Notas em matemática

Análise

Douglas Santos
douglass@ufrj.br

17 de outubro de 2022

Conteúdo

Sequências

A reta real estendida

Existem algumas sequências que não convergem para um número real e dependendo de como é a sua lei de formação podemos enxergar isso. Essas sequências convergem para $+\infty$ ou $-\infty$. Talvez seja adequado dizer que a sequência

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

esteja convergindo para $+\infty$, enquanto

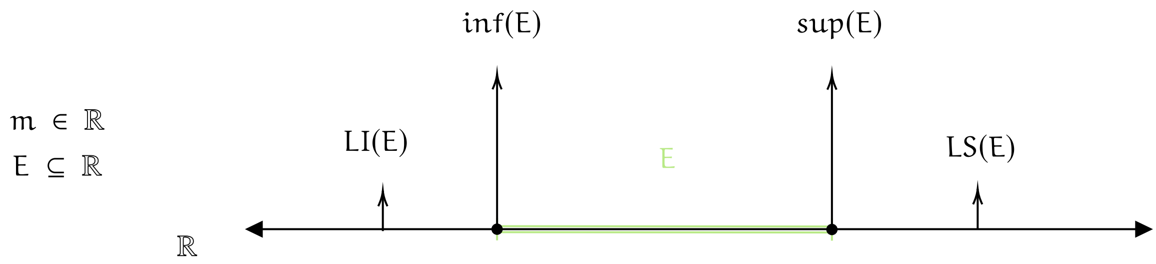
$$-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$$

esteja convergindo para $-\infty$.

Definição 1 (Reta real estendida)
A reta real estendida $\mathbf{R*}$ é a reta real $\mathbb{R}$ com dois elementos distintos de qualquer outro elemento de $\mathbb{R}$.

$$\mathbf{R*} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Definição 2 (Supremo)
Seja E um subconjunto dos números reais. Se E é não vazio e tem algum limite superior, definimos $sup(E)$ como o limite superior mínimo de E (o menor dos limites superiores de E, e, também, ele é único).
Se E é um conjunto não vazio e não tem um limite superior, o $sup(E) := +\infty$. Se E for vazio temos $sup(E) := -\infty$.



Limite Superior de E:

$$LS(E) := x \leqslant m, \ \forall x \ \in \ E$$

Limite Inferior de E:

$$LI(E) := m \leqslant x, \ \forall x \ \in \ E$$

$$max(E) := max\, x : x \in E$$
$$min(E) := min\, x : x \in E$$

Definição 3 (Supremo do conjunto de reais estendidos)
Seja E um subconjunto de $\mathbf{R*}$. Então definimos o *supremo* $sup(E)$ como

(a) Se E esta contido em $\mathbb{R}$ ($\{-\infty, +\infty\}) \notin E$) então $sup(E)$ é definido da forma usual (definição de supremo acima).

(b) Se E contem $+\infty$, então $sup(E) := +\infty$.

(c) Se E não contem $+\infty$ mas contem $-\infty$, então

$$sup(E) := sup(E \setminus \{-\infty\}).$$

Mas isso é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e, então, cai no item (a).

Como visto na figura acima também temos o *ínfimo* $inf(E)$. O ínfimo de E é o maior numero do limite inferior.

$$inf(E) := -sup(-E).$$

Exemplo 1
Seja E os inteiros negativos, juntos com $-\infty$:

$$E = \{-1, -2, -3, -4, ...\} \cup \{-\infty\}.$$

Assim

$$sup(E) = sup(E \setminus \{-\infty\}) = -1,$$

enquanto $inf(E) = -sup(-E) = -(+\infty) = -\infty$.

Proposição 1
Seja E um conjunto vazio. Então $sup(E) = -\infty$ e $inf(E) = +\infty$.

