Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, 167 группа

15 февраля 2017

Задача 1

Постройте схему полиномиального размера для функции $f : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to 0, 1$, равной единице, тогда и только тогда, когда в данном на вход графе есть изолированные вершины.

Зададим граф верхним треугольником матрицы смежности таким образом: $a_{ij} = 1$, если есть ребро между вершинами i и j, а иначе $a_{ij} = 0$. Запишем условие изолированности вершины: $\forall j < i : x_{ji} = 0$; $\forall j > i : x_{ij} = 0$ Запишем проверку на изолированность вершины k в виде логического высказывания:

$$\overline{(\bigvee_{i=0}^{k} x_{ik}) \vee (\bigvee_{i=k+1}^{n} x_{ki})}$$

Проверим изолированность остальных вершин:

$$\bigvee_{k=0}^{n} \neg((\bigvee_{i=0}^{k} x_{ik}) \vee (\bigvee_{i=k+1}^{n} x_{ki}))$$

Оценим размер схемы за $O(n^2)$, так как количество операций на каждой вершине будет меняться как арфметическая прогрессия от) до n.

Задача 2

Треугольником в графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Постройте схему полиномиального размера для функции $f : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to 0, 1$, равной единице, тогда и только тогда, когда в данном на вход графе нет треугольников.

Зададим граф верхним треугольником матрицы смежности таким образом: $a_{ij} = 1$, если есть ребро между вершинами i и j, а иначе $a_{ij} = 0$. Запишем условие нахождения таких треугольников: $\exists i < j < k : x_{ij} = 1,\ x_{ik} = 1,\ x_{jk} = 1$ Запишем схему в виде логического высказывания:

$$\neg(\bigvee_{i=0}^{n} \bigvee_{j=i+1}^{n} \bigvee_{k=j+1}^{n} (x_{ij} \wedge x_{ik} \wedge x_{jk}))$$

Оценим размер схемы за $O(n^3)$, тк перебираются три вершины

Задача 3

Постройте схему полиномиального размера для функции $f : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to 0,1$, равной единице, тогда и только тогда, когда данный на вход граф связен и содержит эйлеров цикл.

Зададим граф верхним треугольником матрицы смежности таким образом: $a_{ij} = 1$, если есть ребро между вершинами i и j, а иначе $a_{ij} = 0$. Граф содержит Эйлеров цикл, если он связен и все степени вершин четны. Так как проверка на связность проводилась на лекции (с помощью возведения матрицы смежности в степень), возьмем, что исходный граф связен. Для каждой вершины проверим четность вершин, используем сложение по модулю 2

$$\bigwedge_{k=0}^{n} \neg(\bigoplus_{i=0}^{k} x_{ik} \oplus \bigoplus_{i=k+1}^{n} x_{ki})$$

Оценим сложность схемы за $O(n^2)$

Задача 4

Докажите, что любую монотонную функцию от n переменных можно вычислить схемой размера $O(n2^n)$, используя только дизъюнкцию и конъюнкцию.

Воспользуемся утверждением, доказанным на семинаре, что любая монотонная функция представима в ДНФ без использования отрицания. Максимальное количество элементов в каждой конъюнкции - n. Максимальное количество дизъюнкций конъюнктов - 2^n. Отсюда получаем, что количество операций будет составлять $O(n2^n)$

Задача 5

Докажите, что существует функция от n переменных ($n > 2$), не вычисляющаяся в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$ схемой размера n^{100}.

Не задача, а гроб какой-то:(

Задача 6

Докажите, что в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$ любая функция от n переменных вычисляется схемой размера не более 2^{n+1}.

