Домашнее задание по теории вероятностей

Родигина Анастасия, 167 группа

10 сентября 2017

Задача 1

Двадцать детей, среди которых десять мальчиков и десять девочек, садятся за круглый стол случайным образом выбирая места. Какова вероятность того, что дети сядут чередуясь: мальчик, девочка, мальчик, девочка?

Для начала построим вероятностное пространство. Элементарным исходом будет $w = (w_1, w_2 ...)$, где w_i - номер стула, на котором сидит $i-$ый ребенок. Множеством исходов будет множество перестановок длины 20 (рассаживаем детей по 20 стульям). Таким образом, $|\Omega| = 20!$. Нас будут интересовать те перестановки, в которых будут чередоваться мальчики и девочки. В моей модели буду считать, что мальчики и девочки не являются одинаковыми между собой, так как речь идет о людях, а не о шариках.
Выберем произвольный стул (для удобства) и с него начнем рассадку детей. (По факту это равносильно тому, что мы нумеруем стулья и смотрим, что мальчики должны сидеть на четных, а девочки на нечетных номерах стульев и наоборот)
Найдем мощность множества интересующих нас событий. Пусть на выбранном стуле сидит девочка. Окей, тогда на нечетных стульях (относительно того магического стула) должны сидеть мальчики, а на четных - девочки. Получаем количество вариантов равное $(10!)^2$. Аналогичная ситуация будет, если мы посадим на выбранный стул девочек (так как девочка и мальчик на выбранном стуле - события независимые, количество вариантов складывается). Получаем:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 * (10!)^2}{20!}$$

Задача 2

Из 20 ученых, среди которых 12 физиков и 8 математиков, отобрали 9 для работы в новой лаборатории. Какова вероятность того, что в лаборатории работают шесть математиков и трое физиков? Какова вероятность того, что отбор в лабораторию оказался еще более несправедливым по отношению к физикам?

Определимся с вероятностным пространством. Элементарным исходом будет $w = (w_1, w_2 ...)$, где w_i - номер ученого, который попал в лабораторию. Множеством исходов будет множество наборов длины 9 из 20 человек. Таким образом, мощность множества исходов будет равна:

$$|\Omega| = C_{20}^9$$

Найдем количество исходов, удовлетворяющих условию: 6 математиков и 3 физика (выбираем без повторений и учета порядка группу из трех физиков и группу из 6 математиков):

$$C_{12}^3 \times C_8^6$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{C_{12}^3 \times C_8^6}{C_{20}^9}$$

Теперь найдем вероятность того, что физиков в новой лаборатории будет еще меньше (2 или 1, при этом хотя бы один физик в лаборатории точно будет, потому что математиков всего 8). Мощность множества исходов очевидно не изменится, теперь найдем количество исходов, которые удовлетворяют новому условию. Либо выбирается один физик, либо два (без повторений и учета порядка):

$$C_{12}^1 \times C_8^8 + C_{12}^2 \times C_8^7$$

Тогда получаем вероятность:

$$P(B) = \frac{C_{12}^1 \times C_8^8 + C_{12}^2 \times C_8^7}{C_{20}^9}$$

Задача 3

Десять человек сели в лифт на цокольном этаже дома, в котором четыре этажа. Каждый человек на каком-то этаже выходит, но этаж выбирает случайным образом. Какова вероятность того, что на каждом этаже кто-нибудь выйдет?

Построим вероятностное пространство. Элементарным исходом будет $w = (w_1, w_2...)$, где w_i - количество людей на i-м этаже. Множеством исходов будет распределение людей по четырем этажам (для каждого человека будет 4 варианта, а людей всего 10), тогда:

$$|\Omega| = 4^{10}$$

Гораздо удобнее будет посчитать вероятность того, что хотя бы на одном этаже никто не выйдет. Обозначим это событие за $\overline{A}$, а также учтем тот факт, что

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Посчитаем количество исходов, когда ровно один этаж остается "пустым". Тогда остается распределить всех людей по остальным трем этажам. (Теперь для каждого человека остается ровно 3 варианта этажа):

$$4 \times 3^{10}$$

. Теперь посчитаем количество исходов, когда "пустыми" остается 2 этажа (возможных комбинаций 2 свободных этажей - $C_4^2 = 6$, а людей остается распределить по 2 этажам):

$$6 \times 2^{10}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда люди все выйдут на одном этаже, таких вариантов ровно 4. Воспользуемся формулой включений-исключений:

$$|\overline{A}| = 4 \times 3^{10} - 6 \times 2^{10} + 4$$

Тогда

$$P(A) = 1 - \frac{4 \times 3^{10} - 6 \times 2^{10} + 4}{4^{10}}$$