

Date of current version 23 02, 2018.

Digital Object Identifier 10.1109/ACCESS.2017.DOI

PÉNDULO INVERTIDO

ANDREA POSADA CÁRDENAS¹, SANTIAGO HINCAPIE POTES²

¹Estudiante de Ingeniería Matemática, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia (e-mail: aposad31@eafit.edu.co)

²Estudiante de Ingeniería Matemática, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia (e-mail: shinca12@eafit.edu.co)

Corresponding author: Andrea Posada Cárdenas (e-mail: aposad31@eafit.edu.co).

ABSTRACT El péndulo invertido es representa un sistema no lineal, típico en la literatura debido a que es inestable sin control en su punto de interés. Se realiza en análisis lineal sobre el punto de equilibrio estable $X_0 = 0$ y $U_0 = 0$. El rango de linealidad se estima como $[-2,5, 2,5]$. Se presentan los resultados de simulación a variaciones en la entrada y en condiciones iniciales para θ .

INDEX TERMS Péndulo invertido, Simulink, Simulación, Sistema dinámico no lineal.

I. INTRODUCCIÓN

El péndulo invertido sobre un carro representa un sistema que comúnmente es encontrado en los libros de control y en la literatura. Esto se debe en parte a que es inestable sin control, e.d., el péndulo caería si el carro no se moviese para balancearlo y a que es un sistema no lineal. El despegue de cohetes está relacionado directamente con el sistema del péndulo invertido [?].

Se estudia el péndulo invertido en dos dimensiones, mostrado en la Figura 1. La entrada de control es la fuerza F que mueve el carro horizontalmente y las salidas son la posición angular del péndulo θ y la posición horizontal del carro x , siendo un sistema ‘single input, multiple output’ SIMO. Las entradas, salidas y parámetros, su notación, significado físico y unidades de medida se presentan en el Cuadro 1 [?].

Cuadro 1. Parámetros, entradas y salidas

	Notación	Significado	Unidades
Parámetros	M	masa del carro	kg
	m	masa del péndulo	kg
	b	coeficiente de fricción	N*m/s
	I	momento de inercia del centro de masa del péndulo	kg
	L	longitud al centro de masa del péndulo	m
	g	gravedad	m/s^2
Inputs	F	fuerza aplicada al carro	N
Outputs	x	posición del carro en el eje x	m
	θ	ángulo del péndulo desde la vertical (abajo)	rad

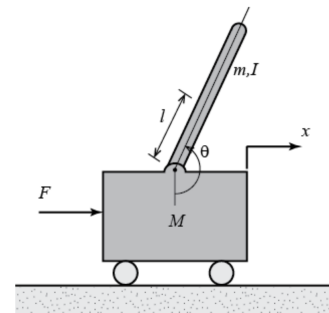


Figura 1. Representación gráfica del péndulo invertido.

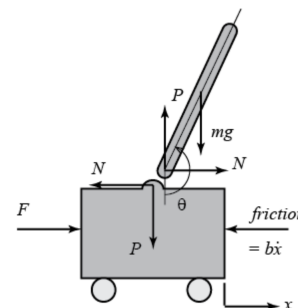


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido.

I-A. ANÁLISIS DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE Y SISTEMA DE ECUACIONES

El diagrama de cuerpo libre se presenta en la Figura 2.

Sumando las fuerzas horizontales se obtiene la siguiente

ecuación de movimiento

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad (1)$$

donde

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

generada de la suma de las fuerzas horizontales en el diagrama de cuerpo libre del péndulo.

Sustituyendo N en la ecuación (1), se obtiene

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = F \quad (2)$$

Por otro lado, sumando las fuerzas verticales en el diagrama de cuerpo libre del péndulo y los momentos alrededor del centroide del péndulo, se obtiene, respectivamente

$$P \sin(\theta) + N \cos(\theta) - mg \sin(\theta) = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos(\theta)$$

$$Pl \sin(\theta) - Nl \cos(\theta) = I\ddot{\theta}$$

Reemplazando la ecuación de la suma de los momentos en la de la suma de las fuerzas verticales (ecuaciones anteriores), da como resultado

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = -ml\ddot{x} \cos(\theta) \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) son las ecuaciones que describen el sistema.

II. SISTEMA NO LINEAL

II-A. VARIABLES

$x_1 = x$	posición del carro
$x_2 = \dot{x}$	velocidad del carro
$x_3 = \theta$	ángulo del péndulo desde la vertical
$x_4 = \dot{\theta}$	velocidad angular del péndulo
$u = F$	Fuerza de entrada

II-B. ESPACIO DE ESTADOS NO LINEAL

Partiendo de las ecuaciones de movimiento (2) y (3) y teniendo en cuenta la notación introducida anteriormente en II-A, se redefine el sistema de ecuaciones de la siguiente manera.

