Домашнее задание по алгебре

Родигина Анастасия, 167 группа

15 мая 2017

Задача 1

Найдите все обратимые элементы, все делители нуля и все нильпотентные элементы в кольце: $R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$ *с обычными операциями сложения и умножения.*

Для начала найдем обратимые элементы (такие a, что $\exists b\ ab = ba = 1$): Для того, чтобы для матрицы был обратный элемент, нужно, чтобы ее определитель был не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow ac \neq 0$$

Найдем обратный элемент к данной матрице

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Заметим, что:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = 1$$

Отсюда получаем условие, что a и c должны быть ненулевыми.
Теперь найдем делители нуля. Начнем с левых делителей нуля (такие $a \neq 0$, что $\exists b \neq 0 \ \mid \ ab = 0$).

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & 0 \\ bd + ce & cf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ad = 0 \\ bd + cf = 0 \\ cf = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \\ d^2 + e^2 + f^2 \neq 0 \end{cases}$$

Подбирая под заданные $a,\ b,\ c$ значения $d,\ ,e,\ f$, получаем что наша матрица не является левым делителем нуля тогда и только тогда, когда a и c ненулевые. Запишем ответ:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \ ac = 0 \text{ и хотя бы один коэффициен не равен } 0 \right\}$$

Найдем правые делители нуля

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & 0 \\ ae + bf & cf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Подбирая под заданные $a,\ b,\ c$ значения $d,\ ,e,\ f$, получаем что наша матрица не является левым делителем нуля тогда и только тогда, когда a и c ненулевые. Снова запишем ответ:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, ac = 0 \text{ и хотя бы один коэффициен не равен } 0 \right\}$$

Найдем все нильпотентные элементы. Для начала учтем, что они все делители нуля, следовательно, $ac = 0$.Рассмотрим случай, когда $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bc^{n-1} & c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В рассматриваемом случае элемент является нильпотентным тогда, когда $c = 0$, а $b \neq 0$ Рассмотрим случай, когда $c = 0$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ ba^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

В этом же случае $a = 0$, а $b \neq 0$ Получаем множество нильпотентных элементов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c = 0 \end{cases} \right\}$$

Задача 2

Приведите пример идеала в кольце $\mathbb{Z}[x]$, не являющегося главным.

Пусть подмножество $\mathbb{Z}[x]$ - многочлены с четным свободным членом — наш искомый идеал. Для начала покажем, что это действительно идеал.
1) Для начала заметим, что это подгруппа по сложению. Нейтральный элемент относительно сложения - 0. Любая сумма многочленов с четными свободными членами также будет в подгруппе, ровно как и обратный элемент для каждого элемента (умножаем любой многочлен подгруппы на -1 и вуаля!)
2) Теперь проверим свойство: $ra \in I, ar \in I \quad \forall a \in I,\ r \in R$. Пусть $a = 2p_0 + p_1x + .. + p_nx^n$, а $r = t_0 + t_1x + t_2x^2 + .. + t_mx^m$. При умножении a на r, как справа, так и слева, мы получаем многочлен, свободный член которого является четным. Таким образом, мы получаем, что это действительно идеал. Покажем, что он не явсяетя главным. В данном идеале гарантированно содержатся $\{2, x\}$. Если этот идеал является главным, то $\exists a \in R \mid I = Ra, \quad a$ - порождающий элемент. Отсюда следует, что и 2, и x делятся на a. Получается что порождающим элементом будет -1 или $+1$. Однако тогда получим, что наш идеал совпадает со всем кольцом $\mathbb{Z}[x]$, что неверно. Получаем противоречие.

Задача 3

Найдите размерность $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2)$.

Воспользуемся теоремой о гомоморфизме для колец. Факторкольцо $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2)$ по идеалу $(x^3 - x^2 + 2)$ будет состоять из остатков от деления элементов $\mathbb{R}[x]$ на

(x^3-x^2+2). $g \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow g = \alpha(x)(x^3-x^2+2)+r(x)$ (По данной теореме (x^3-x^2+2) — $Ker\varphi$ (так как все многочленны, делящиеся без остатка на многочлен перейдут в 0), где φ - гомоморфизм). Отсюда $\mathbb{R}[x]/(x^3-x^2+2) \simeq R(x)$ ($R(x)$ - множество всех $r(x)$).
Достаточно легко заметить, что $R(x)$ будут лежать многочлены степени не более, чем 2. Если мы работаем с $\mathbb{R}$-алгеброй, то можно работать с неким базисом данного факторкольца. Достаточно очевидно, что нам подойдет стандартный базис - $1,\ x,\ x^2$. Его размерность равна трем, отсюда следует, что и искомая размерность равна трём.

Задача 4

Пусть F поле, R кольцо и $\varphi : F \to R$ гомоморфизм колец. Докажите, что либо $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in F$, либо $Im\varphi \simeq F$.

Достаточно легко заметить, что если $\forall x \in F,\ \varphi(x) = 0$, то $Ker\varphi = F$.
Запишем теорему о гомоморфизме для колец:

$$F/Ker\varphi \simeq Im\varphi$$

Ядро φ является идеалом. Любое поле не имеет собственных идеалов, следовательно, либо ядро совпадает со всем полем (тогда выполняется условие задачи), либо в этом ядре лежит только нулевой элемент. Рассмотрим второй вариант. Снова используем теорему о гомоморфизме.

$$F/\{0\} \simeq Im\varphi$$

Заметим еще факт, что $F/\{0\} \simeq F$. Это следует из того, что $F/\{0\}$ - множество классов смежности из одного элемента (если два элемента лежат в одном классе, то их разность $\in \{0\}$)