Домашнее задание по теории вероятностей

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

1 декабря 2017

Задача 1 (Задача 6 в 7 листке)

Монету, с вероятностью выпадения "Орла" p, бросают до первого выпадения "Орла". Найдите математическое ожидание и дисперсию числа подбрасываний в случае (a) число бросаний не более N, причем N-е бросание считается успешным при любом исходе, (b) число бросаний неограниченно.

a) Найдем математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{N-1} k(1-p)^{k-1} \cdot p + N(1-pp)^{N-1} \cdot p + N(1-p)^N = \sum_{k=1}^{N} k(1-p)^{k-1} \cdot p + N(1-p)^N$$

Свернем следующую часть формулы (как сумму геометрической прогрессии, члены которой тоже являются геом прогрессии), используя следующее наблюдение:

$$\sum_{k=1}^{N} k(1-p)^{k-1} = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + .. + (1-p)^N +$$
$$+ (1-p) + (1-p)^2 + .. + (1-p)^N +$$
$$+ (1-p)^2 + .. + (1-p)^N +$$
$$+ ...... =$$
$$= \frac{1(1-(1-p)^N)}{p} + \frac{(1-p)(1-(1-p)^{N-1})}{p} + .. = \frac{(1-(1-p)^N)}{p} =$$
$$= \frac{1-(1-p)^N(Np+1)}{p^2}$$

Отсюда получаем:

$$(*) \;\; \mathbb{E}(\xi) = \frac{1-(1-p)^N(Np+1)}{p} + N(1-p)^N = \frac{1-(1-p)^N}{p}$$

Теперь запишем нашу дисперсию:

$$\mathbb{D}(\xi) = \sum_{j=1}^{N-1} (j-\mathbb{E})^2(1-p)^{j-1}p + (1-p)^{N-1}(N-\mathbb{E})^2$$

b) (из (*) и того, что |p-1|<1)

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \cdot p \to \frac{1}{p}$$

Тогда запишем дисперсию, используя предыдущее утверждение:

$$\mathbb{D}(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty}(j - 1/p)^2(1-p)^{j-1}p \to \frac{1-p}{p^2}$$

Задача 2 (Задача 1 в 8 листке (первые два пункта))

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ,имеющей следующее распределение:
(i) равномерное на отрезке[a, b];
(ii) экспоненциальное с параметром λ (т.е. $\rho_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t} Ind_{t>0}(t)$)

Для начала, оговорю, что $\lambda > 0$, чтобы интегралы сходились и матожидание существовало
(i)
По определению:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_\xi(x)dx$$

Таким образом:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} xdx + \int_{b}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Найдем дисперсию:

$$\mathbb{D}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho_\xi(x)dx - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b - \frac{(b^2-a^2)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3} + \frac{(b^2-a^2)}{4}$$

(ii)
Найдем матожидание:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot (x)dx + \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -xe^{-\lambda x}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx =$$

$$= -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

И теперь найдем дисперсию:

$$\mathbb{D}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho_\xi(x)dx - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \int_0^\infty x^2\rho_\xi(x)dx - (\mathbb{E}(\xi))^2 = -x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx - \mathbb{E}(\xi) =$$

$$= -\frac{2e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\bigg|_0^\infty - \frac{2xe^{-\lambda x}}{\lambda}\bigg|_0^\infty - \mathbb{E}(\xi) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Задача 3 (Задача 2 пункты b, c в 8 листке)

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины,распределение которой задано плотностью:
b) $\rho(x) = \frac{1}{2}e^{|x|}$
c) $\rho(x) = \sin(x)$ при $x \in [0, \pi/2]$ и $\rho(x) = 0$ иначе

b)

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\rho_\xi(x)dx + \int_{0}^{\infty} x\rho_\xi(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} xe^{x}dx = -\frac{1}{2}e^{-x}x\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-x} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} xe^{x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x}(x+1)\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}e^{x}(x-1)\Big|_{0}^{\infty}$$

Этот интеграл расходится, а , значит и матожидание неопределено
c)

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\rho_\xi(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} x\rho_\xi(x)dx + \int_{\pi/2}^{\infty} x\rho_\xi(x)dx =$$

$$\int_{0}^{\pi/2} x\sin(x)dx = (-x\cos x)\Big|_{0}^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2}\cos x dx = \sin x\Big|_{0}^{\pi/2} = 1$$

Теперь найдем дисперсию:

$$\mathbb{D}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho_\xi(x)dx - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \int_{)}^{\pi/2} x^2\sin x dx - 1 =$$

$$= (-x^2\cos x)\Big|_{0}^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2} x\cos x dx - 1 = 2x\sin x\Big|_{0}^{\pi/2} + 2\cos x\Big|_{0}^{\pi/2} - 1 = \pi - 2 - 1 = \pi - 3$$