$$\begin{cases} f_1 = \dot{x}_1 = x_2 \\ f_2 = \dot{x}_2 = \frac{(I + ml^2)a + m^2 l^2 g \sin(x_3) \cos(x_3)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2(x_3)} \\ f_3 = \dot{x}_3 = x_4 \\ f_4 = \dot{x}_4 = \frac{-ml \cos(x_3)a - (M + m)mlg \sin(x_3)}{(M + m)(I + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2(x_3)} \end{cases} \quad (4)$$

donde $a = u - bx_2 + mlx_4^2 \sin(x_3)$

\dot{x}_2 y \dot{x}_4 se obtienen despejando \ddot{x} y $\ddot{\theta}$ de las ecuaciones (2) y (3), como se muestra a continuación, y teniendo en cuenta que $\ddot{x} = \dot{x}_2$ y $\ddot{\theta} = \dot{x}_4$

$$\dot{x}_2 = \frac{u - bx_2 - mlx_4 \cos(x_3) + mlx_4^2 \sin(x_3)}{M + m} \quad (5)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-mlx_2 \cos(x_3) - mlg \sin(x_3)}{I + ml^2} \quad (6)$$

Al reemplazar el valor de \dot{x}_4 , ecuación (6), en la ecuación (5), hacer álgebra y juntar términos semejantes se obtiene la expresión del sistema de ecuaciones (4) para \dot{x}_2 . Repitiendo el mismo proceso pero para el valor de \dot{x}_2 , ecuación (5), en la ecuación (6) se obtiene la expresión señalada en el sistema de ecuaciones (4) para \dot{x}_4

II-C. SALIDAS

El sistema de ecuaciones (7) es la representación de las salidas del sistema.

$$\begin{cases} h_1 = x_1 \\ h_2 = x_3 \end{cases} \quad (7)$$

II-D. DIAGRAMA DE BLOQUES DE SIMULINK — MATLAB

El péndulo invertido sobre un carro se implementó en Simulink de MATLAB. Se presentan el diagrama de bloques, 3, la expansión del subsistema, 4, y el código de MATLAB de la fcn, que es simplemente la implementación del sistema de ecuaciones (4). Los parámetros no aparecen con los valores empleados, dado que la asignación de estos, al igual que la de las condiciones iniciales se realiza mediante una máscara.

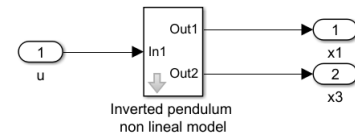


Figura 3. diagrama de bloques.

```
function [dx1, dx2, dx3, dx4] = fcn(M, m, b, L, I,
    g, u, x1, x2, x3, x4)
2 denominator = (M+m)*(I+m*L^2)-m^2*L^2*cos(x3)^2;
3 dx1 = x2;
4 dx2 = ((I+m*L^2)*(u-b*x2+m*L*x4^2*sin(x3))+m
    ^2*L^2*g*sin(x3)*cos(x3))/denominator;
5 dx3 = x4;
6 dx4 = (-m*L*u*cos(x3)+m*L*b*x2*cos(x3)-m^2*L
    ^2*x4^2*sin(x3)*cos(x3)-(M+m)*m*g*L*sin(x3)
    )/denominator;
end
```

III. SIMULACIÓN

Las simulaciones realizadas en esta y en las secciones posteriores se realizan con los siguientes valores para los parámetros, a menos de que se indique lo contrario: $M = 0.5$,

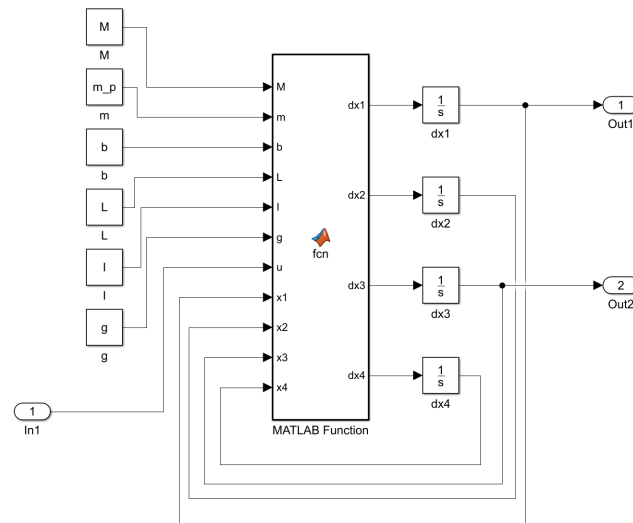


Figura 4. diagrama de bloques subsistema.

$m = 0,2$, $b = 0,1$, $L = 0,3$, $I = 0,006$ y $g = 9,8$ con unidades indicadas en el Cuadro 1.

III-A. SIMULACIONES CON DIFERENTES TIPOS DE ENTRADA

III-A1. Seno

Con la función seno, el carro se ve acelerado constantemente; pero en este caso, como la función seno toma valores positivos y negativos, la aceleración se ejerce en ambos sentidos lo que genera en el carro un movimiento o cambio en su posición similar a la función de entrada.

III-A2. Coseno

Con la función coseno, al igual que con seno, el carro se ve acelerando, lo cual es esperado dado que la forma funcional de ambas entradas es similar; sin embargo, al analizar las señales de salida estas son radicalmente diferentes. Esto probablemente se deba a que la función empieza en su valor máximo y disminuye progresivamente, indicando que el modelo funciona mejor si se guía por funciones suaves.

