# Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

1 октября 2017

**Задача 1**

*Найти полиэдр, полученный проекцией вдоль оси z полиэдра, задаваемого неравенствами*

$$x - 2y + z + 6 \geq 0, \quad x \geq y, \quad z + 3y \geq -3, \quad 2z - y \leq 4, \quad x + y + z \leq 7$$

*. (Полученный полиэдр надо задать системой линейных неравенств.)*

Для того, чтобы сделать проекцию вдоль оси z, методом исключения переменных преобразуем нашу систему:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 6 \geq 0 \\ x \geq y \\ z + 3y \geq -3 \\ 2z - y \leq 4 \\ x + y + z \leq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \geq 2y - x - 6 \\ z \geq -3 - 3y \\ z \leq 2 + 0.5y \\ z \leq 7 - x - y \\ x \geq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 0.5y \geq 2y - x - 6 \\ 2 + 0.5y \geq -3 - 3y \\ 7 - x - y \geq 2y - x - 6 \\ 7 - x - y \geq -3 - 3y \\ x \geq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x \\ y \leq \frac{2x}{3} + \frac{16}{3} \\ y \geq -\frac{10}{7} \\ y \leq \frac{13}{3} \\ y \geq 0.5x - 5 \end{cases}$$

**Задача 2**

*Являются ли неравенства $x + 2y \leq -7$ и $x + 2y \leq -8$ синтаксическими следствиями системы неравенств*

$$2x - y \leq 6, \quad x + y + 5 \leq 0, \quad 2y - x + 3 \leq 0?$$

Умножим каждое уравнение на какой-то неотрицательный коэффициент (чтобы знаки неравенств не поменялись – иначе их уже нельзя будет сложить) и сложим их так, чтобы коэфициенты перед x и y были равны 1 и 2 соответственно. Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} a \geq 0, \ b \geq 0, \ c \geq 0 \\ (2a + b - c)x + (-a + b + 2c)y \leq 6a - 5b - 3c \\ 2a + b - c = 1 \\ -a + b + 2c = 2 \end{cases}$$

Так как вероятные синтаксические следствие нам даны, рассмотрим два варианта этой системы и исследуем ее на совместность:

$$\begin{cases} a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0 \\ 2a + b - c = 1 \\ -a + b + 2c = 2 \\ 6a - 5b - 3c = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0 \\ 2a + b - c = 1 \\ -a + b + 2c = 2 \\ 6a - 5b - 3c = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0 \\ 2a + b - 1 = c \\ -a + b + 2(2a + b - 1) = 2 \\ 6a - 5b - 3(2a + b - 1) = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0 \\ 2a + b - 1 = c \\ -a + b + 2(2a + b - 1) = 2 \\ 6a - 5b - 3(2a + b - 1) = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0 \\ a = \frac{1}{12} \\ b = \frac{5}{4} \\ c = \frac{5}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0 \\ a = -\frac{1}{24} \\ b = \frac{11}{8} \\ c = \frac{7}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

Таким образом мы выяснили, что только $x + 2y \leq -7$ является синтаксическим следствием исходной системы.

**Задача 3**

*Докажите несовместность системы линейных неравенств*

$$5x + 3y - 2z \leq 2, \quad 3x - 2y \leq 0, \quad x + y - 2z \leq 1, \quad -3x + z \leq -1,$$

*выведя из них неравенство* $0 \leq -1$.

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z \leq 2 \\ 3x - 2y \leq 0 \\ x + y - 2z \leq 1 \\ -3x + z \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{5} - \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}z \\ x \leq \frac{2}{3}y \\ x \leq 1 - y + 2z \\ x \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z \leq \frac{2}{5} - \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}z \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z \leq \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z \leq 1 - y + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 5z \leq 6 - 9y + 6z \\ 1 + z \leq 2y \\ 1 + z \leq 3 - y + 6z \end{cases}$$

$$\begin{cases} z \geq 9y - 1 \\ z \leq 2y - 1 \\ 5z \geq y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 1 \geq 9y - 1 \\ 10y - 5 \geq y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 \leq -1$$

**Задача 4**

*Найдите задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования*

$$x - 4y + z \to max$$

$$2x + 3y - 6z \leq 5, \quad x - y + 4z \geq -1, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

