

Branch and Bound

Travelling Sales man Problem

Introduction-Branch & Bound

2

- To solve optimization problems that cannot be solved using greedy and dynamic methods
 - ▣ Branching – The feasible region is covered by considering several smaller feasible sub regions. The method is used recursively on all the sub regions and thus forms a tree structure and the nodes of the tree represent the sub regions
 - ▣ Bounding-The lower and upper bounds for the optimal solution within a feasible region can be found in a faster way

Terminologies Used In Branch & Bound

3

- Live Node- The node which has generated but whose children have not been generated yet
- E-node – The live node whose children are currently being generated
- Dead node – The node which cannot be expanded further i.e, whose children all have been generated
 - Branch and bound refers to all state space search methods i.e BFS and Depth Search

Example – Branch & Bound

4

- Travelling Salesman Problem
- Knapsack Problem
- 8-Queen's Problem

Travelling Sales Man Problem

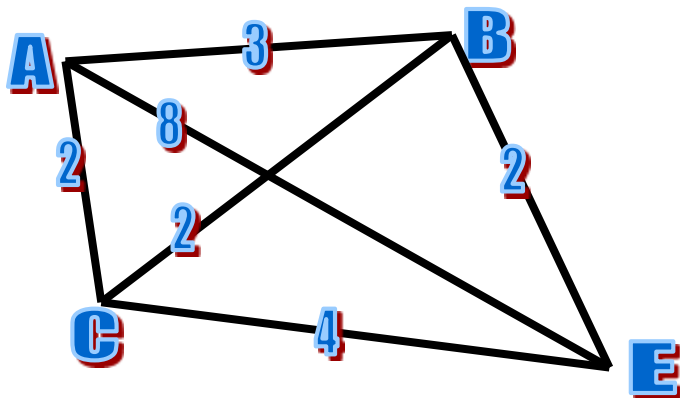
5

- Given a set of cities and distance between every pair of Vertices, the problem is to find the shortest possible route that visits every city exactly once and returns to the starting city.

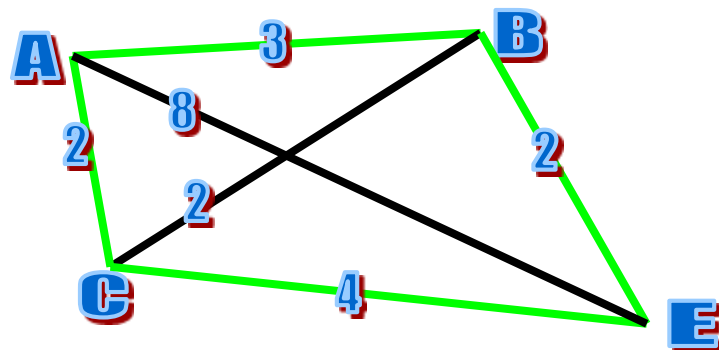


Definition

- Travelling Salesman Problem (TSP)
 - Given a weighted undirected complete graph with n nodes.
 - Starting at node s find a cycle that visits each node exactly once and ends in s with the least weight.



Cost of optimal tour = 11

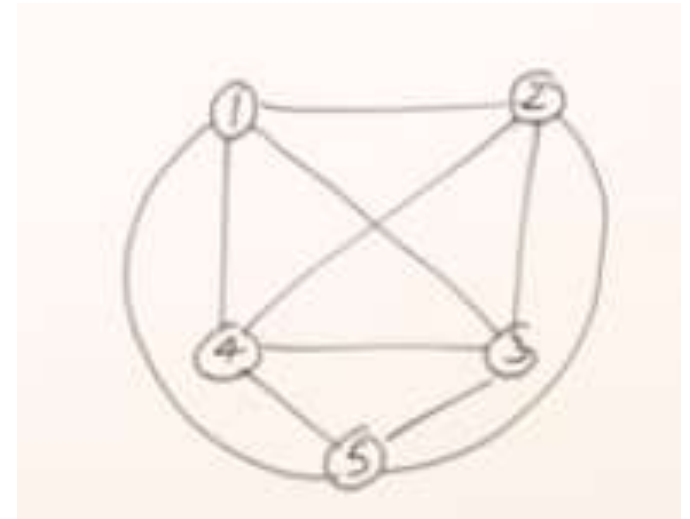


Problem-1

7

Consider an instance for TSP is given by G as:

	A	B	C	D	E
A	∞	20	30	10	11
B	15	∞	16	4	2
C	3	5	∞	2	4
D	19	6	18	∞	3
E	16	4	7	16	∞



Using branch and bound algorithm , calculate the optimal tour.

