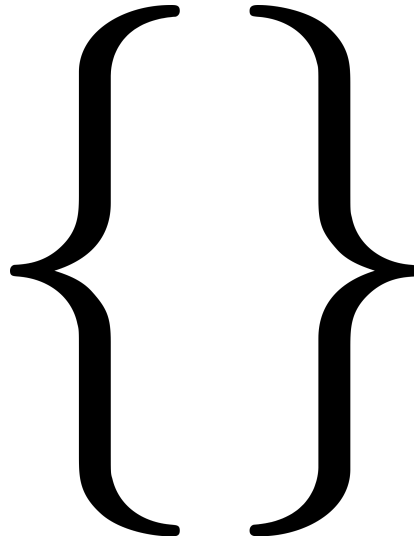


## Teoria dos Conjuntos

---

*Douglas Santos*  
*douglass@ufrj.br*



# Conteúdo

<b>Teoria Axiomática [Conjuntos]</b>	<b>2</b>
Teoria ZF . . . . .	2
Axiomas . . . . .	4
Axioma da extensão (ou da unicidade) . . . . .	4
Axioma do vazio . . . . .	4
Axioma do Par . . . . .	5
Axioma da União . . . . .	5
Axioma das partes . . . . .	6
Axioma da separação . . . . .	6
Axioma da regularidade . . . . .	7
<b>Conjuntos</b>	<b>8</b>
Pertinência e Inclusão . . . . .	8
União e Interseção . . . . .	8
Conjunto universal . . . . .	9
<b>Relações</b>	<b>9</b>
Par não ordenado . . . . .	9
Par ordenado . . . . .	10
Produto Cartesiano . . . . .	11
Relações . . . . .	12
Domínio, Contradomínio e Imagem . . . . .	12
Função . . . . .	13
Relação de equivalência . . . . .	14
Classes de equivalência . . . . .	15
Partição . . . . .	16
Conjunto Quociente . . . . .	17
Relação de complementaridade [Adicional] . . . . .	18
Família Indexada . . . . .	18
Matriz lógica . . . . .	18
<b>Referências</b>	<b>20</b>

# Teoria Axiomática [Conjuntos]

## Teoria ZF

Condições estabelecidas da teoria:

1. Todos os objetos da teoria são conjuntos. Dizemos que *todos os elementos de conjuntos serão conjuntos*, e assim sucessivamente, mas paramos ao chegarmos no conjunto vazio.
2. Os objetos da teoria não comportarão átomos e nem conjuntos de todos os conjuntos (conjuntos universais), isto é, não comportarão *urelementos*.

A estrutura do método axiomático se estabelece da seguinte forma:

1. Linguagem
2. Axiomas
3. Teorema - consequência dos axiomas
4. Regras de inferência da *lógica clássica*

### 1. Composição da linguagem

A linguagem é dividida em 3 segmentos

#### Variáveis   Símbolos   Fórmulas

a) Variáveis: É utilizado tanto letras minúsculas quanto maiúsculas para denotar conjuntos.

b) Símbolos

$\forall x$ : para todo conjunto  $x$ ...

$\exists x$ : existe um conjunto  $x$ ...

$\neg$ : negação de...

$\&$ : e

$\vee$ : ou (acomete uma disjunção)

$\rightarrow$ : se... então (condicional)

$\leftrightarrow$ : se e somente se (bicondicional)

c) Fórmulas: Sequências de símbolos que satisfazem os seguintes itens

Se  $x$  e  $y$  são variáveis, então  $x \in y$  e  $x = y$  são fórmulas. *Fórmulas atômicas*;

Se  $A$  e  $B$  são fórmulas, então  $\neg(A)$ ,  $(A) \rightarrow (B)$ ,  $(A) \& (B)$ ,  $(A) \vee (B)$  e  $(A) \leftrightarrow (B)$  também são.

Se  $A$  é uma fórmula e  $x$  uma variável, então  $\forall x(A)$  e  $\exists x(A)$  também são fórmulas;

Todas as fórmulas tem uma das formas descritas acima.

**Exemplo 1.** A análise da composição de fórmulas de

$$\exists B(\forall x(\neg(x \in B)))$$

se da por

- I. Existência da fórmula atômica  $[(x \in B)]$ .
- II. Uma outra fórmula está sendo a negação da fórmula atômica  $[(\neg(x \in B))]$
- III. Fórmula quantificando a variável  $x$  em relação a negação da fórmula atômica  $[\forall x()]$

Portanto, temos 3 fórmulas que são

$$\neg(x \in B), \quad \forall x(\neg(x \in B)) \quad \text{e} \quad \exists B(\forall x(\neg(x \in B))).$$

"Existe um objeto B tal que para todo objeto x, não é verdade que x pertence a B."

#### Observação (Fórmulas lógicas)

- **Ocorrência de variável:** cada aparecimento de uma variável. Sendo

$$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

temos duas ocorrências da variável y e duas<sup>a</sup> ocorrências da variável x.

- **Escopo de uma variável:** uma variável y está no escopo de uma variável x se y aparece em uma fórmula do tipo  $\forall x( \ )$  ou  $\exists x( \ )$ . Sendo

$$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

y está no escopo de x e x está no escopo de si mesmo.

- **Variável livre:** uma variável é livre se não está no escopo dela mesma. Sendo

$$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

x e y que estão fora da subfórmula são variáveis livres. y que está dentro da subfórmula é uma variável livre, mas, dentro da subfórmula, x não é uma variável livre por está dentro do próprio escopo.

<sup>a</sup> Alguns autores colocam o x, em  $\exists x$ , como uma ocorrência.

