Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

22 октября 2017

Задача 1

Может ли трехмерный полиэдр иметь ровно одну двумерную грань?

Полиэдром называется множество решений конечной системы линейных неравенств. Окей, тогда давайте приведем такую систему линейных неравенств, у решения которой будет лишь одна двумерная грань:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z \leq 276 \\ x + 3y + 5z \leq 2 \end{cases}$$

Достаточно легко заметить, что решениями этой системы будут решения неравенства: $x + 3y + 5z \leq 2$, а единственной двумерной гранью будет плоскость, заданная уравнением $x + 3y + 5z = 2$

Задача 2

Сколько трёхмерных граней у четырёхмерного полиэдра, заданного неравенствами

$$3y - x \geq 0, \quad 3x - y \geq 0, \quad x + y \geq -1, \quad z \geq 0, \quad t \geq 0 \quad ?$$

Воспользуемся тем, что грань полиэдра - непустое множество, получающееся, когда одно или несколько неравенств полиэдра обращается в равенство. Заметим, что когда обращаютсяв равество предпоследнее или последнее неравенство системы, то мы получаем трехмерную грань (эти неравенства нельзя выразить через предыдущие). Посмотрим, на первые три неравенства. Достаточно легко заметить, что они линейно зависимы, так как размерность их базиса будет равна 2. Таким образом у нас есть еще 2 трехмерных грани. Итого 4.

Задача 3

В игре с нулевой суммой у первого игрока два возможных хода, а у второго — три. В таблице показан выигрыш первого игрока. Найти цену этой игры и оптимальные смешанные стратегии игроков.

2	-1	2
0	1	-1

Внимательно посмотрим на данную таблицу. Цель второго игрока – максимально снизить выигрыш первого. Сравним первый и последний столбец. Никакого профита выбирать 1 столбец у 2 игрока нет, если он, конечно, не дурачок. Поэтому воспользуемся свойством доминирующих и доминируемых столбцов, возьмем и исключим его. Тогда получим следующую таблицу

	2	**3**
1	-1	2
2	1	-1

В дальнейшем нам будет не очень удобно работать с отрицательными числами, поэтому прибавим к каждой ячейке матрицы 2 (а потом не забудем отнять это значение от цены игры), получаем:

	2	**3**
1	1	4
2	3	1

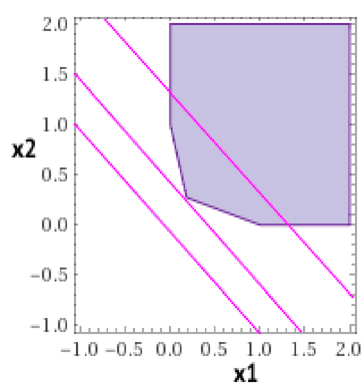
Возьмем вероятности p_1, p_2 - выбора 1 игроком первой и второй строки соответственно, а q_2, q_3 - второго и третьего столбца вторым игроком. Пусть u – цена игры. Получим следующие системы:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ p_1,\ p_2 \geq 0 \\ p_1 + 3p_2 \geq u \\ 4p_1 + p_2 \geq u \\ u \to max \end{cases} \qquad \begin{cases} q_2 + q_3 = 1 \\ q_2,\ q_3 \geq 0 \\ q_2 + 4q_3 \leq u \\ 3q_2 + q_3 \leq u \\ u \to min \end{cases}$$

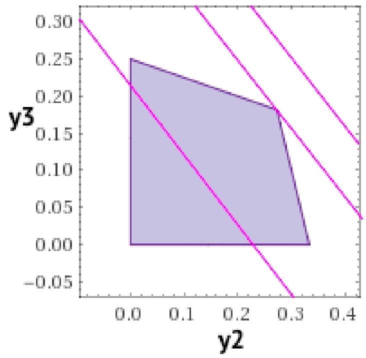
Заметим, что u – неотрицательно (даже больше – положительно), сделаем следующие замены : $x_1 = \frac{p_1}{u}$, $x_2 = \frac{p_2}{u}$ и $y_2 = \frac{q_2}{u}$, $y_3 = \frac{q_3}{u}$. Получаем следующее:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{u}\right) = x_1 + x_2 \to min \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ 4x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{u}\right) = y_2 + y_3 \to max \\ y_2,\ y_3 \geq 0 \\ y_2 + 4y_3 \leq 1 \\ 3y_2 + y_3 \leq 1 \end{cases}$$

