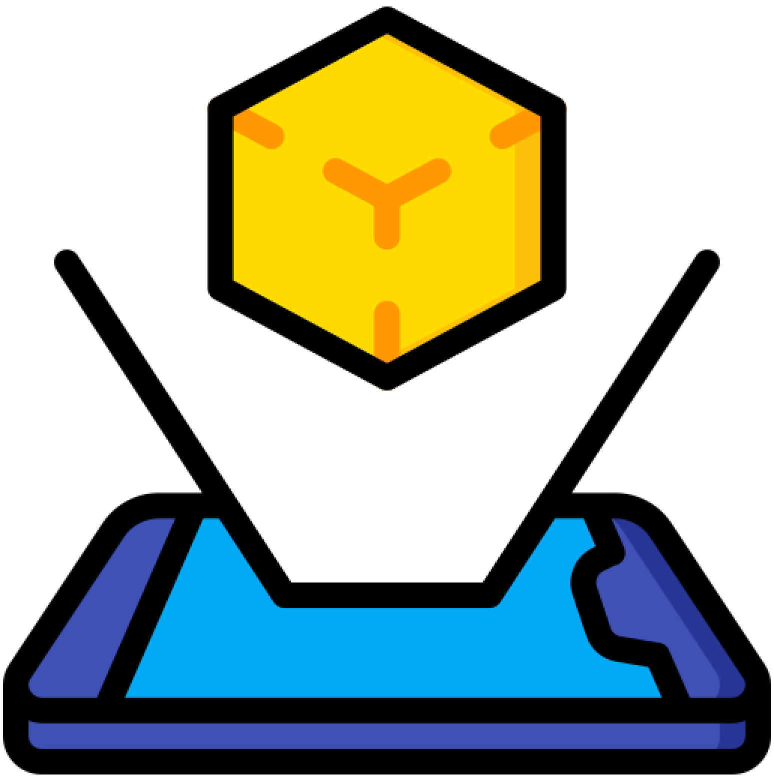
Найзабаева Л.К.

Алашыбаев Б.А.

Токибаев С.С.

Ергешов А.Б.

ЗАДАЧИ по стереометрии



Задание 1

Дана пирамида SABC с высотой SA, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с прямым углом A. Найдите угол между прямыми SB и AC. Ответ дайте в градусах.

Задание 2

В основаниях призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ лежат правильные шестиугольники. AD и BF пересекаются в точке H, A_1H – высота призмы. Ребро AA_1 наклонено к плоскости оснований под углом, тангенс которого равен 2. Найдите объем призмы, если AF=23

Задание 3

В прямоугольной призме все боковые грани являются квадратами со стороной $10\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

Задание 4

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, ABDC – ромб. Известно, что $S_{ABCD}=11$, $S_{AA1D1D}=31$, $\angle AA_1D_1=\angle DD_1C_1$. Найдите площадь полной поверхности $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Задание 5

В прямоугольном параллелепипеде диагональ грани AA_1D_1D равна 5, а $AB=2\sqrt{6}$. Найдите диагональ параллелепипеда.

Задание 6

Дан прямоугольный параллелепипед с ребрами 2, 3 и 6. Найдите его диагональ.

Задание 7

Дана пирамида SABC с высотой SA. Известно, что в основании лежит прямоугольный треугольник с прямым углом C. Найдите угол между ребрами SC и BC. Ответ дайте в градусах.

Задание 8

Дана пирамида SABC с высотой SA=8. Известно, что SK равно 10 и перпендикулярно BC=5, причем K лежит на BC. Найдите площадь треугольника ABC.

Задание 9

Дана пирамида SABC с высотой SA. H – такая точка на AB, что $CH \perp AB$. K – такая точка на SB, что $HK \perp SB$, причем $SC = 13$, $SK = 12$, $KB = 2$. Найдите площадь треугольника SBC.

Задание 10

Из точки N на плоскость прямоугольника ABCD опустили перпендикуляр NB. Известно, что $AD = 7$, $NA = 24$. Найдите ND.

Задание 11

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка N – середина ребра BB_1, а точка M делит отрезок BD в отношении 1 : 2, считая от вершины B. Найдите $9\text{ctg}^2\alpha$, где α – угол между прямой, содержащей MN, и плоскостью (ABC). Ответ дайте в градусах.

Задание 12

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка N – середина ребра BB_1, а точка M – середина отрезка BD. Найдите $\text{tg}^2\alpha$, где α – угол между прямой, содержащей MN, и плоскостью $(A_1B_1C_1D_1)$. Ответ дайте в градусах.

Задание 13

Дан прямоугольный параллелепипед, основания ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ которого являются квадратами со стороной $3\sqrt{2}$. Пусть M – точка пересечения диагоналей грани AA_1D_1D, N – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C. Найдите MN.

