

### Структура выражения

Цель работы: Изучить базовую структуру данных, которую использует *Mathematica*. Приобрести навыки анализа структуры выражения, построения и использования чистых функций.

#### Выполнение работы

### 1. Построение чистых функций

#### Задание 1.1

Постройте указанные многочлены

- а) однородный многочлен степени  $n$  от двух переменных с неопределенными коэффициентами  $a[i, j]$ ;
- б) многочлен степени  $n$  от одной переменной с неопределенными коэффициентами  $a[i]$ .
- в) многочлен степени  $n$  от двух переменных с неопределенными коэффициентами  $a[i, j]$ ;

#### Выполнение задания 1.1

Моном (одночлен) – выражение, являющееся произведением числового множителя и одной или нескольких переменных, взятых каждая в неотрицательной целой степени.

Полином (многочлен) – сумма мономов.

Степень монома – сумма степеней переменных, входящих в него.

Степень полинома – наибольшая из степеней мономов, входящих в полином.

Многочлен степени  $n$  от одной переменной имеет вид

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, a_i \in R, i = 0, \dots, n \quad (1.1)$$

Однородный многочлен – полином, каждый моном которого имеет одну и ту же степень.

Однородные многочлены от двух переменных степени  $n$  имеют вид:

первой степени  $p_1(x, y) = a_{1,0}x + a_{0,1}y$ ,

второй степени  $p_2(x, y) = a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$ ,

третьей степени  $p_3(x, y) = a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$ .

Здесь  $x$  и  $y$  являются переменными,  $a_{i,j} \in R, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n$ .

Многочлен степени  $n$  от двух переменных имеет вид

$$P_n(x, y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + \dots + a_{1,n-1}xy^{n-1} + a_{0,n}y^n,$$

где  $a_{i,j} \in R, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n$ . (1.2)

Многочлен (1.2) можно записать как сумму однородных многочленов

$$P_n(x, y) = p_0(x, y) + p_1(x, y) + p_2(x, y) + \dots + p_n(x, y),$$

где  $p_i(x, y), i = 0, \dots, n$  являются однородными многочленами.

### Выполнение задания 1.1а)

Построим *однородный* многочлен степени  $n$  от двух переменных с неопределенными коэффициентами  $a[i, j]$ .

Зафиксируем степень многочлена  $n$  и осуществим в вычисляемую ячейку типа Input ввод выражения (1.3), представляющего однородный многочлен от двух переменных в общем виде, степени  $n$

**n = 1;**

$$\sum_{i=0}^n a[n-i, i] x^{n-i} y^i \quad y a[0, 1] + x a[1, 0] \quad (1.3)$$

Убедитесь в том, что многочлен построен правильно. Для этого изменяйте значение степени многочлена и всякий раз вычисляйте отредактированную ячейку. Обратите внимание: установка значения  $n$  и выражения, которое строит многочлен, удобнее записать в одну и ту же вычисляемую ячейку.

Задания 1.1 б) и в) выполните самостоятельно.

### Задание 1.2

Получите **список** мономов, которые содержатся в указанных многочленах:

а) однородный многочлен степени  $n$  от двух переменных с неопределенными коэффициентами  $a[i, j]$ ;

б) многочлен степени  $n$  от одной переменной с неопределенными коэффициентами  $a[i]$ .

в) многочлен степени  $n$  от двух переменных с неопределенными коэффициентами  $a[i, j]$ ;

Выполните каждое из заданий а) – в) двумя способами: используя функцию `Apply` и чистую функцию `Function`.

## Выполнение задания 1.2

а) получить список мономов однородного многочлена степени  $n$  от двух переменных с неопределенными коэффициентами  $a[i, j]$

Способ 1.

Построим искомый многочлен, используя выражение (1.3), затем к полученному результату применим функцию **Apply**

`n = 4;`

`List@@ (Sum[a[n - i, i] xn-i yi, {i, 0, n}])`  
`{y4 a[0, 4], x y3 a[1, 3], x2 y2 a[2, 2], x3 y a[3, 1], x4 a[4, 0]}`

Напишите в текстовой ячейке, как отработала функция **Apply**. При этом для анализа структуры выражения используйте функции **FullForm** и **Head**.

