

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Дальневосточный государственный университет

**А.Г. КОЛОВОВ, Л.А. МОЛЧАНОВА**

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**

Методические указания и задания для студентов  
математических специальностей

В л а д и в о с т о к  
Издательство Дальневосточного университета  
2008

ББК 22.143  
К61

Рецензент:  
Т.В. Пак, к.ф.-м.н.; ИМKN ДВГУ

***Колобов А.Г., Молчанова Л.А.***

К61 Численные методы линейной алгебры. Учебно-методическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2008. - 36 с.

Численные методы линейной алгебры содержат теоретический материал и задания для самостоятельного выполнения лабораторного практикума. Темы: "Методы решения систем линейных алгебраических уравнений", "Вычисление обратных матриц и определителей", "Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц". Приводятся примеры использования этих методов и даются варианты заданий для группы студентов.

Для студентов математических специальностей.

К  $\frac{1702030000}{180(03) - 2008}$

ББК 22.143

©Колобов А.Г., 2008  
©Молчанова Л.А., 2008  
©ИМKN ДВГУ, 2008

# Содержание

<b>1</b>	<b>Численное решение систем линейных алгебраических уравнений</b>	<b>4</b>
1.1	Точные методы решения . . . . .	5
1.1.1	Схема Гаусса с выбором главного элемента . . . . .	5
1.1.2	Метод единственного деления. . . . .	8
1.1.3	Метод оптимального исключения . . . . .	9
1.1.4	Метод квадратного корня . . . . .	10
1.1.5	Схема Халецкого . . . . .	12
1.1.6	Метод отражений. Вариант 1 . . . . .	13
1.1.7	Метод отражений. Вариант 2 . . . . .	15
1.2	Итерационные методы . . . . .	18
1.2.1	Метод простой итерации . . . . .	18
1.2.2	Метод Зейделя . . . . .	20
1.2.3	Метод релаксации . . . . .	21
1.3	Задания . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц</b>	<b>25</b>
2.1	Методы получения характеристического многочлена . . . . .	25
2.1.1	Метод Леверье. . . . .	25
2.1.2	Метод Фадеева . . . . .	27
2.2	Частичная проблема собственных значений. . . . .	28
2.2.1	Метод простой итерации . . . . .	28
2.2.2	Метод прямых итераций . . . . .	29
2.2.3	Метод обратных итераций . . . . .	30
2.3	Полная проблема собственных значений . . . . .	31
2.3.1	Метод вращения с преградами . . . . .	31
2.4	Задания . . . . .	34



## 1.1 Точные методы решения

Эти методы просты и универсальны, однако вследствие неизбежных округлений результаты являются приближенными, причем оценка погрешности корней в общем случае затруднительна. К ним относятся: метод исключения (варианты метода Гаусса), метод квадратного корня, метод Халецкого, метод отражений и другие.

### 1.1.1 Схема Гаусса с выбором главного элемента

Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса с выбором главного элемента сводится к построению системы с треугольной матрицей, эквивалентной исходной системе.

Рассмотрим расширенную прямоугольную матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных и свободных членов системы (1):

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & b_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Выберем наибольший по модулю элемент  $a_{pq}$ , не принадлежащий столбцу свободных членов матрицы  $M$ . Этот элемент называется главным элементом. Строка матрицы  $M$ , содержащая главный элемент, называется главной строкой. Столбец матрицы  $M$ , содержащий главный элемент, называется главным столбцом. Далее, производя некоторые операции, построим матрицу  $M^{(1)}$  с меньшим на единицу числом строк и столбцов. Матрица  $M^{(1)}$  получится преобразованием из  $M$ , при котором главная строка и главный столбец матрицы  $M$  исключается. Над матрицей  $M^{(1)}$  повторяем те же операции, что и над матрицей  $M$ , после чего получаем матрицу  $M^{(2)}$ , и т.д. Таким образом, мы построим последовательность матриц

$$M, M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(n-1)}, \quad (4)$$

последняя из которых представляет собой двухэлементную матрицу - строку; ее также считаем главной строкой.