Задание 14

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – четырехугольная призма с основаниями ABCD и $A_1B_1C_1D_1$. Точка K – проекция точки A_1 на плоскость (ABC), K лежит на AD, причём AK : KD = 1 : 3. ABCD – параллелограмм со сторонами AD=a, AB=2a, $\angle BAD=60^o$, $A_1A=1{,}75a$.

Найдите V/a^3, где V – объем призмы.

Задание 15

Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 42 и составляет с плоскостью боковой грани угол 30∘. Найдите объем призмы.

Задание 16

ABC– правильный треугольник со стороной 3, S – точка, лежащая вне плоскости треугольника, причем SC = SB = 23. Найдите угол, который образуют прямые SA,SB,SC с плоскостью треугольника. Ответ дайте в градусах.

Задание 17

Дана правильная четырехугольная призма, диагональ которой равна 15, а диагональ основания равна 10. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Задание 18

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка N – середина ребра BB_1, а точка M – середина отрезка BD. Найдите $tg^2\alpha$, где α – угол между прямой, содержащей MN, и плоскостью $(A_1B_1C_1D_1)$.

Ответ дайте в градусах.

Задание 19

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка N – середина ребра BB_1, а точка M делит отрезок BD в отношении 1 : 2, считая от вершины B. Найдите $9ctg^2\alpha$, где α – угол между прямой, содержащей MN, и плоскостью (ABC). Ответ дайте в градусах.

Задание 20

Чему равен $ctg^2\alpha$, если α – угол наклона диагонали куба к одной из его граней?

Задание 21

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чему равен угол между A_1C_1 и плоскостью A_1D_1C ?

Задание 22

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка C_2 – середина стороны CC_1. Чему равен квадрат котангенса угла между A_1C_2 и плоскостью A_1D_1C?

Задание 23

Дан треугольник ABC с углом $\angle A=60^\circ$. Вне плоскости отмечена точка O такая, что $OB = OC$ и $BA \perp BN$, $NB \perp BC$. Известно, что $NB=\sqrt{22}$, $NA=5$. Найдите косинус угла между прямой NA и плоскостью.

Задание 24

В правильной трехугольной пирамиде SABC все ребра равны 2. Найти угол между прямой CB и плоскостью SCB.

Задание 25

В правильном треугольнике найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

Задание 26

В правильной треугольной $SABC$ боковое ребро равно стороне основания. Найдите угол между прямой SA и плоскостью ABC.

Задание 27

В основаниях призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ лежат правильные шестиугольники. AD и BF пересекаются в точке H, A_1H – высота призмы. AA_1= 10. Ребро AA_1 наклонено к плоскости оснований под углом, тангенс которого равен 2. Найдите объем A_1H, если AH=3

Задание 28

В правильной шестиугольной призме $ADCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 5, найдите расстояние от точки A до прямой E_1D_1.

Задание 29

$ADCDA_1B_1C_1D_1$— куб. Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью BDC_1.

Задание 30

Пусть SABC – правильная треугольная пирамида с вершиной S. Найдите угол между AS и BC. Ответ дайте в градусах.

Задание 31

Дана пирамида SABC с высотой SA. Известно, что в основании лежит прямоугольный треугольник с прямым углом C. Найдите угол между ребрами SC и BC. Ответ дайте в градусах.

Задание 32

Дана пирамида SABC с высотой SA=8. Известно, что SK равно 9 и перпендикулярно BC=4, причем K лежит на BC. Найдите площадь треугольника ABC.

Задание 33

Дана пирамида SABC с высотой SA, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с прямым у глом A. Найдите угол между прямыми SB и AC. Ответ дайте в градусах.

Задание 34

Дана пирамида SABC с высотой SA. H – такая точка на AB, что $CH \perp AB$. K – такая точка на SB, что $HK \perp SB$, причем $SC = 13$, $SK = 12$, $KB = 2$. Найдите площадь треугольника SBC.

Задание 35

Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна *a*, диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите диагональ призмы;

Задание 36

В прямоугольной призме все боковые грани являются квадратами со стороной $10\sqrt{2}$. Найдите объем призмы.

Задание 37

Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите угол между диагональю призмы и плоскостью боковой грани;

Задание 39

Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите угол между диагональю призмы и плоскостью боковой грани;

Задание 40

Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна 9, 6. Из вершины A прямого угла восставлен к плоскости
треугольника ABC перпендикуляр SA, причем SA= 28. Найти расстояние от точки S до гипотенузы AB.

Задание 41

Через точку S вписанной в треугольник ABC проведена прямая SA, перпендикулярная плоскости треугольника. Доказать, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Задание 42

Из точки N на плоскость прямоугольника ABCD опустили перпендикуляр NB. Известно, что AD = 5, NA = 16. Найдите ND.

Задание 43

Расстояние от точки S до каждой из вершин правильного треугольника *ABC* равно 4 см. Найдите расстояние от точки *S* до плоскости *ABC*, если *AB* = 6 см. Чему равен ρ *(S, ABC)*?

Задание 44

Из вершины A квадрата ABCD со стороной 16 см восстановлен перпендикуляр AE длиной 12 см. Доказать, что треугольник BCE – прямоугольный и найти его площадь.

