

ANR Report - Registration error estimation framework

Guillaume POTIER

02 octobre 2019

Introduction

Le problème de recalage entre deux images consiste à trouver une application permettant de déformer une image source pour la superposer au mieux sur une image cible. La transformation ainsi trouvée n'est qu'une approximation de la déformation réelle. Par conséquent il existe une différence de position entre l'image source transformée et l'image cible. Cette différence de position est appelée erreur de recalage. Nous nous intéressons particulièrement à cette erreur de recalage et nous souhaitons pouvoir l'estimer dans le cas où les transformations appliquées suivent différents modèles d'hypothèses. Nous allons décrire dans une première partie comment estimer l'erreur de recalage dans le cas où le modèle de transformation est supposé rigide. Dans une seconde partie nous allons montrer comment le problème de recalage peut être assimilé à un problème de régression linéaire, puis comment utiliser les résultats connus sur la régression linéaire pour estimer l'erreur de recalage dans le cas où le modèle de transformation est étendu au modèle affine. Enfin nous allons étudier grâce à plusieurs simulations la différence d'erreur induite par l'utilisation de modèle rigide ou affine.

Modèle affine

Le modèle de régression linéaire multivariée

Selon l'ouvrage *Applied multivariate statistical analysis sixth edition* nous formulons le modèle de régression linéaire multivarié suivant :

Soit m réponses Y_1, Y_2, \dots, Y_m et un set de r variables prédictrices z_1, z_2, \dots, z_r . Nous supposons que chaque réponse suit un modèle de régression linéaire de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \beta_{01} + \beta_{11}z_1 + \dots + \beta_{r1}z_r + \epsilon_1 \\ y_2 = \beta_{02} + \beta_{12}z_1 + \dots + \beta_{r2}z_r + \epsilon_2 \\ \vdots \\ y_m = \beta_{0m} + \beta_{1m}z_1 + \dots + \beta_{rm}z_r + \epsilon_m \end{array} \right\}$$

Le vecteur y_i réponse pour la $i^{\text{ème}}$ observation peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{01} \\ \beta_{02} \\ \vdots \\ \beta_{0m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{r1} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1m} & \beta_{2m} & \dots & \beta_{rm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_{i1} \\ z_{i2} \\ \vdots \\ z_{ir} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{i1} \\ \epsilon_{i2} \\ \vdots \\ \epsilon_{im} \end{bmatrix}$$

En notation matricielle pour n observations composées de m variables nous avons :

$$\underset{(n \times m)}{Y} = \underset{(n \times (r+1))}{Z} \times \underset{((r+1) \times m)}{\beta} + \underset{(n \times m)}{\epsilon}$$

$$\underset{(n \times m)}{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(n \times (r+1))}{Z} = \begin{bmatrix} 1 & z_{11} & \dots & z_{1r} \\ 1 & z_{21} & \dots & z_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{n1} & \dots & z_{nr} \end{bmatrix}$$

$$\underset{((r+1) \times m)}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \dots & \beta_{0m} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rm} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(n \times m)}{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \dots & \epsilon_{1m} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \dots & \epsilon_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{n1} & \epsilon_{n2} & \dots & \epsilon_{nm} \end{bmatrix}$$

Application au problème de recalage

Afin de pouvoir trouver la transformation liant nos deux images, il faut placer un nuage de points fiduciaux. Chaque point sur une image possède un homologue sur l'autre image. Ainsi nous pouvons construire deux tableaux contenant les coordonnées des points fiduciaux de chaque image, dans le même ordre. Soit Z le tableau des points fiduciaux de l'image source et Y celui de l'image cible. Nous ne considérons que le cas des transformations affines. Cela signifie que les transformations possibles liant les points fiduciaux de l'image source et de l'image cible sont composées de translation, rotation, mise à l'échelle et cisaillement. Ainsi nous pouvons écrire en coordonnées homogènes :

$$\underset{(n \times m)}{Y} = \underset{(n \times (r+1))}{Z} \times \underset{((r+1) \times m)}{\beta} + \underset{(n \times m)}{\epsilon}$$

Le terme ϵ correspond à l'erreur de déplacement résiduel après l'application de la transformation puisque nous ne pouvons qu'approcher la solution. Trouver la solution de cette

équation dans le cadre des transformations affines revient à résoudre un problème de régression linéaire multivariée.