III-A3. Escalón

La función escalón muestra la variación del sistema ante la aplicación de la fuerza. Puede observarse que antes del momento en que el escalón hace efecto, el comportamiento es similar al de la función constante, es decir, la simulación con fuerza externa sin variación o sin ésta. Después de la fuerza, que es permanente, puede verse que la posición del vehículo cambia rápidamente debido a la aceleración permanente que éste tiene.

III-A4. Sierra

En la función sierra tiene un comportamiento bastante particular y al igual que la función escalón, es fácil ver el

lugar de la discontinuidad; sin embargo, la discontinuidad de éste es mayor en cómo afecta la respuesta temporal que probablemente se deba a la amplitud del salto.

III-B. SOLUCIÓN NUMÉRICA

III-B1. Método de Euler

En la Figura 18 se puede ver la comparación del resultado obtenido al realizar la simulación con el método de Euler, con un paso $h = \frac{1}{4000}$, porque con valores mas altos la diferencia entre ambas simulaciones se vuelve bastante notoria. Estas diferencias pueden deberse a la alta complejidad de las ecuaciones de estado, por lo cual se vuelve necesario utilizar un paso bastante pequeño, a pesar de esto, es fácil ver que aún con un paso diminuto no se consigue una buena aproximación del sistema.

III-B2. Método de Runge-Kutta

Para el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el paso utilizado fue de $h = \frac{1}{10}$, la precisión obtenida es tal que en la figura no se logra observar fácilmente la simulación arrojada por *Simulink*. Esto indica que el método de Runge-Kutta posee un orden de error bastante bajo, por lo cual se puede decir que realiza buenas aproximaciones de las ecuaciones de estados.

Es importante resaltar que al utilizar un paso relativamente grande, el tiempo de computo asociado al método es bastante bajo.

III-C. CAMBIO DE PARÁMETROS

Para analizar la sensibilidad del modelo a ciertos parámetros, se consideró el efecto del cambio sobre dos parámetros del modelo, la longitud al centro de masa del péndulo y la masa del péndulo, esto debido a que experimentalmente

hablando es bastante sencillo y económico remplazar esta componentes del péndulo.

III-C1. Longitud al centro de masa

En la Figura 19 se varía la distancia del centro de masa del péndulo. De la gráfica se observa que la amplitud con la que se mueve el carro disminuye a medida que disminuye la distancia del centro de masa del péndulo, esto se debe a que la inercia depende de esta distancia y es esta la que provoca dichos movimientos sobre el carro. Por otro lado, es posible notar que el ángulo del péndulo no se ve muy afectado por esta longitud.

III-C2. Masa del péndulo

En la Figura 20 se puede observar la respuesta temporal al variar la masa del péndulo, de la cual se puede observar que la amplitud del ángulo disminuye a medida que aumenta la masa del péndulo. Por otro lado, la frecuencia con la que éste oscila aumenta, lo cual tiene sentido pues el péndulo se mueve más rápido sobre ángulos más pequeños; lo que se corrobora al ver la gráfica de la posición, la cual no solo aumenta más rápido, sino que lo hace con una mayor concavidad, indicando que la aceleración del péndulo es mayor, haciendo que la fuerza requerida sea mayor, lo cual tiene sentido pues se requiere mover más masa.

IV. LINEALIZACIÓN

IV-A. PUNTOS DE EQUILIBRIO

Igualando las f_n a 0, para $n = 1, 2, 3, 4$, se obtienen seis puntos de equilibrio, mostrados en el Cuadro 2.

IV-B. SISTEMA LINEALIZADO

Un sistema lineal es de la forma

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

donde Y es el vector de salidas, X es el vector de estados, U es el vector de entradas y A , B , C y D son matrices (o vectores dependiendo de las dimensiones de X y U) de coeficientes constantes.

Tanto la linealización analítica como la linealización realizada con *MATLAB*, utilizando el modelo de bloques de *Simulink*, se hacen con respecto al punto de equilibrio $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ y $u = 0$.

IV-B1. Linealización analítica

La linealización analítica del sistema se realiza por medio de aproximación por series de Taylor, como se muestra a continuación, con punto de evaluación X_0, U_0 el indicado anteriormente.

$$f_i(X, U) \approx f_i(X_0, U_0) + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_i(X, U)}{\partial x_j} \bigg|_{X=X_0, U=U_0} \Delta x_j + \frac{\partial f_i(X, U)}{\partial U} \bigg|_{X=X_0, U=U_0} \Delta U$$

Cuadro 2. Puntos de equilibrio

	Variable	Valor
1	x_1	0
	x_2	0
	x_3	$-\pi + 2 \arctan((33^{1/2} \cdot n)/11 - (154^{1/2} \cdot n)/11)$
	x_4	0
	u	$(154^{1/2} \cdot 49n)/100$
2	x_1	0
	x_2	0
	x_3	$-2 \cdot \arctan((33^{1/2} \cdot n)/11 - (154^{1/2} \cdot n)/11)$
	x_4	0
	u	$-(154^{1/2} \cdot 49n)/100$
3	x_1	0
	x_2	0
	x_3	$2 \cdot \arctan((33^{1/2} \cdot n)/11 - (154^{1/2} \cdot n)/11)$
	x_4	0
	u	$(154^{1/2} \cdot 49n)/100$
4	x_1	0
	x_2	0
	x_3	π
	x_4	0
	u	0
4	x_1	0
	x_2	0
	x_3	0
	x_4	0
	u	0
4	x_1	0
	x_2	0
	x_3	$\pi - 2 \cdot \arctan((33^{1/2} \cdot n)/11 - (154^{1/2} \cdot n)/11)$
	x_4	0
	u	$-(154^{1/2} \cdot 49n)/100$

