Домашнее задание по алгебре

Родигина Анастасия, 167 группа

24 апреля 2017

Задача 1

Сколько элементов порядков 2, 3, 4 и 6 в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$

Воспользуемся тем, что 2 и 3 взаимно просты, и представим группу $\mathbb{Z}_6$ в виде:

$$\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

Таким образом:

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \ \simeq \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$

Для удобства будем пользоваться таким свойством для $\mathbb{Z}_n$ (я его уже доказывала в первой домашней работе): $ord(x) = \frac{n}{gcd(x,n)}, x \neq 0$.

Найдем все элементы порядка не более 2 (будем рассматривать варианты, что же может стоять на i-том месте элемента прямого произведения, а потом вычтем те варианты, порядок которых будет меньше, чем 2):

$g_0 \in \mathbb{Z}_2$	$g_1 \in \mathbb{Z}_3$	$g_2 \in \mathbb{Z}_3$	$g_3 \in \mathbb{Z}_4$
0 или 1	0	0	0 или 2

Отсюда получаем $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ возможных варианта элементов порядка 2. Однако легко заметить, что среди этих вариантов мы записали еще элемент $e = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$, у которого порядок 1. Итого получается 4-1=3 элементов порядка 2. Схожим образом найдем все элементы порядка не более 3:

$g_0 \in \mathbb{Z}_2$	$g_1 \in \mathbb{Z}_3$	$g_2 \in \mathbb{Z}_3$	$g_3 \in \mathbb{Z}_4$
0	0, 1 или 2	0, 1 или 2	0

Таким образом, получаем $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 - 1 = 8$ вариантов элементов порядка 3 (мы вычли нейтральный элемент, кроме того, среди найденных вариантов нет элементов порядка 2, так что больше ничего вычитать не надо).
Найдем все элементы подядка не более 4:

$g_0 \in \mathbb{Z}_2$	$g_1 \in \mathbb{Z}_3$	$g_2 \in \mathbb{Z}_3$	$g_3 \in \mathbb{Z}_4$
0 или 1	0	0	0,1,2 или 3

Мы получаем $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 - 4 = 4$ возможных варианта (мы еще учли, что посчитали все элементы порядка не более 2).
Найдем все элементы порядка не более 6 :

$g_0 \in \mathbb{Z}_2$	$g_1 \in \mathbb{Z}_3$	$g_2 \in \mathbb{Z}_3$	$g_3 \in \mathbb{Z}_4$
0 или 1	0,1 или 2	0,1 или 2	0 или 2

Тога получаем $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 - 8 = 24$ вариантов элементов порядка 6 (вычитаем элементы меньших порядков (а их 8))

Задача 2

Сколько подгрупп порядков 3 и 15 в нециклической абелевой группе порядка 45?

Рассмотрим нециклическую абелеву группу порядка 45: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$ (она действительно нециклическая, так как НОК(3,15) меньше количества элементов, а, значит при возведении "порождающего элемента" в степень мы не получим все эл-ты группы). Важно заметить, что группа $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9 \simeq \mathbb{Z}_{45}$ является цикличной, ее мы рассматривать конечно же не будем.
Для удобства запишем нашу ациклическую группу как: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Возьмем, что $\mathbb{Z}_3 =< z_3 >$, $\mathbb{Z}_3 =< z_3' >$, $\mathbb{Z}_5 =< z_5 >, z_i \in \mathbb{Z}_i$. Найдем количество элементов порядка 3:

$g_0 \in \mathbb{Z}_3$	$g_1 \in \mathbb{Z}_3$	$g_2 \in \mathbb{Z}_5$
0, 1, 2	0, 1, 2	0

Получаем 9 элементов порядка не более чем три. Вычитая нейтральный элемент, получаем,что у нас всего 8 элементов порядка 3. Подгруппы не должны иметь общих порождающих (иначе они будут пересекаться). Всего есть два элемента порядка 3, которые могут быть порождающими, а, значит каждую подгруппу мы посчитали по два раза. Получаем количество подгрупп порядка 3: 8/2=4. Теперь посчитаем количество элементов порядка 15. Заметим, что среди элементов обязательно должны быть элементы порядка 5. (Из того, что НОК=15). Тогда справедливо будет записать следующее: $|\{1,2,3,4\} \times \{1,2\}^2| = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Количество возможных порождающих элементов равно 4 (соответствует количеству простых чисел меньше 15 таких что gcd(15,x)=1). Аналогично предыдущему пункту получаем: 16/4=4 подгруппы.

Задача 3

Найдите в группе $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ подгруппу H, для которой $G/H \simeq \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$.

Воспользуемся свойством: $n = mk, \quad gcd(m,k) = 1, \quad \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_k$:

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$$

Возьмем, что $H \simeq H_0 \times H_1$. Njulf

$$G/H \simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H \simeq \mathbb{Z}/H_0 \times \mathbb{Z}/H_1$$

Тогда

$$\mathbb{Z}/H_0 \times \mathbb{Z}/H_1 \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$$

Выберем порождающие элементы:$z_0 \in \mathbb{Z}, z_1 \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z} =< z_0 >, \mathbb{Z} =< z_1 >$, а в качестве H_0 и H_1 возьмем $< z_0^{30} > < z_1^{60} >$. А значит, $H \simeq H_0 \times H_1 \simeq < z_0^{30} > \times < z_1^{60} >$

Задача 4

Пусть порядок конечной абелевой группы A делится на m. Докажите, что в A есть подгруппа порядка m

Пусть m делит n.
Рассмотрим два возможных случая: Если A_n - циклична, то можно выбрать подгруппу $< a^{\frac{n+1}{m}} >$, где a - порождающий элемент.
Если A_n - нециклична, то тогда выбираем подгруппу, порожденную элементом с порядком n (такой гарантированно есть). Данная группа будет цикличной, а, значит условие снова выполняется.