Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

Notas em teoria dos conjuntos

Douglas Vieira
dvieira@disroot.org

02/2021

Conteúdo

Teoria Axiomática [Conjuntos] 2
- Teoria ZF 2
- Axiomas 4
  - Axioma da extensão (ou da unicidade) 4
  - Axioma do vazio 4
  - Axioma do Par 5
  - Axioma da União 5
  - Axioma das partes 6
  - Axioma da separação 6
  - Axioma da regularidade 7

Conjuntos 8
- Pertinência e Inclusão 8
- União e Interseção 8
- Conjunto universal 9

Desenvolvendo as relações algébricas 9
- Par não ordenado 9
- Par ordenado 10
- Produto Cartesiano 11
- Relações 12
  - Domínio, Imagem e Campo 12
  - Função 13
  - Relação de equivalência 14
  - Classes de equivalência 15
  - Partição 16
  - Conjunto Quociente 17
- Relação de complementaridade [Adicional] 18
  - Família Indexada 18
  - Matriz lógica 18

Teoria Axiomática [Conjuntos]

Teoria ZF

Condições estabelecidas da teoria:

1. Todos os objetos da teoria são conjutos. Dizemos que *todos os elementos de conjuntos serão conjuntos*, e assim sucessivamente, mas paramos ao chegarmos no conjunto vazio.

2. Os objetos da teoria não comportarão átomos e nem conjuntos de todos os conjuntos (conjuntos universais), isto é, não comportarão *urelementos*.

A estrutura do método axiomático se estabelece da seguinte forma:

1. Linguagem

2. Axiomas

3. Teorema - consequência dos axiomas

4. Regras de inferência da *lógica clássica*

1. Composição da linguagem

A linguagem é dividida em 3 segmentos

Variáveis Símbolos Fórmulas

a) Variáveis: É utilizado tanto letras minúsculas quanto maiúsculas para denotar conjuntos.

b) Símbolos

   $\forall x$: para todo conjunto x...
   $\exists x$: existe um conjunto x...
   $\neg$: negação de...
   &: e
   $\vee$: ou (acomete uma disjunção)
   $\rightarrow$: se... então (condicional)
   $\leftrightarrow$: se e somente se (bicondicional)

c) Fórmulas: Sequências de símbolos que satisfazem os seguintes itens

   Se x e y são variáveis, então $x \in y$ e $x = y$ são fórmulas. *Fórmulas atômicas;*
   Se A e B são fórmulas, então $\neg(A), (A) \rightarrow (B), (A)\&(B), (A) \vee (B)$ e $(A) \leftrightarrow (B)$ também são.
   Se A é uma fórmula e x uma variável, então $\forall x(A)$ e $\exists x(A)$ também são fórmulas;
   Todas as fórmulas tem uma das formas descritas acima.

Exemplo 1. A análise da composição de fórmulas de

$$\exists B(\forall x(\neg(x \in B))$$

se da por

I. Existência da fórmula atõmica $[(x \in B)]$.

II. Uma outra fórmula está sendo a negação da fórmula atõmica $[(\neg(x \in B)]$

III. Fórmula quantificando a variável x em relação a negação da fórmula atômica $[\forall x()]$

Portanto, temos 3 fórmulas que são

$$\neg(x \in B)), \quad \forall x(\neg(x \in B)) \quad e \quad \exists B(\forall x(\neg(x \in B)).$$

"Existe um objeto B *tal que para todo objeto* x*, não é verdade que* x *pertence a* B."

Observação (Fórmulas lógicas)

- **Ocorrência de variável:** cada aparecimento de uma variável. Sendo

  $$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

  temos duas ocorrências da variável y e duas[a] ocorrências da variável x.

- **Escopo de uma variável:** uma variável y está no escopo de uma variável x se y aparece em uma fórmula do tipo $\forall x(\ )$ ou $\exists x(\ )$. Sendo

  $$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

  y está no escopo de x e x está no escopo de si mesmo.

- **Variável livre:** uma variável é livre se não está no escopo dela mesma. Sendo

  $$x \in y \ \& \ \exists x(y = x)$$

  x e y que estão fora da subfórmula são variáveis livres. y que está dentro da subfórmula é uma variável livre, mas, dentro da subfórmula, x não é uma variável livre por está dentro do próprio escopo.

[a] Alguns autores colocam o x, em $\exists x$, como uma ocorrência.

2. Axiomas da teoria

- **Axiomas que garantem a existência de certos conjuntos específicos**

  Axioma do vazio

  Axioma do infinito

- **Axiomas que nos permitem construir novos conjuntos**

  Axioma do par

  Axioma da união

  Axioma das partes

  Axioma da escolha

  Axioma da separação

  Axioma da substituição

- **Axiomas que dizem respeito ao "comportamento"dos conjuntos**

  Axioma da regularidade

  Axioma da extensão

Nas partes 3 e 4 da estrutura da Teoria ZF, que são, respectivamente, os teoremas e as regras de inferência da lógica clássica, surgem dos Axiomas que serão apresentados a seguir; não sendo necessário declará-los a priori.

Axiomas

Axioma da extensão (ou da unicidade)

Declaração 1. Se dois conjuntos x e y possuem exatamente os mesmos elementos, então eles são iguais.

$$\forall x\, \forall y(\forall z(z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y) \;\rightarrow x = y)$$

Exemplo 2. Se $x = \{1, 2, 3\}$, $y = \{3, 1, 2\}$ e $z = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}$, então $x = y = z$.