$$h_k(X, U) \approx h_k(X_0, U_0) + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial h_k(X, U)}{\partial x_j} \bigg|_{X=X_0, U=U_0} \Delta x_j + \frac{\partial h_k(X, U)}{\partial U} \bigg|_{X=X_0, U=U_0} \Delta U$$

donde $i = 1, \dots, 4$ y $k = 1, 2$.

Se sabe que las funciones en evaluadas en el punto de equilibrio, es decir, $f_i(X_0, U_0)$ y $h_k(X_0, U_0)$, tienden a cero. La representación matricial de la aproximación por series de Taylor se muestran a continuación.

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + B \Delta U \quad (8)$$

$$\Delta Y = C \Delta X + D \Delta U \quad (9)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/11 & 147/55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5/11 & -343/11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \quad 20/11 \quad 0 \quad -50/11]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0 \quad 0]^T$$

Cuadro 3. Valores propios de la matriz A

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0,0000 + 0,0000i \\
\lambda_2 &= -0,1429 + 0,0000i \\
\lambda_2 &= -0,0195 + 5,5835i \\
\lambda_2 &= -0,0195 - 5,5835i
\end{aligned}$$

IV-B2. Linealización con *Simulink*

Con base en el modelo de bloques mostrado en la Figura 3 y utilizando la función *linmod* de MATLAB, se obtiene la siguiente linealización del modelo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2,6727 & -0,1818 & 0 \\ 0 & -31,1818 & 0,4545 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \quad 0 \quad 1,8182 \quad -4,5455]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0 \quad 0]^T$$

Se observa que las posiciones de las variables x_2 y x_3 se encuentran trocadas. Al hacer la respectiva transformación lineal, usando la matriz T definida en la parte inferior, se puede evidenciar que la linealización analítica y la linealización utilizando *Simulink* son equivalentes.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV-C. ESTABILIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

$$X_0 = 0, U_0 = 0$$

La estabilidad del punto de equilibrio se realiza por medio del cálculo de los valores propios de la matriz A del sistema linealizado. Con base en dichos valores, que se muestran en el Cuadro IV-C, y dado que todos son negativos o cero, el punto de equilibrio estudiado es estable.

IV-D. CURVA DE LINEALIDAD PARA LA VARIABLE X_3

La curva de linealidad obtenida enviando entradas $u \in [-5, 5]$ al modelo lineal y al no lineal se muestra en la Figura 5. La curva azul hace referencia a los resultados del modelo no lineal, mientras la naranja al modelo lineal. Para entradas $u \in [-2, 5, 2, 5]$ se considera que el modelo lineal representa una buena aproximación del modelo no lineal.

IV-D1. Curva de linealidad con *Step*

Otra forma de hallar la curva de linealidad es por medio de una señal escalera. Para una escalera con vector de amplitud $[-5, 0, -4, 9, \dots, 4, 9, 5]$ y paso cada 5000s, teniendo un tiempo total de simulación de 500000s, se genera la curva de linealidad mostrada en la Figura 6. Nuevamente, la curva

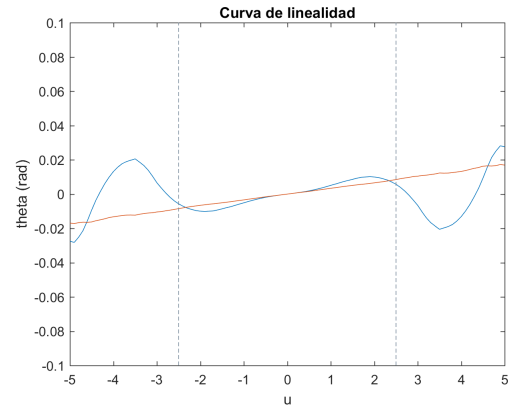


Figura 5. Curva de linealidad para la variable x_3 con entradas $u \in [-5, 5]$ con tiempo de corrida 300s.

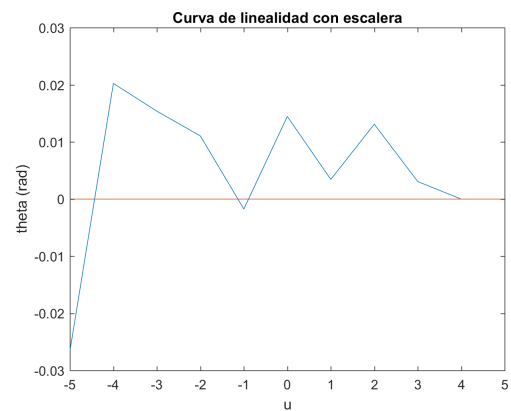


Figura 6. Curva de linealidad para la variable x_3 con señal escalera y tiempo de corrida 500000s.

azul hace referencia a los resultados del modelo no lineal, mientras la naranja al modelo lineal.

