Домашнее задание по теории вероятностей

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

30 ноября 2017

Задача 1

Случайные величины ξ, η, ζ независимы и имеют (a) равномерное распределение на [0,1], (b) показательное распределение с параметром λ >0 (т. е.плотность распределения имеет вид $\lambda e^{-\lambda x}$ Indx>0(x)). Найдите плотности распределениядля случайных величин: $\xi - \eta$, $|\xi - \eta|$, ξ/η, $\xi + \eta + \zeta$, $\xi/(\eta + \zeta)$

1) ξ/η

$$\rho_\xi = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \rho_\eta = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Из независимости получаем следующее:

$$\rho_{\xi\eta}(x,y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1],\ y \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Так как распределение нормальное, мы можем воспользоваться геометрической вероятностью:

$$F_{\xi/\eta} = P((x,y) \mid x \le yt)(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{t}{2}, & t \in [0,1] \\ 1 - \frac{1}{2t}, & t \ge 1 \end{cases}$$

Отсюда найдем функцию плотности распределения:

$$\rho_\eta/\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{1}{2}, & t \in [0,1] \\ -\frac{1}{2t^2}, & t \ge 1 \end{cases}$$

2)**a)** ξ/η

$$\rho_\xi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \rho_\eta = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\rho_{\xi,\eta}(x,y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Нам интересны только случаи, когда x>0, y>0, иначе вероятность будет равна 0 и плотность равна 0. Рассмотрим их:
$t > 0$:
$x \in [0, \infty]$
$y \in [x/t, \infty]$
Из этого следует следующее (интегралы не будем расписывать для экономии времени, если нужно их прислать, пришлю):

$$F_{\xi/\eta} = \int_0^\infty \int_{x/t}^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy = -\frac{t}{t+1}$$

При $t < 0$, функция распределения обратится в 0
b) $\xi - \eta$**:**

$$\rho_\xi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \rho_\eta = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\rho_{\xi\eta}(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Нам интересен случай, когда $x > 0$ и $y > 0$ по причине, описанной ранее. Таким образом:
(*) $t > 0$:
Разобъем наши x и y на две области. 1) $x \in [0, t]$ и $y \in [0, \infty]$ 2) $x \in [t, \infty]$, $y \in [x-t, \infty]$. (Первоначально хотелось бы взять, $x \in [0, \infty], y \in [max\{o, x - t\}, \infty]$, но это сложно, поэтому мы и выкручиваемся)

$$F_{\xi-\eta} = \int_0^t \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy + \int_t^\infty \int_{x-t}^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} + \lambda + \frac{e^{-\lambda t}}{2}$$

(**) t < 0
Для данных значений t, выкручиваться не надо, поэтому:
$x \in [0, \infty)$
$y \in [x - t, \infty]$

$$F_{\xi-\eta} = \int_0^\infty \int_{x-t}^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy = \frac{e^{\lambda t}}{2}$$

c) $\xi + (\eta + \zeta) = \xi + \eta'$
Это мы частично разбирали на паре, окей, что мы знаем:

$$\rho_{\xi,\eta'} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \lambda^2 y e^{-\lambda y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдем функцию распределения:
$x \in [0, t]$
$y \in [0, t - x]$

$$F_{\xi+\eta'} = \int_0^t \int_0^{t-x} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \lambda^2 y e^{-\lambda y} dxdy = \frac{1}{2} \lambda t e^{-\lambda t}(\lambda t + 2) + e^{-\lambda t} - 1$$

d) $\frac{\xi}{\eta+\zeta} = \xi/\eta'$

$$\rho_{\xi,\eta'} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \lambda^2 y e^{-\lambda y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдем функцию распределения:
$x \in [0, \infty]$
$y \in [x/t, \infty]$

$$F_{\xi+\eta} = \int_0^t \int_0^{x/t} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \lambda^2 y e^{-\lambda y} dxdy = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2}$$

e) $|\xi - \eta|$

$$\rho_\xi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \rho_\eta = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\rho_{\xi\eta}(x,y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдем функцию распределения:
$t > 0$
Опять разделим на части: 1)$x \in [0, t]$ и $y \in [0, x+t]$ и 2) $x \in [t, \infty]$ и $y \in [x-t, x+t]$:

$$F_{|\xi-\eta|} = \int_0^t \int_0^{x+t} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy + \int_t^\infty \int_{x-t}^{x+t} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dxdy = -e^{-\lambda t} + 1 - \frac{e^{-3\lambda t}}{2} + \frac{e^{-\lambda t}}{2} + \frac{1}{2}(e^{\lambda t} - 1)e^{-3\lambda t}$$