Такие задачи линейного программирования мы умеем решать графически:



Розовым цветом обозначим линии уровня $x_1 + x_2$. Заметим, что целевая функция будет принимать минимальное значение, в точке пересечения $x_1 + 3x_2 = 1$ и $4x_1 + x_2 = 1$ – точка $\left(\frac{2}{11};\ \frac{3}{11}\right)$, а само минимальное значение будет равно $\frac{5}{11}$.Тогда u=$\frac{11}{5}$
Проделаем это же для второй системы:



Целевая функция будет принимать наибольшее значение в точке пересечения $y_2 + 4y_3 = 1$ и $3y_2 + y_3 = 1$ – точке $\left(\frac{3}{11};\ \frac{2}{11}\right)$. Оптимальное значение снова – $\frac{5}{11}$, u=$\frac{11}{5}$ Отсюда находим цену игры (а помните, мы еще прибавляли 2): $\frac{11}{5} - 2 = \frac{1}{5}$. Теперь запишем оптимальные смешанные стратегии игроков:

$$p_1 = \frac{2}{5},\quad p_2 = \frac{3}{5},\quad q_1 = 0,\quad q_2 = \frac{3}{5},\quad q_3 = \frac{2}{5}$$

Задача 4

Ориентированный граф состоит из вершин s,t,a,b,c и рёбер, пропускные способности которых указаны в таблице.

$s \to a$	*3*
$s \to b$	*1*
$a \to b$	*1*
$a \to c$	*1*
$c \to a$	*1*
$b \to c$	*1*
$b \to t$	*3*
$c \to t$	*2*

a) Запишите в виде задачи линейного программирования задачу нахождения максимального потока из s в t.
b) Найдите двойственную к этой задачу.
c) Найдите оптимальные решения прямой и двойственной задач и проверьте соотношения дополняющей нежесткости.

a) Запишем соответствующую задачу ЛП:

$$\begin{cases} 0 \le x_{sa} \le 3 \\ 0 \le x_{sb} \le 1 \\ 0 \le x_{ab} \le 1 \\ 0 \le x_{ac} \le 1 \\ 0 \le x_{ca} \le 1 \\ 0 \le x_{bc} \le 1 \\ 0 \le x_{bt} \le 3 \\ 0 \le x_{ct} \le 2 \\ x_{sa} + x_{ca} - x_{ac} - x_{ab} = 0 \\ x_{sb} + x_{ab} - x_{bc} - x_{bt} = 0 \\ x_{ac} + x_{bc} - x_{ca} - x_{ct} = 0 \\ x_{sa} + x_{sb} \to max \end{cases}$$

b) Запишем двойственную задачу:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 3y_7 + 2y_8 \to min \\ y_{1..8} \ge 0 \\ y_1 + y_9 = 0 \\ y_2 + y_{10} = 0 \\ y_3 - y_9 + y_{10} = 0 \\ y_4 - y_9 + y_{11} = 0 \\ y_5 + y_9 - y_{11} = 0 \\ y_6 - y_{10} + y_{11} = 0 \\ y_7 - y_{10} = 1 \\ y_8 - y_{11} = 1 \end{cases}$$

c) Для того, чтобы найти оптимум, воспользуемся теоремой Форда-Фалкерсона, что минимальный разрез равен максимальному потоку. Заметим, что минимальный разрез равен 3. Отсюда допустимые решения систем:

$$\begin{cases} x_{sb} = 1 \\ x_{sa} = 2 \\ x_{ac} = 1 \\ x_{ab} = 1 \\ x_{ca} = 0 \\ x_{cb} = 1 \\ x_{ct} = 1 \\ x_{bt} = 2 \\ x_{bc} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 1 \\ y_5 = 0 \\ y_6 = 0 \\ y_7 = 0 \\ y_8 = 0 \\ y_9 = 0 \\ y_{10} = -1 \\ y_{11} = -1 \end{cases}$$

Проверим соотношения дополняющей нежесткости. В прямой задаче насыщаются неравенства 1,5,6,8, а значит, соответствующие y равны 0. Это верно.

