Домашнее задание по теории вероятностей

Родигина Анастасия, 166 группа

10 сентября 2017

Задача 1

Из множества $\{1, 2, ..., 100\}$ *без возвращения по очереди выбирают три различных числа. Найдите условную вероятность того, что третье число лежит между первым и вторым, при условии, что первое число меньше второго.*

Для начала построим вероятностное пространство. Заметим, что результатом выбора трех чисел обязательно будет упорядоченная тройка попарно различных чисел. Первое, второе и третье выбранное число обозначим за x_1, x_2, x_3. Перечислим всевозможные варианты их отношения (больше или меньше относительно друг друга).

$$x_1 < x_2 < x_3$$

$$x_1 < x_3 < x_2$$

$$x_2 < x_1 < x_3$$

$$x_2 < x_3 < x_1$$

$$x_3 < x_1 < x_2$$

$$x_3 < x_2 < x_1$$

Равновероятны ли они? На самом деле да, так как по факту для любой выбранной тройки различных чисел, любой такой вариант получается их перестановкой (а все перестановки равновероятны). Теперь посчитаем вероятности:

$$P(x_2 > x_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P((x_2 > x_1)\ \ \&\&\ (\ x_3\ is\ between\ x_2\ and\ x_1)) = \frac{1}{6}$$

По формуле условной вероятности:

$$P((\ x_3\, is\, between\, x_2\, and\, x_1)|(x_2 > x_1)) = \frac{P((x_2 > x_1)\ \ \&\&\ (\ x_3\ is\ between\ x_2\ and\ x_1))}{P(x_2 > x_1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Задача 2

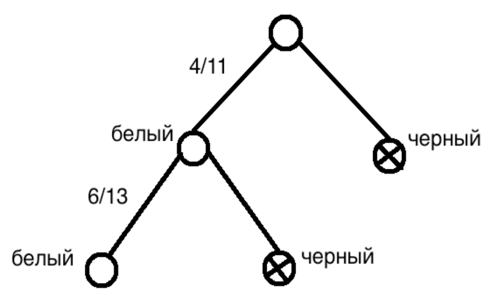
В коробке 4 белых и 7 черных шариков. Случайным образом извлекается шар. Этот шар возвращается обратно и добавляется еще 2 шара одного с ним цвета. (a) Найдите вероятность того, что при двух извлечениях шаров выбраны два белых шара.

(б) Найдите вероятность того, что при двух извлечениях шаров выбраны один черный шар и один белый шар.

(в) Найдите вероятность того, что при $n + m$ извлечениях появилось n белых и m черных шаров.

(г) Докажите, что вероятность извлечения белого шара на k-м шаге равна $a/(a + b)$.

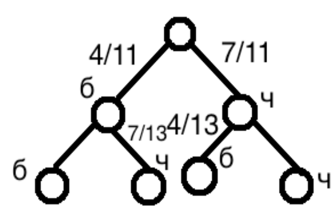
(а) Воспользуемся методом деревьев, только будем на ребрах писать вероятности. Поясню, откуда берутся эти дроби на ребрах. В знаменателе количество всех возможных исходов (можно выбрать любой из 11 шаров), а в числителе - только те варианты, которые нам подходят - 4 белых шара. 6/13 получается аналогичным способом (теперь 13 шаров всего и из них 6 белых, внимание на предыдущие наши действия не обращаем, так как это все учтется при подсчетевероятности с помощью дерева).



Теперь посчитаем искомую вероятность

$$P = \frac{6}{13} \times \frac{4}{11} = \frac{24}{143}$$

(б) Решим этот пункт аналогично предыдущему (я стараюсь не объяснять все очень подробно, так как мы это делали это на семинаре)



$$P = \frac{4}{11} \times \frac{7}{13} + \frac{7}{11} \times \frac{4}{13} = \frac{56}{143}$$

(в) Пусть сначала выпадет n белых, а потом m черных шаров. Найдем вероятность этого события:

$$P(A) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+c}{a+b+c} \cdot ... \cdot \frac{a+(n-1)c)}{a+b+(n-1)c} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{b+(m-1)c}{a+b+(m-1)c}$$

Теперь постараемся доказать эту формулу по индукции. База доказывалась на семинаре, поэтому сэкономлю время.
Элементарным исходом будет n+m шаров белого и черного цвера после этих операций. Используем формулу полной вероятности.

