Ejercicios resuelto
por
Anselmo Estrada Roa
Análisis Matemático I
1er cuatrimestre. 2025

TP2 - Ejercicio 20.a

En este ejercicio se mezclan varios temas: gráficas de funciones, límites y paridad de funciones. Es lindo y raro, como un perro verde. Pero tiene su encanto, ¿no? Vamos directo al enunciado.

Graficar funciones que verifiquen:

1. $f(x)$ continua en $[-2, 3]$, $f(x) > 0$ en $(-1, 1)$ y discontinua en $x = 3$.
2. $g(x)$ impar, con una discontinuidad inevitable en $x = 2$, una discontinuidad evitable en $x = 3$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = 5$.
3. $h(x)$ par, continua y positiva en $[0, 1]$, $\lim_{x\to 1^+} h(x) = -2$, $h(3) = -2$ y con una discontinuidad evitable en $x = 3$.

Antes de comenzar

Ojo: van a ser funciones **a tramos** sí o sí, porque nos están pidiendo discontinuidades inevitables, y esas generalmente aparecen como **saltos** o **asíntotas**.

Figure 1: Gráfico de una función a tramos inventada por mí. Fijate que los tramos en azul son una hipérbola $y = \frac{1}{x+15}$, pero el resto de la función tiene otra definición.

Con este pequeño tip... ¡vamos a *laburar, loco*!

1. Función $f(x)$

Queremos que:

- Sea continua en $[-2, 3]$.
- Cumpla que $f(x) > 0$ en $(-1, 1)$.
- Tenga una discontinuidad en $x = 3$.

Primer tramo

Arranquemos asegurando que $f(x) > 0$ en $(-1, 1)$. Para no complicarnos la vida, podemos dibujar una recta constante: $f(x) = 1$ en ese intervalo.

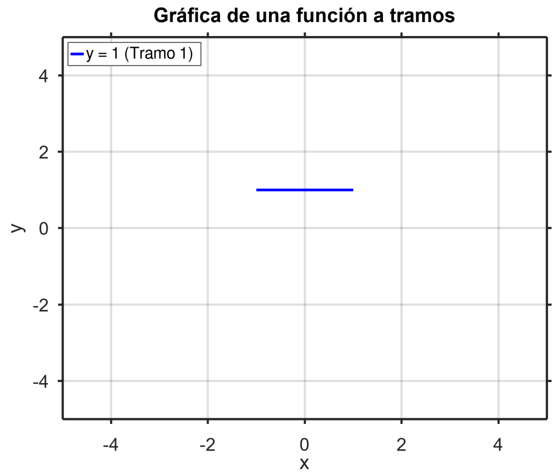

Figure 2: Empezamos con $y = 1$. ¿Por qué tan simple? Porque la vida ya es bastante complicada, pa. Y además, cumple con lo que nos piden.

Segundo tramo

Ahora, agregamos la discontinuidad en $x = 3$. Una forma sencilla es hacer un salto en la gráfica, por ejemplo bajando a $y = -1$.

Figure 3: Metemos un salto. Ojo: podés elegir otro valor distinto de -1 si querés, siempre que no sea 1, porque ahí no habría discontinuidad real.

Tercer tramo

Finalmente, como debe ser continua en $[-2, 3]$ (excepto en $x = 3$), extendemos $f(x) = 1$ hacia la izquierda, hasta $x = -2$.

Figure 4: Gráfico de la función con el tercer tramo.

¿Es esta la única solución? **No**. Podés inventar mil versiones distintas mientras respeten las condiciones. Por ejemplo:

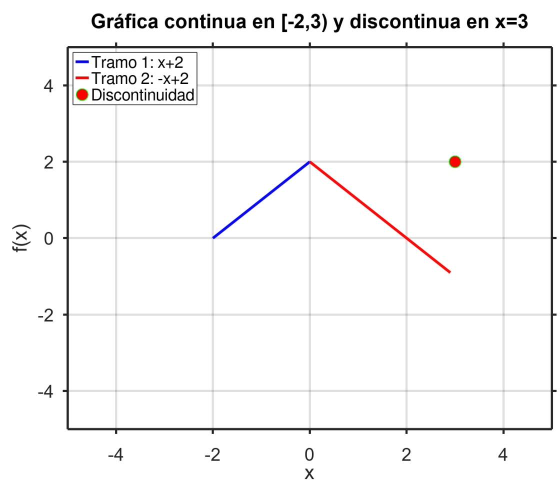

Figure 5: Gráfico de la función con otro ejemplo.

