

minitocdepth2 24pt

Université d'Abomey-Calavi  
**Ecole Doctorale des Sciences Exactes et Appliquées**  
Formation Doctorale Sciences des Matériaux

**Memoire de Master II**  
**Option** : Physiques Théoriques et Mathématiques  
**Spécialité** : Cosmologie et gravitation

Thèse présenté et soutenu publiquement par :

**Anselme HADO**

**Titre**

*L'accélération de l'Univers et modèles de gravité*

**Président de jury**

Prof. ,

**Membres**

Prof. , .

Prof. , .

Prof. , .

**Encadreur**

**Dr. Inès G. SALAKO** , *Ecole de Génie Rural, Kétou*  
*Ecole Doctorale des Sciences Exactes et Appliquées.*

**Superviseur**

**Prof. Stéphane HOUNDJO**, *Faculté des Sciences et Techniques Natitingou, Bénin .*  
*Ecole Doctorale des Sciences Exactes et Appliquées*



---

# Dédicace

---

À  
*ma Mère KOUDOGBO Houédassi*  
*pour son engagement face à ses responsabilités dans mon éducation*

---

# Remerciements

---

Je souhaite

---

# Résumé

---

Da

Mots-clés :

---

# Abstract

---

This **Key Words** :

*Dark energy, generalized teleparallel theory of gravity  $f(T)$ , unimodular gravity, ECHDE and ECNADE models*

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Introduction à la gravitation</b>	<b>11</b>
<b>I</b>	<b>introduction à la RG</b>	<b>12</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	La Gravitation comme géométrie de l'espace-temps . . . . .	13
2.3	Equations d'Einstein à partir du formalisme lagrangien . . . . .	16
2.3.1	Equations de champs . . . . .	16
2.3.2	Non-linéarité des équations de champ . . . . .	19
2.3.3	Propriétés du tenseur d'Einstein . . . . .	20
2.3.4	Conservation de l'énergie et du moment . . . . .	20
<b>II</b>	<b>Approximation des champs faibles</b>	<b>22</b>
2.4	Equation de Continuité . . . . .	23
2.5	Equation de Poisson . . . . .	24
2.6	Deuxième loi de Newton . . . . .	26
2.7	Interprétation physique . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Introduction à la cosmologie</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Espace homogène et isotrope - Métrique de Robertson-Walker . . . . .	30
3.3	Equations de Friedman . . . . .	35
3.4	Différentes solutions des équations de Friedmann . . . . .	38
3.5	Equations de Friedmann en mécanique Newtonienne . . . . .	40
3.6	Propagation de la lumière dans l'Univers- Décalage vers le rouge . . . . .	41



3.7	Horizons . . . . .	46
3.8	Densité critique de l'Univers . . . . .	47
3.9	Le futur de l'Univers . . . . .	49
<b>4</b>	<b>L'accélération de l'Univers et modèles de gravité</b>	<b>52</b>
4.1	Le modèle cosmologique standard . . . . .	52
4.1.1	Métrique de FLRW . . . . .	52
4.1.2	Relativité Générale et équations de Friedmann . . . . .	53
4.1.3	Equation d'état de la matière et évolution de l'Univers . . . . .	55
4.2	Modélisation et preuves expérimentales de l'existence de l'énergie noire	57
4.2.1	Modélisation de l'énergie noire . . . . .	57
4.2.2	Supernovae de type Ia . . . . .	59
4.2.3	Âge de l'Univers . . . . .	60
4.2.4	Fond diffus cosmologique . . . . .	61
4.2.5	Oscillations Acoustiques des Baryons (BAO) . . . . .	62
4.2.6	Mesures combinées . . . . .	64
4.3	Énergie noire ou gravité modifiée ? . . . . .	65
4.3.1	Le problème de la constante cosmologique . . . . .	65
4.3.2	Modèles restant dans le cadre de la Relativité Générale . . . . .	66
4.3.3	Modèles de gravité modifiée . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>70</b>
5.1	Conclusion . . . . .	70
5.2	perspectives . . . . .	70
	Table des figures	

---

# Table des figures

---

3.1	.....	30
3.2	Augmentation de la longueur d'onde à cause de l'expansion de l'Univers	43
3.3	Diagramme publié par Edwin Hubble dans son article de 1929 [?] . . .	44
3.4	Diagramme de Hubble (pour les supernovae) de 2005 [?] . . . . .	44
3.5	.....	46
3.6	Horizon d'événement . . . . .	47
3.7	Horizon de particule . . . . .	47
3.8	Le potentiel en fonction de $a$ . . . . .	50
3.9	.....	51
3.10	.....	51
3.11	.....	51
3.12	.....	51
4.1	Diagramme de Hubble (distance luminosité $\log[H_0 D_L(z)]$ en fonction du red-shift $z$ ) pour un Univers plat pour un certain nombres de SN Ia observées. Les points noirs proviennent du catalogue "Gold" de Riess et al. [12], tandis que les points rouges proviennent de mesures effectuées par le Hubble Space Telescope ( <i>HST</i> ). On voit très clairement que le cas $\Omega_m = 0.31$ , $\Omega_\Lambda = 0.69$ correspond mieux aux observations que le cas d'un univers sans constante cosmologique $\Omega_m = 1$ , $\Omega_\Lambda = 0$ . La figure provient de la référence [13]. . . . .	60

- 4.2 Fonction de corrélation des galaxies du catalogue du SDSS. Les courbes verte (en haut), rouge et bleue (en bas, avec un pic) correspondent respectivement aux modèles  $\Omega_m h^2 = 0.12, 0.13, 0.14$ , avec  $\Omega_b h^2 = 0.024$ . La courbe du bas (sans pic) correspond à un modèle de matière noire sans baryon ( $\Omega_m h^2 = 0.105$ ). On voit très clairement la signature des BAO à  $r \simeq 105h^{-1}Mpc \simeq 150Mpc$ . Figure issue de l'article [19]. . . . . 63
- 4.3 Combinaison des contraintes sur les paramètres  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  du modèle  $\Lambda CDM$  issues de la mesure de la distance luminosité des SN Ia (Union supernovae [21]), du CMB (WMAP5) et des BAO (SDSS - release 7). Les ellipses des contraintes associées des trois types de mesures sont orientées d'une façon très différente : l'association des trois observations permet donc de mesurer les paramètres  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  beaucoup plus précisément qu'avec chacune des méthodes séparément. La figure provient de [20]. . . . . 65

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

La théorie de la Relativité Générale est certainement l'une des théories les plus fascinantes de la physique moderne : elle allie l'élégance d'une formulation géométrique des lois de la gravité à une capacité inégalée de description des phénomènes gravitationnels du monde physique qui nous entoure. S'appuyant sur elle, le modèle cosmologique standard parvient à expliquer, avec une dizaine de paramètres, toutes les observations cosmologiques, qu'il s'agisse de la nucléosynthèse, du fond diffus cosmologique, de la forme des grandes structures de l'Univers, ou encore de phénomènes proprement relativistes comme les effets de lentille gravitationnelle. Il parvient à donner une description cohérente de notre Univers, depuis le Big-Bang et les premières "graines" des structures jusqu'aux galaxies que nous observons aujourd'hui.

Plusieurs éléments laissent cependant penser que la Relativité Générale n'est peut-être pas la théorie définitive de la gravité. À très haute énergie, on sait depuis l'avènement de la théorie quantique des champs que la Relativité Générale ne saurait être valide pour des échelles d'énergies au-delà de l'échelle de Planck. La présence de ce cutoff ultra-violet nous apprend donc qu'une autre théorie doit prendre le relais à très haute énergie, motivant ainsi les recherches en théories des cordes et en gravité quantique. À l'autre bout du spectre d'énergie, c'est la cosmologie qui nous amène à nous interroger sur la validité de la Relativité Générale. En effet, bien que le modèle cosmologique standard réussisse brillamment à donner une description effective du monde physique, il doit pour cela faire l'hypothèse que 95% du contenu de l'Univers nous est de nature inconnue. Ce secteur sombre est alors supposé être constitué pour 70% d'énergie noire et pour 25% de matière noire, la dénomination de ces composantes illustrant bien notre ignorance. Au vu de ces difficultés, on ne peut s'empêcher de penser à d'autres théories qui au cours de l'histoire des Sciences sont parvenues à décrire les observations, certes correctement, mais au prix de raisonnements de plus en plus alambiqués, jusqu'à finalement être dépassées. Ce fut le cas de la théorie des épicycles de Ptolémée qui fut abandonnée au profit de la description copernicienne du système

solaire, ou encore de la théorie de l'éther rendue obsolète par la relativité restreinte. À chaque fois, il s'est agi d'interpréter dans un cadre théorique renouvelé les observations qui posaient problème, afin de leur donner une explication plus convaincante. La Relativité Générale connaîtra-t-elle le même sort ? Il est encore trop tôt pour le dire, mais il est sans nul doute légitime de s'interroger sur sa validité et d'essayer de construire des théories de la gravité évitant de faire appel à des sources d'énergie inconnues.

Nous sommes encore loin d'une théorie de la gravité qui serait plus satisfaisante d'un point de vue conceptuel que la Relativité Générale, tout en étant en accord avec les nombreuses contraintes expérimentales qui existent sur les lois de la gravité. Pour l'instant, aucune théorie de gravité modifiée n'a pu atteindre le statut de théorie réaliste de la gravité. Face à la difficulté de la tâche que représente la construction d'une théorie de la gravité plus aboutie que la Relativité Générale, il est possible d'adopter une démarche légèrement différente, que l'on peut qualifier de phénoménologique. Cette démarche consiste à proposer et à étudier des modèles de gravité qui, sans avoir la prétention d'être entièrement réalistes, ouvrent d'intéressantes pistes d'exploration qui pourront peut-être mener in fine à une théorie cohérente de la gravité. C'est dans ce cadre que se situe le travail de thèse présenté dans ce mémoire. Ce dernier s'articule en quatre grandes étapes.

# INTRODUCTION À LA GRAVITATION

---

# Première partie

## introduction à la RG

## 2.1 Introduction

La première théorie de la gravitation a été formulée par Isac Newton pendant plus de XVII Siècle. La théorie de Newton conçoit la gravitation comme une force qui agit instantanément à distance c'est à dire une attraction. Malgré son succès évident, la théorie Newtonienne contient deux inconvénients majeurs du point de vue théorique :

1. La propagation instantanée de l'interaction gravitationnelle est en flagrante contradiction avec les principes de la Relativité restreinte qui établissent une vitesse limite dans la nature, celle de la lumière.
2. Le principe d'équivalence n'est pas naturellement contenu dans la théorie.

Ces deux problèmes ont été abordés par Einstein, qui a proposé une nouvelle vision de l'interprétation de l'interaction gravitationnelle dénommée *la théorie de la gravitation*. Dans cette théorie, la gravitation est vue comme une force attractive mais comme une structure qui déforme l'espace-temps quadri-dimensionnel. L'idée centrale d'Einstein est de géométriser l'espace-temps en utilisant la notion de courbure. La relation fondamentale est du genre :

*Géométrie*  $\equiv$  *Matière* .

Afin de mieux explorer la théorie, il urge qu'on fasse un rappel des objets géométriques couramment utilisés.

le memoire ainsi redigé est le premier chapitre<sup>1</sup>

## 2.2 La Gravitation comme géométrie de l'espace-temps

La première théorie de la gravitation a été formulée par Newton pendant le XVII siècle. Elle dit que la force gravitationnelle entre deux corps ponctuels de masses  $m_1$  et  $m_2$  est donnée par l'expression

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

où  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N kg}^{-2} \text{ m}^2$  est la constante gravitationnelle. La théorie Newtonienne conçoit la gravitation comme une force qui agit instantanément à distance. En plus, si nous combinons la loi de force gravitationnelle Newtonienne avec la deuxième loi de Newton, nous obtenons pour la force sur le corps de masse  $m_2$ , par exemple,

$$m_2 a = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \rightarrow \quad a = G \frac{m_1}{r^2}. \quad (2.2)$$



Cela veut dire que tous les corps subissent la même accélération due au corps  $m_1$ , indépendamment de leur masse.

Cette dernière propriété est due au fait qu'on a considéré que la masse qui apparaît dans la deuxième loi de Newton est la même qui apparaît dans la loi de force gravitationnelle. Or, ceci du point de vue théorique n'est pas vrai : la masse qui apparaît dans la deuxième loi est reliée aux propriétés inertielles du corps, c'est-à-dire, à la tendance du corps à se maintenir dans un certain état de mouvement ; la masse qui apparaît dans la loi de gravitation est une mesure de l'intensité du champ gravitationnel créé par le corps, étant par conséquent une sorte de "charge gravitationnelle". La signification physique des deux masses est donc complètement différente, et leur égalité ressort du fait expérimental que tous les corps subissent la même accélération dans un champ gravitationnel. L'égalité des masses inertielle et gravitationnelle est connue comme le "principe d'équivalence".

D'une manière plus précise, dans le cas où le contenu matériel est vu comme un fluide, la gravitation Newtonienne conduit à un ensemble d'équations qui peuvent être appliquées à la description d'un modèle cosmologique. La première concerne la conservation de la masse. Considérons un volume  $V$  défini par une surface fermée  $S$ . La variation de la masse à l'intérieur du volume est égale au courant de masse à travers la surface :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \nabla \cdot \vec{j} dV \quad \rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} &= 0, \quad \vec{j} = \rho \vec{v}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Considérons maintenant la deuxième loi de Newton pour un élément de ce fluide de densité  $\rho$ . Sur cet élément, agissent le gradient de la pression et la force gravitationnelle :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\nabla p - \rho \nabla \phi \rightarrow \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $\phi$  est le potentiel gravitationnel.

Finalement, le potentiel gravitationnel dû à une distribution de masse devient :

$$\phi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (2.5)$$

Utilisant le fait que

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.6)$$

nous obtenons

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho. \quad (2.7)$$

Ainsi, le système d'équations convenable pour décrire une cosmologie Newtonienne est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho. \quad (2.10)$$

L'éq. (2.8) équation est l'équation de continuité, la deuxième équation d'Euler et la troisième l'équation de Poisson. Dans ces expressions,  $\rho$  est la densité d'un fluide,  $\vec{v}$  le champ de vitesse du fluide,  $p$  la pression et  $\phi$  le potentiel gravitationnel.

Malgré son succès évident, la théorie de Newton contient deux problèmes majeurs du point de vue théorique :

1. La propagation instantanée de l'interaction gravitationnelle est en flagrante contradiction avec les principes de la Relativité Restreinte qui établissent une vitesse limite dans la nature, celle de la lumière.
2. Le principe d'équivalence n'est pas naturellement contenu dans la théorie.

Ces problèmes ont été abordés par Einstein, qui a proposé une nouvelle théorie de la gravitation. Dans cette théorie, la gravitation n'est plus vue comme une force, mais comme la structure de l'espace-temps quadri-dimensionnel. Ainsi, les principes relativistes sont inclus, puisque nous avons maintenant à faire à un espace-temps, et aussi le principe d'équivalence, puisque les corps se déplacent tous de la même manière dans une géométrie donnée. L'idée centrale de la théorie Einsteinienne, c'est que la géométrie de l'espace-temps n'est pas une donnée a priori, mais qu'elle est déterminée par la distribution de matière. La relation fondamentale est du genre,

$$\text{géométrie} = \text{matière}. \quad (2.11)$$

## 2.3 Equations d'Einstein à partir du formalisme lagrangien

### 2.3.1 Equations de champs

La plus part des théories élaborées jusqu'à ce jour sont basées sur la théorie de jauge, ceci afin de permettre que les équations qui décrivent les lois physiques soient invariantes par rapport à des changements de coordonnées (Vitesse, Energie ...etc). Ces grandeurs physiques doivent être valables à tout point de l'univers. En terme plus technique, on dit que les lois de la physique sont invariantes par rapport à un changement de variable (jauge locale) en laissant invariant le lagrangien par rapport au champ de jauge. Ainsi, les équations d'Einstein peuvent être obtenues à partir d'un formalisme lagrangien. Ainsi l'action totale  $S$  est la somme de l'action purement gravitationnelle et de l'action de la matière couplée à la gravitation

$$S = S_g + S_m.$$

L'action  $S_g$  est l'intégrale d'une densité lagrangienne géométrique dans un domaine  $\Omega$  et est définie par :

$$S_g = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \sqrt{-g} R d^4x.$$

L'action  $S_m$  est l'intégrale d'une densité lagrangienne liée à la matière dans un domaine  $\Omega$  :

$$S_m = \int_{\Omega} \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x$$

où  $\mathcal{L}_M$  est la densité lagrangienne liée à la matière et donc

$$S = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.12)$$

La variation de l'action par rapport à  $g_{\mu\nu}$  est obtenue par une variation du champ de jauge  $\delta g_{\mu\nu}$  qui s'annule sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  (principe variationnel) ainsi que ses dérivées premières. Alors on a

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (2.13)$$

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.14)$$

En minimisant l'action, on obtient :

$$0 = \delta S$$

Ce qui revient à :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = -2\kappa \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.15)$$

et le second membre de (2.15) est par définition proportionnel au tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M. \quad (2.16)$$

Pour calculer le premier membre de (2.15) nous devons calculer les variations de la courbure scalaire et le déterminant de la métrique.