	A	B	C	D	E
A	∞	20	30	10	11
B	15	∞	16	4	2
C	3	5	∞	2	4
D	19	6	18	∞	3
E	16	4	7	16	∞

10
2
2
3
4
21

1 C=25

	A	B	C	D	E
A	∞	10	20	0	1
B	13	∞	14	2	0
C	1	3	∞	0	2
D	16	3	15	∞	0
E	12	0	3	12	∞

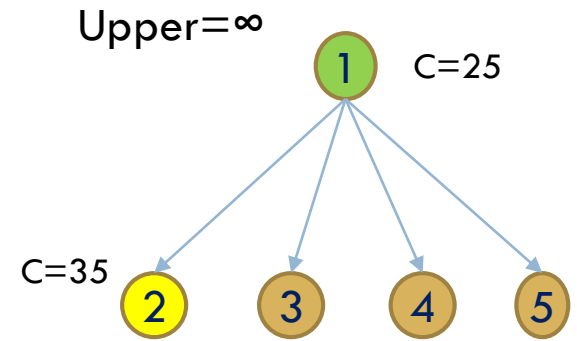
	A	B	C	D	E
A	∞	10	17	0	1
B	12	∞	11	2	0
C	0	3	∞	0	2
D	15	3	12	∞	0
E	11	0	0	12	∞

1	0	3	0	0	4
---	---	---	---	---	---

Total cost reduction is 21+4=25

	A	B	C	D	E
A	∞	10	17	0	1
B	12	∞	11	2	0
C	0	3	∞	0	2
D	15	3	12	∞	0
E	11	0	0	12	∞

Reduced Cost=25



(1,2)

	A	B	C	D	E	
A	∞	∞	∞	∞	∞	0
B	∞	∞	11	2	0	0
C	0	∞	∞	0	2	0
D	15	∞	12	∞	0	0
E	11	∞	0	12	∞	0
	0	0	0	0	0	0

$$\text{Cost} = C(1,2) + C(P) + r^{\wedge} \\ = 10 + 25 + 0 = \mathbf{35}$$

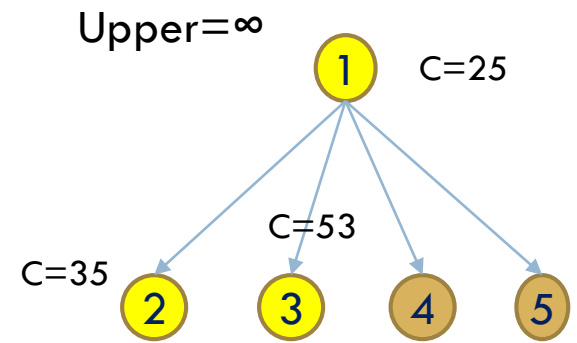
	A	B	C	D	E
A	∞	10	17	0	1
B	12	∞	11	2	0
C	0	3	∞	0	2
D	15	3	12	∞	0
E	11	0	0	12	∞

Reduced Cost=25

(1,3)

	A	B	C	D	E	
A	∞	∞	∞	∞	∞	0
B	12	∞	∞	2	0	0
C	∞	3	∞	0	2	0
D	15	3	∞	∞	0	0
E	11	0	∞	12	∞	0
						0
10	11	0	0	0	0	11

Total cost reduction is 11



$$\begin{aligned} \text{Cost} &= C(1,3) + C(P) + r^A \\ &= 17 + 25 + 11 = 53 \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	1	∞	∞	2	0
C	∞	3	∞	0	2
D	4	3	∞	∞	0
E	0	0	∞	12	∞