Axioma do vazio

Declaração 2. Existe um conjunto sem elemento algum.[ii]

$$\exists x \forall y\; \neg(y \in x)$$

Utiliza-se $\varnothing$ para denotar este conjunto do Axioma do vazio. Para isto, devemos que assegurar que

1. Existe um conjunto com tal propriedade
2. Esse conjunto é único (não pode-se atribuir o mesmo símbolo para duas coisas distintas)

Definição 1 (1. Relação de inclusão)**.** Dizemos que x está contido em y e escrevemos $x \subseteq y$ se todo elemento de x é um elemento de y.

$$x \subseteq y \quad \leftrightarrow \quad \forall z(z \in x \quad \rightarrow \quad z \in y)$$

Com essa notação, podemos reescrever o **axioma da extensão**:

$$(A \subseteq B) \,\&\, (B \subseteq A) \quad \rightarrow \quad A = B$$

Também escrevemos $x \subset y$ para dizer que $x \subseteq y \;\;\&\;\; x \neq y$.

Teorema 1. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

$$\forall x(\varnothing \subseteq x)$$

Demonstração. Supondo que exista x tal que o conjunto vazio não esteja contido em x e que existe y tal que y pertence ao conjunto vazio mas não a x, temos, com efeito:

$$\exists x(\varnothing \nsubseteq x) \;\;\&\;\; \exists y(y \in \varnothing \,\&\, y \notin x).$$

Temos uma contradição à própria definição de conjunto vazio. ∎

Teorema 2. Existe um único conjunto vazio.

Demonstração. A existência é garantida pelo Axioma do vazio. Com efeito, supondo que existam conjuntos vazios x e y, com $x \neq y$. Pelo axioma da extensão deve então existir um elemento z tal que

$$\begin{aligned} z \in x \quad & mas \quad z \notin y \quad ou \\ z \in y \quad & mas \quad z \notin x. \end{aligned}$$

Em qualquer caso temos uma contradição com o fato de que x e y são vazios. ∎

[ii]Posteriormente, surgirá a necessidade de verificar a dispensabilidade deste axioma.

Observação (Relação de inclusão)

É comumente apresentado em escolas que a relação de inclusão se aplica apenas entre conjuntos, enquanto que a relação de pertinência se aplica entre elementos e conjuntos. Isso é impreciso diante da teoria, pois:

- Todos os objetos da nossa teoria são conjuntos. Portanto, nas expressões $x \in y$ e $x \subseteq y$, tanto x quanto y são conjuntos;
- Podem existir conjuntos cujos elementos são conjuntos.

Suponde que exista o conjunto $\{\varnothing\}$, ou seja, um conjunto cujo único elemento é $\varnothing$. Em consideração, temos

- $\varnothing \in \{\varnothing\}$, isto é, $\varnothing$ é elemento do conjunto $\{\varnothing\}$
- $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$, de acordo com o Teorema1.

Axioma do Par

Declaração 3. Sejam x e y conjuntos quaisquer. Então existe um conjunto $x \in z$ e $y \in z$.

$$\forall x, y \; \exists z (x \in z \;\&\; y \in z)$$

Aqui, dizemos que z é um par não ordenado, pois, pelo axioma da extensão, os conjuntos $\{x, y\}$ e $\{y, x\}$ são iguais.

Exemplo 3. No caso em que $x = y$:
temos $\{x, x\} = \{x\}$, pelo axioma da extensão.

Axioma da União

Declaração 4. Para todo conjunto A, existe um conjunto B cujos elementos são exatamente os elementos dos elementos de A.

B será denotado por $\bigcup\limits_{X \in A} A$

- todo X, que é elemento de A, é subconjunto de B
- todo Y, que é elemento de B, é elemento de algum elemento de A

Neste axioma, temos, também que

- Caso A seja um vazio, B será o conjunto vazio
- Caso A seja finito, B será uma união finita
- Caso A seja infinito, B será uma união infinita.

Definição 2. A união generalizada de um conjunto A é o conjunto formado pelos elementos dos elementos de A.

$$\forall A \, \exists B \, \forall x \, (x \in B \;\leftrightarrow\; \exists c \, (c \in A \;\&\; x \in c))$$

Exemplo 4. Seja um conjunto $A = \{\{1,\ 2\},\ \{3,\ 4\},\ \{5,\ 6\}\}$.
Então, a união generalizada se realiza como $\bigcup A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\}$.
O conjunto A possui 3 elementos que são conjuntos que possuem elementos que estão em A.

Observação

Não existe um axioma semelhante para interseções, pois não é possível definir uma interseção vazia. A redação de $\bigcap_{X \in \varnothing} X$ compreende o *Universo de von Neumann*, o que nos levaria para caminhos desnecessários (por ora) ao estudo mais avançado da Teoria dos conjuntos.

Axioma das partes

Declaração 5. *Para todo conjunto* x*, existe o conjunto* y *dos subconjuntos de* x*:*

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]$$

O conjunto definido pelo axioma também é único. Sendo assim, podemos definir o seguinte:

Definição 3. Definimos o *conjunto das partes*, ou simplesmente *power set*, como o conjunto de todos os subconjuntos de x, e o denotamos por $\mathcal{P}(x)$.

