Notas em matemática

Teoria dos Conjuntos

Douglas Santos
douglass@ufrj.br

02/2021

Conteúdo

Teoria Axiomática [Conjuntos]

Teoria ZF

Condições estabelecidas da teoria:

1. Todos os objetos da teoria são conjutos. Dizemos que *todos os elementos de conjuntos serão conjuntos*, e assim sucessivamente, mas paramos ao chegarmos no conjunto vazio.
2. Os objetos da teoria não comportarão átomos e nem conjuntos de todos os conjuntos (conjuntos universais), isto é, não comportarão *urelementos*.

A estrutura do método axiomático se estabelece da seguinte forma:

1. Linguagem
2. Axiomas
3. Teorema - consequência dos axiomas
4. Regras de inferência da *lógica clássica*

Linguagem

A linguagem é dividida em 3 segmentos

Variáveis Símbolos Fórmulas

a) Variáveis: Utilizado tanto letras minúsculas quanto maiúsculas para denotar conjuntos.

b) Símbolos:

$\forall x$: para todo conjunto x...

$\exists x$: existe um conjunto x...

$\neg$: negação de...

&: e

$\vee$: ou (acomete uma disjunção)

$\rightarrow$: se... então (condicional)

$\leftrightarrow$: se e somente se (bicondicional)

c) Fórmulas: Sequências de símbolos que satisfazem os seguintes itens

Se x e y são variáveis, então $x \in y$ e $x = y$ são fórmulas. *Fórmulas atômicas;*

Se A e B são fórmulas, então $\neg(A), (A) \rightarrow (B), (A)\&(B), (A) \vee (B)$ e $(A) \leftrightarrow (B)$ também são;

Se A é uma fórmula e x uma variável, então $\forall x(A)$ e $\exists x(A)$ também são fórmulas;

Todas as fórmulas tem uma das formas descritas acima.

Exemplo 1. A análise da composição de fórmulas de

$$\exists B(\forall x(\neg(x \in B))$$

se da por

I. Existência da fórmula atõmica $[(x \in B)]$.

II. Uma outra fórmula está sendo a negação da fórmula atõmica $[(\neg(x \in B)]$

III. Fórmula quantificando a variável x em relação a negação da fórmula atômica $[\forall x()]$

Portanto, temos 3 fórmulas que são

$$\neg(x \in B)), \quad \forall x(\neg(x \in B)) \quad e \quad \exists B(\forall x(\neg(x \in B)).$$

"Existe um objeto B *tal que para todo objeto* x*, não é verdade que* x *pertence a* B."

Observação (Fórmulas lógicas)

- **Ocorrência de variável:** cada aparecimento de uma variável. Sendo

$$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

temos duas ocorrências da variável y e duas[a] ocorrências da variável x.

- **Escopo de uma variável:** uma variável y está no escopo de uma variável x se y aparece em uma fórmula do tipo $\forall x(\ \ )$ ou $\exists x(\ \ )$. Sendo

$$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

y está no escopo de x e x está no escopo de si mesmo.

- **Variável livre:** uma variável é livre se não está no escopo dela mesma. Sendo

$$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

x e y que estão fora da subfórmula são variáveis livres. y que está dentro da subfórmula é uma variável livre, mas, dentro da subfórmula, x não é uma variável livre por está dentro do próprio escopo.

[a] Alguns autores colocam o x, em $\exists x$, como uma ocorrência.

Axiomas

- Axiomas que garantem a existência de certos conjuntos específicos
  - Axioma do vazio
  - Axioma do infinito
- Axiomas que nos permitem construir novos conjuntos
  - Axioma do par
  - Axioma da união
  - Axioma das partes
  - Axioma da escolha
  - Axioma da separação
  - Axioma da substituição
- Axiomas que dizem respeito ao "comportamento"dos conjuntos
  - Axioma da regularidade
  - Axioma da extensão

Axioma da extensão (ou da unicidade)

Proposição 1. Se dois conjuntos x e y possuem exatamente os mesmos elementos, então eles são iguais.

$$\forall x \, \forall y(\forall z(z \in x \ \leftrightarrow \ z \in y) \ \rightarrow x = y)$$

Exemplo 2. Se $x = \{1, 2, 3\}$, $y = \{3, 1, 2\}$ e $z = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}$, então $x = y = z$.

Axioma do vazio

Proposição 2. Existe um conjunto sem elemento algum.[i]

$$\exists x \forall y\ \neg(y \in x)$$

Utiliza-se $\varnothing$ para denotar este conjunto do Axioma do vazio. Para isto, devemos assegurar que

a. Existe um conjunto com tal propriedade;

b. Esse conjunto é único (não pode-se atribuir o mesmo símbolo para duas coisas distintas).

Definição 1 (Relação de inclusão)**.** Dizemos que x está contido em y e escrevemos $x \subseteq y$ se todo elemento de x é um elemento de y.

$$x \subseteq y \quad \leftrightarrow \quad \forall z(z \in x \quad \rightarrow \quad z \in y)$$

Com essa definição podemos reescrever o **Axioma da extensão**:

$$(A \subseteq B)\ \&\ (B \subseteq A) \quad \rightarrow \quad A = B$$

Ainda, temos $x \subset y$ para dizer que $x \subseteq y\ \ \&\ \ x \neq y$.

Teorema 1. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

$$\forall x(\varnothing \subseteq x)$$

Demonstração. Por contradição vamos supor que exista um conjunto x tal que o conjunto vazio não esteja contido em x e que existe y tal que y pertence ao conjunto vazio mas não a x. Com efeito:

$$\exists x(\varnothing \not\subseteq x) \quad \& \quad \exists y(y \in \varnothing\ \&\ y \notin x).$$

Temos uma contradição à própria definição de conjunto vazio. ■

Teorema 2. Existe um único conjunto vazio.

