Домашнее задание по теории вероятностей

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

24 сентября 2017

Задача 1

В городе здоровых горожан больше половины, богатых горожан больше половины и есть хотя бы один умный горожанин, причем богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы. Докажите, что найдется богатый, здоровый и умный горожанин.

Определимся с вероятностным пространством. Элементарным исходом $w = (w_1, w_2, w_3)$ – будет три количественных значения для каждого признака (количество здоровых людей и т.д.). Мощностью вероятностного пространства будет количество всех таких возможных троек. За событие A оботзначим, что человек здоровый, а B и C – что богатый и умный соответственно. Покажем, что вероятность того, что человек богатый при условии того, что он умный, больше половины, а значит, и что среди умных людей богатых будет больше половины.

$$P(B|C) = P(B) \text{ (Из независимости этих событий) } P(B|C) > \frac{1}{2}$$

Аналогичное соотношение получим и для вероятности события того, что человек здоровый, при условии того, что он умный:

$$P(A|C) = P(A) > \frac{1}{2}$$

Таким образом из независимости событий мы получили то, что среди умных людей больше половины людей здоровы и больше половины богаты. По принципу Дирихле получаем, что хотя бы один человек среди умных будет и здоров, и богат. Что по сути нам и требовалось доказать.

Задача 2

Случайным образом выбираем из $\{1, 2, ..., n\}$ одно число. Событие A – выбранное число делится на 2, событие B – выбранное число делится на 5. Найдите все n такие, что события A и B независимы.

Для начала определимся с вероятностным пространством. Элементарным исходом будет $w = (w_i)$ – одно из чисел от 1 до n. Мощность вероятностного пространства будет совпадать с количеством чисел в данном промежутке, т.е. $|\Omega| = n$.
Количество чисел, кратных двум в данном промежутке будет равно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, а кратным пяти – $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$. Обозначим события: число кратно 2 и число кратно 5 как A и B. Тогда:

$$P(A) = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$$

$$P(B) = \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}{n}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\lfloor \frac{n}{10} \rfloor}{n}$$

Для того, чтобы эти события были независимы, необходимо следующее:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{\lfloor \frac{n}{10} \rfloor}{n} = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} \cdot \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}{n}$$

$$n \lfloor \frac{n}{10} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{5} \rfloor \quad (*)$$

Для того, чтобы найти такие n, достаточно перебрать все возможные остатки при делении на 10 и проверить условие (*). ($k \in \mathbb{N}$)

$$n = 10k; \quad 10k \cdot k = 5k \cdot 2k \ - \text{ События независимые}$$

$$n = 10k+1; \quad (10k+1) \cdot k \neq 5k \cdot 2k - \text{ События зависимые}$$

$$n = 10k+2; \quad (10k+2) \cdot k = (5k+1) \cdot 2k \ - \text{ События независимые}$$

$$n = 10k+3; \quad (10k+3) \cdot k \neq (5k+1) \cdot 2k \ - \text{ События зависимые}$$

$$n = 10k+4; \quad (10k+4) \cdot k = (5k+2) \cdot 2k \ - \text{ События независимые}$$

$$n = 10k+5; \quad (10k+5) \cdot k \neq (5k+2) \cdot (2k+1) \ - \text{ События зависимые}$$

$$n = 10k+6; \quad (10k+6) \cdot k \neq (5k+3) \cdot (2k+1) \ - \text{ События зависимые}$$

$$n = 10k+7; \quad (10k+7) \cdot k \neq (5k+3) \cdot (2k+1) \ - \text{ События зависимые}$$

$$n = 10k+8; \quad (10k+8) \cdot k \neq (5k+4) \cdot (2k+1) \ - \text{ События зависимые}$$

$$n = 10k+9; \quad (10k+9) \cdot k \neq (5k+4) \cdot (2k+1) \ - \text{ События зависимые}$$

Кроме того, нужно рассмотреть случаи, когда $n < 10$ Тогда либо число меньше 2, либо 5. (Из вероятности пересечения событий, которая равна нулю). Подходят числа 1, 2, 3 и 4. Однако 2 и 4 мы описали формулой ранее (Возьмем, что 0 - натуральное число). Обобщим, найденное ранее.
Ответ: $\{1;3\} \cup \{n = 10k : \quad k \in \mathbb{N}\} \cup \{n = 10k+2 : \quad k \in \mathbb{N}\} \cup \{n = 10k+4 : \quad k \in \mathbb{N}\}$

Задача 3

Новичок играет три партии в теннис против двух противников: слабого и сильного. Он должен победить в двух партиях подряд. Порядок партий может быть следующий: слабый - сильный - слабый или сильный - слабый - сильный. Вероятность победить слабого p, вероятность победить сильного q, $q < p$. Результаты партий независимы в совокупности. Какой вариант предпочтительней для новичка и какова вероятность выиграть?

В данной задаче вероятность некоторых событий уже посчитана, поэтому не будем акцентировать внимание на построении вероятностного пространства (так как может быть несколько вариантов), а обратим внимание на независимость этих событий.
Для начала рассмотрим следующий вариант для порядка партий: слабый-сильный-слабый. Посчитаем вероятность того, что игрок выиграет при таком раскладе. Используем то, что результаты партий независимы в совокупности, это значит, что они как попарно независимы, так и тройкой тоже. За события A, B, C обозначим выигрыш в первой, второй и третьей партии соответственно, а за событие D – выигрыш новичка. По формуле включений-исключений:

$$P(D) = P(A \cap B) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Из независимости этих событий в совокупности:

$$P(D) = p \cdot q + p \cdot q - p^2 \cdot q = pq(2-p)$$

Хорошо, теперь рассмотрим вариант: сильный - слабый - сильный. За события A', B', C' обозначим выигрыш в первой, второй и третьей партии соответственно, а за событие D' – выигрыш новичка. Аналогично предыдущему подпункту получаем:

$$P(D') = P(A' \cap B') + P(B' \cap C') - P(A' \cap B' \cap C')$$

$$P(D') = p \cdot q + p \cdot q - p \cdot q^2 = pq(2-q)$$

Достаточно легко заметить, что $pq(2-p) < pq(2-q)$ из того, что $q < p$. Таким образом для новичка будет предпочтительнее вариант: сильный - слабый - сильный.