9 April 2024

	A	B	C	D	E
A	∞	10	17	0	1
B	12	∞	11	2	0
C	0	3	∞	0	2
D	15	3	12	∞	0
E	11	0	0	12	∞

Reduced Cost=25

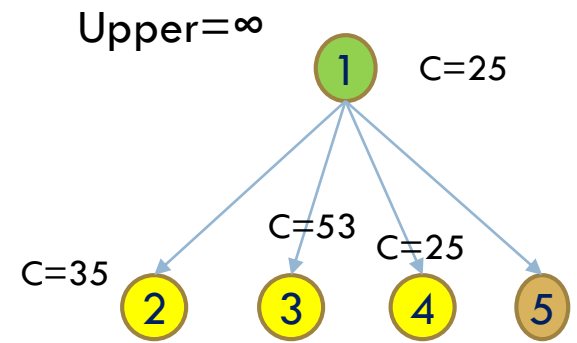
(1,4)

	A	B	C	D	E	
A	∞	∞	∞	∞	∞	0
B	12	∞	11	∞	0	0
C	0	3	∞	∞	2	0
D	∞	3	12	∞	0	0
E	11	0	0	∞	∞	0
						0

11

0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

Total cost reduction is 0



$$\begin{aligned} \text{Cost} &= C(1,4) + C(P) + r^A \\ &= 0 + 25 + 0 = \mathbf{25} \end{aligned}$$

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	12	∞	11	∞	0
C	0	3	∞	∞	2
D	∞	3	12	∞	0
E	11	0	0	∞	∞

9 April 2024

	A	B	C	D	E
A	∞	10	17	0	1
B	12	∞	11	2	0
C	0	3	∞	0	2
D	15	3	12	∞	0
E	11	0	0	12	∞

Reduced Cost=25

(1,5)

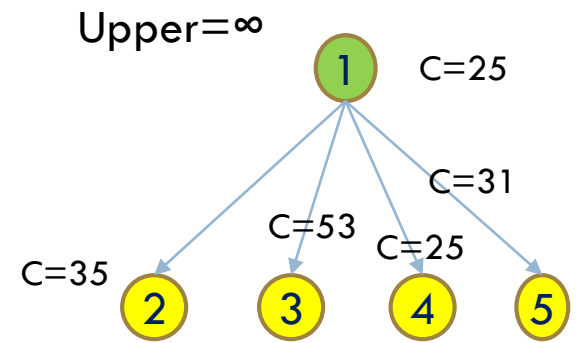
	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	12	∞	11	2	∞
C	0	3	∞	0	∞
D	15	3	12	∞	∞
E	∞	0	0	12	∞

12

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

Total cost reduction is 5

0
2
0
3
0
5



$$\text{Cost} = C(1,5) + C(P) + r^A$$

$$= 1 + 25 + 5 = 31$$

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	10	∞	9	0	∞
C	0	3	∞	0	∞
D	12	0	9	∞	∞
E	∞	0	0	12	∞

9 April 2024

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	12	∞	11	∞	0
C	0	3	∞	∞	2
D	∞	3	12	∞	0
E	11	0	0	∞	∞

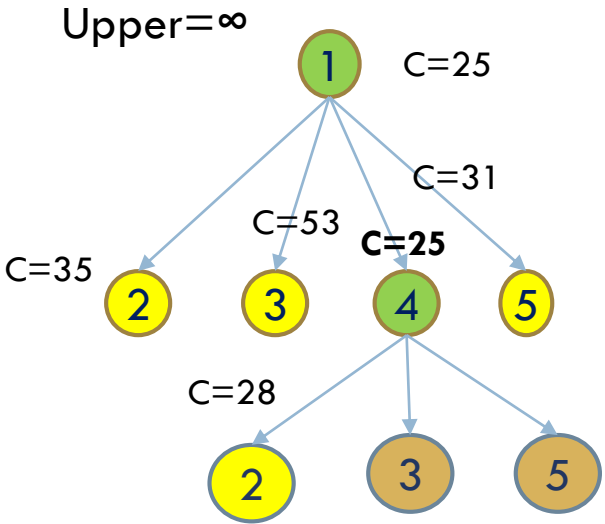
Reduced Cost=25

(4,2)

	A	B	C	D	E	
A	∞	∞	∞	∞	∞	0
B	∞	∞	11	∞	0	0
C	0	∞	∞	∞	2	0
D	∞	∞	∞	∞	∞	0
E	11	∞	0	∞	∞	0
						0

13	0	0	0	0	0	0
----	---	---	---	---	---	---

Total cost reduction is 0



$$\begin{aligned} \text{Cost} &= C(4,2) + C(P) + r^A \\ &= 3 + 25 + 0 = \mathbf{28} \end{aligned}$$