Estimation de l'erreur de recalage

Grâce au modèle de régression linéaire nous avons pour tout $j \in [1 \dots m]$, $E(\epsilon_j) = 0$ et $Var(\epsilon_j) = \sigma_j^2$ connu. ϵ admet une matrice de covariance Σ :

$$\Sigma_{(m \times m)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 & \dots & \sigma_1 \sigma_m \\ \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2 \sigma_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_m \sigma_1 & \sigma_m \sigma_2 & \dots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

Soit $\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1}Z'Y$ l'estimateur de β par la méthode des moindres carrés. $\hat{\beta}$ est le meilleur estimateur sans biais de β . Soit $\hat{\epsilon} = Y - Z\hat{\beta}$ l'estimation de l'erreur résiduelle ϵ après application de la transformation approchée $\hat{\beta}$. Soit $\hat{\Sigma} = \frac{\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}}{n}$ une estimation de Σ . Une fois que nous avons ajusté notre modèle de régression, nous pouvons prédire les nouvelles positions pour tous les points de l'image source. Nous souhaitons également estimer l'erreur de prédiction associée à chaque nouveau point. Soit Y_0 l'image d'un nouveau point z_0 , alors suivant le modèle de régression $Y_0 = \beta' z_0 + \epsilon_0$. ϵ_0 est indépendant de ϵ . L'erreur de prédiction associée est $Y_0 - \hat{\beta}' z_0 = (\beta - \hat{\beta})' z_0 + \epsilon_0$. $Y_0 - \hat{\beta}' z_0$ est distribué suivant $\mathcal{N}_m(0, (1 + z_0'(Z'Z)^{-1}z_0)\Sigma)$. L'ellipse de prédiction au seuil α pour Y_0 est donnée par :

$$(Y_0 - \hat{\beta}' z_0)' \left(\frac{n}{n-r-1} \hat{\Sigma} \right)^{-1} (Y_0 - \hat{\beta}' z_0) \leq (1 + z_0'(Z'Z)^{-1}z_0) \left(\frac{m(n-r-1)}{n-r-m} \right) F_{m,n-r-m}(\alpha)$$

Modèle rigide

Sous l'hypothèse du modèle rigide nous supposons que la transformation recherchée est composée d'une rotation et d'une translation. Le problème de recalage dans ce cas est aussi connu comme le problème de Procrustes orthogonal. La solution est donnée par décomposition en valeur singulières (*Schönemann*). Un minorant de la matrice de covariance de l'estimateur est donné par l'inégalité de Cramer-Rao (*Moghari*) :

$$\Sigma_\beta = \begin{bmatrix} \Sigma_{tt} & \Sigma_{t\theta} \\ \Sigma_{\theta t} & \Sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -J_{tt} & -J_{t\theta} \\ -J_{\theta t} & -J_{\theta\theta} \end{bmatrix}^{-1} = J^{-1}$$

$$J_{tt} = \frac{\partial^2 \log(P(Y|X, t, \theta))}{\partial t^2}$$

$$J_{t\theta} = \frac{\partial^2 \log(P(Y|X, t, \theta))}{\partial t \partial \theta}$$

$$J_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \log(P(Y|X, t, \theta))}{\partial \theta^2}$$

$$\log(P(Y|X, t, \theta))$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi|\Sigma_i|}} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - Rx_i - t]^T \Sigma_i^{-1} [y_i - Rx_i - t]}{2}$$