РЕШЕНИЕ

1. Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Заметим, что AB – проекция наклонной SB на плоскость ABC. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах (так как $SA\perp(ABC), AB\perp AC$) наклонная SB перпендикулярна AC, то есть угол между ними равен 90∘.

Ответ: 90

2. AH– проекция наклонной A_1A на плоскость ABC, тогда $tg\angle A_1AH=2$. В ABCDEF все углы равны друг другу, их можно найти по формуле: $(180\cdot(n-2))/6$, где n – число сторон правильного многоугольника, тогда каждый угол в правильном шестиугольнике равен: $(180\cdot(6-2))/6=120$. Треугольник $\triangle ABF$ – равнобедренный, $\angle ABF=\angle AFB=(180-120)/2=30$. В силу симметрии ABCDEF: $\angle FAH=\angle BAH=120/2=60 \Rightarrow \triangle AHF$ – прямоугольный. В этом треугольнике AH лежит напротив угла в $30 \Rightarrow$ $AH=12\cdot AF=12\cdot 2\sqrt{3}$. В прямоугольном треугольнике $\triangle A_1AH$: $A_1H=AH\cdot tg\angle A_1AH=2\sqrt{3}$. В шестиугольнике ABCDEF отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке O, при этом шестиугольник разделится на 6 одинаковых равносторонних треугольников со стороной, равной $2\sqrt{3}$. Тогда $S_{ABCDEF}=6\cdot S_{тр.}=6\cdot 1/2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot \sin 60 = 6\cdot 12\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2=18\sqrt{3}$. Теперь найдем объем призмы:
 $V=A_1H\cdot S_{ABCDEF}=2\sqrt{3}\cdot 18\sqrt{3} = 108$.

 Ответ: 108

3. $S= 1/2 \cdot 10\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}\cdot\sin 60 = 1/2 \cdot 10\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 75\sqrt{3}$.

 Высота призмы равна стороне квадрата, тогда объем призмы:

 $S = 10\sqrt{3} \cdot 75\sqrt{3} = 2250$.

Ответ: 2250

4. Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, то основания ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ равны. Треугольники $A\ A_1\ D_1$ и $D\ D_1C1$ равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно,

$$\triangle ADD_1=\triangle A\ A_1\ D_1=\triangle D\ D_1C1=\triangle DCC_1,$$

откуда можно заключить, что $31=SA\ A_1\ D_1D=SD\ D_1C1C$.

Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$– параллелепипед, то $SBB_1C_1C=SAA_1D_1D=31$ и $SA\ A_1B1B=SD\ D_1C_1C=31$, следовательно, площадь полной боковой поверхности $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна

$$2\cdot 11+4\cdot 31=146.$$

Ответ: 146

5. Так как параллелепипед прямоугольный, то все его грани – прямоугольники, а у прямоугольника обе диагонали равны. Следовательно, $A_1D=AD_1$. Рассмотрим диагональ A_1D и диагональ параллелепипеда B_1D. Треугольник A_1B_1D прямоугольный, так как ребро A_1B_1 перпендикулярно грани AA_1D_1D (по определению прямоугольного параллелепипеда). Следовательно, гипотенуза

$B_1D = \sqrt{}(A_1B_1^2 + A_1D_1^2) = \sqrt{}(5^2 + (2\sqrt{}6)^2) =7$

Ответ: 7

6. Пусть AB=2, AD=3, $AA_1=6$.

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABD ($\angle A = 90^o$) имеем: $BD^2 = AB^2+AD^2$.

Из прямоугольного треугольника BB1D ($\angle B=90^o$) по теореме Пифагора $B_1D^2 = BD^2+BB_1^2$.

Подставляя BD^2 из первого равенства во второе, получим:

$$B_1D^2 = AB^2+AD^2+BB_1^2 = 2^2+3^2+6^2 = 4+9+36 = 49 \Leftrightarrow B_1D=7.$$

Ответ: 7

7. Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Заметим, что AC – проекция наклонной SC на плоскость ABC. Так как $AC \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp BC$, следовательно, угол между SC и BC равен 90^o.

Ответ: 90°

8. Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Заметим, что AK – проекция наклонной SK на плоскость ABC. Так как $SK \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $AK \perp BC$, следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = (1/2)AK\cdot BC.$$

Треугольник SAK прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора

$$AK = \sqrt{(SK^2-SA^2)} = 6.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = (1/2)\cdot 6 \cdot 5 = 15.$$

Ответ: 15

9. Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Следовательно, SA перпендикулярно любой прямой из (ABC), значит, $SA \perp CH$. Тогда CH перпендикулярна двум пересекающимся прямым SA и AB из плоскости

SAB, значит, CH ⊥ (SAB). Заметим, что тогда HK – проекция наклонной CK на эту плоскость. Значит, по теореме о трех перпендикулярах CK ⊥ SB. По теореме Пифагора из △SCK:

$$CK = \sqrt{(SC^2 - SK^2)} = 5.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle SBC} = (1/2)CK \cdot SB = (1/2) \cdot 5 \cdot 14 = 35.$$

Ответ: 35

10. Так как NB – перпендикуляр к плоскости (ABCD), то AB – проекция NA на ABCD. Так как ABCD – прямоугольник, то AD перпендикулярна BA, следовательно по теореме о трех перпендикулярах AD перпендикулярна NA и треугольник NAD – прямоугольный.