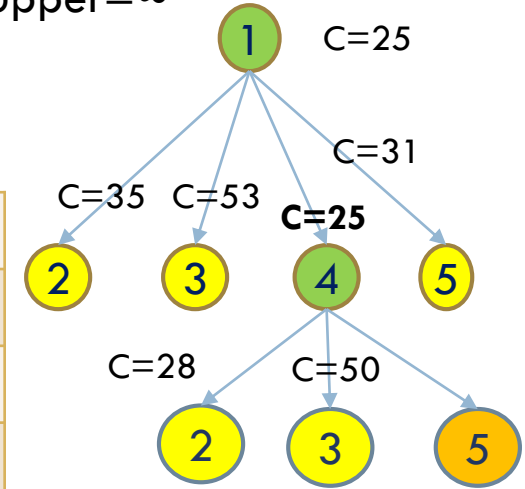
	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	11	∞	0
C	0	∞	∞	∞	2
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	11	∞	0	∞	∞

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	12	∞	11	∞	0
C	0	3	∞	∞	2
D	∞	3	12	∞	0
E	11	0	0	∞	∞

$$\text{Cost} = C(4,3) + C(P) + r^A$$

$$= 12 + 25 + 13 = 50$$

Upper = ∞



	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	1	∞	∞	∞	0
C	∞	1	∞	∞	0
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	0	0	∞	∞	∞

Reduced Cost = 25

(4,3)

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	12	∞	∞	∞	0
C	∞	3	∞	∞	2
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	11	0	∞	∞	∞

0
0
2
0
0
2

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	12	∞	∞	∞	0
C	∞	1	∞	∞	0
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	11	0	∞	∞	∞

11	0	0	0	0	11
----	---	---	---	---	----

14 Total cost reduction is $2 + 11 = 13$

9 April 2024

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	12	∞	11	∞	0
C	0	3	∞	∞	2
D	∞	3	12	∞	0
E	11	0	0	∞	∞

Reduced Cost=25

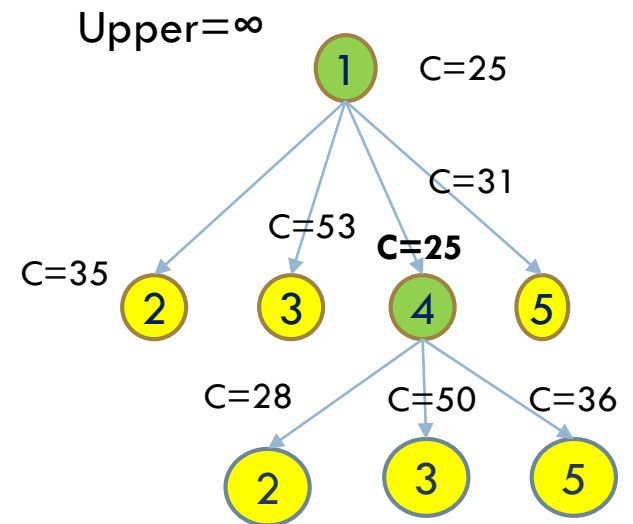
(4,5)

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	12	∞	11	∞	∞
C	0	3	∞	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	∞	0	0	∞	∞

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

0
11
0
0
0
11

15 **Total cost reduction is $0+11=11$**



$$\text{Cost} = C(4,5) + C(P) + r^A$$

$$= 0 + 25 + 11 = 36$$

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	1	∞	0	∞	∞
C	0	3	∞	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	∞	0	0	∞	∞

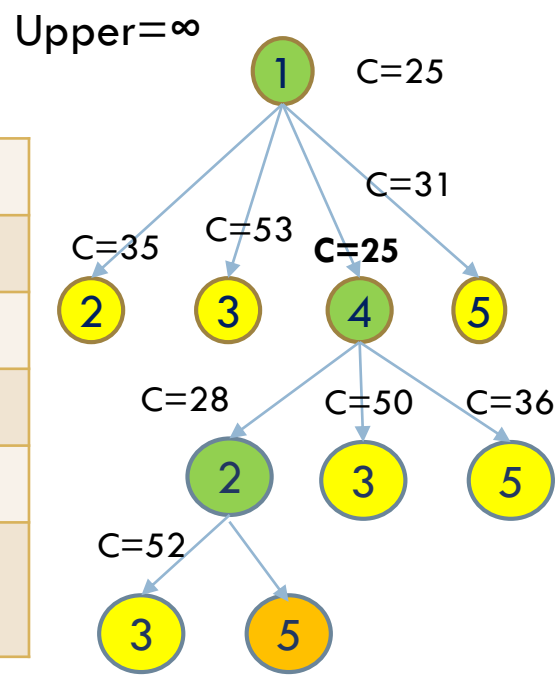
9 April 2024

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	11	∞	0
C	0	∞	∞	∞	2
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	11	∞	0	∞	∞