Soit $e(z_0)$ l'erreur de recalage au point z_0 :

$$\begin{aligned} e(z_0) &= Rz_0 + t + \epsilon_0 - (\hat{R}z_0 + \hat{t}) \\ &= (R - \hat{R})z_0 + (t - \hat{t}) + \epsilon_0 \\ &= \Delta_R z_0 + \Delta_t + \epsilon_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_e &= E(e(z_0)e^T(z_0)) \\ &= E((\Delta_R z_0 + \Delta_t + \epsilon_0)(\Delta_R z_0 + \Delta_t + \epsilon_0)^T) \\ &= E(\Delta_R z_0 z_0^T \Delta_R^T) + E(\Delta_R z_0 \Delta_t^T) + E(\Delta_R z_0 \epsilon_0^T) \\ &\quad + E(\Delta_t z_0^T \Delta_R^T) + E(\Delta_t \Delta_t^T) + E(\Delta_t \epsilon_0^T) \\ &\quad + E(\epsilon_0 z_0^T \Delta_R^T) + E(\epsilon_0 \Delta_t^T) + E(\epsilon_0 \epsilon_0^T) \end{aligned}$$

Puisque ϵ_0 et Δ_R sont indépendants nous avons $E(\Delta_R z_0 \epsilon_0^T) = 0$ et $E(\epsilon_0 z_0^T \Delta_R^T) = 0$. De même puisque ϵ_0 et Δ_t sont indépendants nous avons $E(\Delta_t \epsilon_0^T) = 0$ et $E(\epsilon_0 \Delta_t^T) = 0$.

$$\begin{aligned} \Sigma_e &= E(\Delta_R z_0 z_0^T \Delta_R^T) + E(\Delta_R z_0 \Delta_t^T) \\ &\quad + E(\Delta_t z_0^T \Delta_R^T) + E(\Delta_t \Delta_t^T) + \Sigma \end{aligned}$$

En dimension 2 :

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

$$J_{tt} = \sum_{i=1}^N -\Sigma_i^{-1}$$

$$J_{t\theta} = \sum_{i=1}^N \Sigma_i^{-1} \begin{bmatrix} x_i^x \sin \theta + x_i^y \cos \theta \\ -x_i^x \cos \theta + x_i^y \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} x_i^x \sin \theta + x_i^y \cos \theta \\ -x_i^x \cos \theta + x_i^y \sin \theta \end{bmatrix}^T \Sigma_i^{-1} \begin{bmatrix} x_i^x \sin \theta + x_i^y \cos \theta \\ -x_i^x \cos \theta + x_i^y \sin \theta \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} x_i^x \cos \theta - x_i^y \sin \theta \\ -x_i^x \sin \theta + x_i^y \cos \theta \end{bmatrix}^T \Sigma_i^{-1} \begin{bmatrix} y_i^x - x_i^x \cos \theta + x_i^y \sin \theta - t_x \\ y_i^y - x_i^x \sin \theta - x_i^y \cos \theta - t_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^4)$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + O(\theta^5)$$

$$R \approx \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_R \approx \begin{bmatrix} 0 & (\hat{\theta} - \theta) \\ (\hat{\theta} - \theta) & 0 \end{bmatrix}$$

$$E(\Delta_R z z^T \Delta_R^T) = \begin{bmatrix} E(z_y^2(\hat{\theta} - \theta)^2) & E(-z_x z_y(\hat{\theta} - \theta)^2) \\ E(-z_x z_y(\hat{\theta} - \theta)^2) & E(z_x^2(\hat{\theta} - \theta)^2) \end{bmatrix}$$

Puisque $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais nous avons $E(\hat{\theta}) = \theta$ et $E((\hat{\theta} - \theta)^2) = \text{Var}(\hat{\theta})$ list groups i am in

$$E(\Delta_R z z^T \Delta_R^T) = \begin{bmatrix} z_y^2 \Sigma_{\theta\theta}^{11} & -z_x z_y \Sigma_{\theta\theta}^{11} \\ -z_x z_y \Sigma_{\theta\theta}^{11} & z_x^2 \Sigma_{\theta\theta}^{11} \end{bmatrix}$$

$$E(\Delta_R z \Delta t^T) = \begin{bmatrix} -z_y \Sigma_{t\theta}^{11} & -z_y \Sigma_{t\theta}^{21} \\ z_x \Sigma_{t\theta}^{11} & z_x \Sigma_{t\theta}^{21} \end{bmatrix}$$

$$E(\Delta t z^T \Delta_R^T) = E(\Delta_R z \Delta t^T)^T$$

$$E(\Delta t \Delta t^T) = \begin{bmatrix} \Sigma_{tt}^{11} & \Sigma_{tt}^{12} \\ \Sigma_{tt}^{21} & \Sigma_{tt}^{22} \end{bmatrix}$$

