Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, 167 группа

8 февраля 2017

Задача 1

Докажите, что функцию $x \oplus y \oplus z$ можно вычислить схемой, использующей лишь одно отрицание (и много конъюнкций и дизъюнкций).

Заметим, что $x \oplus y \oplus z$ - это сложение по модулю два, таким образом, высказывание будет принимать истину только тогда, когда 1 в строке таблицы истинности нечетное количество. Запишем ДНФ:

$$(xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz) \vee xyz$$

Попробуем выразить те строки таблицы, когда количество 1 равно 1, через функцию $MAJ(x_1, x_2, x_3)$, которую можно также выразить через конъюнкции и дизъюнкции. Получаем такое высказывание (учитывая ситуацию, когда все переменные имеют значение 1):

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \overline{MAJ(x_1, x_2, x_3)} \vee xyz$$

Проверим это высказывание таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	f
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

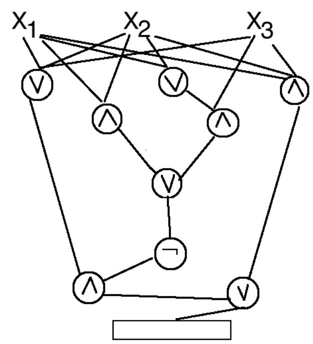
Теперь выразим MAJ через конъюнкции и дизъюнкции:

$$MAJ(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2) \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

Теперь запишем функцию $x \oplus y \oplus z$:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \overline{((x_1 \vee x_2) \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2)} \vee x_1x_2x_3$$

Так как эту функцию можно записать, используя лишь одно отрицание и много дизъюнкций и конъюнкций, ее можно вычислить соответствующей схемой.



Размер схемы равен 12

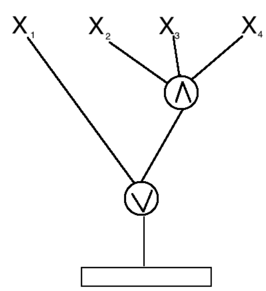
Задача 2

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ истнинна на последних 9 наборах значений переменных (в стандартном порядке) и только на них. Постройте схему, вычисляющую f, использующую только дизъюнкцию и конъюнкцию длины не более 15.

Заметим, что 7 строка в таблице истинности - 0111, а все для всех последующих выполняется условие $x_1 = 1$. Таким образом, можно записать функцию в виде:

$$x_1 \vee x_2 x_3 x_4$$

Построим схему:



Размер схемы будет равен 6

Задача 3

Постройте схему полиномиального размера, проверяющую, что во входное слово входит подслово 101. Можно считать, что длина входного слова не меньше трех.

Запишем эту схему полиномиального размера в строку:

$x_1, x_2, .., x_n;\ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3;\ (x_1\bar{x}_2x_3), (x_2\bar{x}_3x_4), .., (x_{n-2}, \bar{x}_{n-1}, x_n);\ (x_1\bar{x}_2x_3) \vee (x_2\bar{x}_3x_4) \vee .. \vee (x_{n-2}, \bar{x}_{n-1}, x_n)$

Оценим эту размер этой схемы как $O(n)$, так как при каждом уровне мы совершаем не более, чем n операций, а уровней конечное количество (4).

Задача 4

Постройте схему полиномиального размера, умножащую двоичное число на три

Запишем схему для операции $x \oplus y$, чтобы потом упростить итоговую схему:

$$x, y; \bar{x}, \bar{y}; x \wedge \bar{y}, y \wedge \bar{x}; x\bar{y} \vee \bar{x}y$$

Аналогично запишем схему для $MAJ(x, y, z)$:

$$x, y, z;\ x \vee y, x \wedge y;\ (x \vee y) \wedge z;\ ((x \vee y) \wedge z) \vee (x \wedge y)$$

