Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, 166 группа

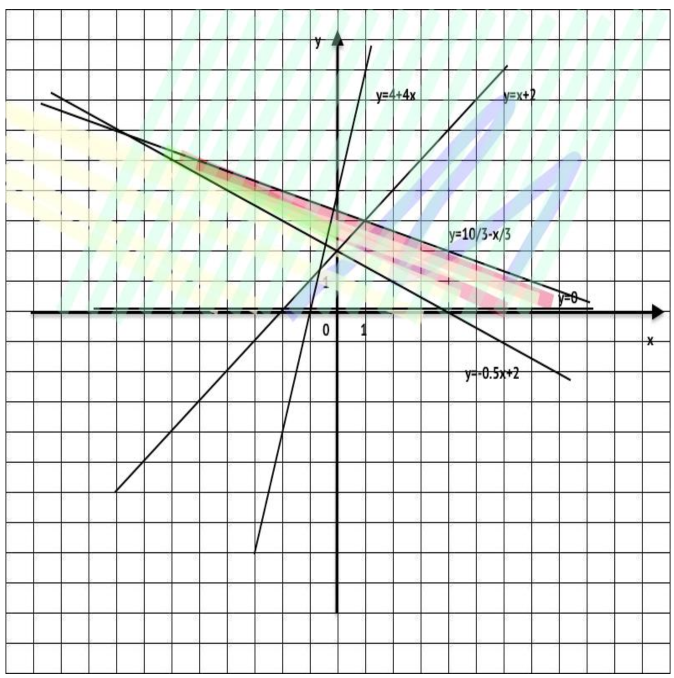
14 сентября 2017

Задача 1

Нарисуйте на плоскости множество решений системы неравенств

$$y - x \leq 2, \quad y \geq 0, \quad x + 2y \geq 4, \quad x + 3y \leq 10, \quad y - 4x \geq 4.$$

Совместна ли эта система? Если да, то укажите какое-нибудь ее решение.



$$\begin{cases} y - x \leq 2 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 10 \\ y - 4x \geq 4 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \geq 0 \\ y \leq \frac{10}{3} - \frac{x}{3} \\ y \geq 4 + 4x \\ y \geq -\frac{x}{2} + 2 \end{cases}$$

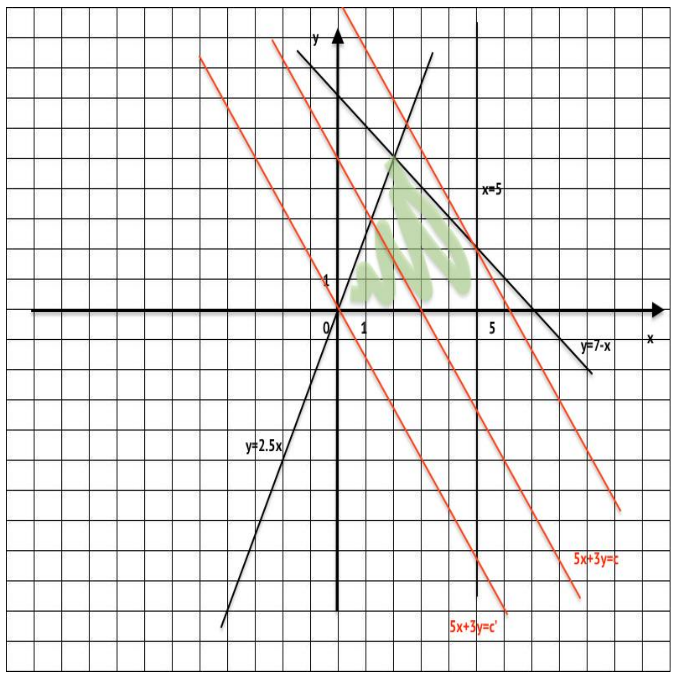
Заметим, что одновременно должны выполняться условия: $y \geq \frac{20}{9}$ и $y \leq \frac{4}{3}$, что следует изпервого и двух последних неравенств системы. Таким образом, становится понятно, что система неравенств не имеет решений.