Demonstração. A existência é garantida pelo Axioma do vazio. Com efeito, supondo que existam conjuntos vazios x e y, com $x \neq y$. Pelo axioma da extensão deve então existir um elemento z tal que

$$\begin{aligned} z \in x \quad & mas \quad z \notin y \quad ou \\ z \in y \quad & mas \quad z \notin x. \end{aligned}$$

Em qualquer caso temos uma contradição com o fato de que x e y são vazios. ■

Observação (Relação de inclusão vs. Relação de pertinência)

- Todos os objetos da nossa teoria são conjuntos. Portanto, nas expressões $x \in y$ e $x \subseteq y$, tanto x quanto y são conjuntos;
- Podem existir conjuntos cujos elementos são conjuntos.

Supondo que exista o conjunto $\{\varnothing\}$, ou seja, um conjunto cujo único elemento é $\varnothing$.

- $\varnothing \in \{\varnothing\}$, isto é, $\varnothing$ é elemento do conjunto $\{\varnothing\}$
- $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$, de acordo com o Teorema1.

[i]Posteriormente, surgirá a necessidade de verificar a dispensabilidade desse axioma.

Axioma do Par

Proposição 3. Sejam x e y conjuntos quaisquer. Então existe um conjunto $x \in z$ e $y \in z$.

$$\forall x, y\ \exists z(x \in z \,\&\, y \in z)$$

Aqui, dizemos que z é um par não ordenado, pois, pelo axioma da extensão,
os conjuntos $\{x, y\}$ e $\{y, x\}$ são iguais.

Exemplo 3. No caso em que $x = y$ temos $\{x, x\} = \{x\}$, pelo axioma da extensão.

Axioma da União

Proposição 4. Para todo conjunto A, existe um conjunto B cujos elementos são exatamente os elementos dos elementos de A.

B será denotado por $\bigcup\limits_{X \in A} A$

- todo X, que é elemento de A, é subconjunto de B
- todo Y, que é elemento de B, é elemento de algum elemento de A

Neste axioma temos também que

- Caso A seja um vazio, B será o conjunto vazio
- Caso A seja finito, B será uma união finita
- Caso A seja infinito, B será uma união infinita.

Definição 2. A <u>união generalizada</u> de um conjunto A é o conjunto formado pelos elementos dos elementos de A.

$$\forall A\, \exists B\, \forall x\, (x \in B \;\leftrightarrow\; \exists c\, (c \in A \,\&\, x \in c))$$

Exemplo 4. Seja um conjunto $A = \{\{1,\ 2\},\ \{3,\ 4\},\ \{5,\ 6\}\}$.
Então, a união generalizada se realiza como $\bigcup A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \}$.
O conjunto A possui 3 elementos que são conjuntos que possuem elementos que estão em A.

Axioma das Partes

Proposição 5. Para todo conjunto x, existe o conjunto y dos subconjuntos de x.

$$\forall x \exists y \forall z[z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]$$

O conjunto definido pelo axioma também é único. Sendo assim, podemos definir o seguinte:

Definição 3. Definimos o *conjunto das partes* (*power set*), como o conjunto de todos os subconjuntos de x, e o denotamos por $\mathcal{P}(x)$.

Exemplo 5. Seja um conjunto $A = \{1, 2\}$.
Pelo axioma das partes,

$$(z \in \mathcal{P}(A) \;\leftrightarrow\; z \subseteq A)$$

$$\begin{aligned}
&\emptyset \subseteq A \\
&\{1\} \subseteq A \\
&\{2\} \subseteq A \\
&\{1, 2\} \subseteq A.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$

Axioma da Separação

Queremos ser capazes de definir um conjunto através de uma fórmula lógica. Para evitar paradoxos, como o paradoxo de Russel, temos que especificar o conjunto sobre qual nossa fórmula será elaborada.

Proposição 6. Para cada fórmula $P(x)$, para todo conjunto y, existe o conjunto daqueles elementos que pertencem a y e satisfazem a fórmula P.

Exemplo 6. Seja um conjunto $y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
$P(x)$: x é par.
$Z = \{x : x \in y \ \& \ P(x)\} = \{2, 4, 6, 8\}$

Definição 4. Para cada fórmula P tal que z não ocorre livre, a seguinte fórmula é um axioma:

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \ \leftrightarrow \ x \in y \ \& \ P(x)]$$

"para todo y existe z tal que para todo x, x pertence a z sss x pertence a y e vale a fórmula $P(x)$."
O conjunto z será denotado

$$z = \{x : x \in y \ \& \ P(x)\}$$

ou

$$z = \{x \in y : P(x)\}.$$

Por que z não pode ocorrer livre em P na fórmula

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \ \leftrightarrow \ x \in y \ \& \ P(x)]?$$

Se permitirmos que a variável que define o conjunto ocorra livre em P, poderíamos tomar $P(x) = x \notin z$:

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \ \leftrightarrow \ x \in y \ \& \ x \notin z].$$

Tomando $y = \{\varnothing\}$ e $x = \varnothing$, temos que $x \in y$ é verdadeiro. Assim,

$$(x \in z \ \leftrightarrow \ x \notin z)$$

é uma contradição.

Interseção

Podemos utilizar o axioma da separação para definir a interseção de dois conjuntos.
Sejam A e B dois conjuntos. Então, pelo axioma da separação existe

$$z = \{x : x \in A \ \& \ P(x)\}.$$

Tomando $P(x) = x \in B$, temos

$$z = \{x : x \in A \ \& \ x \in B\} = A \cap B.$$

Diferença e conjuntos vazios

Da mesma forma, podemos definir a diferença entre dois conjuntos.
Sejam A e B dois conjuntos. Então, pelo axioma da separação existe

$$z = \{x : x \in A \ \& \ P(x)\}.$$

Tomando $P(x) = x \notin B$, temos

$$z = \{x : x \in A \ \& \ x \notin B\} = A - B.$$

Se tomarmos $P(x) = x \neq x$, obtemos o conjunto vazio.

Interseção arbitrária de conjuntos

Teorema 3. Dado um conjunto não vazio x, existe o conjunto $y = \bigcap x$, formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a todos os elementos de x.

$$\bigcap x = \{v : v \text{ pertence a todos os elementos de } x\}.$$

Exemplo 7. Seja um conjunto $x = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$.
Existe o conjunto interseção: $\bigcap x = \{2, 3\}$. Formalmente, temos

$$y = \{v : v \in z \,\&\, \forall w(w \in x \;\to\; v \in w)\}.$$

Axioma da regularidade

Proposição 7. Para todo conjunto x não vazio existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$.

$$\forall x[x \neq \emptyset \;\to\; \exists y(y \in x \,\&\, x \cap y = \emptyset)].$$

Ou seja, esse axioma garante que não exista uma sequência infinita descrescente na relação de pertinência. Não há como ficar preso numa sequência infinita decrescente, pois certa hora irá encontrar o conjunto vazio.

