Домашнее задание по дискретной математики

Родигина Анастасия, БПМИ ФКН 166 группа

3 декабря 2017

Задача 1

Следуют ли формулы из теорий?
a) $\forall x P(x)$ *из* $\{\forall x Q(x),\ \ \forall x(Q(x) \to P(x))\}$
b) $\exists x P(x)$ *из* $\{\exists x Q(x),\ \ \forall x(Q(x) \to P(x))\}$
c) $\exists x P(x)$ *из* $\{\exists x Q(x),\ \ \forall x(P(x) \to Q(x))\}$
d) $\forall x P(x)$ *из* $\{\forall x Q(x),\ \ \forall x(P(x) \to Q(x))\}$

a) Да, проиллюстрируем это методом резолюций, для этого возьмем отрицание предполагаемого следствия и выведем пустой дизъюнкт:

$$\text{Имеем: } \forall x Q(x);\ \ \forall x(\neg Q(x) \vee P(x));\ \ \neg(\forall x P(x)) = \exists x \overline{P}(x)$$

$$\frac{\forall x Q(x),\ \forall x(\neg Q(x) \vee P(x))}{\forall x P(x)} \qquad \frac{\forall x P(x),\ \ \exists x \overline{P}(x)}{\varnothing}$$

b) Да, проведем аналогичные действия:

$$\text{Имеем: } \exists x Q(x);\ \ \forall x(\neg Q(x) \vee P(x)),\ \ \neg(\exists x P(x)) = \forall x \overline{P}(x)$$

$$\frac{\exists x Q(x);\ \ \forall x(\neg Q(x) \vee P(x))}{\forall x P(x)} \quad \frac{\forall x P(x),\ \ \forall x \overline{P}(x)}{\varnothing}$$

c) Нет. Возьмем подмножество всех непростых чисел из $\mathbb{N}$. Пусть предикат P(x) будет показывать простоту числа при x>2, а Q(x) то, что число является нечетным. Наша теория выполняется, а предполагаемое следствие нет
d) Нет. Возьмем множество $2\mathbb{N}$. Пусть Q(x) обозначает делимость на 2, а P(x) – делимость на 4. Наша теория выполняется, а следствие нет.

Задача 2

Выразимы ли предикаты в моделях?
a)$x < y$ *в модели* $(\mathbb{Z}, 2x = y)$
b) $x + y = z$ *в модели* $(\mathbb{Q}, x < y)$
c) |x-y|=1 в модели $(\mathbb{Z}, |x - y| = 2)$
d) x+y=z в модели $(\mathbb{N}, =, x|y)$

a) Возьмем следующий автоморфизм $h(x) = -x$ для нашей модели. Заметим, что предикат x<y в нем не сохраняется, то есть следующее не верно: $h(x) < h(y)$. А значит, и наш предикат не выразим в данной модели.
b) Возьмем следующий автоморфизм $h(x) = x+1$. Заметим, что $h(x)+h(y) \neq h(z)$,то

есть, этот предикат не выразим.
c) Возьмем следующий автоморфизм для нашей модели:

$$h(x) \begin{cases} x, & \text{x - четное} \\ x+2, & \text{x - нечетное} \end{cases}$$

И снова $|h(x) - h(y)| \neq 1$. И снова предикат не выразим. d) Возьмем следующий автоморфизм. Для каждого элемента множества поменяем все простые делители равные 2 на 3 и наоборот. Делимость сохранится, а предполагаемый предикат будет не верен.

Задача 3

Описать все автоморфизмы модели
a) $(\mathbb{Z}, x+y=z)$
b) $(\mathbb{Z}, x-y=2)$
c) $(\mathbb{Z}, |x-y|=1)$
d) $(\mathbb{Z}, |x-y|=2)$

a) В данном случае нам подойдет тождественный автоморфизм и $h(x) = -x$. Почему не подходят другие варианты? Вспомним немного алгебры, в нашем случае наш порождающий элемент в $\mathbb{Z}$ должен перейти также в порождающий элемент в $\mathbb{Z}$. Вариантов у нас всего два: 1 и -1 (остальные константы не подойдут, так как нарушается условие биекции).