Pour calculer la variation de la courbure scalaire, nous calculons d'abord la variation du tenseur de courbure de Riemann et ensuite la variation du tenseur de Ricci. Ainsi le tenseur de courbure de Riemann étant défini en coordonnées locales par :

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \quad (2.17)$$

on a

$$\delta(R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}) = \partial_{\mu} \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (2.18)$$

Considérons  $\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$  comme un  $(1, 2)$ -tenseur  $\delta F$  et nous pouvons donc calculer sa dérivée covariante

en posant

$$\delta F \equiv (\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) \partial_{\rho} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\mu}.$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} \delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} &= \partial_{\lambda} (\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) \partial_{\rho} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\mu} + \\ &(\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) \nabla_{\lambda} (\partial_{\rho}) \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\mu} + (\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) \partial_{\rho} \otimes (\nabla_{\lambda} dx^{\nu}) \otimes dx^{\mu} + \\ &(\delta \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) \partial_{\rho} \otimes dx^{\nu} \otimes (\nabla_{\lambda} dx^{\mu}) \end{aligned}$$

et comme

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k \quad \text{et} \quad \nabla_i (dx^k) = -\Gamma^k_{ij} dx^j,$$

on écrit

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) = \partial_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma\delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho,$$

et on en déduit que

$$\partial_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - [\Gamma_{\sigma\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma\delta\Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho]. \quad (2.19)$$

De (2.19) on a aussi

$$\partial_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) = \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) - [\Gamma_{\lambda\mu}^\rho\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\rho]. \quad (2.20)$$

et

$$\partial_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) = \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) - [\Gamma_{\lambda\nu}^\rho\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\rho]. \quad (2.21)$$

En introduisant (2.20) et (2.21) dans (2.18) on retrouve l'expression de la variation du tenseur de courbure de Riemann qui est égale à la différence de deux termes :

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho). \quad (2.22)$$

Nous pouvons maintenant obtenir la variation du tenseur de courbure de Ricci simplement en contractant deux indices de la variation du tenseur de courbure de Riemann :

$$\delta R_{\mu\nu} \equiv \delta R_{\mu\rho\nu}^\rho = \nabla_\rho(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho). \quad (2.23)$$

Le scalaire de Ricci est défini comme

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

par conséquent sa variation est donnée par :

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho) \quad (2.25)$$

La variation du déterminant est donnée par :

$$\delta g = \delta \det(g_{\mu\nu}) = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

En effet

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}), \quad (2.27)$$

l'intégrale (2.14) sur  $\Omega$  devient

$$\kappa \int_{\Omega} d^4T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} = \int_{\Omega} d^4\left[\frac{-1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

$$+ \int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}[\nabla_{\sigma}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})]. \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \kappa \int_{\Omega} d^4xT_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} &= \int_{\Omega} d^4x\left[\frac{-1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \\ + \int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}[\nabla_{\sigma}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})] \end{aligned} \quad (2.30)$$

On peut réécrire le second terme du second membre de (2.30) comme suit

$$\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}[\nabla_{\sigma}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})] = \int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}[\partial_{\sigma}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})] = 0 \quad (2.31)$$

car en vertu du théorème de Stokes l'intégrale se transforme en intégrale de surface sur le bord  $\partial\Omega$  et les  $\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}$  sont nuls au bord.

L'égalité (2.31) dans (2.30), on retrouve les équations d'Einstein comme

$$\kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

En général on pose

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

qui est appelé le tenseur d'Einstein.

### 2.3.2 Non-linéarité des équations de champ

Les équations d'Einstein donne lieu à 10 équations indépendantes aux dérivées partielles non-linéaires pour les composantes de la métrique. Cette caractéristique de non-linéarité distingue la relativité générale de l'ensemble des autres théories physiques. Par exemple les équations de Maxwell de l'électromagnétisme sont linéaires

par rapport aux champs électrique et magnétique (c'est-à-dire que la somme de deux solutions est aussi une solution). Un autre exemple est celui de l'équation de Schrödinger en mécanique quantique où l'équation est linéaire par rapport à la fonction d'onde.

### 2.3.3 Propriétés du tenseur d'Einstein

En utilisant les relations définies en (??), (??), et (??) contractons la deuxième identité de Bianchi (??) sur  $k$  et  $i$ , on a

$$\nabla_m g^{ki} R_{klij} + \nabla_i g^{ki} R_{kljm} + \nabla_j g^{ki} R_{klmi} = 0 \quad (2.34)$$

$$\nabla_m R_{lj} + \nabla_i g^{ki} R_{kljm} - \nabla_j R_{lm} = 0 \quad (2.35)$$

$$\nabla_i g^{ki} R_{kljm} = \nabla_j R_{lm} - \nabla_m R_{lj} \quad (2.36)$$

Contractons (2.36) à nouveau sur  $j$  et  $l$  pour obtenir

$$\nabla_i g^{ki} g^{jl} R_{kljm} = \nabla_j g^{jl} R_{lm} - \nabla_m g^{jl} R_{lj} \quad (2.37)$$

$$- \nabla_i R_m^i - \nabla_j R_m^j = \nabla_m R \quad (2.38)$$

$$- 2\nabla_i g^{ik} R_{km} = \nabla_i g^{ik} g_{km} R \quad (2.39)$$

$$\nabla_i g^{ik} (R_{km} - \frac{1}{2} g_{km} R) = 0 \quad (2.40)$$

$$\nabla^k (R_{km} - \frac{1}{2} g_{km} R) = 0 \quad (2.41)$$

L'égalité (2.41) se traduit par l'identité

$$\nabla^k G_{km} = 0 \quad (2.42)$$

avec

$$G_{km} = R_{km} - \frac{1}{2} R g_{km} \quad (2.43)$$

Ainsi, le tenseur d'Einstein  $G_{km}$  est donc un tenseur à divergence nulle.

### 2.3.4 Conservation de l'énergie et du moment

On vient de démontrer que le tenseur d'Einstein est à divergence nulle

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.44)$$

et cela entraîne que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.45)$$

puisque

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.46)$$

D'où la Conservation de l'énergie et du moment.



## Deuxième partie

# Approximation des champs faibles

## 2.4 Equation de Continuité

La loi de conservation est exprimée par le fait que la divergence du tenseur d'énergie-impulsion est nulle

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.47)$$

Ainsi, à partir de (2.47), nous pouvons déduire la conservation de la masse qu'est l'équation de continuité. Pour cet, il faut exprimer le premier membre de (2.47).

En effet, il faut rappeler que

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda, \quad (2.48)$$

et

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V_\lambda. \quad (2.49)$$

Ainsi, nous déduisons

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu T_\nu^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma T_\mu^\sigma \quad (2.50)$$

En faisant usage de (2.47) et pour  $\nu = 0$ , on obtient :

$$\partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu T_0^\sigma - \Gamma_{\mu 0}^\sigma T_\mu^\sigma = 0, \quad (2.51)$$

soit

$$\partial_0 T_0^0 + \partial_i T_0^i + \Gamma_{i0}^i T_0^0 + \Gamma_{ij}^i T_0^j - \Gamma_{ii}^i T_0^i - \Gamma_{00}^i T_i^0 - \Gamma_{i0}^i T_i^i = 0 \quad (2.52)$$

En considérant que le contenu matériel de l'Univers est un fluide parfait de densité  $\rho$  et de pression  $p$ , on obtient :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (2.53)$$

où  $\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$

## 2.5 Equation de Poisson

En se mettant dans l'hypothèse de la *limite Newtonienne*, c'est à dire que les champs gravitationnels sont faibles, on peut écrire la métrique de l'espace-temps  $g_{\mu\nu}$  sous la forme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.54)$$

avec  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  et  $\eta_{\mu\nu}$  la métrique de Minkowski. Cela revient à considérer la métrique de l'espace-temps comme celle de Minkowski plus une petite perturbation.

On montre que

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (2.55)$$

En effet,

$$\delta\alpha_\beta = g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} \quad (2.56)$$

Considérons  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}$

$$\delta\alpha_\beta = \left(\eta^{\alpha\mu} + k^{\alpha\mu}\right) \left(\eta_{\mu\beta} + k_{\mu\beta}\right) \quad (2.57)$$

Ce qui conduit à

$$\eta^{\alpha\mu} h_{\mu\beta} + k^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} + k^{\alpha\mu} h_{\mu\beta} = 0 \quad (2.58)$$

Pour un développement du premier ordre en  $h_{\mu\beta}$  ou  $k^{\alpha\mu}$ , on peut négliger le terme quadratique  $k^{\alpha\mu} h_{\mu\beta}$ . Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} k^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} &= -\eta^{\alpha\mu} h_{\mu\beta} \\ &= -\eta^{\alpha\mu} h_{\mu\nu} \eta^{\nu\beta} \\ &= -\eta^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta} h_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.59)$$

or

$$k^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} h_{\mu\nu} \quad (2.60)$$

donc

$$\begin{aligned} k^{\alpha\mu}\eta_{\mu\beta} &= k^{\alpha\beta} \\ &= -h_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.61)$$

D'où

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (2.62)$$

On retient contrairement à  $g^{\mu\nu}$  et  $\eta^{\mu\nu}$ ,  $h^{\mu\nu}$  n'est pas l'inverse de  $h_{\mu\nu}$ .

On aimerait vérifier que cela prédit bien la loi de la gravitation de Newton dans les conditions de champs faibles. Dans ces conditions, l'énergie de la matière au repos  $\rho = T_{00}$  est très supérieure aux autres termes de  $T_{\mu\nu}$  donc on va se focaliser sur la composante  $\mu = 0, \nu = 0$ . Dans la limite du champ faible on écrit conformément (2.54) et (2.55)

$$g_{00} = -1 + h_{00} \quad (2.63)$$

$$g^{00} = -1 - h^{00}. \quad (2.64)$$

La trace du tenseur énergie impulsion au premier ordre est :

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00}.$$

En la reportant dans

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$$

on obtient :

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa T_{00}. \quad (2.65)$$

Evaluons l'expression de  $R_{00}$  à partir de

$$R_{00} = R_{0\alpha 0}^{\alpha}$$

avec

$$R_{0\alpha 0}^\alpha = \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 0}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{00}^\beta - \Gamma_{0\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\beta$$

Le second terme est une dérivée par rapport au temps qui est nulle pour le champ statique. Le troisième et quatrième sont d'ordre supérieur et peuvent être négligés.

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{0\alpha 0}^\alpha \\ &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha \\ &= \partial_\alpha \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\lambda} \partial_\alpha \partial_\lambda h_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \end{aligned}$$

En comparant à (2.65), on voit que la composante 00 de  $G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$  en limite Newtonienne prédit

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa T_{00}$$

En posant  $h_{00} = \Phi$  et  $\kappa = 8\pi G$ , l'équation  $\nabla^2 h_{00} = -\kappa T_{00}$  devient

$$\nabla^2 \Phi = -\kappa \rho.$$

Ainsi, dans la limite Newtonienne, on constate que les équations d'Einstein se réduisent à l'équation de poisson.

## 2.6 Deuxième loi de Newton

Nous montrons dans cette partie que l'approximation des champs faibles permet d'obtenir la deuxième loi de Newton à partir de la relativité générale. Pour y parvenir, nous rappelons les coefficients de la connexion (symboles de Christoffel) et l'équation des géodesiques en relativité générale respectivement par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.66)$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.67)$$

avec  $d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\nu dx^\mu$

Pour des champs de gravitation faibles on a

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad \text{ou} \quad \frac{dx^i}{cdt} \ll 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu} \quad \text{donc} \quad ds^2 = (dx^0)^2 = c^2 dt^2$$

En remplaçant (2.54) et (2.55) dans (2.66) on a

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\sigma} - h^{\lambda\sigma})(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.68)$$

A l'ordre 1, on peut négliger  $h^{\lambda\sigma}$  devant  $\eta^{\lambda\sigma}$ , donc

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\sigma})(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.69)$$

Pour  $\lambda = 0$  on a

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}(\eta^{00})(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu} - h_{\mu\nu,0}) \quad (2.70)$$

Le champ faible est donc statique et par conséquent  $h_{\mu\nu,0} = 0$ . D'où

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}(h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu}) \quad (2.71)$$

Pour  $\lambda = i$ , on a

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2}(\eta^{ii})(h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i}) \quad (2.72)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = -\frac{1}{2}(h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i}) \quad (2.73)$$

Revenons à l'équation de géodesique.

Pour  $\lambda = i$ , puisque  $ds = cdt$  alors (2.67) s'écrit

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} - \frac{1}{2}(h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i}) \frac{1}{c^2} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} = 0 \quad (2.74)$$

D'après les approximations, on aura seulement  $\mu = \nu = 0$  et donc  $\frac{1}{c^2} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{c^2} c^2 \frac{dt}{dt} \frac{dt}{dt}$ , ce implique

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} - \frac{1}{2}(h_{0i,0} + h_{0i,0} - h_{00,i}) = 0 \quad (2.75)$$

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i} \quad (2.76)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 x^1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x^2}{dt^2} \\ \frac{d^2 x^3}{dt^2} \end{pmatrix} = -\frac{c^2}{2} \begin{pmatrix} h_{00,1} \\ h_{00,2} \\ h_{00,3} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Sous forme vectorielle on a

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -g \vec{\text{grad}} \phi \quad (2.78)$$

où  $\phi = \frac{c^2}{2} h_{00}$

c'est la deuxième loi de Newton où  $\phi$  représente le potentiel

## 2.7 Interprétation physique

En limite Newtonienne, on considère la composante(00) de  $g$  devant (ii) et

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} \quad (2.79)$$

$$= 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (2.80)$$

Le potentiel  $\phi$  est défini par

$$\phi = \frac{GM}{R} \quad (2.81)$$

avec  $M$  et  $R$  respectivement la masse et le rayon de la planète considérée. Après calcul on trouve :

- Sur la terre  $\frac{2\phi}{c^2} \propto 10^{-9}$
- sur le soleil  $\frac{2\phi}{c^2} \propto 10^{-6}$
- Naïble blanche  $\frac{2\phi}{c^2} \propto 10^{-4}$
- Trou noir  $\frac{2\phi}{c^2} \propto 1$

Ces résultats prouvent qu'on peut négliger  $h_{00}$  devant  $g_{00}$  sur la terre et non dans l'univers à grande échelle. Cela montre que la deuxième loi de Newton n'est plus valable à grande échelle

# INTRODUCTION À LA COSMOLOGIE

---

## 3.1 Introduction

La cosmologie a pour but, l'étude de l'évolution de notre Univers dans son entièreté. De cette manière, elle se distingue de l'astrophysique qui vise plutôt l'étude des objets particuliers qui existent dans l'Univers, comme les étoiles, les galaxies... etc. La cosmologie essaye de répondre aux questions du genre :

1. L'Univers, est-il statique ou évolue-t-il avec le temps ?
2. Est-il globalement homogène ? Ses propriétés dépendent-elles de la position dans l'espace ?
3. Comment peut on expliquer la formation des galaxies, les amas de galaxies, et toutes les autres structures que l'on observe ?
4. Comment se forment les éléments chimiques qui existent dans la nature ?
5. Quelle est la nature des composants matériels qui remplissent l'Univers ?