    По теореме Пифагора

    $$AD^2 + NA^2 = ND^2,$$

    откуда $ND^2 = 625$, тогда ND = ±25. Так как длина – неотрицательна, то ND = 25.

    Ответ: 25

11. Так как NB – часть BB_1, а $BB_1 \perp (ABC)$, то и NB ⊥ (ABC). Следовательно, BM – проекция NM на плоскость (ABC). Значит, угол α равен ∠NMB.

    Пусть ребро куба равно x. Тогда NB = 0,5x. По теореме Пифагора BD = $\sqrt{(x^2+x^2)} = 2\sqrt{x}$. Так как по условию BM : MD = 1 : 2, то BM = (1/3) BD, следовательно, BM = $(\sqrt{2}/3)$ x. Тогда из прямоугольного △NBM:

    $$\text{Ctg}\alpha = \text{ctg}\angle NMB = BM/NB = (2\sqrt{2})/3 \Rightarrow 9\text{ctg}^2\alpha = 8.$$

Ответ: 8

12. NM – средняя линия в треугольнике DBB_1, тогда $NM \parallel B_1D$ и α равен углу между B_1D и плоскостью $(A_1B_1C_1D_1)$.

    Так как DD_1 – перпендикуляр к плоскости $A_1B_1C_1D_1$, то B_1D_1 проекция B_1D на плоскость $(A_1B_1C_1D_1)$ и угол между B_1D и плоскостью $(A_1B_1C_1D_1)$ есть угол между B_1D и B_1D_1.

    Пусть ребро куба x, тогда по теореме Пифагора

$$B_1D_1^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow B_1D_1 = x^2.$$

    В треугольнике B_1D_1D тангенс угла между B_1D и B_1D_1 равен

    $tg\angle DB_1D_1 = (DD1)/(B1D1) = 1/\sqrt{2} = tg\alpha$, откуда $tg^2\alpha = 0{,}5$.

    Ответ: 0,5

13. Так как AD = DC, то грани AA_1D_1D и DD_1C_1C равны, следовательно, и их диагонали равны, значит, $A_1D=C_1D$. Так как диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам, то $A_1M=MD=DN=NC_1$. Рассмотрим $\triangle A_1C_1D$: в нем MN является средней линией, следовательно, она равна половине основания A_1C_1, которое в свою очередь является диагональю квадрата A1B1C1D1, следовательно, равно $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$. Следовательно, MN = 3.

    Ответ : 3

14. $V_{ABCDA1B1C1D1}=S_{ABCD}\cdot h$, $S_{ABCD}=AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD = 2a \cdot a \cdot \sqrt{3}/2 = a^2\sqrt{3}$.

    По теореме Пифагора:

$A_1K^2 = AA_1^2 - AK^2 = (49/16)\,a^2 - (1/16)a^2 = 3a^2 \;\Rightarrow\; A_1K = a\sqrt{3}$.

Таким образом,

$V_{ABCDA1B1C1D1} = a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = 3a^3 \quad \Rightarrow \quad V/a^3 = 3$.

Ответ: 3

15. Пусть $A_1B_1=24$ – проекция AB на плоскость α, значит, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$. Так как две прямые, перпендикулярные к плоскости, лежат в одной плоскости, то A_1ABB_1 – прямоугольная трапеция. Проведем $AH \perp BB_1$. Тогда $AH=A_1B_1=24$.

Следовательно, по теореме Пифагора

$$HB = \sqrt{(AB^2 - AH^2)} = 7.$$

Заметим также, что угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость, следовательно, искомый угол – угол между AB и A_1B_1. Так как $AH \parallel A_1B_1$, то угол между AB и A_1B_1 равен углу между AB и AH.

Тогда

$$\sin\angle BAH = BH/AB = 7/25 = 0{,}28.$$

Ответ: 0,28

16. Проведем перпендикуляр OH на плоскость треугольника.

Рассмотрим △OAH, △OBH, △OCH. Они являются прямоугольными и равны по катету и гипотенузе. Следовательно, AH=BH=CH. Значит, H –

точка, находящаяся на одинаковом расстоянии от вершин треугольника ABC. Следовательно, H – центр описанной около него окружности. Так как $\triangle ABC$ – правильный, то H – точка пересечения медиан (они же высоты и биссектрисы). Так как угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость, а AH – проекция AO на плоскость треугольника, то угол между AO и плоскостью треугольника равен $\angle OAH$. Пусть AA_1 – медиана в $\triangle ABC$, следовательно,

$$AA_1 = \sqrt{(AB^2-BA_1^2)} = 3\sqrt{3}/2.$$

Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то

$$AH = (2/3)AA_1 = \sqrt{3}.$$

Тогда из прямоугольного $\triangle OAH$:

$$\cos OAH=AH/AO=1/2 \qquad \Rightarrow \qquad \angle OAH=60^\circ.$$

Ответ: 60°.

