Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, 167 группа

9 марта 2017

Задача 1

Пусть $U(p, x)$ - главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких p, что $U(p, x) = 2017$ для какого-то x.

Возьмем такую функцию $f(x) = 2017$, которая определена на каком-то одном натуральном значении x. Заметим, что множество натуральных чисел является бесконечным множеством, а,значит, и множество таких функций бесконечно. Это дает основания утверждать, что найдется беконечно много таких p, что $U(p, x) = 2017$ для какого-то x.

Задача 2

Пусть $U(p, x)$ - главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется такое n, что $U(n, x) = nx$ для всех x.

Возьмем, что $V(n, x) = nx$. Заметим, что задача 2 является частным случаем третьей задачи, которая как раз показывает существование такого n, что $U(n, x) = nx$ для всех x.

Задача 3

Пусть $U(p, x)$ - главная универсальная вычислимая функция, а $V(n, x)$ - вычислимая функция двух аргументов. Докажите, что найдется такое p, что $U(p, x) = V(p, x)$ для всех x.

По определению главной универсальной функции найдется такая функция $s(x)$ $\forall n, x$, что:

$$V(n, x) = U(s(n), x)$$

Воспользуемся теоремой о неподвижной точке:

$$\exists t : U(s(t), x) = U(t, x)$$

Таким образом получаем:

$$V(t, x) = U(s(t), x) = U(t, x)$$

Задача 4

Существует ли такая главная универсальная функция $U(p, x)$, в которой множество программ I, вычисляющих определенные в 0 функции, совпадает с множеством четных чисел?

Если множество программ совпадает с множеством четных чисел, то достаточно очевидно, что оно будет являться разрешимым, так как проверить число на четность не так уж и сложно. Воспользуемся теоремой Успенского-Райса. За нетривиальное свойство возьмем определенность функции в 0, тогда получаем, что множество номеров р таких программ в главной нумерации $U(p, x)$ является неразрешимым множеством. Отсюда получаем противоречие. Таким образом, такой функции не существует.

Задача 5

Тот же вопрос про неглавную нумерацию.

:(все потому что она неглавная

Задача 6

Пусть $U(p, x)$ - главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар (k, n), что функция $U_k(x) = U(k, x)$ является продолжением функции $U_n(x) = U(n, x)$ (т.е. $U(k, x) = U(n, x)$ если $U(n, x)$ определена). Докажите, что множество K неразрешимо.

Возьмем такие функции $f(1) = 1, \ \forall i \neq 1 \quad f(i)-$ не определена. Тогда $\exists n : U_n(x) = f(x)$. Пусть $K' = \{k \mid U_k-$ продолжение $U_n\}$. Данное свойство нетривиально, т.к. существуют как продолжения U_n, так и не продолжения. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой Успенского-Райса. Отсюда получаем, что K' - неразрешимо. Теперь предположим, что K разрешимо. Тогда запустим алгоритм вычисления его характеристической функции на n и произв. x. Тогда можно будет сказать является ли $U_n(x)$ продолжением $U(n, x)$. Так как мы зафиксировали n (см. второе предл.), то на вход подаем x - из этого получаем алгоритм, вычисляющий характеристическую функцию на n, x. Отсюда получаем, что K' - разрешимо. Получаем противоречие