Exemplo 5. Seja um conjunto $A = \{1, 2\}$.
Pelo axioma das partes,

$$(z \in \mathcal{P}A \ \leftrightarrow \ z \subseteq A)$$

$$\begin{aligned} &\varnothing \subseteq A \\ &\{1\} \subseteq A \\ &\{2\} \subseteq A \\ &\{1, 2\} \subseteq A. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{P}A = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}\}$

Axioma da separação

Queremos ser capazes de definir um conjunto através de uma fórmula lógica. Para evitar paradoxos, como o paradoxo de Russel, temos que especificar o conjunto sobre qual nossa fórmula será elaborada.

Declaração 6. Portanto, para cada fórmula $P(x)$, para todo conjunto y, existe o conjunto daqueles elementos que pertencem a y e satisfazem a fórmula P.

Exemplo 6. Seja um conjunto $y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
$P(x)$: x é par.
$Z = \{x; x \in y \ \& \ P(x)\} = \{2, 4, 6, 8\}$

Definição 4. Para cada fórmula P tal que z não ocorre livre, a seguinte fórmula é um axioma:

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \ \leftrightarrow \ x \in y \ \& \ P(x)]$$

"para todo y *existe* z *tal que para todo* x, x *pertence a* z *iff* x *pertence a* y *e vale a fórmula* $P(x)$*."*
O conjunto z será denotado assim:

$$z = \{x : x \in y \ \& \ P(x)\}.$$

Ou assim:

$$z = \{x \in y : P(x)\}.$$

Por que z não pode ocorrer livre em P na fórmula

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \ \leftrightarrow \ x \in y \ \& \ P(x)]?$$

Se permitirmos que a variável que define o conjunto ocorra livre em P, poderíamos tomar $P(x) = x \notin z$:

$$\forall y \exists z \forall x [x \in z \leftrightarrow x \in y \,\&\, x \notin z].$$

Tomando $y = \{\emptyset\}$ e $x = \emptyset$, temos que $x \in y$ é verdadeiro. Assim,

$$(x \in z \leftrightarrow x \notin z)$$

é uma contradição.

Interseção

Podemos utilizar o axioma da separação para definir a interseção de dois conjuntos.
Sejam A e B dois conjuntos.
Então, pelo axioma da separação, existe $z = \{x : x \in A \,\&\, P(x)\}$
Tomando $P(x) = x \in B$, temos

$$z = \{x : x \in A \,\&\, x \in B\} = A \cap B$$

Diferença e conjuntos vazios

Da mesma forma, podemos definir a diferença entre dois conjuntos.
Sejam A e B dois conjuntos.
Então, pelo axioma da separação, existe $z = \{x : x \in A \,\&\, P(x)\}$
Tomando $P(x) = x \notin B$, temos

$$z = \{x : x \in A \,\&\, x \notin B\} = A - B$$

Se tomarmos $P(x) = x \neq x$, obtemos o conjunto vazio.

Interseção arbitrária de conjuntos

Teorema 3. Dado um conjunto não vazio x, existe o conjunto $y = \bigcap x$, formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a todos os elementos de x.

$$\bigcap x = \{v : v \text{ pertence a todos os elementos de } x\}.$$

Exemplo 7. Seja um conjunto $x = \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{2,3,4,5\}\}$.
Existe o conjunto interseção: $\bigcap x = \{2,3\}$.
Formalmente, temos

$$y = \{v : v \in z \,\&\, \forall w(w \in x \rightarrow v \in w)\}.$$

Axioma da regularidade

Declaração 7. Para todo conjunto x não vazio existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$.

$$\forall x[x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \,\&\, x \cap y = \emptyset)]$$

Ou seja, esse axioma garante que não exista uma sequência infinita descrescente na relação de pertinência. Não há como ficar preso numa sequência infinita decrescente, pois certa hora irá encontrar o conjunto vazio.

Teorema 4. Não existem conjuntos x e y tais que $x \in y$ e $y \in x$.

Demonstração. Sejam x e y conjuntos quaisquer.
Vamos demosntrar que ou $x \notin y$ ou $y \notin x$. Pelo **axioma do par**, existe $B = \{x, y\}$ não vazio.
Pelo **axioma da regularidade**, $B \neq \varnothing \ \longrightarrow \ \exists z(z \in B \ \& \ z \cap B = \varnothing)$.
Mas $z \in B$ implica que $z = x$ ou $z = y$.
Se $z = x$, então $z \cap B \ = \ x \cap B \ = \ \varnothing$, logo, $y \notin x$,
(pois caso contrário, o resultado da interseção conteria o y).
Se $z = y$, então $z \cap B \ = \ y \cap B \ = \ \varnothing$, logo, $x \notin y$. ∎

Nota

A formulação, dada por von Neumann (1925), em lógica de primeira ordem, é seguida por

$$\forall A(\exists B(B \in A) \longrightarrow \exists B(B \in A \land \neg\exists C(C \in A \land C \in B)))$$

Todo conjunto diferente do conjunto vazio possui um elemento que é totalmente disjunto dele. Sem esse axioma, o comportamento possível de infundados conjuntos surgem. São denominados **hiperconjuntos**. Um comportamento típico seria $y \in y$, então y é um hiperconjunto. Em particular, não é adequado ter a violação desse axioma, apenas para versões da teoria dos conjuntos que possam se beneficiar de tal comportamento.