17. Из условия следует, что прямая p пересекает плоскостью π. Пусть $p\cap l=O$, $l\cap\pi=L$, $p\cap\pi=P$.

Тогда $\angle POL$ – угол между прямыми p и l.

Так как угол между прямой и плоскостью – угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость, то $\angle OPL$ – угол между p и π. Заметим, что $\triangle OPL$ прямоугольный с $\angle L=90^\circ$. Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\angle POL+\angle OPL=90^\circ$.

Ответ: 90°.

18. NM – средняя линия в треугольнике DBB_1, тогда $NM \parallel B_1D$ и α равен углу между B_1D и плоскостью $(A_1B_1C_1D_1)$.

Так как DD_1 – перпендикуляр к плоскости $A_1B_1C_1D_1$, то B_1D_1 проекция B_1D на плоскость $(A_1B_1C_1D_1)$ и угол между B_1D и плоскостью $(A_1B_1C_1D_1)$ есть угол между B_1D и B_1D_1.

Пусть ребро куба x, тогда по теореме Пифагора

$$B_1D_1^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow B_1D_1 = x^2.$$

В треугольнике B_1D_1D тангенс угла между B_1D и B_1D_1 равен

$tg\angle DB_1D_1 = (DD1)/(B1D1) = 1/\sqrt{2} = tg\alpha$, откуда $tg^2\alpha = 0,5$.

Ответ: 0,5

19. Так как NB – часть BB_1, а $BB_1 \perp (ABC)$, то и $NB \perp (ABC)$. Следовательно, BM – проекция NM на плоскость (ABC). Значит, угол α равен $\angle NMB$.

Пусть ребро куба равно x. Тогда NB = 0,5x. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{(x^2+x^2)} = 2\sqrt{x}$. Так как по условию BM : MD = 1 : 2, то BM = (1/3) BD, следовательно, $BM = (\sqrt{2}/3)\ x$. Тогда из прямоугольного $\triangle NBM$:

$$Ctg\alpha = ctg\angle NMB = BM/NB = (2\sqrt{2})/3 \Rightarrow 9ctg^2\alpha = 8.$$

Ответ: 8

20. Искомый угол будет совпадать с углом между диагональю куба и диагональю любой его грани, т.к. в данном случае диагональ куба будет являться наклонной, диагональ грани – проекцией этой наклонной на плоскость грани. Таким образом, искомый угол будет равен, например, углу C_1AC.

Если обозначить ребро куба за x, то

$$AC=\sqrt{(x^2+x^2)}=\sqrt{2}x,$$

тогда квадрат котангенса искомого угла:

$$ctg^2\alpha = (AC : CC_1)^2 = (\sqrt{2}x : x)^2 = 2.$$

Ответ: 2

21. Проведем $C_1H\perp CD_1$. Так как $BC \perp (CC_1D_1)$, то BC перпендикулярна любой прямой из плоскости (CC_1D_1), следовательно, $BC \perp C_1H$. Таким образом, C_1H перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости A_1D_1C, следовательно, $C_1H\perp(A_1D_1C)$. Тогда A_1H – проекция A_1C_1 на плоскость A_1D_1C. Значит, угол между A_1C_1 и плоскостью A_1D_1C равен углу между A_1C_1 и A_1H.

Пусть x – ребро куба. Тогда $AC=\sqrt{(x^2+x^2)}=\sqrt{2}x$.

C_1H – высота, опущенная из вершины равнобедренного $\triangle CC_1D_1$. Следовательно, C_1H – медиана. Но к тому же $\angle CC_1D_1=90^\circ$, а медиана, опущенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, следовательно, $C_1H=(1/2)CD_1$. Так как $CD_1=A_1C_1=\sqrt{2}x$, то $C_1H=22x$.

Следовательно,

$$\sin\angle C_1A_1H=C_1H/A_1C_1=1/2 \quad \Rightarrow \quad \angle C_1A_1H=30^\circ.$$

Ответ: 30

22. Проведем $C_2H\perp CD_1$. Так как $BC \perp (CC_1D_1)$, то BC перпендикулярна любой прямой из плоскости (CC_1D_1), следовательно, $BC\perp C_2H$. Таким образом, C_2H перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости A_1D_1C, следовательно, $C_2H\perp(A_1D_1C)$.

Тогда A_1H – проекция A_1C_2 на плоскость A_1D_1C. Значит, угол между A_1C_2 и плоскостью A_1D_1C равен углу между A_1C_2 и A_1H.