Teorema 4. Não existem conjuntos x e y tais que $x \in y$ e $y \in x$.

Demonstração. Sejam x e y conjuntos quaisquer. Vamos demosntrar que ou $x \notin y$ ou $y \notin x$.
Pelo **axioma do par**, existe $B = \{x, y\}$ não vazio.
Pelo **axioma da regularidade**, $B \neq \emptyset \;\to\; \exists z(z \in B \,\&\, z \cap B = \emptyset)$.
Mas $z \in B$ implica que $z = x$ ou $z = y$.
Se $z = x$, então $z \cap B \;=\; x \cap B \;=\; \emptyset$, logo, $y \notin x$,
(pois caso contrário, o resultado da interseção conteria o y).
Se $z = y$, então $z \cap B \;=\; y \cap B \;=\; \emptyset$, logo, $x \notin y$. ∎

Nota

A formulação dada por von Neumann (1925) em lógica de primeira ordem é seguida por

$$\forall A(\exists B(B \in A) \to \exists B(B \in A \land \neg\exists C(C \in A \land C \in B)))$$

Todo conjunto diferente do conjunto vazio possui um elemento que é totalmente disjunto dele.
Sem esse axioma o comportamento possível de infundados conjuntos surgem. São denominados **hiperconjuntos**. Um comportamento típico seria $y \in y$, então y é um hiperconjunto. Em particular, não é adequado ter a violação desse axioma, apenas para versões da teoria dos conjuntos que possam se beneficiar disso.

Conjuntos

Pertinência e Inclusão

Quando um objeto (elemento) x pertence a um conjunto A:

$$x \in A$$

Dois conjuntos iguais, onde possuem exatamente os mesmos elementos (um dado conjunto está totalmente contido no outro) e dois conjuntos que possuem parcialmente os objetos do outro (um dado conjunto está parcialmente contido no outro):

$$A \subseteq B \iff A = B \qquad (1)$$

$$A \subset B \iff A \neq B \qquad (2)$$

(1) $\forall x; x \in A \,\&\, x \in B$.
(2) $x, y; ((x \in A) \,\&\, (x, y \in B)) \;\lor\; ((y \in A) \,\&\, (x, y \in B))$.

União e Interseção

A união $x \cup y$ dos conjuntos x e y é definida sendo o conjunto de todos os elementos de x e y.
Logo, $(x \cup x = x)$, $(x \cup y = y \cup x)$ e $((x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z))$. De modo geral, dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a sua união é

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_1 \quad \text{ou} \quad x \in A_2 \quad \text{ou} \quad \ldots \quad x \in A_n.\}$$

A interseção $x \cap y$ é o conjunto dos objetos que x e y possuem em comum.
Logo, $x \cap x = x$, $x \cap y = y \cap x$ e $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$. De modo geral, a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_1,\ x \in A_2,\ \ldots\ , x \in A_n.\}$$

Proposição 8 (Propriedade Associativa)**.** $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$.

Demonstração. Tomemos os conjuntos A, B e C. Provemos que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. $(A \cup B) \cup C = \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \vee R(x)\} = \{x \mid P(x) \vee (Q(x) \vee R(x))\} = A \cup (B \cup C)$. ■

Proposição 9 (Propriedade Comutativa)**.** $x \cup y = y \cup x$.

Demonstração. Tomemos os conjuntos A e B.
Provemos que $A \cup B = B \cup A$.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \vee \quad x \in B\} = B \cup A$. ■

Proposição 10 (Propriedade Distributiva)**.** $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ ou $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

Demonstração. Tomemos os conjuntos A, B e C.
Provemos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{x \mid P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))\} \\
&= \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x))\} \\
&= \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \cap (P(x) \vee R(x))\} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

■

Conjunto universal

Proposição 11. Não existe o conjunto universal na Teoria Zermelo-Fraenkel

Teorema 5. Não existe o conjunto universal.

Demonstração. Suponha por absurdo que V, um conjunto universal, exista. Isto é,

$$\exists V \forall x (x \in V).$$

Pelo **axioma da separação** definimos A:

$$A = \{x : x \in V \,\&\, x \notin x\}$$

Note que:

- Se $A \in A$, então $A \in V \,\&\, A \notin A$. (contradição)
- Se $A \notin A$, então $A \notin V$ ou $A \in A$. Mas não podemos ter $A \in A$.

Portanto, $A \notin V$, contrariando o fato de V ser universal. ■

Fundamentos das relações

Par não ordenado

Dados dois conjuntos x e y, vimos que o **axioma do par** nos garante a existência do conjunto

$$\{x, y\}.$$

Pelo **axioma da extensão**, temos

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

Ou seja, a ordem dos objetos não é considerada.
Queremos definir agora um par ordenado, de tal modo que a ordem dos objetos seja levada em consideração, isto é, queremos que o par (a, b) seja diferente do par (b, a).

Par ordenado

Definição 5. Dados dois conjuntos a e b, definimos o par ordenado (a, b) como o conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Observações

Quando $a = b$:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}.$$

A **existência do par ordenado** é garantida da seguinte forma: Dados dois conjuntos a, b:

- Pelo **axioma do par**, existe $\{a, a\}$, que é igual a $\{a\}$ pelo **axioma da extensão**.
- Pelo **axioma do par**, existe $\{a, b\}$.
- Pelo **axioma do par** novamente, existe $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Teorema 6. $(u, v) = (x, y)$ se, e somente se, $u = x$ e $v = y$.