Conjuntos

Pertinência e Inclusão

Quando um objeto (elemento) x pertence a um conjunto A:

$$x \in A$$

Dois conjuntos iguais, onde possuem exatamente os mesmos elementos (um dado conjunto está totalmente contido no outro) e dois conjuntos que possuem parcialmente os objetos do outro (um dado conjunto está parcialmente contido no outro):

$$A \subseteq B \iff A = B \qquad (1)$$

$$A \subset B \iff A \neq B \qquad (2)$$

(1) $\forall x; x \in A \ \& \ x \in B$.
(2) $x, y; ((x \in A) \ \& \ (x, y \in B)) \ \lor \ ((y \in A) \ \& \ (x, y \in B))$.

União e Interseção

A união $x \cup y$ dos conjuntos x e y é definida sendo o conjunto de todos os elementos de x e y.
Logo, $(x \cup x = x)$, $(x \cup y = y \cup x)$ e $((x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z))$.
De modo geral, dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a sua união é

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_1 \quad \text{ou} \quad x \in A_2 \quad \text{ou} \quad \ldots \quad x \in A_n.\}$$

A interseção $x \cap y$ é o conjunto dos objetos que x e y possuem em comum.
Logo, $x \cap x = x$, $x \cap y = y \cap x$ e $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.
De modo geral, a interseção dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_1, \ x \in A_2, \ \ldots \ , x \in A_n.\}$$

Propriedade Associativa: $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$.

Demonstração. Tomemos os conjuntos A, B e C.
Provemos que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
$(A \cup B) \cup C = \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \vee R(x)\} = \{x \mid P(x) \vee (Q(x) \vee R(x))\} = A \cup (B \cup C)$. ∎

Propriedade Comutativa: $x \cup y = y \cup x$.

Demonstração. Tomemos os conjuntos A e B.
Provemos que $A \cup B = B \cup A$.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \;\; \vee \;\; x \in B\} = B \cup A$. ∎

Propriedade Distibutiva: $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ ou $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.

Demonstração. Tomemos os conjuntos A, B e C.
Provemos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \mid P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))\} \\ &= \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x))\} \\ &= \{x \mid (P(x) \vee Q(x)) \cap (P(x) \vee R(x))\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

∎

Conjunto universal

Declaração 8. Não existe o conjunto universal na Teoria Zermelo-Fraenkel

Teorema 5. Não existe o conjunto universal.

Demonstração. Suponha por absurdo que V, um conjunto universal, exista. Isto é,

$$\exists V \forall x (x \in V).$$

Pelo **axioma da separação** definimos A:

$$A = \{x : x \in V \;\&\; x \notin x\}$$

Note que:

- Se $A \in A$, então $A \in V \;\&\; A \notin A$. (contradição)
- Se $A \notin A$, então $A \notin V$ ou $A \in A$. Mas não podemos ter $A \in A$.

Portanto, $A \notin V$, contrariando o fato de V ser universal. ∎

Desenvolvendo as relações algébricas

Par não ordenado

Dados dois conjuntos x e y, vimos que o **axioma do par** nos garante a existência do conjunto

$$\{x, y\}.$$

Pelo **axioma da extensão**, temos

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

Ou seja, a ordem dos objetos não é considerada.
Queremos definir agora um **par ordenado**, de tal modo que a ordem dos objetos seja levada em consideração, isto é, queremos que o par ordenado $\langle a, b\rangle$ seja diferente do par ordenado $\langle b, a\rangle$.

Par ordenado

Definição 5. Dados dois conjuntos a e b, definimos o par ordenado $\langle a, b\rangle$ como o conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Observações

Quando $a = b$:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}.$$

A **existência do par ordenado** é garantida da seguinte forma: Dados dois conjuntos a, b:

- Pelo **axioma do par**, existe $\{a, a\}$, que é igual a $\{a\}$ pelo **axioma da extensão**.
- Pelo **axioma do par**, existe $\{a, b\}$.
- Pelo **axioma do par** novamente, existe $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Teorema 6. $\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle$ se, e somente se, $u = x$ e $v = y$.

Demonstração. Da direita para a esquerda é trivial, ou seja, se substituir u pelo x e v pelo y, teremos a mesma ordenação.

Agora, supomos que $\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle$ ou $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
Pelo **axioma da extensão**, $\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ e $\{u, v\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
Temos quatro possibilidades:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \{u\} = \{x\} \\ \text{(b)} & \{u\} = \{x, y\} \\ \text{(c)} & \{u, v\} = \{x\} \\ \text{(d)} & \{u, v\} = \{x, y\} \end{array}$$

i Se vale o caso (b), então $u = x = y$. Assim, observando (d), $v = y = x = u$ e (d) e (c) são equivalentes, e o teorema está desmontrado.

ii Se vale (c), temos o mesmo caso.

iii Se vale (a), temos $u = x$.

Assim, observando (d), temos que

$$\{u, v\} = \{u, y\}.$$

Assim, pelo **axioma da extensão**, $y = u$ ou $y = v$.
No primeiro caso, caímos no (b), que é válido.
No segundo caso, temos o resultado solicitado $y = v$. ∎

Observação

O teorema nos permite dizer que x é a primeira coordenada e y é a segunda coordenada do par ordenado $\langle x, y\rangle$.

