Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

5 ноября 2017

Задача 1

Всякий раз перед дождём Петя чихает. Как-то раз Петя чихнул. «Значит будет дождь» — подумал он. Правильно ли рассуждал Петя?

Посмотрим, когда первое утверждение будет верным: когда идет дождь, а перед этим Петя чихнул, либо дождь не идет. Пусть событие p - Петя чихнул, а q – пошел дождь. Тогда:

$$pq \vee \bar{q}$$

Теперь запишем второе высказывание:

$$p \to q$$

. Заметим, что данные высказывания неэквивалентны, так как при p=0, q=1, они принимают разные значения.

Задача 2

Написать формулу от переменных p, q, r, которая истинна тогда и только тогда, когда ровно две переменных истинны

$$\bar{p}qr \vee p\bar{q}r \vee pq\bar{r}$$

Задача 3

Привести к КНФ формулу $(u \to v) \to (w \wedge u)$

$$(u \to v) \to (w \wedge u)$$
$$\overline{(u \to v)} \vee (w \wedge u)$$
$$\overline{(\bar{u} \vee v)} \vee (w \wedge u)$$
$$u\bar{v} \vee wu$$
$$u \wedge (\bar{v} \vee w)$$

Задача 4

Доказать в исчислении резолюций несовместность наборадизъюнктов $a \vee b, b \vee c, c \vee d, d \vee e, e \vee a, \overline{a} \vee \overline{b}, \overline{b} \vee \overline{c}, \overline{c} \vee \overline{d}, \overline{d} \vee \overline{e}, \overline{e} \vee \overline{a}$

Запишем следующие шаги метода резолюций

$$\frac{a\vee b, \overline{a}\vee\overline{e}}{b\vee\overline{e}} \quad \frac{b\vee c, \overline{a}\vee\overline{b}}{\overline{a}\vee c} \quad \frac{c\vee d,\ \overline{c}\vee\overline{b}}{d\vee\overline{b}} \quad \frac{e\vee a,\ \overline{e}\vee\overline{d}}{a\vee\overline{d}}$$

$$\frac{a\vee b,\ \overline{b}\vee\overline{c}}{a\vee\overline{c}} \quad \frac{b\vee\overline{e}, d\vee\overline{b}}{\overline{e}\vee d}$$

$$\frac{\overline{e}\vee d, d\vee e}{d} \quad \frac{d, \overline{d}\vee a}{a} \quad \frac{a, \overline{a}\vee c}{c} \quad \frac{c, \overline{c}\vee\overline{d}}{\overline{d}}$$

$$\frac{d, \overline{d}}{\varnothing}$$

Задача 5

Можно ли в исчислении резолюций из набора дизъюнктов $p\vee q, \overline{p}\vee q\vee r, p\vee\overline{q}\vee r, \overline{p}\vee\overline{r}, p\vee\overline{q}\vee\overline{r}$ вывести пустой дизъюнкт?

Запишем следующие выражения:

$$\frac{p\vee q, \overline{p}\vee q\vee r}{q\vee r} \quad \frac{\overline{p}\vee q\vee r, \overline{p}\vee\overline{r}}{\overline{p}\vee q} \quad \frac{p\vee q, p\vee\overline{q}\vee r}{p\vee r} \quad \frac{p\vee q, p\vee\overline{q}\vee\overline{r}}{p\vee\overline{r}}$$

$$\frac{p\vee r, p\vee\overline{r}}{p} \quad \frac{p, \overline{p}\vee q}{q} \quad \frac{p, \overline{p}\vee\overline{r}}{\overline{r}}$$

Теперь внимательно посмотрим на те дизъюнкты которые мы написали (и исходные тоже). Мы вывели следующие элементарные высказывания: p, q, $\overline{r}$. Заметим же, что хотя бы одно из них появляется в каждом дизъюнкте. Таким образом исходная кнф будет выполнима, а, значит, и пустой дизъюнкт вывести нельзя (еще достаточно указать, что исходная КНФ выполнима при $p=1, q=1, r=0$).

Задача 6

Используя исчисление резолюций, докажите, что формула $((a\to b)\to\overline{b})b$ не является выполнимой. (Требуется сначала применить к формуле полиномиальный алгоритм сведения выполнимости формул общего вида к выполнимости формул в КНФ, а затем найти опровержение полученной формулы в исчислении резолюций.)

Сделаем следующие замены:

$$\begin{cases} x_1 = (a\to b) \\ x_2 = \overline{b} \\ x_3 = x_1 \to x_2 \\ x_4 = x_3 \wedge b \end{cases}$$

Запишем нашу новую формулу:

$$A' = (x_1 \equiv (a\to b)) \wedge (x_2 \equiv \overline{b}) \wedge (x_3 \equiv (x_1 \to x_2)) \wedge (x_4 \equiv (x_3)) \wedge x_4$$

$$(x_1 \equiv (\overline{a}\vee b)) \wedge (x_2 \equiv \overline{b}) \wedge (x_3 \equiv (\overline{x_1}\vee x_2)) \wedge (x_4 \equiv (x_3)) \wedge x_4$$

По частям преобразуем (используем Де Моргана для эквивалентностей):

$$(x_1 \equiv (\overline{a}\vee b)) = (\overline{x_1}\vee\overline{a}\vee b) \wedge (x_1 \vee a) \wedge (x_1 \vee \overline{b})$$

$$(x_2 \equiv \overline{b}) = (\overline{x_2} \vee \overline{b}) \wedge (x_2 \vee b)$$

$$(x_3 \equiv (\overline{x_1} \vee x_2)) = (\overline{x_3} \vee \overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee \overline{x_2})$$

$$(x_4 \equiv (x_3)) = (\overline{x_4} \vee x_3) \wedge (\overline{x_4} \vee b) \wedge (x_4 \vee \overline{x_3} \vee \overline{b})$$