Este é o único caso onde o supremo é menor que o ínfimo.
Imaginando uma reta real com $+\infty$ para a direita e $-\infty$ para a esquerda. Movendo-se de $+\infty$ para a esquerda ate parar quando encontrar o conjunto E. Esse local de parada é o supremo de E. Analogamente movendo-se de $-\infty$ para a direita ate encontrar o conjunto E; o local de parada será o ínfimo de E. No caso de E ser um conjunto vazio não haverá local de parada e os "pontos"se movendo na reta irão para direções opostas. Portanto, o supremo se torna $-\infty$ e o ínfimo $+\infty$.

Definição 4 (Supremo e infimo de sequências)
Seja $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ uma sequência de números reais. Definimos $sup(\{a_n\}_{n=m}^{\infty})$ como o supremo do conjunto $\{a_n : n \geqslant m\}$ e $inf(\{a_n\}_{n=m}^{\infty})$ como o infimo do mesmo conjunto.

Exemplo 2
Seja $a_n := \dfrac{1}{n}$. Assim, temos $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ eh a sequência $1, 1/2, 1/3, 1/4, ...$ Então $sup(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = 1$ e o $inf(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$.

Sequências infinitas

Sequências são um tipo de especial de função. Considere uma função de variável inteira, ou seja,

$$a_n := a(n) : \mathbb{Z} \to A; n \;\mapsto\; a_n.$$

O domínio de uma sequência é sempre o conjunto dos inteiros. A imagem da sequência depende do contexto, pois o contradomínio pode ser um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou um espaço topológico. De qualquer forma, a imagem é geralmente denotada por a_n.

Sequências infinitas unilaterais

São sequências onde o domínio pode ser sempre o conjunto $\mathbb{N}$. Considere a aplicação $f : N \to A; n \mapsto f(n)$. Uma sequência infinita unilateral seria algo do tipo

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}.$$

Exemplo 3
Considere a sequência $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Então, a imagem é $\left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, ...\right\}$.

Sequências bi-infinitas

Sequências bi-infinitas são sequências do tipo

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Exemplo 4
Considere $\{4n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Então, temos

$$(..., -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, ...).$$

Sequências monótonas

Sequências monótonas são sempre crescentes ou decrescentes.

Definição 5 (Sequências monotonicamente crescentes)
A sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é monotonicamente crescente se e somente se $a_{n+1} \geqslant a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se cada termo consecutivo é estritamente maior que o anterior, então a sequência é *estritamente monotonicamente crescente*.

Definição 6 (Sequências monotonicamente decrescentes)
Analogamente, uma sequência é monotonicamente decrescente se a cada termo consecutivo for menor que o anterior. A sequência será *estritamente monotonicamente decrescente* se cada termo for estritamente menor que o anterior.

Sequências limitadas

Definição 7
Uma sequência $\{a_n\}_{n \in A}^{\infty}$ é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, ou seja, existem K e M contidos em A tais que $K \leqslant a_n \leqslant M, \forall n \in A$.

i. Se $\{a_n\}$ é limitada superiormente temos

$$a_n \leqslant M, \forall n \in A.$$

ii. Se $\{a_n\}$ é limitada inferiormente temos

$$K \leqslant a_n, \forall n \in A.$$

iii. Se $\{a_n\}$ é inferiormente e superiormente limitada então $\{a_n\}$ é uma sequência limitada. Isto é, a_n é limitada se existir um $L > 0$, $L \subseteq A$, tal que $|a_n| \leqslant L, \forall n \in A$.

Lema 1 (Sequências finitas são limitadas)
Toda sequência finita $a_1, a_2, ..., a_n$ é limitada.