Se observa similitud entre ambas curvas de linealidad, pero claramente la obtenida mediante la señal escalera no logra ser una aproximación lo suficientemente buena. Esto se puede deber principalmente a que el sistema no se alcanza a estabilizar antes de que la entrada le mande la siguiente señal y a que se trata de hacer la aproximación a una señal continua a partir de un conjunto de puntos discreto y el tamaño del conjunto de puntos puede no ser el adecuado; es decir, la distancia entre los puntos puede ser relativamente grande. Esto último se verifica viendo que la curva azul no es suave.

V. VARIACIÓN DE ENTRADAS Y CONDICIONES INICIALES: MODELO LINEAL VS. MODELO NO LINEAL

Para todas las gráficas que se presentan a continuación, la curva azul está asociada al modelo no lineal y la naranja al no lineal.

V-A. VARIACIÓN DE ENTRADA DENTRO DEL RANGO DE LINEALIDAD

Se sabe que el rango de linealidad, es decir, aquel rango en el que el modelo lineal es robusto y es una buena aproximación del modelo no lineal alrededor del punto de equilibrio $X_0 = 0, U_0 = 0$, es $[-2,5, 2,5]$. Por ende, se eligen dos valores en este rango $u = 0,5$ y $u = -2,0$ y se muestran las gráficas obtenidas para x_3 respectivamente, Figuras 7 y 8. Ambas figuras muestran la contraposición de las respuestas temporales para x_3 del modelo lineal y no lineal. Mas dado que esta diferencia no se observa con claridad, se añade a las gráficas la diferencia entre las respuestas temporales, representado por la curva amarilla. En ambas está diferencia es muy pequeña, próxima a cero, y con mayores valores al inicio de la simulación. Se cumple que el rango de linealidad supuesto genera resultados esperados, con lo que se concluye que el rango puede ser apropiado.

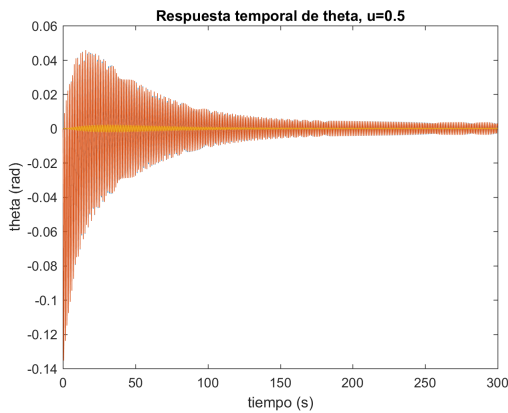


Figura 7. Respuesta temporal variable x_3 para entrada $u = 0,5$

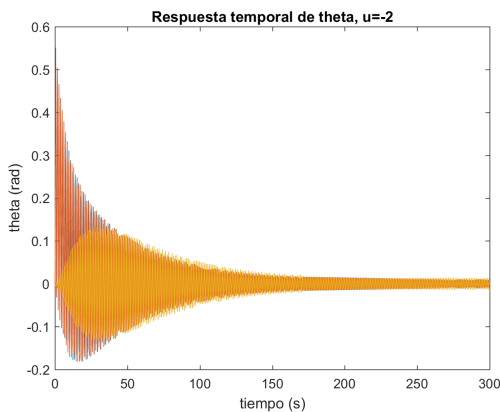


Figura 8. Respuesta temporal variable x_3 para entrada $u = -2,0$

V-B. VARIACIÓN DE ENTRADA FUERA DEL RANGO DE LINEALIDAD

Como se dijo anteriormente, el rango de linealidad elegido es $[-2,5, 2,5]$. Se escogen los valores $u = 6$ y $u = -100$,

por fuera del rango mencionado. En $u = -100$, Figura 11, se observa que el modelo lineal no es una aproximación válida para el modelo no lineal. Por otro lado, para $u = 6$, la diferencia en la respuesta temporal obtenida por el modelo lineal y el no lineal no es tan clara como para $u = -100$, a pesar de que se alcanza a ver zonas azules denotando diferencia entre las curvas. Dado lo mencionado anteriormente, se añade la gráfica de contraposición de las respuestas con la diferencia entre ellas, Figura 10. Esta diferencia no es relativamente grande, con máximo valor absoluto alrededor de 1. Según el valor de relajamiento que se permita en la diferencia entre las respuestas temporales producidas por el modelo lineal y por el no lineal, se puede considerar ampliar el rango de linealidad propuesto.