Demonstração. Da direita para a esquerda é trivial, ou seja, se substituir u pelo x e v pelo y, teremos a mesma ordenação.
Agora, supomos que $(u, v) = (x, y)$ ou $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
Pelo **axioma da extensão**, $\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ e $\{u, v\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
Temos quatro possibilidades:

(a) $\{u\} = \{x\}$
(b) $\{u\} = \{x, y\}$
(c) $\{u, v\} = \{x\}$
(d) $\{u, v\} = \{x, y\}$

i Se vale o caso (b), então $u = x = y$. Assim, observando (d), $v = y = x = u$ e (d) e (c) são equivalentes, e o teorema está desmontrado.

ii Se vale (c), temos o mesmo caso.

iii Se vale (a), temos $u = x$.

Assim, observando (d), temos que

$$\{u, v\} = \{u, y\}.$$

Assim, pelo **axioma da extensão**, $y = u$ ou $y = v$.
No primeiro caso, caímos no (b), que é válido.
No segundo caso, temos o resultado solicitado $y = v$. ■

Observação

O teorema nos permite dizer que x é a primeira coordenada e y é a segunda coordenada do par ordenado (x, y).

Produto Cartesiano

Definição 6. Suponha que temos dois conjuntos A e B e que formamos pares ordenados (x, y) em que x é um elemento de A e y é um elemento de B. O conjunto de todos os pares ordenados desse tipo é chamado de *produto cartesiano* de A e B:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \,\&\, y \in B\}$$

Temos que descobrir se esta definição é consistente na teoria ZF, isto é, se A e B são conjuntos, então o produto cartesiano $A \times B$ é um conjunto. A redação de sua validade requer uma estratégia, que será

1. Demonstrar que os pares ordenados pertencem a um conjunto maior cuja existência já está garantida e

2. pelo **axioma da separação**, extraímos estes elementos deste conjunto maior.

Lema 7. Se $x \in A$ e $y \in B$ então $(x, y) \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$.

Demonstração. Se $x \in A$ e $y \in B$, então $\{x\} \subset A \cup B$ e $\{x, y\} \subset A \cup B$.
O insight sobre o **axioma das partes**: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subset x)$, nos leva aos seguintes argumentos

$$\{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \quad \text{e} \quad \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

Assim,

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B).$$

Pelo **axioma das partes** novamente, temos que $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$. ■

Corolário 7.1. Para quaisquer conjuntos A e B, existe o conjunto cujos elementos são exatamente os pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y \in B$.

Demonstração. Pelo **axioma do par**, **axioma da união** e o **axioma da separação**, existe o conjunto

$$A \times B = \{w \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B) : \exists x \exists y (x \in A) \,\&\, y \in B \,\&\, w = (x, y))\}$$

De fato, $A \times B$ satisfaz o teorema, pois todo par ordenado (x, y) que atende às especificações pertence a $\mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$, conforme o Lema anterior. ■

Relações

Definição 7. Uma relação é um conjunto de pares ordenados.

Definição 8. Dizemos que R é uma *relação binária* entre A e B se R é um subconjunto.

$$(A \times B)^{ii}$$

Exemplo 8. Uma relação de ordem $<$ (menor) no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.
Queremos dizer que $<$ relaciona cada número aos números maiores:

$$\begin{aligned} 1 &< 2 \\ 1 &< 3 \\ 2 &< 3 \end{aligned}$$

Assim,

$$< \quad = \quad \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Domínio, Contradomínio e Imagem

Definição 9. Seja R uma relação.
Definimos o *domínio* de R como $\mathcal{D}_R$, a *imagem* de R como Img_R e o *contradomínio* de R como CD_R de tal modo que:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_R &\leftrightarrow \exists y((x,y)) \in R) \\ y \in Img_R &\leftrightarrow \exists x((x,y)) \in R) \\ CD_R \quad &= \quad \mathcal{D}_R \cup Img_R \end{aligned}$$

Para justificar a definição, temos que garantir que dada uma relação R,

- existe o conjunto formado pelas primeiras coordenadas dos elementos de R (lembrando que R é um conjunto de pares ordenados) e
- existe o conjunto das segundas coordenadas dos elementos de R.

Para a justificação da definição precisaremos de uma estratégia que consiste em

1. Mostrar que as coordenadas de um par ordenado pertencem a um conjunto maior cuja existência é garantida e
2. Usar o **axioma da separação** para destacar os elementos desejados.

Lema 8. Se $(x, y) \in A$, então x e y pertencem a $\bigcup\bigcup A$.

Demonstração. Declarar $(x, y) \in A$ é, equivalentemente, declarar que $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in A$.
Com efeito, pelo **axioma da união**:

$$x \in \bigcup A \leftrightarrow \exists c \, (c \in A \,\&\, x \in c),$$

temos $\{x, y\} \in \bigcup A$ (é um elemento de um elemento de A).
Pelo axioma da união, novamente, segue então que

$$x \in \bigcup\bigcup A$$

[ii] Notação utilizada: (x, y) ou xRy. No caso de $A = B$ e R um subconjunto de $A \times A$, então dizemos simplesmente que R é uma relação sobre A.

e também
$$y \in \bigcup\bigcup A,$$
pois são elementos de elementos de $\bigcup A$. ■

Assim, podemos estabelecer os conjuntos domínio e imagem de uma relação R:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R &= \{x \in \bigcup\bigcup R : \exists y((x,y) \in R)\} \\ Img_R &= \{y \in \bigcup\bigcup R : \exists x((x,y) \in R)\} \end{aligned}$$

Função

Uma função F é um conjunto de pares ordenados, isto é, uma relação, com uma propriedade em particular.

Proposição 12. Para cada $x \in \mathcal{D}_F$ existe um único y tal que $(x,y) \in F$.

Definição 10. Dizemos que uma relação F entre A e B é uma função de A em B se para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x,y) \in F$.

Observação

Quando nem todos os elementos de A participam da função, dizemos que a função é uma *função parcial* de A em B. Caso contrário, dizemos que F é uma *função total* ou simplesmento uma função.

As definições de domínio e imagem para relações seguem o mesmo esquema para funções.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \{x \in \bigcup\bigcup F : \exists y((x,y) \in F)\} \\ Img_F &= \{y \in \bigcup\bigcup F : \exists x((x,y) \in F)\} \end{aligned}$$

Dada uma função, podemos "recuperar o domínio e a imagem". Dessa forma, se F é uma (total) de A em B, então:

- O conjunto A é o domínio de F
- O conjunto $\{y \in B : \exists x \in A(xFy)\}$ é a imagem de F.