Рассмотрим грань CC_1D_1D. Проведем диагональ C_1D, пусть она пересекается с диагональю CD_1 в точке O. Так как эта грань представляет собой квадрат, то $C_1O \perp CD_1$. Тогда $C_2H \parallel C_1O$ и, так как C_2 – середина CC_1, то C_2H – средняя линия и $C_2H=12C_1O$.

Если обозначить за x ребро куба, то $C_1D = \sqrt{(x^2+x^2)} = \sqrt{2}x$, а $C_2H=(\sqrt{2}/4)x$.

Найдем A_1C_2 из прямоугольного $\triangle A_1C_1C_2$:

$$A_1C_2 = \sqrt{(A_1C_1{}^2+C_1C_2{}^2)} = \sqrt{((\sqrt{2}x)^2+(0,5x)^2)}=(3/2)x.$$

Тогда

$$\sin^2\angle C_2A_1H = (C_2H/A_1C_2)^2 = 1/18 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\angle C_2A_1H = 1-\sin^2\angle C_2A_1H=17/18$$

Тогда

$$\mathrm{ctg}^2\angle C_2A_1H = \cos^2\angle C_2A_1H:\sin^2\angle C_2A_1H = 17.$$

Ответ: 17

23. Тогда AH – проекция прямой OA на плоскость ABC и необходимо найти косинус угла $\angle OAH$.

Заметим, что $\triangle OAB=\triangle OAC$ как прямоугольные по катету и гипотенузе. Следовательно, AB=AC. Следовательно, $\triangle ABH=\triangle ACH$ также как прямоугольные по катету и гипотенузе. Значит, $\angle BAH=\angle CAH=30^\circ$.

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{(AO^2 - OB^2)} = \sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$\cos 30^\circ = AB/AH \quad \Rightarrow \quad AH = AB/\cos 30^\circ = 2.$$

Так как $OH \perp (ABC)$, то OH перпендикулярно любой прямой из этой плоскости, значит, $\triangle OAH$ – прямоугольный.

Тогда

$$\cos\angle OAH = AH/AO = 2/5 = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4

24. Сперва заметим, что, если параллельно перенести прямую AD, искомый угол не поменяется. Рассмотрим M и N – середины AB и CD соответственно. Тогда можно вместо AD искать угол между MN и плоскостью.

Далее, заметим, что K – проекция точки M – попадет на SN. Действительно, по теореме о трех перпендикулярах, раз $MN \perp CD$ и $SN \perp CD$, то SK есть проекция MK. А тогда искомый угол – SNM

Рассмотрим треугольник MSN.$MN = 2$, $SM = SN\sqrt{3}$. Тогда если O– середина MN, то $NO = 1$ и значит, $\cos SNM = 1/\sqrt{3}$.

Ответ: $\arccos 1/\sqrt{3}$.

25. Пусть ABCD — правильный тетраэдр с ребром a. Найдём угол между AD и плоскостью ABC.

Проведём высоту DH. Проекцией прямой AD на плоскость ABC служит прямая AH. Поэтому искомый угол ϕ есть угол между прямыми AD и AH.

Отрезок AH есть радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC:

$$AH = a/\sqrt{3}.$$

Теперь из прямоугольного треугольника ADH:

$\cos \phi = AH/AD \ = \ a/\sqrt{3}.$

Ответ: arccos a/√3.

26. Пусть M — середина AB. Проведём высоту CH в треугольнике CC_1M. Покажем, что CH — перпендикуляр к плоскости ABC_1. Для этого нужно предъявить две пересекающиеся прямые этой плоскости, перпендикулярные CH.

Первая прямая очевидна — это C_1M ⊥ В самом деле, CH C_1M по построению.

Вторая прямая — это AB. Действительно, проекцией наклонной CH на

⊥ плоскость ABC служит ⊥ прямая CM ; при этом AB CM . Из теоремы о трёх перпендикулярах следует тогда, что AB CH.

Итак, $CHABC_1$. Стало быть, угол между CC_1 и ABC_1 есть $\phi = \angle CC_1H$. Величину CH найдём из соотношения

$$C_1M \cdot CH = CC_1 \cdot CM$$

Имеем:

$CM = (a\sqrt{3})/2,$

$$C_1M = \sqrt{(CC12+CM2)} = \sqrt{(a2 + (3a^2)/4)} = (a\sqrt{7})/2$$

Тогда

$$(a\sqrt{7})/2 * CH = a((a\sqrt{3})/2)$$

Откуда

$$CH = a\sqrt{(3/7)}$$

Остаётся найти угол ϕ:

$$\sin \phi = CH/CC_1 = \sqrt{(3/7)} .$$

Ответ: arcsin√(3/7)

27. Поскольку в правильной пирамиде высота опускается в центр основания OO, то OEOE- это проекция SESE, а точка MM проецируется в точку KK- середину отрезка OEOE. И теперь FKFK- это проекция FMFM, а искомый угол между прямой FMFM и плоскостью основания – это ∠MFK∠MFK