$$P(n-m) = P(n-m|(n--1)-m)P((n-1)-m)+P((n-m)|n-()m-1)P(n-(m-1)) =$$

$$= \frac{a+(n-1)c}{a+b+c(n+m-1)} \cdot C_{n+m-1}^{n-1} \cdot \frac{a(a+c)\cdot..\cdot(a+(n-1)c)b(b+c)\cdot..\cdot(b+(m-1)c)}{(a+b)\cdot..\cdot(a+c(n+m-2))} +$$
$$\frac{b+(n-1)c}{a+b+c(n+m-1)} \cdot C_{n+m-1}^{n} \cdot \frac{a(a+c)\cdot..\cdot(a+(n-1)c)b(b+c)\cdot..\cdot(b+(m-2)c)}{(a+b)\cdot..\cdot(a+c(n+m-2))}$$

Что и требовалось доказать (г) Докажем данное утверждение по индукции.
База индукции: k=1, всего шаров a+b, среди них белых a. Тогда искомая вероятность - $\frac{a}{a+b}$.
Рассмотрим еще случай, когда мы достали два шара.
Для начала рассмотрим случай, когда первый извлеченный шар – белый. Тогда вероятность извлечь новый белый шар будет равна $\frac{a+c}{a+b+c}$. Тогда вероятность того, что на первых двух шагах мы извлекли 2 белых шара равна: $\frac{a(a+c)}{(a+b)(a+b+c)}$.
Рассмотрим случай, когда первый шар – черный. Тогда вероятность того, что второй шар будет белым – $\frac{a}{a+b+c}$, а вероятность, что на первои и втором шаге мы извлекли сначала черный шар, а потом белый – $\frac{ab}{(a+b)(a+b+c)}$. Посчитаем общую вероятность белого шара на втором шаге:

$$\frac{a(a+c)}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{ab}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{a}{a+b}$$

Теперь предположим, что для количества шагов меньше k наше утверждение доказано. Проведем индукционный переход $k \to k+1$. У нас есть к+1 шагов. Рассмотрим шаги со второго по к+1. Всего их k, а это значит что тогда вероятность вытащить белый шар на k+1 шаге также равна $\frac{a}{a+b}$. Что и требовалось доказать.

Задача 3

Дана колода из 36 игральных карт. Из колоды достают три карты (без возвращения).
Событие A состоит в том, что 3я карта имеет то же достоинство, что и одна из предыдущих. (например, 1я и 3я карты - тузы, или 2я и 3я карты - короли).
1) Найдите вероятность события A при условии, что 1я и 2я карты - одного достоинства.
2) Найдите (безусловную) вероятность события A.

Построим вероятностное пространство. Элементарным исходом будет упорядоченная тройка различных игральных карт. Можность вероятностного пространства будет равна количеству таких троек:

$$|\Omega| = 36 \cdot 35 \cdot 34$$

. 1) Найдем вероятность того, что 1 и 2 карты будут одного достоинства (в дальнейшем будем это обозначать как событие B). Первую карту можно достать 36 способами, а вторую карту ровно тремя (так как остается ровно три карты того же достоинства), ну а третью карту выбераем из 34 оставшихся, нам все равно, какая она.

$$P(B) = \frac{36 \cdot 3 \cdot 34}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{3}{35}$$

Теперь найдем вероятность $A \cap B$. В этом случае все три карты должны быть одинакового достоинства, тогда вместо 34 вариантов третьей карты у нас остается ровно 2.

$$P(A \cap B) = \frac{36 \cdot 3 \cdot 2}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{3}{17 \cdot 35}$$

По формуле условной вероятности найдем P(B|A):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{17 \cdot 35}}{\frac{3}{35}} = \frac{1}{17}$$

2) Так как я нахожу возможным два варианта трактовки условия, рассмотрю их оба:
а) 3-я карта имеет то же достоинство, что и ровно одна из двух предыдущих (из этого следует, что первые две карты разного достоинства). Тогда количество вариантов выбора первой карты – 36, второй – 32, а третьей – $3 \cdot 2$. Получаем:

$$P(C) = \frac{36 \cdot 32 \cdot 6}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{16 \cdot 6}{17 \cdot 35} = \frac{96}{595}$$

б) 3-я карта имеет то же достоинство, что и хотя бы одна из двух предыдущих (из этого следует, что первые две карты могут быть как разного достоинства, так и одинакового). Заметим, что посчитанные ранее вероятности независимы, кроме того, это объединение событий P(D)(– все карты одинаковые) и P(C). Получаем вероятность:

$$P(D) = \frac{36 \cdot 3 \cdot 2}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{3}{595}$$

$$P(E) = P(D) + P(C) = \frac{99}{595}$$