四元数与三维旋转

一、复数

任意一个复数 $z \in \mathbb{C}$ 都可以表示为 $z = a + bi$ 的形式，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 而且 $i^2 = -1$. 我们将 a 称之为这个复数的**实部**（Real Part），b 称之为这个复数的**虚部**（Imaginary Part）.

因为 $z = a + bi$ 其实就是对于 $\{1, i\}$ 这个**基** (Basis) 的**线性组合** (Linear Combination)，我们也可以用向量来表示一个复数:

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

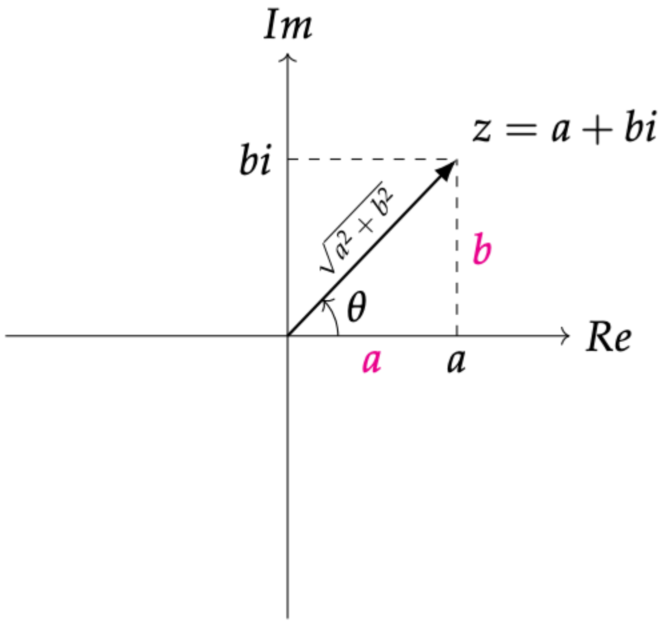
两个复数$Z_1 = a + bi, Z_2 = c + di$相乘：

$$Z_1 Z_2 = ac - bd + (bc + ad)i = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

复数相乘等价于矩阵和向量乘法，前者满足交换律，后者转置

将左侧矩阵稍作变形：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$



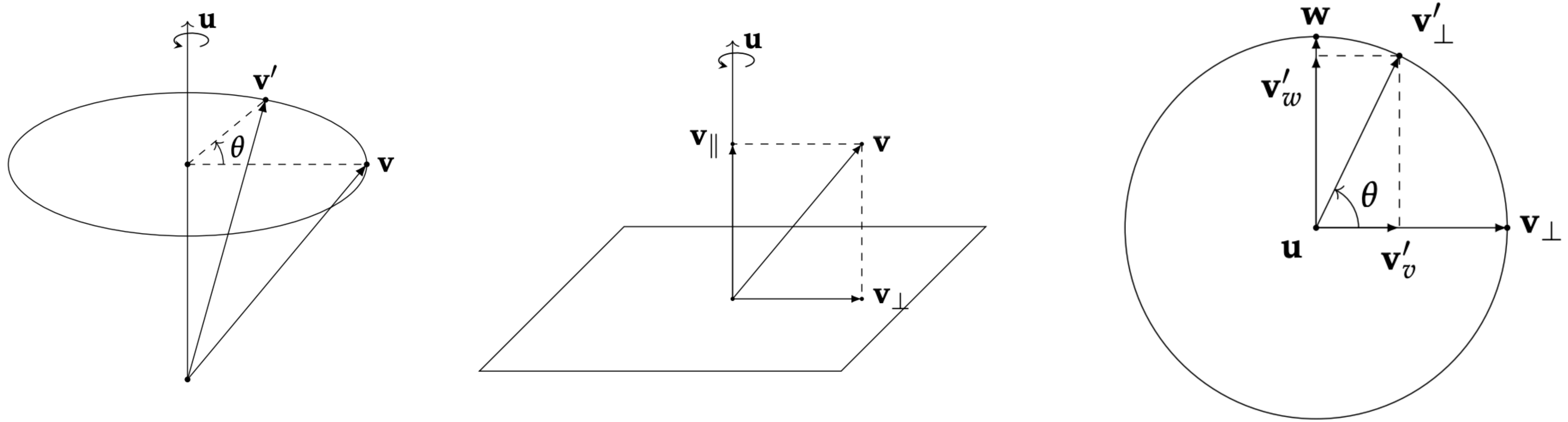
$$= \|z\| \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \|z\| \cdot I \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \|z\| & 0 \\ 0 & \|z\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