Способ 2.

Запишем общий вид, который имеет моном однородного многочлена двух переменных. Зафиксируем степень  $n$  многочлена – например,  $n = 4$ . Используем анонимную функцию

`a[4 - #, #] x4-# y# &`

Далее используем структуру повторения, функцию **Map** в виде операции `/@`, которая позволит на каждом шаге цикла подставлять на место `#` значения переменной цикла.

`a[4 - #, #] x4-# y# & /@ {0, 1, 2, 3, 4}`  
`{x4 a[4, 0], x3 y a[3, 1], x2 y2 a[2, 2], x y3 a[1, 3], y4 a[0, 4]}`

Чтобы иметь возможность управлять степенью полинома, указывая ее лишь в одном месте, используем символ `n`, задавая ему конкретное значение. Это также позволит получать список значений переменной цикла посредством встроенной функции **Range**

**n = 4;**

**a[n - #, #] x<sup>n-#</sup> y<sup>#</sup> & /@ Range[0, n]**

**{x<sup>4</sup> a[4, 0], x<sup>3</sup> y a[3, 1], x<sup>2</sup> y<sup>2</sup> a[2, 2], x y<sup>3</sup> a[1, 3], y<sup>4</sup> a[0, 4]}**

Задания 1.2 б) и в) выполните самостоятельно.

### Задание 1.3

Подберите одну из возможных формул  $n$ -го члена заданной числовой последовательности. Убедитесь в правильности построения, записав  $n$ -ый член в виде чистой функции и вычислив первые 7 членов последовательности. Постройте график зависимости значения члена последовательности от номера члена. Используйте функцию **ListPlot**.

Вариант задания указывает преподаватель.

- |   |   |
|---|---|
| 1) 1; 2; 6; 24; 120; ...  | 6) 6; 12; 24; 48; 96; ...   |
| 2) $-\frac{1}{2}$ ; $\frac{2}{3}$ ; $-\frac{3}{4}$ ; $\frac{4}{5}$ ; $-\frac{5}{6}$ ; ... | 7) $1$ ; $\frac{4}{3}$ ; $\frac{9}{5}$ ; $\frac{16}{7}$ ; $\frac{25}{9}$ ; ...                                |
| 3) 0; 5; 8; 17; 24; ...   | 8) 1; 5; 19; 65; 211; ...   |
| 4) 19; 32; 45; 58; 71; ...  | 9) 99; 74; 49; 24; -1; ...  |
| 5) $1$ ; $\frac{3}{4}$ ; $\frac{4}{6}$ ; $\frac{5}{8}$ ; $\frac{6}{10}$ ; ...             | 10) $\frac{1.7}{3.5}$ ; $\frac{2.8}{4.6}$ ; $\frac{3.9}{5.7}$ ; $\frac{4.10}{6.8}$ ; $\frac{5.11}{7.9}$ ; ... |

### Выполнение задания 1.3

Выполните самостоятельно.

### Задание 1.4

Приведите заданное рациональное уравнение к виду  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ , при этом числитель  $P(x)$  должен быть разложен на множители, до линейных и квадратичных с отрицательным дискриминантом множителей.

Используйте функции **FullForm**, **Head**, **Numerator**, **Denominator**, **Factor**, **Together**. Постройте выражение-однострочник, содержащее чистые функции в постфиксной записи и выполняющее поставленную задачу.

Вариант задания указывает преподаватель.

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\frac{x-1}{x^3+3x^2+x+3} + \frac{1}{x^4-1} = \frac{x+2}{x^3+3x^2-x-3}$      | 6) $\frac{25}{4x^2+1} - \frac{8x+29}{16x^4-1} = \frac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1}$             |
| 2) $\frac{2x+7}{x^2+5x-6} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x+3}$                | 7) $\frac{x^2+x+16}{x^2-x+1} - \frac{36-x}{x^3+1} = \frac{x-6}{x+1}$                      |
| 3) $\frac{6}{x^3-7x^2-7x+1} - \frac{8}{x^3-8x^2+x} = \frac{1}{x^2+x}$           | 8) $\frac{x^2-2x+4}{x^3-2x^2+4x-8} + \frac{x^2+2x+4}{x^3+2x^2+4x+8} = \frac{2x+2}{x^2-4}$ |
| 4) $\frac{38}{x^4-x^2+20x-100} + \frac{x+10}{x^2-x+10} = \frac{x+10}{x^2+x-10}$ | 9) $\frac{4x}{8x^3+1} + \frac{1}{16x^4-4x^2+4x-1} = \frac{2}{4x^2+2x-1}$                  |

