Домашнее задание по алгебре

Родигина Анастасия, 167 группа

10 апреля 2017

Задача 1

Докажите, что формула $m \circ n = mn - m - n + 2$ задаёт бинарную операцию на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$ и что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой

Проверим несколько параметров, которые должны обязательно выполняться, если эта формула действительно задает бинарную операцию на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$ и что $(\mathbb{Q}c, \circ)$ является группой:

• **замкнутость отсносительно множества $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$**

Достаточно легко заметить, что данная операция будет переводить элементы из $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}$. Осталось показать, что для данной операции справедливо выражение $\mathbb{Q}\backslash\{1\} \times \mathbb{Q}\backslash\{1\} \rightarrow \mathbb{Q}\backslash\{1\}$. Покажем, что при данной операции нельзя получить 1:

$$n \circ m = nm - n - m + 2 = 1$$

$$nm - n - m = -1$$

$$n(m-1) = m - 1$$

Отсюда получаем, что тогда хотя бы одно из чисел должно быть равно 1, таким образом, данная операция обеспечивает замкнутость системы.

• **ассоциативность**

$$k \circ (n \circ m) = k \circ (nm - n - m + 2) = knm - kn - km + 2k - k - nm + n + m - 2 + 2 =$$

$$= m(kn - k - n + 2) - m - kn + k + n - 2 + 2 = (k \circ n) \circ m$$

• **существование нейтрального элемемента**

$$n \circ e = e \circ n = ne - e - n + 2$$

$e = 2:$

$$2 \circ n = n \circ 2 = 2n - 2 - n + 2 = n$$

• **существование обратного элемента**

Возьмем элемент вида $\frac{p}{q}$, тогда обратным к нему будет $\frac{p}{p-q}$ (заметим заодно, что $p \neq q$):

$$\frac{p}{q} \circ \frac{p}{p-q} = \frac{p^2}{q(p-q)} - \frac{p}{q} - \frac{p}{p-q} + 2 =$$

$$= \frac{p^2 - p^2 + qp - qp}{q(p-q)} + 2 = 2 = e$$

Задача 2

Найдите порядки всех элементов группы $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

$e = 0$

Обозначим $ordX = k$

$$kx \equiv 0 \ (mod\ 12)$$

$$\frac{kx}{gcd(12,x)} \equiv 0 \ \left(mod \quad \frac{12}{gcd(12,x)}\right)$$

Заметим, что $\frac{x}{gcd(12,x)}$ и $\frac{12}{gcd(12,x)}$ взаимно просты. Из этого следует, что:

$$k \equiv 0 \ \left(mod \quad \frac{12}{gcd(12,x)}\right)$$

Так как k по определению минимально и не равно 0, получаем, что:

$$k = \frac{12}{gcd(12,x)}$$

Получаем, что для группы вычетов по модулю 12 $ordX = \frac{12}{gcd(x,12)}, x \neq 0$ (этот случай рассмотрим отдельно) Таким образом получаем:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ordX	0	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

Задача 3

Опишите все подгруппы в группе$(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

В каждой группе есть как минимум две подгруппы: она сама и нейтральный элемент. Таким образом получаем такие подгруппы: $\{0\}, \{0, 1, 2, 3, .., 11\}$. Нейтральный элемент будет встречаться в каждой подгруппе. Так как группа является циклической, то и все ее подгруппы тоже будут циклическими. (Переберем все возможные варианты порождающих элементов, подгруппы имеют вид: $\{e, x, x^2...\}$) и запишем все их степени:

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\{0, 3, 6, 9\} = \{0, 9, 6, 3\}$$

$$\{0, 4, 8\} = \{0, 8, 4\}$$

$$\{0, 6\}$$

$$\{0, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7\} = \{0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5\} =$$

$$= \{0, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\} = \{0, 10, 8, 6, 4, 2, 0, 10, 8, 6, 4, 2\} = \{0, 1, 2, 3, .., 11\}$$

Таким образом, получаем подгруппы: $\{0\}, \{0, 1, 2, 3, .., 11\}, \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$,
$\{0, 3, 6, 9\}, \{0, 4, 8\}, \{0, 6\}$

Задача 4

Докажите, что всякая бесконечная группа содержит бесконечное число подгрупп.

Выберем элемент $g \in G$ таким образом: если существует элемент с бесконечным порядком, выбираем его, иначе выбираем любой другой. Рассмотрим оба случая.

- $\exists g \in G \; : \; ord(g) = \infty$

Получаем бесконечно много циклических подгрупп, порожденных элементом $g^n, \quad n \in \mathbb{N}$. Так как $ord(g) = \infty$, такие подгруппы будут попарно различны, а, значит, таких подгрупп найдется бесконечное количество.

- $\forall g \in G \; : \; ord(g) < \infty$

Тогда группа G будет являться периодической, а, значит, все ее циклические подгруппы будут конечными. Если таких подгрупп было конечное количество, то и группа была конечной, так как объединение коенчного числа конечных множеств также является конечным. Отсюда получаем противоречие. Таким образом, всякая бесконечная группа содержит бесконечное число подгрупп.