

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

ЗНАКОМСТВО С ГРАФИКОЙ

Компьютерная математика
БГУ, ММФ, 1 курс, КМ
доц. Малевич А.Э.,
доц. Щеглова Н.Л.,
доц. Лаврова О.А.
ноябрь 2021

Задание 1 (Секущая прямая к заданной кривой)

Постройте функцию `CurveSecant[f, x0, x1, dx]`, которая отображает заданную кривую $y=f(x)$ и секущую по отношению к ней прямую, проходящую через точки с абсциссами $x_0 < x_1$ из области определения функции $y=f(x)$. Аргумент `dx` задает приращения x_0-dx , x_1+dx абсцисс.

Выполнение Задания 1

Построим секущую графика функции $y=f(x)$. Две различные точки, принадлежащие кривой, и через которые проходит искомая секущая прямая, отобразим как отдельные графические объекты. Пусть эти точки имеют координаты $\{x_0, f(x_0)\}$, $\{x_1, f(x_1)\}$:

```
Point[{#, f[#]}] & /@ {x0, x1}
{Point[{x0, f[x0]}], Point[{x1, f[x1]}]}
```

Чтобы построить секущую прямую, используем примитив **Line**. Для него укажем координаты точек, которые принадлежат секущей прямой и абсциссы которых лежат левее меньшей координаты x_0 и правее большей координаты x_1 .

Функция `CurveSecant[f, x0, x1, dx]` отображает (рис. 1, а) секущую по отношению к кривой $y = f(x)$ прямую, проходящую через точки кривой с абсциссами x_0 и x_1 , $x_0 < x_1$. Аргумент `dx` задает приращения этих абсцисс, оговоренные выше.

```
Secant[f_, x0_, x1_, dx_] :=
Graphics[{AbsolutePointSize[9], Hue[2/3],
  Point[{#, f[#]}] & /@ {x0, x1},
  Line[{
    {x0 - dx, (k = (f[x1] - f[x0]) / (x1 - x0)) (-dx) + f[x0]},
    {x1 + dx, k (x1 + dx - x0) + f[x0]}
  ]}], Axes -> True,
PlotRange -> {{x0 - dx, x1 + dx}, {f[x0] - dx, f[x1] + dx}}]
Secant[Power[#, 3] &, 0, .7, .2]
```

Функция `CurveSecant[f, x0, x1, dx]` строит график функции $y = f(x)$ и секущую этого графика (рис. 1, б):

```
CurveSecant[f_, x0_, x1_, dx_] :=  
  Show[Plot[f[x], {x, x0 - dx, x1 + dx}], Secant[f, x0, x1, dx]]  
CurveSecant[Power[#, 3] &, 0, .7, .2]
```

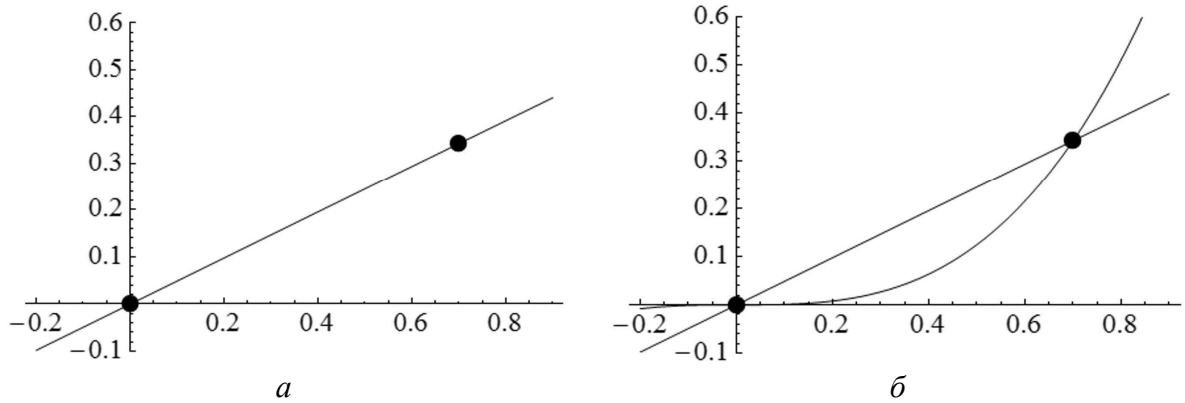


Рис.1. График функции $y=x^3$ и его секущая

Задание 2 (Замкнутая ломаная)

Постройте функцию, вычисляющую графическое представление замкнутой ломаной.

Выполнение задания 2

Обратимся к математическому определению понятия ломаная линия.

Ломаная линия – это объединение отрезков, в котором конец каждого отрезка (кроме, возможно, последнего) является началом следующего отрезка, причем отрезки, имеющие общий конец, не лежат на одной прямой. Ломаная линия замкнута, если конец последнего отрезка совпадает с началом первого отрезка. Концы отрезков называют вершинами ломаной, отрезки, составляющие ломаную, – звеньями ломаной, отрезки, имеющие общий конец – смежными звеньями ломаной.

