ANR Report - Target registration error distribution

Guillaume POTIER

19 septembre 2019

Ellipse de confiance

Afin de pouvoir tracer l'ellipse de confiance sur une image, j'ai repris les développements de Moghari en dimension 2. Nous avions la log-vraisemblance :

$$\log\left(P(Y|X,t,\theta)\right) = \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi|\Lambda_i|}}\right) + \sum_{i=1}^{N} -\frac{\left[y_i - Rx_i - t\right]^T \Lambda_i^{-1} \left[y_i - Rx_i - t\right]}{2}$$

R est une matrice de rotation :

$$R = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Avec les développements en série de Taylor pour $\theta \approx 0$ nous avons :

$$cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^4)$$

$$sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + O(\theta^5)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} + O(\theta^2)$$

$$\left[y_i - Rx_i - t\right] \approx \begin{bmatrix} y_i^x - x_i^x + \theta x_i^y - t_x \\ y_i^y - \theta x_i^x - x_i^y - t_y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \log\left(P(Y|X,t,\theta)\right)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i^{-1} \begin{bmatrix} y_i^x - x_i^x + \theta x_i^y - t_x \\ y_i^y - \theta x_i^x - x_i^y - t_y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \log\left(P(Y|X,t,\theta)\right)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} -x_i^y & x_i^x \end{bmatrix} \Lambda_i^{-1} \begin{bmatrix} y_i^x - x_i^x + \theta x_i^y - t_x \\ y_i^y - \theta x_i^x - x_i^y - t_y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \log\left(P(Y|X,t,\theta)\right)}{\partial t^2} = J_{tt} = \sum_{i=1}^{N} -\Lambda_i^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 \log\left(P(Y|X,t,\theta)\right)}{\partial t \partial \theta} = J_{t\theta} = J_{\theta t}^T = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i^{-1} \begin{bmatrix} x_i^y \\ -x_i^x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \log\left(P(Y|X,t,\theta)\right)}{\partial \theta^2} = J_{\theta\theta} = -\sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} x_i^y & -x_i^x \end{bmatrix} \Lambda_i^{-1} \begin{bmatrix} x_i^y \\ -x_i^x \end{bmatrix}$$

L'inégalité de Cramer-Rao :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{tt} & \Sigma_{t\theta} \\ \Sigma_{\theta t} & \Sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \geq J^{-1} = \begin{bmatrix} -J_{tt} & -J_{t\theta} \\ -J_{\theta t} & -J_{\theta\theta} \end{bmatrix}^{-1}$$

soit $e(z) = Rz + t - (\hat{R}z + \hat{t})$ le vecteur erreur de recalage au point z.

$$\begin{aligned} e(z) &= (R - \hat{R})z + (t - \hat{t}) \\ &= \Delta Rz + \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_e(z) &= E(e(z)e^T(z)) \\ &= E((\Delta Rz + \Delta t)(\Delta Rz + \Delta t)^T) \\ &= E(\Delta Rzz^T \Delta R^T) + E(\Delta Rz\Delta t^T) + E(\Delta tz^T \Delta R^T) + E(\Delta t\Delta t^T) \end{aligned}$$

$$\Delta R = R - \hat{R} = \begin{bmatrix} 0 & (\hat{\theta} - \theta) \\ (\theta - \hat{\theta}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta t = t - \hat{t} = \begin{bmatrix} t_x - \hat{t_x} \\ t_y - \hat{t_y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} E(\Delta Rzz^T \Delta R^T) &= E\left(\begin{bmatrix} z_y^2(\hat{\theta} - \theta)^2 & z_x z_y(\hat{\theta} - \theta)(\theta - \hat{\theta}) \\ z_x z_y(\hat{\theta} - \theta)(\theta - \hat{\theta}) & z_x^2(\theta - \hat{\theta})^2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} E(z_y^2(\hat{\theta} - \theta)^2) & E(-z_x z_y(\hat{\theta} - \theta)^2) \\ E(-z_x z_y(\hat{\theta} - \theta)^2) & E(z_x^2(\hat{\theta} - \theta)^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puisque $\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais nous avons $E(\hat{\theta}) = \theta$ et $E((\hat{\theta} - \theta)^2) = Var(\hat{\theta})$

$$E(\Delta Rzz^T \Delta R^T) = \begin{bmatrix} z_y^2 \Sigma_{\theta\theta}^{11} & -z_x z_y \Sigma_{\theta\theta}^{11} \\ -z_x z_y \Sigma_{\theta\theta}^{11} & z_x^2 \Sigma_{\theta\theta}^{11} \end{bmatrix}$$

$$E(\Delta Rz\Delta t^T) = \begin{bmatrix} -z_y \Sigma_{t\theta}^{11} & -z_y \Sigma_{t\theta}^{21} \\ z_x \Sigma_{t\theta}^{11} & z_x \Sigma_{t\theta}^{21} \end{bmatrix}$$

$$E(\Delta tz^T \Delta R^T) = E(\Delta Rz\Delta t^T)^T$$

$$E(\Delta t\Delta t^T) = \begin{bmatrix} \Sigma_{tt}^{11} & \Sigma_{tt}^{12} \\ \Sigma_{tt}^{21} & \Sigma_{tt}^{22} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_e(z) = \begin{bmatrix} z_y^2 \Sigma_{\theta\theta}^{11} - 2z_y \Sigma_{t\theta}^{11} + \Sigma_{tt}^{11} & -z_x z_y \Sigma_{\theta\theta}^{11} - z_y \Sigma_{t\theta}^{21} + z_x \Sigma_{t\theta}^{11} + \Sigma_{tt}^{12} \\ -z_x z_y \Sigma_{\theta\theta}^{11} - z_y \Sigma_{t\theta}^{21} + z_x \Sigma_{t\theta}^{11} + \Sigma_{tt}^{12} & z_x^2 \Sigma_{\theta\theta}^{11} + 2z_x \Sigma_{t\theta}^{21} + \Sigma_{tt}^{22} \end{bmatrix}$$

Nous considérons que :

$$e(z) \sim \mathcal{N}_2(0, \Sigma_e(z))$$

Dans le cadre de la régression linéaire cela se traduit par :

$$e(z) = -(z\hat{\beta} - z\beta)$$

Donc

$$z\hat{\beta} \sim \mathcal{N}_2(z\beta, \Sigma_e(z))$$

$$\left(Y_0 - \hat{\beta}' z_0\right)' \left(\Sigma_e(z) + \Lambda\right) \left(Y_0 - \hat{\beta}' z_0\right) \le \left(\frac{m(n-r-1)}{n-r-m}\right) F_{m,n-r-m}(\alpha)$$