Домашнее задание по дискретной математике

Родигина Анастасия, 167 группа

18 января 2017

Задача 1

Верно ли, что если $A \setminus B$ бесконечно, а B счетно, то $A \setminus B$ равномощно A?

Представим множество A в виде:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

Учитывая то, что любое подмножество счетного множества, счетно, заметим, что $(A \cap B) \subseteq B$ также счетно (или конечно). Так как $(A \setminus B)$ бесконечно, а $(A \cap B)$ счетно (или конечно), то (по Теореме)

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) \sim (A \setminus B)$$

А следовательно

$$A \sim (A \setminus B)$$

Ответ: Да, верно.

Задача 2

Верно ли, что если A бесконечно, а B счетно, то $A \triangle B$ равномощно A?

Достаточно привести контрпример, для того, чтобы показать, что это утверждение неверно. Возьмем, что $A = B$, где A и B непустые множества Тогда получчаем, что $A \triangle B = \emptyset$, что неэквивалентно A
Ответ: Нет, неверно.

Задача 3

Верно ли что если A бесконечно, а B конечно, то $(A \setminus B)$ равномощно A?

Так как A бесконечно, B конечно, $(A \setminus B)$ равномощно A. Представим множество A в виде:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

$(A \setminus B)$ будет бесконечным, а $A \cap B$ будет счетным. Таким образом получаем, что

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) \sim (A \setminus B)$$

$$A \sim (A \setminus B)$$

Ответ: Да, верно.

Задача 4

Докажите, что любое множество непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.

Заметим, что в любом непустом интервале содержится рациональное число. Если оба конца интервала являются рациональными, то достаточно взять их среднее арифметическое, которое будет лежать внутри этого интервала и будет также рациональным числом. Если хотя бы один из концов интервала является иррациональным, то достаточно использовать приближение этих чисел снизу или (сверху с точностью до $\frac{1}{10^{n+1}}$, где $10^n < |a - b|$, a,b - концы интервала). Так как интервалы не пересекаются, то мы можем построить инъекцию из мн-ва интервалов в подмножество рациональных чисел, которые содержатся внутри этих интервалов. Так как множество рациональных чисел счетно, любое его подмножество будет являться либо конечным, либо счетным.

Задача 5

Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств

Используем теорему, что из любого бесконечного множества выделить счетное подмножество. По определению счетного множества, мы можем провести биекцию между этим множеством и N. В этом счетном подмножестве выделим два подмножества (также счетных), одно из них будет с четными номерами, другое с нечетными. Снова проведем биекцию и. т. д. Мы можем повторить эти действия бесконечное количество раз, так как на каждой итерации новое подмножество остается бесконечным и счетным. Таким образом, всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств

Задача 6

Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций счетно.

Покажем, что множество таких функций не менее, чем счетно. Для этого достаточно рассмотреть множество функций с периодом 1. Каждому целому числу будет соответствовать одна и только одна такая функция, таким образом множество таких функций (постоянных) будет счетно, а значит множество всех периодических функций будет не менее, чем счетно. Рассмотрим произвольную функцию с каким-то целым периодом T. Заметим, что достаточно ей сопоставить последовательность из T (от 0 до $T-1$) целых чисел, где

$a_i = f(i \; mod \; T)$, где $i \in Z$ и $i \in [0, \; T-1]$. Причем для разных функций эта последовательность разная. Можно заметить, что мы получаем инъекцию в множество целых чисел. Известно, что множество всех последовательностей целых чисел, счетно. Следовательно, наше множество не более, чем счетно. Таким образом, получаем, что множество периодических функций счетно.

Задача 7

Постройте явную биекцию между конечными строго возрастающими последовательностями натуральных чисел и конечными последовательностями натуральных чисел.

Заметим, что посторение биекции возможно тогда и только тогда, когда количество членов в обоих последовательностях одинаково. Пусть n - длина одной из них. Если $n \leq 1$, то достаточно просто потребовать, чтобы $a_i = b_i$. Теперь рассмотрим вариант, когда $n \geq 2$.

$$f : \begin{cases} b_1 = a_1 & \text{i} = 1 \\ b_i = a_i - a_{i\text{-}1} & i \neq 1 \end{cases}$$

Так как $a_i > a_{i-1}$, $b_i > 0$, $b_i \in N$. Разность двух натуральных чисел определена единственным образом, т.е. f - функция. Кроме того, $\forall \{b_n\}$ принадлежат множеству последовательностей нат. чисел.
Тогда

$$f^{-1} : \begin{cases} a_1 = b_1 & \text{i} = 1 \\ a_i = \sum_{j=1}^{i} b_j & i \neq 1 \end{cases}$$

Достаточно легко заметить, что данное выражение функционально. $\forall \{a_n\}$ принадлежат множеству возрастающих последовательностей нат. чисел. Покажем, что $f \circ f^{-1} = Id$:

$$f \circ f^{-1} : \begin{cases} c_1 = b_1 = a_1 & \text{i} = 1 \\ c_i = a_1 + \sum_{j=2}^{i}(a_j - a_{j-1}) = a_i & i \neq 1 \end{cases} = Id$$

Таким образом, получилось построить явную биекцию между конечными строго возрастающими последовательностями натуральных чисел и конечными последовательностями натуральных чисел.