Домашнее задание по алгебре

Родигина Анастасия, 167 группа

15 мая 2017

Задача 1

Найдите наибольший общий делитель многочленов

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 \qquad g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1,$$

а также его линейное выражение через f(x) и g(x).

Разложим многочлены на множители:

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = (x-1)(x-2)(2x^2 + 2x - 1)$$

$$g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = (3x-1)(2x^2 + 2x - 1)$$

Заметим, что общий множитель: $(2x^2 + 2x - 1)$. Тогда он будет содержаться в наибольшем общем делителе. Теперь найдем НОД оставшихся множителей: $(x-1)(x-2)$ и $(3x-1)$.(Заранее прошу прощения, что не научилась техать деление столбиком)

$$x^2 - 3x + 2 = (3x-1)(\frac{1}{3}x - \frac{8}{9}) + \frac{10}{9}$$

.

$$3x - 1 = \frac{10}{9}(\frac{27}{10}x - \frac{9}{10}) + 0$$

Отсюда получаем, что НОД наших многочленов равен: $\frac{10}{9}(2x^2 + 2x - 1)$ Теперь линейно выразим наш НОД через $f(x)$ и $g(x)$.

$$\frac{10}{9} = (x^2 - 3x + 2) - (3x-1)(\frac{1}{3}x - \frac{8}{9})$$

$$\frac{10}{9}(2x^2 + 2x - 1) = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 2x - 1) - (2x^2 + 2x - 1)(3x-1)(\frac{1}{3}x - \frac{8}{9})$$

$$\frac{10}{9}(2x^2 + 2x - 1) = f(x) - g(x)(\frac{1}{3}x - \frac{8}{9})$$

Задача 2

Разложите многочлен x^6+x^3-12 в произведение неприводимых в кольце $\mathbb{C}[x]$ и в кольце $\mathbb{R}[x]$.

Разложим многочлен на множители:

$$x^6+x^3-12=(x^3+\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4}=(x^3-3)(x^3+4)=$$

$$=(x-\sqrt[3]{3})(x^2+\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9})(x+\sqrt[3]{4})(x^2-\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16})=$$

$$=(x-\sqrt[3]{3})((x+\frac{\sqrt[3]{3}}{2})^2+\frac{3\sqrt[3]{9}}{4})(x+\sqrt[3]{4})((x^2-\frac{\sqrt[3]{4}}{2})^2+\frac{3\sqrt[3]{16}}{4})$$

Таким образом мы получили произведение неприводимых в кольце $\mathbb{R}[x]$ (так как многочлены второй степени из множителей не имеют действительных корней):

$$(x-\sqrt[3]{3})(x^2+\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9})(x+\sqrt[3]{4})(x^2-\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16})$$

Теперь будем работать над полем $\mathbb{C}$:

$$(x-\sqrt[3]{3})((x+\frac{\sqrt[3]{3}}{2})^2+\frac{3\sqrt[3]{9}}{4})(x+\sqrt[3]{4})((x^2-\frac{\sqrt[3]{4}}{2})^2+\frac{3\sqrt[3]{16}}{4})=$$

$$(x-\sqrt[3]{3})((x+\frac{\sqrt[3]{3}}{2})^2-\frac{3i^2\sqrt[3]{9}}{4})(x+\sqrt[3]{4})((x^2-\frac{\sqrt[3]{4}}{2})^2-\frac{3i^2\sqrt[3]{16}}{4})=$$

$$(x-\sqrt[3]{3})(x+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}i}{2})(x+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}i}{2})(x+\sqrt[3]{4})(x-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}i}{2})(x-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}+\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}i}{2})$$

Такими несложными преобразованиями мы разложили многочлен в произведение неприводимых в кольце $\mathbb{C}[x]$.

Задача 3

Выясните, является ли число $5+\sqrt{-5}$ простым элементом кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Запишем наше число как $5+\sqrt{5}i$. Вычислим для него значение нормы - оно равно $30(=5^2+\sqrt{5}^2)$. Заметим, что $2\sqrt{-5}\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(5+\sqrt{-5})$ Если наше число простое, то на него должен делиться хотя бы один из множителей в левой части равенства. Однако посчитаем их норму. Она равна 20 и 9 соответственно. Из определения нормальной функции знаем, что $\forall a,b\in R\setminus\{0\}\quad N(ab)\geq N(a)$. Тогда по идее норма хотя бы одного из сомножителей $2\sqrt{-5}\cdot 3$ должна быть больше (ну или равна). Но это не так. Получаем противоречие.

Задача 4

Пусть R евклидово кольцо с нормой N. Докажите, что N принимает бесконечное число значений.

Предположим обратное. Тогда у нас получится выбрать такой ненулевой элемент a, что его норма будет принимать максимальное значение.
Из определения нормы $\forall a,b\in R\setminus\{0\}\quad N(ab)\geq N(a)$. Но так как у нас функция нормы принимает максимальное значение, получаем, что $N(ab)=N(a)=N(aa)$.
По Лемме, доказанной на лекции, из предыдущего равенства получаем, что элемент с

максимальной нормой обратимый, а значит. $N(a) = N(ax) = N(1)$, где x - обратный элемент к а. И уже из данного равенства и из максимальности значения нормы получаем, что функция нормы для всех ненулевых элементов равна $N(a)$. Кроме того, мы получаем, что каждый ненулевой элемент является обратимым. То есть наше кольцо обязано быть полем. А евклидово кольцо по определению таковым не является. Противоречие.