Definição 11 (Contradomínio)**.** Se F é uma função de A em B, é declarado que B é o *contradomínio* da função F.

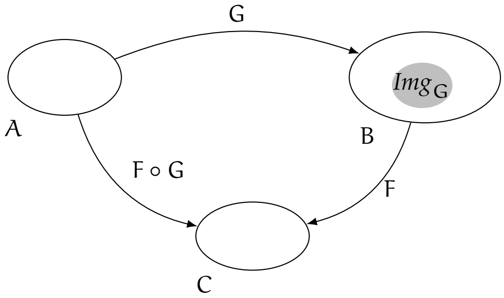
Todavia, devemos notar que esse conjunto não pode ser "recuperado"a partir da função:

Exemplo 9.
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$
Aqui, F pode ser uma função tanto $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, quanto de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$ (reais não negativos).

Em resumo, o domínio deve sempre ser *suficientemente pequeno para garantir que a regra da função irá funcionar em cada elemento do domínio*. Por outro lado, o contradomínio deve sempre ser grande o suficiente para conter todos os valores da função que ocorrem.

Definição 12 (Composta)**.** Se F e G são funções, com $Img_G \subset \mathcal{D}_F$ então definimos a função composta de F e G da seguinte maneira:

$$F \circ G = \{(x,y) \in \mathcal{D}_G \times Img_F : \exists y(xGy \;\&\; yFz)\}.$$



Definição 13 (Natureza)**.** Uma função $F : A \longrightarrow B$ é

- Injetora: se para todos $x, y \in A$ temos que se $x \neq y$, então $F(x) \neq F(y)$
- Sobrejetora em relação a B: se para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $y = F(x)$
- Bijetora: se ela é injetora e sobrejetora em relação a B

Definição 14 (Inversa)**.** Dada uma relação R, definimos a inversa de R, denotada por R^{-1}, o conjunto:

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}.$$

Para toda relação R, existe sua inversa. No entanto, quando F é uma função, então F^{-1} também é uma função sss F é Injetora.

Relação de equivalência

Definição 15. Uma *relação de equivalência* R em algum conjunto A é uma relação binária sobre A que satisfaz três propriedades, para todos x, y e $z \in A$:

- Propriedade Reflexiva - (xRx): $(x, x) \in R$
- Propriedade Simétrica - ($xRy \leftrightarrow yRx$): $(x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R$
- Propriedade Transitiva - (xRy & $yRz \rightarrow xRz$): $(x, y) \in R$ & $(y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Exemplo 10. Consideremos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 12\}$.
Vamos dividi-lo em três subconjuntos:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$A_2 = \{5, 6, 7, 8\},$$
$$A_3 = \{9, 10, 11, 12\}.$$

Digamos agora que dois elementos estão numa relação R se eles são elementos do mesmo subconjunto: $xRy \leftrightarrow x$ e y pertencem ao mesmo subconjunto, então

$$R = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (5, 5), (5, 6), \ldots, (9, 12), (12, 9)\}.$$

Observe que a relação R é uma relação de equivalência:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, A_2 = \{5, 6, 7, 8\}, A_3 = \{9, 10, 11, 12\}$$

- Reflexividade: um elemento está no mesmo subconjunto de si mesmo
- Simetria: x está no mesmo subconjunto que y, então y está no mesmo subconjunto de x
- Transitividade: Se x está no mesmo subconjunto de y e y, por sua vez, está no mesmo subconjunto que z, então x e z estão no mesmo subconjunto.

Classes de equivalência

Vamos considerar novamente

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}, \\
A_1 &= \{1, 2, 3, 4\}, \\
A_2 &= \{5, 6, 7, 8\}, \\
A_3 &= \{9, 10, 11, 12\}.
\end{aligned}$$

Tomando um elemento $x \in A$, digamos, o 2. Queremos listar todos os elementos que estão na relação com $x = 2$ com respeito a R:

$$xRy \leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertencem ao mesmo conjunto.}$$

Esses elementos são: $\{1, 2, 3, 4\}$. Mas note que este conjunto é exatamente o subconjunto A_1.

Definição 16. A classe de equivalência de x módulo R é

$$[x]_R = \{t : xRt\}.$$

Ou seja, é o conjunto de todos os elementos t que estão na relação R com x ou de forma equivalente, todos os elementos t tais que $(x, t) \in R$. Quando dois elementos pertencem à mesma classe de equivalência, diremos que eles são equivalentes.

O conjunto $[x]_R$ está garantido pelo **axioma da separação**, pois $[x]_R \subseteq Img_R$.

Exemplo 11. $xRy \leftrightarrow x$ e y pertencem ao mesmo subconjunto.

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}, \\
A_1 &= \{1, 2, 3, 4\}, \\
A_2 &= \{5, 6, 7, 8\}, \\
A_3 &= \{9, 10, 11, 12\}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
[1]_R &= \{t : 1Rt\} = \{1, 2, 3, 4\} = A_1, \\
[4]_R &= \{1, 2, 3, 4\} = A_1, \\
[5]_R &= \{5, 6, 7, 8\} = A_2, \\
[12]_R &= \{9, 10, 11, 12\} = [9]_R = A_3.
\end{aligned}$$

Teorema 9. Assuma que R seja uma relação de equivalência sobre A e x e y sejam elementos de A. Então,

$$[x]_R = [y]_R \quad \textit{iff} \quad xRy.$$

Demonstração. Suponha que $[x]_R = [y]_R$. Sabemos que $y \in [y]_R$, pela propriedade reflexiva. Pela suposição de igualdade, $y \in [x]_R$, portanto, pela definição, xRy. Suponha que xRy. Veja que se $t \in [y]_R$, então yRt. Pela transitividade, xRy & $yRt \rightarrow xRt$. Tendo que $[x]_R = \{t : xRt\}$ (definição), se xRt, então $t \in [x]_R$. Ou seja, mostramos que $[y]_R \subseteq [x]_R$. Pela simetria, temos yRx e em um processo análogo, podemos mostrar que $[x]_R \subseteq [y]_R$.
Portanto, $[x]_R = [y]_R$. ■

Nota

R é igual a A *cartesiano* A que vale as propriedades Reflexiva, Simétrica e Transitiva.
Uma classe de equivalência, por exemplo, a classe de equivalência de x módulo R é o conjunto de elementos t tais que x está na relação R com t. Todos os elementos t tais que $(x, t) \in R$.
No exemplo acima temos $A = \bigcup\{[1], [5], [9]\}$.

