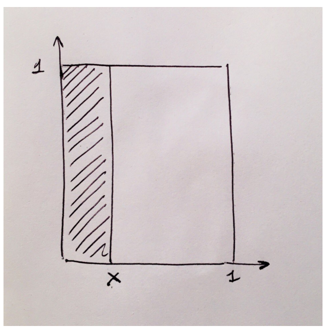
Домашнее задание по теории вероятностей

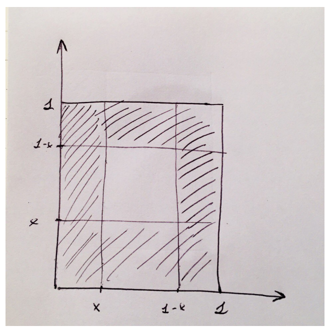
Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

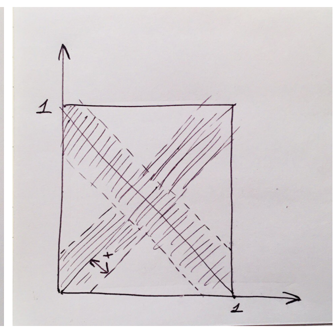
4 октября 2017

Задача 1 (Задача 8 в листочке)

В квадрат со стороной 1 брошена точка. Пусть $x > 0$. Найти вероятность того, что (a) расстояние от точки до фиксированной стороны квадрата не превосходит x, (b) расстояние от точки до ближайшей стороны квадрата не превосходит x, (c) расстояние от точки до диагоналей квадрата не превосходит x?







Воспользуемся этими рисунками в дальнейшем (на рисунке $0 < x < 1$ - но это необязательно, потом мы обязательно это учтем!). За события А,В и С обозначим соответственные пункты задачи. За $S_\bullet$ и $S_\square$ обозначим площади закрашенной области и всего квадрата соответственно.

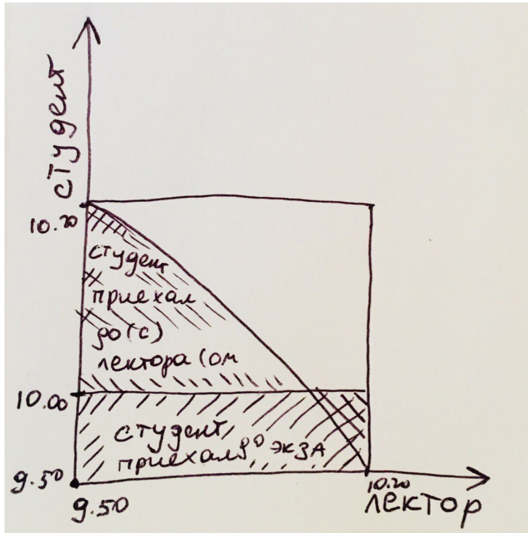
$$P(A) = \frac{S_\bullet \cap S_\square}{S_\square} = \frac{(x \times 1) \cap (1 \times 1)}{1 \times 1} = min\{x, \ \ 1\}$$

$$P(B) = \frac{S_\bullet \cap S_\square}{S_\square} = \begin{cases} \frac{1\times 1 - (1-2x)^2}{1 \times 1}, & x \le \frac{1}{2}, \\ 1, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P(C) = \frac{S_\bullet \cap S_\square}{S_\square} = \begin{cases} \frac{S_\square - 4S_\triangle}{S_\square} = \frac{1 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-2\sqrt{2}x)(\frac{1}{2}-\sqrt{2}x)}{1} = \frac{4\sqrt{2}x - 8x^2}{1}, & \frac{1}{2} > \sqrt{2}x \\ 1, & \frac{1}{2} < \sqrt{2}x \end{cases}$$

Задача 2 (Задача 9 в листочке)

Студент К. хочет успеть к началу экзамена в 10.00, и решил приехать заранее к 9.50. Однако К. едет на электричке, и в этот день из-за раннего снега все электрички задержива- ются от 0 до 30 минут. Найдите вероятность, что К. успеет к началу экзамена, если экзамен без лектора не начнется, а лектор сам едет на электричке к 9.50. Опоздания К. и лектора считать независимыми.

