Лабораторная работа №3

Важные детали

24 марта 2022 г.

1 Первое задание

Пример 18. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx. \tag{11}$$

▲ Сделав при $x \neq 0$ замену переменного $t = x - 1/x$ в соответствующем неопределенном интеграле, получим

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int \frac{d\,(x-1/x)}{2+(x-1/x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)' = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \quad x \neq 0. \tag{12}$$

Поскольку

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \lim_{x\to-0} \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

то функция

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases} \tag{13}$$

будет непрерывной на всей числовой оси, а так как согласно (12)

$$F'(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \quad x \neq 0, \tag{14}$$

то в силу непрерывности функции $(1+x^2)\,(1+x^4)$ равенство (14) верно и при $x = 0$. Таким образом, функция (13) является первообразной для подынтегральной функции интеграла (11). Поэтому

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = F(2) - F(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4} + \pi\right). \blacktriangle$$

2 Второе задание

$$\omega_i(f) = \sup_{\substack{x' \in [a;b] \\ x'' \in [a;b]}} |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, k_\tau,$$

а поэтому

$$\sum_{i=1}^{k_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{k_\tau} \Delta x_i = \varepsilon\,(b-a)\,.$$

Отсюда

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{k_\tau} \omega_i(f)\Delta x_i = 0,$$

3 Третье задание

Пример 13. Найти предел последовательности

$$s_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 1.$$

$\blacktriangle$ Поскольку сумма $s_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k-1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^\alpha$ является интегральной суммой функции $f(x) = x^\alpha$ на отрезке $[0;1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int\limits_{0}^{1} x^\alpha\,dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}. \blacktriangle$$

4 Четвертое задание

3) Используя равенство $\dfrac{1}{k\,(k+m)} = \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+m}\right)$, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+m}\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{m}\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k},$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+m)} = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right). \blacktriangle$$

5 Пятое задание

6 Вопросы.