Задача 2

Решите графически задачу линейного программирования

$$5x + 3y \to max$$

$$5x - 2y \geq 0, \quad x + y \leq 7,$$
$$0 \leq x \leq 5, y \geq 0$$



Нарисуем линии уровня для функции $5x + 3y$ красным цветом. Заметим, что при увеличении с график сдвигается выше по оси оу. Тогда возьмем с такое, чтобы оно пресекало выделенную область и было максимальным. Уравнение такой прямой будет проходить через точку (5, 2). А значит с=31 и оптимальное решение - x=5, y=2

Задача 3

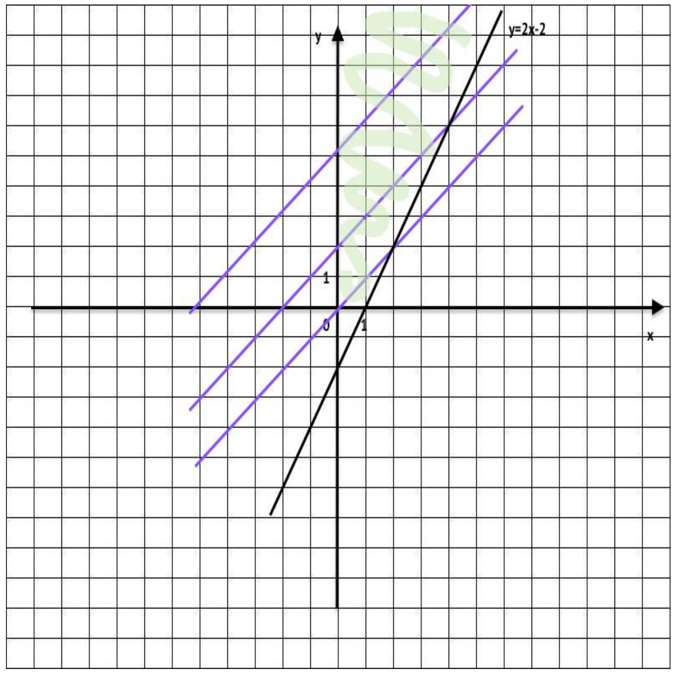
Решите графически задачу линейного программирования

$$x - y \to max$$

$$2x + y + z = 4, \quad x \geq 0, \quad 6x + y + 2z \leq 10, \quad y \geq 0.$$

Выразим все через x и y:

$$\begin{cases} z = 4 - 2x - y \\ 6x + y + 8 - 4x - 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x - 2x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Нарисуем сиреневым линии уровня функции $x - y$. На графике видно, что при увеличении c, график функции опускается вдоль оси oy. На рисунке видно, что максимальное значение c и совместность системы достигаются при $c = 1$ и x=1, y=0, z=2.

Задача 4

Методом исключения переменных выясните, совместна ли система неравенств

$$x - 2y + 3z = 6, x \geq 0, \quad 2x + z \leq 4, \quad z + 3y \geq 14, \quad y \geq 0.$$

Если да, то укажите какое-нибудь ее решение.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + z \leq 4 \\ z + 3y \geq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z = 6 + 2y - x \\ 6x + 3z \leq 12 \\ 3z + 9y \geq 42 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z = 6 + 2y - x \\ 6x + 6 + 2y - x \leq 12 \\ 6 + 2y - x + 9y \geq 42 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z = 6 + 2y - x \\ 5x \leq 12 - 2y - 6 \\ x \leq 6 - 42 + 11y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z = 6 + 2y - x \\ 12 - 2y - 6 \geq 0 \\ -36 + 11y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z = 6 + 2y - x \\ y \leq 3 \\ 11y \geq 36 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \varnothing$$

