Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, 167 группа

26 февраля 2017

Задача 1

Верно ли, что множество наборов подряд идущих цифр длины 5, входящих в десятичную запись числа π а) перечислимо; б) разрешимо? Можно считать, что любая цифра числа π вычислима.

Для начала докажем пункт (б). Заметим, что число различных наборов цифр длины 5 конечно (Всего их 10^5). Воспользуемся теоремой, что любое конечное множество разрешимо. Таким образом, множество наборов подряд идущих цифр длины 5, входящих в десятичную запись числа π разрешимо.
(а) Так как мы доказали разрешимость этого множества, воспользуемся теоремой, что любое разрешимое множество является перечислимым, что и требовалось доказать.

Задача 2

Пусть множество X натуральных чисел перечислимо. Перичислимо ли множество $Y \subseteq X$ тех чисел из X, у которых сумма цифр равна 10.

Если множество X натуральных чисел перечислимо, то существует алгоритм, который перечисляет элементы этого множества. Возьмем и модифицируем этот алгоритм, будем перечислять элементы множества X, но каждый раз будем осуществлять проверку на сумму цифр. Если сумма цифр будет равна 10, то будем выводить это число. Таким образом, мы нашли алгоритм, который сможет перечислить элементы множества Y, а, значит, по опрделению перечислимого множества, Y - перечислимо.

Задача 3

Докажите, что если A, B - перечислимые множества, то и множество $A \times B$ перечислимо.

Для каждого из множеств будет существовать алгоритм, который в каком-то порядке будет перечислять элементы множества. Каждому элементу присвоим нумерацию, которая показывает, на какой итерации алгоритма мы получаем это число. a_i, b_i - элементы, получаемые из A и B соответственно на i-м шаге. Будем последовательно рассматривать элементы множеств. При каждом $k \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{0..k\}$ Напечатаем элементы $(a_{k-i},\ b_i)$. Для этого потребуется конечное число шагов. Далее переходим к числу $k+1$. Теперь рассмотрим произвольную пару $(a_n,\ b_m),\ a \in A,\ b \in B$. Она будет напечатана при $k = m + n$ и $i = m \leq k$

Задача 4

Всюду определенная функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключение конечного множества. докажите, что f вычислима.

Обозначим множество значений этой функции как A. Так как любое конечное множество является перечислимым, получаем, что $\overline{A}$ является перечислимым. Кроме того, само A является перечислимым. По теореме Поста, получаем, что A разрешимо. Теперь воспользуемся фактом, что функция строго возрастает. Переберем натуральные числа с 0, проверяя, принадлежит ли это число множеству A. Каждое число будет соответствовать значению функции на i, где i - количество предшествующих единиц в характеристической функции, таким образом, функция вычислима.

Задача 5

Существуют ли такие множества X, $Y \subseteq \mathbb{N}$, что X рарешимо, $X \cup Y$ разрешимо, а Y не разрешимо?

Приведем пример такого множества. Возьмем, множество X, совпадающее с $\mathbb{N}$ и любое неразрешимое множество Y (гарантировано, что такое множество найдется, доказывалось на лекции). Получаем, что $X \cup Y = X$ является разрешимым.

Задача 6

Пусть S - разрешимое множество натуральных чисел. Множество D состоит из всех простых делителей множества S. Верно ли, что D перечислимо?

Так как любое разрешимое множество является перечислимым, будем перечислять элементы множества S, выписывая все простые делители каждого элемента (а это можно сделать за конечное количество шагов). Если $0 \in S$, то просто записываем в D простые числа, множество которых является перечислимым. Таким образом, мы можем перечислить все элементы множества D, значит, оно перечислимо.

Задача 7

Пусть f - вычислимая биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. Докажите, что обратная биекция f^{-1} также вычислима.

Будем перечислять натуральные числа в порядке возрастания. Так как функция f вычислима, сопоставим каждому натуральному числу значение функции от этого натурального числа. Таким образом мы перечислим все значения f^{-1} и все их прообразы. Запишем алгоритм для вычисления $f^{-1}(x)$. Будем перебирать значения из $\mathbb{N}$ пока значение f от этого элемента не совпадет с x, это гарантированно произойдет, тк f - биекция. Получаем, что обратная биекция f^{-1} вычислима.