STUDY NOTES

अध्याय 3 — LCM व HCF

गणित मास्टर नोट्स

05 August 2026

विस्तृत

अध्याय 3 — LCM व HCF (लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक)

3.1 ◎ परिचय व वेटेज

अध्याय 2 में हमने संख्या को अभाज्य कणों में तोड़ना सीखा। अब उसी कौशल का **सीधा उपयोग** है — दो या अधिक संख्याओं के **साझा** और **संयुक्त** गुणनखंड निकालना।

परीक्षा	सीधे प्रश्न	प्रमुख प्रकार
SSC CGL Tier-1	1-2	शब्द समस्या, शेषफल
SSC CGL Tier-2	2-3	अनुपात + LCM, भिन्न
SSC CHSL / MTS / GD	1-2	घंटी, रस्सी, टाइल
RRB NTPC / Group D	2-3	LCM-HCF शब्द समस्या
IBPS / SBI	1	समय-कार्य में परोक्ष
UP Police SI	2-3	शब्द समस्या
Super TET	2	बुनियादी LCM-HCF

🔑 **आगे कहाँ काम आएगा:** समय-कार्य (LCM विधि), पाइप-टंकी, घंटी-चक्र, भिन्न जोड़ना, और अनुपात — सब इसी पर टिके हैं।

3.2 🧠 मूल अवधारणा — सरल भाषा में

HCF (महत्तम समापवर्तक) — Highest Common Factor

वह **सबसे बड़ी** संख्या जो दी गई सभी संख्याओं को **पूरा-पूरा बाँट** दे।

12 के गुणनखंड: 1, 2, 3, 4, 6, 12
18 के गुणनखंड: 1, 2, 3, 6, 9, 18
साझा गुणनखंड: 1, 2, 3, **6** → सबसे बड़ा 6

LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) — Lowest Common Multiple

> वह **सबसे छोटी** संख्या जो दी गई सभी संख्याओं से **पूरी-पूरी बँट** जाए।

12 के गुणज: 12, 24, **36**, 48, ...
18 के गुणज: 18, **36**, 54, ...
सबसे छोटा साझा गुणज → 36

> **कभी न भूलें:**
> **HCF** हमेशा संख्याओं से **छोटा या बराबर** — यह गुणनखंड है
> **LCM** हमेशा संख्याओं से **बड़ा या बराबर** — यह गुणज है

> **नाम से पहचानिए:** HCF में **F = Factor** (गुणनखंड, छोटा) · LCM में **M = Multiple** (गुणज, बड़ा)

3.3 अभाज्य गुणनखंडन विधि — सबसे भरोसेमंद

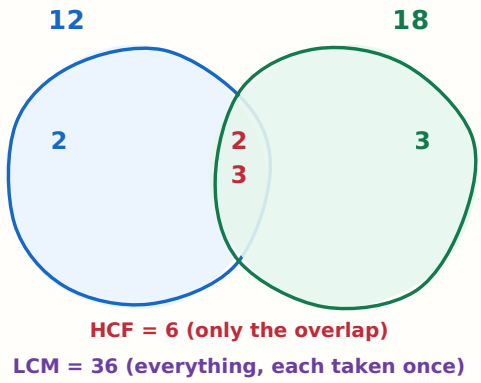
यह अध्याय 2 का सीधा विस्तार है।

$$12 = 2^2 \times 3^1 \qquad 18 = 2^1 \times 3^2$$

> **दो सुनहरे नियम**
> **HCF** = उभयनिष्ठ अभाज्यों की **सबसे छोटी** घात
> **LCM** = सभी अभाज्यों की **सबसे बड़ी** घात

$$\text{HCF} = 2^{\min(2,1)} \times 3^{\min(1,2)} = 2^1 \times 3^1 = 6$$

$$\text{LCM} = 2^{\max(2,1)} \times 3^{\max(1,2)} = 2^2 \times 3^2 = 36$$



चित्र 3.1 — 12 और 18 के अभाज्य कण — बीच का साझा भाग HCF, पूरा घेरा LCM

> 💡 **चित्र से समझिए:** दोनों वृत्तों का **साझा हिस्सा** HCF है (जो दोनों में है), और **पूरा घेरा मिलाकर** LCM (हर कण एक बार गिना गया)।

