Notas em matemática

Análise

Douglas Santos
douglass@ufrj.br

07/2022

Conteúdo

Sequências

Sequências infinitas

Sequências são um tipo de especial de função. Considere uma função de variável inteira, ou seja

$$a_n := a(n) : \mathbb{Z} \to A; n \mapsto a_n.$$

O domínio de uma sequência é sempre o conjunto dos inteiros. A imagem da sequência depende do contexto, pois o contradomínio pode ser um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou um espaço topológico. De qualquer forma, a imagem é geralmente denotada por a_n.

Sequências infinitas unilaterais

São sequências onde o domínio pode ser sempre o conjunto $\mathbb{N}$. Considere a aplicação $f : N \to A; n \mapsto f(n)$. Uma sequência infinita unilateral seria algo do tipo

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}.$$

Exemplo 1
Considere a sequência $\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Então, a imagem é $\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$.

Sequências bi-infinitas

Sequências bi-infinitas são sequências do tipo

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Exemplo 2
Considere $\{4n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Então, temos

$$(\ldots, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \ldots).$$

Sequências monótonas

Sequências monótonas são sempre crescentes ou decrescentes.

Sequências monotonicamente crescentes

A sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é monotonicamente crescente se e somente se $a_{n+1} \geqslant a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se cada termo consecutivo é estritamente maior que o anterior, então a sequência é *estritamente monotonicamente crescente*.

Sequências monotonicamente decrescentes

Analogamente, uma sequência é monotonicamente decrescente se a cada termo consecutivo for menor que o anterior. A sequência será *estritamente monotonicamente decrescente* se cada termo for estritamente menor que o anterior.

Sequências limitadas

Definição 1
Uma sequência $\{a_n\}_{n\in A}^{\infty}$ é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, ou seja, existem K e M contidos em A tais que $K \leqslant a_n \leqslant M, \forall n \in A$.

i. Se $\{a_n\}$ é limitada superiormente temos

$$a_n \leqslant M, \forall n \in A.$$

ii. Se $\{a_n\}$ é limitada inferiormente temos

$$K \leqslant a_n, \forall n \in A.$$

iii. Se $\{a_n\}$ é inferiormente e superiormente limitada então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Isto é, a_n é limitada se existir um $L > 0$, $L \subseteq A$, tal que $|a_n| \leqslant L, \forall n \in A$.

Limite de uma sequência

Sequências são tipos especiais de funções e com isso podemos investigar seus limites. No entanto, temos uma restrição: a_n está definida para valores inteiros de n. O único limite que usado será de $a_n \to +\infty$.

Definição 2 (Intuitiva)
Dada uma sequência a_n dizemos que o limite de uma sequência é L se, equanto n se torna grande, a_n comeca a estar arbitrariamente perto de L. Se enquanto $n \to +\infty$ a_n nao se aproxima de L, então dizemos que o limite nao existe.

Definição 3
Dada uma sequência a_n dizemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se para todo $\epsilon > 0$ existir um inteiro k, tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geqslant k$.

Teorema 1
Seja ${a_n}_{n=n_0}$ uma sequência e suponha que $f(x)$ é uma função real para a qual $f(n) = a_n$ para todos os inteiros $n \geqslant k$, onde $k \geqslant n_0$. Se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Exemplo 3
Seja $a_n = \dfrac{5n+1}{6n+7}$. Determine se a sequência ${a_n}_{n=1}$ tem um limite.

Demonstração. Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{6x+7} = \frac{5}{6}, \quad \text{então} \; \lim_{x\to\infty} \frac{5n+1}{6n+7} = \frac{5}{6}.$$

■

Observação

Se $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nao existe, $\lim_{n\to\infty} a_n$ pode nao existir.

Exemplo 4
Considere $a_n = \sin(n\pi)$ e $f(x) = \sin(x\pi)$.

Demonstração. Analisando a sequencia a_n vemos que ela resulta em uma lista ordenada de zeros:

$$\cancelto{0}{\sin(0\pi)}, \cancelto{0}{\sin(1\pi)}, \cancelto{0}{\sin(2\pi)}, \cancelto{0}{\sin(3\pi)}, \ldots$$

Como os termos da sequencia sao zeros temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Mas avaliando para valores reais, i.e, quando consideramos $f(x)$ temos que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nao existe. Os valores de $\sin(x\pi)$ para $x \to \infty$ oscilam entre -1 e 1. ■

Definição 4
Dada duas sequencias a_n e b_n, a notacao $a_n \ll b_n$ significa que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

Teorema 2
Sejam p,q reais positivos, com $b > 1$. Temos a seguinte relacao:

$$\ln^p(n) \ll n^q \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

Qualquer potencia de $\ln(n)$ cresce mais *lentamente* do que qualquer potencia de n.

Exemplo 5
Seja $a_n = \dfrac{\ln^9(n)}{n^{1/2}}$. Ache o limite da sequencia a_n.

Demonstração. O teorema anterior indica que $\ln^p(n) \ll n^q$, i.e, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln^p(n)}{n^q} = 0$, para qualquer real positivo p e q. Portanto, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln^9(n)}{n^{1/2}} = 0$. ∎

Exemplo 6
Seja $a_n = \dfrac{n^{100} + n^n}{n! + 5^n}$.Ache o limite da sequencia a_n.

Demonstração. Vamos comecar analisando o numerador. Pelo teorema, temos que $n^n \gg n^q$, que nesse caso eh $n^n \gg n^{100}$. No denominador, novamente pelo teorema, temos que $n! \gg b^n$, que nesse caso eh $n! \gg 5^n$. Entao, iremos saber da existencia de $\lim_{n\to\infty} a_n$ considerando $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!}$. Novamente pelo teorema temos que $n^n \gg n!$, assim $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Mais precisamente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100} + n^n}{n! + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \left(\cancelto{0}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{100}}{n^n}\right)} + 1 \right)}{n! \left(1 + \cancelto{0}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5^n}{n!}\right)} \right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

∎

Teorema 3
Suponha que a_n,b_n e c_n sao sequencias com

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n.$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

, entao $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Propriedades de limites de sequências

Proposição 1 (Propriedades aritmeticas)
Considere duas sequencias a_n e b_n tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, então

i. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$;

ii. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = L - M$;

iii. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$;

iv. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$.

Subsequências

Sequência de Cauchy

Convergência de sequências