STUDY NOTES

गणित नोट्स — जूनियर स्तर

SUPER TET · कक्षा 6-8

13 August 2026

19 अध्याय

विषय-सूची / Contents

SUPER TET गणित — उन्नत नोट्स (Advanced Notes)

अध्याय 1 — संख्या पद्धति (उन्नत): घातांक व करणी

- **1.1** घातांक के नियम (Laws of Exponents)
- **1.2** करणी (Surds)

अध्याय 2 — बीजगणित की नींव (Foundation of Algebra)

- **2.1** शब्दावली
- **2.2** संक्रियाएँ

अध्याय 3 — बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ (Identities) ★

- **3.1** आधारभूत सर्वसमिकाएँ
- **3.2** व्युत्पन्न (Derived) — परीक्षा में सीधे काम आते हैं
- **3.3** हल किए उदाहरण

अध्याय 4 — गुणनखंडन (Factorisation)

- **4.1** चार मुख्य विधियाँ

अध्याय 5 — रैखिक समीकरण (Linear Equations)

- **5.1** एक चर वाला
- **5.2** दो चर वाले युगपत समीकरण (Simultaneous Equations)
- **5.3** हलों की प्रकृति (Nature of Solutions)
- **5.4** शब्द-समस्या

अध्याय 6 — द्विघात समीकरण (Quadratic Equations)

- **6.1** श्रीधराचार्य सूत्र (Quadratic Formula)
- $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$
- **6.2** विविक्तकर (Discriminant) $D = b^2 - 4ac$
- **6.3** मूलों के संबंध

अध्याय 7 — उन्नत प्रतिशत, लाभ-हानि व मिश्रण

- **7.1** उन्नत लाभ-हानि प्रश्न
- **7.2** मिश्रण व अनुपात (Alligation)
- सस्ते की मात्रा : महँगे की मात्रा = (महँगा - औसत) : (औसत - सस्ता)

अध्याय 8 — चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) ★

- **8.1** सूत्र
- $A = P(1 + R/100)^T$
- $CI = A - P$
- **8.2** SI बनाम CI — महत्वपूर्ण अंतर
- **8.3** जनसंख्या व मूल्यह्रास

अध्याय 9 — साझेदारी (Partnership)

अध्याय 10 — उन्नत समय-कार्य व पाइप

- **10.1** दक्षता (Efficiency) संबंध
- **10.2** तीन व्यक्ति साथ
- **10.3** बीच में छोड़कर जाना
- **10.4** पाइप व टंकी (Pipes & Cistern)

अध्याय 11 — उन्नत चाल-समय-दूरी

- **11.1** रेलगाड़ी संबंधी
- **11.2** नाव व धारा (Boat & Stream)

अध्याय 12 — उन्नत ज्यामिति

- **12.1** रेखाएँ व कोण (Lines & Angles)
- **12.2** त्रिभुज की सर्वांगसमता (Congruence)
- **12.3** समरूप त्रिभुज (Similar Triangles)
- **12.4** त्रिभुज के केंद्र (Centres) — याद रखें

अध्याय 13 — वृत्त व स्पर्श रेखा

अध्याय 14 — निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry)

- **14.1** चतुर्थांश (Quadrants)
- **14.2** सूत्र

अध्याय 15 — क्षेत्रमिति (Mensuration) — विस्तार

- **15.1** 2D — अतिरिक्त सूत्र
- **15.2** 3D — अतिरिक्त सूत्र

अध्याय 16 — सांख्यिकी व प्रायिकता

- **16.1** वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य
- **16.2** माध्यिका व बहुलक (वर्गीकृत)
- **16.3** परिक्षेपण
- **16.4** प्रायिकता (Probability)
- P(E) = अनुकूल परिणाम / कुल परिणाम

अध्याय 17 — डेटा व्याख्या (Data Interpretation)

अध्याय 18 — Junior स्तर की गणित शिक्षण-शास्त्र

- **18.1** पियाजे के अनुसार गणितीय चिंतन
- **18.2** आकलन (Assessment)
- **18.3** गणितीय अवधारणाओं की कठिनाइयाँ

18.4 शिक्षण सहायक सामग्री (TLM)

अध्याय 19 — मास्टर सूत्र-पत्र (One-Page Revision)

✓ अंतिम चेकलिस्ट (परीक्षा से 1 सप्ताह पहले)

SET 2 — JUNIOR / UPPER PRIMARY LEVEL (कक्षा 6-8)

SUPER TET गणित — उन्नत नोट्स (Advanced Notes)

⚠ **पहले Set 1 पूरा करें।** यह सेट उसी की नींव पर बना है — यहाँ केवल **आगे का हिस्सा** और **कठिन variants** हैं।

अध्याय सूची

1. संख्या पद्धति (उन्नत) — घातांक व करणी
2. बीजगणित की नींव
3. बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ (Identities)
4. गुणनखंडन (Factorisation)
5. रैखिक समीकरण (एक व दो चर)
6. द्विघात समीकरण (Quadratic Equations)
7. उन्नत प्रतिशत, लाभ-हानि व मिश्रण
8. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)
9. साझेदारी (Partnership)
10. उन्नत समय-कार्य व पाइप
11. उन्नत चाल-समय-दूरी (नाव व धारा, रेलगाड़ी)
12. उन्नत ज्यामिति — रेखाएँ, त्रिभुज की सर्वांगसमता
13. वृत्त व स्पर्श रेखा
14. निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry)
15. क्षेत्रमिति — 2D व 3D विस्तार
16. सांख्यिकी व प्रायिकता (Statistics & Probability)
17. डेटा व्याख्या (Data Interpretation)
18. Junior स्तर की गणित शिक्षण-शास्त्र
19. मास्टर सूत्र-पत्र

अध्याय 1 — संख्या पद्धति (उन्नत): घातांक व करणी

1.1 घातांक के नियम (Laws of Exponents)

नियम	सूत्र
गुणा	$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$
भाग	$a^m \div a^n = a^{(m-n)}$
घात की घात	$(a^m)^n = a^{(mn)}$
शून्य घात	$a^0 = \mathbf{1}$ $(a \neq 0)$
ऋणात्मक घात	$a^{-n} = 1/a^n$
भिन्नात्मक घात	$a^{(1/n)} = \sqrt[n]{a}$
गुणनफल	$(ab)^m = a^m b^m$