Reduced Cost=28

$$\text{Cost} = C(2,3) + C(P) + r^A = 11 + 28 + 13 = 52$$

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	∞	0
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	0	∞	∞	∞	∞



(2,3)

	A	B	C	D	E	
A	∞	∞	∞	∞	∞	0
B	∞	∞	∞	∞	∞	0
C	∞	∞	∞	∞	2	2
D	∞	∞	∞	∞	∞	0
E	11	∞	∞	∞	∞	11
						13

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	∞	0
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	0	∞	∞	∞	∞

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	11	∞	0
C	0	∞	∞	∞	2
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	11	∞	0	∞	∞

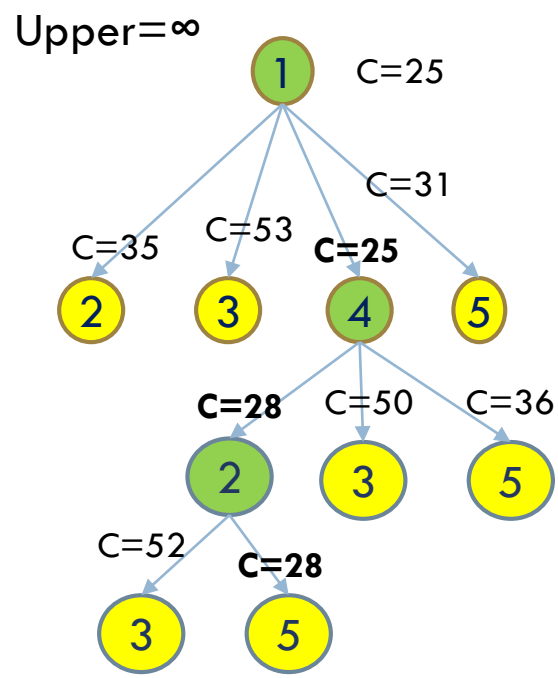
Reduced Cost=28

(2,5)

	A	B	C	D	E	
A	∞	∞	∞	∞	∞	0
B	∞	∞	∞	∞	∞	0
C	0	∞	∞	∞	∞	0
D	∞	∞	∞	∞	∞	0
E	∞	∞	0	∞	∞	0
	0	0	0	0	0	0

Total cost reduction is 0

$$\text{Cost} = C(2,5) + C(P) + r^A = 0 + 28 + 0 = 28$$



	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	∞	∞	0	∞	∞

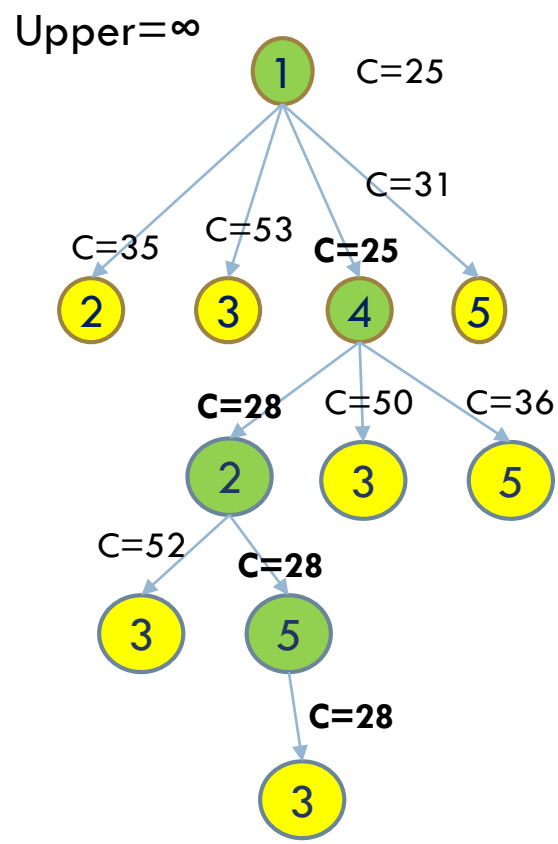
	A	B	C	D	E
A	∞	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞
C	0	∞	∞	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	∞
E	∞	∞	0	∞	∞