复数相乘=对其中一个向量放缩+旋转

二、三维空间中的旋转



当 $\mathbf{v}_\perp$ 正交于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'_\perp$ 为:

$$\mathbf{v}'_\perp = \cos(\theta)\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp)$$

三、四元数

定义：$q = a + bi + cj + dk$, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

写成向量形式：$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$，

也可以写为：　$q = [a, \mathbf{v}]$ ，（ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ ）

四元数模长：　$\| q \| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

四元数乘法：

$$q_1q_2 = (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk)$$
$$= \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

对任意四元数 $q_1 = [s, \mathbf{v}]$, $q_2 = [t, \mathbf{u}]$，q_1q_2 的结果是

$$q_1q_2 = [st - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u},\ s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathbf{u}]$$

纯四元数：$v = [0, \mathbf{v}]$

两个纯四元数 $v = [0, \mathbf{v}], u = [0, \mathbf{u}]$ 相乘：$vu = [0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, 0 + \mathbf{v} \times \mathbf{u}] = [-\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{u}]$

四元数的**逆**：q^{-1}，$qq^{-1} = q^{-1}q = 1$

四元数的**共轭**：$q^* = a - bi - cj - dk$

$$\begin{aligned} qq^* &= [s, \mathbf{v}] \cdot [s, -\mathbf{v}] \\ &= [s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, 0] \\ &= s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \| q \|^2 \end{aligned}$$

=>

$$\begin{aligned} qq^{-1} &= 1 \\ q^* qq^{-1} &= q^* \\ q^{-1} &= \frac{q^*}{\| q \|^2} \end{aligned}$$

四元数与3D旋转：

$$\mathbf{v}'_\perp = \cos(\theta)\,\mathbf{v}_\perp + \sin(\theta)(\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp)$$

$$\downarrow$$

$$v'_\perp = \cos(\theta)\,v_\perp + \sin(\theta)(\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp)$$

$$\downarrow$$

$$v'_\perp = \cos(\theta)\,v_\perp + \sin(\theta)(u v_\perp)$$

$$\downarrow$$

$$v'_\perp = (\cos(\theta) + \sin(\theta)\,u)v_\perp$$

$$\downarrow$$

$$v'_\perp = q v_\perp$$

$$\downarrow$$

$$q = \cos(\theta) + \sin(\theta)u_x i + \sin(\theta)u_y j + \sin(\theta)u_z k$$

$$\begin{aligned}
\|q\| &= \sqrt{\cos^2(\theta) + (\sin(\theta)\mathbf{u}\cdot\sin(\theta)\mathbf{u})} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)(\|\mathbf{u}\|^2)} && (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2) \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} && (\|\mathbf{u}\| = 1) \\
&= 1 && (\text{三角恒等式})
\end{aligned}$$

四元数与3D旋转：

$$
\begin{aligned}
v' &= v'_{\|} + v'_{\perp} \\
&= v_{\|} + q v_{\perp} \qquad \text{（其中 } q = [\cos(\theta),\ \sin(\theta)\mathbf{u}]\text{）}
\end{aligned}
$$

引理1： 如果 $q = [\cos(\theta), \sin(\theta)\mathbf{u}]$，而且 $\mathbf{u}$ 为单位向量，那么 $q^2 = qq = [\cos(2\theta), \sin(2\theta)\mathbf{u}]$

$$
\begin{aligned}
v' &= v_{\|} + q v_{\perp} && (q = [\cos(\theta),\ \sin(\theta)\mathbf{u}]) \\
&= 1 \cdot v_{\|} + q v_{\perp} \\
&= p p^{-1} v_{\|} + p p v_{\perp} && \text{（令 } q = p^2\text{，则 } p = \left[\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right),\ \sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\mathbf{u}\right]\text{）} \\
&= p p^{*} v_{\|} + p p v_{\perp}
\end{aligned}
$$

引理2:

