Лабораторная работа №2

Ссылки, таблицы и формулы в несколько строк

13 марта 2022 г.

1 Первое задание

1. Разложения. Сталкиваясь с разного родя задачами, мы нуждаемся в определенном типе индуктивных рассуждений. В различны областях математики встречаются некоторые задачи, требующие индуктивных рассуждений типичного характера. Настоящая глава несколькими примерами иллюстрирует этот тезис. Мы начинаем с относительно простого примера.

Разложить по степеням x функцию $1/\left(1-x+x^2\right)$.

Эта задача может быть решена многими способами. Нижеследующее решение несколько громоздко но оно основано на правильном принципе и может естественно прийти в голову умному начинающему, который знает немного, но все же по крайней мере знает сумму геометрической прогрессии:

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}$$

В нашей задаче есть возможность воспользоваться этой формулой:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1-x+x^2}=\tfrac{1}{1-x(1-x)}=\\
&=1+x\left(1-x\right)+x^2\left(1-x\right)^2+x^3\left(1-x\right)^3+\cdots=\\
&=1+x-x^2+\\
&\qquad +x^2-2x^3+x^4+\\
&\qquad\qquad +x^3-3x^4+3x^5-x^6+\\
&\qquad\qquad\qquad +x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +x^5-5x^6+10x^7-10x^8+\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +x^6-6x^7+15x^8+\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +x^7-7x^8+\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +x^8-\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots
\end{aligned}$$

$1 + x \qquad -x^3 - x^4 \qquad x^6 + x^7 \qquad \ldots$

2 Второе задание. Малые таблицы. 1

Число делящихся элементов	Число частей при делении		
	пространства плоскостями	плоскости прямыми	прямой точками
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15		5
...	...	...	...
n			$n+1$

3 Третье задание

Таблица VI

Общее число совпадений, наблюдаемых и теоретических (Гипотеза II)

	Совпадения		Отклонения	
	Наблюдаемые	Ожидаемые	Фактические	Стандартные
10 языков	171	42,66	128,34	7,60
9 языков с венг.	8	8,53	−0,53	2,78

4 Четвертое задание. Нумерация и системы 1

5. Семи неравенствам

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leqslant 6, && (1)\\
x_1 + x_2 &\leqslant 2, && (2)\\
-x_1 - 3x_2 &\leqslant 3, && (3)\\
2x_1 \qquad &\leqslant 3, && (4)\\
-x_1 \qquad &\leqslant 3, && (5)\\
-3x_1 + 7x_2 &\leqslant 21, && (6)\\
x_1 - 3x_2 &\leqslant 3 && (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 & \leqslant 6,\\
x_1 + x_2 & \leqslant 2,\\
-x_1 - 3x_2 & \leqslant 3,\\
2x_1 & \leqslant 3,\\
-x_1 & \leqslant 3,\\
-3x_1 + 7x_2 & \leqslant 21,\\
x_1 - 3x_2 & \leqslant 3
\end{cases} \tag{S}
$$

5 Пятое задание. Нумерация и системы 2

75. 1) Пусть f — непрерывная на X функция, $a, b \in R, a < b$. Доказать, что функция

$$
f(a;b;x) = \begin{cases}
f(x), & \text{если } a \leqslant f(x) \leqslant b,\\
a, & \text{если } f(x) < a,\\
b, & \text{если } f(x) > b,
\end{cases}
$$

также непрерывна на X.

6 Шестое задание. Стандартные длинные формулы

С другой стороны известно, что монотонно возрастающая ограниченная последовательность чисел имеет конечный предел. Следовательно, если мы докажем, что последовательность чисел x_n ограничена, то будет доказана и содимость ряда (26). Положим

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots \\ \dots \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Так как

$$y_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) - \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha}\right) - \dots - \\ - \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right) - \frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

то (числа в каждой скобке положительны)

$$y_{2n} < 1.$$

С другой стороны,

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \\ + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \\ - 2\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) = \\ = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \frac{2}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Так как $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \dots + \dfrac{1}{n^\alpha}$, то

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n.$$