Partição

Definição 17. Uma partição Π de um conjunto A é um conjunto formado por subconjuntos não vazios de A que são *disjuntos* e *exaustivos*, isto é:

a. Não existem dois conjuntos em Π que possuam elementos em comum (são dois a dois disjuntos);

b. Cada elemento de A pertence a algum conjunto Π (a união dos conjuntos da partição é igual ao próprio conjunto A).

Teorema 10. Seja Π uma partição de um conjunto A. Define-se uma relação R sobre A da seguinte forma:

$$xRy \leftrightarrow \exists B \in \Pi(x \in B \,\&\, y \in B).$$

Então, R é uma relação de equivalência sobre A.

A relação R diz que dois objetos estão na relação xRy se eles pertencem ao mesmo subconjunto.
O teorema diz que uma partição induz uma relação de equivalência sobre um conjunto. Então, definindo uma partição de um conjunto e estabelencendo uma relação nesse conjunto que vai validar a pertinência de dois elementos dentro de um subconjunto dessa partição, temos uma relação de equivalência. A demonstração segue diretamente das propriedades lógicas (Reflexiva, Simétrica e Transitiva).

Exemplo 12. Consideremos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Seja $\Pi = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$.
Note que não existem dois conjuntos de Π com elementos iguais e todo elemento de A pertence a algum conjunto de Π. Portanto, Π é uma partição de A.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}. \quad \therefore \Pi_A = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}.$$

Definimos uma relação R sobre A da seguinte forma:

$$xRy \leftrightarrow \exists B \in \Pi(x \in B \,\&\, y \in B).$$

Neste caso:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), \ldots (4, 3), (4, 4), \ldots (5, 5), (5, 6), (8, 7), (8, 8)\}$$

- $\forall x \in A((x, x) \in R)$
- $(x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R$
- $(x, y) \in R \,\&\, (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$
- Portanto, R é uma **relação de equivalência**.

Teorema 11. Seja R uma relação de equivalência sobre A. Então, o conjunto

$$H = \{[x]_R : x \in A\}$$

de todas as **classes de equivalência**, é uma partição desse conjnto A.

Demonstração. Para ser partição, H deve satisfazer:

i. Os conjuntos em H são subconjuntos de A, não vazios e são dois a dois disjuntos.

ii. Cada elemento pertencentes A pertence a algum conjunto em H.

Seja $x \in A$ qualquer. Então, $x \in [x]_R$, logo, as classes em H são não vazias e mostramos que vale (i.). Como R é uma relação binária em A, segue que as classes são subconjuntos de A.
Suponha que z pertença a duas classes diferentes, digamos, $[x]_R$ e $[y]_R$. Então, xRz e yRz (ou zRy, pela simetria). Pela transitividade teríamos xRy, e pelo Teorema.0.9, teríamos $[x]_R = [y]_R$, contrariando a suposição de que essas classes sejam diferentes. ■

I.E

O Teorema 10 diz que uma partição induz uma relação de equivalência sobre um conjunto.
Já o Teorema 11 temos o inverso do Teorema 0.10, isto é, a relação de equivalência particiona o conjunto de certa forma que respeita a definição de partição.

Conjunto Quociente

Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, o conjunto $H = \{[x]_R : x \in A\}$ do teorema anterior passa a ser chamado de Conjunto Quociente:

$$A/R = \{[x]_R : x \in A\}$$

Definição 18. Defini-se como conjunto quociente um conjunto de classes de equivalência onde cada classe de equivalência é um conjunto formado pelas segundas coordenadas de todos os pares ordenados em que o elemento x é a primeira coordenada.

Então, como é garantido pelas propriedades de relação de equivalência que as classes de equivalência formam uma partição de um dado conjunto A, essa partição (ou conjunto das classes de equivalência) é o **Conjunto Quociente**, também chamado de **Espaço Quociente** de A por R.

Observação

A existência desse conjunto é garantida pelo **axioma da separação**, pois ele é subconjunto de $\mathcal{P}(Img_R)$.

Quando A tem alguma estrutura definida (como uma operação de grupo ou uma topologia) e a relação de equivalência R é compatível com esta estrutura, o conjunto quociente frequentemente herda uma estrutura semelhante de seu "conjunto pai".

Relação de ordem total (ou ordem linear)

Definição 19. Seja A um conjunto qualquer. Uma ordem total sobre A é uma relação binária R sobre A, isto é, $R \subseteq A \times A$, que satisfaz as seguintes propriedades

a. R é uma relação transitiva

$$\forall x, \forall y, \forall z \in A(xRy \;\&\; yRz \;\rightarrow\; xRz);$$

b. R satisfaz a tricotomia sobre A, isto é, para dois elementos de A, ocorre uma das três opções

$$xRy, x = y, yRx$$

Exemplo 13. Uma ordem usual R ($<$) em $A = \{1, 2, 3\}$:
1R2,1R3 e 2R3. Então, temos

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Teorema 12 (Não Reflexividade)**.** Seja R uma relação de ordem total sobre A.

a. Não existe x tal que xRx (não reflexiva);

b. Se $x \neq y$, então xRy ou yRx.

Demonstração. Através da tricotomia temos que vale apenas uma das três: $xRy, x = y, yRx$.
Se $x = y$, então pela tricotomia:

$$xRx, x = x, xRx.$$

Como sempre vale $x = x$, não deve valer xRx. Logo, R é não reflexiva.
Se $x \neq y$, então xRy ou yRx. ∎

Relação de complementaridade [Adicional]

Definição 20. Seja R uma relação binária e tida como subconjunto de $A \times B$. A *relação complementar* $\overline{R}$ é o conjunto complemento de R em $A \times B$.

$$\overline{R} = (A \times B) \setminus R.$$

Existe uma conexão entre uma *matriz lógica* (ou *matriz Booleana*) com a relação de complementaridade. A visualização da complementaridade em uma relação binária R se torna mais didática com o desenvolvimento da Matriz Lógica.

