Домашнее задание по

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

24 сентября 2017

Задача 1

В сигнатуре имеется два одноместных предикатных символа M(x) (быть мужчиной), F (x) (быть женщиной) и три двухместных предикатных символа C(x, y) (x и y состоят в браке), P (x, y) (x родитель y) и x = y. Выразите формулами первого порядка отношения «x брат y», «x является тёщей y», «x является племянником y», «x внук y».

a) Я считаю двух субъектов братьями только, если у них есть общий отец и мать, отец и отец, мать и мать или же родитель один (стараюсь уважать любые взгляды и ориентацию), потому что для остальных понятий есть такие специальные понятия как "сводный брат", "двоюродный брат" и др. Кроме того, я буду подразумевать, что из условия "y и x имеют общего ребенка" не обязательно следует, что "x и y состоят в браке". Я это делаю с целью никого не обидеть или оскорбить. Таким образом оношение "x является братом y" верно, если:

$$[\exists a \exists b (P(a, x) \wedge P(a, y), \wedge P(b, x) \wedge P(b, y))] \wedge M(x) \wedge \neg(x = y)$$

Так я учла, что родитель может быть и один, и каждый человек не является сам себе братом

b) Запишем это:

$$F(x) \wedge M(y) \wedge \exists z (F(z) \wedge C(y, z) \wedge P(x, z))$$

c) Для начала запишем братско-сестринские отношения между y и z:

$$\exists a \exists b (P(a, z) \wedge P(a, y), \wedge P(b, z) \wedge P(b, y)) \wedge \neg(y = z)$$

Запишем отношение "x является племянником y" как:

$$M(x) \wedge \exists z (\exists a \exists b (P(a, z) \wedge P(a, y), \wedge P(b, z) \wedge P(b, y)) \wedge \neg(y = z) \wedge P(z, x))$$

d) Запишем это:

$$M(x) \wedge \exists z (P(z, x) \wedge P(y, z))$$

Задача 2

В сигнатуре имеется двухместный символ C(x, y) (x обманул y). Написать формулу первого порядка, выражающую следующую мысль: «каждый кого-то обманул и каждый кем-то обманут, но нет того, кто обманул всех».

Запишем следующую формулу первого порядка (каждый раз я имею ввиду, что $x \neq y$):

$$\forall x \exists y (C(x, y)) \wedge \forall x \exists y (C(y, x)) \wedge \forall x \exists y (\neg C(x, y))$$

По факту мы записали "нет того, кто обманул всех" как "для каждого найдется такой человек, которого он не обманул".

Задача 3

Выразите в модели (R, 0, +, , <, =) (носителем являются действительные числа, а константа 0 и знаки сложения, умножения, равенства и порядка интерпретируются стан- дартным образом) утверждение о том, что любой многочлен третьей степени имеет корень.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a < 0) \vee (a > 0)$$

$$\forall a((a < 0) \vee (a > 0)) \wedge \forall b \forall c \forall d \exists x(x^3 + bx^2 + cx + d = 0)$$

Задача 4

Выразите в модели (N,+,,=) (носителем являются целые положительные числа, а знаки сложения, умножения и равенства интерпретируются стандартным образом) свойство «число x является наибольшим общим делителем чисел y и z».

Для начала запишем отношение x делит y в данной модели:

$$(x|y) \;\Leftrightarrow\; \exists a(x \times a = y)$$

Теперь выразим нужное нам свойство:

$$(x = gcd(y, z)) \;\Leftrightarrow (x|y) \wedge (x|z) \wedge \quad \forall b((b|y) \wedge (b|z) \to (b|x))$$

Заменим все свойства "х делит у":

$$(x = gcd(y, z)) \;\Leftrightarrow (\exists a(x \times a = y)) \wedge (\exists a(x \times a = z)) \wedge \; \forall b(\exists a(b \times a = y) \wedge \exists a(b \times a = z) \to \exists a(b \times a = x)$$

Задача 5

Пусть в сигнатуре имеется два одноместных предикатных символа. Сколько существует неизоморфных моделей этой сигнатуры с носителем из n элементов?

Запишем наши одноместные предикатные символы как Q_1 и Q_2. Так как они одноместные, всего будет четыре возможных набора значений:

$$\{00,\ 01,\ 10,\ 11\}$$

. Рассмотрим мощности подмножеств, на которых наше выражение будет принимать такие значение. Пронумеруем их от 0 до 3. Если все четыре значения мощностей подмножеств у двух разных моделей совпадут, то такие модели будут изоморфны, так как между элементами каждых подмножеств с одинаковым номером можно провести биекцию (из одинаковой мощности). Тогда нам нужно будет найти количество всех возможных разбиений (причем порядок важен). Воспользуемся задачей Муавра (о шариках и перегородках). Получаем следующее значение:

Среди всех прочих свойств для x заметим следующее:

$$f(x) = f(f(x))$$

Рассмотрим самую последнюю импликацию. Нам интересен случай, когда посыл является истинным, а результат ложным (иначе импликация всегда будет принимать истинные значения). Тогда должно быть верно следующее:

$$\exists x(P(x) \vee Q(x))$$

Рассмотрим вариант, когда $\exists x\ P(x)$ (аналогичный случай для Q(x) симметричен, так как это высказывание является симметричным). Из этого последует и истинность $Q(f(x))$ (см. самое первое выражение). Из истинности $Q(f(x))$ и

$$f(x) = f(f(x))$$

последует следующее:

$$(Q(f(x)) \to P(f(f(x)))) \sim (Q(f(x)) \to P(f(x)))$$

Заметим следующий факт: $P(x)$ и $Q(x)$ истинны на $f(x)$ и из этого следует то, что находится в квадратных скобках. А значит, формула действительно является общезначимой.

Задача 7

Является ли выполнимой (в нормальных моделях) формула

$$\forall x \quad g(f(x)) = x \wedge \exists y \forall x \neg f(x) = y?$$

Да, является. Приведем следующий пример (пусть натуральные числа начинаются с нуля):

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 \\ \begin{cases} g(x) = x - 1 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \forall x \;\; g(f(x)) = ((x+1) - 1) = x \\ \exists 0 \; \forall x \neg f(x) = 0 \end{cases}$$

Задача 8

Являются ли совместными теории сигнатуры P2 (один двухместный предикатный символ)?

a)$\{\exists x \forall y P(x,y), \quad \exists y \forall x P(x,y)\}$
b)$\{\forall x \neg P(x,x), \quad \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)), \exists x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x))\}$
c)$\{\forall x P(x,x), \quad \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)), \quad \forall x \exists y P(x,y), \quad \exists x \exists y \neg (P(x,y) \vee P(y,x))\}$

a) Теория противоречива. Посмотрим на первое условие. Существует такой x (давайте назовем его a), что $\forall y \neg P(a,y)$, однако при этом существует такой y, что $P(a,y)$ истинно. Получаем противоречие. b) Посмотрим на второе свойство:

$$\forall a \forall b \;\; P(a,b) \wedge P(b,a) \to P(a, \; a)$$

Получаем противоречие с первым свойством. c) Приведем такой пример, когда это выполняется. У нас есть множество из 4 элементов. Некоторое отношение запишем как "$\geq$". Пусть:

$$a \geq b \geq c, \quad d \geq c$$

Первое свойство симметричности выполняется ($a \geq a$). Второе тоже выполняется. При этом, например, элементы a и d несравнимы. А значит, и последнее свойство выполняется.