हल किया उदाहरण 1: $2^5 \times 2^3 \div 2^6 = ?$
→ $2^{(5+3-6)} = 2^2 = \mathbf{4}$

हल किया उदाहरण 2: यदि $3^x = 81$ हो तो $x = ?$
→ $81 = 3^4$ → $\mathbf{x = 4}$

हल किया उदाहरण 3: $(16)^{(3/4)} = ?$
→ $16 = 2^4$ → $(2^4)^{(3/4)} = 2^3 = \mathbf{8}$

1.2 करणी (Surds)

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{(ab)}$, $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{(a/b)}$
- **हरात्मकरण (Rationalisation):** $1/(\sqrt{3} + 1)$ → ऊपर-नीचे $(\sqrt{3} - 1)$ से गुणा → $(\sqrt{3} - 1)/2$

अनुमानित मान (याद रखें): $\sqrt{2} \approx 1.414$ • $\sqrt{3} \approx 1.732$ • $\sqrt{5} \approx 2.236$ • $\sqrt{7} \approx 2.646$

अध्याय 2 — बीजगणित की नींव (Foundation of Algebra)

2.1 शब्दावली

शब्द	अर्थ	उदाहरण
चर (Variable)	बदलने वाली राशि	x, y, a
अचर (Constant)	निश्चित मान	5, -7
पद (Term)	+ या - से अलग हिस्सा	$3x^2$, -5y
गुणांक (Coefficient)	चर के साथ की संख्या	$3x^2$ में 3
समान पद (Like terms)	चर व घात समान	4x और 7x
असमान पद	चर/घात अलग	4x और $4x^2$

पदों की संख्या के आधार पर:
- एकपदी (Monomial) — 5x
- द्विपदी (Binomial) — x + y
- त्रिपदी (Trinomial) — $x^2 + 2x + 1$
- बहुपद (Polynomial) — कई पद

घात (Degree): सबसे बड़ी घात। जैसे $3x^3 + 2x - 5 \rightarrow$ घात = **3**
- घात 1 = रैखिक (Linear), घात 2 = द्विघात (Quadratic), घात 3 = घन (Cubic)

2.2 संक्रियाएँ

- **जोड़/घटाव:** केवल **समान पद** ही जुड़ते हैं। 4x + 3x = 7x, पर 4x + 3y = 4x + 3y (जुड़ेंगे नहीं)
- **गुणा:** गुणांक × गुणांक, घात **जोड़ें**। $3x^2 \times 4x^3 = 12x^5$
- **भाग:** गुणांक ÷ गुणांक, घात **घटाएँ**। $12x^5 \div 4x^2 = 3x^3$

अध्याय 3 — बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ (Identities) ★

यह अध्याय Junior level का सबसे ज्यादा scoring भाग है। सर्वसमिकाएँ रट लें।

3.1 आधारभूत सर्वसमिकाएँ

```
1.  (a + b)²  = a² + 2ab + b²
2.  (a − b)²  = a² − 2ab + b²
3.  a² − b²   = (a + b)(a − b)
4.  (x + a)(x + b) = x² + (a + b)x + ab
5.  (a + b)³  = a³ + b³ + 3ab(a + b)
6.  (a − b)³  = a³ − b³ − 3ab(a − b)
7.  a³ + b³   = (a + b)(a² − ab + b²)
8.  a³ − b³   = (a − b)(a² + ab + b²)
9.  (a + b + c)² = a² + b² + c² + 2(ab + bc + ca)
10. a³ + b³ + c³ − 3abc = (a+b+c)(a²+b²+c²−ab−bc−ca)
```

3.2 व्युत्पन्न (Derived) — परीक्षा में सीधे काम आते हैं

```
a² + b²   = (a + b)² − 2ab  =  (a − b)² + 2ab
(a + b)²  = (a − b)² + 4ab
(a − b)²  = (a + b)² − 4ab
यदि a + b + c = 0  →  a³ + b³ + c³ = 3abc
x² + 1/x² = (x + 1/x)² − 2  =  (x − 1/x)² + 2
x³ + 1/x³ = (x + 1/x)³ − 3(x + 1/x)
x⁴ + 1/x⁴ = (x² + 1/x²)² − 2
```

3.3 हल किए उदाहरण

उदाहरण 1: यदि $a + b = 7$ और $ab = 12$, तो $a^2 + b^2 = ?$
→ $(a+b)^2 - 2ab = 49 - 24 =$ **25**

उदाहरण 2: यदि $x + 1/x = 3$, तो $x^2 + 1/x^2 = ?$
→ $3^2 - 2 =$ **7**
→ आगे: $x^3 + 1/x^3 = 27 - 9 =$ **18**

उदाहरण 3: $(102)^2$ की गणना करें।
→ $(100 + 2)^2 = 10000 + 400 + 4 =$ **10404**

उदाहरण 4: $97 \times 103 = ?$
→ $(100 - 3)(100 + 3) = 10000 - 9 =$ **9991**

उदाहरण 5: यदि $a - b = 5$ और $ab = 14$, तो $a + b = ?$
→ $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = 25 + 56 = 81$ → $\mathbf{a + b = 9}$

उदाहरण 6: यदि $a + b + c = 0$, तो $a^3 + b^3 + c^3 = ?$
→ $\mathbf{3abc}$

अध्याय 4 — गुणनखंडन (Factorisation)

4.1 चार मुख्य विधियाँ

(i) उभयनिष्ठ गुणनखंड निकालना
→ $6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$

(ii) पदों का समूहन (Grouping)
→ $ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = \mathbf{(a+b)(x+y)}$

(iii) सर्वसमिका का प्रयोग
→ $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$
→ $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

(iv) मध्य पद का विभाजन (Splitting the middle term) — सबसे जरूरी
→ $\mathbf{x^2 + 7x + 12}$
ऐसे दो अंक खोजें जिनका **गुणनफल = 12** और **योग = 7** → 3 और 4
→ $x^2 + 3x + 4x + 12 = x(x+3) + 4(x+3) = \mathbf{(x+3)(x+4)}$