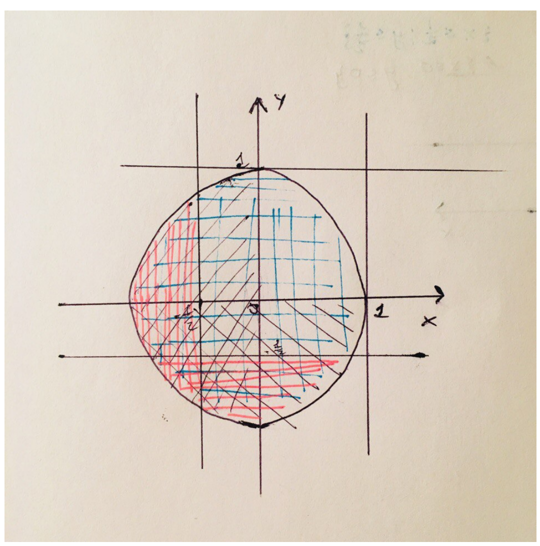


Обратим внимание на рисунок. На каждой оси шкала от 9.50 до 10.20 - самое позднее время приезда каждого из участников. Таким образом, $|\Omega| = S_\square = 30 \times 30$. Заметим, что если студент приедет до 10 часов (вне зависимости от времени прибытия лектора) – он успеет. То есть, вся облась, когда x<10.00 нам подходит. Кроме того, если студент приедет раньше, чем преподаватель (y<x), то он тоже успеет. Посчитаем исходную вероятность события K - студент успел на экзамен:

$$P(K) = \frac{S_\bullet}{S_\square} = \frac{10 \times 30 + 20 \times 20/2}{30 \times 30} = 0,(5)$$

Задача 3 (Задачка 10 в листочке)

Точка (x, y) выбирается из единичного круга $x^2 + y^2 \leq 1$ согласно равномерному распределению. Для всех a найдите вероятность того, что $x \leq a$. Выясните при a = -1/2, a = 0 и a = 1 являются ли события $\{x \leq a\}$ и $\{y \leq a\}$ независимыми?



Найдем вероятность того, что $x \le a$.

$$P(x \le a) = \frac{S_\bullet \cap S_\circ}{S_\circ} = max\{0;\ 2\int_{-1}^{min\{a,1\}} \sqrt{1-x^2}dx\} = max\{0;\ 2\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}x + \frac{1}{sinx}\right)\Big|_{-1}^{min\{a,1\}}\right)\}$$

Дополнительно укажем факт,что при $a \le 0$ наша вероятность будет равна нулю. (Наш интеграл означает, что мы считаем площадь одной половинки графика от -1 до а, а потом мы, умножая на два, считаем закрашенную область) – таким образом я постаралась избежать рассмотрения всех случаев относительно а.
Теперь рассмотрим наши события на независимость при разных значениях а.
1) а = 1.

$$P(y \le 1) = \frac{S_\bullet}{S_\circ} = 1$$

$$P(x \le 1) = \frac{S_\bullet}{S_\circ} = 1$$

$$P(y \le 1 \wedge x \le 1) = \frac{S_\bullet}{S_\circ} = 1 = P(y \le 1) \cdot P(x \le 1)$$

Отсюда, можно сделать вывод, что эти события независимы.
2) а= 0

$$P(y \le 0) = \frac{S_\bullet}{S_\circ} = \frac{1}{2}$$

$$P(x \le 0) = \frac{S_\bullet}{S_\circ} = \frac{1}{2}$$

$$P(y \le 0 \wedge x \le 0) = \frac{S_\bullet}{S_\circ} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(y \le 0) \cdot P(x \le 0)$$

Эти события также являются независимыми.
3) $a = -\frac{1}{2}$. Для подсчета следующих вероятностей воспользуемся интегралом, написанным ранее:

$$P(x \le -1/2) = 2\int_{-1}^{-1/2} \sqrt{1-x^2}dx \cdot \left(\frac{1}{\pi \cdot 1 \cdot 1}\right) = 2\frac{-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{pi}{6}}{pi} \approx \frac{2 \cdot 0.307}{3.1415} \approx 0,195$$

Достаточно легко заметить из равенства площадей, что $P(x \le -1/2) = P(y \le -1/2)$. Площадь $P((x \le a) \wedge (y \le a))$ Будет равна по модулю разности четверти круга, квадрата со стороной 1/2, и одной закрашенной площади. (увидеть это можно будет на рисунке): Таким образом получаем:

$$P((x \le a) \wedge (y \le a)) \approx \frac{|\pi/4 - 2 \cdot 0.307 - 1/4|}{\pi} \approx 0.025 \ne 0,038 = 0,195 \cdot 0,195 = P(x \le -1/2) \cdot P(y \le -1/2)$$

Из данного соотношения получаем зависимость данных значений