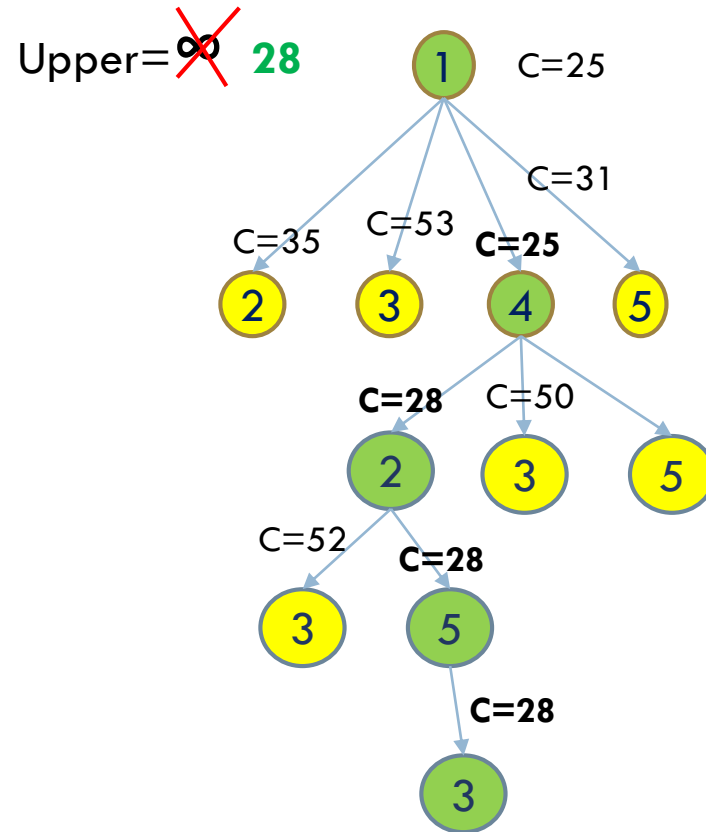
Reduced Cost=28

(5,3)

	A	B	C	D	E	
A	∞	∞	∞	∞	∞	0
B	∞	∞	∞	∞	∞	0
C	∞	∞	∞	∞	∞	0
D	∞	∞	∞	∞	∞	0
E	∞	∞	∞	∞	∞	0
	0	0	0	0	0	0

$$\text{Cost} = C(5,3) + C(p) + r^A = 0 + 28 + 0 = 28$$



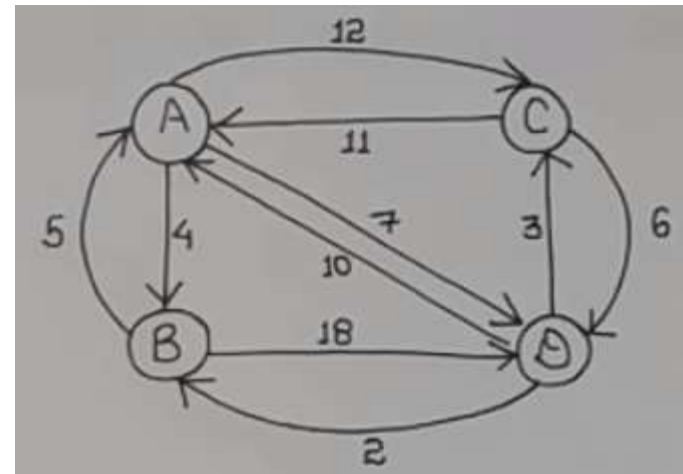


Problem-2

20

Initial Cost Matrix

	A	B	C	D
A	∞	4	12	7
B	5	∞	∞	18
C	11	∞	∞	6
D	10	2	3	∞



Problem-3

21

Consider the graph shown. ✓
TSP tour in the graph is A-B-D-C-A.
The cost of the tour is $10 + 25 + 30 + 15$
i.e. 80