हल किया उदाहरण

उदाहरण 1. 72 और 120 का HCF व LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

$$72 = 2^3 \times 3^2 \qquad 120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

- HCF $= 2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = \mathbf{24}$ (न्यूनतम घातें; 5 दोनों में नहीं, छोड़ दिया)
- LCM $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 8 \times 9 \times 5 = \mathbf{360}$

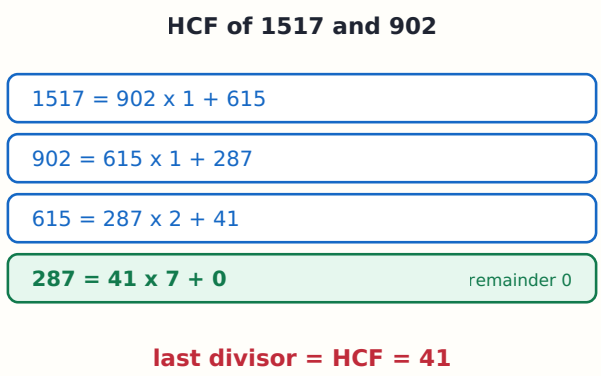
> ⚠ **ध्यान:** HCF में **केवल वही अभाज्य** लीजिए जो **सभी** संख्याओं में हों। LCM में **हर** अभाज्य लीजिए।

3.4 क्रमागत भाग विधि (यूक्लिड) — बड़ी संख्याओं के लिए

जब संख्याएँ बड़ी हों और गुणनखंडन कठिन हो, तब यह विधि तेज़ है।

विधि

बड़ी संख्या को छोटी से भाग दीजिए → शेषफल से फिर भाग दीजिए → दोहराते जाइए
जब शेषफल 0 आए, तब का भाजक ही HCF है।



चित्र 3.2 — क्रमागत भाग विधि — अंतिम भाजक ही HCF होता है

उदाहरण 2. 1517 और 902 का HCF?

$$1517 = 902 \times 1 + 615$$

$$902 = 615 \times 1 + 287$$

$$615 = 287 \times 2 + 41$$

$$287 = 41 \times 7 + 0$$

शेषफल 0 आया → **HCF** $= 41$ ✓

> 💡 **यह क्यों काम करता है?** यदि d दोनों a और b को बाँटता है, तो वह $a - bq$ (यानी शेषफल) को भी बाँटेगा। इसलिए हर चरण में समस्या छोटी होती जाती है, पर HCF वही रहता है।

3.5 सुनहरा सूत्र — HCF × LCM

> ☆ **HCF × LCM = पहली संख्या × दूसरी संख्या**
>
> $$\text{HCF} \times \text{LCM} = a \times b$$

जाँच: 12 और 18 → $6 \times 36 = 216$ और $12 \times 18 = 216$ ✓

व्युत्पत्ति

माना $a = 2^{x_1}3^{y_1}\ldots$ और $b = 2^{x_2}3^{y_2}\ldots$

हर अभाज्य के लिए —

$$\min(x_1, x_2) + \max(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

क्योंकि दो संख्याओं में से एक छोटी और एक बड़ी होगी — दोनों जोड़ने पर वही योग मिलेगा। यही हर अभाज्य पर लागू होता है, अतः HCF × LCM = $a \times b$ ✓

> ⚠ ⊗ **सबसे बड़ा जाल — यह सूत्र केवल दो संख्याओं पर लागू होता है!**
> तीन संख्याओं पर **नहीं**।
> जाँच: $6, 8, 12 \rightarrow$ HCF $= 2$, LCM $= 24 \rightarrow 2 \times 24 = 48$
> पर गुणनफल $= 6 \times 8 \times 12 = 576$ ⊗

उदाहरण 3. दो संख्याओं का गुणनफल 2028 और HCF 13 है। LCM ज्ञात कीजिए।

हल: $\text{LCM} = \frac{2028}{13} = \mathbf{156}$

उदाहरण 4. दो संख्याओं का HCF 12 और LCM 336 है। यदि एक संख्या 84 हो, तो दूसरी?