Определим схему для сложения чисел в двоичной записи. Запишем первое число как $x = x_n x_{n-1} x_{n-2}..x_0$, а второе $z = z_n z_{n-1} z_{n-2}..z_0$ (При необходимости для совпадений длины можно добавить ведущие нули). Сумму обозначим за $s = s_{n+1} s_n..s_0$ (Заметим, что операция умножения на три соответствует дважды проведенной операции сложения чисел). Обозначим за c_i разряд переноса. Заметим, что $c_0 = 0; c_i = MAJ(x_{i-1}, z_{i-1}, c_{i-1})$, а $s_i = x_i \oplus z_i \oplus c_i$ Таким образом можно построить схему для вычисления суммы двух двоичных чисел. К исходному числу добавляем исходное дважды (При необходимости снова можно будет добавить ведущие нули). Получаем умножение на 3, дублируя части схемы. Оценим размер схемы как $O(n)$, так как для каждого разряда суммы совершаем конечное количество операций, а сумму вычисляем дважды.

Задача 5

Постройте схему полиномиального размера, проверяющую, будет ли n-битное двоичное число делиться на 3.

Заметим, что степени 2 могут давать два остатка при делении на 3: 1 или 2. Кроме того, эти остатки будут чередоваться в зависимости от четности показателя степени 2, 1 - если степень четная и 2 - если степень нечетная. Запишем исходное число как $x = \overline{x_n x_{n-1}..x_0}_2 = x_0 + x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 2^2 + .. + x_n \cdot 2^n$ Заметим, что

$$x = x_0 + x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 2^2 + .. + x_n \cdot 2^n \equiv x_0 + x_1 \cdot 2 + x_2 + x_3 \cdot 2 + ... \ (mod\ 3)$$

$$x_0 + x_1 \cdot 2 + x_2 + x_3 \cdot 2 + .. + x_n \cdot 2^n \equiv x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + .. + (-1)^{n-1} x_n (mod\ 3)$$

Организуем нашу схему таким образом, в переменных z_2, z_1, z_0 будем хранить остаток по модулю три при каждой итерации. Сделаем так, чтобы одна и только одна из переменных принимала истинное значение, остаток по модулю три будет соответствовать ее индексу. Обозначим за x_+ и x_-, значения x с четным индексом и нечетным соответственно. Рассмотрим ситуацию, когда $x_+ = 1$, построим таблицу истинности, если $x_+ = 0$, то переменные будут оставлять свои старые значения:

z_2	z_1	z_0	$\Rightarrow$	z_2	z_1	z_0
0	0	1	$\Rightarrow$	0	1	0
0	1	0	$\Rightarrow$	1	0	0
1	0	0	$\Rightarrow$	0	0	1

Выразим z_2, z_1, z_0, используя x_+:

$$z_2 = \bar{z}_2 z_1 \bar{z}_0 \wedge x_+ \vee z_2 \wedge \bar{x}_+$$

$$z_1 = \bar{z}_2 \bar{z}_1 z_0 \wedge x_+ \vee z_1 \wedge \bar{x}_+$$

$$z_0 = z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_0 \wedge x_+ \vee z_0 \wedge \bar{x}_+$$

Аналогично рассмотрим ситуацию с x_-

z_2	z_1	z_0	$\Rightarrow$	z_2	z_1	z_0
0	0	1	$\Rightarrow$	1	0	0
0	1	0	$\Rightarrow$	0	0	1
1	0	0	$\Rightarrow$	0	1	0

Выразим z_2, z_1, z_0, используя x_-:

$$z_2 = \bar{z}_2 \bar{z}_1 z_0 \wedge x_- \vee z_2 \wedge \bar{x}_-$$

$$z_1 = z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_0 \wedge x_- \vee z_1 \wedge \bar{x}_-$$

$$z_0 = \bar{z}_2 z_1 \bar{z}_0 \wedge x_- \vee z_0 \wedge \bar{x}_-$$

Установим первоначальное значение для z: $z_2 = 0, z_1 = 0, z_0 = 1$ Будем чередовать части схемы для четных и нечетных x На выходе делимость на 3 проверяется значением z_0. Оценим размер схемы как $O(n)$. Каждой части схемы (для x с идексами различной четности) будет соответствовать конечное число операций, таких частей схемы n.