Домашнее задание по теории вероятностей

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

15 октября 2017

Задача 1 (задача 2 из 5 листочка)

Для оценки числа некоторого редкого вида рыб в озере биологи выловили 5 рыб и пометили их. На следующий день они выловили 2 рыбы. Случайная величина ξ – число помеченных рыб среди выловленных. При каком количестве N рыб в озере вероятность $P(\xi = 1)$ максимальна. Нарисуйте график функции распределения ξ при таком N.

Посчитаем вероятности для различных значений ξ. Достаточно легко заметить, что вероятность выловить менее чем 0 и более чем 2 помеченные рыбы рыбы равна нулю.

$$P(\xi < 0) = 0$$

$$P(\xi > 2) = 0$$

Теперь посчитаем остальные значения ξ, используя число сочетаний (мы это делали на семинаре, поэтому не буду особо подробно это расписывать)

$$P(\xi = 0) = \frac{C_5^0 \cdot C_{N-5}^2}{C_N^2} = \frac{(N-5)(N-6)}{N(N-1)}$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{N-5}^1}{C_N^2} = \frac{10(N-5)}{N(N-1)}$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{N-5}^0}{C_N^2} = \frac{20}{N(N-1)}$$

Теперь найдем количество рыб, при котором вероятность $P(\xi = 1)$ максимальна. Найдем максимум следующей функции (по факту она равна $P(\xi = 1)$ в зависимости от N):

$$\left(\frac{10N-50}{N^2-N}\right)' = -\frac{10(N^2-10N+5)}{(N-1)^2N^2}$$

Производная равна нулю при $N = 5 - 2\sqrt{5}$ и при $N = 5 + 2\sqrt{5}$.

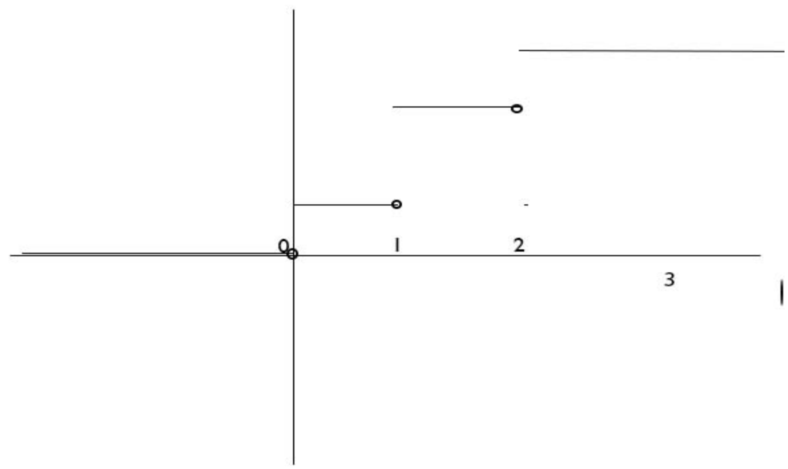
$$f'(N) \geq 0 \text{ при } N \in [5-2\sqrt{5}; 1) \cup (1; 5+2\sqrt{5}]$$

Таким образом, $N_{max} = 5 + 2\sqrt{5}$. Рассмотрим ближайшие целые значения N: 9 и 10.

$$f(9) = \frac{5}{9} = f(10)$$

Нарисуем следующий график распределения (для N=10):

$$P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0, \quad x \in (-\infty; 0) \\ \frac{(N-5)(N-6)}{N(N-1)} = \frac{2}{9}, \quad x \in [0, 1) \\ \frac{10(N-5)}{N(N-1)} + \frac{(N-5)(N-6)}{N(N-1)} = \frac{7}{9}, \quad x \in [1, 2) \\ \frac{20}{N(N-1)} + \frac{10(N-5)}{N(N-1)} + \frac{(N-5)(N-6)}{N(N-1)} = 1 \quad x \in [2, 3) \\ 1, \quad x \in [3, +\infty) \end{cases}$$



Задача 2 (задача 3 из 5 листочка)

Преподаватель готовит тест, в котором на каждый вопрос надо выбрать один из четырех ответов. В тесте всего пять вопросов. За не менее чем k правильных ответов ставится зачет. Случайная величина ξ равна числу правильных ответов, при их случайном выборе. Вычислите P(ξ ≥k)при всех значениях k. Какое значение для k вы бы выбрали на месте преподавателя(вероятность 0.05 считается маленькой)?

Посчитаем вероятность q – ученик дал правильный ответ на данный вопрос. Вопросов 4, а правильный 1.

$$q = \frac{1}{4}$$

Теперь посчитаем вероятность k правильных вопроса из 5 (конкретно в данном случае имеется ввиду $0 \leq k \leq 5$). Для этого вомпользуемся схемой Бернулли, так как результаты каждого испытания независимы и их порядок неважен.

$$P(\xi = k; \quad 0 \leq k \leq 5) = C_n^k q^k (1-q)^{n-k}$$

Посчитаем эти значения (они понадобятся нам для графика):

$$P(\xi = 0) = \frac{243}{1024}$$

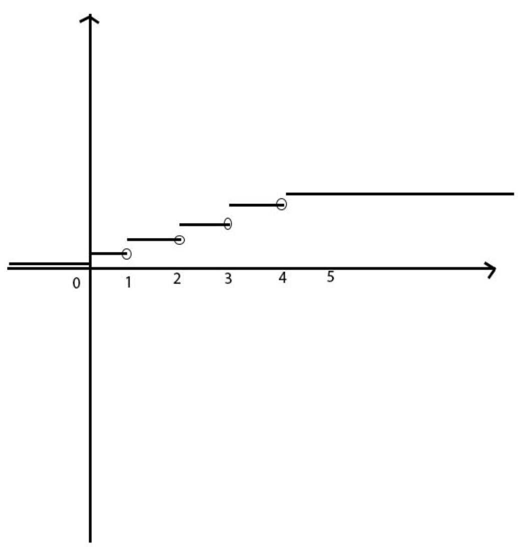
$$P(\xi = 1) = \frac{405}{1024}$$
$$P(\xi = 2) = \frac{270}{1024}$$
$$P(\xi = 3) = \frac{90}{1024}$$
$$P(\xi = 4) = \frac{15}{1024}$$
$$P(\xi = 5) = \frac{1}{1024}$$