*В двойственной задаче должно быть 2 переменных.*

Для двойственной задачи будем использовать переменные u и w. Так как исходная задача была направлена на максимизацию целевой функции, двойственная будет направлена на минимизацию. Коэффициенты для нашей задачи получим путем транспонирования матрицы коэффициентов исходной задачи, а знаки неравенств поставим в соответствии таблицы, которая была нам дана на лекциях (аналогичную можно увидеть в конспектах лекций в пункте 6.3):

$$\begin{cases} x - 4y + x \to max \\ 2x + 3y - 6z \leq 5 \\ x - y + 4z \geq -1 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u - w \to min \\ 2u + w \leq 1 \\ 3u - w \geq -4 \\ -6u + 4w = 1 \\ u \geq 0 \\ w \leq 0 \end{cases}$$

### Задача 5

*Найдите задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования*

$$x - y + 4z \to min$$

$$2x - 3y + z \leq 7, \quad 3x + y - z \geq 2, \quad z \geq 0.$$

*В двойственной задаче должно быть 2 переменных.*

Для двойственной задачи будем использовать переменные u и w. Так как исходная задача была направлена на миниимизацию целевой функции, двойственная будет направлена на максимизацию. Коэффициенты для нашей задачи получим путем транспонирования матрицы коэффициентов исходной задачи, а знаки неравенств поставим в соответствии таблицы, которая была нам дана на лекциях (аналогичную можно увидеть в конспектах лекций в пункте 6.3):

$$\begin{cases} x - y + 4z \to min \\ 2x - 3y + z \leq 7 \\ 3x + y - z \geq 2 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u + 2w \to max \\ 2u + 3w = 1 \\ -3u + w = -1 \\ u - w \leq 4 \\ u \leq 0 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

### Задача 6

*Транспортная задача с двумя производителями A, B и тремя потребителями C, D, E задаётся следующими данными. Стоимость доставки единицы продукта:*

| | *C* | *D* | *E* |
|---|---|---|---|
| *A* | *7* | *3* | *5* |
| *B* | *4* | *2* | *3* |

*Потребности потребителей:*

| *C* | *D* | *E* |
|---|---|---|
| *3* | *4* | *5* |

*Объёмы производства:*

| *A* | *B* |
|---|---|
| *9* | *5* |

*Напишите линейную программу, соответствующую этой задаче, и двойственную к ней линейную программу. Найдите допустимое решение прямой* *линейной программы, в которой общие затраты на транспортировку равны 45. Найдите решение двойственной задачи, доказывающее оптимальность найденного решения прямой задачи.*

Обозначим продукцию производителя A за x, а продукцию B за y. В качестве индексов у x и y укажем потребителя. Составим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 7x_C + 4y_C + 3x_D + 2y_D + 5x_E + 3y_E \to min \\ x_C + y_C = 3 \\ x_D + y_D = 4 \\ x_E + y_E = 5 \\ x_C + x_D + x_E \leq 9 \\ y_C + y_D + y_E \leq 5 \\ x_C \geq 0, \quad x_D \geq 0, \quad x_E \geq 0 \\ y_C \geq 0, \quad y_D \geq 0, \quad y_E \geq 0 \end{cases}$$

Теперь учтем информацию про затраты на транспортировку:

$$\begin{cases} 7x_C + 4y_C + 3x_D + 2y_D + 5x_E + 3y_E = 45 \\ x_C + y_C = 3 \\ x_D + y_D = 4 \\ x_E + y_E = 5 \\ x_C + x_D + x_E \leq 9 \\ y_C + y_D + y_E \leq 5 \\ x_C \geq 0, \quad x_D \geq 0, \quad x_E \geq 0 \\ y_C \geq 0, \quad y_D \geq 0, \quad y_E \geq 0 \end{cases}$$

Теперь найдем допустимое решение прямой задачи: подставим следующие значения в систему.

$$\begin{cases} x_C = 0, \quad y_C = 3 \\ x_D = 4, \quad y_D = 0 \\ x_E = 3, \quad y_E = 2 \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что эти значения действительно подходят. Теперь построим двойственную задачу для исходной задачи (без учета конкретных затрат на транспортировку)