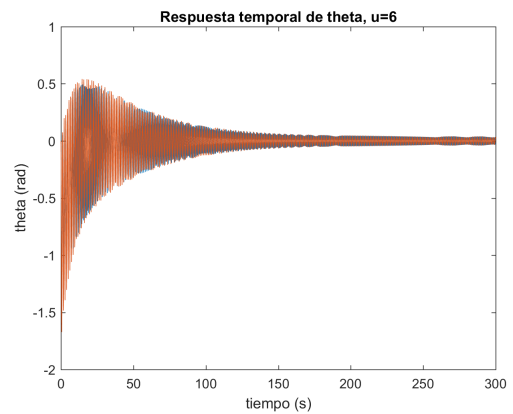


Figura 9. Respuesta temporal variable x_3 para entrada $u = 6,0$

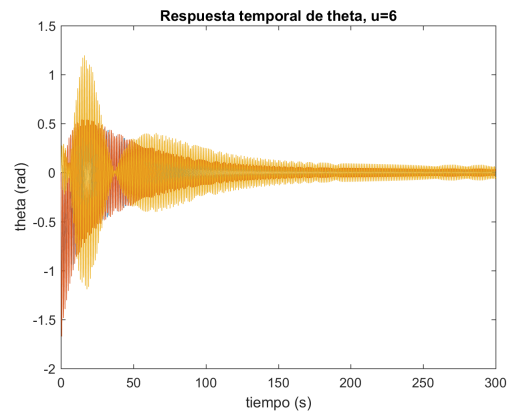


Figura 10. Respuesta temporal variable x_3 para entrada $u = 6,0$ con diferencia entre las respuestas

V-C. VARIACIÓN CONDICIONES INICIALES

La gráficas mostradas, Figuras 12 y 13, son producidas con pequeñas variaciones para la condición inicial de x_3 . La Figura 12 corresponde a una variación de 0.01 en la condición inicial y entrada $u = 0$. La Figura 13 es obtenida con variación de 0.1 en la condición inicial y entrada $u = 0,1$.

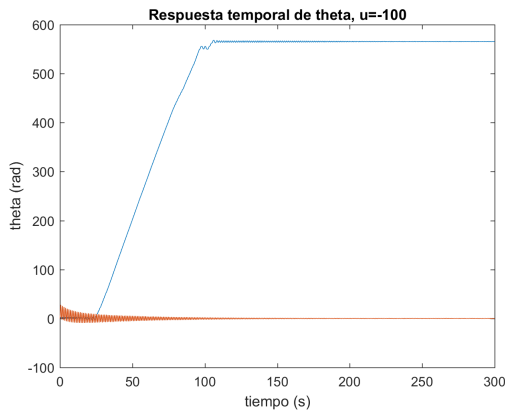


Figura 11. Respuesta temporal variable x_3 para entrada $u = -100,0$

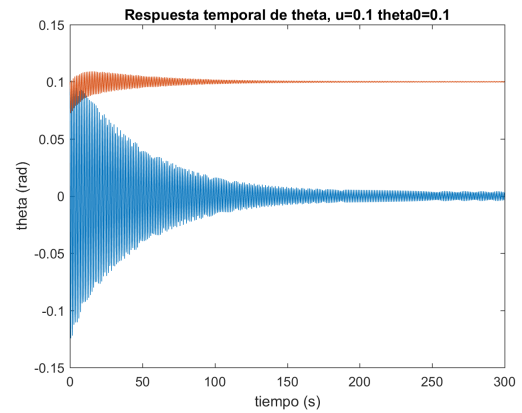


Figura 13. Respuesta temporal variable para entrada $u = 0,1$ y condicional inicial $x_{30} = 0,1$

Comparando las dos gráficas mencionadas anteriormente, se concluye que variaciones relativamente pequeñas en la condición inicial para x_3 , produce un desplazamiento vertical en la respuesta temporal del modelo lineal, igual al cambio en la condición. Por otro lado, este cambio define el rango de variación inicial en la respuesta temporal para el modelo no lineal. Esto se observa en ambas gráficas. Cuando $u = 0$, la gráfica correspondiente al modelo lineal es una línea recta. Por último, cuando se varía u en pequeñas cantidades, se presenta oscilamiento en la respuesta temporal para x_3 del modelo lineal.

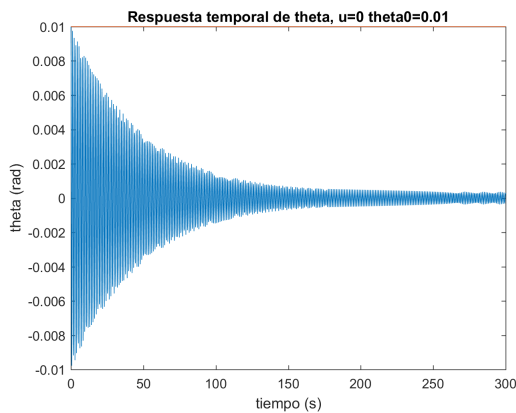


Figura 12. Respuesta temporal variable x_3 para entrada $u = 0$ y condicional inicial $x_{30} = 0,01$

VI. REFERENCIAS

Referencias

[Uni17] University of Michigan. Control tutorials for matlab and simulink (ctms), aug 2017.

...

