Домашнее задание по алгебре

Родигина Анастасия, 167 группа

10 апреля 2017

Задача 1

Пусть G группа всех диагональных матриц в $GL_3(\mathbb{R})$ и $X = \mathbb{R}^3$. Опишите все орбиты и все стабилизаторы для действия группы G на множестве X, заданного формулой $(g, x) \mapsto g \cdot x$.

Произвольный элемент G будет выглядет следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

где $a,\ b,\ c$ - не равны нулю (за счет того, что матрица является невырожденной) Элемент X, будет выглядет следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Получаем результат действия:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$$

Мы не знаем, являются ли ненулевыми $x,\ y,\ z$, а если, среди них встречается 0, то какая-то строка элемента X останется нулем, т.е. надо будет рассмотреть все случаи (относительно вариантов является определенная строка 0 или нет). Их всего будет 2^3 вариантов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \left\{ \begin{pmatrix} aq \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ bw \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cr \end{pmatrix} \right\}; \left\{ \begin{pmatrix} aq \\ bw \\ 0 \end{pmatrix} \right\}; \left\{ \begin{pmatrix} aq \\ 0 \\ cr \end{pmatrix} \right\}; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ bw \\ cr \end{pmatrix} \right\}; \left\{ \begin{pmatrix} aq \\ bw \\ cr \end{pmatrix} \right\}$$

где $a, b, c, q, w, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Теперь найдем все стабилизаторы для данного действия. Рассмотрим действие стабилизатора на элемент:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Если x=0, то a может принимать любые ненулевые значения, иначе же $a = 1$. Аналогичное утверждение верно и для y, z. Тогда St(x) будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \middle| \quad \begin{cases} a = 1, x \neq 0; \\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x = 0; \\ b = 1, y \neq 0; \\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ y = 0; \\ c = 1, z \neq 0; \\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ z = 0; \end{cases} \right\}$$

Задача 2

Пусть G группа всех верхнетреугольных матриц в $SL_2(\mathbb{R})$. Опишите все классы сопряженности в группе G.

Возьмем, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Запишем произвольное действие сопряжениями:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \frac{ab - abc^2 + a^2cd}{c} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим значение $\frac{ab-abc^2+a^2cd}{c} = a^2d + ab(\frac{1-c^2}{c})$. Если оба слагаемых ненулевые, то приравняем a=1 (что, в общем-то необязательно) и сможем достигнуть всех действительных значений. Если d=0 и $\frac{1-c^2}{c} \neq 0$, сделаем a $=1$, a с помощью b пройдем все возможные действительные значения. Если $d \neq 0$ и $\frac{1-c^2}{c} = 0$, тогда мы сможем подбирать только неотрицательные значения a, а значит, мы пройдем все неотрицательные действительные значения. Если же $d = 0$ и $\frac{1-c^2}{c} = 0$, то значение будет тоже равно нулю. Тогда наши классы сопряженности будут выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{pmatrix} c & q \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} q \in \mathbb{R}, \quad d \neq 0, \quad \frac{1-c^2}{c} \neq 0; \\ q \in \mathbb{R}_{\pm} \cup \{0\} (\pm \textit{ depends on } d), \quad d \neq 0, \quad \frac{1-c^2}{c} = 0; \\ q \in \mathbb{R}, \quad d = 0, \quad \frac{1-c^2}{c} \neq 0; \\ q = 0, \quad d = 0 \quad \frac{1-c^2}{c} = 0; \end{cases} \right\}$$

Задача 3

Для действия группы S_4 на себе сопряжениями найдите стабилизатор подстановки (1 2 3 4).

Пусть $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$, $s \in St(\sigma)$. Тогда (из определения стабилизатора):

$$s\sigma s^{-1} = \sigma \Leftrightarrow s\sigma = \sigma s$$

Рассмотрим элементы подстановки и то, куда они переходят при сопряжении:
для 1: $s(\sigma(1)) = \sigma(s(1)) \Rightarrow s(2) = \sigma(s(1))$
для 2: $s(\sigma(2)) = \sigma(s(2)) \Rightarrow s(3) = \sigma(s(2))$
для 3: $s(\sigma(3)) = \sigma(s(3)) \Rightarrow s(4) = \sigma(s(3))$
для 4: $s(\sigma(4)) = \sigma(s(4)) \Rightarrow s(1) = \sigma(s(4))$
Отсюда понятно, что для того, чтобы задать стабилизатор, достаточно знать образ отображения $s(1)$:

s(1)	s
s(1)=1	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$
s(1)=2	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$
s(1)=3	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$
s(1)=4	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Отсюда $St(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \right\}$

Задача 4

Пусть $k, l \in \mathbb{N}$ и $n = kl$. Реализуем группу $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ как подгруппу в S_n, используя доказательство теоремы Кэли. Найдите необходимое и достаточное условие на числа k, l, при котором эта подгруппа содержится в A_n.

По теореме Кэли для нахождения изоморфизма групп мы записываем все элементы $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ в таблицу и рассматриваем действия элементов друг на друга. Из этой таблицы можно будет понять, в какой элемент перейдет каждый элемент при действии. Данная таблица переходов будет давать по подстановке на элемент. Обозначим этот элемент за x и реализуем эту таблицу для определенных x. Рассмотрим элемент $x = (1,\ 0)$. В "паре" $(a,\ b)$ он будет менять по циклу только a. Тогда этому элементу будет соответствовать перестановка состоящая из l циклов с длиной равной k. Ее четность будет соответствовать $((-1)^{k-1})^l = (-1)^{l(k-1)}$ (из длины циклов и их количества). То, что перестановка четная, означает, что $2 \mid l(k-1)$. Абсолютно аналогично рассматриваем $y = (0,\ 1)$ и получаем, что $2 \mid k(l-1)$. Из этих двух условий получаем, что k и l одинаковой четности. Это условие будет являться необходимым. Покажем, что оно еще и будет являться достаточным. Возьмем элемент (q, w). Достаточно легко заметить что этот элемент равен $x^q \cdot y^w$, а соответствующая этому элементу перестановка будет равна произведению перестановок первого элемента в степени q и второго элемента в степени w. Если они обе четные, то и данная перестановка будет четной. Таким образом, необходимым и достаточным условием будет являться то, что k и l одинаковой четности.