Produto Cartesiano

Definição 6. Suponha que temos dois conjuntos A e B, e que formamos pares ordenados $\langle x, y\rangle$ em que x é um elemento de A e y é um elemento de B. O conjunto de todos os pares ordenados deste tipo é chamado de *produto cartesiano* de A e B:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \,\&\, y \in B\}$$

Agora, surge uma necessidade de demonstrar que nossa definição faz sentido, isto é, se A e B são conjuntos, então o produto cartesiano $A \times B$ é um conjunto. A redação deu sua validade requer uma estratégia, que será

1. Demonstrar que os pares ordenados pertencem a um conjunto maior cuja existência já está garantida e

2. pelo **axioma da separação**, extraímos estes elementos deste conjunto maior.

Lema 7. Se $x \in A$ e $y \in B$ então $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$.

Demonstração. Se $x \in A$ e $y \in B$, então $\{x\} \subset A \cup B$ e $\{x, y\} \subset A \cup B$.
O insight sobre o **axioma das partes**: $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subset x)$, nos leva aos seguintes argumentos

$$\{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \quad \text{e} \quad \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

Assim,

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B).$$

Pelo **axioma das partes** novamente, temos que $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ [iii] $\in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$. ∎

[iii] Definição do par ordenado, feito anteriormente.

Corolário 7.1. Para quaisquer conjuntos A e B, existe o conjunto cujos elementos são exatamente os pares ordenados $\langle x, y\rangle$ em que $x \in A$ e $y \in B$.

Demonstração. Pelo **axioma do par**, **axioma da união** e o **axioma da separação**, existe o conjunto

$$A \times B = \{w \in \mathcal{PP}(A \cup B) : \exists x \exists y (x \in A) \;\&\; y \in B \;\&\; w = \langle x, y\rangle)\}$$

De fato, $A \times B$ satisfaz o teorema, pois todo par ordenado $\langle x, y\rangle$ que atende às especificações pertence a $\mathcal{PP}(A \cup B)$, conforme o Lema anterior. ■

Relações

Definição 7. Uma relação é um conjunto de pares ordenados.

Definição 8. Dizemos que R é uma *relação binária* entre A e B se R é um subconjunto.

$$(A \times B)^{\text{iv}}$$

Exemplo 8. Uma relação de ordem $<$ (menor) no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.
Queremos dizer que $<$ relaciona cada número aos números maiores:

$$1 < 2$$
$$1 < 3$$
$$2 < 3$$

Assim,

$$< \quad = \quad \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$

$$A \times A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$$

Nota

Como uma relação é uma coleção de *tuplas ordenadas*, isto é, uma lista ordenada de n objetos, o estudo será dirigido para as relações mais sofisticadas. Em particular, temos **função**, **relação de equivalência** e **relação de ordem**.

Domínio, Imagem e Campo

Definição 9. Seja R uma relação.
Definimos o *domínio* de R ($\mathcal{D}_R$), a *imagem* de R (Img_R) e o *campo* de R ($camp_R$) de tal modo que:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_R &\leftrightarrow \exists y(\langle x, y\rangle) \in R) \\ y \in Img_R &\leftrightarrow \exists x(\langle x, y\rangle) \in R) \\ camp_R &= \mathcal{D}_R \cup img_R \end{aligned}$$

Para justificar a definição, temos que garantir que dada uma relação R,

- existe o conjunto formado pelas primeiras coordenadas dos elementos de R (lembrando que R é um conjunto de pares ordenados) e
- existe o conjunto das segundas coordenadas dos elementos de R.

[iv] Notação utilizada: $\langle x, y\rangle$ ou xRy. No caso de $A = B$ e R um subconjunto de $A \times A$, então dizemos simplesmente que R é uma relação sobre A.

Para a justificação da definição precisaremos de uma estratégia que consiste em

1. Mostrar que as coordenadas de um par ordenado pertencem a um conjunto maior cuja existência é garantida e
2. Usar o **axioma da separação** para destacar os elementos desejados.

Lema 8. Se $\langle x, y\rangle \in A$, então x e y pertencem a $\bigcup\bigcup A$.

Demonstração. Declarar $\langle x, y\rangle \in A$ é, equivalentemente, declarar que $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in A$.
Com efeito, pelo **axioma da união**:

$$x \in \bigcup A \leftrightarrow \exists c\,(c \in A \,\&\, x \in c),$$

temos $\{x, y\} \in \bigcup A$ (é um elemento de um elemento de A).
Pelo axioma da união, novamente, segue então que

$$x \in \bigcup\bigcup A$$

e também

$$y \in \bigcup\bigcup A,$$

pois são elementos de elementos de $\bigcup A$. ∎

Assim, podemos estabelecer os conjuntos *domínio* e *imagem* de uma relação R:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_R &= \{x \in \bigcup\bigcup R : \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\} \\ Img_R &= \{y \in \bigcup\bigcup R : \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\} \end{aligned}$$

Função

Uma função F é basicamente um conjunto de pares ordenados, isto é, uma relação, com uma propriedade em particular:

Declaração 9. Para cada $x \in \mathcal{D}_F$ existe um único y tal que $\langle x, y\rangle \in F$.

Definição 10. Dizemos que uma relação F entre A e B é uma função de A em B se para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $\langle x, y\rangle \in F$.