हल:

दूसरी संख्या $= \frac{12 \times 336}{84} = \frac{4032}{84} = \mathbf{48}$

(जाँच: $\gcd(84, 48) = 12$ ✓ $\text{lcm}(84, 48) = 336$ ✓)

3.6 ÷ भिन्नों का LCM व HCF

> 🔑 **सूत्र**
>
> $$\text{HCF of fractions} = \frac{\text{HCF of numerators}}{\text{LCM of denominators}}$$
>
> $$\text{LCM of fractions} = \frac{\text{LCM of numerators}}{\text{HCF of denominators}}$$

> 💡 **याद रखने की तरकीब:** HCF में **ऊपर HCF, नीचे LCM** — दोनों उल्टे। LCM में इसका उल्टा। भ्रम हो तो सोचिए: HCF छोटा होना चाहिए, इसलिए अंश छोटा (HCF) और हर बड़ा (LCM)।

उदाहरण 5. $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$ का HCF व LCM?

हल:

- HCF $= \frac{\text{HCF}(2, 4, 8)}{\text{LCM}(3, 9, 27)} = \frac{2}{27}$
- LCM $= \frac{\text{LCM}(2, 4, 8)}{\text{HCF}(3, 9, 27)} = \frac{8}{3}$

3.7 🧮 दशमलव संख्याओं का LCM व HCF

विधि: दशमलव स्थान **बराबर** कीजिए → बिंदु हटाकर पूर्णांक बनाइए → LCM/HCF निकालिए → उतने ही दशमलव स्थान वापस लगाइए।

उदाहरण 6. $0.63,\ 1.05,\ 2.1$ का HCF?

हल: दो-दो दशमलव स्थान → $0.63,\ 1.05,\ 2.10$ → $63,\ 105,\ 210$

$$\text{HCF}(63, 105, 210) = 21 \ \rightarrow \ \mathbf{0.21}$$

3.8 ☰ शब्द समस्याएँ — कब HCF, कब LCM?

यह इस अध्याय का **सबसे महत्वपूर्ण** भाग है। संकेत-शब्द पहचानना सीखिए।

संकेत	प्रयोग
"अधिकतम", "सबसे बड़ी", "बराबर टुकड़े"	**HCF**
"पूरा-पूरा बाँटना", "बिना शेष बाँटना"	**HCF**
"अधिकतम कितने बच्चों में बाँटें"	**HCF**
"न्यूनतम", "सबसे छोटी संख्या"	**LCM**
"एक साथ बजना/शुरू होना"	**LCM**
"फिर से कब मिलेंगे"	**LCM**
"पूरी तरह ढँकना (टाइल)"	**HCF** (टाइल का आकार)

> 🧠 **तर्क समझिए:** जब हम **बाँट** रहे हैं (काटना, वितरण) → HCF। जब हम **जोड़** रहे हैं या **दोहराव** देख रहे हैं (चक्र, घंटी) → LCM।

प्रकार 1 — अधिकतम बाँटना (HCF)

उदाहरण 7. तीन रस्सियाँ 24 m, 36 m और 48 m लंबी हैं। इन्हें बराबर लंबाई के अधिकतम बड़े टुकड़ों में काटना है। एक टुकड़े की लंबाई और कुल टुकड़े?

हल: "अधिकतम बराबर" → **HCF**

$$\text{HCF}(24, 36, 48) = \mathbf{12}\ \text{m}$$

कुल टुकड़े $= \frac{24}{12} + \frac{36}{12} + \frac{48}{12} = 2 + 3 + 4 = \mathbf{9}$

उदाहरण 8. एक कमरे का फर्श 1517 cm $\times$ 902 cm है। इसे बराबर वर्गाकार टाइलों से पूरी तरह ढँकना है। न्यूनतम कितनी टाइलें लगेंगी?