Теперь найдем P(ξ ≥k):

$$P(\xi \geq k) = \begin{cases} 0, & k \in (5; +\infty) \\ 1, & k \in (-\infty; 0] \\ 1 - \frac{243}{1024}, & k \in (0; 1] \\ 1 - \frac{243}{1024} - \frac{405}{1024}, & k \in (1; 2] \\ 1 - \frac{243}{1024} - \frac{405}{1024} - \frac{270}{1024}, & k \in (2; 3] \\ \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024}, & k \in (3; 4] \\ \frac{1}{1024}, & k \in (4; 5] \end{cases}$$

Теперь нарисуем график функции распределения (на оси у отложим эти же значения, просто рисовать такие графики очень больно + еще график в 0 выколот):

$$P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0) \\ \frac{243}{1024}, & x \in [0; 1) \\ \frac{405}{1024} + \frac{243}{1024}, & x \in [1; 2) \\ \frac{405}{1024} + \frac{243}{1024} + \frac{270}{1024}, & x \in [2; 3) \\ \frac{405}{1024} + \frac{243}{1024} + \frac{270}{1024} + \frac{90}{1024}, & x \in [3; 4) \\ \frac{405}{1024} + \frac{243}{1024} + \frac{270}{1024} + \frac{90}{1024} + \frac{15}{1024}, & x \in [4; 5) \\ \frac{405}{1024} + \frac{243}{1024} + \frac{270}{1024} + \frac{90}{1024} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024}, & x \in [5; 6) \end{cases}$$



Задача 3 (задача 10 из 5 листочка)

Найдите распределение момента первого проигрыша для n игр в наперстки.Нарисуйте график функции распределения.

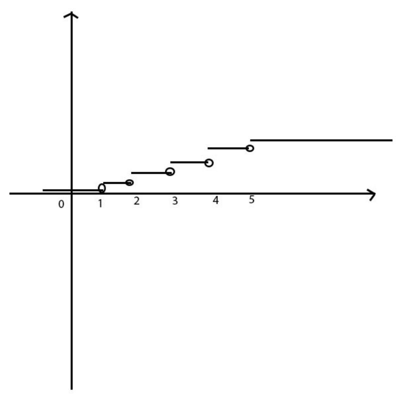
Возьмем, что вероятность выиграть в наперстки равна q. Пусть ξ – количество игр, которые пришлось сыграть, чтобы хотя бы один раз выиграть. Найдем:

$$P(\xi = k) = (1-q)^{k-1}q$$

Тогда:

$$P(\xi \leq k, \ \ 1 \leq k \leq n) = \sum_{i=1}^{k}(1-q)^{i-1}q$$

Для того, чтобы нарисовать график распределения функции, подставим численные значения: $q = \frac{1}{3}$, а n=5.



Запишем значения с оси y (прошу прощения за графики, я научусь когда-нибудь!):

$$P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0, \quad x < 1 \\ 0,(3), \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,(8), \quad 2 \leq x < 3 \\ 0,963, \quad 3 \leq x < 4 \\ 0,988, \quad 4 \leq x < 5 \\ 0,996, \quad 5 \leq x \end{cases}$$

Задача 4 (задача 7(a,b) из листочка 5+)

На отрезке [0,1] независимым образом выбираются две случайные точки x и y. Найдите функцию и плотность распределения следующих случайных величин:

$$a)\sqrt{x} \qquad b)|x-y|$$

а) Пусть $\xi = \sqrt{x}$ (по факту это равносильно $0 \leq x \leq k^2 \leq 1$ - то есть мы получаем прямоугольник со сторонами k^2 и 1). Тогда

$$P(\xi \leq k) \begin{cases} 0, \quad k < 0 \\ \frac{k^2 \cdot 1}{1}, \quad 0 < k < 1 \\ 1, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

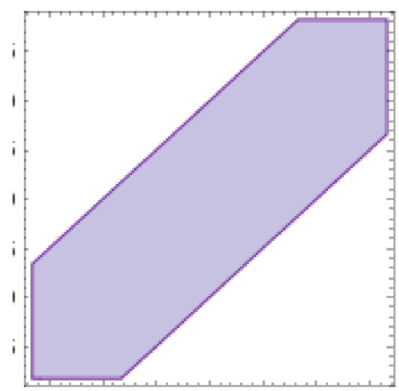
Найдем плотность распределения для адекватного случая (второго в системе, для остальных это немного бессмысленно):

$$F'(k) = 2k$$

b) Пусть $\xi = |x - y|$. Тогда:

$$P(\xi \leq k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k > 1 \\ \frac{1-(1-k)^2}{1}, & 0 \leq k \leq 1 \end{cases}$$

На плоскости это будет как-то так:



Опять же найдем плотность распределения для адекватного случая (второго в системе, для остальных это немного бессмысленно):

$$F'(k) = 2 - 2k$$