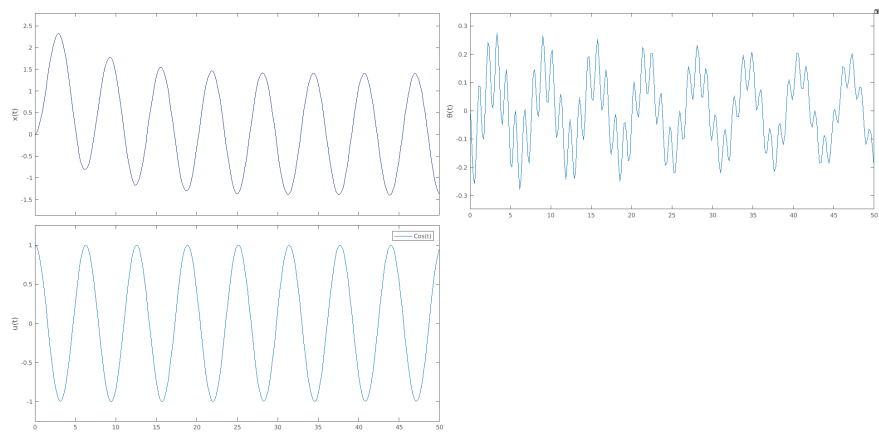


Figura 14. Respuesta temporal del modelo, ante una entrada cosenoidal

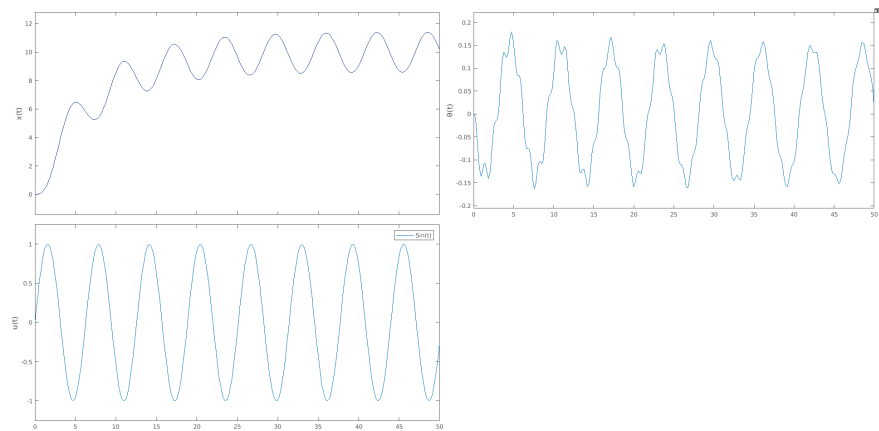


Figura 15. Respuesta temporal del modelo, ante una señal sinusoidal

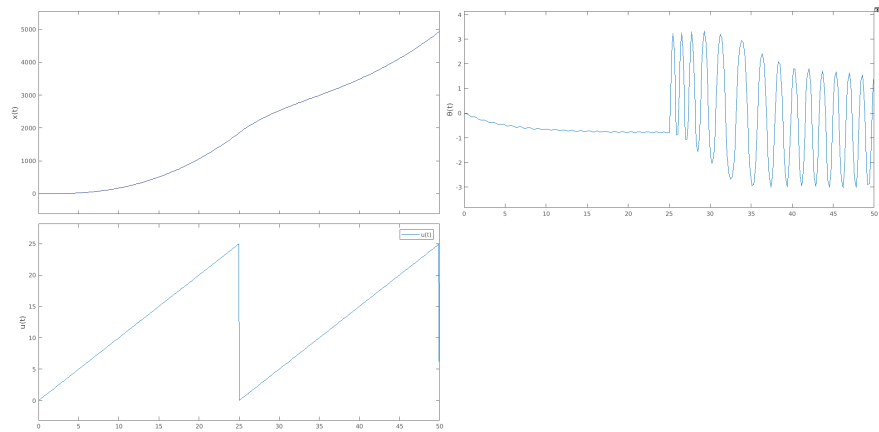


Figura 16. Respuesta temporal del modelo, ante una señal tipo sierra

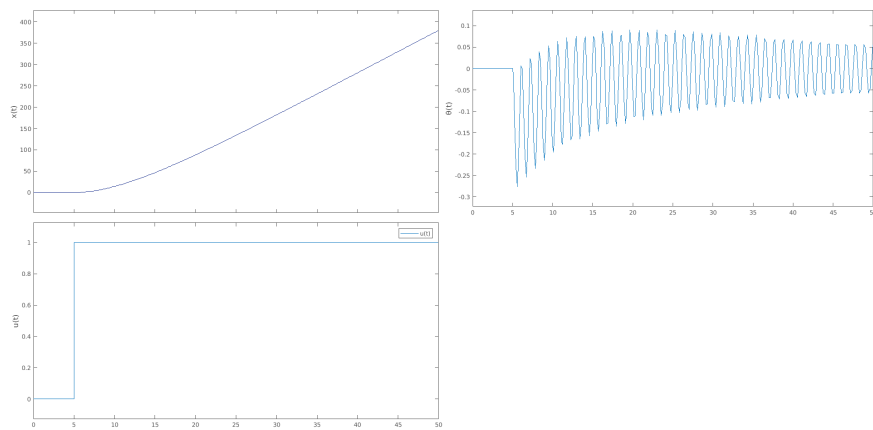


Figura 17. Respuesta al impulso (retardado) modelo