उदाहरण: $x^2 - 5x + 6$
→ गुणनफल 6, योग -5 → -2 और -3 → **(x-2)(x-3)**

उदाहरण: $x^2 - x - 6$
→ गुणनफल -6, योग -1 → -3 और +2 → **(x-3)(x+2)**

> ✎ **संकेत:** अचर पद **धनात्मक** हो → दोनों गुणनखंडों के चिह्न **समान** (मध्य पद जैसा)। अचर पद **ऋणात्मक** हो → चिह्न **विपरीत**।

अध्याय 5 — रैखिक समीकरण (Linear Equations)

5.1 एक चर वाला

नियम: जो पक्ष बदले, चिह्न बदले। चर एक ओर, संख्याएँ दूसरी ओर।

उदाहरण: $3x + 5 = 20 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow \mathbf{x = 5}$

उदाहरण (भिन्न सहित): $(x/2) + (x/3) = 10$
→ LCM 6 से गुणा: $3x + 2x = 60 \rightarrow 5x = 60 \rightarrow \mathbf{x = 12}$

5.2 दो चर वाले युगपत समीकरण (Simultaneous Equations)

विधि 1 — विलोपन (Elimination):

```
2x + 3y = 13    ...(i)
3x - y  = 3     ...(ii)
```

→ (ii) को 3 से गुणा: $9x - 3y = 9$
→ (i) में जोड़ें: $11x = 22$ → **$x = 2$**
→ (ii) में रखें: $6 - y = 3$ → **$y = 3$**

विधि 2 — प्रतिस्थापन (Substitution): एक समीकरण से x का मान निकालकर दूसरे में रखें।

5.3 हलों की प्रकृति (Nature of Solutions)

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के लिए:

शर्त	हल	ग्राफ
$a_1/a_2 \neq b_1/b_2$	अद्वितीय हल (Unique)	प्रतिच्छेदी रेखाएँ
$a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$	कोई हल नहीं	समांतर रेखाएँ
$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$	अनंत हल	संपाती रेखाएँ

5.4 शब्द-समस्या

उदाहरण: दो संख्याओं का योग 45 और अंतर 9 है। संख्याएँ?
→ $x + y = 45$, $x - y = 9$ → जोड़ें: $2x = 54$ → $x = 27$, $y = 18$
→ **27 और 18**

अध्याय 6 — द्विघात समीकरण (Quadratic Equations)

मानक रूप: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

6.1 श्रीधराचार्य सूत्र (Quadratic Formula)

$$x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$$

6.2 विविक्तकर (Discriminant) $D = b^2 - 4ac$

D का मान	मूलों की प्रकृति
$D > 0$	दो भिन्न वास्तविक मूल

D का मान	मूलों की प्रकृति
D = 0	दो बराबर वास्तविक मूल
D < 0	कोई वास्तविक मूल नहीं (काल्पनिक)

6.3 मूलों के संबंध

मूलों का योग ($\alpha + \beta$) = $-b/a$
मूलों का गुणनफल ($\alpha\beta$) = c/a
समीकरण बनाना: x^2 − (योग)x + (गुणनफल) = 0

हल किया उदाहरण 1: $x^2 - 5x + 6 = 0$ हल करें।
→ गुणनखंड: (x−2)(x−3) = 0 → **x = 2 या 3**

हल किया उदाहरण 2: $x^2 - 7x + 10 = 0$ के मूलों का योग व गुणनफल?
→ योग = 7, गुणनफल = **10**

हल किया उदाहरण 3: यदि मूल 3 और −5 हों, तो समीकरण?
→ योग = −2, गुणनफल = −15
→ $x^2 - (-2)x + (-15)$ = $\mathbf{x^2 + 2x - 15 = 0}$

हल किया उदाहरण 4: k के किस मान के लिए $x^2 + kx + 9 = 0$ के मूल बराबर हैं?
→ D = 0 → $k^2 - 36 = 0$ → **k = ±6**

अध्याय 7 — उन्नत प्रतिशत, लाभ-हानि व मिश्रण

7.1 उन्नत लाभ-हानि प्रश्न

बेईमान दुकानदार (False Weight):

लाभ % = [त्रुटि / (सही भार − त्रुटि)] × 100

उदाहरण: एक दुकानदार 1 kg के बदले 900 g देता है। लाभ %?
→ त्रुटि = 100 → [100/(1000−100)] × 100 = 100/900 × 100 = **11⅓%**

अंकित मूल्य + छूट का संयुक्त प्रश्न:
उदाहरण: एक वस्तु का MP, CP से 40% अधिक है। 25% छूट देने पर लाभ %?
→ CP = 100 → MP = 140 → SP = 140 × 0.75 = 105
→ लाभ = **5%**

बराबर SP पर एक लाभ एक हानि:

हानि % = $(x^2)/100$, जहाँ x = समान प्रतिशत

7.2 मिश्रण व अनुपात (Alligation)

सस्ते की मात्रा : महँगे की मात्रा = (महँगा - औसत) : (औसत - सस्ता)

उदाहरण: ₹30/kg और ₹40/kg की चाय को किस अनुपात में मिलाएँ कि मिश्रण ₹34/kg का हो?
→ (40 - 34) : (34 - 30) = 6 : 4 = **3 : 2**

दूध-पानी का क्लासिक प्रश्न:
उदाहरण: 60 लीटर मिश्रण में दूध व पानी 2 : 1 में हैं। कितना पानी मिलाएँ कि अनुपात 1 : 2 हो जाए?
→ दूध = 40 L, पानी = 20 L
→ दूध स्थिर (40 L) रहेगा। नया अनुपात 1:2 → पानी = 80 L
→ मिलाना होगा = 80 - 20 = **60 लीटर**

अध्याय 8 — चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) ★

8.1 सूत्र

$$A = P(1 + R/100)^T$$

$$CI = A - P$$

अलग-अलग स्थितियाँ:

स्थिति	सूत्र
वार्षिक संयोजन	$A = P(1 + R/100)^T$
अर्धवार्षिक (Half-yearly)	$A = P(1 + R/200)^{2T}$
त्रैमासिक (Quarterly)	$A = P(1 + R/400)^{4T}$
भिन्न-भिन्न दर	$A = P(1+R_1/100)(1+R_2/100)...$

