Домашнее задание по теории вероятностей

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

19 ноября 2017

Задача 1 (Задача 1c в 6 листке)

Боб загадал случайным образом число от 0 до 4. Алиса получает свое число так: подкидывает монетку и в случае орла прибавляет к числу Боба 1, а в случае решки вычитает 1 (всё по модулю 5). Найдите распределение каждого из полученных чисел, а также их совместное распределение.

Найдем распределение каждого из полученных чисел. Для Боба распределение:

ξ	0	1	2	3	4
$P_B(\xi)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

И для Алисы: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0.2$. (Она может набрать каждое число двумя способами)

η	0	1	2	3	4
$P_B(\eta)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Запишем их совместное распределение (b – число, выпавшее Бобу, a – значения для результата у Алисы (вероятность, что числа различаются на 1 равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$):

$$\begin{cases} 0, & |b-a| \neq 1 \ (\ mod\ 5) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0.1, & |b-a| \equiv 1 \ (\ mod\ 5) \end{cases}$$

η/ξ	0	1	2	3	4
0	0	0.1	0	0	0.1
1	0.1	0	0.1	0	0
2	0	0.1	0	0.1	0
3	0	0	0.1	0	0.1
4	0.1	0	0	0.1	0

.

Задача 2 (Задача 4 в 6 листке)

Существуют ли независимые случайные величины X и Y такие, что каждая из них не является константой с вероятностью единица и $X^2 + Y^2 \equiv 1$

Приведем следующий пример. Пусть $X = \frac{1}{2}$ с вероятностью 1/18098 и $X = -\frac{1}{2}$ с вероятностью 1 - 1/18098.
$Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ с вероятностью 1/1698 и $Y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ с вероятностью 1 - 1/1698.
Достаточно очевидно, что эти величины независимы и $X^2 + Y^2 = 1$

Задача 3 (Задача 6 в 6 листке)

Из треугольника {x>0, y>0, x+y<1} случайно выбирается точка (x, y). Найдите функции распределения и плотности случайных величин $\xi(x, y) = x$, $\eta(x, y) = y$. Являются ли эти случайные величины независимыми?

Функция распределения случайной величины $\xi(x, y) = x$ равна отношению площади трапеции с основаниями 1, (1 x) и высотой x к площади треугольника:

$$P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 1 \\ x \cdot (1 + 1 - x), & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Запишем плотность случайной величины:

$$(P(\xi \leq x))' = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 1 \\ (x \cdot (1 + 1 - x))' = 2 - 2x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Аналогичное сделаем для η

$$P(\eta \leq y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 1, & y \geq 1 \\ y \cdot (1 + 1 - y), & y \in [0, 1] \end{cases}$$

Запишем плотность случайной величины:

$$(P(\eta \leq y))' = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 0, & y \geq 1 \\ (y \cdot (1 + 1 - y))' = 2 - 2y, & y \in [0, 1] \end{cases}$$

Найдем совместное распределение: треугольника:

$$P(\xi \leq x, \eta \leq y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0, & y \leq 0 \\ 1, & x \geq 1, \ y \geq 1 \\ x \cdot (1 + 1 - x), \ x \in [0, 1], & y \geq 1 \\ y \cdot (1 + 1 - y), \ y \in [0, 1], & x \geq 1 \\ 2x + x^2 - 1 + 2y^2, \ x \in [0, 1], \ y \in [0, 1] \end{cases}$$

По последней строке видно, что эти события не являются независимыми