Evidemment, cette liste n'épuise pas l'ensemble de problèmes abordés par la cosmologie.

La force dominante dans l'Univers à grande échelle est la gravitation. Ainsi, on doit avoir une théorie de la gravitation pour essayer de décrire la structure et l'évolution de l'Univers. Nous avons actuellement une théorie de la gravitation qui répond de manière positive aux impositions théoriques et observationnelles : c'est la Relativité Générale. Du point de vue théorique elle incorpore les principes relativistes, ainsi comme le principe d'équivalence ; du point de vue observationnel, la Relativité Générale a résisté aux tests locaux auxquels elle a été soumise. La Relativité Générale décrit la gravitation comme la structure de l'espace-temps créée par la distribution de matière.

Nous débuterons ce chapitre sur la cosmologie en rappelant les grandes lignes de la Relativité Générale comme dans [?]-[?]. L'Univers semble être à grande échelle homogène et isotrope, ainsi donc, nous obtiendrons la structure géométrique qui doit



servir à la description de cet Univers homogène et isotrope. Les possibles solutions dynamiques seront déterminées et les principaux paramètres observationnels seront décrits.

### 3.2 Espace homogène et isotrope - Métrique de Robertson-Walker

En cosmologie et en astrophysique apparaissent différentes échelles. Donnons quelques ordres de grandeurs :

$$\text{Rayon de la terre} \simeq 6,4 \cdot 10^8 \text{ cm} \quad (3.1)$$

$$\text{Rayon du soleil} \simeq 7 \cdot 10^{10} \text{ cm} \quad (3.2)$$

$$\text{Distance terre-soleil} \simeq 1,5 \cdot 10^{13} = 1 \text{ UA} \quad (3.3)$$

Une unité courante est le *parsec*, défini comme étant la distance à laquelle la distance terre-soleil est vue comme sous un angle de 1 arcsec, i.e

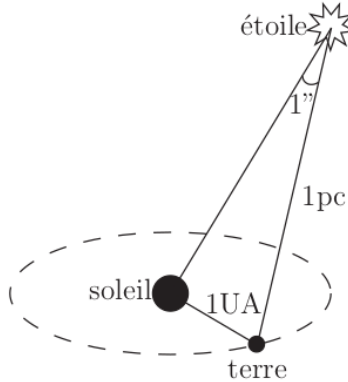


FIGURE 3.1 –

$$\begin{aligned} pc &= \frac{1 \text{ UA}}{1 \text{ arcsec}} \simeq 3,26 \text{ ly} \\ &\simeq 3 \cdot 10^{18} \text{ cm} \end{aligned}$$

Notre Univers est homogène et isotrope à grande échelle (i.e pour des échelles plus grandes que l'échelle des amas de galaxie). Homogène signifie qu'il n'existe pas de point préféré dans l'espace. Isotrope signifie qu'il n'existe pas de direction préfé-

rée. Pour montrer que l'Univers est isotrope, on peut observer le ciel dans différentes directions et compter le nombre de galaxies pour voir s'il est plus ou moins le même dans chaque direction. Une autre preuve pour l'isotropie de l'Univers vient du fond de rayonnement cosmique (CMB - "Cosmic Microwave Brackground") qu'on discutera plus en détail dans ce cours. Montrer que l'Univers est homogène s'avère plus difficile, vu qu'on ne peut pas l'étudier d'un autre point de l'espace. pour étudier l'homogénéité on essaie de mesurer les distances entre les galaxies et de reconstruire une image en 3D de notre Univers.

On aimerait maintenant comprendre comment décrire mathématiquement un espace homogène et isotrope. Essayons donc de trouver quelles sont les métriques qui décrivent un espace homogène et isotrope. Pour répondre à cette question, oublions pour l'instant le temps et concentrons-nous sur la partie spatiale de la métrique :

$$ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \text{ avec signature } (\gamma) = (+, +, +)$$

la métrique  $\gamma_{ij}$  détermine complètement la géométrie de l'espace courbe et entre autre le tenseur de courbure de Riemann  $R_{ijkl}$ . Rappelons les propriétés symétrie de Riemann

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{jikl}, \\ R_{ijkl} &= -R_{ijlk}, \\ R_{ijkl} &= R_{klij}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On va utiliser ces propriétés et exiger qu'il n'existe pas de point ou de direction préféré pour déterminer la structure de  $R_{ijkl}$  dans un espace homogène et isotrope.

Choisissons un système de coordonnées localement plat autour d'un point  $\bar{x}$ , i.e.  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$  et  $\Gamma_{jk}^i = 0$ . Alors, par les propriétés de symétrie et pour avoir un espace sans direction préférée, on aura :

$$R_{ijkl} = \zeta [\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}], \tag{3.5}$$

Par contraction des indices on trouve successivement le tenseur de Ricci et la courbure

scalaire

$$\begin{aligned} R_{ij} &= 2\gamma_{ij}\zeta \\ R &= 6\zeta \end{aligned} \quad (3.6)$$

On distingue 3 types d'espace  $\left\{ \begin{array}{l} \zeta > 0 : \text{coubure constante positive,} \\ \zeta = 0 : \text{espace plat,} \\ \zeta < 0 : \text{coubure constante négative.} \end{array} \right.$

**Cas  $\zeta = 0$**

On peut choisir les coordonnées cartésiennes :  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ . Donc

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.7)$$

**Cas  $\zeta > 0$**

En trois dimensions, on connaît un exemple d'un espace homogène et isotrope à courbure constante positive : la 3-sphère,  $S^3$  définie par  $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = a^2$ , où  $a$  est le rayon de la sphère. L'élément de distance est le même qu'en espace plat quadri-dimensionnel, à savoir :

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (3.8)$$

Toutefois sur la 3-sphère on peut exprimer  $dx_4$  en fonction des autres coordonnées,

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0, \quad (3.9)$$

d'où

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \quad (3.10)$$

On aimerait encore écrire la métrique sous une forme simplifiée. Introduisons des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  définies par

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

$$x_3 = r \cos \theta \quad (3.11)$$

On trouve alors que

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (3.12)$$

et

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = r dr. \quad (3.13)$$

L'élément de longueur est donné par

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Posons  $d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  et  $\bar{r} := \frac{r}{a}$ ,

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]. \quad (3.15)$$

Le domaine de définition des variables est

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{r} \leq 1, \\ 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Remarquons encore que la courbure scalaire est donnée par  $\frac{1}{a^2} > 0$ .

### Cas $\zeta < 0$

On s'attend à ce que le résultat soit identique à celui de la sphère, mais où on a remplacé  $a^2 \mapsto -a^2$  pour avoir une courbure scalaire négative. Ainsi,

$$\begin{aligned} dl^2 &= \frac{-a^2}{-a^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= a^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 + \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right] \end{aligned}$$

Le domaine de définition des variables variables est donné par

$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{r} \leq \infty, \\ 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

On peut résumer les trois cas par la formule générale

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.18)$$

où

$$k = \begin{cases} +1 & , \text{ Univers fermé,} \\ 0 & , \text{ espace plat} \\ -1 & , \text{ Univers ouvert.} \end{cases}$$

Notons qu'avec une redéfinition des coordonnées, on peut toujours se ramener à  $k = -1, 0, 1$ . Ces trois valeurs de  $k$  correspondent aux différentes géométries possibles. La terminologie d'un Univers fermé ou ouvert se réfère à la finitude ou infinitude du volume de l'Univers.

Finalement, on doit rajouter la composante temporelle. Si l'espace est homogène et isotrope, le paramètre d'échelle  $a$  peut au plus dépendre du temps. Ainsi,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]. \quad (3.19)$$

Cette métrique est appelée métrique de Robertson-Walker (RW). Ci-dessus nous donnons les composantes non nulles des symboles de Christoffel et du tenseur de Ricci, ainsi que la courbure scalaire.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} [\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}] \\ R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= - \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2ka^2 \right] g_{ij}, \end{aligned}$$

$$R = -6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (3.20)$$

### 3.3 Equations de Friedman

Nous allons maintenant dériver les équations régissant l'Univers lorsque celui-ci est décrit par la métrique de Robertson-Walker. Pour ce faire nous utilisons les équations d'Einstein en prenant comme matière un fluide parfait qui décrira notre Univers homogène et isotrope. Le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait est :

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (3.21)$$

où  $p$  est la pression,  $\rho$  la densité d'énergie et  $u^\mu$  le quadri-vecteur vitesse. Si le fluide est au repos  $u^\mu = \{1, \vec{0}\}$ , alors  $T_{00} = \rho$  et  $T_{ij} = -pg_{ij}$ .

En injectant ceci dans les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.22)$$

on trouve pour la composante  $\mu = \nu = 0$  :

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-6) \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{k}{a^2} \right] - \lambda = 8\pi G\rho, \quad (3.23)$$

ce qui nous donne la première équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.24)$$

Pour la composante  $ij$  on trouve

$$-\left[ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \right] g_{ij} - \frac{1}{2}(-6) \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{k}{a^2} \right] g_{ij} - \lambda g_{ij} = 8\pi G(-p)g_{ij}, \quad (3.25)$$

ce qui nous donne la deuxième équation de Friedmann

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \lambda = -8\pi Gp. \quad (3.26)$$

Toutes les autres composantes des équations d'Einstein sont identiquement nulles. Voici en résumé les équations régissant l'Univers homogène et isotrope décrit par la

métrique de Robertson-Walker, que l'on appelle communément équations de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (3.27)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \lambda = -8\pi Gp. \quad (3.28)$$

### Conservation du tenseur d'énergie-impulsion

Par ailleurs, on aura la conservation du tenseur d'énergie-impulsion

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha} = 0 \quad (3.29)$$

Un calcul explicite de la composante  $\nu = 0$  donne

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu 0} &= \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T^{\alpha 0} + \Gamma_{\mu\alpha}^0 T^{\mu\alpha} = \partial_0 T^{00} + \Gamma_{\mu 0}^\mu T^{\mu 0} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} \\ &= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \dot{a}a\delta_{ij}p\frac{1}{a^2}\delta ij = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p), \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (3.30)$$

ce qui peut être mis sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho a^3] + p \frac{\partial}{\partial t} a^3 = 0, \quad (3.31)$$

c'est à dire

$$dE + pdV = 0. \quad (3.32)$$

Ceci n'est rien d'autre que la première loi de thermodynamique. **Forme équivalente des équations de Friedmann** Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_\lambda &:= \frac{\lambda}{8\pi G}, & \rho_{tot} &:= \rho + \rho_\lambda, \\ p_\lambda &:= -\frac{\lambda}{8\pi G}, & p_{tot} &:= p + p_\lambda \end{aligned}$$

Ce sont la densité et la pression associées à la constante cosmologique ainsi que la densité et pression totale provenant de la matière et de la constante cosmologique. Avec ces notations, les équations de Friedmann peuvent être réécrites de la manière

suivante :

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{tot}, \quad (3.33)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p_{tot}. \quad (3.34)$$

On peut éliminer  $k$  en prenant la différence de ces deux équations

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{tot} + 3p_{tot}) \quad (3.35)$$

En tout on dérivé quatre équations : deux équations de Friedmann, une équation provenant de la conservation de l'énergie-impulsion et l'équation qu'on vient d'obtenir. Parmi ces équations, il n'y a que deux qui sont linéairement indépendantes. Selon la nature du problème il peut être plus utile de travailler avec une équation plutôt qu'avec une autre.

### Paramètre de décélération

On définit le paramètre de décélération  $q$  par

$$q(t) := -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (3.36)$$

qu'on peut exprimer en fonction des paramètres de densité observables :

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_{tot} + 3p_{tot}}{\frac{8\pi G}{3} \rho_{tot} - \frac{k}{a^2}}. \quad (3.37)$$

Dans le cas d'un Univers plat  $k = 0$ , on obtient

$$\Rightarrow q(t) = \frac{\rho_{tot} + 3p_{tot}}{2\rho_{tot}} \quad (3.38)$$

En explicitant les différentes contributions à l'énergie et à la pression

$$\rho_{tot} = \rho_{mat} + \rho_{rad} + \rho_{\lambda}, \quad p_{tot} = p_{rad} + p_{\lambda}, \quad (3.39)$$

on peut écrire

$$q(t) = \frac{\Omega_{mat}}{2} + \frac{1 + 3w_{\lambda}}{2} \Omega_{\lambda}, \quad (3.40)$$

où on a introduit  $w_{\lambda} = \frac{p_{\lambda}}{\rho_{\lambda}}$  et les fractions critiques  $\Omega$ . Le premier terme du membre



de droite est toujours positif, mais le second peut être négatif si  $1 + 3w_\lambda < 0$ . Donc si  $w_\lambda < -1/3$  et si le deuxième terme est assez grand, le paramètre de décélération peut prendre une valeur négative. Il décrit alors un Univers en expansion accélérée, et on l'appelle alors parfois paramètre d'accélération. Les observations de Supernovae de type Ia sont en faveur d'un  $w_\lambda < -\frac{1}{3}$  et notre Univers se trouve actuellement en expansion accélérée.

### 3.4 Différentes solutions des équations de Friedmann

#### Univers statique sans constante cosmologique $\dot{a} = 0, \lambda = 0$

Dans ce cas les équations de Friedmann se réduisent à

$$\begin{aligned}\frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ \frac{k}{a^2} &= -8\pi Gp.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Comme l'Univers n'est pas vide, on a  $\rho > 0$ , et la première équation impliquerait alors que  $k > 0$ . Mais pour  $k = 1$ , la deuxième équation impliquerait que la pression serait négative  $p < 0$ , ce qui n'a pas de sens. On doit donc conclure qu'il n'existe pas de solution consistante pour un Univers statique sans constante cosmologique.

Historiquement, Einstein avait déjà réalisé ce problème. Comme il croyait en l'existence d'un Univers statique il décida en 1917 de rajouter une constante cosmologique non-nulle aux équations. En 1929, quand Hubble mettait en évidence l'expansion de l'Univers, Einstein revenait sur l'introduction de la constante cosmologique, la qualifiant de "plus grande bêtise de sa vie". Des observations récentes suggèrent qu'il existe néanmoins une constante cosmologique non-nulle, mais très petite. A l'heure actuelle on ne sait pas expliquer pourquoi elle est si faible ; c'est le problème de la constante cosmologique.

#### Univers statique avec constante cosmologique : $\dot{a} = 0, \lambda \neq 0$

Les équations de Friedmann s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ \frac{k}{a^2} - \lambda &= -8\pi Gp.\end{aligned}$$

Si les vitesses des étoiles sont faibles, on peut supposer que  $p \simeq 0$ . La deuxième équation implique alors

$$\frac{k}{a^2} = \lambda, \quad (3.42)$$

ce qui, injecté dans la première équation, nous donne

$$\lambda = 4\pi G\rho \quad (3.43)$$

Comme  $\rho > 0$  on doit aussi avoir  $\lambda > 0$  et donc  $k > 0$ . Pour  $k = 1$  on trouve pour  $a$  :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho}} \quad (3.44)$$

Cette relation entre la densité  $\rho$  et la taille de l'Univers fût déjà dérivée par Einstein en 1917. Ce modèle statique d'Einstein a malheureusement un problème conceptuel : si on suppose  $\rho = 0$ , alors comme  $\lambda \neq 0$ , l'espace vide lui-même engendrerai une force de gravitation.