Задача 5

Методом исключения переменных найдите оптимальное решение в линейной программе

$$x + y \to max$$

$$2x + y - z \geq -5, \quad 2x - 4y + z \geq -3,$$

$$7x + 4y - z \leq 12, \quad x - 5y - z \leq -3.$$

Пусть $x + y = t$, тогда

$$\begin{cases} 2t - y - z \geq -5 \\ 2t - 6y + z \geq -3 \\ 7t - 3y - z \leq 12 \\ t - 6y - z \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq 2t - y + 5 \\ z \geq -3 + 6y - 2t \\ z \geq 7t - 3y - 12 \\ z \geq t - 6y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - y + 5 \geq -3 + 6y - 2t \\ 2t - y + 5 \geq 7t - 3y - 12 \\ 2t - y + 5 \geq t - 6y + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y \leq 4t + 8 \\ 2y \geq 5t - 17 \\ 5y \geq -t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t + 16 \geq 35t - 119 \\ 20t + 40 \geq -7t - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -2 \leq t \leq 5$$

Отсюда следует, что максимальное значение исходной функции — 5

Задача 6

Грузовой самолёт может перевозить не более 100 тонн груза объёмом не более 60 кубических метров. Для перевозки есть три материала:
(А) плотность 2 тонны/м^3; всего есть 40 м^3, доход — 1000 руб./м^3;
(Б) плотность 1 тонны/м3^3; всего есть 30 м^3, доход — 1200 руб./м^3;
(В) плотность 3 тонны/м^3; всего есть 20 м^3, доход — 12000 руб./м^3.
Составьте линейную программу, которая максимизирует доход при имеющихся ограничениях, и найдите её оптимальное решение.

Пусть x, y, z - кол-во м^3, материалов (А), (Б) и (В) соответственно. Запишем линейную программу, которую нам нужно решить :

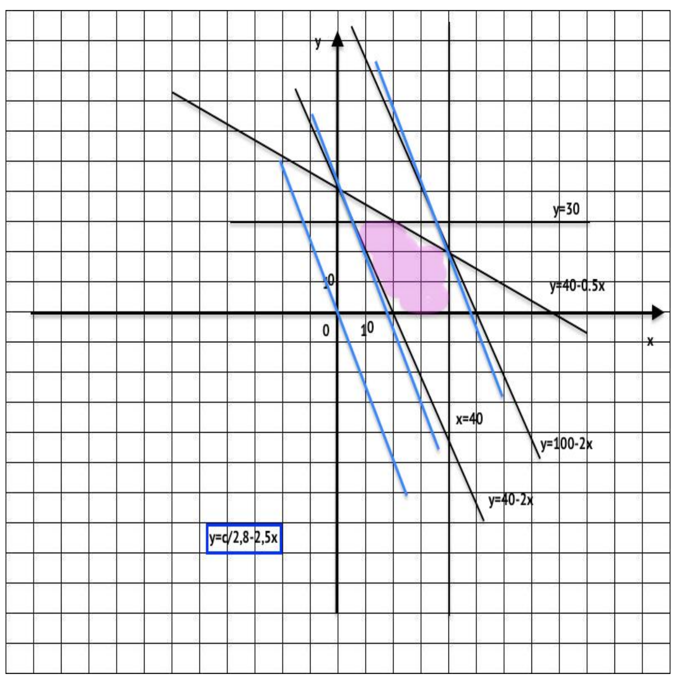
$$\begin{cases} 1000x + 1200y + 12000y \to max \\ x \leq 40 \\ y \leq 30 \\ z \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 2x + y + 3z \leq 100 \quad (a) \\ x + y + z \leq 60 \quad (b) \end{cases}$$