Для получения системы с треугольной матрицей, эквивалентной системе (1), объединяем все главные строки матриц последовательности (4), начиная с последней  $M^{(n-1)}$ .

Рассмотрим подробнее эту схему для системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

Вычисления удобно записать на расчетном бланке.

В таблице 1 показан процесс построения последовательности матриц (4). Главные элементы отмечены рамкой. В III столбце помещены значения  $m_i$ , равные отношению соответствующего элемента главного столбца к главному элементу с противоположным знаком. В строках, отмеченных звездочкой, выписываем элементы соответствующих главных строк,

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
M	N	$m_i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$	$b_i$
$M^{(0)}$	1	$m_1 = -\frac{a_{13}}{a_{23}}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$b_1$
	2		$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$b_2$
	3	$m_3 = -\frac{a_{33}}{a_{23}}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	$b_3$
	4	$m_4 = -\frac{a_{23}}{a_{23}}$	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$	$b_4$
	$2^*$		$\alpha_{21} = \frac{a_{21}}{a_{23}}$	$\alpha_{22} = \frac{a_{22}}{a_{23}}$	$\alpha_{23} = 1$	$\alpha_{24} = \frac{a_{24}}{a_{23}}$	$\beta_2 = \frac{b_2}{a_{23}}$
$M^{(1)}$	1	$m_1^{(1)} = -\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$a_{11}^{(1)} = a_{11} + a_{21}m_1$	$a_{12}^{(1)} = a_{12} + a_{22}m_1$	0	$a_{14}^{(1)} = a_{14} + a_{24}m_1$	$b_1^{(1)} = b_1 + b_2m_1$
	3		$a_{31}^{(1)} = a_{31} + a_{21}m_3$	$a_{32}^{(1)} = a_{32} + a_{22}m_3$	0	$a_{34}^{(1)} = a_{34} + a_{24}m_3$	$b_3^{(1)} = b_3 + b_2m_3$
	4	$m_4^{(1)} = -\frac{a_{43}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$	$a_{41}^{(1)} = a_{41} + a_{21}m_4$	$a_{42}^{(1)} = a_{42} + a_{22}m_4$	0	$a_{44}^{(1)} = a_{44} + a_{24}m_4$	$b_4^{(1)} = b_4 + b_2m_4$
	$3^*$		$\alpha_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$\alpha_{32} = 1$	0	$\alpha_{34} = \frac{a_{34}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$\beta_3 = \frac{b_3^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$
$M^{(2)}$	1	$m_1^{(2)} = -\frac{a_{11}^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$	$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)} + a_{31}^{(1)}m_1^{(1)}$	0	0	$a_{14}^{(2)} = a_{14}^{(1)} + a_{34}^{(1)}m_1^{(1)}$	$b_1^{(2)} = b_1^{(1)} + b_3^{(1)}m_1^{(1)}$
	4		$a_{41}^{(2)} = a_{41}^{(1)} + a_{31}^{(1)}m_4^{(1)}$	0	0	$a_{44}^{(2)} = a_{44}^{(1)} + a_{34}^{(1)}m_4^{(1)}$	$b_4^{(2)} = b_4^{(1)} + b_3^{(1)}m_4^{(1)}$
	$4^*$		$\alpha_{41} = 1$	0	0	$\alpha_{44} = \frac{a_{44}^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$	$\beta_4 = \frac{b_4^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$
$M^{(3)}$	1		0	0	0	$a_{14}^{(3)} = a_{14}^{(2)} + a_{44}^{(2)}m_1^{(2)}$	$b_4^{(3)} = b_1^{(2)} + b_4^{(2)}m_1^{(2)}$
	$1^*$		0	0	0	1	$\beta_4 = \frac{b_4^{(3)}}{a_{14}^{(3)}} = x_4$
			1				$x_1 = \beta_4 - \alpha_{44}x_4$
				1			$x_2 = \beta_3 - \alpha_{34}x_4 - \alpha_{31}x_1$
					1		$x_3 = \beta_2 - \alpha_{24}x_4 - \alpha_{22}x_2 - \alpha_{21}x_1$