8.2 SI बनाम CI — महत्वपूर्ण अंतर

- **1 वर्ष के लिए SI = CI** (हमेशा)
- **2 वर्ष:** CI - SI = $P(R/100)^2$

- **3 वर्ष:** CI − SI = **$P(R/100)^2 \times (300 + R)/100$**

हल किया उदाहरण 1: ₹8000 पर 10% वार्षिक दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज?
→ $A = 8000 \times (1.1)^2 = 8000 \times 1.21 = ₹9680$
→ CI = **₹1680**
(तुलना: SI = 1600, अंतर = 80 = $8000 \times (10/100)^2$ ✓)

हल किया उदाहरण 2: किसी धन पर 2 वर्ष में SI ₹400 और CI ₹420 है। दर?
→ 1 वर्ष का SI = 200
→ अंतर 20 = 200 पर 1 वर्ष का ब्याज → R = (20/200) × 100 = **10%**
(जाँच: P = 2000 → SI = 400 ✓, CI = $2000 \times 1.1^2 - 2000 = 420$ ✓)

हल किया उदाहरण 3: कोई धन CI पर 2 वर्ष में दुगुना हो जाता है, तो 4 वर्ष में कितना गुना?
→ 2 वर्ष = 2 गुना → 4 वर्ष = 2 × 2 = **4 गुना**

> ★ **नियम:** CI पर n वर्ष में x गुना → mn वर्ष में **x^m गुना**

8.3 जनसंख्या व मूल्यह्रास

- **वृद्धि:** $P(1 + R/100)^T$
- **ह्रास (Depreciation):** $P(1 - R/100)^T$

अध्याय 9 — साझेदारी (Partnership)

सरल साझेदारी (समान समय): लाभ का बँटवारा पूँजी के अनुपात में
→ A : B = $पूँजी_1 : पूँजी_2$

चक्रवृद्धि साझेदारी (अलग समय): लाभ का अनुपात = (पूँजी × समय) के अनुपात में

हल किया उदाहरण: A ने ₹5000 12 महीने के लिए, B ने ₹6000 8 महीने के लिए लगाए। ₹2100 लाभ का बँटवारा?
→ अनुपात = (5000×12) : (6000×8) = 60000 : 48000 = **5 : 4**
→ A = 2100 × 5/9 = **₹1166.67**, B = **₹933.33**

अध्याय 10 — उन्नत समय-कार्य व पाइप

10.1 दक्षता (Efficiency) संबंध

> यदि A, B से **n गुना तेज़** है → समय का अनुपात A : B = **1 : n**

उदाहरण: A, B से दुगुना तेज़ है। दोनों मिलकर 12 दिन में काम करते हैं। A अकेला कितने दिन में?
→ दक्षता A : B = 2 : 1, कुल = 3
→ A अकेला = 12 × 3/2 = **18 दिन**

10.2 तीन व्यक्ति साथ

सूत्र: 1/T = 1/a + 1/b + 1/c

उदाहरण: A 10, B 15, C 30 दिन में। तीनों साथ?
→ LCM = 30 इकाई → क्षमताएँ 3, 2, 1 = 6/दिन → **5 दिन**

10.3 बीच में छोड़कर जाना

उदाहरण: A और B साथ 8 दिन में काम करते हैं। दोनों 4 दिन साथ काम करके A चला जाता है। B अकेला 20 दिन में पूरा काम करता है। शेष काम B कितने दिन में करेगा?
→ 4 दिन में काम हुआ = 4/8 = 1/2
→ शेष 1/2 काम B करेगा = 20 × 1/2 = **10 दिन**

10.4 पाइप व टंकी (Pipes & Cistern)

- भरने वाला पाइप = **+**, खाली करने वाला = **-**
- **उदाहरण:** A 12 घंटे में भरता, B 15 घंटे में भरता, C 20 घंटे में खाली करता। तीनों साथ?
  → LCM = 60 → 5 + 4 - 3 = 6/घंटा → **10 घंटे**

अध्याय 11 — उन्नत चाल-समय-दूरी

11.1 रेलगाड़ी संबंधी

स्थिति	दूरी
खंभा/व्यक्ति (स्थिर) पार करना	रेलगाड़ी की लंबाई
प्लेटफॉर्म/पुल पार करना	रेलगाड़ी + प्लेटफॉर्म
दो रेलगाड़ियाँ पार करना	दोनों की लंबाइयों का योग

सापेक्ष चाल (Relative Speed):
- विपरीत दिशा → चालें **जोड़ें** (a + b)
- एक ही दिशा → चालें **घटाएँ** (a - b)

हल किया उदाहरण: 120 m और 180 m लंबी दो रेलगाड़ियाँ 40 km/h व 50 km/h से विपरीत दिशा में आ रही हैं। एक-दूसरे को पार करने में समय?

→ कुल दूरी = 300 m
→ सापेक्ष चाल = 90 km/h = 90 × 5/18 = 25 m/s
→ समय = 300/25 = **12 सेकंड**

11.2 नाव व धारा (Boat & Stream)

धारा के अनुकूल (Downstream) = u + v
धारा के प्रतिकूल (Upstream) = u − v
नाव की चाल u = (D + U)/2
धारा की चाल v = (D − U)/2

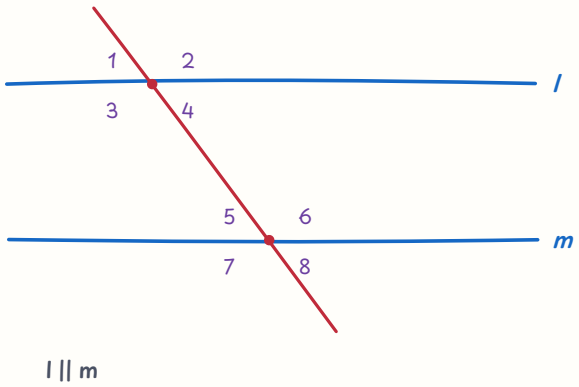
हल किया उदाहरण: एक नाव धारा के अनुकूल 16 km/h और प्रतिकूल 10 km/h चलती है। नाव व धारा की चाल?
→ नाव = (16+10)/2 = **13 km/h**
→ धारा = (16−10)/2 = **3 km/h**

अध्याय 12 — उन्नत ज्यामिति

12.1 रेखाएँ व कोण (Lines & Angles)

जब दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा (transversal) काटती है:

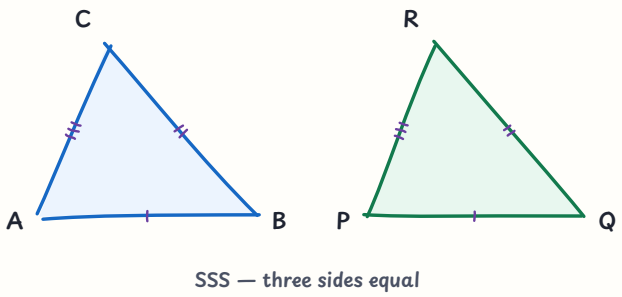
कोण युग्म	संबंध
संगत कोण (Corresponding)	**बराबर**
एकांतर अंतःकोण (Alternate interior)	**बराबर**
एकांतर बाह्य कोण	**बराबर**
अंतःकोण एक ही ओर (Co-interior)	योग = **180°**
शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite)	**बराबर**



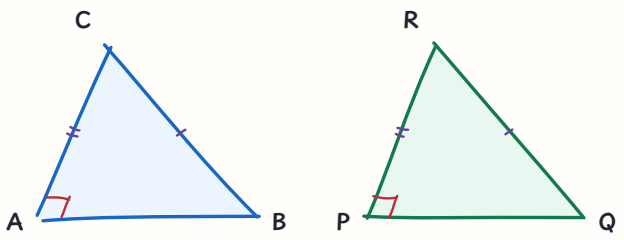
चित्र 12.1 — समांतर रेखाएँ व तिर्यक रेखा — संगत तथा एकांतर कोण बराबर, एक ही ओर के अंतःकोणों का योग 180°

12.2 त्रिभुज की सर्वांगसमता (Congruence)

नियम	अर्थ
SSS	तीनों भुजाएँ बराबर
SAS	दो भुजा + बीच का कोण
ASA	दो कोण + बीच की भुजा
AAS	दो कोण + एक भुजा
RHS	समकोण + कर्ण + एक भुजा



चित्र 12.2 — SSS — तीनों भुजाएँ बराबर हों तो त्रिभुज सर्वांगसम



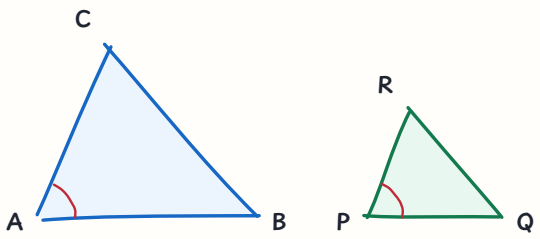
RHS — right angle + hypotenuse + side

चित्र 12.3 — RHS — समकोण, कर्ण तथा एक भुजा बराबर (केवल समकोण त्रिभुज पर लागू)

✗ **AAA सर्वांगसमता नहीं है** — यह केवल **समरूपता (Similarity)** देता है। यह परीक्षा में बार-बार पूछा जाता है।

12.3 समरूप त्रिभुज (Similar Triangles)

- नियम: **AAA, SSS (अनुपात में), SAS (अनुपात में)**
- समरूप त्रिभुजों के **क्षेत्रफलों का अनुपात = संगत भुजाओं के अनुपात का वर्ग**
  → यदि भुजाएँ 2:3 → क्षेत्रफल 4:9

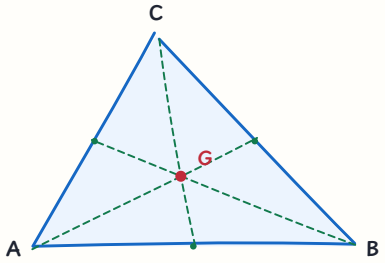


similar — same shape, sides in proportion

चित्र 12.4 — समरूप त्रिभुज — आकार समान, भुजाएँ अनुपात में; क्षेत्रफल अनुपात = भुजा अनुपात का वर्ग

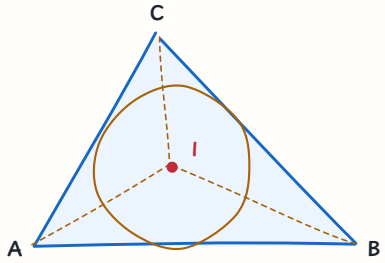
12.4 त्रिभुज के केंद्र (Centres) — याद रखें

केंद्र	बनता है	विशेष
केन्द्रक (Centroid)	तीनों माध्यिकाओं से	2 : 1 के अनुपात में बाँटता है
लंबकेन्द्र (Orthocentre)	तीनों शीर्षलंबों से	समकोण त्रिभुज में समकोण शीर्ष पर
परिकेन्द्र (Circumcentre)	भुजाओं के लंब समद्विभाजकों से	सभी शीर्षों से समान दूरी
अंतःकेन्द्र (Incentre)	कोण समद्विभाजकों से	सभी भुजाओं से समान दूरी



medians meet at G (2 : 1)

चित्र 12.5 — केन्द्रक (Centroid) — तीनों माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद, माध्यिका को 2 : 1 में बाँटता है



angle bisectors meet at I

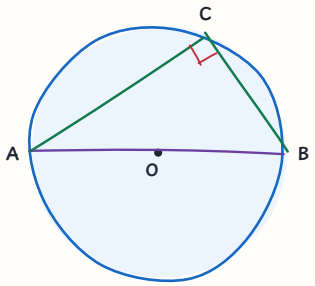
चित्र 12.6 — अंतःकेन्द्र (Incentre) — कोण समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद, सभी भुजाओं से समान दूरी

समबाहु त्रिभुज में चारों केंद्र एक ही बिंदु पर होते हैं।

अध्याय 13 — वृत्त व स्पर्श रेखा

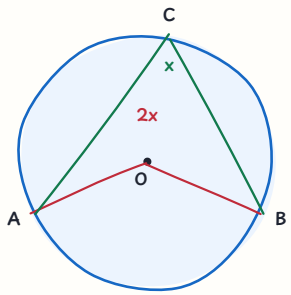
महत्वपूर्ण प्रमेय:

1. केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को **समद्विभाजित** करता है।
2. समान जीवाएँ केंद्र से **समान दूरी** पर होती हैं।
3. **स्पर्श रेखा** स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या के **लंबवत (90°)** होती है।
4. बाह्य बिंदु से खींची गई दोनों **स्पर्श रेखाएँ बराबर** होती हैं।
5. अर्धवृत्त में बना कोण = **90°**
6. एक ही चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण = शेष वृत्त पर बने कोण का **दुगुना**
7. **चक्रीय चतुर्भुज** के सम्मुख कोणों का योग = **180°**



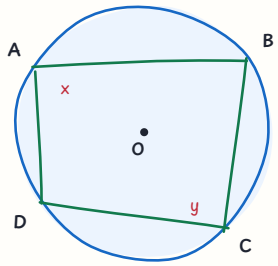
angle in a semicircle = 90

चित्र 13.1 — अर्धवृत्त में बना कोण सदैव 90° होता है



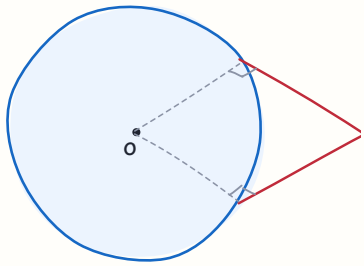
angle at centre = 2 x angle at circumference

चित्र 13.2 — केंद्र पर बना कोण = परिधि पर बने कोण का दुगुना



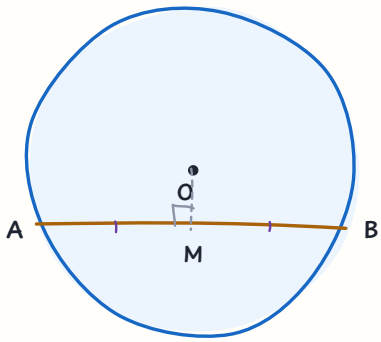
x + y = 180 (opposite angles)

चित्र 13.3 — चक्रीय चतुर्भुज — सम्मुख कोणों का योग 180°



PA = PB (tangents from an external point)

चित्र 13.4 — बाह्य बिंदु से खींची गई दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं



perpendicular from O bisects the chord (AM = MB)

चित्र 13.5 — केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है

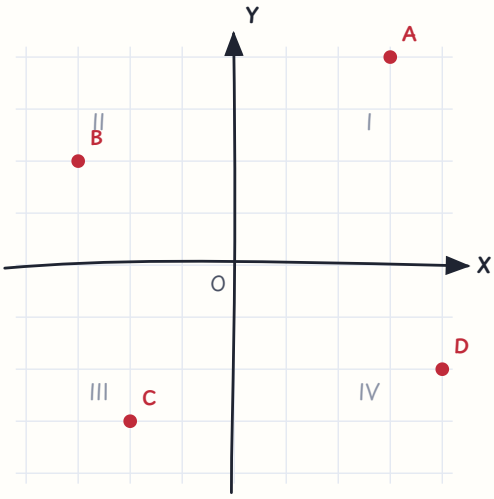
हल किया उदाहरण: एक वृत्त की त्रिज्या 5 cm है और केंद्र से जीवा की दूरी 3 cm है। जीवा की लंबाई?
→ आधी जीवा = √(25 - 9) = 4 → पूरी जीवा = **8 cm**

अध्याय 14 — निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry)

14.1 चतुर्थांश (Quadrants)

चतुर्थांश	चिह्न
I	(+, +)
II	(−, +)
III	(−, −)
IV	(+, −)

- x-अक्ष पर बिंदु: (x, **0**) • y-अक्ष पर: (**0**, y) • मूल बिंदु: (0, 0)

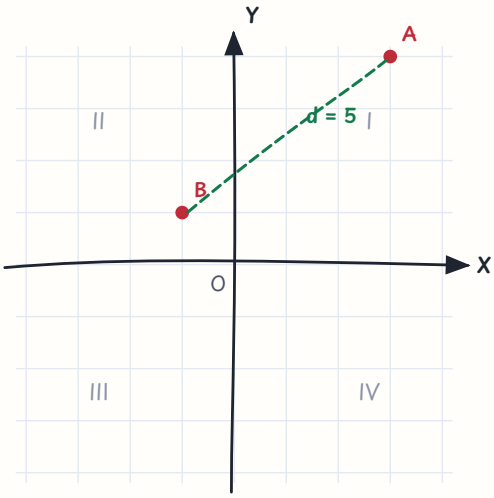


चित्र 14.1 — कार्तीय तल — चारों चतुर्थांश में चिह्न: I(+,+), II(−,+), III(−,−), IV(+,−)

14.2 सूत्र

दूरी सूत्र: $d = \sqrt{[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]}$
मध्य-बिंदु: $((x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2)$
विभाजन सूत्र (m:n): $((mx_2+nx_1)/(m+n), (my_2+ny_1)/(m+n))$
त्रिभुज का क्षेत्रफल: $\frac{1}{2} |x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)|$
मूल बिंदु से दूरी: $\sqrt{(x^2 + y^2)}$

हल किया उदाहरण 1: (3, 4) और (7, 1) के बीच की दूरी?
→ $\sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$



चित्र 14.2 — दूरी सूत्र — $d = \sqrt{[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]}$; यहाँ त्रिक (3,4,5) बनता है

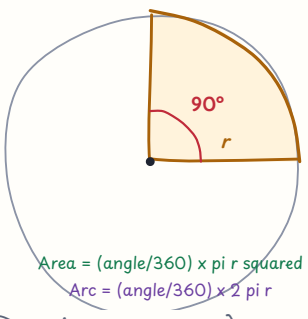
हल किया उदाहरण 2: (2, 3) और (6, 7) का मध्य-बिंदु?
→ ((2+6)/2, (3+7)/2) = **(4, 5)**

अध्याय 15 — क्षेत्रमिति (Mensuration) — विस्तार

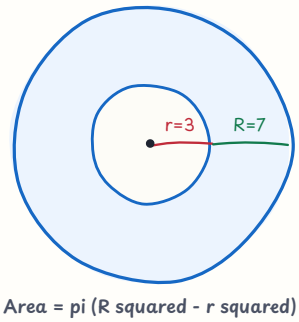
15.1 2D — अतिरिक्त सूत्र

आकृति	सूत्र
त्रिभुज (हीरोन का सूत्र)	$\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$, जहाँ $s = (a+b+c)/2$
समबाहु त्रिभुज	क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4)a^2$, ऊँचाई = $(\sqrt{3}/2)a$
वृत्त का त्रिज्यखंड (Sector)	$(\theta/360) \times \pi r^2$
चाप की लंबाई	$(\theta/360) \times 2\pi r$
वृत्ताकार वलय (Ring)	$\pi(R^2 - r^2)$