$$5) \frac{1-2x}{6x^2+3x} + \frac{2x+1}{14x^2-7x} = \frac{8}{12x^2-3}$$

$$10) \frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3}$$

#### Выполнение задания 1.4

Выполните самостоятельно, *пошагово* познавая структуры выражений, с которыми работаете, посредством функций **FullForm** и **Head**. Результаты Ваших исследований должны быть созвучны итоговому однострочнику

$$\frac{1-2x}{6x^2+3x} + \frac{2x+1}{14x^2-7x} == \frac{8}{12x^2-3} //$$

`MapAt[-# &, #, 2] & //`

`Apply[Plus, #] & //`

`Together`

$$-\frac{4(1+2x)}{21x(-1+2x)}$$

## 2. Анализ структуры выражения

### Задание 2.1

Изучите возможности исследования структуры заданного выражения посредством функций `FullForm`, `TreeForm`, `Level`, `Depth`.

Варианты задания указывает преподаватель.

$$1) x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}; \quad x \geq 0;$$

$$2) \ln \left( \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} \right) + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}; \quad b \neq 0;$$

$$3) \ln \left( \frac{b+a \cos x + \sqrt{b^2-a^2} \sin x}{a+b \cos x} \right); \quad 0 \leq |a| \leq |b|;$$

$$4) \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right); \quad a > b > 0;$$

$$5) \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x};$$

$$6) \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}; \quad a > 0;$$

$$7) -\sqrt{a^2-x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}; \quad a > 0;$$

$$8) \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a+x\sqrt{b}}}{\sqrt{a-x\sqrt{b}}}; \quad a > 0; b > 0;$$

$$9) e^{ax} \left( \frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right);$$

$$10) \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

### Выполнение задания 2.1

- 1) Ознакомьтесь со встроенной функцией `Set`, позволяющей определять глобальные правила преобразования.
- 2) Введите заданное выражение в вычисляемую ячейку текущей подсекции, ассоциируйте его с символом `expr1`. Для этого используйте функцию `Set` в виде операции `=`. Проверьте определение, вычисляя выражение `?expr1`. В дальнейшем, чтобы указать заданное выражение, используйте символ `expr1`.
- 3) Представьте заданное выражение в виде дерева. Используйте функцию `TreeForm` и символ `expr1`, с которым *Mathematica* ассоциировала заданное выражение.
- 4) Изучите полученные поддеревья подвыражений выражения `expr1`, сравните их с соответствующей стандартной нотацией. Чтобы увидеть стандартную форму записи подвыражения, наведите указатель мыши на голову нужного подвыражения в дереве выражения. Стандартная форма подвыражения будет отображена во всплывающем прямоугольнике.
- 5) Получите полную форму выражения `expr1`. Сформулируйте в текстовой ячейке основное правило ее построения, сравнивая полную форму выражения и представление выражения в виде дерева.
- 6) Извлеките последовательно из выражения `expr1` подвыражения, находящиеся на первом уровне, на втором и т. д. уровнях. Используйте функцию `Level`. В описании функции внимательно прочитайте раздел `Details and Options`.
- 7) Что находится на нулевом уровне выражения `expr1`? Любого выражения? Выражение какого типа возвращает функция `Level`?
- 8) Вычислите глубину выражения `expr1`, используя функцию `Depth`. Как соотносится результат вычисления с количеством уровней? Как указать номер последнего уровня произвольного выражения `expr`, используя функцию `Depth`?
- 9) Определите число уровней выражения `expr1`. Каково максимальное натуральное число `n`, при котором вычисленное выражение `Level[expr1, {n}]` возвращает непустой список? Как это число согласуется с результатом вычисления функции `Depth[expr1]`?
- 10) Получите посредством функции `Level` все подвыражения выражения `expr1`, имеющие глубину 1, глубину 2.

