Домашнее задание по алгебре

Родигина Анастасия, 167 группа

31 мая 2017

Задача 1

Выразите симметрический многочлен

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$$

через элементарные симметрические многочлены.

Запишем лексикографически старший член данного полинома:

$$x_1^3 x_2^2 x_3$$

Далее запишем все возможные наборы $3 \geq l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq l_4 \geq 0$, $\sum_{i=1}^4 l_i = 6$, для каждого набора построим многочлен: $\sigma^{l_1 - l_2} \sigma^{l_2 - l_3} \sigma^{l_3 - l_4} \sigma^{l_4}$:

$(2, 2, 1, 1)$	$\sigma_2 \sigma_4$
$(2, 2, 2, 0)$	σ_3^2
$(3, 1, 1, 1)$	$\sigma_1^2 \sigma_4$
$(3, 2, 1, 0)$	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$
$(3, 3, 0, 0)$	σ_2^3

Запишем наш многочлен в виде:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + A\sigma_2 \sigma_4 + B\sigma_3^2 + C\sigma_1^2 \sigma_4 + D\sigma_2^3$$

Найдем эти коэффициенты, подставляя различные x_i.

$$f(1, 1, 1, 1) = 64 = 64 + 6A$$

$$f(0, 1, 1, 1) = 8 = 9 + B$$

$$f(0, 0, 1, 1) = 0 = D$$

$$f(1, 1, 1, 2) = 216 = 1044 + 18A + 49B + 50C$$

Отсюда: A=0; B=-1; C=-1; D=0.
Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1^2 \sigma_4 - \sigma_3^2$$

Задача 2

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ все комплексные корни многочлена $3x^3 + 2x^2 - 1$. Найдите значение выражения

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}$$

Запишем данное выражение в другом виде (за σ обозначим элементарные симметрические многочлены):

$$\frac{\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{(\alpha_1\alpha 2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1}{\sigma_3}$$

Воспользуемся теоремой Виета и запишем значения наших элементарных симметрических многочленов:

$$\sigma_1 = -\frac{2}{3}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{3}$$

Получаем искомое значение:

$$\frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{0 + \frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$$

Задача 3

Найдите многочлен 4-й степени, корнями которого являются число 1 и кубы всех комплексных корней многочлена $x^3 + x - 1$.

За x_1, x_2, x_3 обозначим комплексные корни данного многочлена. Тогда наш многочлен будет записываться в следующем виде:

$$(x-1)(x-x_1^3)(x-x_2^3)(x-x_3^3)$$

Найдем и выразим x_1, x_2, x_3 (используем тот факт, что $x_k^3 = 1 - x_k$ - из исходного многочлена):

$$(x-1)(x-x_1^3)(x-x_2^3)(x-x_3^3) = (x-1)(x-1+x_1)(x-1+x_2)(x-1+x_3) =$$

$$(1-x)((1-x)-x_1)((1-x)-x_2)((1-x)-x_3) = (1-x)((1-x)^3+(1-x)-1) = x^4-4x^3+7x^2-5x+1$$

Получаем такой многочлен:

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 1$$

Задача 4

Докажите, что не существует бесконечной последовательности одночленов от переменных $x_1, ..., x_n$, в которой каждый последующий член строго меньше предыдущего в лексикографическом порядке.

Каждому моному сопоставим $\{a_n\}$ - последовательность показателей степени при $x_1, .., x_n$ - в соответствующем порядке.
Докажем наше утверждение индукцией по количеству переменных в мономе. Обозначим это количество за k.
База индукции: k=1.
Достаточно легко заметить, что тогда $\{a_n\}$ - это просто убывающая последовательность неотрицательных чисел. Она будет конечной. Тогда наша база индукции верна.
Шаг индукции: $k-1 \to k$
Для нашего монома зафиксируем степень d - степень нашей новой добавленной переменной. Эта степень, достаточно очевидно, будет конечной. По предположению индукции для любого фиксированного d найдется конечное число последовательностей степеней в убывающем порядке (так как фактически мы работаем с k-1 переменными). Заметим, еще, что общее число таких мономов будет конечно, так как мы берем конечное значение d, и для каждого значения $\leq d$ у нас будет конечное количество последовательностей. Остюда получаем, что и общее количество тоже будет конечно.