हल किया उदाहरण (हीरोन): भुजाएँ 13, 14, 15 वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल?
→ $s = 21$
→ $\sqrt{[21 \times 8 \times 7 \times 6]} = \sqrt{7056}$ = **84 वर्ग इकाई**



चित्र 15.1 — त्रिज्यखंड (Sector) — क्षेत्रफल = $(\theta/360) \times \pi r^2$, चाप = $(\theta/360) \times 2\pi r$

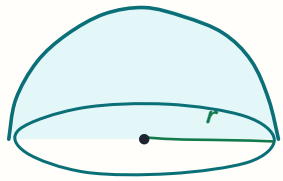


चित्र 15.2 — वृत्ताकार वलय (Ring) — क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

15.2 3D — अतिरिक्त सूत्र

ठोस	वक्र पृष्ठीय (CSA)	कुल पृष्ठीय (TSA)	आयतन
घन	$4a^2$	$6a^2$	a^3
घनाभ	$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh
बेलन	$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	πr^2h
शंकु	πrl	$\pi r(r+l)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$
गोला	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$(4/3)\pi r^3$

ठोस	वक्र पृष्ठीय (CSA)	कुल पृष्ठीय (TSA)	आयतन
अर्धगोला	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$(2/3)\pi r^3$



चित्र 15.3 — अर्धगोला — आयतन $(2/3)\pi r^3$, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $3\pi r^2$ ($2\pi r^2$ नहीं)

- शंकु की तिर्यक ऊँचाई: $\mathbf{l = \sqrt{r^2 + h^2}}$

हल किया उदाहरण: एक बेलन की त्रिज्या 7 cm और ऊँचाई 10 cm है। आयतन?
→ 22/7 × 49 × 10 = **1540 cm^3**

हल किया उदाहरण (अनुपात प्रश्न): एक गोले की त्रिज्या दुगुनी कर दी जाए तो आयतन कितना गुना?
→ आयतन ∝ r^3 → **8 गुना**

> ★ **सामान्य नियम:** लंबाई n गुना → क्षेत्रफल **n^2 गुना** → आयतन **n^3 गुना**

अध्याय 16 — सांख्यिकी व प्रायिकता

16.1 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

प्रत्यक्ष विधि: माध्य = Σfx / Σf

उदाहरण:

x	10	20	30
f	2	3	5

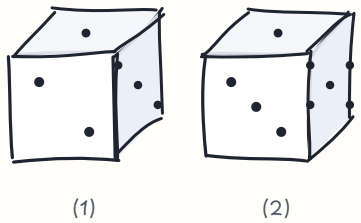
→ Σfx = 20 + 60 + 150 = 230, Σf = 10
→ माध्य = **23**

16.2 माध्यिका व बहुलक (वर्गीकृत)

- माध्यिका वर्ग = जहाँ संचयी बारंबारता पहली बार N/2 को पार करे
- **बहुलक = 3 × माध्यिका - 2 × माध्य** (अनुभवजन्य संबंध)

16.3 परिक्षेपण

- **परिसर (Range)** = अधिकतम - न्यूनतम
- **माध्य विचलन**, **मानक विचलन (σ)** — Junior स्तर पर केवल परिभाषा पर्याप्त



चित्र 16.1 — पासे की दो स्थितियाँ — दोनों में 1 ऊपर; पार्श्व चक्र 2 → 3 → 5 से 2 का विपरीत 5

16.4 प्रायिकता (Probability)

P(E) = अनुकूल परिणाम / कुल परिणाम

0 ≤ P(E) ≤ 1 • P(निश्चित घटना) = 1 • P(असंभव घटना) = 0

P(E) + P(न E) = 1

आधार तथ्य:
- एक सिक्का: 2 परिणाम • दो सिक्के: 4 • तीन सिक्के: 8 (2^n)
- एक पासा: 6 परिणाम • दो पासे: 36
- ताश की गड्डी: **52 पत्ते** = 4 सूट × 13; 26 लाल + 26 काले; **12 तस्वीर वाले (face cards)**; 4 इक्के

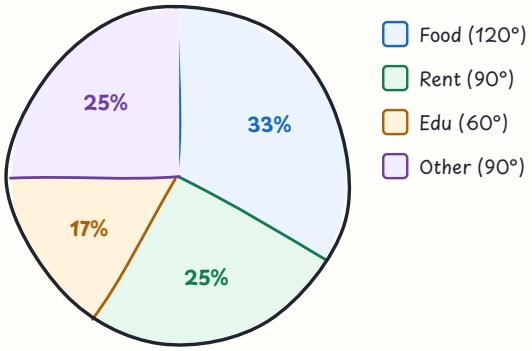
हल किया उदाहरण 1: एक पासे पर सम संख्या आने की प्रायिकता?
→ {2, 4, 6} → 3/6 = **1/2**

हल किया उदाहरण 2: ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालने पर वह बादशाह (King) हो — प्रायिकता?
→ 4/52 = **1/13**

हल किया उदाहरण 3: दो सिक्के उछालने पर कम से कम एक चित आने की प्रायिकता?
→ कुल = 4, प्रतिकूल (दोनों पट) = 1 → 1 - 1/4 = **3/4**

अध्याय 17 — डेटा व्याख्या (Data Interpretation)

पाई चार्ट: पूरा वृत्त = 360° = 100% → **1% = 3.6°**, **1° = 5/18 %**



1% = 3.6 degrees

चित्र 17.1 — मासिक बजट का पाई चार्ट — भोजन 120° अर्थात् कुल का एक-तिहाई भाग

हल किया उदाहरण: किसी परिवार के मासिक खर्च ₹36,000 के पाई चार्ट में "भोजन" का क्षेत्र 120° है। भोजन पर खर्च?