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 \to max \\ x_4 \leq 0 \\ x_5 \leq 0 \\ x_1 + x_4 \leq 7 \\ x_1 + x_5 \leq 4 \\ x_2 + x_4 \leq 3 \\ x_2 + x_5 \leq 2 \\ x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_3 + x_5 \leq 3 \end{cases}$$

Воспользуемся свойством соотношения дополняющей нежесткости:если оптимальное решение не насыщает какое-то неравенство (то есть, это неравенство не обращается в равенство), то соответствующая этому неравенству переменная в оптимальном решении двойственной задачи обращается в нуль. Отсюда будет следовать, что $x_4 = 0, \quad x_1 + x_5 = 4, x_2 + x_4 = 3, \quad x_3 + x_4 = 5, \quad x_3 + x_5 = 3$ Запишем допустимое решение:

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = -2 \end{cases}$$

Заметим, что оно действительно соответствует соотношению дополняющей нежесткости, кроме того, значения целевых функций совпадают. А значит, мы действительно нашли оптимаальное значение.

**Задача 7**

*Найдите оптимум в задаче линейного программирования*

$$-3x + 4y + z \to max$$

$$3x - 2y + z \geq 5, x + 2y - 2z \leq 2, -x - y + 3z \leq 1, \quad x_1 + x_4 = 7,$$

*решив двойственную задачу.*

Составим двойственную задачу (аналогично предыдущим номерам):

$$\begin{cases} -3x + 4y + z \to max \\ 3x - 2y + z \geq 5 \\ x + 2y - 2z \leq 2 \\ -x - y + 3z \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u + 2w + v \to min \\ 3u + w - v = -3 \\ -2u + 2w - v = 4 \\ u - 2w + 3v = 1 \end{cases}$$

Решением двойственной задачи будет:

$$\begin{cases} u = -1 \\ w = 2 \\ v = 2 \end{cases}$$

Сложим неравенства исходной задачи линейного программирования с коэффициентами, найденными в двойственной задаче:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z \geq 5 & | \times -1 \\ x + 2y - 2z \leq 2 & | \times 2 \\ -x - y + 3z \leq 1 & | \times 2 \end{cases} \Rightarrow (-3 + 2 - 2)x + (2 + 4 - 2)y + (-1 - 4 + 6)z \leq -5 + 4 + 2$$

(На самом деле это было необязательно, можно было подставить значения u,w,v в двойственную задачу, по второму принципу двойственности, значения совпадут) Отсюда получаем, что целевая функция будет ограничена сверху значением 1. По принципам двойственности мы и нашли оптимум исходной задачи.

**Задача 8**

*Докажите неограниченность сверху целевой функции в задаче ЛП*

$$x - y + z \to max$$

$$2x - y + z \geq 5, x + 2y - z \leq 2, -2x - 2y + z \leq 1,$$

*установив несовместность двойственной к ней задачи. Объясните, почему несовместность двойственной задачи в самом деле доказывает неограниченность целевой функции в исходной задаче.*

Запишем двойственную задачу:

$$\begin{cases} 5u + 2w + v \to min \\ u \leq 0 \\ w \geq 0 \\ v \geq 0 \\ 2u + w - 2v = 1 \\ -u + 2w - 2v = -1 \\ u - w + v = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad `\varnothing$$

Таким образом не существует такой комбинации коэффициентов, на которые можно было бы умножить неравенства, чтобы при их сложении получить какое-то ограничение сверху? Значит ли это неогранниченность целевой функции в исходной задаче? Да, но с одной оговоркой, исходная задача должна иметь какие-то допустимые значения (иначе ограничений прямой задачи через решение двойственной никаких не будет - но мы не можем сказать, что целевая функция неограничена, если прямая задача несовместна) – например, для нашей задачи допустимым значением будет:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 16 \\ z = 27 \end{cases}$$

Теперь постараемся объяснить, почему так происходит. В зависимости от задачи мы подбираем такие коэффициенты, на которые можно было бы умножить неравенства, чтобы при их сложении получить какое-то ограничение сверху(или снизу – зависит от задачи). Если мы получаем, что двойственная задача несовместна, то соответственно найти такую комбинацию не можем, да и вообще найти какую-либо комбинацию, которая могла хоть как-то ограничить целевую функцию прямой задачи, мы не можем. Отсюда все следует(не забываем про оговорку, описанную ранее)