Demonstração. Por indução, primeiramente, temos que quando $n = 1$ a sequência $\{a_1\}$ é claramente limitada, pois se escolhermos $M := |a_1|$ então temos $|a_i| \leqslant M$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Agora suponha que ja provamos o lema para algum $n \geqslant 1$; agora temos que provar isso para $n++$, i.e, nos temos que provar que toda sequência $\{a_i\}_{i=1}^{n++}$ é limitada. Pela hipótese da indução temos que $a_1, a_2, ..., a_n$ é limitada por algum $M \geqslant 0$. Em particular, queremos a limitação por $M + |a_{n++}|$. Por outro lado, $\{a_{n++}\}$ também é limitada por $M + |a_{n++}|$. Assim $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n++}$ é limitada por $M + |a_{n++}|$. Isso termina a indução em n. ■

Limite de uma sequência

Sequências são tipos especiais de funções e com isso podemos investigar seus limites. No entanto, temos uma restrição: a_n está definida para valores inteiros de n. O único limite que usado será de $a_n \to +\infty$.

Definição 8 (Intuitiva)
Dada uma sequência a_n dizemos que o limite de uma sequência é L se, enquanto n se torna grande, a_n começa a estar arbitrariamente perto de L. Se enquanto $n \to +\infty$ a_n não se aproxima de L, então dizemos que o limite não existe.

Definição 9
Dada uma sequência a_n dizemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se para todo $\epsilon > 0$ existir um inteiro k, tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geqslant k$.

Teorema 2
Seja $a_{n\,n=n_0}$ uma sequência e suponha que $f(x)$ é uma função real para a qual $f(n) = a_n$ para todos os inteiros $n \geqslant k$, onde $k \geqslant n_0$. Se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Exemplo 5
Seja $a_n = \dfrac{5n+1}{6n+7}$. Determine se a sequência $a_{n\,n=1}$ tem um limite.

Demonstração. Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{6x+7} = \frac{5}{6}, \quad \text{então } \lim_{x\to\infty} \frac{5n+1}{6n+7} = \frac{5}{6}.$$

■

Observação

Se $\lim_{x\to\infty} f(x)$ não existe, $\lim_{n\to\infty} a_n$ pode não existir.

Exemplo 6
Considere $a_n = \sin(n\pi)$ e $f(x) = \sin(x\pi)$.

Demonstração. Analisando a sequência a_n vemos que ela resulta em uma lista ordenada de zeros:

$$\cancelto{0}{\sin(0\pi)}, \cancelto{0}{\sin(1\pi)}, \cancelto{0}{\sin(2\pi)}, \cancelto{0}{\sin(3\pi)}, \ldots$$

Como os termos da sequência são zeros temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Mas avaliando para valores reais, i.e, quando consideramos $f(x)$ temos que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ não existe. Os valores de $\sin(x\pi)$ para $x \to \infty$ oscilam entre -1 e 1. ■

Definição 10
Dada duas sequências a_n e b_n, a notação $a_n \ll b_n$ significa que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

Teorema 3
Sejam p,q reais positivos, com $b > 1$. Temos a seguinte relação:

$$\ln^p(n) \ll n^q \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

Qualquer potencia de $\ln(n)$ cresce mais *lentamente* do que qualquer potencia de n.

Exemplo 7
Seja $a_n = \dfrac{\ln^9(n)}{n^{1/2}}$. Ache o limite da sequência a_n.

Demonstração. O teorema anterior indica que $\ln^p(n) \ll n^q$, i.e, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln^p(n)}{n^q} = 0$, para qualquer real positivo p e q. Portanto, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln^9(n)}{n^{1/2}} = 0$. ■

Exemplo 8
Seja $a_n = \dfrac{n^{100} + n^n}{n! + 5^n}$.Ache o limite da sequência a_n.