b) Таких автоморфизмов бесконечно много, они будут следующего вида:

$$h(x) = \begin{cases} x+m, & \text{x - четное} \\ x-1+n = x+k, & \text{x - нечетное} \end{cases}$$

Любая пара одинаковой четности (m,k) задаст такой изоморфизм. А значит, их бесконечно много
c) Заметим, что нам подходят любые автоморфизмы со сдвигом: $h(x) = x + k$ и $h(x) = -x + k$. (Чтобы показать, что другие автоморфизмы нам не подходят мы рассматриваем пару соседних чисел, смотрим, куда они переходят, а потом расматриваем следующую пару (если рассматривали 2 и 3, то потом рассматриваем 3 и 4), и делаем вывод с помощью индукции, что возможны изоморфизмы именно такого вида)
d) аналогично пунктам b и c исходной задачи нам подходят автоморфизмы следующего вида:

$$h(x) = \begin{cases} \pm x+m, & \text{x - четное} \\ \pm x-1+n = \pm x+k, & \text{x - нечетное} \end{cases}$$

Задача 4

Изоморфны ли следующие пары моделей?
a) $(\mathbb{N}, \cdot, =)$ *и* $(\mathbb{Z}, \cdot, =)$ *(умножение и равенство интерпретируются стандартным образом)*
b) $(\mathbb{Z}_5 \quad x-y=2)$ *и* $(\mathbb{Z}_5 \quad x-y=1)$
c) $(\mathbb{Z}_6 \quad x-y=2)$ *и* $(\mathbb{Z}_6 \quad x-y=1)$

a) Нет, не изоморфны. Рассмотрим предикат $x \cdot x = 1$. В натуральных числах он будет иметь единственное решение, а в целых подходит как 1, так и -1. Тогда следущее высказывание будет истинно в первой модели, и ложно во второй:

$$[\forall x(x \cdot x = 1)] \to [\forall y(x \cdot y = y)]$$

b) Да, эти модели изоморфны. Предоставим следующий изоморфизм:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x = 3 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & x = 4 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Получаем, что для $x - y = 2$ $h(x) - h(y) = 1$.
c) Рассмотрим следующее:

$$a - b = b - c = 2 \Rightarrow a - c = 4 \to c - a = 2$$

$$\text{а это мы умеем выражать в } (\mathbb{Z}_5 \ \ x - y = 2)$$

$$x - y = y - z = 1 \Rightarrow x - z = 2 \to z - x = 4 \neq 1$$

Получаем противоречие из

$$c - a = 2 \quad h(c) - h(a) = 4 \neq 1$$

Значит, модели неизоморфны

Задача 5

Кто (Новатор или Консерватор) имеет выигрышиную стратегию в игре Эренфойхта на моделях M_1 и M_2:
a) $M_1 = (\{0, 1, 2, 3\},\ x = y)$ и $M_2 = (\{0, 1, 2, 3, 4\},\ x = y)$
b) $M_1 = (\mathbb{Z}, |x - y| = 1), \quad M_2 = (\mathbb{Z},\ x - y = 1)$
c) $M_1 = (\mathbb{Z},\ x - y = 1), \quad M_2 = (\mathbb{Z},\ x - y = 2)$

a) В данной игре гарантированно выигрывает Новатор за 5 шагов. Для него достаточно выбирать различные числа из M_2, консерватор будет вынужден выбирать также различные из M_1. На последнем шаге Новатор выбирает последний элемент, который еще не выбирал, а консерватор уже не может выбрать элемент, который был бы не равен всем остальным. Так новатор выигрывает.
b) В данной игре снова выиграет Новатор на 3 шаге. Пусть он выберет любое число x из M_1 на первом шаге. А потом x-1 и x+1. Консерватор выбирает y и вынужденно выбирает y-1. А уже на 3 шаге, какое бы он число не выбрал, он проигрывает, потому что предикат в M_1 для Новатора будет выполняться, а для Консерватора нет (если он не перечислит элемент y-1 повторно, а это снова проигрыш)
c) В данных моделях выиграет Консерватор за счет того, что Новатор вынужден выбрать конечное кол-во шагов, а консерватор может поддерживать предикаты бесконечное кол-во шагов (так как модели элементарно эквивалентны по Т о полноте алгебраически замкнутых полей характеристики нуль в Шене-Верещагине с 114)