Домашнее задание по теории вероятностей

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

30 сентября 2017

Задача 1

При исследовании больного имеется подозрение на одно из трех заболеваний A_1, A_2 и A_3, а их вероятности в данных условиях равны p_1 = 1/2, p_2 = 1/6 и p_3 = 1/3 соответственно. Для уточнения диагноза назначен некоторый анализ, дающий положительный результат с вероятностью 0,1 в случае A_1, с вероятностью 0,2 в случае A_2, и с вероятностью 0,9 в случае A_3. Анализ был произведен пять раз и дал четыре раза положительный результат и один раз отрицательный. Какова вероятность каждого заболевания после анализа?

Заметим, что события A_1, A_2 и A_3 не зависимы и их вероятности в сумме дают 1 - то есть их объединение и составляет все вероятностное пространство. Найдем вероятность положительного результата анализа. Для этого воспользуемся формулой полной вероятности (на самом деле она понадобится потом, когда мы будем добавлять в формулу Байеса схему Бернулли):

$$P(+) = P(+|A_1)P(A_1) + P(+|A_2)P(A_2) + P(+|A_3)P(A_3) = \frac{2,3}{6}$$

Запишем формулу Байеса:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Так как у нас проводилось несколько независимых испытаний, мы можем воспользоваться схемой Бернулли, чтобы вычислить P(B|A) – где B – это 4 положительных результата и один отрицательный, а A – это какое-либо заболевание. Запишем предыдущую формулу с учетом схемы Бернулли:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)^4(1 - P(B|A))}{\sum_{i=1}^{3}(P(A_i)P(B|A_i)^4(1 - P(B|A_i)))}$$

Подставим числовые значения в предыдущую формулу (учитывая то, что $P(B|A_i) = p_i$ (из условия)) Тогда:

$$P(A_1|B) \approx 0,002$$

$$P(A_2|B) \approx 0,009$$

$$P(A_3|B) \approx 0,99$$

Задача 2

Проводятся N испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха 1/2. Какова вероятность, что успех имел место ровно 2 раза при условии, что за все N испытаний было четное число успехов?

Определимся с вероятностным пространством. Множеством элементарных исходов будут все двоичные последовательности длины N. Его мощность будет равна $|\Omega| = 2^N$.
Еще для начала определимся, что мы будем называть событиями A – дважды успех среди N испытаний и B – четное количество успехов. Нам понадобится формула условной вероятности:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Найдем $P(B)$. На самом деле, количество вариантов с четным количеством успехов будет совпатать с количеством вариантов, когда успехов нечетное количество. (Можно провести биекцию между ними - давайте менять исход последнего испытания. Как раз изменится четность и будет возможность установить взаимное соответствие). Таким образом, P(B)=1/2.
Теперь найдем $P(A \cap B)$. Заметим, что в данной задаче $P(A \cap B) = P(A)$, так как успех дважды гарантирует четное количество успехов, а пересечение A и B и есть A. Найдем же тогда $P(A)$. Количество вариантов с двумя успешными исходами: C_N^2. И их вероятность (исходя из того, что исходы испытаний независимы – воспользуемся схемой Бернулли): P(2 успеха (зафиксированных по номерам испытаний)) $=(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})^{N-2} = \frac{1}{2^N}$. Таким образом, вероятность двух успехов из N испытаний равна: $\frac{C_N^2}{2^N}$. Получаем:

$$P(A|B) = \frac{\frac{C_N^2}{2^N}}{\frac{1}{2}} = \frac{C_N^2}{2^{N-1}}$$

Задача 3

Для последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха p найдите вероятность того, что m успехов произойдут прежде, чем n неудач.

Для того, чтобы m успехов произошли раньше, чем n неудач, достаточно, чтобы среди первых m+n-1 испытаний было не менее, чем m успехов. Заметим, что варианты, когда количество успехов больше чем m нас тоже устраивают. Воспользуемся схемой Бернулли и просуммируем вероятности тех вариантов, которые будут соответствовать нашему условию. Получаем:

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} C_{m+n-1}^k (p)^k (1-p)^{n+m-1-k}$$