Simulations

Nous avons effectué plusieurs simulations pour vérifier la validité et la précision de nos développements. Le protocole de simulation est le suivant :

- Générer un set de points fiduciaires associés via une transformation connue T
- Ajouter un bruit gaussien au set de fiduciaires cible
- Sélectionner un point x_0 aléatoirement dans l'espace source
- Sélectionner un point y_0 image de x_0 par T avec un bruit gaussien
- Dessiner l'ellipse de prédiction de y_0 à 95%
- Exécuter le processus de recalage pour les modèles rigide et affine
- Dessiner l'ellipse de prédiction en x_0 à 95% pour les modèles rigide et affine

La simulation est répétée 1 000 000 de fois. Afin de vérifier la taille des ellipses, nous calculons le nombre de fois où le point y_0 est compris dans l'ellipse de prédiction ainsi que l'aire des ellipses. La matrice de covariance du bruit est :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 200 \end{bmatrix}$$

Transformation rigide

Dans cette simulation la transformation connue est une transformation rigide choisie aléatoirement.

Modèle	#n	% $y_0 \in ellipse_{95\%}$	Aire $ellipse_{95\%}$
Vrai	10	95.004	3 339.197
Rigide	10	95.053	5 696.962
Affine	10	95.058	8 918.060
Vrai	25	94.982	3 339.197
Rigide	25	94.183	3 779.010
Affine	25	94.994	4 415.793
Vrai	100	94.982	3 339.197
Rigide	100	94.717	3 413.270
Affine	100	94.995	3 539.127

Dans le cas où la vraie transformation est rigide, les ellipses trouvées contiennent le point y_0 environ 95% du temps. Cela semble cohérent puisque elles doivent correspondre à des ellipses de prédiction à 95%. Quand le nombre de points fiduciaires est petit le modèle rigide est plus précis que le modèle affine car l'aire de l'ellipse de prédiction correspondante est plus petite. Quand n devient grand les modèles rigide et affine tendent à se confondre et convergent vers le vrai modèle.

Transformation affine

Dans cette simulation la transformation connue est une transformation affine choisie aléatoirement.

Modèle	#n	% $y_0 \in ellipse_{95\%}$	Aire $ellipse_{95\%}$
Vrai	10	95.004	3 339.197
Rigide	10	97.824	55 941.551
Affine	10	95.152	8 915.317
Vrai	25	95.005	3 339.197
Rigide	25	97.792	35 719.012
Affine	25	95.033	4 415.452
Vrai	100	95.014	3 339.197
Rigide	100	98.435	31 365.125
Affine	100	95.004	3 539.246

Dans le cas où la vraie transformation est affine mais non-rigide, le modèle affine donne de bons résultats mais le modèle rigide n'est plus valide. Pour le modèle rigide y_0 est inclu dans l'ellipse plus de 97% du temps et l'aire de l'ellipse est bien plus grande. Cela indique que la méthode utilisée pour estimer l'ellipse de prédiction n'est plus valide et que l'erreur de recalage associée est bien plus importante.

Conclusion

Dans une première partie nous avons montré comment le problème de recalage peut être vu comme un problème de

régression linéaire. Cela permet notamment de recalibrer des images dans le cas où la transformation recherchée est affine. Nous avons montré que les outils de la régression linéaire permettent d'estimer l'erreur de recalage. Par ailleurs nous avons montré une méthode décrite dans la littérature permettant d'estimer l'erreur de recalage dans le cadre spécifique de transformation rigide. Enfin nous montrons grâce à des simulations que le recalage par la régression linéaire est plus robuste que la méthode rigide dans le cas où la vraie transformation n'est effectivement pas rigide. Cela est important d'un point de vue pratique où le vrai modèle de transformation est incertain.