Используем факт, что любую функцию можно представить в виде полинома Жегалкина в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$:

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = a \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus .. \oplus a_n \cdot x_n \oplus a_{1,2} \cdot x_1 \cdot x_2 ... a_i \in \{0,1\}$$

В этом полиноме будет 2^n слагаемых, их $\oplus$ вычисляется за $2^n - 1$. Каждое слагаемое вычисляется реккурентно. Вычислив произведение k элементов, мы выбираем следующий C_{n-k}^{n} способами, при этом мы делаем ровно 1 операцию, вычисляя произведение. $\sum_{i=0}^{n} C_{n-k}^{n} = 2^n$ Получаем:

$$2^n + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1}$$

Задача 7

Булева функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется линейной, если она представляется в виде

$$f(x_1, .., x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus .. \oplus (a_n \wedge x_n)$$

для некоторого набора $(a_1, .., a_n) \in \{0,1\}^n$ булевых коэффициентов. Докажите, что схема, использующая только линейные функции, вычисляет линейную функцию

Докажем это по индукции (по количеству функций в схеме). База индукции: k=1 - достаточно очевидно, что если схема содержит только одну лин. функцию, то утверждение верно Индукционный шаг: $k \to k+1$ Пусть все предыдущие k функций линейны:

$$\forall j \in \{1, ..k\} : f_k(x_1, .., x_n) = a_{i0} \oplus (a_{i1} \wedge x_i) \oplus .. \oplus (a_{in} \wedge x_n)$$

Теперь выразим $k+1$ функцию через k предыдущих:

$$f_{k+1} = a_{k+1,0} \oplus (a_{k+1,1} \wedge a_{1,0} \oplus a_{1,1} \wedge x_1 \oplus .. \oplus a_{1,n} \wedge x_n) \oplus .. \oplus (a_{k+1,k} \wedge a_{k,0} \oplus a_{k,1} \wedge x_1 \oplus .. \oplus a_{k,n} \wedge x_n) =$$

$$= \bigoplus_{i=0}^{k} (a_{k+1,i} \cdot \bigoplus_{j=0}^{n} a_{i,j}) \oplus \bigoplus_{j=0}^{k} x_j \bigoplus_{i=0}^{n} a_{j,i} = b_0 \oplus (b_1 \wedge x_1) \oplus .. \oplus (b_n \wedge x_n)$$

Таким образом, утверждение доказано

Задача 8

Докажите, если $f(x_1, ..., x_n)$ нелинейная функция, то конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ вычисляется схемой в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$.

Запишем функцию с помощью полинома Жегалкина. Из нелинейности функции следует, что в полиноме существует хотя бы одно слагаемое вида: $x_i \cdot x_j$:

$$f(x_1, ..., x_n) = x_i \cdot x_j \cdot f_1(x_1..x_{i-1}, x_{i+1}..x_{j-1}..x_{j+1}..x_n) \oplus$$

$$\oplus x_i \cdot f_2(x_1..x_{i-1}, x_{i+1}..x_{j-1}..x_{j+1}..x_n) \oplus x_j \cdot f_3(x_1..x_{i-1}, x_{i+1}..x_{j-1}..x_{j+1}..x_n) \oplus$$
$$\oplus f_4(x_1..x_{i-1}, x_{i+1}..x_{j-1}..x_{j+1}..x_n) =$$
$$= x_i \cdot x_j \cdot f_1(x_1..x_{i-1}, x_{i+1}..x_{j-1}..x_{j+1}..x_n) \oplus Ax_i \oplus Bx_j \oplus C$$

Мы взяли, что $f_1(x_1..x_{i-1}, x_{i+1}..x_{j-1}..x_{j+1}..x_n) \neq 0$ (из $\exists x_i \cdot x_j$ среди слагаемых):

$$f(x_1, ..., x_n) = x_i \cdot x_j \oplus Ax_i \oplus Bx_j \oplus C$$

Рассмотрим возможные случаи
1) A, B, C равны 0. Получаем конъюнкцию
2) A, B, C не равны 0. Тогда построим функцию

$$f(x_i, x_j) = q(x_1 \oplus Bx_j \oplus A) = (x_i \oplus B) \cdot (x_j \oplus A) \oplus A(x_i \oplus B) \oplus B(x_j \oplus A) \oplus C =$$

$$= x_i x_j \oplus Ax_i \oplus Bx_j \oplus Ax_i \oplus AB \oplus Bx_j \oplus AB \oplus C = x_i x_j \oplus AB \oplus C$$

В зависимости от значения $AB \oplus C$ мы получаем либо конъюнкцию, либо ее отрицание (базис нам позволяет снова применить отрицание, чтобы получить конъюнкцию)