**Univers vide statique :**  $\dot{a} = 0, \rho = p = 0$

Les équations de Friedmann se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} &= 0, \\ \frac{k}{a^2} - \lambda &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.45)$$

On est alors confronté au paradoxe suivant : si  $\lambda = 0$ , alors  $k = 0$  et un Univers plat est donc solution. Mais on sait que dans ce cas il n'existe pas de solution statique. Pour avoir une solution statique il faut choisir  $\lambda \neq 0$ , donc  $k \neq 0$  mais alors l'espace plat n'est plus une solution. Ce paradoxe fût résolu en 1922 quand Alexander Friedmann proposait un modèle dans lequel l'Univers n'est plus statique.

**Univers non-statique :**  $\dot{a} \neq 0$

Considérons, pour simplifier, un Univers plat sans constante cosmologique :  $\lambda = k = 0$ . Les équations de Friedmann sont alors

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= -8\pi Gp \simeq 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Multiplions la deuxième équation par  $\frac{a}{\dot{a}}$

$$\begin{aligned} \implies 2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} + \frac{\dot{a}}{a} &= 0 \implies \frac{d}{dt}(2\ln \dot{a} + \ln a) = 0 \\ \implies \ln(\dot{a}^2 a) &= \text{const} \implies \dot{a}^2 a = \text{const} \\ \implies \sqrt{a} da &= \text{const} \cdot dt \implies a^{3/2} = \text{const} \cdot t. \end{aligned} \quad (3.47)$$

D'où

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (3.48)$$

On voit que  $a$  augmente en fonction du temps- l'Univers est en expansion. On peut ensuite injecter cette solution dans la première équation de Friedmann :

$$\begin{aligned} \implies \left( \frac{2}{3} \frac{1}{t} \right) &= \frac{8\pi G}{3} \rho, \\ \implies \rho &= \frac{4}{9} \frac{3}{8\pi G} \frac{1}{t^2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

D'où

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}. \quad (3.50)$$

En particulier, connaissant la densité  $\rho$ , on peut déterminer l'âge de l'Univers. Constatons aussi que pour  $t \rightarrow 0$ , la densité diverge  $\rho \rightarrow \infty$  (Big Bang).

### 3.5 Equations de Friedmann en mécanique Newtonienne

Il s'avère que l'on peut dériver l'essentiel des équations de Friedmann déjà en mécanique Newtonienne et sans avoir recours à la relativité générale. Considérons le cas suivant  $k = 0$ , espace plat,  $\lambda = 0$ , le vide ne produit pas de force gravitationnelle,  $p = 0$ , mouvement non-relativiste ( $p \ll \rho$ ). Considérons une sphère de rayon variable  $a(t)$  remplie d'un gaz de particules sans interaction distribuées de façon homogène et isotrope. D'une part on peut écrire la conservation de l'énergie totale à l'intérieur de cette sphère :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \rho \right) = 0 \quad (3.51)$$

En développant on retrouve une des équations de Friedmann :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0. \quad (3.52)$$

D'autre part on peut écrire la loi de Newton pour une particule de gaz de masse  $m$  située sur la sphère :

$$m\ddot{a} = -G \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \cdot m \cdot \frac{1}{a^2} \quad (3.53)$$

Ce qui implique

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho \quad (3.54)$$

On a retrouvé l'autre équation de Friedmann dans le cas particulier  $p_{tot} = 0$  et  $\rho_{tot} = \rho$ . Pour trouver le terme  $+3p_{tot}$  dans cette équation il faut utiliser la relativité générale.

### 3.6 Propagation de la lumière dans l'Univers- Décalage vers le rouge

On aimerait étudier la propagation de la lumière dans un Univers décrit par les équations de Friedmann. Le moyen direct serait d'étudier les équations de Maxwell dans l'espace courbe de Robertson-Walker. Mais il y a en fait un moyen plus facile qui est de faire usage d'un système de coordonnées particulier, appelle coordonnées conformes. On réécrit la métrique de Robertson-Walker comme suit

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 + a^2(t)dl^2 \\ &= a^2(t) \left[ \frac{dt^2}{a^2(t)} + dl^2 \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

On introduit le temps conforme  $\eta$  définit par

$$d\eta := \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.56)$$

donc

$$\eta - \eta_0 = \int_0^t dt' \frac{1}{a(t')} \quad (3.57)$$

La métrique s'écrit alors

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 + dl^2] \equiv a^2(\eta) \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.58)$$

La métrique  $\bar{g}_{\mu\nu}$  ainsi définie est indépendante du temps. On peut maintenant étudier les équations de Maxwell dans ce système de coordonnées. Nous allons partir de l'action

de l'électromagnétisme dans un espace courbe

$$S_{EM} = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[ -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} \right]. \quad (3.59)$$

Pour le système de coordonnées de temps conforme on a

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{[a^2(\eta)]^4} \sqrt{|\bar{g}|} = a^4(\eta) \sqrt{|\bar{g}|}, \quad (3.60)$$

et

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2(\eta)} \bar{g}^{\mu\nu} \quad (3.61)$$

D'où

$$S_{EM} = \frac{1}{4} \int d^4x a^4(\eta) \sqrt{|\bar{g}|} \cdot \frac{1}{a^2(\eta)} \bar{g}^{\mu\nu} \cdot \frac{1}{a^2(\eta)} \bar{g}^{\rho\sigma} \cdot F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}, \quad (3.62)$$

ou encore

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{|\bar{g}|} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} \quad (3.63)$$

Comme  $\bar{g}_{\mu\nu}$  est statique, cette action ne dépend pas explicitement du temps. De plus, si on considère des "petites" distances ( $\bar{r} \ll 1$ ), on peut supposer que l'espace est pratiquement plat ( $k = 0$ ) et utiliser pour  $\bar{g}_{\mu\nu}$  la métrique de Minkowski :

$$ds^2 \simeq a^2(\eta) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.64)$$

Dans ce cas, les solutions des équations de Maxwell sont simplement des ondes planes

$$A_\mu \propto e^{i\omega\eta + ik\bar{x}}, \quad (3.65)$$

où  $\omega, k = \text{const}$  et  $\bar{x}, \eta, \omega, k$  sont sans dimension.

Ayant trouvé la solution des équations de Maxwell, on doit encore l'interpréter physiquement. Rappelons qu'on a utilisé les coordonnées suivantes

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\bar{x}^2] \quad (3.66)$$

Un observateur de cette onde électromagnétique utilisera simplement la métrique

de Minkowski

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \quad (3.67)$$

On obtient ainsi la relation

$$a^2(\eta) d\bar{x}^2 = dx^2. \quad (3.68)$$

Ainsi l'observateur va en fait observer une onde plane donnée par

$$A_\mu \propto e^{i\omega\eta + ik\frac{x}{a(\eta)}} \quad (3.69)$$

Cet observateur va donc mesurer comme longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi a(t)}{k} \quad (3.70)$$

On conclut que  $\lambda \propto a(t)$ . Dans un Univers en expansion, le facteur d'échelle  $a(t)$  croît, et donc aussi la longueur d'onde de la lumière observée. On peut illustrer cette augmentation de la longueur d'onde en s'imaginant de dessiner une onde sur un ballon et de le gonfler ; la longueur va augmenter avec le rayon du ballon. Considérons

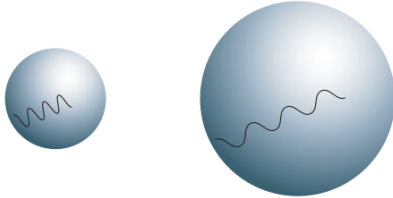


FIGURE 3.2 – Augmentation de la longueur d'onde à cause de l'expansion de l'Univers

une source lumineuse (e.g. étoile) émettant de la lumière de longueur d'onde  $\lambda_0$  à une distance  $l$  de la terre. Calculons la longueur d'onde  $\lambda$  qu'on observerait sur la terre. Soit  $t$  le temps de réception du signal sur terre et soit  $t_0 \simeq t - \frac{l}{c}$  le temps d'émission du signal lumineux (cette relation n'est qu'approximative car l'Univers est en expansion). Comme  $\lambda \propto a$  on a

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} \Rightarrow \lambda(t) = \lambda_0 \frac{a(t)}{a(t - \frac{l}{c})} \quad (3.71)$$

Comme  $\frac{l}{c}$  est petit, on peut développer en série

$$\lambda(t) \simeq \lambda_0 \frac{a(t)}{a(t_0) \left(t - \frac{l}{c}\right)} \simeq \lambda_0 \left(1 + \frac{\dot{a} l}{a c}\right) \quad (3.72)$$

On appelle décalage vers le rouge ("redshift"), noté  $z$ , le rapport

$$z := \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (3.73)$$

D'où finalement (avec  $c = 1$ )

$$z = \frac{\dot{a}}{a} l = Hl, \quad (3.74)$$

où  $H := \frac{\dot{a}}{a}$  est appelé constante de Hubble, même si elle n'est pas vraiment une *constante* vu qu'elle dépend du temps. On note par  $H_0$  la constante de Hubble à notre époque, donc  $H_0 = H(t_0)$ . La relation entre le décalage vers le rouge et la constante de Hubble est communément appelée la loi de Hubble. Elle montre que, dans un Univers en expansion, les longueurs d'ondes sont déplacées vers le rouge. En 1929, Edwin Hubble a observé en premier cette relation linéaire entre la distance  $l$  et le décalage vers le rouge  $z$ . C'était une première indication expérimentale pour l'expansion de l'Univers. Ci- après se trouvent deux diagrammes de Hubble. Ils montrent la vitesse de la source en fonction de sa distance. Surtout le diagramme récent de 2005 met bien en évidence une dépendance linéaire. Actuellement, les mesures du paramètre de Hubble donnent :

$$H_0 = 71 \pm \frac{km/s}{Mpc} \quad (3.75)$$

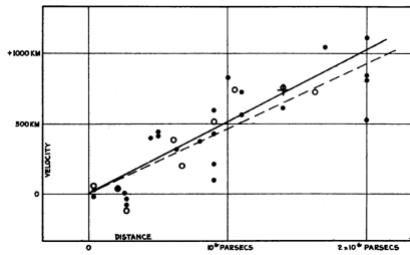


FIGURE 3.3 – Diagramme publié par Edwin Hubble dans son article de 1929 [?]

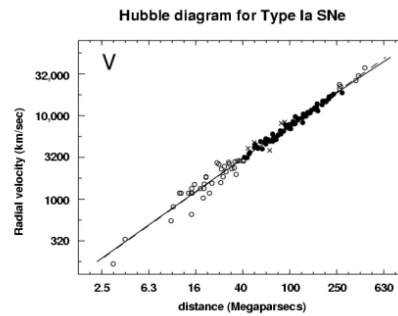


FIGURE 3.4 – Diagramme de Hubble (pour les supernovae) de 2005 [?]

On peut constater dans le diagramme de Hubble de 1929 que l'unité pour la vitesse

est fausse (km au lieu km/s). En plus, la valeur pour la constante  $H_0$  déterminée par Hubble lui-même était fausse d'un facteur  $\sim 10$ .

Expérimentalement il est relativement aisé de mesurer le décalage vers le rouge des étoiles. Pour cela il suffit de mesurer le déplacement des lignes spectrales dans le spectre de la lumière reçue. La mesure des distances par contre est plus délicates. L'idée est de déduire la distance de l'objet à partir de la luminosité. Mais pour cela il faut faire usage de ce qu'on appelle des chandelles standards, qui est un d'objet astrophysique à luminosité connue. Il est alors facile de relier la luminosité de ces chandelles standards et la luminosité observée sur terre à leur distance.

Il existe une interprétation équivalente de la loi de Hubble à l'aide de l'effet Doppler. On considère que l'observateur est au repos, mais que la source s'éloigne de lui à une vitesse  $v$ . Alors, par effet Doppler, la longueur d'onde observée sera différente de celle émise plus particulièrement on aura :

$$z = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1 \stackrel{v \ll c}{\simeq} v = \dot{l} = \frac{\dot{a}}{a} l, \quad (3.76)$$

c'est à dire

$$\dot{\vec{l}} = H \vec{l}. \quad (3.77)$$

Cette relation motive aussi le choix d'unités pour la constante de Hubble :

$$[H] = \frac{[\dot{l}]}{[l]} = \frac{km/s}{Mpc} \quad (3.78)$$

On a vu que l'homogénéité et l'isotropie de l'Univers impliquent la loi de Hubble. Étudions si la réciproque est vraie aussi. Il est clair que la loi de Hubble implique que l'Univers est isotrope, vu que  $H$  ne dépend pas de la direction d'observation. Il s'avère que la loi de Hubble implique aussi que l'Univers est homogène. En effet, on a  
mais aussi pour la vitesse du point  $B$  par rapport au point  $A$

$$\begin{aligned} v_{B)A} &= H \vec{r}_{AB}, \\ v_{B)A} &= \vec{v}_B - \vec{v}_A = H (\vec{r}_B - \vec{r}_A). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Les deux dernières étant égales, on conclut qu'il y a homogénéité.



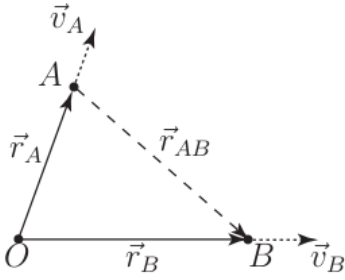


FIGURE 3.5 –

### 3.7 Horizons

L'Univers ayant un âge fini, la lumière dans l'univers n'a pu parcourir qu'une distance finie. Il s'en suit que très probablement nous ne pouvons observer qu'une partie de notre Univers. De plus, si l'expansion de l'Univers est trop grande, cette partie visible dévient de plus en plus petite, vu que la lumière des régions les plus lointaines ne peut plus nous atteindre. Pour discuter ces phénomènes nous allons maintenant introduire la notion d'horizon.

#### Horizon d'évènement

Le premier horizon que nous introduisons est l'horizon d'évènement ("event horizon"). Il correspond au rayon de la région de l'Univers dans le passé qui peut nous influencer causalement. Tout évènement en dehors de cet horizon ne peut pas nous influencer vu que seuls les signaux dans notre horizon d'évènement peuvent nous atteindre.

Nous voulons calculer la distance qu'un photon peut parcourir s'il est émis à l'instant  $t$ . Supposons que le mouvement du photon se situe dans un plan et posons en conséquence dans la métrique de Robertson-Walker  $ds^2 = 0, d\theta = d\phi = 0$ , ce qui donne

$$\frac{dt}{a} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (3.80)$$

La distance en coordonnées comobiles est alors donnée par

$$D_e(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.81)$$

Pour passer à une distance physique il suffit de multiplier la distance exprimée en

coordonnées comobiles par le facteur d'échelle :

$$d_e(t) = a(t) \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.82)$$

Remarquons encore que toutes ces formules n'ont de sens que si les intégrales convergent. Si tel n'est pas le cas, on dit que l'horizon en question n'existe pas.