हल: टाइल का आकार अधिकतम होगा तो संख्या न्यूनतम होगी → **HCF**

$$\text{HCF}(1517, 902) = 41 \text{ cm}$$

टाइलें $= \frac{1517 \times 902}{41 \times 41} = 37 \times 22 = \mathbf{814}$

> ⚠ **जाल:** प्रश्न "न्यूनतम टाइलें" कहता है, पर विधि **HCF** है — क्योंकि टाइल जितनी बड़ी, संख्या उतनी कम।

प्रकार 2 — एक साथ होना (LCM)

उदाहरण 9. तीन घंटियाँ 6, 8 और 12 सेकंड के अंतराल पर बजती हैं। एक साथ बजने के बाद पुनः कब साथ बजेंगी?

हल: $\text{LCM}(6, 8, 12) = \mathbf{24}$ सेकंड

उदाहरण 10. चार घंटियाँ 4, 6, 8 और 14 सेकंड पर बजती हैं। 1 घंटे में कितनी बार एक साथ बजेंगी (शुरुआत छोड़कर)?

हल: $\text{LCM}(4, 6, 8, 14) = 168$ सेकंड

$$\frac{3600}{168} = 21.4$$

अतः **21 बार**

> 💡 दशमलव को हमेशा **नीचे** की ओर पूर्णांकित कीजिए — 21.4 का अर्थ है 21 पूरी बार।

प्रकार 3 — समान शेषफल (LCM + r)

उदाहरण 11. वह छोटी से छोटी संख्या जिसे 15, 20 और 36 से भाग देने पर **हर बार** 10 **शेष** बचे?

हल: पहले वह संख्या जो पूरी बँट जाए → LCM, फिर शेष जोड़ दीजिए।

$$\text{LCM}(15, 20, 36) = 180 \rightarrow 180 + 10 = \mathbf{190}$$

> 🔑 **नियम:** "हर बार समान शेष r" → उत्तर $= \text{LCM} + r$

प्रकार 4 — भिन्न शेषफल, पर अंतर समान

उदाहरण 12. वह छोटी से छोटी संख्या जिसे $5, 6, 7$ से भाग देने पर क्रमशः $3, 4, 5$ शेष बचे?

हल: अंतर देखिए — $5-3=2,\ 6-4=2,\ 7-5=2$ → **अंतर समान** $=2$

$$\text{LCM}(5,6,7)=210 \rightarrow 210-2=\mathbf{208}$$

(जाँच: $208 \div 5$ शेष 3 ✓ · $208 \div 6$ शेष 4 ✓ · $208 \div 7$ शेष 5 ✓)

> 🔑 **नियम:** भाजक − शेष का अंतर समान हो → उत्तर LCM − अंतर

प्रकार 5 — सबसे बड़ी संख्या, शेष दिया हो (HCF)

उदाहरण 13. वह सबसे बड़ी संख्या जो 245 और 1029 को भाग देने पर दोनों बार 5 शेष छोड़े?

हल: शेष घटाकर पूरी तरह विभाज्य बनाइए, फिर HCF।

$$245-5=240 \qquad 1029-5=1024$$

$$\text{HCF}(240,1024)=\mathbf{16}$$

> 🔑 **नियम:** "सबसे बड़ी संख्या + शेष दिया हो" → **शेष घटाकर HCF**

उदाहरण 14. वह सबसे बड़ी संख्या जो $400, 435$ और 541 को भाग देने पर क्रमशः $9, 10, 14$ शेष छोड़े?

हल: $400-9=391,\ 435-10=425,\ 541-14=527$

$$\text{HCF}(391,425,527)=\mathbf{17}$$

प्रकार 6 — समान अज्ञात शेष (अंतर विधि)

उदाहरण 15. वह सबसे बड़ी संख्या जो $152, 277$ और 427 को भाग देने पर **समान शेष** छोड़े (शेष कितना है, यह नहीं बताया)?