假设 $v_{\parallel} = [0,\ \mathbf{v}_{\parallel}]$ 是一个纯四元数，而 $q = [\alpha,\ \beta\mathbf{u}]$，其中 $\mathbf{u}$ 是一个单位向量，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 在这种条件下，如果 $\mathbf{v}_{\parallel}$ 平行于 $\mathbf{u}$，那么 $qv_{\parallel} = v_{\parallel}q$

假设 $v_{\perp} = [0,\ \mathbf{v}_{\perp}]$ 是一个纯四元数，而 $q = [\alpha,\ \beta\mathbf{u}]$，其中 $\mathbf{u}$ 是一个单位向量，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 在这种条件下，如果 $\mathbf{v}_{\perp}$ 正交于 $\mathbf{u}$，那么 $qv_{\perp} = v_{\perp}q^*$

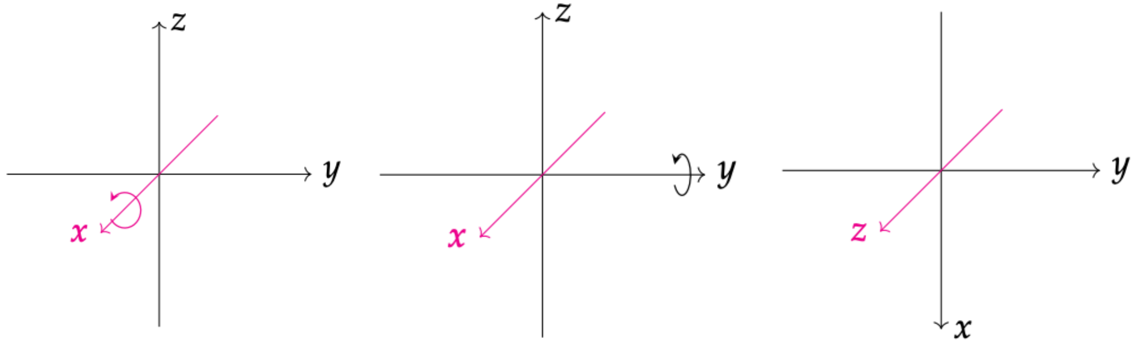
$$\begin{aligned} v' &= pp^*v_{\parallel} + ppv_{\perp} \\ &= pv_{\parallel}p^* + pv_{\perp}p^* \\ &= p(v_{\parallel} + v_{\perp})p^* \\ &= pvp^* \end{aligned}$$

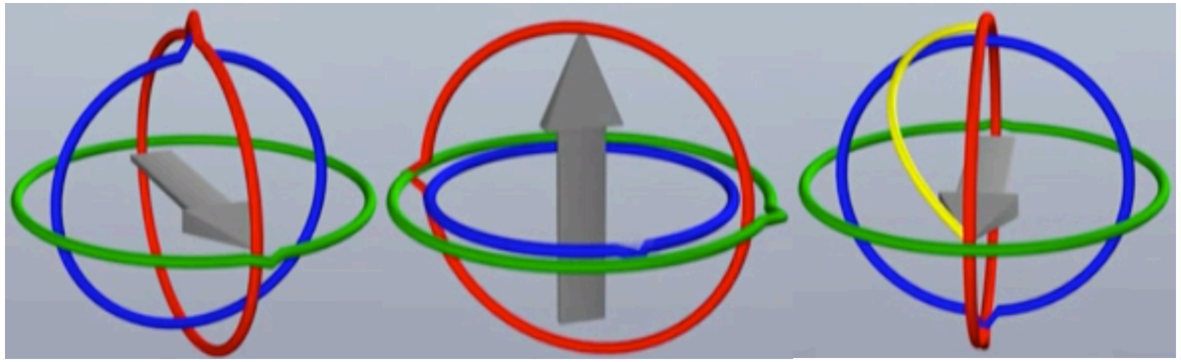
结论：

任意向量 $\mathbf{v}$ 沿着以单位向量定义的旋转轴 $\mathbf{u}$ 旋转 θ 度之后的 $\mathbf{v}'$ 可以使用四元数乘法来获得．令 $v = [0, \mathbf{v}]$，$q = \left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right), \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\mathbf{u}\right]$，那么：

$$v' = qvq^* = qvq^{-1}$$

四、万向节死锁：





谢谢观看