Построим объект «Замкнутая Ломаная», представим его в компьютерной системе *Mathematica*. Из определения следует, что в представлении объекта «Замкнутая Ломаная» нужно указать список P_0, P_1, \dots, P_n точек-координат вершин ломаной. Кроме того, в представлении мы хотим отразить следующее свойство замкнутой ломаной: количество вершин.

В *Mathematica* все есть выражение, поэтому представим объект Замкнутая Ломаная в виде выражения

BreakLine[Counter, Verticies], (1)

где Counter – количество вершин, Verticies – список координат вершин.

Построим функцию **showBreakLine**, которая отображает Замкнутую Ломаную вида (1). Глобальное определение функции будет иметь вид:

showBreakLine[BL_BreakLine]:=FunctionBody (2)

Функция **showBreakLine** будет отображать:

- вершины Замкнутой Ломаной;
- звенья Замкнутой Ломаной;
- порядковые номера последовательно поступающих точек-вершин.

Прежде чем построить описанную выше функцию **showBreakLine**, последовательно обучимся строить указанные элементы: вначале отобразим вершины, затем добавим звенья, и, наконец, для каждой точки-вершины ломаной линии укажем порядковый номер ее поступления.

Сгенерируем экземпляр объекта Замкнутая Ломаная вида (1), задавая координаты точек произвольным образом.

```
Size = 50;
```

```
P = Table[{RandomInteger[Size], RandomInteger[Size]},  
          {RandomInteger[{3, 15]}]}];
```

```
BL = BreakLine[Length[P], P]
```

```
BreakLine[9, {{37, 4}, {46, 18}, {42, 6},  
              {50, 15}, {21, 30}, {47, 8}, {6, 37}, {4, 11}, {3, 10}}]
```

С помощью функции **RandomInteger** мы сгенерировали объект **BreakLine**.

Построим вершины Замкнутой Ломаной, используем графический примитив **Point**.

Пошагово

```
BL[[2]]
```

```
{{37, 4}, {46, 18}, {42, 6}, {50, 15},  
 {21, 30}, {47, 8}, {6, 37}, {4, 11}, {3, 10}}
```

```
Point[#]&/@BL[[2]]
```

```
{Point[{37, 4}], Point[{46, 18}], Point[{42, 6}],  
 Point[{50, 15}], Point[{21, 30}], Point[{47, 8}],  
 Point[{6, 37}], Point[{4, 11}], Point[{3, 10}]}
```

Строим выражение, которое создает и отображает вершины Замкнутой Ломаной как графический объект (рис. 2, а). Ассоциируем это вычисленное выражение с символом **Fig1**

```
Fig1 = Graphics[{AbsolutePointSize[15], Hue[.5, .8, 1],  
                 Point[#] & /@BL[[2]]}, AspectRatio → Automatic,  
                 PlotRange → {{-1, Size + 1}, {-1, Size + 1}}, Axes → True]
```

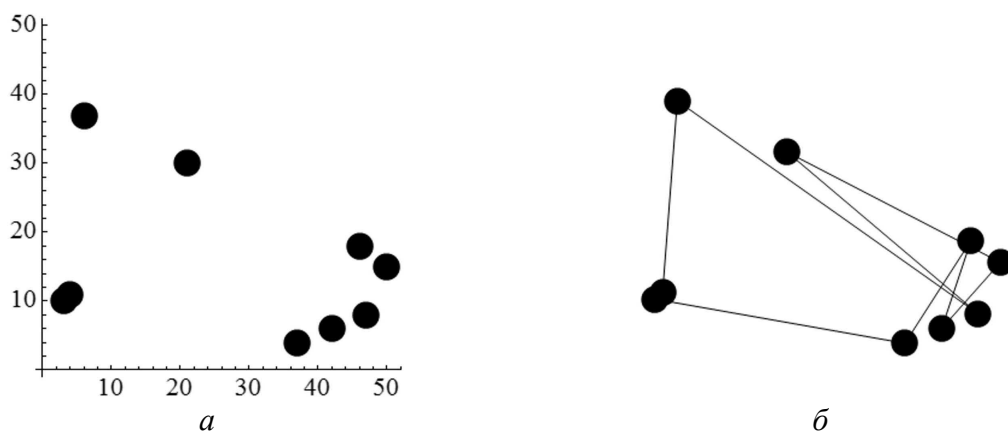


Рис. 2. Построение вершин и звеньев ломаной линии

Далее построим звенья ломаной линии **BL**, используем графический примитив **Line**. Чтобы замкнуть звенья, добавим первую вершину в конец списка координат вершин:

```
{Hue[0.051], Append[BL[[2]], BL[[2, 1]] // Line}
{■, Line[{{37, 4}, {46, 18}, {42, 6}, {50, 15},
{21, 30}, {47, 8}, {6, 37}, {4, 11}, {3, 10}, {37, 4}}]}
```

Строим выражение, которое строит и отображает звенья Замкнутой Ломаной как графический объект (рис. 2, б). Ассоциируем это вычисленное выражение с символом **Fig2**

Fig2 =

```
Graphics[{{AbsolutePointSize[15], Hue[.5, .8, 1], Point /@ BL[[2]]},
{Hue[.5, .7, .4], Append[BL[[2]], BL[[2, 1]] // Line}},
AspectRatio → Automatic,
PlotRange → {{-1, Size + 1}, {-1, Size + 1}}]
```

Рассмотрим далее следующую задачу: подписать вершины ломаной линии **BL** в порядке их следования в списке. Используем функцию **MapIndexed[func, expr, levelspec]** и графический примитив **Text**.