## 2. Axiomas da teoria

- **Axiomas que garantem a existência de certos conjuntos específicos**

Axioma do vazio

Axioma do infinito

- **Axiomas que nos permitem construir novos conjuntos**

Axioma do par

Axioma da união

Axioma das partes

Axioma da escolha

Axioma da separação

Axioma da substituição

- **Axiomas que dizem respeito ao "comportamento" dos conjuntos**

Axioma da regularidade

Axioma da extensão

Nas partes 3 e 4 da estrutura da Teoria ZF, que são, respectivamente, os teoremas e as regras de inferência da lógica clássica, surgem dos Axiomas que serão apresentados a seguir; não sendo necessário declará-los a priori.

## Axiomas

### Axioma da extensão (ou da unicidade)

**Proposição 1.** Se dois conjuntos  $x$  e  $y$  possuem exatamente os mesmos elementos, então eles são iguais.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

**Exemplo 2.** Se  $x = \{1, 2, 3\}$ ,  $y = \{3, 1, 2\}$  e  $z = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}$ , então  $x = y = z$ .

### Axioma do vazio

**Proposição 2.** Existe um conjunto sem elemento algum.<sup>ii</sup>

$$\exists x \forall y \neg (y \in x)$$

Utiliza-se  $\emptyset$  para denotar este conjunto do Axioma do vazio. Para isto, devemos assegurar que

1. Existe um conjunto com tal propriedade
2. Esse conjunto é único (não pode-se atribuir o mesmo símbolo para duas coisas distintas)

**Definição 1** (1. Relação de inclusão). Dizemos que  $x$  está contido em  $y$  e escrevemos  $x \subseteq y$  se todo elemento de  $x$  é um elemento de  $y$ .

$$x \subseteq y \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$$

Com essa notação, podemos reescrever o **axioma da extensão**:

$$(A \subseteq B) \& (B \subseteq A) \rightarrow A = B$$

Também escrevemos  $x \subset y$  para dizer que  $x \subseteq y$  &  $x \neq y$ .

**Teorema 1.** O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

$$\forall x (\emptyset \subseteq x)$$

*Demonstração.* Supondo que exista  $x$  tal que o conjunto vazio não esteja contido em  $x$  e que existe  $y$  tal que  $y$  pertence ao conjunto vazio mas não a  $x$ , temos, com efeito:

$$\exists x (\emptyset \not\subseteq x) \& \exists y (y \in \emptyset \& y \notin x).$$

Temos uma contradição à própria definição de conjunto vazio. ■

**Teorema 2.** Existe um único conjunto vazio.

*Demonstração.* A existência é garantida pelo Axioma do vazio. Com efeito, supondo que existam conjuntos vazios  $x$  e  $y$ , com  $x \neq y$ . Pelo axioma da extensão deve então existir um elemento  $z$  tal que

$$\begin{aligned} z \in x \quad \text{mas} \quad z \notin y \quad \text{ou} \\ z \in y \quad \text{mas} \quad z \notin x. \end{aligned}$$

Em qualquer caso temos uma contradição com o fato de que  $x$  e  $y$  são vazios. ■

---

<sup>ii</sup>Posteriormente, surgirá a necessidade de verificar a dispensabilidade deste axioma.

### Observação (Relação de inclusão)

É comumente apresentado em escolas que a relação de inclusão se aplica apenas entre conjuntos, enquanto que a relação de pertinência se aplica entre elementos e conjuntos. Isso é impreciso diante da teoria, pois:

- Todos os objetos da nossa teoria são conjuntos. Portanto, nas expressões  $x \in y$  e  $x \subseteq y$ , tanto  $x$  quanto  $y$  são conjuntos;
- Podem existir conjuntos cujos elementos são conjuntos.

Supõe-se que exista o conjunto  $\{\emptyset\}$ , ou seja, um conjunto cujo único elemento é  $\emptyset$ . Em consideração, temos

- $\emptyset \in \{\emptyset\}$ , isto é,  $\emptyset$  é elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$
- $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ , de acordo com o Teorema 1.

### Axioma do Par

**Proposição 3.** Sejam  $x$  e  $y$  conjuntos quaisquer. Então existe um conjunto  $z$  tal que  $x \in z$  e  $y \in z$ .

$$\forall x, y \exists z (x \in z \ \& \ y \in z)$$

Aqui, dizemos que  $z$  é um par não ordenado, pois, pelo axioma da extensão, os conjuntos  $\{x, y\}$  e  $\{y, x\}$  são iguais.

**Exemplo 3.** No caso em que  $x = y$ :  
temos  $\{x, x\} = \{x\}$ , pelo axioma da extensão.

### Axioma da União

**Proposição 4.** Para todo conjunto  $A$ , existe um conjunto  $B$  cujos elementos são exatamente os elementos dos elementos de  $A$ .

$B$  será denotado por  $\bigcup_{X \in A} X$

- todo  $X$ , que é elemento de  $A$ , é subconjunto de  $B$
- todo  $Y$ , que é elemento de  $B$ , é elemento de algum elemento de  $A$

Neste axioma, temos, também que

- Caso  $A$  seja um vazio,  $B$  será o conjunto vazio
- Caso  $A$  seja finito,  $B$  será uma união finita
- Caso  $A$  seja infinito,  $B$  será uma união infinita.

**Definição 2.** A união generalizada de um conjunto  $A$  é o conjunto formado pelos elementos dos elementos de  $A$ .

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \exists c (c \in A \ \& \ x \in c))$$

**Exemplo 4.** Seja um conjunto  $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ .

Então, a união generalizada se realiza como  $\bigcup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

O conjunto  $A$  possui 3 elementos que são conjuntos que possuem elementos que estão em  $A$ .

### Observação

Não existe um axioma semelhante para interseções, pois não é possível definir uma interseção vazia. A redação de  $\bigcap_{X \in \emptyset} X$  compreende o *Universo de von Neumann*, o que nos levaria para caminhos desnecessários (por ora) ao estudo mais avançado da Teoria dos conjuntos.

### Axioma das partes

**Proposição 5.** Para todo conjunto  $x$ , existe o conjunto  $y$  dos subconjuntos de  $x$ :

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]$$

O conjunto definido pelo axioma também é único. Sendo assim, podemos definir o seguinte:

**Definição 3.** Definimos o *conjunto das partes*, ou simplesmente *power set*, como o conjunto de todos os subconjuntos de  $x$ , e o denotamos por  $\mathcal{P}(x)$ .

