline{h}_3}} = 0.2159\,\mathrm{cm}^2 \tag{2.5}$$

3 Détailler le calcul du modèle linéarisé et le calcul des fonctions de transfert $G(s)$ and $H(s)$

3.1 Calcul du modèle linéarisé

Soit le système initial

$$x = h_3 \tag{3.1}$$
$$u = q_{P3} \tag{3.2}$$
$$v = S_{F30} \tag{3.3}$$
$$\tag{3.4}$$

Régit par les équations

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,v) = \frac{1}{S_R}u - \frac{1}{S_R}(v\sqrt{2gx} + S_{S30}\sqrt{2gx}) \tag{3.5}$$
$$y = h(x,u,v) = x \tag{3.6}$$

Pour linéarisé ce système, nous procédons au changement de variables

$$\chi = x - \overline{x} = x - 9.84 \tag{3.7}$$
$$\rho = u - \overline{u} = u - 30 \tag{3.8}$$
$$\nu = v - \overline{v} = v \tag{3.9}$$
$$\phi = y - h(\overline{x}) = y - 30 \tag{3.10}$$
$$\tag{3.11}$$

et nous tensons de réécrire le système sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d\chi}{dt} & = & A\chi + B\rho \\ \phi & = & C\chi + D\rho \end{cases} \tag{3.12}$$

avec

$$A = \frac{\partial f(x,u,v)}{\partial x}|_{(\overline{x},\overline{u},\overline{v})} = -\frac{1}{S_R}(v\frac{g}{\sqrt{2gx}} + S_{S30}\frac{g}{\sqrt{2gx}})|_{(\overline{x},\overline{u},\overline{v})} \tag{3.13}$$
$$= -\frac{1}{S_R}S_{S30}\frac{g}{\sqrt{2g\overline{x}}} = -0.0355\,[] \tag{3.14}$$
$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}|_{\overline{x}} \\ \frac{\partial f}{\partial v}|_{\overline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_R} = 0.0233\,[] \\ \frac{\sqrt{2g\overline{x}}}{S_R} = -3.23\,[] \end{bmatrix} \tag{3.15}$$
$$C = \frac{\partial h}{\partial x}|_{\overline{x}} = 1 \tag{3.16}$$
$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u}|_{\overline{x}} \\ \frac{\partial h}{\partial v}|_{\overline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[] \tag{3.17}$$

3.2 Calcul des fonctions de transfert

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B_u + D = \frac{B_u}{s-A} = \frac{0.02326}{s+0.03545} \tag{3.18}$$
$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B_v + D = \frac{B_v}{s-A} = \frac{-3.231}{s+0.03545} \tag{3.19}$$
$$\tag{3.20}$$

Remarquons que l'on peut calculer la constante de temps du système (puisque $G(s) = \frac{B/A}{1-s/A}$)

$$t_{R_{OL}} = -\frac{1}{A} \approx 28.2\,\mathrm{s} \tag{3.21}$$

4 Fonctions de transfert en boucle fermée

Nous considérons maintenant un contrôleur PI tel que représenté à la figure 4.1.