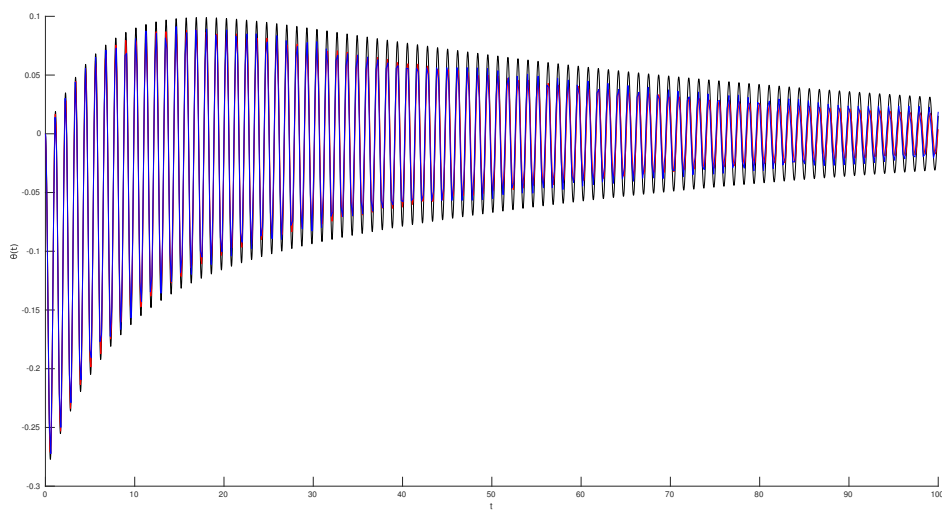


Figura 18. Comparacion de la respuesta temporal para la variable θ , utilizando diferentes metodos numericos.

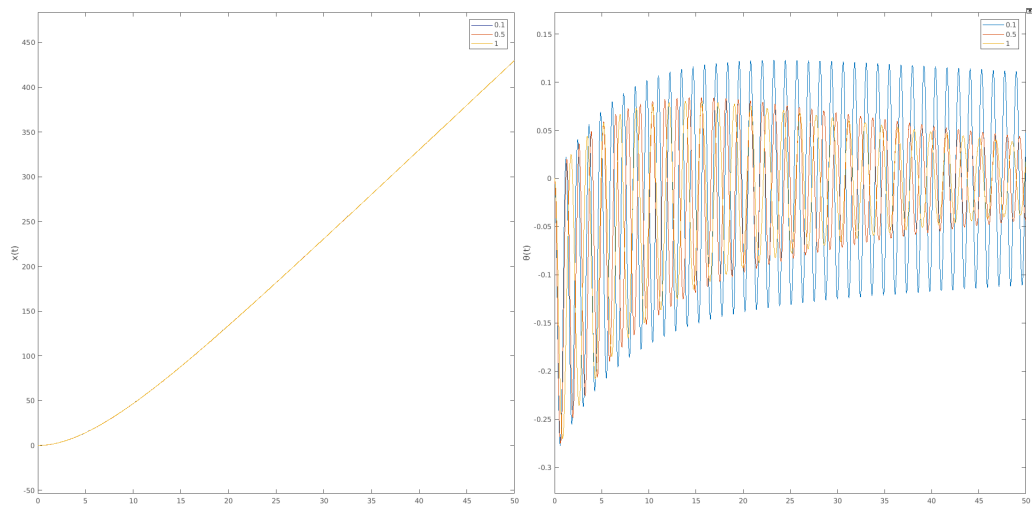


Figura 19. Respuesta temporal del modelo, ante cambios en el parametro L , la longitud del pendulo

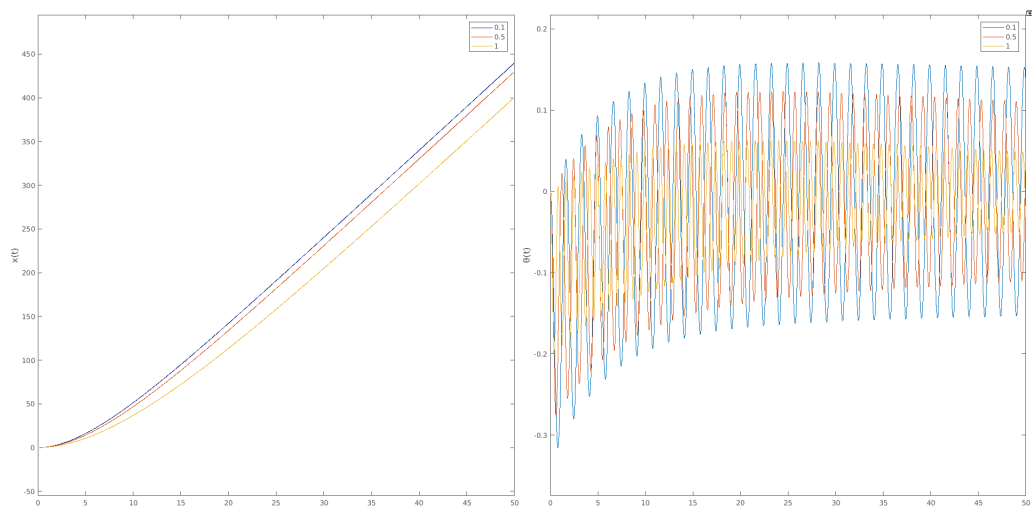


Figura 20. Respuesta temporal del modelo, ante cambios en el parametro m , la masa del pendulo.