**Exemplo 5.** Seja um conjunto  $A = \{1, 2\}$ .

Pelo axioma das partes,

$$(z \in \mathcal{P}A \leftrightarrow z \subseteq A)$$

$$\emptyset \subseteq A$$

$$\{1\} \subseteq A$$

$$\{2\} \subseteq A$$

$$\{1, 2\} \subseteq A.$$

Logo,  $\mathcal{P}A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

### Axioma da separação

Queremos ser capazes de definir um conjunto através de uma fórmula lógica. Para evitar paradoxos, como o paradoxo de Russel, temos que especificar o conjunto sobre qual nossa fórmula será elaborada.

**Proposição 6.** Portanto, para cada fórmula  $P(x)$ , para todo conjunto  $y$ , existe o conjunto daqueles elementos que pertencem a  $y$  e satisfazem a fórmula  $P$ .

**Exemplo 6.** Seja um conjunto  $y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

$P(x)$  :  $x$  é par.

$$Z = \{x; x \in y \ \& \ P(x)\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

**Definição 4.** Para cada fórmula  $P$  tal que  $z$  não ocorre livre, a seguinte fórmula é um axioma:

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \leftrightarrow x \in y \ \& \ P(x)]$$

"para todo  $y$  existe  $z$  tal que para todo  $x$ ,  $x$  pertence a  $z$  iff  $x$  pertence a  $y$  e vale a fórmula  $P(x)$ ."

O conjunto  $z$  será denotado assim:

$$z = \{x : x \in y \ \& \ P(x)\}.$$

Ou assim:

$$z = \{x \in y : P(x)\}.$$

Por que  $z$  não pode ocorrer livre em  $P$  na fórmula

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \leftrightarrow x \in y \ \& \ P(x)]?$$

Se permitirmos que a variável que define o conjunto ocorra livre em  $P$ , poderíamos tomar  $P(x) = x \notin z$ :

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \leftrightarrow x \in y \ \& \ x \notin z].$$

Tomando  $y = \{\emptyset\}$  e  $x = \emptyset$ , temos que  $x \in y$  é verdadeiro. Assim,

$$(x \in z \leftrightarrow x \notin z)$$

é uma contradição.

## Interseção

Podemos utilizar o axioma da separação para definir a interseção de dois conjuntos.

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos.

Então, pelo axioma da separação, existe  $z = \{x : x \in A \ \& \ P(x)\}$

Tomando  $P(x) = x \in B$ , temos

$$z = \{x : x \in A \ \& \ x \in B\} = A \cap B$$

## Diferença e conjuntos vazios

Da mesma forma, podemos definir a diferença entre dois conjuntos.

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos.

Então, pelo axioma da separação, existe  $z = \{x : x \in A \ \& \ P(x)\}$

Tomando  $P(x) = x \notin B$ , temos

$$z = \{x : x \in A \ \& \ x \notin B\} = A - B$$

Se tomarmos  $P(x) = x \neq x$ , obtemos o conjunto vazio.

## Interseção arbitrária de conjuntos

**Teorema 3.** Dado um conjunto não vazio  $x$ , existe o conjunto  $y = \bigcap x$ , formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a todos os elementos de  $x$ .

$$\bigcap x = \{v : v \text{ pertence a todos os elementos de } x\}.$$

**Exemplo 7.** Seja um conjunto  $x = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ .

Existe o conjunto interseção:  $\bigcap x = \{2, 3\}$ .

Formalmente, temos

$$y = \{v : v \in z \ \& \ \forall w (w \in x \rightarrow v \in w)\}.$$

## Axioma da regularidade

**Proposição 7.** Para todo conjunto  $x$  não vazio existe  $y \in x$  tal que  $x \cap y = \emptyset$ .

$$\forall x [x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \ \& \ x \cap y = \emptyset)]$$

Ou seja, esse axioma garante que não exista uma sequência infinita decrescente na relação de pertinência. Não há como ficar preso numa sequência infinita decrescente, pois certa hora irá encontrar o conjunto vazio.



**Teorema 4.** Não existem conjuntos  $x$  e  $y$  tais que  $x \in y$  e  $y \in x$ .

*Demonstração.* Sejam  $x$  e  $y$  conjuntos quaisquer.

Vamos demonstrar que ou  $x \notin y$  ou  $y \notin x$ . Pelo **axioma do par**, existe  $B = \{x, y\}$  não vazio.

Pelo **axioma da regularidade**,  $B \neq \emptyset \rightarrow \exists z(z \in B \text{ \& } z \cap B = \emptyset)$ .

Mas  $z \in B$  implica que  $z = x$  ou  $z = y$ .

Se  $z = x$ , então  $z \cap B = x \cap B = \emptyset$ , logo,  $y \notin x$ ,

(pois caso contrário, o resultado da interseção conteria o  $y$ ).

Se  $z = y$ , então  $z \cap B = y \cap B = \emptyset$ , logo,  $x \notin y$ . ■

#### Nota

A formulação, dada por von Neumann (1925), em lógica de primeira ordem, é seguida por

$$\forall A(\exists B(B \in A) \rightarrow \exists B(B \in A \wedge \neg \exists C(C \in A \wedge C \in B)))$$

*Todo conjunto diferente do conjunto vazio possui um elemento que é totalmente disjunto dele.* Sem esse axioma, o comportamento possível de infundados conjuntos surgem. São denominados **hiperconjuntos**. Um comportamento típico seria  $y \in y$ , então  $y$  é um hiperconjunto. Em particular, não é adequado ter a violação desse axioma, apenas para versões da teoria dos conjuntos que possam se beneficiar de tal comportamento.