### Horizon de particule

Le second horizon est appelé horizon de particule ("particle horizon"). Il s'agit de connaître l'étendue de la région à laquelle nous sommes causalement reliés à l'instant  $t_0$ . En coordonnées comobiles nous aurons

$$D_p(t_0) = \int_{t_{min}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.83)$$

et donc la distance physique est

$$d_p(t_0) = a(t_0) \int_{t_{min}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.84)$$

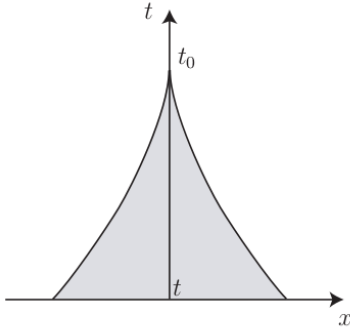


FIGURE 3.6 – Horizon d'événement

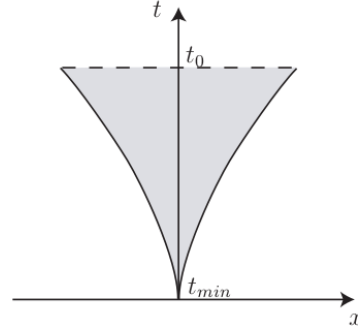


FIGURE 3.7 – Horizon de particule

## 3.8 Densité critique de l'Univers

Jusqu'à présent notre étude s'est limitée au cas particulier  $\lambda = 0, p = 0, k = 0$ . Afin de pouvoir faire une étude plus générale, commençons par réécrire une des équations

de Friedmann :

$$\begin{aligned} H^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \rho_{tot} \\ \Rightarrow \frac{k}{H^2 a^2} &= \frac{8\pi G \rho_{tot}}{3H^2} - 1 \equiv \frac{\rho_{tot} - \rho_c}{\rho_c} \end{aligned} \quad (3.85)$$

où on a introduit la densité critique définie par

$$\rho_c := \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.86)$$

La densité critique peut être déduite de la constante de Hubble :

$$\rho_c \approx 1,88 \cdot h^2 \cdot 10^{-29} \frac{g}{cm^3}, \quad (3.87)$$

où on a écrit la constante de Hubble de la manière suivante

$$H = 100 \cdot h \cdot \frac{km/s}{Mpc} \quad (3.88)$$

De plus, l'équation de Friedmann implique

$$sign(k) = sign(\rho_{tot} - \rho_c), \quad (3.89)$$

ainsi

$$\begin{aligned} \rho_{tot} > \rho_c &\Rightarrow k = 1 && \text{Univers fermé,} \\ \rho_{tot} = \rho_c &\Rightarrow k = 0 && \text{Univers plat,} \\ \rho_{tot} < \rho_c &\Rightarrow k = -1 && \text{Univers ouvert} \end{aligned} \quad (3.90)$$

La densité critique n'est pas forcément constante et peut dépendre du temps. Mais d'après 3.89 le signe de  $\rho_{tot} - \rho_c$  est indépendant du temps. Les observations récentes suggèrent que

$$\rho_{tot} \simeq \rho_c \pm (2 - 3)\% \quad (3.91)$$

notre Univers est donc extrêmement proche d'un Univers plat.

Il est utile d'introduire encore une autre notation ; les abondances  $\Omega$ , aussi appelées

les fractions critiques :

$$\Omega_{mat} := \frac{\rho_{mat}}{\rho_c}, \quad \Omega_\lambda := \frac{\rho_\lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_k := -\frac{k^2}{a_0^2 H_0^2} \quad (3.92)$$

Dans ces notations, l'équation de Friedmann prend une forme particulièrement simple

$$\Omega_{mat} + \Omega_\lambda + \Omega_k = 1. \quad (3.93)$$

### 3.9 Le futur de l'Univers

On a vu que notre Univers se trouve dans un état d'expansion. Mais que peut-on dire sur le futur de l'Univers? Considérons la situation  $\lambda = 0, p = 0$ . La valeur de  $k$  n'étant pas fixée, prenons la forme des équations de Friedmann qui est indépendante de  $k$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho, \quad (3.94)$$

et multiplions par  $a\dot{a}$

$$\dot{a}\ddot{a} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{a}^2) = -\frac{4\pi G}{3}\rho a\dot{a} \quad (3.95)$$

On aimerait réécrire  $\rho a\dot{a}$  comme dérivée totale par rapport au temps. Pour cela, constatons déjà qu'on a trivialement

$$\frac{d}{dt}(\rho a^2) = -3\rho a\dot{a} + 2\rho a\dot{a} = -\rho a\dot{a} \quad (3.96)$$

On peut à présent réécrire l'équation 3.95 comme dérivée totale et l'intégrer par rapport au temps :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{a}^2) = \frac{4\pi G}{3} \frac{d}{dt}(\rho a^2) \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 &= \text{const} \stackrel{t=t_0}{=} \frac{1}{2} \dot{a}_0^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho_0 a_0^2 \end{aligned} \quad (3.98)$$

De plus

$$\begin{aligned}\rho a^3 = \text{const} &= \rho_0 a_0^3 \implies \rho a^2 = \frac{\rho_0 a_0^3}{a} \\ H_0 &= \frac{\dot{a}_0}{a_0} \implies \dot{a}_0^2 H_0^2 a_0^2,\end{aligned}\tag{3.99}$$

ce qui, injecté dans l'équation d'avant donne

$$\begin{aligned}\implies \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a} + H_0^2 a_0^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho_0 a_0^2 \\ \implies \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a} - \frac{4\pi G}{3} a_0^2 (\rho_0 - \rho_{c,0})\end{aligned}\tag{3.100}$$

L'équation à résoudre est donc

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a} = -\frac{4\pi G}{3} a_0^2 (\rho_0 - \rho_{c,0}) = \text{const},\tag{3.101}$$

qui est clairement de la forme  $E_{\text{ein}} + U = E_{\text{tot}} \text{const}$ . La solution exacte de cette équation est donnée par :

$$t = \pm \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a} - \frac{4\pi G}{3} a_0^2 (\rho_0 - \rho_{c,0})}}.\tag{3.102}$$

Essayons de comprendre qualitativement les solutions en utilisant l'analogie avec la mécanique classique.

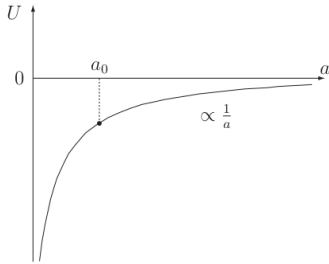


FIGURE 3.8 – Le potentiel en fonction de  $a$ .

Il faut distinguer les cas suivants :

i)  $\rho_0 = \rho_{c,0}$ , i.e.  $E_{\text{tot}} = 0$  :

Dans ce cas la solution est simple et on l'a déjà trouvé avant :  $a \sim t^{2/3}$ ,  
 $\implies$  expansion infinie.

ii)  $\rho_0 > \rho_{c,0}$ , i.e.  $E_{tot} < 0$  :

$$a_{\max} = \frac{2a_0\rho_0}{\rho_0 - \rho_{c,0}}$$

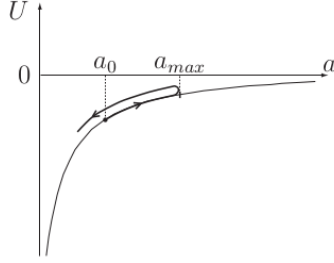


FIGURE 3.9 –

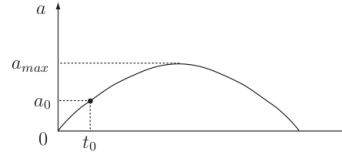


FIGURE 3.10 –

$\Rightarrow$  collapse de l'Univers.

iii)  $\rho_0 < \rho_{c,0}$  i.e.  $E_{tot} > 0$  :

$\Rightarrow$  expansion infinie.

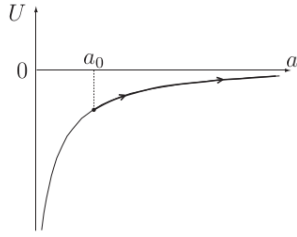


FIGURE 3.11 –

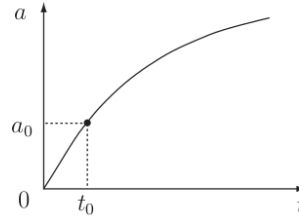


FIGURE 3.12 –

En conclusion, le futur de l'Univers dépend de son contenu. S'il y a beaucoup de matière, l'Univers va s'effondrer ("Big Crunch"), autrement il y aura une expansion infinie. Les observations astronomiques actuelles favorisent une expansion infinie de l'Univers.

# L'ACCÉLÉRATION DE L'UNIVERS ET MODÈLES DE GRAVITÉ

---

Ce chapitre est consacré à l'accélération de l'Univers, et aux modèles physiques qui permettent de l'expliquer. Après avoir rappelé les éléments de la cosmologie dont nous aurons besoin par la suite, nous détaillerons les principales observations qui démontrent que l'Univers est actuellement dans une phase d'expansion accélérée. Nous présenterons ensuite un panorama des modèles ayant pour objectif d'expliquer cette accélération. Nous verrons que certains modèles se basent sur la Relativité Générale et la présence d'énergie noire, tandis que d'autres proposent un changement plus radical de paradigme, en modifiant les lois de la gravité.

## 4.1 Le modèle cosmologique standard

### 4.1.1 Métrique de FLRW

Le modèle cosmologique standard se base sur le fait que l'Univers autour de nous apparaît comme étant isotrope à grandes échelles, tant au niveau de la répartition des galaxies que du fond diffus cosmologique. Si l'on suppose de plus que notre Terre n'occupe pas de place privilégiée dans l'Univers, on en arrive au principe cosmologique qui fait l'hypothèse que l'Univers est spatialement homogène et isotrope à grandes échelles. La modélisation mathématique de cette hypothèse nous amène à décrire l'espace-temps par une métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)  $g_{\mu\nu}$  dont la forme générale [1, 2, 3] s'écrit

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (4.1)$$

où  $\chi$  est la coordonnée radiale. La constante  $K$  décrit la géométrie de la section spatiale de l'espace-temps : l'espace est fermé pour  $K > 0$ , plat pour  $K = 0$  et enfin ouvert pour  $K < 0$ . La fonction  $f_K$ , qui est telle que la surface d'une sphère de rayon  $\chi$  est donnée par  $S(\chi) = 4\pi f_K^2(\chi)$ , prend la forme

$$f_K(\chi) = \begin{cases} K^{-\frac{1}{2}} \sin(\sqrt{K}\chi) & \text{si } K > 0 \\ \chi & \text{si } K = 0 \\ (-K)^{-\frac{1}{2}} \sinh(\sqrt{-K}\chi) & \text{si } K < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

La fonction  $a(t)$  s'appelle le facteur d'échelle et caractérise l'évolution de l'Univers. On normalise  $a(t)$  de telle sorte qu'aujourd'hui  $a \equiv a_0 = 1$  (nous noterons avec un indice 0 la valeur des quantités cosmologiques évaluées aujourd'hui). Sa dépendance dans le temps est déterminée en résolvant les équations de la dynamique.

#### 4.1.2 Relativité Générale et équations de Friedmann

Pour aller plus loin, il nous faut choisir une théorie de la gravitation à partir de laquelle nous pourrions dériver les équations de la dynamique pour le facteur d'échelle. La cosmologie standard est basée sur la Relativité Générale (RG) ; cependant, dans cette thèse, nous travaillerons également avec d'autres théories alternatives de la gravité. D'une théorie à l'autre, les équations de la dynamique varient, modifiant ainsi la cosmologie et l'interprétation que l'on peut faire des observations. C'est précisément là tout l'intérêt des théories de gravité modifiée, qui peuvent permettre de rendre compte des observations d'une façon différente de la RG. Pour l'instant, nous voudrions présenter le modèle cosmologique standard, qui fait l'hypothèse que la gravité est décrite par la RG.

L'action de la RG s'écrit

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R[g] + S_{\text{matière}}[g], \quad (4.3)$$

où  $R[g]$  est le scalaire de Ricci et  $M_P$  est la masse de Planck qui est reliée à la constante de Newton  $G$  à travers la relation  $M_P^{-2} = 8\pi G$ . La matière est supposée minimalement couplée à la métrique.

La variation de l'action de la RG par rapport à la métrique mène aux équations d'Einstein



$$G_{\mu}^{\nu} = 8\pi G T_{\mu}^{\nu}, \quad (4.4)$$

où  $G_{\mu}^{\nu} \equiv R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R$  est le tenseur d'Einstein et  $T_{\mu}^{\nu}$  le tenseur énergie-impulsion de la matière

$$T_{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)}S_{\text{matière}}[g]. \quad (4.5)$$

Les identités de Bianchi garantissent que la matière est conservée, c'est-à-dire que

$$\Delta_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = 0. \quad (4.6)$$

L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie, ainsi que la forme (4.1) de la métrique, impose au tenseur énergie-impulsion de la matière d'être celui d'un fluide parfait

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(-\rho, P, P, P), \quad (4.7)$$

où  $\rho$  est la densité de la matière, et  $P$  sa pression. Il est ensuite aisé d'obtenir, à partir de l'expression (4.1) de la métrique de *FLRW* et des équations d'Einstein (4.4), les deux équations indépendantes dites de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \quad (4.9)$$

où  $H \equiv \dot{a}/a$  est le paramètre de Hubble et un point représente une dérivée par rapport au temps cosmique  $t$ . L'équation de conservation de la matière prend quant à elle la forme

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (4.10)$$

Il est usuel de réécrire l'équation (4.8) sous la forme réduite

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_K = 1 \quad (4.11)$$

où l'indice  $i$  correspond aux différents types de matière (radiation, matière noire, éner-

gie noire, etc.) et où l'on a défini

$$\Omega_i \equiv \frac{8\pi G\rho_i}{3H^2}, \quad (4.12)$$

$$\Omega_K \equiv -\frac{K}{a^2 H^2} \quad (4.13)$$

Les observations [18] montrent que la courbure spatiale est très proche de zéro, conformément aux prédictions génériques des modèles d'inflation (cf. par exemple [1]; nous considérerons donc par la suite dans ce mémoire que l'Univers est plat et fixerons par conséquent  $K = 0$ .

### 4.1.3 Equation d'état de la matière et évolution de l'Univers

La description la plus simple de la matière consiste à supposer que la densité et la pression de la matière suivent une équation d'état de la forme

$$P = \omega\rho \quad (4.14)$$

où  $\omega$  est supposé constant. La matière sans pression (matière noire froide) est décrite par  $\omega = 0$  tandis que le rayonnement a une équation d'état  $\omega = 1/3$ . Dans le cas d'une constante cosmologique,  $\omega = -1$ .

Une fois muni de l'équation d'état (4.14), il est aisé d'intégrer les équations de Friedmann (4.8) et (4.9) et l'équation de conservation de la matière (4.10); pour  $\omega \neq -1$ , on obtient

$$H = \frac{2}{3(1+\omega)(t-\bar{t})} \quad (4.15)$$

$$a(t) \propto (t-\bar{t})^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (4.16)$$

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (4.17)$$

où  $\bar{t}$  correspond au début de l'ère considérée. Pour  $\omega = -1$ , l'Univers est en accélération et correspond à un espace de de Sitter tel que

$$H = cste \quad (4.18)$$

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (4.19)$$

$$\rho = cste. \quad (4.20)$$

En utilisant la dépendance de  $\rho$  en  $a$ , on peut exprimer  $H$  en fonction du contenu en

matière de l'Univers, grâce à l'expression

$$H^2 = H_0^2 \left( \sum_i \Omega_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)} \right) = H_0^2 \left( \sum_i \Omega_{i,0} (1+z)^{3(1+\omega_i)} \right), \quad (4.21)$$

où l'on a introduit le redshift  $z \equiv a^{-1} - 1$ . En intégrant cette équation, on peut obtenir l'évolution du facteur d'échelle  $a(t)$ .

### Des origines à nos jours

Selon le modèle cosmologique standard, l'histoire de l'Univers peut se décomposer en une succession d'étapes (encore appelées ères), que nous résumons ci-dessous.

La nature de la première phase de l'évolution de l'Univers, entre l'origine de l'Univers et le Big Bang chaud, n'est pas encore bien établie, car il est très difficile de tester les modèles cosmologiques à des époques aussi reculées. Le modèle de l'inflation est cependant devenu le paradigme standard. Il s'agit d'une phase d'expansion accélérée durant laquelle  $\omega \simeq -1$ . Cette phase d'accélération permet de donner une explication naturelle au problème de la platitude (le fait que l'espace apparaisse plat à l'heure actuelle, ce qui ne peut être le cas que si l'espace était extrêmement plat aux échelles de Planck) et au problème de l'horizon (le fait que des zones du ciel causalement indépendantes aient une température comparable à  $10^{-5}$  près). On considère généralement que cette phase d'inflation est dominée par un champ scalaire (ou plusieurs champs scalaires pour les modèles multi-champs) appelé inflaton, en régime de roulement lent (cf. par exemple [1]). Les perturbations quantiques de ce champ sont la source des perturbations de la matière que l'on peut observer dans les grandes structures et le fond diffus cosmologique (CMB). À l'issue de l'inflation, l'inflaton se désintègre en un grand nombre de particules : c'est la phase de réchauffement.