Согласно спецификации функции **MapIndexed**, аргумент **func** является функцией двух переменных. Для различения первого и второго аргументов функции **func** используют символы **#1** и **#2**, соответственно. При вычислении функции **MapIndexed** на место первого **#1** аргумента функции **func** подставляется очередное подвыражение выражения **expr**, стоящее на уровне, указываемом **levelspec**. На место второго **#2** аргумента **func** – позиция этого подвыражения в структуре выражения **expr**.

По умолчанию, когда **MapIndexed** вызывается только с двумя аргументами, в выражении **expr** обрабатываются только подвыражения первого уровня.

Выражение **BL [[2]]** является списком, каждый элемент которого – список, представляющий координаты одной вершины ломаной. Поэтому для отображения номера вершины используем ее позицию (**#2**) в списке **BL [[2]]**.

```
MapIndexed[Text[First[#2, #1] &, BL[[2]]]
```

```
{Text[1, {37, 4}], Text[2, {46, 18}], Text[3, {42, 6}],  
Text[4, {50, 15}], Text[5, {21, 30}], Text[6, {47, 8}],  
Text[7, {6, 37}], Text[8, {4, 11}], Text[9, {3, 10}]}
```

Подготовим отображение и точки, и ее номера:

```
MapIndexed[{{Point[#1]}, Text[First[#2, #1]]} &, BL[[2]]]
```

```
{{{Point[{37, 4}]}, Text[1, {37, 4}]},  
{{Point[{46, 18}]}, Text[2, {46, 18}]},  
{{Point[{42, 6}]}, Text[3, {42, 6}]},  
{{Point[{50, 15}]}, Text[4, {50, 15}]},  
{{Point[{21, 30}]}, Text[5, {21, 30}]},  
{{Point[{47, 8}]}, Text[6, {47, 8}]},  
{{Point[{6, 37}]}, Text[7, {6, 37}]},  
{{Point[{4, 11}]}, Text[8, {4, 11}]},  
{{Point[{3, 10}]}, Text[9, {3, 10}]}}
```

Отобразим в графической области объект Замкнутая Ломаная (рис. 3), отмечая точками ее вершины и нумеруя их:

Fig3 =

```
Graphics[{AbsolutePointSize[15],  
MapIndexed[  
{{Hue[.9, .4, 1], Point[#1]}, Text[First[#2, #1]]} &, BL[[2]]},  
Hue[.7, .8, 1], Append[BL[[2]], BL[[2, 1]] // Line},  
AspectRatio → Automatic,  
PlotRange → {{-1, Size + 1}, {-1, Size + 1}}]
```

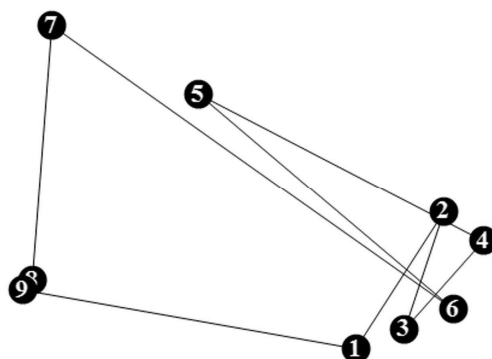


Рис. 3. Ломаная линия с занумерованными вершинами

Обобщая все выполненные ранее построения, построим функцию **showBreakLine** вида (2). Ее определим на выражениях, имеющих структуру вида (1)

```

ClearAll[showBreakLine]
showBreakLine[BL_BreakLine] :=
Graphics[{AbsolutePointSize[15], Hue[.9, .4, .1],
  Point[#] & /@ BL[[2]], Hue[.7, .8, 1],
  Line[Append[BL[[2]], BL[[2, 1]]],
  MapIndexed[{Text[First@#2, #1] &, BL[[2]]}],
  AspectRatio → Automatic, Axes → True,
  PlotRange →
  {{-1, Max[Table[BL[[2, i, 1]], {i, 1, Length[BL[[2]]}]] + 1},
  {-1, Max[Table[BL[[2, i, 2]], {i, 1, Length[BL[[2]]}]] + 1}}]}

```

Задание 3 (График параметрической функции)

- 1) Постройте график функции, заданной параметрическими уравнениями. Используйте встроенную функцию **ParametricPlot**.
- 2) Напишите выражение, которое вычисляет список координат **n** точек, принадлежащих графику функции, заданной параметрическими уравнениями.
- 3) Отобразите в одной графической области график функции из п.1 и точки, вычисленные в п.2. Над каждой точкой укажите значение параметра, при котором вычислены ее координаты.

$$1) \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2 \sec^2 t. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 + 2 \cos t}, \\ y = \frac{\sin t}{1 + 2 \cos t}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$$