Задача 5

Найдите оптимум в задаче линейного программирования, решив двойственную задачу.

$$x + 2y + 25z \to max$$

$$x - y + z \leq 1, x + 2y - z \leq 2, -2x + y + 3z \leq 3$$

Для начала составим двойственную задачу и решим ее:

$$\begin{cases} u + 2w + 3v \to max \\ u \geq 0 \\ w \geq 0 \\ v \geq 0 \\ u + w - 2v = 1 \\ -u + 2w + v = 2 \\ u - w + 3v = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 10 \\ w = 3 \\ v = 6 \end{cases}$$

Отсюда найдем оптимум двойственной задачи: 10+6+18=34, он совпадет с оптимумом прямой задачи.

Задача 6

Используя алгоритм симплекс метода с начальным решением x = y = z = 0, найдите оптимум в задаче линейного программирования

$$2x - y - z \to max$$

$$x - 2y - z \leq 0, \quad x + 3y \leq 10, \quad -x + y + 5z \leq 35, \quad 2x - y + z \leq 18.$$

Для начала введем фиктивные переменные, которые помогут нам из системы неравенств получить систему уравнений:

$$\begin{cases} P = 2x - y - z \to max \\ x - 2y - z \leq 0 \\ x + 3y \leq 10 \\ -x + y + 5z \leq 35 \\ 2x - y + z \leq 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z + u = 0 \\ x + 3y + w = 10 \\ -x + y + 5z + v = 35 \\ 2x - y + z + k = 18 \\ P - 2x + y + z = 0 \\ P, u, w, v, k \geq 0 \end{cases}$$

Запишем нашу матрицу коэффициентов в виде таблицы:

P	x	y	z	u	w	v	k		базисная переменная	
0	1	-2	-1	1	0	0	0	0	u	0
0	1	3	0	0	1	0	0	10	w	10
0	-1	1	5	0	0	1	0	35	v	X
0	2	-1	1	0	0	0	1	18	k	9
1	-2	1	1	0	0	0	0	0	P	

P	0
x	0
y	0
z	0
u	0
w	10
v	35
k	18

Как мы видим, в последней строке самое большое по модулю отрицательное число находится во втором столбце, избавимся от него. Выберем строчку, с помощью которой мы сможем это сделать. Поделим столбец свободных членов почленно на столбец коэффициентов перед x. Выберем строчку с наименьшим неотрицательным значением. Затем вычтем эту строчку из всех остальных строчек. Получаем:

P	x	y	z	u	w	v	k		базисная переменная	
0	1	-2	-1	1	0	0	0	0	x	×
0	0	5	1	-1	1	0	0	10	w	2
0	0	-1	4	1	0	1	0	35	v	×
0	0	-1	1	0	0	0	1	18	k	6
1	0	-3	-1	2	0	0	0	0	P	

P	0
x	0
y	0
z	0
u	0
w	10
v	35
k	18

Данный опорный план неоптимален, так как в последней строке есть отрицательные значение. Продолжим наши итерации:

P	x	y	z	u	w	v	k		базисная перем.	
0	1	0	-3/5	3/5	2/5	0	0	4	x	×
0	0	1	1/5	-1/5	1/5	0	0	2	y	10
0	0	0	21/5	4/5	1/5	1	0	37	v	185/21
0	0	0	12/5	-7/5	-3/5	0	1	12	k	5
1	0	0	-2/5	7/5	3/5	0	0	6	P	

P	6
x	4
y	2
z	0
u	0
w	0
v	37
k	12

Наш план снова неоптимальный (есть отрицательные значения). Повторим итерацию:

P	x	y	z	u	w	v	k		базисная переменная	
0	1	0	0	1/4	1/4	0	1/4	7	x	
0	0	1	0	-1/12	1/4	0	-1/12	1	y	
0	0	0	0	13/4	5/4	1	-7/4	16	v	
0	0	0	1	-7/12	-1/4	0	5/12	5	z	
1	0	0	0	7/6	1/2	0	1/6	8	P	

P	8
x	7
y	1
z	5
u	0
w	0
v	16
k	0

Как мы видим, данный план уже будет оптимальным. Опмтимум целевой функции будет равен 8.

Задача 7

Используя алгоритм симплекс метода с начальным решением $x = y = z = 0$, найдите оптимум в задаче линейного программирования

$$-3x + 2y \to max$$

$$3x - y + 2z \leq 0, 8x - y + 3z \leq 10, -x + 3y - z \leq 33, -5x - z \leq 7.$$

Докажите, что найденное решение оптимально.

Составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P + 3x - 2y = 0 \\ 3x - y + 2z + u = 0 \\ 8x - y + 3z + w = 10 \\ -x + 3y - z + v = 33 \\ -5x - z + k = 7 \\ P, u, w, v, k \geq 0 \end{cases}$$

Запишем матрицу коэффициентов:

P	x	y	z	u	w	v	k		базисная переменная	
0	3	-1	2	1	0	0	0	0	u	×
0	8	-1	3	0	1	0	0	10	w	×
0	-1	3	-1	0	0	1	0	33	v	33/3
0	-5	0	-1	0	0	0	1	7	k	×
1	3	-2	0	0	0	0	0	0	P	

P	0
x	0
y	0
z	0
u	0
w	10
v	33
k	7

Аналогично предыдущей задаче получаем следующую таблицу:

P	x	y	z	u	w	v	k		базисная перем.	
0	8/3	0	5/3	1	0	1/3	0	11	u	33/5
0	23/3	0	8/3	0	1	1/3	0	21	w	63/8
0	-1/3	1	-1/3	0	0	1/3	0	11	y	×
0	-5	0	-1	0	0	0	1	7	k	×
1	7/3	0	-2/3	0	0	2/3	0	22	P	

P	22
x	0
y	11
z	0
u	11
w	21
v	0
k	7

Опорный план не является оптимальным, поэтому проведем еще одну итерацию:

P	x	y	z	u	w	v	k		базисная перем.
0	8/5	0	1	3/5	0	1/5	0	33/5	z
0	17/5	0	0	-8/5	1	-1/5	0	17/5	w
0	1/5	1	0	1/5	0	2/5	0	66/5	y
0	-17/5	0	0	3/5	0	1/5	1	68/5	k
1	17/5	0	0	2/5	0	4/5	0	132/5	P

P	132/5
x	0
y	66/5
z	33/5
u	0
w	17/5
v	0
k	68/5

Данный опорный план является оптимальным, так как в последней строке нет ни одного отрицательного элемента. Наше доказательство следует из корректности симплекс метода. Таким образом оптимум равен 132/5.

Задача 8

В игре с нулевой суммой у каждого игрока по три возможных хода. В таблице показан выигрыш игрока, который выбирает строку (а другой выбирает столбец).

Используя симплекс метод, найти цену этой игры и оптимальные вероятностные стратегии игроков.

1	*-2*	*2*
3	*7*	*-1*
-4	*-11*	*5*

Давайте прибавим 12 к каждой ячейке (а потом не забудем это отнять в самом конце). Получим тблицу:

13	10	14
15	19	11
8	1	17

Пусть вероятность p_i вероятность выбора i-той строки первым игроком, а q_j – вероятность выбора j-того столбца вторым игроком. Запишем следующие системы:

$$\begin{cases} 13p_1 + 12p_2 + 8p_3 \geq u \\ 10p_1 + 19p_2 + p_3 \geq u \\ 14p_1 + 11p_2 + 17p_3 \geq u \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1,\ p_2,\ p_3 \geq 0 \\ u \to max \end{cases} \qquad \begin{cases} 13q_1 + 10q_2 + 14q_3 \leq u \\ 15q_1 + 19q_2 + 11q_3 \leq u \\ 8q_1 + q_2 + 17q_3 \leq u \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1,\ q_2,\ q_3 \geq 0 \\ u \to min \end{cases}$$

Заметим, что u будет положительным, поэтому сделаем следующую замену: $x_i = \frac{p_i}{u},\ \ y_i = \frac{q_i}{u}$ Получим следующие системы:

$$\begin{cases} 13x_1 + 12x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 10x_1 + 19x_2 + x_3 \geq 1 \\ 14x_1 + 11x_2 + 17x_3 \geq 1 \\ \left(\frac{1}{u}\right) = x_1 + x_2 + x_3 \to min \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 13y_1 + 10y_2 + 14y_3 \leq 1 \\ 15y_1 + 19y_2 + 11y_3 \leq 1 \\ 8y_1 + y_2 + 17y_3 \leq 1 \\ \left(\frac{1}{u}\right) = y_1 + y_2 + y_3 \to max \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Теперь решим их, воспользовавшись симплекс-методом (не буду подробно пояснять, алгоритм такой же, как в предыдущих задачах):
(1):

$$\begin{cases} 13x_1 + 12x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 10x_1 + 19x_2 + x_3 \geq 1 \\ 14x_1 + 11x_2 + 17x_3 \geq 1 \\ \left(\frac{1}{u}\right) = x_1 + x_2 + x_3 \to min \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x_1 + 12x_2 + 8x_3 - x_4 = 1 \\ 10x_1 + 19x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ 14x_1 + 11x_2 + 17x_3 - x_6 = 1 \\ P - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