La suite de l'histoire de l'Univers est bien comprise, et est décrite par le modèle du Big Bang chaud :

- la première phase qui suit le Big Bang chaud est l'ère de radiation, dominée par le rayonnement (photons et neutrinos). Cette phase dure jusqu'à l'égalité matière-rayonnement, c'est-à-dire jusqu'au moment où la densité de la matière commence à dominer la densité d'énergie du rayonnement (le redshift correspondant est  $z_{eq} + 1 \equiv a_{eq}^{-1} \simeq 3600$

- L'ère de matière est dominée par la matière noire (CDM). C'est le moment où se forment les grandes structures. C'est également durant l'ère de matière qu'a lieu le découplage entre les photons et les baryons (le redshift correspondant est  $z_{dec} + 1 \equiv a_{dec}^{-1} \simeq 1100$ ). Cela est dû à la recombinaison des protons et des électrons libres qui

s'assemblent pour former des atomes neutres. Après le découplage, les photons peuvent se propager librement dans l'Univers ; l'observation du CMB correspond à l'observation de ces photons émis au moment du découplage.

- Les observations récentes du CMB, des supernovae et des oscillations baryons-photons (BAO) indiquent que l'Univers est entré tardivement (aux alentours de [5]  $z_c \simeq 0,67$  pour  $\Omega_m = 0,3$ ) dans une nouvelle phase d'expansion accélérée, telle que  $\omega \simeq -1$ .

Cette dernière observation, à savoir que l'Univers est actuellement dans une phase d'expansion accélérée, constitue la motivation première des théories de gravité modifiée que nous étudierons dans ce mémoire de thèse. Nous voudrions consacrer la prochaine section à la modélisation de la source d'énergie responsable de cette accélération et que l'on appelle communément énergie noire, ainsi qu'aux preuves expérimentales de son existence.

## 4.2 Modélisation et preuves expérimentales de l'existence de l'énergie noire

### 4.2.1 Modélisation de l'énergie noire

La source de l'accélération de l'Univers observée aujourd'hui est mal connue ; c'est pourquoi on lui donne souvent le nom d'énergie noire, traduisant ainsi le caractère effectif de cette description. On peut modéliser cette énergie noire par le tenseur énergie impulsion d'un fluide parfait

$$T_{\mu}^{de\nu} = \text{diag}(-\rho_{de}, P_{de}, P_{de}, P_{de}), \quad (4.22)$$

la forme ci-dessus étant imposée par l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers qui est à la base de notre étude. On peut définir l'équation d'état

$$\omega_{de} \equiv P_{de}/\rho_{de} \quad (4.23)$$

qui doit être telle que

$$\omega_{de} < -1/3 \quad (4.24)$$

pour que la phase dominée par l'énergie noire soit une phase d'accélération. La densité

réduite d'énergie noire est mesurée par

$$\Omega_{de} \equiv \frac{8\pi G \rho_{de}}{3H^2} \quad (4.25)$$

Les fonctions  $\Omega_{de}(a)$  et  $\omega_{de}(a)$  sont reliées l'une à l'autre au travers de l'équation (4.17), qui dans le cas de l'énergie noire, prend la forme

$$\Omega_{de} = \Omega_{de,0} a^{-3(\omega_{de}+1)} \quad (4.26)$$

Nous verrons à la Section 4.3 différents modèles visant à décrire la nature de cette énergie noire. Il pourra s'agir d'une source de matière (champ scalaire par exemple), responsable de l'accélération. Il est également possible que les lois de la gravité ne soient pas celles de la RG, auquel cas l'interprétation de l'énergie noire comme une énergie n'est pas à prendre au sens littéral ; cependant, comme les conséquences de ces modifications de la gravité ne peuvent pas être distinguées des effets qu'auraient une source d'énergie de la forme (4.22), nous décrirons la source de l'accélération de l'Univers, telle qu'elle soit, par le tenseur énergie impulsion (4.22), et appellerons le phénomène responsable **énergie noire**.

D'un point de vue pratique, on peut décrire en première approximation l'impact de cette énergie noire par une constante cosmologique  $\Lambda$  telle que  $\rho_\Lambda = -P_\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$ . Les observations permettent d'évaluer

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \simeq 0,7. \quad (4.27)$$

Nous voudrions à présent décrire plus en détail les méthodes astrophysiques et cosmologiques qui prouvent l'existence de l'énergie noire. La plupart des valeurs numériques qui seront données correspondent au cas d'une constante cosmologique (modèle dit  $\Lambda$ CDM), qui est la paramétrisation la plus simple de l'énergie noire. Il faut bien sûr garder à l'esprit qu'une paramétrisation plus fine peut se révéler plus réaliste. Le résultat principal reste cependant le même, quelque soit le cadre dans lequel on l'interprète : une composante d'énergie noire est nécessaire pour expliquer les observations que sont les Supernovae de type Ia, l'âge apparent de l'Univers, la position des pics acoustiques du *CMB* et la signature des oscillations baryons-photons dans les grandes structures.

### 4.2.2 Supernovae de type Ia

La preuve la plus directe que notre Univers est actuellement en expansion accélérée est donnée par la mesure de la distance des luminosités des supernovae de type Ia (SN Ia). La distance luminosité d'un objet astrophysique de luminosité intrinsèque  $L_{source}$  et situé à un redshift  $z$  est définie de telle sorte que le flux observé  $\Phi_{obs}$  est donné par

$$\Phi_{obs} = \frac{L_{source}}{4\pi D_L^2} \quad (4.28)$$

On peut montrer [6] que dans un Univers (plat) en expansion,  $D_L$  est donnée par

$$D_L = \frac{1}{H_0}(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0}(1+z')^{3(1+\omega_i)}}} \quad (4.29)$$

où les  $\Omega_{i,0}$  sont les densités réduites de chaque composante de matière ( $y$  compris l'énergie noire).

Pour des objets proches ( $z \ll 1$ ), on voit que la formule ( 4.29) se résume à  $z \sim H_0 D_L$ . D'autre part, on peut montrer que le redshift est relié à la vitesse de récession des galaxies au travers de  $z \equiv a^{-1} - 1 \sim v$ ; on obtient donc que pour des petits redshifts  $v \sim H_0 D_L$ . On retrouve là la loi de Hubble qui permet de mesurer  $H_0$  à partir de l'observation de la vitesse de récession des galaxies. Pour des objets plus lointains, on voit que l'expression de la distance luminosité dépend du contenu en énergie de l'Univers, au travers de la racine carrée de l'équation ( 4.29). La mesure de la fonction  $D_L(z)$  permet donc de mesurer le rôle joué par les différentes composantes de matière  $\Omega_{i,0}$ . Cependant, pour mesurer la distance luminosité d'objets au travers de la définition ( 4.28), encore faut-il connaître leurs luminosités intrinsèques.

C'est précisément le cas des *SN Ia*, qui peuvent être observées lorsqu'une naine blanche d'un système binaire a accreté tellement de matière en provenance de son compagnon que sa masse a atteint la masse de Chandrasekhar; elle s'effondre alors et explose en supernova. La courbe de lumière des *SN Ia* est quasi-identique d'une supernova à l'autre : ce sont des chandelles standard. En 1998, deux équipes ont publié indépendamment le diagramme de Hubble  $D_L(z)$  de deux catalogues de *SN Ia* : le groupe Supernova Cosmology Project (SCP) [7] a ainsi mesuré la distance luminosité de 42 *SN Ia* de redshift  $z \in [0.18; 0.8]$ , tandis que les membres de la High-Z Supernova Search Team (HSST) [8] ont identifié 24 *SN Ia* proches et 14 *SN Ia* dans l'intervalle  $z \in [0.16; 0.62]$ . Ces observations (ainsi que d'autres mesures qui ont eu lieu depuis lors, parmi lesquelles on peut citer [9, 10, 21, 12]) ont permis d'écarter la possibilité que

l'Univers soit plat et constitué uniquement de matière ( $\Omega_m = 1$ ). Il est donc nécessaire d'inclure une composante d'énergie noire, comme on peut le voir sur la Fig.4.1 .

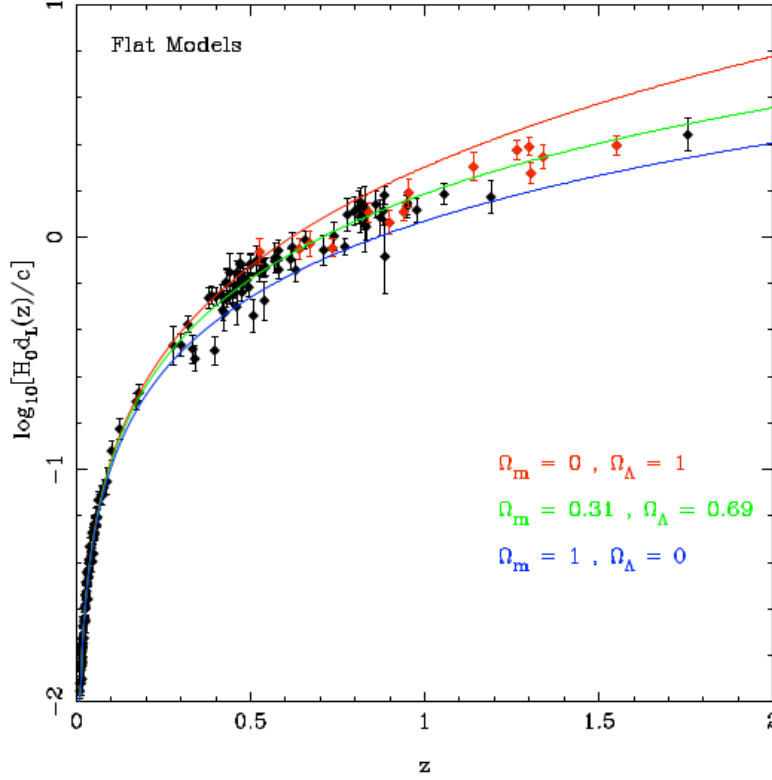


FIGURE 4.1 – Diagramme de Hubble (distance luminosité  $\log[H_0 D_L(z)]$  en fonction du red-shift  $z$ ) pour un Univers plat pour un certain nombres de SN Ia observées. Les points noirs proviennent du catalogue "Gold" de Riess et al. [12], tandis que les points rouges proviennent de mesures effectuées par le Hubble Space Telescope (*HST*). On voit très clairement que le cas  $\Omega_m = 0.31$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.69$  correspond mieux aux observations que le cas d'un univers sans constante cosmologique  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$  . La figure provient de la référence [13].

### 4.2.3 Âge de l'Univers

Au moment du Big Bang chaud (qui correspond à la fin de l'inflation dans les modèles inflationnaires) que l'on prendra par convention à  $t = 0$ , on doit avoir  $a(t = 0) \geq 0$ . On en déduit donc que le temps  $t_0$  écoulé depuis le Big Bang est borné par

$$t_0 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} dt = \int_{a(t=0)}^{a_0=1} \frac{dt}{da} da \leq \int_0^1 \frac{dt}{da} da = \int_0^1 \frac{da}{aH} \quad (4.30)$$

Si on utilise l'équation (4.21) et l'on exprime l'intégrale en fonction du redshift  $z$  on obtient

$$t_0 \leq \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0}(1+z)^{3(1+\omega_i)}}}, \quad (4.31)$$

où l'indice  $i$  correspond à la radiation, la matière noire et à l'énergie noire, que l'on modélisera par une constante cosmologique. On peut négliger dans l'intégrale ci-dessous la contribution de la radiation, car l'ère de radiation est très courte comparée aux ères suivantes. On voit donc que l'âge de l'Univers dépend des paramètres  $(\Omega_m, \Omega_{de})$ . Dans le cas d'un univers dominé par la matière tel que  $\Omega_m = 1$ , on peut calculer explicitement l'intégrale de l'équation (4.31) et obtenir la borne  $t_0 \leq 2/(3H_0)$ . En utilisant la valeur de la constante de Hubble trouvée par l'équipe du Hubble Key Project [14]  $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , on trouve que  $t_0 = 8 - 10$  milliards d'années. Cette valeur de l'âge de l'Univers doit être comparée à l'âge des plus vieux objets stellaires connus, qui est d'environ 11 – 13 milliards d'années [15, 16, 17]. **À l'évidence, le cas d'un Univers dominé uniquement par la matière est donc en contradiction avec l'âge de ces objets.** Cette difficulté peut être résolue en supposant la présence d'énergie noire. Ainsi, si l'on fait l'hypothèse que l'énergie noire prend la forme d'une constante cosmologique telle que  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$ , on trouve que  $t_0 \simeq 13.1$  milliards d'années, **ce qui n'est plus contradictoire avec l'âge des plus vieux objets connus dans l'Univers.** Ceci est donc un élément supplémentaire en faveur de la présence d'énergie noire dans l'Univers.

#### 4.2.4 Fond diffus cosmologique

Une preuve indépendante de l'existence d'énergie noire dans l'Univers peut être obtenue à partir de la position des pics acoustiques du fond diffus cosmologique (CMB). En effet, on peut montrer [1] que la position dans l'espace des multipôles du  $n$ -ième pic est donnée dans le cas de perturbations primordiales adiabatiques par

$$l_{(n)} = n\pi \frac{D_A(z_{LSS})}{r_s(z_{LSS})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

où nous avons introduit l'horizon sonique co-mobile

$$r_s(z) \equiv \int_z^\infty \frac{C_s(z')}{H(z')} dz', \quad (4.33)$$



et le diamètre angulaire co-mobile

$$D_A = \frac{1}{H_0} \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0} (1+z')^{3(1+\omega_i)}}} \quad (4.34)$$

Dans les expressions ci-dessus,  $z_{LSS} \simeq 1100$  est le redshift de la surface de dernière diffusion et  $c_s$  est la vitesse du son du fluide baryon-photon dont les oscillations avant la recombinaison sont à l'origine des pics du CMB. Le rayon sonique  $r_s(z_{LSS})$  dépend de la quantité de baryons dans l'Univers  $\Omega_b$  et est indépendant de l'énergie noire car cette dernière ne joue aucun rôle à des temps aussi anciens ; la hauteur des pics du CMB et en particulier la différence entre la hauteur des pics pairs et impairs permet de mesurer  $\Omega_b$  (et donc  $r_s(z_{LSS})$ ). On peut alors utiliser la mesure de la position des pics (4.32) pour contraindre l'énergie noire, au travers de la dépendance du diamètre angulaire  $D_A(z_{LSS})$  dans la géométrie de l'Univers.

Le spectre du CMB dépend également de l'énergie noire au travers de l'effet Sachs-Wolfe intégré (ISW), qui permet de prendre en compte le fait que les photons du CMB ont traversé sur leur chemin jusqu'à nous des puits de potentiel en évolution. L'évolution des potentiels gravitationnels dépendant du contenu en matière de l'Univers, la mesure de cet effet permet de contraindre la densité d'énergie noire, ainsi que son équation d'état  $\omega_{de}$ .

L'analyse des données prises pendant 5 ans [18] par le satellite *WMAP* a permis de mesurer  $\Omega_\Lambda = 0.742 \pm 0.030$  dans le cas d'une constante cosmologique. Dans le cas où l'équation d'état de l'énergie noire est également mesurée, l'équipe de *WMAP* a obtenu l'intervalle de confiance à 95% :  $-1.37 < 1 + \omega_{de} < 0.32$ .

#### 4.2.5 Oscillations Acoustiques des Baryons (BAO)

Les oscillations du fluide baryons-photons qui ont lieu avant la recombinaison ne sont pas seulement observables dans le spectre du CMB, mais également dans les grandes structures. En effet, considérons une sur-densité à  $t = 0$  ; sous l'effet de la pression de la radiation, cette sur-densité s'étend à la vitesse du son du plasma, sous la forme d'une onde sphérique.