## Conjuntos

### Pertinência e Inclusão

Quando um objeto (elemento)  $x$  pertence a um conjunto  $A$ :

$$x \in A$$

Dois conjuntos iguais, onde possuem exatamente os mesmos elementos (um dado conjunto está totalmente contido no outro) e dois conjuntos que possuem parcialmente os objetos do outro (um dado conjunto está parcialmente contido no outro):

$$A \subseteq B \iff A = B \quad (1)$$

$$A \subset B \iff A \neq B \quad (2)$$

$$(1) \quad \forall x; x \in A \text{ \& } x \in B.$$

$$(2) \quad x, y; ((x \in A) \text{ \& } (x, y \in B)) \vee ((y \in A) \text{ \& } (x, y \in B)).$$

### União e Interseção

A união  $x \cup y$  dos conjuntos  $x$  e  $y$  é definida sendo o conjunto de todos os elementos de  $x$  e  $y$ .

Logo,  $(x \cup x = x)$ ,  $(x \cup y = y \cup x)$  e  $((x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z))$ .

De modo geral, dados  $n$  conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  a sua união é

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in U \mid x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } x \in A_n.\}$$

A interseção  $x \cap y$  é o conjunto dos objetos que  $x$  e  $y$  possuem em comum.

Logo,  $x \cap x = x$ ,  $x \cap y = y \cap x$  e  $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ .

De modo geral, a interseção dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in U \mid x \in A_1, x \in A_2, \dots, x \in A_n.\}$$

*Propriedade Associativa:*  $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ .

*Demonstração.* Tomemos os conjuntos  $A, B$  e  $C$ .

Provemos que  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

$$(A \cup B) \cup C = \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \vee R(x)\} = \{x \mid P(x) \vee (Q(x) \vee R(x))\} = A \cup (B \cup C). \quad \blacksquare$$

*Propriedade Comutativa:*  $x \cup y = y \cup x$ .

*Demonstração.* Tomemos os conjuntos  $A$  e  $B$ .

Provemos que  $A \cup B = B \cup A$ .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = B \cup A. \quad \blacksquare$$

*Propriedade Distributiva:*  $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$  ou  $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ .

*Demonstração.* Tomemos os conjuntos  $A, B$  e  $C$ .

Provemos que  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \mid P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))\} \\ &= \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x))\} \\ &= \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \cap (P(x) \vee R(x))\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

## Conjunto universal

**Proposição 8.** Não existe o conjunto universal na Teoria Zermelo-Fraenkel

**Teorema 5.** Não existe o conjunto universal.

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $V$ , um conjunto universal, exista. Isto é,

$$\exists V \forall x (x \in V).$$

Pelo **axioma da separação** definimos  $A$ :

$$A = \{x : x \in V \ \& \ x \notin x\}$$

Note que:

- Se  $A \in A$ , então  $A \in V \ \& \ A \notin A$ . (contradição)
- Se  $A \notin A$ , então  $A \notin V$  ou  $A \in A$ . Mas não podemos ter  $A \in A$ .

Portanto,  $A \notin V$ , contrariando o fato de  $V$  ser universal. \blacksquare

## Relações

### Par não ordenado

Dados dois conjuntos  $x$  e  $y$ , vimos que o **axioma do par** nos garante a existência do conjunto

$$\{x, y\}.$$

Pelo **axioma da extensão**, temos

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

Ou seja, a ordem dos objetos não é considerada.

Queremos definir agora um **par ordenado**, de tal modo que a ordem dos objetos seja levada em consideração, isto é, queremos que o par ordenado  $\langle a, b \rangle$  seja diferente do par ordenado  $\langle b, a \rangle$ .

## Par ordenado

**Definição 5.** Dados dois conjuntos  $a$  e  $b$ , definimos o par ordenado  $\langle a, b \rangle$  como o conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

### Observações

Quando  $a = b$ :

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}.$$

A **existência do par ordenado** é garantida da seguinte forma: Dados dois conjuntos  $a, b$ :

- Pelo **axioma do par**, existe  $\{a, a\}$ , que é igual a  $\{a\}$  pelo **axioma da extensão**.
- Pelo **axioma do par**, existe  $\{a, b\}$ .
- Pelo **axioma do par** novamente, existe  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ .

**Teorema 6.**  $\langle u, v \rangle = \langle x, y \rangle$  se, e somente se,  $u = x$  e  $v = y$ .

*Demonstração.* Da direita para a esquerda é trivial, ou seja, se substituir  $u$  pelo  $x$  e  $v$  pelo  $y$ , teremos a mesma ordenação.

Agora, supomos que  $\langle u, v \rangle = \langle x, y \rangle$  ou  $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ .

Pelo **axioma da extensão**,  $\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$  e  $\{u, v\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ .

Temos quatro possibilidades:

- (a)  $\{u\} = \{x\}$
- (b)  $\{u\} = \{x, y\}$
- (c)  $\{u, v\} = \{x\}$
- (d)  $\{u, v\} = \{x, y\}$

i Se vale o caso (b), então  $u = x = y$ . Assim, observando (d),  $v = y = x = u$  e (d) e (c) são equivalentes, e o teorema está desmonstrado.

ii Se vale (c), temos o mesmo caso.

iii Se vale (a), temos  $u = x$ .

Assim, observando (d), temos que

$$\{u, v\} = \{u, y\}.$$

Assim, pelo **axioma da extensão**,  $y = u$  ou  $y = v$ .

No primeiro caso, caímos no (b), que é válido.

No segundo caso, temos o resultado solicitado  $y = v$ . ■

#### Observação

O teorema nos permite dizer que  $x$  é a primeira coordenada e  $y$  é a segunda coordenada do par ordenado  $\langle x, y \rangle$ .