поделенных на их главные элементы. Объединив уравнения, отмеченные звездочкой, мы получим систему

$$\begin{matrix} (1^*) \\ (4^*) \\ (3^*) \\ (2^*) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} x_4 = \beta_4 \\ x_1 + \alpha_{44}x_4 = \beta_1 \\ \alpha_{31}x_1 + x_2 + \alpha_{34}x_4 = \beta_3 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + x_3 + \alpha_{24}x_4 = \beta_2 \end{array} \right.$$

с треугольной матрицей, эквивалентную исходной системе. Из этой системы последовательно находим значения компонент искомого вектора  $\bar{x}$  по формулам

$$\begin{aligned} x_4 &= \beta_4 \\ x_1 &= \beta_1 - \alpha_{44}x_4 \\ x_2 &= \beta_3 - \alpha_{31}x_1 - \alpha_{34}x_4 \\ x_3 &= \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2 - \alpha_{24}x_4 \end{aligned}$$

Эту часть процесса отражают последние четыре строки таблицы 1.

Сам процесс исключения неизвестных называют прямым ходом, а решение системы с треугольной матрицей - обратным ходом.

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения по схеме Гаусса с выбором главного элемента.

$$A\bar{x} = \bar{b}, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 2,1 & -4,5 & -2,0 \\ 3,0 & 2,5 & 4,3 \\ -6,0 & 3,5 & 2,5 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 19,07 \\ 3,21 \\ -18,25 \end{bmatrix}$$

Расчетный бланк решения.

M	N	m	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$b_i$
$M^{(0)}$	1	$m_1=0,35$	2,1	-4,5	-2,0	19,07
	2	$m_2=0,5$	3,0	2,5	4,3	3,21
	3		-6,0	3,5	2,5	-18,25
	3*		1	-0,58333	-0,41667	3,04167
$M^{(1)}$	1	$m_1^{(1)}=0,20270$	0	-3,275	-1,125	12,6825
	2		0	4,25	5,55	-5,915
	2*		0	0,76576	1	-1,06576
$M^{(2)}$	1		0	-2,41353	0	11,48353
	1*		0	1	0	$x_2=-4,75798$ $x_3=2,7771$ $x_1=1,34025$

Решением системы является вектор-столбец

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1,34025 \\ -4,75798 \\ 2,7771 \end{bmatrix}$$

### 1.1.2 Метод единственного деления.

Выразим следующую систему в форме расширенной матрицы, найдем эквивалентную ей верхнюю треугольную систему линейных уравнений и ее решение.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 13 \\2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 \\4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20 \\-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6\end{aligned}$$

Расширенная матрица имеет вид

$$\begin{array}{l} \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{21} = 2 \\ m_{31} = 4 \\ m_{41} = -3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

Первая строка используется, чтобы исключить элементы под диагональю в первом столбце. Мы обращаемся к первой строке, как к главной, и называем элемент  $a_{11}$  главным. Значение  $m_{k1}$  является множителем строки 1, которую вычитаем из  $k$  строк,  $k = 2, 3, 4$ . Результатом первого исключения будет

$$\begin{array}{l} \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{32} = 1,5 \\ m_{42} = -1,75 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array} \right]$$

Вторая строка используется, чтобы исключить элементы под диагональю во втором столбце. Эта строка является главной, и значение  $m_{k1}$  является множителем строки 2, которую вычитаем из  $k$  строк,  $k = 3, 4$ . Результатом исключения будет

$$\begin{array}{l} \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{43} = -1,9 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7,5 & -35 \\ 0 & 0 & 9,5 & 5,25 & 48,5 \end{array} \right]$$

Наконец, умножаем  $m_{43} = -1,9$  на третью строку, вычитаем из четвертой строки и в результате получаем верхнюю треугольную систему линейных уравнений

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7,5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array} \right] \quad (5)$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (5) воспользуемся алгоритмом обратной подстановки и получим

$$x_4 = 2, \quad x_3 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 3.$$

Если  $a_{kk} = 0$ , то строку  $k$  нельзя использовать для исключения элементов столбца  $k$  и строку  $k$  следует заменить такой же строкой под диагональю, чтобы получить не равный нулю главный элемент. Если этого сделать нельзя, значит, матрица коэффициентов системы линейных уравнений является вырожденной и система не имеет единственного решения.