Demonstração. Vamos começar analisando o numerador. Pelo teorema, temos que $n^n \gg n^q$, que nesse caso é $n^n \gg n^{100}$. No denominador, novamente pelo teorema, temos que $n! \gg b^n$, que nesse caso é $n! \gg 5^n$. Então, iremos saber da existência de $\lim_{n\to\infty} a_n$ considerando $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$. Novamente pelo teorema temos que $n^n \gg n!$, assim $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Mais precisamente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}+n^n}{n!+5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n\left(\cancelto{0}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{100}}{n^n}\right)} + 1\right)}{n!\left(1+\cancelto{0}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{n!}\right)}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

■

Teorema 4
Suponha que a_n,b_n e c_n são sequências com

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n.$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Propriedades de limites de sequências

Proposição 2 (Propriedades aritméticas)
Considere duas sequências a_n e b_n tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, então

i. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$;

ii. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = L - M$;

iii. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$;

iv. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$.

Subsequências

Definição 11 (Subsequências)
Sejam $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sequências de números reais. Dizemos que $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma subsequência de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ se e somente se existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sendo f estritamente crescente (ou seja, $f(n+1) > f(n), \forall n \in \mathbb{N}$) tal que

$$b_n = a_{f(n)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vale notar que essa aplicação f é necessariamente injetiva. Do contrario f não seria estritamente crescente, o que violaria a definição.

Exemplo 9
Se $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência, então $\{a_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ é a subsequência de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, pois a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) := 2n$ é uma função estritamente crescente de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$.

Exemplo 10
Mais informalmente, as sequências

$$1.1, 1.01, 1.001, \ldots$$

e

$$0.1, 0.01, 0.001, \ldots$$

são subsequências de

$$1.1, 0.1, 1.01, 0.01, 1.001, 1.0001, \ldots$$

Sequência de Cauchy

Definição 12 (Eventual estabilidade de ϵ)
Seja $\epsilon > 0$. A sequência $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ é dita ser *eventualmente ϵ-estável* se e somente se a sequência $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ é ϵ-estável para algum número natural $N \geqslant 0$.

Parafraseando, a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ é eventualmente ϵ-estável se existir um $N > 0$ tal que a distancia entre dois termos for menor que ϵ para todo $j, k \geqslant N$. Com efeito:

$$d(a_j, a_k) \leqslant \epsilon \Leftrightarrow |a_j - a_k| \leqslant \epsilon, \forall j, k \geqslant N.$$

Exemplo 11
A sequência $a_1, a_2, \ldots$ definida por $a_n := 1/n$, não é 0.1-estável, mas é eventualmente 0.1-estável, porque a sequência $a_{10}, a_{11}, a_{12}, \ldots$, isto é, $(1/10, 1/11, 1/12, \ldots)$ é 0.1-estável.

Exemplo 12
A sequência $10, 0, 0, 0, 0, \ldots$ não é ϵ-estável para qualquer ϵ menor do que 10, mas é eventualmente ϵ-estável para qualquer $\epsilon > 0$.

Definição 13 (Sequências de Cauchy)
A sequência $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números racionais é uma *sequência de Cauchy* se e somente se para todo racional $\epsilon > 0$, a sequência $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ é eventualmente ϵ-estável.

Parafraseando... sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ é uma sequência de Cauchy se para todo ϵ positivo a distancia entre dois termos dessa sequência seja menor ou igual a épsilon.

Sequência Cauchy $a_n := 1/n$. Seja $\epsilon > 0$ um número arbitrário. Vamos encontrar um número $N \geqslant 1$ tal que a sequência $a_N, a_{N+1}, \ldots$ é ϵ-estável. Isso significa que $d(a_j, a_k) \leqslant \epsilon$ para todo $j, k \geqslant N$, i.e,

$$|1/j - 1/k| \leqslant \epsilon, \forall j, k \geqslant N.$$

Como $j, k \geqslant N$, sabemos que $0 < 1/j, 1/k \leqslant 1/N$, seguindo que $|1/j - 1/k| \leqslant 1/N$. Então para termos $|1/j - 1/k|$ menor ou igual a ϵ é suficiente que tenhamos $1/N$ menor que ϵ. Portanto, devemos escolher um N tal que $1/N$ é menor do que ϵ, ou, equivalentemente, que N seja maior do que $1/\epsilon$. ■