Observação

Quando nem todos os elementos de A participam da função, dizemos que a função é uma *função parcial* de A em B. Caso contrário, dizemos que F é uma *função total* ou simplesmento uma função.

As definições de domínio e imagem para relações seguem o mesmo esquema para funções.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \{x \in \bigcup\bigcup F : \exists y(\langle x, y\rangle \in F)\} \\ Img_F &= \{y \in \bigcup\bigcup F : \exists x(\langle x, y\rangle \in F)\} \end{aligned}$$

Dada uma função, podemos "recuperar o domínio e a imagem". Dessa forma, se F é uma (total) de A em B, então:

- O conjunto A é o domínio de F
- O conjunto $\{y \in B : \exists x \in A(xFy)\}$ é a imagem de F.

Definição 11 (Contradomínio)**.** Se F é uma função de A em B, é declarado que B é o *contradomínio* da função F.

Todavia, devemos notar que esse conjunto não pode ser "recuperado"a partir da função:

Exemplo 9.

$$F = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$$

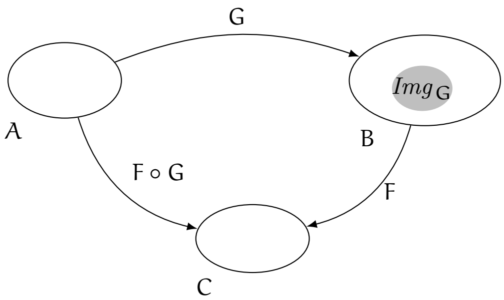
Aqui, F pode ser uma função tanto $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, quanto de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$ (reais não negativos).

Definição 12 (Natureza)**.** Uma função $F : \ A \longrightarrow B$ é

- Injetora: se para todos $x, y \in A$ temos que se $x \neq y$, então $F(x) \neq F(y)$
- Sobrejetora em relação a B: se para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $y = F(x)$
- Bijetora: se ela é injetora e sobrejetora em relação a B

Definição 13 (Composta)**.** Se F e G são funções, com $Img_G \subset \mathcal{D}_F$ então definimos a função composta de F e G da seguinte maneira:

$$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{D}_G \times Img_F : \ \exists y(xGy \ \& \ yFz)\}.$$



Definição 14 (Inversa)**.** Dada uma relação R, definimos a inversa de R, denotada por R^{-1}, o conjunto:

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}.$$

Para toda relação R, existe sua inversa. No entanto, quando F é uma função, então F^{-1} também é uma função *iff* F é Injetora.

Relação de equivalência

Definição 15. Uma *relação de equivalência* R em algum conjunto A é uma relação binária sobre A que satisfaz três propriedades, para todos x, y e $z \in A$:

- Propriedade Reflexiva - (xRx): $\langle x, x\rangle \in R$
- Propriedade Simétrica - $(xRy \leftrightarrow yRx)$: $\langle x, y\rangle \in R \ \leftrightarrow \ \langle y, x\rangle \in R$
- Propriedade Transitiva - $(xRy \ \& \ yRz \rightarrow xRz)$: $\langle x, y\rangle \in R \ \& \ \langle y, z\rangle \in R \ \rightarrow \ \langle x, z\rangle \in R$

Exemplo 10. Consideremos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 12\}$.
Vamos dividi-lo em três subconjuntos:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$A_2 = \{5, 6, 7, 8\},$$
$$A_3 = \{9, 10, 11, 12\}.$$

Digamos agora que dois elementos estão numa relação R se eles são elementos do mesmo subconjunto: $xRy \ \leftrightarrow \ x$ e y pertencem ao mesmo subconjunto, então

$$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \ldots, \langle 5, 5\rangle, \langle 5, 6\rangle, \ldots, \langle 9, 12\rangle, \langle 12, 9\rangle\}.$$

Observe que a relação R é uma **relação de equivalência**:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}, A_2 = \{5, 6, 7, 8\}, A_3 = \{9, 10, 11, 12\}$$

- Reflexividade: um elemento está no mesmo subconjunto de si mesmo
- Simetria: x está no mesmo subconjunto que y, então y está no mesmo subconjunto de x
- Transitividade: Se x está no mesmo subconjunto de y e y, por sua vez, está no mesmo subconjunto que z, então x e z estão no mesmo subconjunto.

Classes de equivalência

Vamos considerar novamente

$$\begin{aligned}A &= \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\},\\ A_1 &= \{1, 2, 3, 4\},\\ A_2 &= \{5, 6, 7, 8\},\\ A_3 &= \{9, 10, 11, 12\}.\end{aligned}$$

Tomando um elemento $x \in A$, digamos, o 2. Queremos listar todos os elementos que estão na relação com $x = 2$ com respeito a R:

$$xRy \ \leftrightarrow \ xey \ \text{ pertencem ao mesmo conjunto.}$$

Esses elementos são: $\{1, 2, 3, 4\}$. Mas note que este conjunto é exatamente o subconjunto A_1.

Definição 16. A classe de equivalência de x módulo R é

$$[x]_R = \{t : xRt\}.$$

Ou seja, é o conjunto de todos os elementos t que estão na relação R com x ou de forma equivalente, todos os elementos t tais que $\langle x, t\rangle \in R$. Quando dois elementos pertencem à mesma classe de equivalência, diremos que eles são equivalentes.