## Produto Cartesiano

**Definição 6.** Suponha que temos dois conjuntos  $A$  e  $B$ , e que formamos pares ordenados  $\langle x, y \rangle$  em que  $x$  é um elemento de  $A$  e  $y$  é um elemento de  $B$ . O conjunto de todos os pares ordenados deste tipo é chamado de *produto cartesiano* de  $A$  e  $B$ :

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle : x \in A \text{ \& } y \in B\}$$

Agora, surge uma necessidade de demonstrar que nossa definição faz sentido, isto é, se  $A$  e  $B$  são conjuntos, então o produto cartesiano  $A \times B$  é um conjunto. A redação deu sua validade requer uma estratégia, que será

1. Demonstrar que os pares ordenados pertencem a um conjunto maior cuja existência já está garantida e
2. pelo **axioma da separação**, extraímos estes elementos deste conjunto maior.

**Lema 7.** Se  $x \in A$  e  $y \in B$  então  $\langle x, y \rangle \in \mathcal{PP}(A \cup B)$ .

*Demonstração.* Se  $x \in A$  e  $y \in B$ , então  $\{x\} \subset A \cup B$  e  $\{x, y\} \subset A \cup B$ .

O insight sobre o **axioma das partes**:  $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subset x)$ , nos leva aos seguintes argumentos

$$\{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \quad \text{e} \quad \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

Assim,

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B).$$

Pelo **axioma das partes** novamente, temos que  $\{\{x\}, \{x, y\}\}^{\text{iii}} \in \mathcal{PP}(A \cup B)$ . ■

<sup>iii</sup>Definição do par ordenado, feito anteriormente.

**Corolário 7.1.** Para quaisquer conjuntos  $A$  e  $B$ , existe o conjunto cujos elementos são exatamente os pares ordenados  $\langle x, y \rangle$  em que  $x \in A$  e  $y \in B$ .

*Demonstração.* Pelo **axioma do par**, **axioma da união** e o **axioma da separação**, existe o conjunto

$$A \times B = \{w \in \mathcal{PP}(A \cup B) : \exists x \exists y (x \in A) \ \& \ y \in B \ \& \ w = \langle x, y \rangle\}$$

De fato,  $A \times B$  satisfaz o teorema, pois todo par ordenado  $\langle x, y \rangle$  que atende às especificações pertence a  $\mathcal{PP}(A \cup B)$ , conforme o Lema anterior. ■

## Relações

**Definição 7.** Uma relação é um conjunto de pares ordenados.

**Definição 8.** Dizemos que  $R$  é uma *relação binária* entre  $A$  e  $B$  se  $R$  é um subconjunto.

$$(A \times B)^{iv}$$

**Exemplo 8.** Uma relação de ordem  $<$  (menor) no conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ . Queremos dizer que  $<$  relaciona cada número aos números maiores:

$$1 < 2$$

$$1 < 3$$

$$2 < 3$$

Assim,

$$< = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

$$A \times A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

### Nota

Como uma relação é uma coleção de *tuplas ordenadas*, isto é, uma lista ordenada de  $n$  objetos, o estudo será dirigido para as relações mais sofisticadas. Em particular, temos **função**, **relação de equivalência** e **relação de ordem**.

## Domínio, Contradomínio e Imagem

**Definição 9.** Seja  $R$  uma relação.

Definimos o *domínio* de  $R$  ( $\mathcal{D}_R$ ), a *imagem* de  $R$  ( $Img_R$ ) e o *contradomínio* de  $R$  ( $CD_R$ ) de tal modo que:

$$x \in \mathcal{D}_R \leftrightarrow \exists y (\langle x, y \rangle \in R)$$

$$y \in Img_R \leftrightarrow \exists x (\langle x, y \rangle \in R)$$

$$CD_R = \mathcal{D}_R \cup Img_R$$

Para justificar a definição, temos que garantir que dada uma relação  $R$ ,

- existe o conjunto formado pelas primeiras coordenadas dos elementos de  $R$  (lembrando que  $R$  é um conjunto de pares ordenados) e
- existe o conjunto das segundas coordenadas dos elementos de  $R$ .

<sup>iv</sup>Notação utilizada:  $\langle x, y \rangle$  ou  $xRy$ . No caso de  $A = B$  e  $R$  um subconjunto de  $A \times A$ , então dizemos simplesmente que  $R$  é uma relação sobre  $A$ .

Para a justificação da definição precisaremos de uma estratégia que consiste em

1. Mostrar que as coordenadas de um par ordenado pertencem a um conjunto maior cuja existência é garantida e
2. Usar o **axioma da separação** para destacar os elementos desejados.

**Lema 8.** Se  $\langle x, y \rangle \in A$ , então  $x$  e  $y$  pertencem a  $\bigcup \bigcup A$ .

*Demonstração.* Declarar  $\langle x, y \rangle \in A$  é, equivalentemente, declarar que  $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in A$ . Com efeito, pelo **axioma da união**:

$$x \in \bigcup A \leftrightarrow \exists c (c \in A \ \& \ x \in c),$$

temos  $\{x, y\} \in \bigcup A$  (é um elemento de um elemento de  $A$ ).

Pelo axioma da união, novamente, segue então que

$$x \in \bigcup \bigcup A$$

e também

$$y \in \bigcup \bigcup A,$$

pois são elementos de elementos de  $\bigcup A$ . ■

Assim, podemos estabelecer os conjuntos *domínio* e *imagem* de uma relação  $R$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R &= \{x \in \bigcup \bigcup R : \exists y (\langle x, y \rangle \in R)\} \\ \text{Im}g_R &= \{y \in \bigcup \bigcup R : \exists x (\langle x, y \rangle \in R)\} \end{aligned}$$

## Função

Uma função  $F$  é basicamente um conjunto de pares ordenados, isto é, uma relação, com uma propriedade em particular:

**Proposição 9.** Para cada  $x \in \mathcal{D}_F$  existe um único  $y$  tal que  $\langle x, y \rangle \in F$ .

**Definição 10.** Dizemos que uma relação  $F$  entre  $A$  e  $B$  é uma função de  $A$  em  $B$  se para todo  $x \in A$  existe um único  $y \in B$  tal que  $\langle x, y \rangle \in F$ .

