Домашнее задание по алгебре

Родигина Анастасия, 167 группа

10 апреля 2017

Задача 1

Найдите все левые смежные классы и все правые смежные классы группы A_4 по подгруппе $H =< \sigma >$, где= $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$. Является ли подгруппа H нормальной в группе A_4?

Замитим, что в H находится всего два элемента: σ и Id, так как $\sigma \cdot \sigma = Id$ Выпишем все левые смежные классы, используя перебор (повторяющиеся классы не будем выписывать с целью экономии времени и пространства)

1):

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

2):

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

3):

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

4):

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

5):

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

6):

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

Теперь выпишем еще и все правые смежные классы, используя перебор (повторяющиеся классы снова не будем выписывать с целью экономии времени и пространства)

1):

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

2):

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

3):

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$$

4):

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

5):

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$$

6):

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

H не является нормальной подгруппой, так как, например, в множестве правых смежных классов нет 3-го левого смежного класса.

Задача 2

Пусть $SL_2(\mathbb{Z})$ *группа всех целочисленных* (2×2)- *матриц с определителем 1.*

Докажите, что множество

$$\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ \Big| \ a \equiv d \equiv 1 \pmod{3}; \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{3}\}$$

является нормальной подгруппой в $SL_2(\mathbb{Z})$

Возьмем произвольную матрицу (2×2) с определителем 1 и запишем в виде: $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \mid xu - yz = 1$ Найдем ее обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} u & -y \\ -z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$$

Проанализируем произвольную матрицу вида $AhA^{-1}, \ h \in H$:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -y \\ -z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ cu + az & du + bz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -y \\ -z & x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aux + cuy - bxz - dyz & bx^2 - cy^2 - axy + dxy \\ cu^2 - bz^2 + auz - duz & dux - cuy + bxz - ayz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} \equiv aux + cuy - bxz - dyz \equiv aux - dyz \equiv 1 \cdot ux - 1 \cdot yz \equiv 1 \pmod{3}$$

$$a_{12} \equiv bx^2 - cy^2 - axy + dxy \equiv -axy + dxy \equiv (d-a)xy \equiv 0 \pmod{3}$$

$$a_{21} \equiv cu^2 - bz^2 + auz - duz \equiv auz - duz \equiv (a-d)uz \equiv 0 \pmod{3}$$

$$a_{22} \equiv dux - cuy + bxz - ayz \equiv dux - ayz \equiv 1 \cdot ux - 1 \cdot yz \equiv 1 \pmod{3}$$

Отсюда получаем, что $AHA^{-1} = H$. Т.е. H является нормальной подгруппой.

Задача 3

Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{12}$ в группу $\mathbb{Z}_{16}$

$\phi \ : \ G \ \to \ F$ - произвольный гомоморфизм Воспользуемся следующими утверждениями:

1) $\forall g \in G \quad \phi(g^n) = \phi(g)^n$ - следует из определения гомоморфизма

2) $\forall g \in G \quad ord\phi(g) \mid ord(g)$

3) $ord(g^k) = \frac{ord(g)}{gcd(k,n)}$, для $\{\mathbb{Z}_n, +\}$ -доказывалось на семинаре

Возьмем произвольный гомоморфизм $\phi \ : \ \mathbb{Z}_{12} \ \to \ \mathbb{Z}_{16}$ Возьмем за x порождающий элемент в $\mathbb{Z}_{12}$, а за y его образ в $\mathbb{Z}_{16}$. $\phi(x) = y, \phi(k) = \phi(kx) = k\phi(x) = ky$. Для того, чтобы найти все гомоморфизмы, достаточно найти образы порождающего элемента. Заметим, что $ord(x) = 12$, а $ord(\phi(x)) \mid 12$ Покажем, что данное условие является достаточным. $t, s \in \mathbb{Z}, \quad t = s \ n \mid (t-s) \Rightarrow (t-s)y = 0 \Rightarrow \phi(s) = \phi(t)$ Покажем, что данное отображение - гомоморфизм.

$$\phi(s+t) = (s+t)y = sy + ty = \phi(s) + \phi(t)$$

Из написанного ранее: $ord(y) = \frac{16}{gcd(y,16)} \mid 12$. Тогда $ordy$ будет принимать следующие значения: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Еще воспользуемся фактом, что $\frac{16}{gcd(y,16)} \mid 16$. Тогда $gcd(y, 16) = \{4, 8, 16\}$. Отсюда получаем, что:
$gcd(y, 16) = 4, \ y = \{4, 12\}$.

$gcd(y, 16) = 8,\ y = 8.$
$gcd(y, 16) = 16,\ y = 0.$
Выпишем явные формулы для полученных гомоморфизмов:

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = 4x$$

$$f(x) = 8x$$

$$f(x) = 12x$$

Задача 4

Перечислите все с точностью до изоморфизма группы, каждая из которых изоморфна любой своей неединичной подгруппе.

Рассмотрим два варианта 1) $|G| < \infty$ Из того, что изоморфизм подразумевает биекцию, получаем, что мощности произвольной подгруппы и самой группы должны совпадать, а, значит, подгруппа может быть только одна. Из этого следует что сама группа является своей собственной циклической подгруппой. Из предложения, доказанного на лекции $G \simeq \{\mathbb{Z}_n, +\}$. Подберем такие n, которые будут обеспечивать выполнимость данных условий. Заметим, что n должно быть простым (или равным 1), иначе $| < g^l > | < n$, где l - какой-то делитель n (что нарушает возможность проведения биекции). 2) $|G| = \infty$ Тогда в ней не должно быть конечных циклических подгрупп, иначе нельзя будет построить биекцию. Тогда любая циклическая подгруппа должна быть бесконечной. Воспользуемся (снова) предложением, доказанным на лекции: $H \simeq \{\mathbb{Z}, +\}$. Отсюда и $G \simeq \{\mathbb{Z}, +\}$. Данная группа нам действительно подходит, так как она изоморфна всем своим неединичным подгруппам.