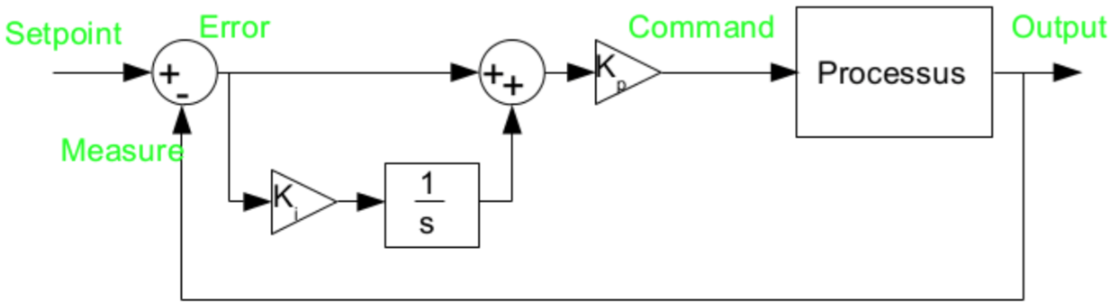

FIGURE 4.1 – Diagramme de bloc du système contrôlé par un contrôleur PI

On trouve

$$
\begin{aligned}
T_r(s) &\triangleq \frac{y}{r}|_{v=0} && (4.1)\\
y &= K_P G\left(e + \frac{eK_I}{s}\right) && (4.2)\\
&= K_P G\left(r - y + \frac{(r-y)K_I}{s}\right) && (4.3)\\
y(s-A) &= K_P B_u\left(r(1+\frac{K_I}{s}) - y(1+\frac{K_I}{s})\right) && (4.4)\\
y(s - A + B_u K_P + \frac{B_u K_P K_I}{s}) &= B_u K_P\ r\left(1 + \frac{K_I}{s}\right) && (4.5)\\
y(s^2 + (B_u K_P - A)s + B_u K_P K_I) &= B_u K_P\ r\,(s + K_I) && (4.6)\\
\frac{y}{r} &= \frac{B_u K_P (s + K_I)}{s^2 + (B_u K_P - A)s + B_u K_P K_I} = T_r(s) && (4.7)
\end{aligned}
$$

De même,

$$
\begin{aligned}
T_v(s) &\triangleq \frac{y}{v}|_{r=0} && (4.8)\\
y &= Hv + GK_P(e + \frac{eK_I}{s}) && (4.9)\\
&= Hv + GK_P(-y - \frac{-yK_I}{s}) && (4.10)\\
y(s-A) &= B_v v - yB_u K_P(1 + \frac{K_I}{s}) && (4.11)\\
y(s^2 + (B_u K_P - A)s + B_u K_P K_I) &= B_v vs && (4.12)\\
\frac{y}{v} &= \frac{B_v s}{s^2 + (B_u K_P - A)s + B_u K_P K_I} = T_v(s) && (4.13)
\end{aligned}
$$

Une autre manière (plus facile) pour arriver à ces résultats est de considérer le contrôleur

$$C(s) = (1 + \frac{K_I}{s})K_P = \frac{1}{s}(s + K_I)K_P \tag{4.14}$$

et de calculer ensuite

$$
\begin{aligned}
T_r(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(s + K_I)K_P B_u}{s(s-A) + (s + K_I)K_P B_u} && (4.15)\\
T_v(s) &= \frac{H(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{B_v s}{s(s-A) + (s + K_I)K_P B_u} && (4.16)
\end{aligned}
$$

5 Analyse des performances de différents contrôleurs avec une perturbation

6 Calcul des paramètres K_P, K_I pour satisfaire certaines spécifications

6.1 Sans simplification

Les spécifications sont :
— pas d'overshoot
— un temps de réponse trois fois plus petit que le système naturel (non contrôlé)
Reprenons le dénominateur de la fonction de transfert $G_{CL}(s)$:

$$D(s) = s^2 + (B_u K_P - A)s + B_u K_P K_I \tag{6.1}$$

que nous pouvons reprocher de la forme canonique suivante pour un système du deuxième ordre

$$D_c(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2. \tag{6.2}$$

Par identification, on obtient

$$\omega_n = \sqrt{B_u K_P K_I} \tag{6.3}$$

$$\zeta = \frac{B_u K_P - A}{2\sqrt{B_u K_P K_I}} \tag{6.4}$$

Les spécifications nous imposent :

$$\zeta \geq 1 \tag{6.5}$$

$$t_R = \frac{4}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} = \tag{6.6}$$

6.2 Avec simplification pôle-zéro

En posant

$$K_I = -A \tag{6.7}$$

on obtient une simplification pôle-zéro, et la fonction de transfert devient

$$T_r(s) = \frac{K_P B_u}{s + K_P B_u} = \frac{1}{1 + \frac{s}{K_P B_u}}. \tag{6.8}$$

S'agissant d'une fonction du premier ordre, il n'y a pas de dépassement, et le temps de réponse

$$t_{R_{CL}} \approx 4 \cdot \tau = \frac{4}{K_P B_u} = \tag{6.9}$$

7 Non-linéarités du système contrôlé

La non-linéarité principale vient du fait que le système d'équations initiales n'est pas linéaire, et qu'il a dû être linéarisé autour de son point d'équilibre. Ainsi, lorsque l'on ne se trouve pas proche de ce point d'équilibre, les équations que nous avons ne sont pas correctes.