### Observação 1.

Quando nem todos os elementos de  $A$  participam da função, dizemos que a função é uma *função parcial* de  $A$  em  $B$ . Caso contrário, dizemos que  $F$  é uma *função total* ou simplesmente uma função.

As definições de domínio e imagem para relações seguem o mesmo esquema para funções.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \{x \in \bigcup \bigcup F : \exists y (\langle x, y \rangle \in F)\} \\ \text{Im}g_F &= \{y \in \bigcup \bigcup F : \exists x (\langle x, y \rangle \in F)\} \end{aligned}$$

Dada uma função, podemos "recuperar o domínio e a imagem". Dessa forma, se  $F$  é uma (total) de  $A$  em  $B$ , então:

- O conjunto  $A$  é o domínio de  $F$
- O conjunto  $\{y \in B : \exists x \in A (xFy)\}$  é a imagem de  $F$ .

**Definição 11** (Contradomínio). Se  $F$  é uma função de  $A$  em  $B$ , é declarado que  $B$  é o *contradomínio* da função  $F$ .

Todavia, devemos notar que esse conjunto não pode ser "recuperado" a partir da função:

**Exemplo 9.**

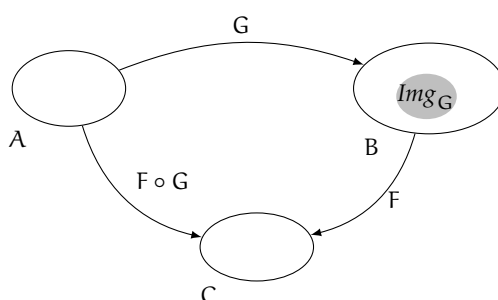
$$F = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

Aqui,  $F$  pode ser uma função tanto  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , quanto de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+$  (reais não negativos).

Em resumo, o domínio deve sempre ser *suficientemente pequeno para garantir que a regra da função irá funcionar em cada elemento do domínio*. Por outro lado, o contradomínio deve sempre ser grande o suficiente para conter todos os valores da função que ocorrem.

**Definição 12** (Composta). Se  $F$  e  $G$  são funções, com  $\text{Img}_G \subset \mathcal{D}_F$  então definimos a função composta de  $F$  e  $G$  da seguinte maneira:

$$F \circ G = \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{D}_G \times \text{Img}_F : \exists y (xGy \ \& \ yFz)\}.$$



**Definição 13** (Natureza). Uma função  $F : A \longrightarrow B$  é

- Injetora: se para todos  $x, y \in A$  temos que se  $x \neq y$ , então  $F(x) \neq F(y)$
- Sobrejetora em relação a  $B$ : se para todo  $y \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $y = F(x)$
- Bijetora: se ela é injetora e sobrejetora em relação a  $B$

**Definição 14** (Inversa). Dada uma relação  $R$ , definimos a inversa de  $R$ , denotada por  $R^{-1}$ , o conjunto:

$$R^{-1} = \{\langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in R\}.$$

Para toda relação  $R$ , existe sua inversa. No entanto, quando  $F$  é uma função, então  $F^{-1}$  também é uma função *iff*  $F$  é Injetora.

## Relação de equivalência

**Definição 15.** Uma *relação de equivalência*  $R$  em algum conjunto  $A$  é uma relação binária sobre  $A$  que satisfaz três propriedades, para todos  $x, y$  e  $z \in A$ :

- Propriedade Reflexiva -  $(xRx)$ :  $\langle x, x \rangle \in R$
- Propriedade Simétrica -  $(xRy \leftrightarrow yRx)$ :  $\langle x, y \rangle \in R \leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R$
- Propriedade Transitiva -  $(xRy \ \& \ yRz \rightarrow xRz)$ :  $\langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

**Exemplo 10.** Consideremos o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}$ .

Vamos dividi-lo em três subconjuntos:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$A_2 = \{5, 6, 7, 8\},$$

$$A_3 = \{9, 10, 11, 12\}.$$

Digamos agora que dois elementos estão numa relação  $R$  se eles são elementos do mesmo subconjunto:  
 $xRy \leftrightarrow x$  e  $y$  pertencem ao mesmo subconjunto, então

$$R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \dots, \langle 9, 12 \rangle, \langle 12, 9 \rangle\}.$$

Observe que a relação  $R$  é uma **relação de equivalência**:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, A_2 = \{5, 6, 7, 8\}, A_3 = \{9, 10, 11, 12\}$$

- Reflexividade: um elemento está no mesmo subconjunto de si mesmo
- Simetria:  $x$  está no mesmo subconjunto que  $y$ , então  $y$  está no mesmo subconjunto de  $x$
- Transitividade: Se  $x$  está no mesmo subconjunto de  $y$  e  $y$ , por sua vez, está no mesmo subconjunto que  $z$ , então  $x$  e  $z$  estão no mesmo subconjunto.

### Classes de equivalência

Vamos considerar novamente

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}, \\ A_1 &= \{1, 2, 3, 4\}, \\ A_2 &= \{5, 6, 7, 8\}, \\ A_3 &= \{9, 10, 11, 12\}. \end{aligned}$$

Tomando um elemento  $x \in A$ , digamos, o 2. Queremos listar todos os elementos que estão na relação com  $x = 2$  com respeito a  $R$ :

$$xRy \leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertencem ao mesmo conjunto.}$$

Esses elementos são:  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Mas note que este conjunto é exatamente o subconjunto  $A_1$ .

**Definição 16.** A classe de equivalência de  $x$  módulo  $R$  é

$$[x]_R = \{t : xRt\}.$$

Ou seja, é o conjunto de todos os elementos  $t$  que estão na relação  $R$  com  $x$  ou de forma equivalente, todos os elementos  $t$  tais que  $\langle x, t \rangle \in R$ . Quando dois elementos pertencem à mesma classe de equivalência, diremos que eles são equivalentes.

O conjunto  $[x]_R$  está garantido pelo **axioma da separação**, pois  $[x]_R \subseteq \text{Im}g_R$ .