P	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		базисная переменная	
0	13	12	8	-1	0	0	1	x_4	1/13
0	10	19	1	0	-1	0	1	x_5	1/10
0	14	11	17	0	0	-1	1	x_6	1/14
1	-1	-1	-1	0	0	0	0	P	

P	0
x_1	0
x_2	0
x_3	0
x_4	-1
x_5	-1
x_6	-1

P	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		баз. п.	
0	0	25/14	-109/14	-1	0	0	1/14	x_4	1/25
0	0	156/14	-156/14	0	-1	10/14	4/14	x_5	1/39
0	1	11/14	17/14	0	0	-1/14	1/14	x_1	1/11
1	0	-3/14	3/14	0	0	-1/14	1/14	P	

P	1/14
x_1	1/14
x_2	0
x_3	0
x_4	1/14
x_5	4/14
x_6	0

P	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		б. п.
0	0	0	84/14	1	-25/156	-889/1092	-14/546	x_4
0	0	1	-1	0	-1/14	05/78	1/39	x_2
0	1	0	28/14	0	11/156	-19/156	2/39	x_1
1	0	0	0	0	-1/52	-3/52	1/13	P

P	1/13
x_1	2/39
x_2	1/39
x_3	0
x_4	-14/546
x_5	0
x_6	0

Данный опорный план оптимален, поэтому получаем, что $u = 13,\ \ p_2 = 1/4, p_3 = 3/4$.
Проделаем это же для 2 системы:

$$\begin{cases} 13y_1 + 10y_2 + 14y_3 + y_4 = 1 \\ 15y_1 + 19y_2 + 11y_3 + y_5 = 1 \\ 8y_1 + y_2 + 17y_3 + y_6 = 1 \\ \left(\frac{1}{u}\right) = y_1 + y_2 + y_3 \to max \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, y_5,\ y_6 \geq 0 \end{cases}$$

P	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6		баз. п.	
0	13	10	14	1	0	0	1	y_4	1/14
0	15	19	11	0	1	0	1	y_5	1/11
0	8	1	17	0	0	1	1	y_6	1/17
1	-1	-1	-1	0	0	0	0	P	

P	0
y_1	0
y_2	0
y_3	0
y_4	1
y_5	1
y_6	1

P	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6		баз. п.	
0	109/17	156/17	0	1	0	-14/17	3/17	y_4	1/51
0	167/17	312/17	0	0	1	-11/17	6/17	y_5	1/52
0	8/17	1/17	1	0	0	1/17	1/17	y_3	1
1	-9/17	-16/17	0	0	0	0	1/17	P	

P	1/17
y_1	0
y_2	0
y_3	1/17
y_4	3/17
y_5	6/17
y_6	0

P	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6		б. п.	
0	3/2	0	0	1	-1/2	-1/2	0	y_4	0
0	167/312	1	0	0	17/312	-11/312	1/52	y_2	6/167
0	137/312	0	1	0	-1/312	19/312	3/52	y_3	18/137
1	-1/39	0	0	0	2/39	1/39	1/13	P	0

P	1/13
y_1	0
y_2	1/52
y_3	3/52
y_4	0
y_5	0
y_6	0

P	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6		баз. п.
0	1	0	0	2/3	-1/3	-1/3	0	y_1
0	0	1	0	-167/468	109/468	67/468	1/52	y_2
0	0	0	1	-137/468	67/468	97/468	3/52	y_3
1	0	0	0	2/117	5/117	2/117	1/13	P

P	1/13
y_1	0
y_2	1/52
y_3	3/52
y_4	0
y_5	0
y_6	0

Отсюда получаем, что $u = 13$, $q_1 = \frac{2}{9}$, $q_2 = \frac{5}{9}$, $q_3 = \frac{2}{9}$. Мы к каждой ячейке прибавляли 12. Учтем это. Тогда цена игры равна 1, а оптимальный план равен:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{3}{4}, \quad q_1 = \frac{2}{9}, \quad q_2 = \frac{5}{9}, \quad q_3 = \frac{2}{9}$$