11) Вычислите пары выражений `Level[expr1, {Depth[expr1]-1}]` и `Level[expr1, {-1}]`, `Level[expr1, {Depth[expr1]-2}]` и `Level[expr1, {-2}]`, сравните полученные результаты и сделайте выводы.

## Задание 2.2

Форматируйте структуру заданного выражения, используя функции `Head`, `Table`, `MatrixForm`. Используйте чистые (анонимные, безымянные) функции и функцию `Map`.

### Выполнение задания 2.2

- 1) Пользуясь системой справки, сравните функцию `Table` и оператор `Do`. Что такое итератор, каковы формы его записи?
- 2) Используя функцию `Table`, получите список,  $i$ -м элементом которого является список подвыражений  $i$ -го уровня исходного выражения.
- 3) Представьте полученный в предыдущем пункте список в виде матрицы, элементами которой являются списки подвыражений  $i$ -го уровня выражения `expr1`. Используйте постфиксную форму записи функции `MatrixForm`.
- 4) Получите список, содержащий головы каждого из подвыражений указанного уровня (первого, второго,  $i$ -го уровня) выражения `expr1`. Для этого используйте функцию `Head` и функцию `Map` как операцию `/@`, представляя выражение в виде `function /@ expression`.
- 5) Получите список списков, где элементами каждого из списков являются головы подвыражений  $i$ -го уровня выражения `expr1`. Используйте результаты пункта 14 и функцию `Table` с итератором `{i, 0, Depth[expr1]-1}`. Для наглядности подействуйте на полученный результат функцией `MatrixForm` в постфиксной форме записи.
- 6) Получите список, элементами которого являются списки вида  $\{\text{ГоловаАргумента}_i, \text{Аргумент}_i\}$ ,  $i=1, \dots, \text{Length}[\text{expr1}]$ , где  $\text{Аргумент}_i$  -  $i$ -й аргумент выражения `expr1`. Используйте безымянную функцию `{Head[#], #}&`, операцию `/@` и функцию `Level`.
- 7) Используя функцию `MatrixForm`, представьте последний результат в виде списка элементов

$$\begin{pmatrix} \text{Голова Аргумента}_i \\ \text{Аргумент}_i \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

- 8) Для каждого из подвыражений выражения `expr1` получите список элементов вида (2.1): последовательно изменяйте значения спецификатора уровня в аргументе функции `Level`, всякий раз вычисляйте полученное выражение.

9) Постройте конструкцию повторения, автоматизирующую действия, описанные в предыдущем пункте. Используйте функцию `Table` и итератор вида `{i, 0, Depth[expr1]-1}`.

### Задание 2.3

Изучите возможности исследования структуры выражения посредством функций `AtomQ`, `Position`, `Part`, `Take`, `Length`. Используйте заданное выражение в качестве примера.

#### Выполнение задания 2.3

- 1) Определите позицию каждого из подвыражений `x`, `a`, `b`.
- 2) Извлеките из исходного выражения:
  - два последних его аргумента;
  - предпоследнее подвыражение второго уровня.

Результат получите двумя способами: используя функцию `Part` и функцию `Take`.

- 3) С помощью булевой функции `AtomQ` определите, имеются ли атомарные выражения среди аргументов (подвыражений первого уровня) выражения `expr1`, а также среди его подвыражений второго уровня. Извлеките атомарные выражения, если они существуют. Используйте функции `Position` и `Part`.
- 4) Сделайте выводы о назначении каждой функции, используемой при выполнении задания 2.3.

### 3. Закрепление навыков и умений

Запишите имена всех встроенных функций *Mathematica*, которые Вы использовали при выполнении практикума. Выучите назначение этих функций, закрепите навыки работы с ними, используя «живые примеры» в документах системы справки.

### Литература

1. Голубева Л.Л., Малевич А.Э., Щеглова Н.Л. Компьютерная математика. Символьный пакет *Mathematica*. Лаб. практикум в 2 ч. Ч 1. - Минск: БГУ, 2012. – 235 с.