**Exemplo 11.**  $xRy \leftrightarrow x$  e  $y$  pertencem ao mesmo subconjunto.

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}, \\ A_1 &= \{1, 2, 3, 4\}, \\ A_2 &= \{5, 6, 7, 8\}, \\ A_3 &= \{9, 10, 11, 12\}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} [1]_R &= \{t : 1Rt\} = \{1, 2, 3, 4\} = A_1, \\ [4]_R &= \{1, 2, 3, 4\} = A_1, \\ [5]_R &= \{5, 6, 7, 8\} = A_2, \\ [12]_R &= \{9, 10, 11, 12\} = [9]_R = A_3. \end{aligned}$$



**Teorema 9.** Assuma que  $R$  seja uma relação de equivalência sobre  $A$  e  $x$  e  $y$  sejam elementos de  $A$ . Então,

$$[x]_R = [y]_R \text{ iff } xRy.$$

*Demonstração.* Suponha que  $[x]_R = [y]_R$ . Sabemos que  $y \in [y]_R$ , pela propriedade reflexiva. Pela suposição de igualdade,  $y \in [x]_R$ , portanto, pela definição,  $xRy$ . Suponha que  $xRy$ . Veja que se  $t \in [y]_R$ , então  $yRt$ . Pela transitividade,  $xRy \& yRt \rightarrow xRt$ . Tendo que  $[x]_R = \{t : xRt\}$  (definição), se  $xRt$ , então  $t \in [x]_R$ . Ou seja, mostramos que  $[y]_R \subseteq [x]_R$ . Pela simetria, temos  $yRx$  e em um processo análogo, podemos mostrar que  $[x]_R \subseteq [y]_R$ . Portanto,  $[x]_R = [y]_R$ . ■

#### Nota

Dados  $x, y, z \in A$ , uma relação de equivalência  $R$  em  $A$  é uma relação binária sobre  $A$  que satisfaz três propriedades adicionais, para todos  $x, y$  e  $z$ . Ou seja,  $R$  é igual a  $A$  cartesiano  $A$  que vale as propriedades Reflexiva, Simétrica e Transitiva. Uma classe de equivalência, por exemplo, a classe de equivalência de  $x$  módulo  $R$  é o conjunto de elementos  $t$  tais que  $x$  está na relação  $R$  com  $t$ . Todos os elementos  $t$  tais que  $\langle x, t \rangle \in R$ . No exemplo acima, temos um comportamento que nos diz que  $A = \bigcup \{[1], [5], [9]\}$ , está relacionado com o próximo tópico.

### Partição

**Definição 17.** Uma partição  $\Pi$  de um conjunto  $A$  é um conjunto formado por subconjuntos não vazios de  $A$  que são *disjuntos* e *exaustivos*, isto é:

- i. Não existem dois conjuntos em  $\Pi$  que possuam elementos em comum (são dois a dois disjuntos).
- ii. Cada elemento de  $A$  pertence a algum conjunto  $\Pi$  (a união dos conjuntos da partição é igual ao próprio conjunto  $A$ ).

**Teorema 10.** Seja  $\Pi$  uma partição de um conjunto  $A$ . Define-se uma relação  $R$  sobre  $A$  da seguinte forma:

$$xRy \leftrightarrow \exists B \in \Pi (x \in B \& y \in B).$$

Então,  $R$  é uma relação de equivalência sobre  $A$ .

A relação  $R$  diz que dois objetos estão na relação  $xRy$  se eles pertencem ao mesmo subconjunto. O teorema diz que uma partição induz uma relação de equivalência sobre um conjunto. Então, definindo uma partição de um conjunto e estabelecendo uma relação nesse conjunto que vai validar a pertinência de dois elementos dentro de um subconjunto dessa partição, temos uma relação de equivalência. A demonstração segue diretamente das propriedades lógicas (Reflexiva, Simétrica e Transitiva).

**Exemplo 12.** Consideremos o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

Seja  $\Pi = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$ .

Note que não existem dois conjuntos de  $\Pi$  com elementos iguais e todo elemento de  $A$  pertence a algum conjunto de  $\Pi$ . Portanto,  $\Pi$  é uma partição de  $A$ .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}. \quad \therefore \Pi_A = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}.$$

Definimos uma relação  $R$  sobre  $A$  da seguinte forma:

$$xRy \leftrightarrow \exists B \in \Pi (x \in B \& y \in B).$$

Neste caso:

$$R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \dots \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \langle 8, 7 \rangle, \langle 8, 8 \rangle\}$$

- $\forall x \in A (\langle x, x \rangle \in R)$
- $\langle x, y \rangle \in R \leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R$
- $\langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R$
- Portanto,  $R$  é uma **relação de equivalência**.

**Teorema 11.** Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre  $A$ . Então, o conjunto

$$H = \{[x]_R : x \in A\}$$

de todas as **classes de equivalência**, é uma partição desse conjunto  $A$ .

*Demonstração.* Para ser partição,  $H$  deve satisfazer:

- Os conjuntos em  $H$  são subconjuntos de  $A$ , não vazios e são dois a dois disjuntos.
- Cada elemento pertencentes  $A$  pertence a algum conjunto em  $H$ .

Seja  $x \in A$  qualquer. Então,  $x \in [x]_R$ , logo, as classes em  $H$  são não vazias e mostramos que vale (i.). Como  $R$  é uma relação binária em  $A$ , segue que as classes são subconjuntos de  $A$ .

Suponha que  $z$  pertença a duas classes diferentes, digamos,  $[x]_R$  e  $[y]_R$ . Então,  $xRz$  e  $yRz$  (ou  $zRy$ , pela simetria). Pela transitividade teríamos  $xRy$ , e pelo Teorema.0.9, teríamos  $[x]_R = [y]_R$ , contrariando a suposição de que essas classes sejam diferentes. ■

#### Observações

O Teorema 0.10 diz que uma partição induz uma relação de equivalência sobre um conjunto.