O conjunto $[x]_R$ está garantido pelo **axioma da separação**, pois $[x]_R \subseteq Img_R$.

Exemplo 11. $xRy \ \leftrightarrow \ x$ e y pertencem ao mesmo subconjunto.

$$\begin{aligned}A &= \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\},\\ A_1 &= \{1, 2, 3, 4\},\\ A_2 &= \{5, 6, 7, 8\},\\ A_3 &= \{9, 10, 11, 12\}.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}[1]_R &= \{t : 1Rt\} = \{1, 2, 3, 4\} = A_1,\\ [4]_R &= \{1, 2, 3, 4\} = A_1,\\ [5]_R &= \{5, 6, 7, 8\} = A_2,\\ [12]_R &= \{9, 10, 11, 12\} = [9]_R = A_3.\end{aligned}$$

Teorema 9. Assuma que R seja uma relação de equivalência sobre A e x e y sejam elementos de A. Então,

$$[x]_R = [y]_R \quad \textit{iff} \quad xRy.$$

Demonstração. Suponha que $[x]_R = [y]_R$. Sabemos que $y \in [y]_R$, pela propriedade reflexiva. Pela suposição de igualdade, $y \in [x]_R$, portanto, pela definição, xRy. Suponha que xRy. Veja que se $t \in [y]_R$, então yRt. Pela transitividade, $xRy \,\&\, yRt \ \rightarrow \ xRt$. Tendo que $[x]_R = \{t : xRt\}$ (definição), se xRt, então $t \in [x]_R$. Ou seja, mostramos que $[y]_R \subseteq [x]_R$. Pela simetria, temos yRx e em um processo análogo, podemos mostrar que $[x]_R \subseteq [y]_R$.
Portanto, $[x]_R = [y]_R$. ■

Nota

Dados $x, y, z \in A$, uma relação de equivalência R em A é uma relação binária sobre A que satisfaz três propriedades adicionais, para todos x, y e z. Ou seja, R é igual a A *cartesiano* A que vale as propriedades Reflexiva, Simétrica e Transitiva.
Uma classe de equivalência, por exemplo, a classe de equivalência de x módulo R é o conjunto de elementos t tais que x está na relação R com t. Todos os elementos t tais que $\langle x, t\rangle \in R$.
No exemplo acima, temos um comportamento que nos diz que $A = \bigcup\{[1], [5], [9]\}$, está relacionado com o próximo tópico.

Partição

Definição 17. Uma partição Π de um conjunto A é um conjunto formado por subconjuntos não vazios de A que são *disjuntos* e *exaustivos*, isto é:

i. Não existem dois conjuntos em Π que possuam elementos em comum (são dois a dois disjuntos).

ii. Cada elemento de A pertence a algum conjunto Π (a união dos conjuntos da partição é igual ao próprio conjunto A).

Teorema 10. Seja Π uma partição de um conjunto A. Define-se uma relação R sobre A da seguinte forma:

$$xRy \leftrightarrow \exists B \in \Pi(x \in B \,\&\, y \in B).$$

Então, R é uma relação de equivalência sobre A.

A relação R diz que dois objetos estão na relação xRy se eles pertencem ao mesmo subconjunto. O teorema diz que uma partição induz uma relação de equivalência sobre um conjunto. Então, definindo uma partição de um conjunto e estabelencendo uma relação nesse conjunto que vai validar a pertinência de dois elementos dentro de um subconjunto dessa partição, temos uma relação de equivalência. A demonstração segue diretamente das propriedades lógicas (Reflexiva, Simétrica e Transitiva).

Exemplo 12. Consideremos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Seja $\Pi = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$.
Note que não existem dois conjuntos de Π com elementos iguais e todo elemento de A pertence a algum conjunto de Π. Portanto, Π é uma partição de A.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}. \quad \therefore \Pi_A = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}.$$

Definimos uma relação R sobre A da seguinte forma:

$$xRy \leftrightarrow \exists B \in \Pi(x \in B \,\&\, y \in B).$$

Neste caso:

$$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \ldots \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \ldots \langle 5, 5\rangle, \langle 5, 6\rangle, \langle 8, 7\rangle, \langle 8, 8\rangle\}$$

- $\forall x \in A(\langle x, x\rangle \in R)$
- $\langle x, y\rangle \in R \leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R$
- $\langle x, y\rangle \in R \,\&\, \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R$
- Portanto, R é uma **relação de equivalência**.

Teorema 11. Seja R uma relação de equivalência sobre A. Então, o conjunto

$$H = \{[x]_R : x \in A\}$$

de todas as **classes de equivalência**, é uma partição desse conjnto A.

Demonstração. Para ser partição, H deve satisfazer:

i. Os conjuntos em H são subconjuntos de A, não vazios e são dois a dois disjuntos.

ii. Cada elemento pertencentes A pertence a algum conjunto em H.

Seja $x \in A$ qualquer. Então, $x \in [x]_R$, logo, as classes em H são não vazias e mostramos que vale (i.). Como R é uma relação binária em A, segue que as classes são subconjuntos de A.
Suponha que z pertença a duas classes diferentes, digamos, $[x]_R$ e $[y]_R$. Então, xRz e yRz (ou zRy, pela simetria). Pela transitividade teríamos xRy, e pelo Teorema.0.9, teríamos $[x]_R = [y]_R$, contrariando a suposição de que essas classes sejam diferentes. ■

Observações

O Teorema 0.10 diz que uma partição induz uma relação de equivalência sobre um conjunto.
Já o Teorema 0.11 temos o inverso do Teorema 0.10, isto é, a relação de equivalência particiona o conjunto de certa forma que respeita a definição de partição.