Пусть стороны основания равны какому – то а, тогда боковые рёбра – 3а. Заметь, что ΔMFK – прямоугольный и в этом треугольнике нам нужно найти острый угол. Проще всего найти тангенс этого угла.

tg∠MFK = FK/MK

MK = SO/2 = √ (SE2 – OE2) / 2 = a√2

FK = FE * sin60 = (a√3)/3

Значит,

tg∠MFK = (a√2 ∗ 2) / a√3 = 2√6 / 3

Ответ: tg∠MFK = 2√6 / 3

28. Соединим точку А с точкой E_1 и докажем, что AE_1 - расстояние от А до прямой E_1 D_1. Так как треугольник АВС равнобедренный с углом В, равным 120 градусам, то угол ВСА=30 ^{o}, а значит, угол ACD=90^o.

Так как E_1E плоскости АВС, то АЕ перпендикулярно E_1 E.

Так как AE перпендикулярно E_1 E и ED, то AE перпендикулярно плоскости EE_1 D_1 D, и, значит, и прямой E_1 D_1, поэтому AE перпендикулярно прямой E_1 D_1.

Так как AE является проекцией AE_1, то и AE_1 перпендикулярно E_1 D_1.

Из треугольника ABC по теореме косинусов находим $AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos120^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot (-0,5) = 50 + 25 = 75$, AE = 5v3.

Из треугольника AEE_1 по теореме Пифагора находим $AE_1^2 = AE^2 + EE_1^2 = 75 + 25 = 100$, $AE_1 = 10$

Ответ: $AE_1 = 10$

29.1) BD ⊥ AC; BD ⊥ BB_1, а значит, BD ⊥ AA_1. Тогда прямая BD перпендикулярна плоскости (ACA_1) и A_1C ⊥ BD.

2) C_1D ⊥ AD; C_1D ⊥ D_1C , а значит, C_1D ⊥ A_1B. Тогда прямая C_1D перпендикулярна плоскости (A_1DC) и A_1C⊥ C_1D. Поэтому прямая A_1C перпендикулярна плоскости (BDC_1).

Ответ: 90°.

30. Так как пирамида правильная, то высота пирамиды SO падает в точку пересечения медиан основания. Пусть AA_1 – медиана основания. Тогда AO – проекция наклонной AS на плоскость основания. Так как AO – часть AA_1, а AA_1⊥BC (медианы правильного треугольника являются также и высотами), то по теореме о трех перпендикулярах (SO⊥(ABC),AO⊥BC) наклонная AS перпендикулярна BC. Следовательно, ∠(AS,BC)=90∘.

Ответ: 90

31. Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Заметим, что AC – проекция наклонной SC на плоскость ABC. Так как $AC \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp BC$, следовательно, угол между SC и BC равен 90∘.

Ответ: 90

32. Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Заметим, что AK – проекция наклонной SK на плоскость ABC. Так как $SK \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $AK \perp BC$, следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = (1/2)AK \cdot BC.$$

Треугольник SAK прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора

$$AK = \sqrt{(SK^2 - SA^2)} = 6.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = (1/2) \cdot 6 \cdot 5 = 15.$$

Ответ: 15

33. Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Заметим, что AB – проекция наклонной SB на плоскость ABC. Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах (так как $SA \perp (ABC), AB \perp AC$) наклонная SB перпендикулярна AC, то есть угол между ними равен 90∘.

Ответ: 90

34. Так как SA – высота пирамиды, то $SA \perp (ABC)$. Следовательно, SA перпендикулярно любой прямой из (ABC), значит, $SA \perp CH$. Тогда CH перпендикулярна двум пересекающимся прямым SA и AB из плоскости SAB, значит, $CH \perp (SAB)$. Заметим, что тогда HK – проекция наклонной

CK на эту плоскость. Значит, по теореме о трех перпендикулярах CK $\perp$ SB. По теореме Пифагора из $\triangle SCK$:

$$CK = \sqrt{(SC^2 - SK^2)} = 5.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle SBC} = (1/2)CK \cdot SB = (1/2) \cdot 5 \cdot 14 = 35.$$

Ответ: 35

35. Рассмотрим треугольник *ABC*. Он равнобедренный, так как *AB* = *AC*. А угол *BAC* равен 60°. Значит, треугольник *ABC* – равносторонний. Получаем, *BC* = *AB* = 3 см.

    Угол между прямой *AB* и плоскостью α – это угол между прямой *AB* и ее проекцией *BO* на плоскость α.

    То есть, $\angle(AB, \alpha) = \angle ABO = 90° - 60° = 30°$.

    Ответ: 30°

36. Так как NC перпендикулярен DC и AB, причём DC и AB пересекаются, то NC перпендикулярен плоскости (ABC). Тогда DC – проекция ND на (ABC), но DC перпендикулярен AB, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах ND перпендикулярен AB. Так как AD:AB как 1:2, то D – середина AB, тогда ND в треугольнике ANB является медианой и высотой, следовательно, треугольник ANB – равнобедренный и $\angle AND = \frac{1}{2}\angle ANB \Rightarrow \frac{\angle AND}{\angle ANB} = \frac{1}{2}$.