Família Indexada

São coleções de objetos que prosseguem de uma associação a um índice de algum conjunto de índices. Uma *família* de números reais, *indexados* pelo conjunto de inteiros é uma coleção de números reais, onde uma determinada função seleciona, para cada inteiro, um número real.
Família indexada é uma função que possui um certo domínio I e imagem X. Os elementos do conjunto X são referidos como a família. O conjunto I é referido como o *índice* da família, sendo assim, X é o *conjunto indexado*.

Definição 21. Considere I e X conjuntos e x uma função sobrejetiva[iii] tal que

$$\begin{aligned} x:\quad & I \longrightarrow X \\ & i \mapsto x_i = x(i) \end{aligned}$$

estabelece uma *família de elementos* em X, indexado por I, que é denotado por $(x_i)_{i\in I}$ ou simplesmente (x_i), caso o conjunto de índices seja conhecido.

Nota

Uma família indexada pode ser *transformada* em um conjunto, quase que de forma natural. Para qqr família $(F_i)_{i\in I}$ existe o conjunto de **todos** os elementos $\{F_i \mid i \in I\}$, todavia isso não carrega uma "restrição"sobre a contenção múltipla ou a estrutura dada pelo I. Logo, utilizando conjunto em vez de família, certas etapas necessária podem ser perdidas e haver uma má interpretação. Considerando o conjunto $\mathcal{X} = \{x_i : i \in I\}$, ou seja, a imagem de I sob x. Lembrando que o mapeamento x não precisa ser *injetivo*, pode haver $i, j \in I$ com $i \neq j$ de tal modo que $x_i = x_j$. Portanto, $|\mathcal{X}| \leqslant |I|$

Matriz lógica

Definição 22 (Domínio Booleano)**.** Domínio booleano é um conjunto que possui apenas dois elementos cujos valores representam *falso* e *verdadeiro*.

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

[iii]Uma família contém qualquer elemento exatamente uma vez, se e somente se a função correspondente for injetiva.

Matriz Booleana

Também chamada de *matriz binária* é uma matriz em que os termos a_{ij} assumem valores do **domínio Booleano**.
Essa matriz pode ser usada na representação de uma relação binária entre um par de conjuntos finitos.

Definição 23. Se R é uma **relação binária** entre os *conjutos indexados* finitos X e Y, i.e, $R \subseteq X \times Y$, então R pode ser representado pela matriz lógica M cujos índices de linha e coluna indexam os elementos de X e Y, respectivamente, de modo que as entradas de M são definidas por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (x_i, y_j) \in R \\ 0 & (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

Os conjuntos X e Y são indexados com os números inteiros positivos de forma a designar os números de linha e coluna da matriz. Temos i variando de 1 a cardinalidade de X e j variando de 1 a cardinalidade de Y.

Exemplo 14. A relação binária R no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ é definida de forma que xRy se mantenha se, e somente se $y \mid x$. Segue o conjunto de pares para os quais a relação R é válida. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$ A representação como uma matriz lógica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde o valor do par ordenado representa um termo, que seu valor tem como o domínio Booleano, onde valida ou não a divisibilidade.

Na **relação de complementaridade** ($\overline{R} = (A \times B) \setminus R$) vista como uma matriz lógica, já que linhas representam elementos de X e colunas elementos de Y, primeiro criamos a relação binária e depois mudamos todos os 1s da matriz para 0s, e 0s para 1s. Assim teremos a relação complementar.

Construção

Há duas maneiras de introduzir novos objetos em matemática:

- Axiomaticamente
- Construtivamente

O primeiro diz respeito a tomarmos o conceito conjunto como primitivo e importamos axiomas para tratar deste conceito. O segundo definimos o novo objeto em termos de objetos ja estabelecidos. Pela forma construtiva, lidaremos com numeros como conjuntos.

Construção de von Neumann

A construção de von Neumann para os numeros naturais *considera um numero natural como o conjunto dos numeros menores a esse numero*. Essa forma construtiva concebe um numero natural como um conjunto dos numeros menores a esse numero:

$$\begin{aligned} 0 :=& \quad \varnothing \\ 1 :=& \quad \{0\} := \{\varnothing\} \\ 2 :=& \quad \{0, 1\} := \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\ 3 :=& \{0, 1, 2\} := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Com isso temos: $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in ...$, assim como $0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq ....$ Usando a ideia de pertinencia da teoria dos conjuntos podemos estabelecer uma noção de ordem.

Sucessor de um conjunto

Vamos buscar uma definição geral para dizer que algo é um número natural. Da construção de von Neumann temos o seguinte:

$$3 = \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\}$$

$$2 = \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\}$$

Isso significa que o número natural seguinte a n pode ser obtido pela união de n com $\{n\}$.

Definição 24. Para qualquer conjunto n, o *sucessor* de n, denotado por $n + +$, é o conjunto

$$n + + = n \cup \{n\}$$

i.e,

$$\forall y(y \in n + + \leftrightarrow y \in n \vee y = n).$$

Exemplo 15.

$$2 \cup \{2\} = 2 + + = 3.$$

Definição 25 (Conjunto indutivo)**.** Um conjunto A é dito *indutivo* se e somente se

- $\varnothing \in A$
- A é fechado sob a operação sucessor, i.e, $\forall n(n \in A \to n + + \in A)$.

Em outras palavras, o conjunto indutivo é um conjunto que possui como elemento o conjunto vazio e para qualquer objeto que pertence a esse conjunto o sucessor também pertence ao conjunto.
Nesse sentido podemos escrever os números naturais em termos de conjunto vazio e da operação de sucessor:

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing + + \\ 1 &= 0 + + \\ 2 &= 1 + + \\ 3 &= 2 + + \end{aligned}$$

Temos que cada número é distinto (satisfazendo o axioma da extensão). O importante dessa exposição é que apesar de termos infinitos números (conjuntos), todos os números naturais são conjuntos finitos. Ainda não temos um axioma que nos permite dizer que existe algum conjunto infinito (ideia intuitiva sobre os naturais), assim, não podemos estabelecer a existência de um conjunto indutivo.