हल: जब शेष **अज्ञात पर समान** हो → **संख्याओं के अंतरों का HCF** लीजिए।

$$277-152=125 \qquad 427-277=150 \qquad 427-152=275$$

$$\text{HCF}(125,150,275)=\mathbf{25}$$

(जाँच: तीनों को 25 से भाग देने पर शेष 2 आता है ✓)

यह क्यों काम करता है? यदि a और b दोनों d से भाग देने पर समान शेष छोड़ें, तो $(a-b)$ पूरी तरह d से कटेगा — शेष आपस में रद्द हो जाते हैं।

प्रकार 7 — अनुपात के साथ

उदाहरण 16. दो संख्याओं का अनुपात $3:4$ है और उनका LCM 84 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना संख्याएँ $3x$ और $4x$। चूँकि 3 व 4 सह-अभाज्य हैं —

$$\text{LCM} = 12x = 84 \Rightarrow x = 7$$

संख्याएँ $= \mathbf{21}$ और $\mathbf{28}$

सामान्य नियम: यदि अनुपात $a:b$ हो (जहाँ a, b सह-अभाज्य) और HCF $= x$, तो संख्याएँ $= ax,\ bx$ · $\text{LCM} = abx$ · $\text{HCF} = x$

3.9 शॉर्टकट व तेज़ विधियाँ

शॉर्टकट 1 — LCM की सीढ़ी विधि

सभी संख्याओं को एक पंक्ति में लिखिए, सबसे छोटे अभाज्य से भाग देते जाइए।

भाजक			
2	12	18	30
3	6	9	15
	2	3	5

LCM $= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 = 180$

बाईं ओर के भाजक **और** नीचे बची संख्याएँ — सबका गुणनफल LCM है।

शॉर्टकट 2 — सह-अभाज्य हों तो

यदि संख्याएँ सह-अभाज्य हैं (HCF $= 1$) तो —

$$\text{LCM} = a \times b$$

8 और 9 → LCM = 72 (सीधे गुणा)

शॉर्टकट 3 — एक दूसरे का गुणज हो तो

यदि छोटी संख्या बड़ी को पूरा बाँटती है —
HCF = छोटी संख्या · LCM = बड़ी संख्या

6 और 18 → HCF = 6, LCM = 18 — कोई गणना नहीं।

3.10 ⚠ जाल (Traps)

जाल 1 — तीन संख्याओं पर गुणनफल सूत्र लगाना
HCF × LCM = $a \times b$ **केवल दो** संख्याओं के लिए।

जाल 2 — HCF और LCM उलट देना
HCF हमेशा **छोटा**, LCM हमेशा **बड़ा**। उत्तर देने से पहले यह जाँच लीजिए।

जाल 3 — भिन्नों में सूत्र उलटना
HCF $= \frac{\text{HCF}}{\text{LCM}}$ — ऊपर HCF, नीचे LCM।

जाल 4 — "न्यूनतम टाइल" में LCM लगाना
टाइल के प्रश्न में **HCF** लगता है, चाहे "न्यूनतम" शब्द दिखे।

जाल 5 — शेष वाले प्रश्न में विधि उलटना
"सबसे छोटी संख्या" → LCM · "सबसे बड़ी संख्या" → HCF

जाल 6 — घंटी प्रश्न में शुरुआत गिनना
"1 घंटे में कितनी बार" — प्रायः शुरुआत नहीं गिनी जाती। प्रश्न ध्यान से पढ़िए।

3.11 🗎 विगत वर्ष प्रश्न (PYQ)

PYQ 1. (SSC CGL) दो संख्याओं का HCF 12 और LCM 336 है। एक संख्या 84 है, दूसरी?
हल: $\frac{12 \times 336}{84} = \mathbf{48}$

PYQ 2. (SSC CHSL) वह छोटी से छोटी संख्या जो 12, 16, 24, 36 से भाग देने पर 7 शेष बचाए?
हल: LCM = 144 → 144 + 7 = **151**

PYQ 3. (RRB NTPC) $6, 8, 12$ का LCM?
हल: **24**

PYQ 4. (SSC MTS) दो सह-अभाज्य संख्याओं का HCF क्या होगा?
हल: 1 (यही सह-अभाज्य की परिभाषा है)

PYQ 5. (UP Police) तीन रस्सियाँ $24, 36, 48$ m — अधिकतम बराबर टुकड़े?
हल: HCF $= \mathbf{12}$ m

PYQ 6. (SSC CGL Tier-2) वह सबसे बड़ी संख्या जो $152, 277, 427$ को समान शेष के साथ बाँटे?
हल: अंतरों का HCF $= \mathbf{25}$