Так как мы ищем оптимальное решение, рассмотрим два случая: когда (a) обращается в равенство и когда (b) обращается в равенство. Начнем, со случая (a):

$$\begin{cases} 1000x + 1200y + 12000z \to max \\ x \le 40 \\ y \le 30 \\ z \le 20 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \\ 2x + y + 3z = 100 \\ x + y + z \le 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 100 - 2x - y \\ 1000x + 1200y + 4000(100 - 2x - y) \to max \\ x \le 40 \\ y \le 30 \\ 100 - 2x - y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 100 - 2x - y \ge 0 \\ 3x + 3y + 100 - 2x - y \le 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z = 100 - 2x - y \\ -7000x - 2800y + 400000 \to max \\ x \le 40 \\ y \le 30 \\ 100 - 2x - y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 100 - 2x - y \ge 0 \\ y \le 40 - \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 100 - 2x - y \\ -7000x - 2800y + 400000 \to max \\ x \le 40 \\ y \le 30 \\ y \ge 40 - 2x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 100 - 2x \\ y \le 40 - \frac{x}{2} \end{cases}$$

Решим это графически:

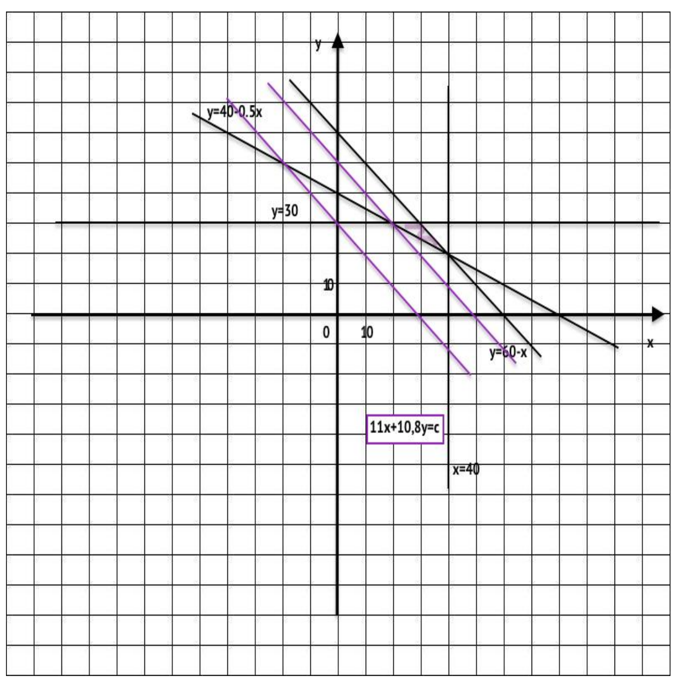


(Эта задача сводится к минимизации значения функции $7x + 2,8y$. Начертим линии уровня). Наша новая целевая функция принимает минимальное значение, когда проходит через (5, 30). Тогда максимальное значение исходной целевой функции будет равным: 281000 при x=5, y=30, z = 20 Рассмотрим случай (b):

$$\begin{cases} 1000x + 1200y + 12000z \to max \\ x \le 40 \\ y \le 30 \\ z \le 20 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \\ 2x + y + 3z \le 100 \\ x + y + z = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 60 - x - y \\ 1000x + 1200y + 12000(60 - x - y) \to max \\ x \le 40 \\ y \le 30 \\ 60 - x - y \le 20 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 60 - x - y \ge 0 \\ 2x + y + 3(60 - x - y) \le 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 60 - x - y \\ -11000x - 10800y + 720000 \to max \\ x \le 40 \\ y \le 30 \\ x + y \ge 40 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 60 \\ x + 2y \ge 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 60 - x - y \\ -11000x - 10800y + 720000 \to max \\ x \le 40 \\ y \le 30 \\ x + y \ge 40 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 60 \\ x + 2y \ge 80 \end{cases}$$

Найдем решение графически (по факту можно свести задачу к минимизации (11x+10,8y), если заметить знаки перед каждой переменной в целевой функции):



Заметим, что наименьшее значение наша новая целевая функция достигает, когда проходит через (20, 30). Тогда получаем значение исходной целевой функции: 176000

Наибольшим значением будет 281000 (случай (a)). Оптимальным решением будет x=5, y=30, z = 20