    Ответ: 0,5

37. Так как $AB^2 + BC^2 = AC^2$, то отрезок BC перпендикулярен AB, следовательно прямая c перпендикулярна a, но c перпендикулярна b, a и

b – пересекаются, тогда с перпендикулярна π, следовательно AB – проекция AC на π. Итого: b перпендикулярна проекции l на π, тогда по теореме о трех перпендикулярах b перпендикулярна l, то есть угол между ними составляет 90°.

Ответ: 90

38. Т.к. AK – перпендикуляр к плоскости π, a – прямая в плоскости π, а AO – наклонная, перпендикулярная к прямой a, то согласно теореме о трех перпендикулярах $KO \perp a \Rightarrow \triangle OKL$ – равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом $\angle KOL \Rightarrow$ по теореме Пифагора $KL^2 = OK^2 + OL^2 = 2 \cdot OK^2 \Rightarrow OK = 2$. В прямоугольном треугольнике $\triangle AKO$: $AO = OK : \cos 60^\circ = 2 : 1/2 = 4$.

Ответ: 4

39. Т.к. AK – перпендикуляр к плоскости π, a – прямая в плоскости π, а AO – наклонная, перпендикулярная к прямой a, то согласно теореме о трех перпендикулярах $KO \perp a \Rightarrow \triangle OKL$ – равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом $\angle KOL \Rightarrow$ по теореме Пифагора $KL^2 = OK^2 + OL^2 = 2 \cdot OK^2 \Rightarrow OK = \sqrt{3}$. В прямоугольном треугольнике $\triangle AKO$: $AK = OK \cdot tg60 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

Ответ: 3

40. Пусть CH - высота заданного прямоугольного треугольника ABC.

Тогда MH- наклонная к плоскости треугольника ABC, а CH - проекция этой наклонной на плоскость треугольника.

Так как $CH \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах и $MH \perp AB$. Значит, длина отрезка MH равна искомому расстоянию от точки M до гипотенузы AB.

Из прямоугольного треугольника МСН по теореме Пифагора находим, что

$$MH = \sqrt{MC^2 + CH^2} = \sqrt{28^2 + 9,6^2} = \sqrt{876,16} = 29,6$$

Ответ. МН = 29,6

41. 1.Так как радиус ОА = r перпендикулярен стороне треугольника, то, согласно теореме о трех перпендикулярах, отрезок SA перпендикулярен этой стороне.

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник SAO. По теореме Пифагора

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$$

3. Аналогично, можно показать, что

$$SB = \sqrt{r^2 + OS^2} \text{ и } SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$$

То есть SA = SB = SC .

Ответ: SA = SB = SC

42. Так как NB – перпендикуляр к плоскости (ABCD), то AB – проекция NA на ABCD. Так как ABCD – прямоугольник, то AD перпендикулярна BA, следовательно по теореме о трех перпендикулярах AD перпендикулярна NA и треугольник NAD – прямоугольный.

По теореме Пифагора

$$AD^2 + NA^2 = ND^2,$$

откуда $ND^2 = 625$, тогда ND = ±25. Так как длина – неотрицательна, то ND = 25.

Ответ: 25

43. Пусть *MH* – перпендикуляр к плоскости *ABC*. Найдем месторасположение точки *H*.

Треугольники *MHA, MHB, MHC* равны по гипотенузе и общему катету (*MA = MB = MC,* катет *MH* – общий). Значит, *HA = HB = HC*. То есть точка *H* равноудалена от вершин треугольника *ABC*. Значит, *H* – центр описанной окружности, а отрезок *AH* равен радиусу описанной окружности. Найдем радиус описанной окружности из теоремы синусов.

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}\ (см).$$

Значит, $HA = HB = HC = 2\sqrt{3}$ см.

Длина перпендикуляра *MH* и есть расстояние от точки *M* до плоскости *ABC*. Рассмотрим прямоугольный треугольник *MHC*. Найдем *MH* по теореме Пифагора.

$$\rho(M, ABC) = MH = \sqrt{MC^2 - CH^2} = \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\ (см).$$

Ответ: 2 см

44. Площадь прямоугольного треугольника EBC можно найти как полупроизведение катетов EB и BC. Для нахождения EB, рассмотрим $\triangle$AEB. Он прямоугольный, $\angle A = 90^{\circ}$, EB в этом треугольнике является гипотенузой. Запишем для этого треугольника теорему Пифагора:

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

По условию AE = 12 см и AB = 16см. Подставляя эти значения в последнее равенство, получим:

$$EB^2 = 12^2 + 16^2$$

$$EB^2 = 400$$

EB = 20см

Формула для нахождения площади $\triangle$EBC запишется следующим образом

$$S_{\Delta EBC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16 = 160$$

Ответ: S = 160см