2. Función $g(x)$

Ahora nos toca una función que debe ser:

- Impar.
- Con una discontinuidad inevitable en $x = 2$.
- Una discontinuidad evitable en $x = 3$.
- Y que cumpla $\lim_{x\to\infty} g(x) = 5$.

Al ser impar, trabajamos primero para $x > 0$ y después reflejamos para $x < 0$.

Parte positiva

Para la discontinuidad evitable en $x = 3$, basta con que el valor de $g(3)$ no coincida con el límite lateral.

Para el límite en infinito, pensamos en una función que tienda a 5, como:

$$g(x) = 5 + \frac{1}{x-2}$$

Esta función, además, tiene una asíntota vertical en $x = 2$, perfecta para la discontinuidad inevitable que nos piden.

- En $x \in (2, 3)$ y $x > 3$, usamos esa hipérbola desplazada.
- En $x \in (0, 2)$, para algo fácil, podemos usar la recta $y = x$.

Parte negativa

Ahora reflejamos todo para que sea impar:

- La recta $y = x$ ya es impar, así que no hay problema.
- La hipérbola debe reflejarse también, pasando de $5 + \frac{1}{x-2}$ a $-5 + \frac{1}{x+2}$.
- Los puntos aislados también se reflejan respetando $g(-x) = -g(x)$.

Así nos queda:

$$g(x) = \begin{cases} -5 + \frac{1}{x+2}, & x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2) \\ -2, & x = -3 \\ x, & x \in [-2, 2] \\ 2, & x = 3 \\ 5 + \frac{1}{x-2}, & x \in (2, 3) \cup (3, \infty) \end{cases} \tag{1}$$

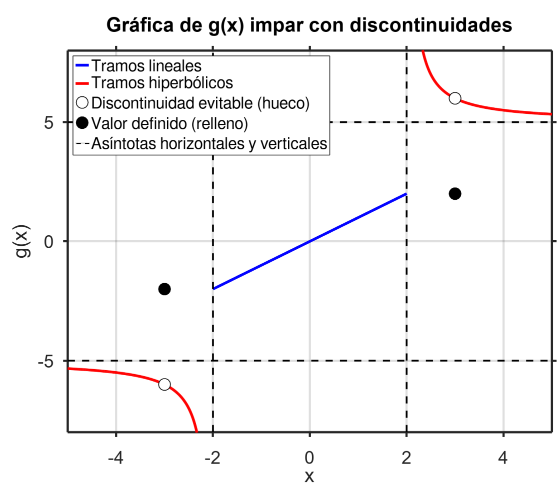

Figure 6: Gráfico de $g(x)$.

3. Función $h(x)$

Finalmente tenemos una función que debe ser:

- Par.
- Continua y positiva en $[0, 1]$.
- Con $\lim_{x\to 1^+} h(x) = -2$.
- Que cumpla $h(3) = -2$.
- Y con una discontinuidad evitable en $x = 3$.

Una buena idea sería definir: - En $[-1, 1]$, usamos $h(x) = |x|$ (positivo y par). - En $(1, 2)$ y $(2, 3)$, rectas que conecten razonablemente. - En $x = 3$, forzamos $h(3) = -2$, pero no coincidiendo con el límite lateral.

Y para respetar la paridad, reflejamos todo hacia la izquierda.

Una propuesta concreta sería:

$$h(x) = \begin{cases} -x-3, & x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \\ -2, & x = -3 \\ |x|, & x \in [-1, 1] \\ -2, & x = 3 \\ x-3, & x \in (1, 3) \cup (3, \infty) \end{cases} \tag{2}$$

Figure 7: Gráfico de $h(x)$.

🎯 Conclusión

Este ejercicio combina muchos conceptos: continuidad, límites, paridad, funciones a tramos, y un poco de creatividad. Recordá: **hay muchas soluciones posibles**, lo importante es respetar las condiciones que nos piden.