Задача 7

Вдоль прямой движется материальная точка. Петя измерил ее положение (координату) в моменты времени 0, 1, 2, 4 и получил значения 2, 3.1, 4.1, 5.9. Предположив, что точка движется с постоянной скоростью, Петя хочет найти начальное положение точки и ее скорость, наиболее согласованные с наблюдениями. Другими словами, ему нужно найти минимальное положительное ε*, для которого существует линейная функция* $x(t) = vt + x_0$*, отклонения значений которой в точках* $t = 0, 1, 2, 4$ *от наблюденных значений не больше* ε*. Напишите линейную программу, которая решает эту задачу. Найдите оптимальное решение в полученной линейной программе, то есть, оптимальные значения* ε, x_0, v*.*

Будем считать, что отклонение - это модуль от разности результатов измерений от настоящего значения, таким образом, получим систему:

$$\begin{cases} |2 - x_0| \leq \varepsilon \\ |3.1 - v - x_0| \leq \varepsilon \\ |4.1 - 2v - x_0| \leq \varepsilon \\ |5.9 - 4v - x_0| \leq \varepsilon \\ \varepsilon \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x_0 \leq \varepsilon \\ 2 - x_0 \geq -\varepsilon \\ 3.1 - v - x_0 \leq \varepsilon \\ 3.1 - v - x_0 \geq -\varepsilon \\ 4.1 - 2v - x_0 \leq \varepsilon \\ 4.1 - 2v - x_0 \geq -\varepsilon \\ 5.9 - 4v - x_0 \leq \varepsilon \\ 5.9 - 4v - x_0 \geq -\varepsilon \\ \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_0 \le 2 + \varepsilon \\
x_0 \le 3.1 - v + \varepsilon \\
x_0 \le 4.1 - 2v + \varepsilon \\
x_0 \le 5.9 - 4v + \varepsilon \\
x_0 \ge 2 - \varepsilon \\
x_0 \ge 3.1 - v - \varepsilon \\
x_0 \ge 4.1 - 2v - \varepsilon \\
x_0 \ge 5.9 - 4v - \varepsilon \\
\varepsilon \ge 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
2 + \varepsilon \ge 2 - \varepsilon \\
2 + \varepsilon \ge 3.1 - v - \varepsilon \\
2 + \varepsilon \ge 4.1 - 2v - \varepsilon \\
2 + \varepsilon \ge 5.9 - 4v - \varepsilon \\
3.1 - v + \varepsilon \ge 2 - \varepsilon \\
3.1 - v + \varepsilon \ge 3.1 - v - \varepsilon \\
3.1 - v + \varepsilon \ge 4.1 - 2v - \varepsilon \\
3.1 - v + \varepsilon \ge 5.9 - 4v - \varepsilon \\
4.1 - 2v + \varepsilon \ge 2 - \varepsilon \\
4.1 - 2v + \varepsilon \ge 3.1 - v - \varepsilon \\
4.1 - 2v + \varepsilon \ge 4.1 - 2v - \varepsilon \\
4.1 - 2v + \varepsilon \ge 5.9 - 4v - \varepsilon \\
5.9 - 4v + \varepsilon \ge 2 - \varepsilon \\
5.9 - 4v + \varepsilon \ge 3.1 - v - \varepsilon \\
5.9 - 4v + \varepsilon \ge 4.1 - 2v - \varepsilon \\
5.9 - 4v + \varepsilon \ge 5.9 - 4v - \varepsilon \\
\varepsilon \ge 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
v \le 1.1 + 2\varepsilon \\
v \le 1.05 + \varepsilon \\
v \le 1 + 2\varepsilon \\
v \le 0.975 + 0.5\varepsilon \\
v \le \frac{2.8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon \\
v \le 0.9 + \varepsilon \\
v \ge 1.1 - 2\varepsilon \\
v \ge 1.05 - \varepsilon \\
v \ge 0.975 - 0.5\varepsilon \\
v \ge 1 - 2\varepsilon \\
v \ge \frac{2.8}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon \\
v \ge 0.9 - \varepsilon \\
\varepsilon \ge 0
\end{cases}
$$