3.12 ✎ अभ्यास प्रश्न (25 प्रश्न)

#	प्रश्न	उत्तर	विधि
1	$\text{HCF}(12, 18)$	6	न्यूनतम घात
2	$\text{LCM}(12, 18)$	36	अधिकतम घात
3	$\text{HCF}(24, 36, 48)$	12	तीनों साझा
4	$\text{LCM}(24, 36, 48)$	144	सीढ़ी विधि
5	$\text{HCF}(72, 120)$	24	$2^3 \times 3$
6	$\text{LCM}(72, 120)$	360	$2^3 3^2 5$
7	$\text{HCF}(1517, 902)$	41	यूक्लिड
8	गुणनफल 2028, HCF $13 \rightarrow$ LCM	156	2028/13
9	HCF 12 LCM 336 एक $= 84 \rightarrow$ दूसरी	48	सूत्र
10	$\text{HCF}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}\right)$	$\frac{2}{27}$	ऊपर HCF
11	$\text{LCM}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}\right)$	$\frac{8}{3}$	ऊपर LCM
12	$\text{HCF}(0.63, 1.05, 2.1)$	0.21	बिंदु हटाइए

#	प्रश्न	उत्तर	विधि
13	15, 20, 36 से भाग, शेष 10	190	LCM + 10
14	5, 6, 7 से शेष 3, 4, 5	208	LCM − 2
15	245, 1029 को शेष 5 के साथ बाँटे	16	शेष घटाकर HCF
16	400, 435, 541 शेष 9, 10, 14	17	शेष घटाकर HCF
17	152, 277, 427 समान शेष	25	अंतरों का HCF
18	अनुपात 3 : 4, LCM 84	21, 28	$12x = 84$
19	घंटियाँ 6, 8, 12 s	24 s	LCM
20	घंटियाँ 4, 6, 8, 14, 1 घंटे में	21 बार	3600/168
21	रस्सी 24, 36, 48 कुल टुकड़े	9	HCF = 12
22	फर्श 1517 × 902, टाइलें	814	HCF = 41
23	सह-अभाज्य 8, 9 का LCM	72	सीधा गुणा
24	HCF(6, 18)	6	गुणज नियम
25	HCF × LCM किन पर लागू	केवल 2 संख्याओं	नियम

3.13 🏆 अध्याय का सार

```
── परिभाषा ──
HCF → सबसे बड़ा साझा गुणनखंड   (छोटा या बराबर)
LCM → सबसे छोटा साझा गुणज      (बड़ा या बराबर)

── अभाज्य गुणनखंडन विधि ──
HCF = उभयनिष्ठ अभाज्य, न्यूनतम घात
LCM = सभी अभाज्य, अधिकतम घात
12 = 2²×3, 18 = 2×3² → HCF = 2×3 = 6, LCM = 2²×3² = 36

── सुनहरा सूत्र ──
HCF × LCM = a × b        ← केवल दो संख्याओं पर!

── भिन्न ──
```

```
HCF = अंशों का HCF / हरों का LCM
LCM = अंशों का LCM / हरों का HCF

── शब्द समस्या के संकेत ──
अधिकतम, बराबर टुकड़े, पूरा बाँटना   → HCF
न्यूनतम, एक साथ बजना, फिर कब        → LCM
टाइल का आकार                         → HCF

── शेषफल के चार प्रकार ──
हर बार समान शेष r            → LCM + r
भाजक–शेष का अंतर समान d      → LCM − d
सबसे बड़ी संख्या, शेष दिया   → शेष घटाकर HCF
समान पर अज्ञात शेष           → अंतरों का HCF

── शॉर्टकट ──
सह-अभाज्य          → LCM = गुणनफल
एक दूसरे का गुणज → HCF = छोटी, LCM = बड़ी
अनुपात a:b, HCF x → संख्याएँ ax, bx ; LCM = abx
```

> 🏆 **आगे:** अध्याय 4 में **भिन्न व दशमलव** हैं। वहाँ भिन्न जोड़ने के लिए हर का LCM चाहिए होगा — यानी यह अध्याय वहाँ रोज़ काम आएगा।