Já o Teorema 0.11 temos o inverso do Teorema 0.10, isto é, a relação de equivalência particiona o conjunto de certa forma que respeita a definição de partição.

### Conjunto Quociente

Se  $R$  é uma relação de equivalência sobre um conjunto  $A$ , o conjunto  $H = \{[x]_R : x \in A\}$  do teorema anterior passa a ser chamado de Conjunto Quociente:

$$A/R = \{[x]_R : x \in A\}$$

**Definição 18.** Defini-se como conjunto quociente um conjunto de classes de equivalência onde cada classe de equivalência é um conjunto formado pelas segundas coordenadas de todos os pares ordenados em que o elemento  $x$  é a primeira coordenada.

Então, como é garantido pelas propriedades de relação de equivalência, que as classes de equivalência formam uma partição de um dado conjunto  $A$ , essa partição (ou conjunto das classes de equivalência) é o **Conjunto Quociente**, também chamado de **Espaço Quociente** de  $A$  por  $R$ .

#### Observação

A existência desse conjunto é garantida pelo **axioma da separação**, pois ele é subconjunto de  $\mathcal{P}(Im_R)$ .

Quando  $A$  tem alguma estrutura definida (como uma operação de grupo ou uma topologia) e a relação de equivalência  $R$  é compatível com esta estrutura, o conjunto quociente frequentemente herda uma estrutura semelhante de seu "conjunto pai".

## Relação de complementaridade [Adicional]

**Definição 19.** Seja  $R$  uma relação binária e tida como subconjunto de  $A \times B$ . A *relação complementar*  $\bar{R}$  é o conjunto complemento de  $R$  em  $A \times B$ .

$$\bar{R} = (A \times B) \setminus R.$$

Existe uma conexão entre uma *matriz lógica* (ou *matriz Booleana*) com a relação de complementaridade. A visualização da complementaridade em uma relação binária  $R$  se torna mais didática com o desenvolvimento da Matriz Lógica.

## Família Indexada

São coleções de objetos que prosseguem de uma associação a um índice de algum conjunto de índices. Uma *família* de números reais, *indexados* pelo conjunto de inteiros é uma coleção de números reais, onde uma determinada função seleciona, para cada inteiro, um número real.

Família indexada é uma função que possui um certo domínio  $I$  e imagem  $X$ .

Os elementos do conjunto  $X$  são referidos como a família.

O conjunto  $I$  é referido como o *índice* da família, sendo assim,  $X$  é o *conjunto indexado*.

**Definição 20.** Considere  $I$  e  $X$  conjuntos e  $x$  uma função sobrejetiva<sup>vi</sup> tal que

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow X \\ i &\mapsto x_i = x(i) \end{aligned}$$

estabelece uma *família de elementos* em  $X$ , indexado por  $I$ , que é denotado por  $(x_i)_{i \in I}$  ou simplesmente  $(x_i)$ , caso o conjunto de índices seja conhecido.

### Nota

Uma família indexada pode ser *transformada* em um conjunto, quase que de forma natural. Para qqr família  $(F_i)_{i \in I}$  existe o conjunto de **todos** os elementos  $\{F_i \mid i \in I\}$ , todavia isso não carrega uma "restrição" sobre a contenção múltipla ou a estrutura dada pelo  $I$ . Logo, utilizando conjunto em vez de família, certas etapas necessária podem ser perdidas e haver uma má interpretação.

Considerando o conjunto  $X = \{x_i : i \in I\}$ , ou seja, a imagem de  $I$  sob  $x$ . Lembrando que o mapeamento  $x$  não precisa ser *injetivo*, pode haver  $i, j \in I$  com  $i \neq j$  de tal modo que  $x_i = x_j$ . Portanto,  $|X| \leq |I|$

## Matriz lógica

**Definição 21** (Domínio Booleano). Domínio booleano é um conjunto que possui apenas dois elementos cujos valores representam *falso* e *verdadeiro*.

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

## Matriz Booleana

Também chamada de *matriz binária* é uma matriz em que os termos  $a_{ij}$  assumem valores do **domínio Booleano**.

Essa matriz pode ser usada na representação de uma relação binária entre um par de conjuntos finitos.

**Definição 22.** Se  $R$  é uma **relação binária** entre os *conjuntos indexados* finitos  $X$  e  $Y$ , i.e,  $R \subseteq X \times Y$ , então  $R$  pode ser representado pela matriz lógica  $M$  cujos índices de linha e coluna indexam os elementos de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, de modo que as entradas de  $M$  são definidas por

<sup>vi</sup>Uma família contém qualquer elemento exatamente uma vez, se e somente se a função correspondente for injetiva.

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (x_i, y_j) \in R \\ 0 & (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

Os conjuntos X e Y são indexados com os números inteiros positivos de forma a designar os números de linha e coluna da matriz. Temos i variando de 1 a cardinalidade de X e j variando de 1 a cardinalidade de Y.

**Exemplo 13.** A relação binária R no conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  é definida de forma que  $xRy$  se mantenha se, e somente se  $y \mid x$ . Segue o conjunto de pares para os quais a relação R é válida.

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

A representação como uma matriz lógica:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , onde o valor do par ordenado representa

um termo, que seu valor tem como o domínio Booleano, onde valida ou não a divisibilidade.

Na **relação de complementaridade**  $(\bar{R} = (A \times B) \setminus R)$  vista como uma matriz lógica, já que linhas representam elementos de X e colunas elementos de Y, primeiro criamos a relação binária e depois mudamos todos os 1s da matriz para 0s, e 0s para 1s. Assim teremos a relação complementar.

## Referências

- [1] Thomas J. Jech. *Set Theory*. ACADEMIC PRESS, 1978. ISBN: 0-12-381950-4.
- [2] Kazimierz Kuratowski. *Introduction to Set Theory and Topology*. PERGAMON PRESS, 1961. ISBN: 59-14873.