→ 120/360 = 1/3 → 36000 × 1/3 = **₹12,000**

दंड आलेख / रेखा ग्राफ हल करने के 3 कदम:

1. पहले **शीर्षक व इकाई** पढ़ें (हजार में? लाख में?)
2. जो पूछा है **वही** मान उठाएँ — पूरा ग्राफ मत पढ़ें
3. % परिवर्तन = (नया - पुराना)/**पुराना** × 100 — हर में हमेशा **पुराना** मान

अध्याय 18 — Junior स्तर की गणित शिक्षण-शास्त्र

18.1 पियाजे के अनुसार गणितीय चिंतन

अवस्था	आयु	गणित शिक्षण का निहितार्थ
संवेदी-गामक	0-2	वस्तु स्थायित्व
पूर्व-संक्रियात्मक	2-7	मूर्त वस्तुओं से गिनती; संरक्षण (conservation) नहीं
मूर्त संक्रियात्मक	**7-11**	**वर्गीकरण, क्रमबद्धता, संरक्षण आ जाता है — प्राथमिक गणित यहीं**
औपचारिक संक्रियात्मक	**11+**	**अमूर्त चिंतन, बीजगणित, परिकल्पना — Junior स्तर यहीं**

★ इसीलिए कक्षा 6-8 में बीजगणित पढ़ाया जाता है — बच्चा अमूर्त प्रतीकों (x, y) को समझने योग्य हो चुका होता है।

18.2 आकलन (Assessment)

- **रचनात्मक आकलन (Formative)** — सतत, सीखने के दौरान, सुधार हेतु
- **योगात्मक आकलन (Summative)** — अंत में, ग्रेड हेतु
- **CCE** — सतत एवं व्यापक मूल्यांकन

18.3 गणितीय अवधारणाओं की कठिनाइयाँ

- **गणित-भय (Maths Anxiety)** — कारण: रटने पर जोर, अपमान, गति का दबाव। उपाय: खेल, समूह-कार्य, त्रुटि की स्वीकृति।
- **सामान्य त्रुटियाँ:** शून्य से भाग की भ्रांति, ऋण चिह्न की उपेक्षा, भिन्न में हर जोड़ देना (1/2 + 1/3 = 2/5 ✗)।

18.4 शिक्षण सहायक सामग्री (TLM)

अबेकस, गिनतारा, डायनेस ब्लॉक, ज्यामिति बॉक्स, ग्राफ पेपर, तांग्राम, भिन्न-चक्र (fraction disc), जियोबोर्ड।

अध्याय 19 — मास्टर सूत्र-पत्र (One-Page Revision)

```
── बीजगणित ──
(a+b)² = a² + 2ab + b²
(a−b)² = a² − 2ab + b²
a² − b² = (a+b)(a−b)
a³ ± b³ = (a±b)(a² ∓ ab + b²)
a+b+c = 0 → a³+b³+c³ = 3abc
x + 1/x = k → x² + 1/x² = k² − 2
द्विघात: x = [−b ± √(b²−4ac)]/2a
मूलों का योग = −b/a, गुणनफल = c/a

── वाणिज्य गणित ──
लाभ% = (लाभ/CP)×100     छूट% = (छूट/MP)×100
SI = PRT/100
A = P(1 + R/100)^T       CI = A − P
CI−SI (2 वर्ष) = P(R/100)²
मिश्रण: (महँगा−औसत) : (औसत−सस्ता)
साझेदारी: पूँजी × समय के अनुपात में
क्रमिक %: a + b + ab/100

── समय-कार्य-चाल ──
2 व्यक्ति = ab/(a+b)
LCM विधि: कुल कार्य = LCM, क्षमता = कुल/दिन
```

औसत चाल = $2xy/(x+y)$

km/h → m/s = × 5/18

नाव: $u = (D+U)/2$, $v = (D-U)/2$

रेलगाड़ी: प्लेटफॉर्म = ट्रेन + प्लेटफॉर्म की लंबाई

— ज्यामिति —

त्रिभुज कोण योग = 180°, चतुर्भुज = 360°

बहुभुज अंतःकोण योग = $(n-2)\times180°$, बहिष्कोण = 360°

पाइथागोरस: कर्ण² = आधार² + लंब²

समरूप: क्षेत्रफल अनुपात = भुजा अनुपात²

केन्द्रक माध्यिका को 2:1 में बाँटता है

अर्धवृत्त का कोण = 90°

चक्रीय चतुर्भुज: सम्मुख कोण योग = 180°

— निर्देशांक —

दूरी = $\sqrt{[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]}$

मध्य-बिंदु = $((x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2)$

— क्षेत्रमिति —

वर्ग a^2, आयत lb, त्रिभुज $\frac{1}{2}bh$, वृत्त πr^2

समबाहु त्रिभुज = $(\sqrt{3}/4)a^2$

हीरोन = $\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$

घन a^3 | घनाभ lbh | बेलन $\pi r^2 h$

शंकु $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ | गोला $(4/3)\pi r^3$

शंकु: $l = \sqrt{(r^2+h^2)}$

लंबाई n गुना → क्षेत्रफल n^2, आयतन n^3

1 m^3 = 1000 लीटर

— सांख्यिकी —

माध्य = $\Sigma fx/\Sigma f$

बहुलक = 3 माध्यिका − 2 माध्य

$P(E)$ = अनुकूल/कुल, $P(E) + P(E') = 1$

पाई चार्ट: 1% = 3.6°

✓ अंतिम चेकलिस्ट (परीक्षा से 1 सप्ताह पहले)

- ☐ सर्वसमिकाएँ 1–10 बिना देखे लिख सकता हूँ
- ☐ वर्ग 1–30, घन 1–15, पहाड़े 1–25 मुँहजबानी
- ☐ प्रतिशत ↔ भिन्न तालिका याद

- ☐ CI, SI, लाभ-हानि के सूत्र में CP/MP का भ्रम नहीं
- ☐ सर्वांगसमता नियम (SSS, SAS, ASA, AAS, RHS) — और यह कि **AAA नहीं होता**
- ☐ क्षेत्रमिति के 12 सूत्र
- ☐ 5 पूर्ण Mock Test, हर बार गणित 18 मिनट में
- ☐ Error Notebook का अंतिम पाठ

शुभकामनाएँ! ◆ रोज़ 20 प्रश्न, बिना कैलकुलेटर, घड़ी लगाकर — यही 20/20 का रास्ता है।