Notas em matemática

Análise

Douglas Santos
douglass@ufrj.br

07/2022

Conteúdo

Sequências

Sequências infinitas

Sequências são um tipo de especial de função. Considere uma função de variável inteira, ou seja

$$a_n := a(n) : \mathbb{Z} \to A; n \ \mapsto \ a_n.$$

O domínio de uma sequência é sempre o conjunto dos inteiros. A imagem da sequência depende do contexto, pois o contradomínio pode ser um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou um espaço topológico. De qualquer forma, a imagem é geralmente denotada por a_n.

Sequências infinitas unilaterais

São sequências onde o domínio pode ser sempre o conjunto $\mathbb{N}$. Considere a aplicação $f : N \to A; n \mapsto f(n)$. Uma sequência infinita unilateral seria algo do tipo

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}.$$

Exemplo 1
Considere a sequência $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Então, a imagem é $\left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, ...\right\}$.

Sequências bi-infinitas

Sequências bi-infinitas são sequências do tipo

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Exemplo 2
Considere $\{4n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Então, temos

$$(..., -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, ...).$$

Sequências monótonas

Sequências monótonas são sempre crescentes ou decrescentes.

Sequências monotonicamente crescentes

A sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é monotonicamente crescente se e somente se $a_{n+1} \geqslant a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se cada termo consecutivo é estritamente maior que o anterior, então a sequência é *estritamente monotonicamente crescente*.

Sequências monotonicamente decrescentes

Analogamente, uma sequência é monotonicamente decrescente se a cada termo consecutivo for menor que o anterior. A sequência será *estritamente monotonicamente decrescente* se cada termo for estritamente menor que o anterior.

Sequências limitadas

Definição 1
Uma sequência $\{a_n\}_{n\in A}^{\infty}$ é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, ou seja, existem K e M contidos em A tais que $K \leqslant a_n \leqslant M, \forall n \in A$.

i. Se $\{a_n\}$ é limitada superiormente temos

$$a_n \leqslant M, \forall n \in A.$$

ii. Se $\{a_n\}$ é limitada inferiormente temos

$$K \leqslant a_n, \forall n \in A.$$

iii. Se $\{a_n\}$ é inferiormente e superiormente limitada então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Isto é, a_n é limitada se existir um $L > 0$, $L \subseteq A$, tal que $|a_n| \leqslant L, \forall n \in A$.

Limite de uma sequência

Sequências são tipos especiais de funções e com isso podemos investigar seus limites. No entanto, temos uma restrição: a_n está definida para valores inteiros de n. O único limite que usado será de $a_n \to +\infty$.

Definição 2 (Intuitiva)
Dada uma sequência a_n dizemos que o limite de uma sequência é L se, equanto n se torna grande, a_n comeca a estar arbitrariamente perto de L. Se enquanto $n \to +\infty$ a_n nao se aproxima de L, então dizemos que o limite nao existe.

Definição 3
Dada uma sequência a_n dizemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se para todo $\epsilon > 0$ existir um inteiro k, tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geqslant k$.

Teorema 1
Seja $a_{n\,n=n_0}$ uma sequência e suponha que $f(x)$ é uma função real para a qual $f(n) = a_n$ para todos os inteiros $n \geqslant k$, onde $k \geqslant n_0$. Se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Exemplo 3
Seja $a_n = \dfrac{5n+1}{6n+7}$. Determine se a sequência $a_{n\,n=1}$ tem um limite.

Demonstração. Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{6x+7} = \frac{5}{6}, \quad \text{então} \lim_{x\to\infty} \frac{5n+1}{6n+7} = \frac{5}{6}.$$

■

Propriedades de limites de sequências

Subsequências

Sequência de Cauchy

Convergência de sequências