

Лабораторная работа №3

Важные детали

24 марта 2022 г.

1 Первое задание

Пример 18. Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx. \quad (11)$$

▲ Сделав при $x \neq 0$ замену переменного $t = x - 1/x$ в соответствующем неопределенном интеграле, получим

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int \frac{d(x - 1/x)}{2 + (x - 1/x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + C$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} \right)' = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \quad x \neq 0. \quad (12)$$

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

то функция

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (13)$$

будет непрерывной на всей числовой оси, а так как согласно (12)

$$F'(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}, \quad x \neq 0, \quad (14)$$

то в силу непрерывности функции $(1+x^2)(1+x^4)$ равенство (14) верно и при $x = 0$. Таким образом, функция (13) является первообразной для подынтегральной функции интеграла (11). Поэтому

$$\int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = F(2) - F(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{4} + \pi \right). \blacktriangle$$

2 Второе задание

$$\omega_i(f) = \sup_{\substack{x' \in [a;b] \\ x'' \in [a;b]}} |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, k_\tau,$$

а поэтому

$$\sum_{i=1}^{k_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{k_\tau} \Delta x_i = \varepsilon (b-a).$$

Отсюда

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{k_\tau} \omega_i(f) \Delta x_i = 0,$$

3 Третье задание

Пример 13. Найти предел последовательности

$$s_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 1.$$

\blacktriangle Поскольку сумма $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$ является интегральной суммой функции $f(x) = x^\alpha$ на отрезке $[0; 1]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}. \blacktriangle$$

4 Четвертое задание

3) Используя равенство $\frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right)$, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+m} \right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k},$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k},$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right). \blacktriangle$$

5 Пятое задание

Определение предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$M \stackrel{def}{=} \left\{ f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \underbrace{1 + \cdots +}_{n \text{ единиц}} \right\}$$