Au moment de la recombinaison, les densités aux points situés à une distance  $r_s(z_{LSS})$  de la sur-densité initiale sont donc corrélées. De nos jours, cette corrélation est bien sûr brouillée, car les ondes sonores de différentes sur-densités se sont superposées depuis ; il est cependant possible de détecter statistiquement la signature de l'échelle co-mobile  $r_s(z_{LSS})$ , caractéristique des BAO, au travers de la mesure de la fonction de

corrélation des galaxies. En raison de l'expansion de l'Univers, cette échelle co-mobile (fixe depuis la recombinaison, et qui vaut environ  $r_s(z_{LSS}) \simeq 150 Mpc$ ) est vue sous un angle

$$\theta_S = \frac{r_s(z_{LSS})}{D_A(z_{LSS})} \quad (4.35)$$

où le diamètre angulaire co-mobile  $D_A(z_{LSS})$  a été défini à l'équation (4.34). La première détection de ce phénomène a eu lieu en 2005 par l'équipe du SDSS [19]; on voit sur la figure 4.2 la signature très nette du rayon sonique dans la fonction de corrélation des galaxies 8 du catalogue.

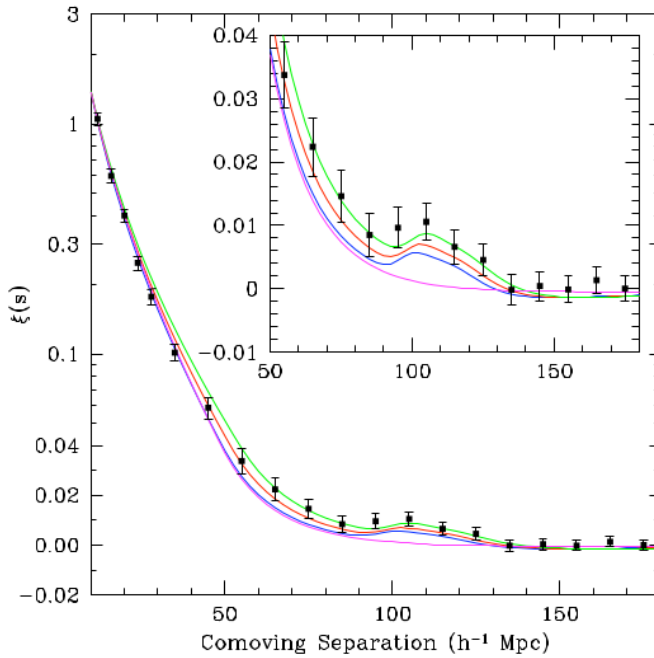


FIGURE 4.2 – Fonction de corrélation des galaxies du catalogue du SDSS. Les courbes verte (en haut), rouge et bleue (en bas, avec un pic) correspondent respectivement aux modèles  $\Omega_m h^2 = 0.12, 0.13, 0.14$ , avec  $\Omega_b h^2 = 0.024$ . La courbe du bas (sans pic) correspond à un modèle de matière noire sans baryon ( $\Omega_m h^2 = 0.105$ ). On voit très clairement la signature des BAO à  $r \simeq 105 h^{-1} Mpc \simeq 150 Mpc$ . Figure issue de l'article [19].

Il est donc possible de tester le contenu en matière de l'Univers par l'étude des BAO, et notamment la densité d'énergie noire  $\Omega_{de}$  et son équation d'état  $\omega_{de}$ . En particulier, l'observation des BAO donne des informations très précieuses lorsqu'elles sont combinées avec d'autres observations, comme on peut le voir sur la figure 4.3.

### 4.2.6 Mesures combinées

Comme nous l'avons déjà signalé ci-dessus, les méthodes évoquées (SN Ia, CMB, BAO) sont complémentaires. En premier lieu, ces mesures provenant de processus physiques très différents et indépendants, il est impressionnant qu'elles puissent mener à des mesures cohérentes : cela confirme d'une façon spectaculaire la robustesse du modèle cosmologique standard. De plus, les ellipses de contraintes associées à chacune de ces méthodes ne sont pas orientées dans la même direction, comme on peut le voir sur la figure 4.3. En combinant ces mesures, on peut donc diminuer la dégénérescence entre les différents paramètres. En procédant de la sorte, Percival et al. [20] ont mesuré, dans le cas d'un modèle  $\Lambda$ CDM,  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.288 \pm 0.018, 0.712 \pm 0.018)$ .

L'existence d'une phase d'accélération récente de l'Univers est donc bien établie. Nous savons que l'on peut modéliser la source de cette accélération par le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait, que nous avons nommé énergie noire. Nous n'avons cependant pas encore abordé la question de la nature physique de cette énergie noire. C'est ce vers quoi il nous faut à présent nous tourner.

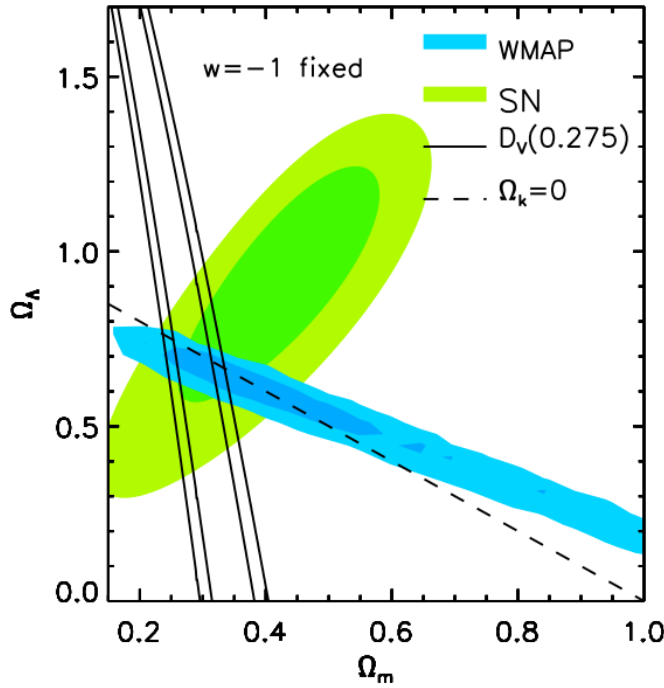


FIGURE 4.3 – Combinaison des contraintes sur les paramètres  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  du modèle  $\Lambda$ CDM issues de la mesure de la distance luminosité des SN Ia (Union supernovae [21]), du CMB (WMAP5) et des BAO (SDSS - release 7). Les ellipses des contraintes associées des trois types de mesures sont orientées d’une façon très différente : l’association des trois observations permet donc de mesurer les paramètres  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  beaucoup plus précisément qu’avec chacune des méthodes séparément. La figure provient de [20].

## 4.3 Énergie noire ou gravité modifiée ?

### 4.3.1 Le problème de la constante cosmologique

Nous avons déjà vu que le modèle le plus simple d’énergie noire est simplement une constante cosmologique  $\Lambda$  telle que  $\rho_\Lambda = -P_\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$  et  $\Omega_\Lambda \simeq 0,7$ . Le problème de ce modèle est qu’il n’explicite pas vraiment l’origine physique de cette constante. La source d’énergie qui pourrait correspondre d’une façon a priori naturelle à une constante cosmologique est l’énergie du vide. Malheureusement, les ordres de grandeur des deux phénomènes n’ont rien en commun. La constante cosmologique est telle que la densité correspondant vaut

$$\rho_\Lambda = 10^{-47} \text{GeV} \quad (4.36)$$

On peut d'autre part évaluer la densité d'énergie du vide, qui correspond à la somme sur tous les modes, de l'énergie de point zéro  $\omega_k/2$ . Pour un champ scalaire, on obtient :

$$\rho_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^{k_{max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} \simeq \frac{k_{max}^4}{16\pi^2} \quad (4.37)$$

où  $k_{max}^4$  est le cutoff de la théorie des champs que l'on considère et  $m$  la masse du champ, que l'on supposera  $\ll k_{max}$ . Si l'on prend pour cutoff l'échelle de grande unification  $k_{max} = E_{GUT} = 10^{16} GeV$ , on obtient

$$\rho_{vac} \simeq 10^{62} GeV^4 \gg \rho_{\Lambda}. \quad (4.38)$$

Le modèle de la constante cosmologique est également insatisfaisant du point de vue de l'explication de la valeur de sa densité d'énergie actuelle. Ce problème est connu sous le nom de problème de la coïncidence : pourquoi la densité d'énergie noire est-elle de l'ordre de la densité de la matière noire, précisément aujourd'hui, alors que les deux phénomènes ont a priori des origines très différentes. De plus, cette densité, très faible, doit être ajustée très précisément : c'est ce qui est appelé le problème du fine tuning de la constante cosmologique.

Ces difficultés d'ordre théorique (d'un point de vue phénoménologique, le modèle  $\Lambda CDM$  est pour l'instant en très bon accord avec les observations) ont poussé la communauté des physiciens des particules et des cosmologistes à se pencher plus en détail sur les possibles modèles d'énergie noire, au-delà du modèle de la constante cosmologique. Nous allons présenter un panorama de ces modèles (on pourra également consulter avec profit les articles [5, 22, 23]). Deux grandes catégories de modèles peuvent être distinguées : les modèles qui supposent que la RG décrit correctement les lois de la gravitation, et les modèles de gravité modifiée.

### 4.3.2 Modèles restant dans le cadre de la Relativité Générale

La plupart des modèles de cette catégorie consistent à prendre littéralement l'interprétation du fluide parfait (4.22) en tant qu'énergie, et à postuler l'existence d'un ou de plusieurs nouveaux champs responsables de l'accélération récente de l'Univers.

Les modèles les plus simples de cette classe sont les modèles de quintessence [24, 25], dans lesquelles l'énergie noire est décrite par un champ scalaire en régime de roulement lent, d'une manière tout à fait semblable à l'inflaton. L'action de ce champ scalaire  $\varphi$

s'écrit

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu\varphi} \partial_{\nu\varphi} - V(\varphi) \right), \quad (4.39)$$

où  $V$  est le potentiel du champ. à partir de cette action, il est facile de calculer le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire dans un univers homogène et isotrope ; on peut alors montrer que l'équation d'état prend la forme

$$\omega_\varphi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\varphi} - V(\varphi)}{\frac{1}{2}\dot{\varphi} + V(\varphi)}. \quad (4.40)$$

On peut définir les paramètres de roulements lents par

$$\epsilon \equiv \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2, \quad \eta = \frac{1}{8\pi G} \left( \frac{V_{,\varphi\varphi}}{V} \right), \quad (4.41)$$

où  $V_{,\varphi}$  est la dérivée du potentiel par rapport au champ scalaire. Dans la limite de roulement lent

$$\epsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1, \quad (4.42)$$

le champ scalaire peut jouer le rôle d'énergie noire, avec une équation d'état  $\omega_\varphi \simeq -1 + 2\epsilon/3$ .

Le potentiel  $V(\varphi)M^4 e^{-\lambda\varphi}$  est un exemple intéressant de potentiel, car on peut montrer que le régime  $\omega \simeq -1$  est un attracteur, c'est-à-dire que pour une grande plage de conditions initiales, le champ  $\varphi$  entrera dans le régime de roulement lent si l'on attend suffisamment longtemps. Ce mécanisme d'attraction ne résoud pas le problème du fine-tuning, mais permet néanmoins de donner une explication naturelle au fait que l'énergie noire ait une équation d'état constante ou quasi-constante aujourd'hui.

De nombreux autres modèles existent, parmi lesquels on peut citer les modèles de tachyon [26, 27, 28], d'énergie noire fantomale [29, 30] ou encore de K-essence [31, 32, 33].

Une autre possibilité pour expliquer l'accélération apparente de l'Univers sans modifier les lois de la gravitation consiste à trouver un mécanisme qui modifie la façon dont nous percevons les photons qui se propagent depuis les SN Ia et autres phénomènes observables. C'est par exemple le cas lorsque les photons sont couplés à un axion, et peuvent osciller lors de la propagation dans le champ magnétique extra-galactique

[34, 36, 37]. Les objets astrophysiques nous apparaissent alors plus lointains qu'ils ne le sont en réalité.

### 4.3.3 Modèles de gravité modifiée

Une autre approche de la question de l'énergie noire consiste à questionner la validité même de la RG. Il existe ainsi de nombreux modèles de gravité modifiée, dans lesquels les lois de la gravité sont différentes de la RG.

Les modèles les plus simples de modifications sont sans doute les modifications scalaires de la gravité dans lesquelles un champ scalaire additionnel est couplé non-minimalement à la métrique. Un exemple de tels modèles est donné par la classe des théories scalaire-tenseur [35, 38, 39] dont l'action prend la forme

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( F(\varphi) R - (\varphi) g^{\mu\nu} \partial_{\mu\varphi} \partial_{\nu\varphi} - 2U(\varphi) \right) + S_m[\psi_m; g_{\mu\nu}]. \quad (4.43)$$

Cette action apparaît comme une généralisation directe des modèles de quintessence décrits à l'équation (4.39), la différence étant que le champ scalaire des théories scalaire-tenseur est couplé non-minimalement à la métrique au travers de la fonction  $F(\varphi)$ . Il est possible de coupler le champ scalaire à d'autres invariants de courbure que le scalaire de Ricci ; on peut par exemple penser aux modèles dans lesquels le champ scalaire n'est pas couplé à  $R$  mais au terme de Gauss-Bonnet,  $L_{GB} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Nous n'étudierons pas plus avant ce types de modèles, mais l'on pourra se référer aux articles [40, 41, 42, 43, 44] pour plus de détails. Notons enfin que deux modèles de modifications scalaires dont l'action possède plus de deux de dérivées du champ scalaire ont récemment été proposés. Il s'agit du modèle de Galiléon introduit par A. Nicolis, R. Rattazzi et E. Trincherini [45] (voir également [46, 47] et [48]) et des modèles de k-Mouflage présentés par E. Babichev, C. Deffayet dans l'article [49].

Pour être intéressants d'un point de vue phénoménologique, les modèles de gravité modifiée doivent être nettement différents de la Relativité Générale, tout au moins aux échelles cosmologiques. Cependant, nous savons que la gravité dans le système solaire est très proche de la RG. Il faut donc un mécanisme qui sépare ces deux régimes. Pour l'instant, deux mécanismes de ce type sont connus : celui de caméléon et le mécanisme de Vainshtein. Dans les deux cas, la gravité est modifiée par un champ scalaire qui est libre de se propager à grandes distances mais qui ne joue pas de rôle au sein ou au voisinage d'objets massifs.

Enfin, il est important d'avoir à l'esprit que tout modèle de gravité modifiée réaliste

doit être capable de satisfaire de fortes contraintes expérimentales, tant au niveau local qu'à des échelles cosmologiques.



# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

---

## 5.1 Conclusion

## 5.2 perspectives

---

# Bibliographie

---

- [1] Peter, P., and Uzan, J.-P., Cosmologie primordiale. éditions Belin, 2005.
- [2] Wald, R. M., General Relativity. Chicago University Press, 1984. Chicago, Usa : Univ. Pr. ( 1984) 491p.
- [3] Weinberg, S., Gravitation and cosmology. John Wiley and Sons, 1972.
- [4] Knop, R. A., Aldering, G., Amanullah, R., Astier, P., Blanc, G., Burns, M. S., Conley, A., Deustua, S. E., Doi, M., Ellis, R., Fabbro, S., Folatelli, G., Fruchter, A. S., Garavini, G., Garmond, S., Garton, K., Gibbons, R., Goldhaber, G., Goobar, A., Groom, D. E., Hardin, D., Hook, I., Howell, D. A., Kim, A. G., Lee, B. C., Lidman, C., Mendez, J., Nobili, S., Nugent, P. E., Pain, R., Panagia, N., Pennypacker, C. R., Perlmutter, S., Quimby, R., Raux, J., Regnault, N., Ruiz-Lapuente, P., Sainton, G., Schaefer, B., Schahmanecche, K., Smith, E., Spadafora, A. L., Stanishev, V., Sullivan, M., Walton, N. A., Wang, L., Wood-Vasey, W. M., and Yasuda, N., New constraints on  $\Omega_m$ ,  $\Omega_{\Lambda}$ , and  $w$  from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with hst, *Astrophys.J.* 598 (2003) 102, [astro-ph/0309368].
- [5] Copeland, E. J., Sami, M., and Tsujikawa, S., Dynamics of dark energy, *Int.J.Mod.Phys.D* 15 (2006) 1753–1936, [hep-th/0603057].
- [6] Uzan, J.-P., Tests of general relativity on astrophysical scales, arXiv :0908.2243.
- [7] Supernova Cosmology Project Collaboration, Perlmutter, S., et al., Measurements of  $\Omega_m$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophys. J.* 517 (1999) 565–586, [astro-ph/9812133].
- [8] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiattia, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P., Leibundgut, B., Phillips, M. M., Reiss, D., Schmidt, B. P., Schommer, R. A., Smith, R. C., Spyromilio, J., Stubbs, C., Suntzeff, N. B., and Tonry, J., Observational evidence from

- supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron.J.* 116 (1998) 1009–1038, [astro-ph/9805201].
- [9] Astier, P., Guy, J., Regnault, N., Pain, R., Aubourg, E., Balam, D., Basa, S., Carlberg, R., Fabbro, S., Fouchez, D., Hook, I., Howell, D., Lafoux, H., Neill, J., Palanque- Delabrouille, N., Perrett, K., Pritchett, C., Rich, J., Sullivan, M., Taillet, R., Aldering, G., Antilogus, P., Arsenijevic, V., Balland, C., Baumont, S., Bronder, J., Courtois, H., Ellis, R., Filiol, M., Goncalves, A., Goobar, A., Guide, D., Hardin, D., Lusset, V., Lidman, C., McMahon, R., Mouchet, M., Mourao, A., Perlmutter, S., Ripoche, P., Tao, C., and Walton, N., The supernova legacy survey : Measurement of  $\Omega_m$ ,  $\Omega_{\Lambda}$  and  $w$  from the first year data set, *Astron.Astrophys.* 447 (2006) 31–48, [astro-ph/0510447].
- [10] Knop, R. A., Aldering, G., Amanullah, R., Astier, P., Blanc, G., Burns, M. S., Conley, A., Deustua, S. E., Doi, M., Ellis, R., Fabbro, S., Folatelli, G., Fruchter, A. S., Garavini, G., Garmond, S., Garton, K., Gibbons, R., Goldhaber, G., Goobar, A., Groom, D. E., Hardin, D., Hook, I., Howell, D. A., Kim, A. G., Lee, B. C., Lidman, C., Mendez, J., Nobili, S., Nugent, P. E., Pain, R., Panagia, N., Pennypacker, C. R., Perlmutter, S., Quimby, R., Raux, J., Regnault, N., Ruiz-Lapuente, P., Sainton, G., Schaefer, B., Schahmanec, K., Smith, E., Spadafora, A. L., Stanishev, V., Sullivan, M., Walton, N. A., Wang, L., Wood-Vasey, W. M., and Yasuda, N., New constraints on  $\Omega_m$ ,  $\Omega_{\Lambda}$ , and  $w$  from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with hst, *Astrophys.J.* 598 (2003) 102, [astro-ph/0309368].
- [11] M.Kowalski, D.Rubin, G.Aldering, R.J.Agostinho, A.Amadon, R.Amanullah, C.Balland, Barbary, K., G.Blanc, P.J.Challis, A.Conley, N.V.Connolly, R.Covarrubias, K.S.Dawson, S.E.Deustua, R.Ellis, S.Fabbro, V.Fadeyev, X.Fan, B.Farris, G.Folatelli, B.L.Frye, G.Garavini, E.L.Gates, L.Germany, G.Goldhaber, B.Goldman, A.Goobar, D.E.Groom, J.Haissinski, D.Hardin, I.Hook, S.Kent, A.G.Kim, R.A.Knop, C.Lidman, E.V.Linder, J.Mendez, J.Meyers, G.J.Miller, M.Moniez, A.M.Mourao, H.Newberg, S.Nobili, P.E.Nugent, R.Pain, O.Perdereau, S.Perlmutter, M.M.Phillips, V.Prasad, R.Quimby, N.Regnault, J.Rich, E.P.Rubenstein, P.Ruiz-Lapuente, F.D.Santos, B.E.Schaefer, R.A.Schommer, R.C.Smith, A.M.Soderberg, A.L.Spadafora, L.-G.Strolger, Strovink, M., N.B.Suntzeff, N.Suzuki, R.C.Thomas, N.A.Walton, L.Wang, and W.M.Wood- Vasey, Improved cosmological constraints from new, old and combined supernova datasets, *Astrophys.J.* 686 (2008) 749–778, [arXiv :0804.4142].

- [12] Riess, A. G., Strolger, L.-G., Tonry, J., Casertano, S., Ferguson, H. C., Mobasher, B., Challis, P., Filippenko, A. V., Jha, S., Li, W., Chornock, R., Kirshner, R. P., Leibundgut, B., Dickinson, M., Livio, M., Giavalisco, M., Steidel, C. C., Benitez, N., and Tsvetanov, Z., Type ia supernova discoveries at  $z > 1$  from the hubble space telescope : Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution, *Astrophys.J.* 607 (2004) 665–687, [astro-ph/0402512].
- [13] Choudhury, T. R., and Padmanabhan, T., Cosmological parameters from supernova observations : A critical comparison of three data sets, *Astron.Astrophys.* 429 (2005) 807, [astro-ph/0311622].
- [14] Freedman, W. L., Madore, B. F., Gibson, B. K., Ferrarese, L., Kelson, D. D., Sakai, S., Mould, J. R., R. C. Kennicutt, J., Ford, H. C., Graham, J. A., Huchra, J. P., Hughes, S. M. G., Illingworth, G. D., Macri, L. M., and Stetson, P. B., Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant, *Astrophys.J.* 553 (2001) 47–72, [astro-ph/0012376].
- [15] Hansen, B. M. S., Brewer, J., Fahlman, G. G., Gibson, B. K., Ibata, R., Limongi, M., Rich, R. M., Richer, H. B., Shara, M. M., and Stetson, P. B., The white dwarf cooling sequence of the globular cluster messier 4, *Astrophys.J.* 574 (2002) L155–L158, [astro-ph/0205087].
- [16] Jimenez, R., Thejll, P., Jorgensen, U. G., MacDonald, J., and Pagel, B., Ages of globular clusters : a new approach, *mnras* 282 (1996) 926–942, [arXiv :astro-ph/9602132].
- [17] Richer, H. B., Brewer, J., Fahlman, G. G., Gibson, B. K., Hansen, B. M., Ibata, R., Kalirai, J. S., Limongi, M., Rich, R. M., Saviane, I., Shara, M. M., and Stetson, P. B., The lower main sequence and mass function of the globular cluster messier 4, *Astrophys.J.* 574 (2002) L151–L154, [astro-ph/0205086].
- [18] Komatsu, E., Dunkley, J., Nolte, M. R., Bennett, C. L., Gold, B., Hinshaw, G., Jarosik, N., Larson, D., Limon, M., Page, L., Spergel, D. N., Halpern, M., Hill, R. S., Kogut, A., Meyer, S. S., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., and Wright, E. L., Five-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations : Cosmological interpretation, *Astrophys.J.Suppl.* 180 (2009) 330–376, [arXiv :0803.0547].
- [19] Eisenstein, D. J., Zehavi, I., Hogg, D. W., Scocimarro, R., Blanton, M. R., Nichol, R. C., Scranton, R., Seo, H., Tegmark, M., Zheng, Z., Anderson, S., Annis, J., Bahcall, N., Brinkmann, J., Burles, S., Castander, F. J., Connolly, A., Csabai, I., Doi, M., Fukugita, M., Frieman, J. A., Glazebrook, K., Gunn, J. E., Hendry, J. S., Hennessy, G., Ivezic, Z., Kent, S., Knapp, G. R., Lin, H., Loh, Y., Lupton, R.

- H., Margon, B., McKay, T., Meiksin, A., Munn, J. A., Pope, A., Richmond, M., Schlegel, D., Schneider, D., Shimasaku, K., Stoughton, C., Strauss, M., SubbaRao, M., Szalay, A. S., Szapudi, I., Tucker, D., Yanny, B., and York, D., Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies, *Astrophys.J.* 633 (2005) 560–574, [astro-ph/0501171].
- [20] Percival, W. J., Reid, B. A., Eisenstein, D. J., Bahcall, N. A., Budavari, T., Fukugita, M., Gunn, J. E., Ivezić, Z., Knapp, G. R., Kron, R. G., Loveday, J., Lupton, R. H., McKay, T. A., Meiksin, A., Nichol, R. C., Pope, A. C., Schlegel, D. J., Schneider, D. P., Spergel, D. N., Stoughton, C., Strauss, M. A., Szalay, A. S., Tegmark, M., Weinberg, D. H., York, D. G., and Zehavi, I., Baryon acoustic oscillations in the sloan digital sky survey data release 7 galaxy sample, arXiv :0907.1660.
- [21] M.Kowalski, D.Rubin, G.Aldering, R.J.Agostinho, A.Amadon, R.Amanullah, C.Balland, Barbary, K., G.Blanc, P.J.Challis, A.Conley, N.V.Connolly, R.Covarrubias, K.S.Dawson, S.E.Deustua, R.Ellis, S.Fabbro, V.Fadeyev, X.Fan, B.Farris, G.Folatelli, B.L.Frye, G.Garavini, E.L.Gates, L.Germany, G.Goldhaber, B.Goldman, A.Goobar, D.E.Groom, J.Haissinski, D.Hardin, I.Hook, S.Kent, A.G.Kim, R.A.Knop, C.Lidman, E.V.Linder, J.Mendez, J.Meyers, G.J.Miller, M.Moniez, A.M.Mourao, H.Newberg, S.Nobili, P.E.Nugent, R.Pain, O.Perdereau, S.Perlmutter, M.M.Phillips, V.Prasad, R.Quimby, N.Regnault, J.Rich, E.P.Rubenstein, P.Ruiz-Lapuente, F.D.Santos, B.E.Schaefer, R.A.Schommer, R.C.Smith, A.M.Soderberg, A.L.Spadafora, L.-G.Strolger, Strovink, M., N.B.Suntzeff, N.Suzuki, R.C.Thomas, N.A.Walton, L.Wang, and W.M.Wood- Vasey, Improved cosmological constraints from new, old and combined supernova datasets, *Astrophys.J.* 686 (2008) 749–778, [arXiv :0804.4142].
- [22] Peebles, P. J. E., and Ratra, B., The cosmological constant and dark energy, *Rev. Mod. Phys.* 75 (2003) 559–606, [astro-ph/0207347].
- [23] Uzan, J.-P., The acceleration of the universe and the physics behind it, *Gen.Rel.Grav.* 39 (2007) 307–342, [astro-ph/0605313].
- [24] Ratra, B., and Peebles, P. J. E., Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field, *Phys. Rev. D* 37 (1988) 3406.
- [25] Wetterich, C., Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry, *Nucl. Phys. B* 302 (1988) 668.
- [26] Sen, A., Supersymmetric world-volume action for non-bps d-branes, *JHEP* 9910 (1999) 008, [hep-th/9909062].

- [27] Sen, A., Rolling Tachyon, JHEP 04 (2002) 048, [hep-th/0203211].
- [28] Sen, A., Tachyon matter, JHEP 07 (2002) 065, [hep-th/0203265].
- [29] Caldwell, R., A phantom menace? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state, Phys.Lett. B545 (2002) 23–29, [astro-ph/9908168].
- [30] Caldwell, R. R., Kamionkowski, M., and Weinberg, N. N., Phantom energy and cosmic doomsday, Phys.Rev.Lett. 91 (2003) 071301, [astro-ph/0302506].
- [31] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V., and Steinhardt, P. J., A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration, Phys.Rev.Lett. 85 (2000) 4438–4441, [astro-ph/0004134].
- [32] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V., and Steinhardt, P. J., Essentials of k-essence, Phys.Rev.D 63 (2001) 103510, [astro-ph/0006373].
- [33] Chiba, T., Okabe, T., and Yamaguchi, M., Kinetically driven quintessence, Phys.Rev.D 62 (2000) 023511, [astro-ph/9912463].
- [34] Csaki, C., Kaloper, N., and Terning, J., Dimming supernovae without cosmic acceleration, Phys.Rev.Lett. 88 (2002) 161302, [hep-ph/0111311].
- [35] Bergmann, P. G., Comments on the scalar tensor theory, Int. J. Theor. Phys. 1 (1968) 25–36.
- [36] Deffayet, C., Harari, D., Uzan, J.-P., and Zaldarriaga, M., Dimming of supernovae by photon-pseudoscalar conversion and the intergalactic plasma, Phys.Rev. D66 (2002) 043517, [hep-ph/0112118].
- [37] Deffayet, C., and Uzan, J.-P., Photon mixing in universes with large extra-dimensions, Phys.Rev. D62 (2000) 063507, [hep-ph/0002129].
- [38] Nordtvedt, Kenneth, J., PostNewtonian metric for a general class of scalar tensor gravitational theories and observational consequences, Astrophys. J. 161 (1970) 1059–1067.
- [39] Wagoner, R. V., Scalar tensor theory and gravitational waves, Phys. Rev. D1 (1970) 3209–3216.
- [40] Amendola, L., Charmousis, C., and Davis, S. C., Constraints on gauss-bonnet gravity in dark energy cosmologies, JCAP 0612 (2006) 020, [hep-th/0506137].
- [41] Amendola, L., Charmousis, C., and Davis, S. C., Solar system constraints on gauss-bonnet mediated dark energy, JCAP 0710 (2007) 004, [arXiv :0704.0175].
- [42] Koivisto, T., and Mota, D. F., Cosmology and astrophysical constraints of gauss-bonnet dark energy, Phys.Lett.B 644 (2007) 104–108, [astro-ph/0606078].

- [43] Koivisto, T., and Mota, D. F., Gauss-bonnet quintessence : Background evolution, large scale structure and cosmological constraints, *Phys.Rev.D* 75 (2007) 023518, [hep-th/0609155].
- [44] Li, B., Barrow, J. D., and Mota, D. F., The cosmology of modified gauss-bonnet gravity, *Phys.Rev.D* 76 (2007) 044027, [arXiv :0705.3795].
- [45] Nicolis, A., Rattazzi, R., and Trincherini, E., The galileon as a local modification of gravity, arXiv :0811.2197.
- [46] Deffayet, C., Deser, S., and Esposito-Farese, G., Generalized galileons : All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress tensors, *Phys. Rev. D* 80 (2009) 064015, [arXiv :0906.1967].
- [47] Deffayet, C., Esposito-Farese, G., and Vikman, A., Covariant galileon, *Phys. Rev. D* 79 (2009) 084003, [arXiv :0901.1314].
- [48] Silva, F. P., and Koyama, K., Self-accelerating universe in galileon cosmology, arXiv :0909.4538.
- [49] Babichev, E., Deffayet, C., and Ziour, R., k-mouflage gravity, *International Journal of Modern Physics D* (2009) [arXiv :0905.2943].
- [50] Dvali, G., Gabadadze, G., and Porrati, M., 4d gravity on a brane in 5d minkowski space, *Phys.Lett.B* 485 (2000) 208–214, [hep-th/0005016].
- [51] Deffayet, C., Cosmology on a brane in minkowski bulk, *Phys.Lett.B* 502 (2001) 199– 208, [hep-th/0010186].
- [52] de Rham, C., Hofmann, S., Khoury, J., and Tolley, A. J., Cascading gravity and degeneration, *JCAP* 0802 (2008) 011, [arXiv :0712.2821].
- [53] Dvali, G., Hofmann, S., and Khoury, J., Degeneration of the cosmological constant and graviton width, *Phys.Rev.D* 76 (2007) 084006, [hep-th/0703027].