

Лабораторная работа №2

Ссылки, таблицы и формулы в несколько строк

13 марта 2022 г.

1 Первое задание

1. Разложения. Сталкиваясь с разного рода задачами, мы нуждаемся в определенном типе индуктивных рассуждений. В различных областях математики встречаются некоторые задачи, требующие индуктивных рассуждений типичного характера. Настоящая глава несколькими примерами иллюстрирует этот тезис. Мы начинаем с относительно простого примера.

Разложить по степеням x функцию $1/(1 - x + x^2)$.

Эта задача может быть решена многими способами. Нижеследующее решение несколько громоздко, но оно основано на правильном принципе и может естественно прийти в голову умному начинающему, который знает немного, но все же по крайней мере знает сумму геометрической прогрессии:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1 - r}$$

В нашей задаче есть возможность воспользоваться этой формулой:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{1-x(1-x)} \\
& = 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + x^3(1-x)^3 + \dots = \\
& = 1 + x - x^2 + \\
& \quad + x^2 - 2x^3 + x^4 + \\
& \quad + x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6 + \\
& \quad + x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8 + \dots \\
& \quad + x^5 - 5x^6 + 10x^7 - 10x^8 + \dots \\
& \quad + x^6 - 6x^7 + 15x^8 - \dots \\
& \quad + x^7 - 7x^8 + \dots \\
& \quad + x^8 - \dots \\
& = 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 + \dots
\end{aligned}$$

2 Второе задание. Малые таблицы. 1

Число делящихся элементов	Число частей при делении		
	пространства плоскостями	плоскости прямыми	прямой точками
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15		5
...
n			$n+1$

3 Третье задание

Таблица VI

Общее число совпадений, наблюдаемых и теоретических (Гипотеза II)

	Совпадения		Отклонения	
	Наблюдаемые	Ожидаемые	Фактические	Стандартные
10 языков	171	42,66	128,34	7,60
9 языков с венг.	8	8,53	-0,53	2,78

4 Четвертое задание. Нумерация и системы

1

5. Семи неравенствам

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 2, \quad (2)$$

$$-x_1 - 3x_2 \leq 3, \quad (3)$$

$$2x_1 \leq 3, \quad (4)$$

$$-x_1 \leq 3, \quad (5)$$

$$-3x_1 + 7x_2 \leq 21, \quad (6)$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 3 \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 6, \\ x_1 + x_2 & \leq & 2, \\ -x_1 - 3x_2 & \leq & 3, \\ 2x_1 & \leq & 3, \\ -x_1 & \leq & 3, \\ -3x_1 + 7x_2 & \leq & 21, \\ x_1 - 3x_2 & \leq & 3 \end{array} \right. \quad (S)$$

5 Пятое задание. Нумерация и системы

2

75. 1) Пусть f — непрерывная на X функция, $a, b \in R, a < b$. Доказать, что функция

$$f(a; b; x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } a \leq f(x) \leq b, \\ a, & \text{если } f(x) < a, \\ b, & \text{если } f(x) > b, \end{cases}$$

также непрерывна на X .

6 Шестое задание. Стандартные длинные формулы

С другой стороны известно, что монотонно возрастающая ограниченная последовательность чисел имеет конечный предел. Следовательно,

если мы докажем, что последовательность чисел x_n ограничена, то будет доказана и содимость ряда (26). Положим

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots \dots \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Так как

$$y_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} \right) - \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha} \right) - \dots - \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha} \right) - \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

то (числа в каждой скобке положительны)

$$y_{2n} < 1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} y_{2n} &= 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \\ &+ \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \right. \\ &+ \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha} \Big) - \\ &- 2 \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \right. \\ &+ \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha} \Big) - \frac{2}{2^\alpha} \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Так как $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$, то

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n.$$