Следующая система реально гигантская, поэтому прошу простить мне такое оформление:(

$$
\begin{cases}
1.1 + 2\varepsilon \geq 1.1 - 2\varepsilon \\
1.1 + 2\varepsilon \geq 1.05 - \varepsilon \\
1.1 + 2\varepsilon \geq 0.975 - 0.5\varepsilon \\
1.1 + 2\varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon \\
1.1 + 2\varepsilon \geq \frac{2.8}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon \\
1.1 + 2\varepsilon \geq 0.9 - \varepsilon \\
1.05 + \varepsilon \geq 1.1 - 2\varepsilon \\
1.05 + \varepsilon \geq 1.05 - \varepsilon \\
1.05 + \varepsilon \geq 0.975 - 0.5\varepsilon \\
1.05 + \varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon \\
1.05 + \varepsilon \geq \frac{2.8}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon \\
1.05 + \varepsilon \geq 0.9 - \varepsilon \\
1 + 2\varepsilon \geq 1.1 - 2\varepsilon \\
1 + 2\varepsilon \geq 1.05 - \varepsilon \\
1 + 2\varepsilon \geq 0.975 - 0.5\varepsilon \\
1 + 2\varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon \\
1 + 2\varepsilon \geq \frac{2.8}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon \\
1 + 2\varepsilon \geq 0.9 - \varepsilon \\
0.975 + 0.5\varepsilon \geq 1.1 - 2\varepsilon \\
0.975 + 0.5\varepsilon \geq 1.05 - \varepsilon \\
0.975 + 0.5\varepsilon \geq 0.975 - 0.5\varepsilon \\
0.975 + 0.5\varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon \\
0.975 + 0.5\varepsilon \geq \frac{2.8}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon \\
0.975 + 0.5\varepsilon \geq 0.9 - \varepsilon \\
\frac{2.8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon \geq 1.1 - 2\varepsilon \\
\frac{2.8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon \geq 1.05 - \varepsilon \\
\frac{2.8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon \geq 0.975 - 0.5\varepsilon \\
\frac{2.8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon \\
\frac{2.8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon \geq \frac{2.8}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon \\
\frac{2.8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon \geq 0.9 - \varepsilon \\
0.9 + \varepsilon \geq 1.1 - 2\varepsilon \\
0.9 + \varepsilon \geq 1.05 - \varepsilon \\
0.9 + \varepsilon \geq 0.975 - 0.5\varepsilon \\
0.9 + \varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon \\
0.9 + \varepsilon \geq \frac{2.8}{3} - \frac{2}{3}\varepsilon \\
0.9 + \varepsilon \geq 0.9 - \varepsilon \\
\varepsilon \geq 0
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad \varepsilon \geq \frac{3}{40}
$$

Осталось подставить это значение и найти $x_0,\ v$.

$$\begin{cases} |2 - x_0| \le \frac{3}{40} \\ |3.1 - v - x_0| \le \frac{3}{40} \\ |4.1 - 2v - x_0| \le \frac{3}{40} \\ |5.9 - 4v - x_0| \le \frac{3}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - x_0 \le \frac{3}{40} \\ 2 - x_0 \ge -\frac{3}{40} \\ 3.1 - v - x_0 \le \frac{3}{40} \\ 3.1 - v - x_0 \ge -\frac{3}{40} \\ 4.1 - 2v - x_0 \le \frac{3}{40} \\ 4.1 - 2v - x_0 \ge -\frac{3}{40} \\ 5.9 - 4v - x_0 \le \frac{3}{40} \\ 5.9 - 4v - x_0 \ge -\frac{3}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{83}{40} \\ v = \frac{39}{40} \end{cases}$$