

Análise

Douglas Santos
douglass@ufrj.br

Conteúdo

Sequências	2
Sequências infinitas	2
Sequências infinitas unilaterais	2
Sequências bi-infinitas	2
Sequências monótonas	2
Sequências monotonicamente crescentes	2
Sequências monotonicamente decrescentes	2
Sequências limitadas	2
Limite de uma sequência	3
Propriedades de limites de sequências	4
Subsequências	4
Sequência de Cauchy	4
Convergência de sequências	4

Sequências

Sequências infinitas

Sequências são um tipo de especial de função. Considere uma função de variável inteira, ou seja

$$a_n := a(n) : \mathbb{Z} \rightarrow A; n \mapsto a_n.$$

O domínio de uma sequência é sempre o conjunto dos inteiros. A imagem da sequência depende do contexto, pois o contradomínio pode ser um subconjunto do conjunto \mathbb{R} , \mathbb{C} ou um espaço topológico. De qualquer forma, a imagem é geralmente denotada por a_n .

Sequências infinitas unilaterais

São sequências onde o domínio pode ser sempre o conjunto \mathbb{N} . Considere a aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow A; n \mapsto f(n)$. Uma sequência infinita unilateral seria algo do tipo

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo 1

Considere a sequência $\left\{\cos \frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Então, a imagem é $\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\}$.

Sequências bi-infinitas

Sequências bi-infinitas são sequências do tipo

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Exemplo 2

Considere $\{4n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Então, temos

$$(\dots, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \dots).$$

Sequências monótonas

Sequências monótonas são sempre crescentes ou decrescentes.

Sequências monotonicamente crescentes

A sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é monotonicamente crescente se e somente se $a_{n+1} \geq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se cada termo consecutivo é estritamente maior que o anterior, então a sequência é *estritamente monotonicamente crescente*.

Sequências monotonicamente decrescentes

Analogamente, uma sequência é monotonicamente decrescente se a cada termo consecutivo for menor que o anterior. A sequência será *estritamente monotonicamente decrescente* se cada termo for estritamente menor que o anterior.

Sequências limitadas

Definição 1

Uma sequência $\{a_n\}_{n \in A}$ é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, ou seja, existem K e M contidos em A tais que $K \leq a_n \leq M, \forall n \in A$.

- i. Se $\{a_n\}$ é limitada superiormente temos

$$a_n \leq M, \forall n \in A.$$

ii. Se $\{a_n\}$ é limitada inferiormente temos

$$K \leq a_n, \forall n \in A.$$

iii. Se $\{a_n\}$ é inferiormente e superiormente limitada então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Isto é, a_n é limitada se existir um $L > 0$, $L \subseteq A$, tal que $|a_n| \leq L, \forall n \in A$.

Limite de uma sequência

Sequências são tipos especiais de funções e com isso podemos investigar seus limites. No entanto, temos uma restrição: a_n está definida para valores inteiros de n . O único limite que usado será de $a_n \rightarrow +\infty$.

Definição 2 (Intuitiva)

Dada uma sequência a_n dizemos que o limite de uma sequência é L se, enquanto n se torna grande, a_n começa a estar arbitrariamente perto de L . Se enquanto $n \rightarrow +\infty$ a_n não se aproxima de L , então dizemos que o limite não existe.

Definição 3

Dada uma sequência a_n dizemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ se para todo $\epsilon > 0$ existir um inteiro k , tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geq k$.

Teorema 1

Seja $a_{n=n_0}$ uma sequência e suponha que $f(x)$ é uma função real para a qual $f(n) = a_n$ para todos os inteiros $n \geq k$, onde $k \geq n_0$. Se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Exemplo 3

Seja $a_n = \frac{5n+1}{6n+7}$. Determine se a sequência $a_{n=n=1}$ tem um limite.

Demonstração. Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{6x+7} = \frac{5}{6}, \quad \text{então} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{6n+7} = \frac{5}{6}.$$

■

Observação

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ não existe, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ pode não existir.

Exemplo 4

Considere $a_n = \sin(n\pi)$ e $f(x) = \sin(x\pi)$.

Demonstração. Analisando a sequência a_n vemos que ela resulta em uma lista ordenada de zeros:

$$\overset{0}{\sin(0\pi)}, \overset{0}{\sin(1\pi)}, \overset{0}{\sin(2\pi)}, \overset{0}{\sin(3\pi)}, \dots$$

Como os termos da sequência são zeros temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Mas avaliando para valores reais, i.e, quando consideramos $f(x)$ temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ não existe. Os valores de $\sin(x\pi)$ para $x \rightarrow \infty$ oscilam entre -1 e 1 .

■

Definição 4

Dada duas sequências a_n e b_n , a notação $a_n \ll b_n$ significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

Teorema 2

Sejam p, q reais positivos, com $b > 1$. Temos a seguinte relação:

$$\ln^p(n) \ll n^q \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

Qualquer potência de $\ln(n)$ cresce mais *lentamente* do que qualquer potência de n .

Exemplo 5

Seja $a_n = \frac{\ln^9(n)}{n^{1/2}}$. Ache o limite da sequência a_n .

Demonstração. O teorema anterior indica que $\ln^p(n) \ll n^q$, i.e, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^p(n)}{n^q} = 0$, para qualquer real positivo p e q . Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^9(n)}{n^{1/2}} = 0$. ■

Exemplo 6

Seja $a_n = \frac{n^{100} + n^n}{n! + 5^n}$. Ache o limite da sequência a_n .

Demonstração. Vamos começar analisando o numerador. Pelo teorema, temos que $n^n \gg n^q$, que nesse caso é $n^n \gg n^{100}$. No denominador, novamente pelo teorema, temos que $n! \gg b^n$, que nesse caso é $n! \gg 5^n$. Então, iremos saber da existência de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ considerando $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}$. Novamente pelo teorema temos que $n^n \gg n!$, assim $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Mais precisamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100} + n^n}{n! + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{100}}{n^n} \right) + 1 \right)}{n! \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^n}{n!} \right) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Teorema 3

Suponha que a_n, b_n e c_n são sequências com

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Propriedades de limites de sequências**Subsequências****Sequência de Cauchy****Convergência de sequências**