Conjunto Quociente

Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, o conjunto $H = \{[x]_R : x \in A\}$ do teorema anterior passa a ser chamado de Conjunto Quociente:

$$A/R = \{[x]_R : x \in A\}$$

Definição 18. Defini-se como conjunto quociente um conjunto de classes de equivalência onde cada classe de equivalência é um conjunto formado pelas segundas coordenadas de todos os pares ordenados em que o elemento x é a primeira coordenada.

Então, como é garantido pelas propriedades de relação de equivalência, que as classes de equivalência formam uma partição de um dado conjunto A, essa partição (ou conjunto das classes de equivalência) é o **Conjunto Quociente**, também chamado de **Espaço Quociente** de A por R.

Observação

A existência desse conjunto é garantida pelo **axioma da separação**, pois ele é subconjunto de $\mathcal{P}(Img_R)$.

Quando A tem alguma estrutura definida (como uma operação de grupo ou uma topologia) e a relação de equivalência R é <u>compatível</u> com esta estrutura, o conjunto quociente frequentemente herda uma estrutura semelhante de seu "conjunto pai".

Relação de complementaridade [Adicional]

Definição 19. Seja R uma relação binária e tida como subconjunto de $A \times B$. A *relação complementar* $\overline{R}$ é o conjunto complemento de R em $A \times B$.

$$\overline{R} = (A \times B) \setminus R.$$

Existe uma conexão entre uma *matriz lógica* (ou *matriz Booleana*) com a relação de complementaridade.
A visualização da complementaridade em uma relação binária R se torna mais didática com o desenvolvimento da Matriz Lógica.

Família Indexada

São coleções de objetos que prosseguem de uma associação a um índice de algum conjunto de índices. Uma *família* de números reais, *indexados* pelo conjunto de inteiros é uma coleção de números reais, onde uma determinada função seleciona, para cada inteiro, um número real.

Família indexada é uma função que possui um certo domínio I e imagem X.

Os elementos do conjunto X são referidos como a família.

O conjunto I é referido como o *índice* da família, sendo assim, X é o *conjunto indexado*.

Definição 20. Considere I e X conjuntos e x uma função sobrejetiva[vi] tal que

$$\begin{aligned} x :\quad & I \longrightarrow X \\ & i \mapsto x_i = x(i) \end{aligned}$$

estabelece uma *família de elementos* em X, indexado por I, que é denotado por $(x_i)_{i \in I}$ ou simplesmente (x_i), caso o conjunto de índices seja conhecido.

> **Nota**
>
> Uma família indexada pode ser *transformada* em um conjunto, quase que de forma natural. Para qqr família $(F_i)_{i \in I}$ existe o conjunto de **todos** os elementos $\{F_i \mid i \in I\}$, todavia isso não carrega uma "restrição"sobre a contenção múltipla ou a estrutura dada pelo I. Logo, utilizando conjunto em vez de família, certas etapas necessária podem ser perdidas e haver uma má interpretação.
>
> Considerando o conjunto $\mathcal{X} = \{x_i : i \in I\}$, ou seja, a imagem de I sob x. Lembrando que o mapeamento x não precisa ser *injetivo*, pode haver $i, j \in I$ com $i \neq j$ de tal modo que $x_i = x_j$. Portanto, $|\mathcal{X}| \leq |I|$

Matriz lógica

Definição 21 (Domínio Booleano)**.** Domínio booleano é um conjunto que possui apenas dois elementos cujos valores representam *falso* e *verdadeiro*.

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

Matriz Booleana

Também chamada de *matriz binária* é uma matriz em que os termos a_{ij} assumem valores do **domínio Booleano**.
Essa matriz pode ser usada na representação de uma relação binária entre um par de conjuntos finitos.

Definição 22. Se R é uma **relação binária** entre os *conjutos indexados* finitos X e Y, i.e, $R \subseteq X \times Y$, então R pode ser representado pela matriz lógica M cujos índices de linha e coluna indexam os elementos de X e Y, respectivamente, de modo que as entradas de M são definidas por

[vi] Uma família contém qualquer elemento exatamente uma vez, se e somente se a função correspondente for injetiva.

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (x_i, y_j) \in R \\ 0 & (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

Os conjuntos X e Y são indexados com os números inteiros positivos de forma a designar os números de linha e coluna da matriz. Temos i variando de 1 a cardinalidade de X e j variando de 1 a cardinalidade de Y.

Exemplo 13. A relação binária R no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ é definida de forma que xRy se mantenha se, e somente se $y \mid x$. Segue o conjunto de pares para os quais a relação R é válida.

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

A representação como uma matriz lógica: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde o valor do par ordenado representa um termo, que seu valor tem como o domínio Booleano, onde valida ou não a divisibilidade.

Na **relação de complementaridade** ($\overline{R} = (A \times B) \setminus R$) vista como uma matriz lógica, já que linhas representam elementos de X e colunas elementos de Y, primeiro criamos a relação binária e depois mudamos todos os 1s da matriz para 0s, e 0s para 1s. Assim teremos a relação complementar.