Таким образом, получаем:

$$(\overline{x_1} \vee \overline{a} \vee b) \wedge (x_1 \vee a) \wedge (x_1 \vee \overline{b}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{b}) \wedge (x_2 \vee b) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{x_1} \vee x_2) \wedge$$

$$\wedge (x_3 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_4} \vee x_3) \wedge (\overline{x_4} \vee b) \wedge (x_4 \vee \overline{x_3} \vee \overline{b}) \wedge x_4$$

Воспользуемся методом исчисления резолюций:

$$\frac{x_4, \overline{x_4} \vee x_3}{x_3} \qquad \frac{x_4, \overline{x_4} \vee b}{b} \qquad \frac{b, \overline{b} \vee x_1}{x_1} \qquad \frac{b, \overline{b} \vee \overline{x_2}}{\overline{x_2}}$$

$$\frac{\overline{x_2}, x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_1}}{\overline{x_3} \vee \overline{x_1}} \qquad \frac{x_3, \overline{x_3} \vee \overline{x_1}}{\overline{x_1}}$$

$$\frac{x_1, \overline{x_1}}{\varnothing}$$

Задача 7

Используя исчисление резолюций, докажите, что формула $((x \to y) \wedge \overline{y}) \to \overline{x})$ является тавтологией. (Требуется сначала применить к отрицанию формулы полиномиальный алгоритм сведения выполнимости формул общего вида к выполнимости формул в КНФ, а затемнайти опровержение полученной формулы в исчислении резолюций.)

Для начала найдем отрицание этого высказывания:

$$\neg((x \to y) \wedge \overline{y}) \to \overline{x}) = ((x \to y) \wedge \overline{y}) \wedge x$$

Сделаем следующие замены:

$$\begin{cases} x_1 = (x \to y) = (\overline{x} \vee y) \\ x_2 = \overline{y} \\ x_3 = (x_1 \wedge x_2) \\ x_4 = (x_3 \wedge x) \end{cases}$$

Получим следующее:

$$(x_1 \equiv (\overline{x} \vee y)) \wedge (x_2 \equiv \overline{y}) \wedge (x_3 \equiv (x_1 \wedge x_2)) \wedge (x_4 \equiv (x_3 \wedge x)) \wedge x_4$$

Упростим по частям:

$$(x_1 \equiv (\overline{x} \vee y)) = (\overline{x_1} \vee \overline{x} \vee y) \wedge (x_1 \vee x) \wedge (x_1 \vee \overline{y})$$

$$(x_2 \equiv \overline{y}) = (\overline{x_2} \vee \overline{y}) \wedge (x_2 \vee y)$$

$$(x_3 \equiv (x_1 \wedge x_2)) = (\overline{x_3} \vee x_1) \wedge (\overline{x_3} \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$

$$(x_4 \equiv (x_3 \wedge x)) = (\overline{x_4} \vee x_3) \wedge (\overline{x_4} \vee x) \wedge (x_4 \vee \overline{x_3} \vee x)$$

Таким образом, мы получаем:

$$(\overline{x_1} \vee \overline{x} \vee y) \wedge (x_1 \vee x) \wedge (x_1 \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{y}) \wedge (x_2 \vee y) \wedge (\overline{x_3} \vee x_1) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x_3} \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_4} \vee x_3) \wedge (\overline{x_4} \vee x) \wedge (x_4 \vee \overline{x_3} \vee x) \wedge x_4$$

Используем исчисление резолюций:

$$\frac{x_4, \overline{x_4} \vee x_3}{x_3} \qquad \frac{x_4, \overline{x_4} \vee x}{x} \qquad \frac{x_3, \overline{x_3} \vee x_2}{x_2} \qquad \frac{x_3, \overline{x_3} \vee x_1}{x_1}$$

$$\frac{x_1, \overline{x_1} \vee \overline{x} \vee y}{\overline{x} \vee y} \qquad \frac{\overline{x} \vee y, x}{y} \qquad \frac{y, \overline{y} \vee \overline{x_2}}{\overline{x_2}}$$

$$\frac{\overline{x_2}, x_2}{\varnothing}$$

Таким образом исходное высказывание является тавтологией

Задача 8

Добавим к исчислению резолюций правило, которое позволяет вывести из дизъюнкта A любой дизъюнкт вида $A \vee B$. Расширит ли это добавление возможности исчисления резолюций (можно ли будет с помощью этого правила доказать несовместность какого-нибудь набора дизъюнктов, для которого раньше это было невозможно)?

Если в исходном высказывании нельзя было вывести пустой дизъюнкт, то исходное высказывание выполнимо. То есть КНФ вида $A(x) \wedge Q(x)$. Заметим, что и КНФ вида $(A(x) \vee Q(x)) \wedge Q(x) \wedge A(x) = A(x) \wedge Q(x) \vee Q(x) \wedge A(x)$ тоже выполнима.

Можно привести тривиальный пример: $p \wedge q$ – нельзя вывести пустой дизъюнкт.

$$(p \vee q) \wedge p \wedge q = p \wedge q$$

. Снова нельзя вывести пустой дизъюнкт. Так как вопрос заключается не в существовании, а во всеобщности, то ответ: нет.