Axioma do infinito e os números naturais

Proposição 13 (Axioma do Infinito)**.** Existe um conjunto indutivo, i.e:

$$\exists A\, (\varnothing \in A \;\&\; \forall n(n \in A \to n + + \in A))\,.$$

Existe um conjunto A tal que o conjunto vazio pertence ao conjunto A e para todo n que pertence a A o sucessor de n pertence a A.
Obviamente que um conjunto indutivo contém necessariamente todos os números naturais. Outra noção é que ele pode conter outros conjuntos. E é através dessa noção que intuitivamente temos que o conjunto dos números naturais é o menor conjunto indutivo.

Conjunto dos números naturais

A coleção de todos os números naturais é um conjunto.

Teorema 13. Existe um conjunto ω cujos elementos são exatamente os números naturais.

Demonstração. Seja A um conjunto indutivo assegurado pelo axioma do infinito. Pelo axioma da separação existe o conjunto

$$\omega = \{n : n \in A \ \& \ n \text{ pertence a todo conjunto indutivo}\}$$

Como n pertence a todo conjunto indutivo então ele pertence a A e, portanto,

$$\omega = \{n : n \text{ pertence a todo conjunto indutivo}\}$$

Pela definição de número natural, segue então que

$$\omega = \{n : n \text{ é um número natural}\}$$

■

Teorema 14 (Unicidade do conjunto omega)**.** Seja

$$\omega = \{n : n \text{ é um natural}\} = \{n : n \text{ pertence a todo conjunto indutivo}\}$$

i. ω é indutivo.

ii. ω é subconjunto de todo conjunto indutivo, i.e, se A é indutivo temos que $\omega \subseteq A$.

iii. ω satisfazendo i. e ii. é único.

Demonstração. i. $\varnothing \in \omega$, pois $\varnothing$ pertence a todo conjunto indutivo.
Se $n \in \omega$, então n pertence a todo conjunto indutivo.
Portanto, $n++$ pertence a todo conjunto indutivo e $n++ \in \omega$. ■

Demonstração. ii. - iii. Seja A um conjunto indutivo. Considere $n \in \omega$.
Pela definição, n pertence a todo conjunto indutivo, em particular, $n \in A$.
Mostramos que $n \in \omega \rightarrow n \in A$. Logo, ii. é válido.
Suponha que exista outro conjunto B além de ω que satisfaz i. e ii.
Assim, devemos ter, por ii., $B \subseteq \omega \ \& \ \omega \subseteq B$. Pelo axioma da extensão, $B = \omega$. ■

O teorema anterior nos diz que o conjunto ω é o menor conjunto indutivo. Qualquer subconjunto indutivo de ω coincide com ω.

Teorema 15. Todo número natural, exceto 0, é sucessor de algum número natural.

Demonstração. Pelo axioma da separação, definimos um subconjunto de ω cujos elementos satisfazem a hipótese do teorema. O subconjunto possui a seguinte configuração

$$A = \{n \in \omega : n = 0 \lor \exists s \in \omega(n = s++)\}.$$

Queremos mostrar que $A = \omega$, i.e, que todos os números satisfazem o teorema.
Basta mostrar que A é indutivo:

i. $0 \in A$. Isso é imediato porque $0 \in \omega$.

ii. $k \in A \rightarrow k++ \in A$.

Para $k \in A$ significa que $k \in \omega$, $k = 0$ ou que $\exists s \in \omega(k = s++)$.
Se $k = 0$: caso base.
Como provamos que ω é indutivo, segue que $s++$ pertence a ω.
Por hipótese se k pertence a ω o sucessor de k também pertence a ω.
Assim, $k++ = (s++)++$ e segue que $k++ \in A$. Logo, A é indutivo.
Portanto, pelo princípio da indução, $A = \omega$. ■

Axiomas de Peano

1. Zero é um número.
2. O sucessor de um número é um número.
3. Números distintos nunca têm o mesmo sucessor.
4. Zero não é sucessor de qualquer número.
5. Se uma propriedade vale para zero, e, valendo para um número n também vale para seu sucessor, então, essa propriedade vale para todos os números.

Teorema 16. O conjunto ω satisfaz os axiomas de Peano. A correspondência é o número como elemento de ω, zero como o conjunto vazio de ω e sucessor como o conjunto δ para ω definido como

$$\delta = \{(n, n++) : n \in \omega\}.$$

O conjunto delta é o conjunto dos pares ordenados n e o sucessor de n tal que n está em ω.

Demonstração. 1. e 2.
Estes dois axiomas são satisfeitos porque ω é indutivo. ■

Demonstração. 3.
Vamos supor que $n \neq s$, mas $n++ = s++$. Como $n \in n++$ segue que $n \in s++$, o que é o mesmo que dizer que $n \in (s \cup \{s\})$.
Ou seja, $n \in s \vee n = s$. Por hipótese $n \neq s$. Portanto $n \in s$. Analogamente para $s \in n$.
Isso contradiz o Teorema 4 do Axioma da Regularidade:
Não existem conjuntos x e y tais que $x \in y$ e $y \in x$. ■

Demonstração. 4.
Temos a informação de que $\forall n(n \in n++)$. Logo, não podemos ter $n++ = 0 = \emptyset$, já que o conjunto vazio não possui elementos. ■

Demonstração. 5.
Princípio da indução. Para ω obtivemos a indução considerando um subconjunto A e descobrindo que se A é indutivo, então A é igual ao conjunto ω. ■

Sistema de Peano

$$(N, S, i)$$

N o conjunto indutivo, S a operação sucessora e i o objeto que pertence ao conjunto N. Esse sistema é isomórfico ao sistema

$$(\omega, \delta, 0).$$

Existe uma função bijetora

$$h : \omega \to N$$

que preserva a operação de sucessor e o primeiro elemento.

Referências

[1] Thomas J. Jech. *Set Theory*. ACADEMIC PRESS, 1978. ISBN: 0-12-381950-4.

[2] Kazimierz Kuratowski. *Introduction to Set Theory and Topology*. PERGAMON PRESS, 1961. ISBN: 59-14873.