Лабораторная работа №2

Ссылки, таблицы и формулы в несколько строк

13 марта 2022 г.

1 Первое задание

1. Разложения. Сталкиваясь с разного родя задачами, мы нуждаемся в определенном типе индуктивных рассуждений. В различны областях математики встречаются некоторые задачи, требующие индуктивных рассуждений типичного характера. Настоящая глава несколькими примерами иллюстрирует этот тезис. Мы начинаем с относительно простого примера.

Разложить по степеням x функцию $1/\left(1-x+x^2\right)$.

Эта задача может быть решена многими способами. Нижеследующее решение несколько громоздко но оно основано на правильном принципе и может естественно прийти в голову умному начинающему, который знает немного, но все же по крайней мере знает сумму геометрической прогрессии:

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}$$

В нашей задаче есть возможность воспользоваться этой формулой:

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{1-x\left(1-x\right)}$$

$$=1+x\left(1-x\right)+x^2\left(1-x\right)^2+x^3\left(1-x\right)^3+\cdots=$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + x - x^2 + \\
&\qquad + x^2 - 2x^3 + x^4 + \\
&\qquad\qquad + x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6 + \\
&\qquad\qquad\qquad + x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8 + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + x^5 - 5x^6 + 10x^7 - 10x^8 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x^6 - 6x^7 + 15x^8 - \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x^7 - 7x^8 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x^8 - \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
&= 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 \quad \ldots
\end{aligned}
$$

2 Второе задание. Малые таблицы. 1

Число делящихся элементов	Число частей при делении		
	пространства плоскостями	плоскости прямыми	прямой точками
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15		5
…	…	…	…
n			$n+1$

3 Третье задание

Таблица VI

Общее число совпадений, наблюдаемых и теоретических (Гипотеза II)

	Совпадения		Отклонения	
	Наблюдаемые	Ожидаемые	Фактические	Стандартные
10 языков	171	42,66	128,34	7,60
9 языков с венг.	8	8,53	−0,53	2,78

4 Четвертое задание. Нумерация и системы 1

5. Семи неравенствам

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leqslant 6, && (1)\\
x_1 + x_2 &\leqslant 2, && (2)\\
-x_1 - 3x_2 &\leqslant 3, && (3)\\
2x_1 \qquad &\leqslant 3, && (4)\\
-x_1 \qquad &\leqslant 3, && (5)\\
-3x_1 + 7x_2 &\leqslant 21, && (6)\\
x_1 - 3x_2 &\leqslant 3 && (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 & \leqslant 6,\\
x_1 + x_2 & \leqslant 2,\\
-x_1 - 3x_2 & \leqslant 3,\\
2x_1 & \leqslant 3,\\
-x_1 & \leqslant 3,\\
-3x_1 + 7x_2 & \leqslant 21,\\
x_1 - 3x_2 & \leqslant 3
\end{cases} \tag{S}
$$

5 Пятое задание. Нумерация и системы 2

75. 1) Пусть f — непрерывная на X функция, $a, b \in R, a < b$. Доказать, что функция

$$
f(a;b;x) = \begin{cases}
f(x), & \text{если } a \leqslant f(x) \leqslant b,\\
a, & \text{если } f(x) < a,\\
b, & \text{если } f(x) > b,
\end{cases}
$$

также непрерывна на X.

6 Шестое задание. Стандартные длинные формулы

С другой стороны известно, что монотонно возрастающая ограниченная последовательность чисел имеет конечный предел. Следовательно, если мы докажем, что последовательность чисел x_n ограничена, то будет доказана и содимость ряда (26). Положим

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots \\ \dots \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Так как

$$y_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) - \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha}\right) - \dots - \\ - \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right) - \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

то (числа в каждой скобке положительны)

$$y_{2n} < 1.$$

С другой стороны,

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \\ + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \\ - 2\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) = \\ = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \frac{2}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Так как $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$, то

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n.$$