### 1.1.3 Метод оптимального исключения

Пусть дана система уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$ . Обозначив  $b_i$  через  $a_{in+1}$ , преобразуем эту систему к эквивалентной системе более простого вида. Допустим, что  $a_{11} \neq 0$ . Разделим все коэффициенты первого уравнения системы на  $a_{11}$ , который назовем ведущим элементом первого шага, тогда

$$x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = a_{1n+1}^{(1)}$$

Здесь  $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}/a_{11}$ ,  $j = 2, 3, \dots, n+1$ .

Предположим, что после преобразования первых  $k$  ( $k \geq 1$ ) уравнений система приведена к эквивалентной системе

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + \dots + a_{1k+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + a_{1n}^{(k)} x_n & = & a_{1n+1}^{(k)} \\ x_2 + \dots + a_{2k+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + a_{2n}^{(k)} x_n & = & a_{2n+1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_k + a_{kk+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k)} x_n & = & a_{kn+1}^{(k)} \\ a_{k+11} x_1 + a_{k+12} x_2 + \dots + a_{k+1n+1} x_k + \dots + a_{k+1n} x_n & = & a_{k+1n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nk+1} x_k + \dots + a_{nn} x_n & = & a_{nn+1} \end{array} \right.$$

Исключим неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  из  $(k+1)$  уравнения посредством вычитания из него первых  $k$  уравнений, умноженных соответственно на числа  $a_{k+11}, a_{k+12}, \dots, a_{k+1k}$ , и разделив вновь полученное уравнение на коэффициенты при  $x_{k+1}$ . Теперь  $(k+1)$  уравнение примет вид:

$$x_{k+1} + a_{k+1k+2}^{(k+1)} \cdot x_{k+2} + \dots + a_{k+1n}^{(k+1)} \cdot x_n = a_{k+1n+1}^{(k+1)}$$

Исключая с помощью этого уравнения неизвестное  $x_{k+1}$  из первых  $k$  уравнений (3), получаем опять систему вида (3), но с заменой индекса  $k$  на  $k+1$ , причем

$$a_{i1}^{(1)} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n+1.$$

$$a_{k+1p}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1p} - \sum_{r=1}^k a_{rp}^{(k)} a_{k+1r}}{a_{k+1k+1} - \sum_{r=1}^k a_{rk+1}^{(k)} a_{k+1r}};$$

$$a_{ip}^{(k+1)} = a_{ip}^{(k)} - a_{k+1p}^{(k+1)} a_{ik+1}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

$$p = k+2, k+3, \dots, n+1; \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

После преобразования всех уравнений находим решение исходной системы  $x_i = a_{in+1}^{(n)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Указанная схема оптимального исключения работает в случае неравенства нулю ведущих элементов. Наилучшим вариантом методом оптимального исключения является вариант с выбором максимального по модулю элемента в строке. В этом случае структура исключения сохраняется, меняется лишь порядок исключения неизвестных. Теперь в качестве ведущего элемента будем брать максимальный по модулю элемент того уравнения, который получается из  $(k+1)$ -го уравнения исходной системы после исключения первых  $k$  шагов. Ведущим

элементом первого шага будет максимальный по модулю элемент первого уравнения системы (3). При проведении расчетов удобно пользоваться следующей вычислительной схемой:

Матрица  $k$ -го шага

$1 \ 0 \ \dots \ 0$	$a_{1k+1}^{(k)}$	$a_{1k+2}^{(k)} \ \dots \ a_{1n+1}^{(k)}$
$0 \ 1 \ \dots \ 0$	$a_{2k+1}^{(k)}$	$a_{2k+2}^{(k)} \ \dots \ a_{2n+1}^{(k)}$
$\dots \ \dots \ \dots$	$\dots$	$\dots \ \dots \ \dots$
$0 \ 0 \ \dots \ 1$	$a_{kk+1}^{(k)}$	$a_{kk+2}^{(k)} \ \dots \ a_{kn+1}^{(k)}$
$a_{k+11} a_{k+12} \ \dots \ a_{k+1k}$	$a_{k+1k+1}$	$a_{k+1k+2} \ \dots \ a_{k+1n+1}$
$a_{k+21} a_{k+22} \ \dots \ a_{k+2k}$	$a_{k+2k+1}$	$a_{k+2k+2} \ \dots \ a_{k+2n+1}$
$\dots \ \dots \ \dots$	$\dots$	$\dots \ \dots \ \dots$
$a_{n1} a_{n2} \ \dots \ a_{nk}$	$a_{nk+1}$	$a_{nk+2} \ \dots \ a_{nn+1}$

Матрица  $(k+1)$ -го шага после преобразования:

$1 \ 0 \ \dots \ 0$	$0$	$a_{ip}^{(k+1)} = a_{ip}^{(k)} + a_{k+1p}^{(k+1)} a_{ik+1}$
$0 \ 1 \ \dots \ 0$	$0$	$i = 1, 2, \dots, k$
$\dots \ \dots \ \dots$	$\dots$	$\dots \ \dots \ \dots$
$0 \ 0 \ \dots \ 1$	$0$	$p = k+2, \dots, n+1$
$0 \ 0 \ \dots \ 0$	$1$	$a_{k+1p}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1p} - \sum_{r=1}^k a_{rp}^{(k)} a_{k+1r}}{a_{k+1k+1} - \sum_{r=1}^k a_{rk+1}^{(k)} a_{k+1r}}$
$a_{k+21} \ a_{k+22} \ \dots \ a_{k+2k}$	$a_{k+2k+1}$	$a_{k+2k+2} \ \dots \ a_{k+2n+1}$
$\dots \ \dots \ \dots$	$\dots$	$\dots \ \dots \ \dots$
$a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nk}$	$a_{nk+1}$	$a_{nk+2} \ \dots \ a_{nn+1}$

Пример. Решить методом оптимального исключения систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Вычислительная схема

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i2}^{(k)}$	$a_{i3}^{(k)}$	$a_{i4}^{(k)}$	k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i2}^{(k)}$	$a_{i3}^{(k)}$	$a_{i4}^{(k)}$
0	5	2	3	3	1	1	5/2	3/5	3/5
	1	6	1	5		1	6	1	5
	3	-4	-2	8		3	-4	-2	8
k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i2}^{(k)}$	$a_{i3}^{(k)}$	$a_{i4}^{(k)}$	k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i2}^{(k)}$	$a_{i3}^{(k)}$	$a_{i4}^{(k)}$
2	1	0	4/7	2/7	3	1	0	0	2
	0	1	1/14	1/14		0	1	0	1
	3	-4	-2	8		0	0	1	-3

Ответ:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -3$ .

#### 1.1.4 Метод квадратного корня

Этот метод используется для решения систем, у которых матрица  $A$  симметрична. В этом случае матрицу  $A$  можно разложить в произведение двух транспонированных друг

другу треугольных матриц

$$A = S'S,$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

Формулы для определения  $s_{ij}$ :

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad (j > 1),$$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2} \quad (i > 1), \quad s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj}}{s_{ii}} \quad (j > i),$$

$$s_{ij} = 0 \quad (i > j).$$

После того как матрица  $S$  найдена, решают систему

$$S'y = b,$$

а затем находят неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из системы

$$Sx = y$$

Так как обе системы имеют треугольную форму, то они легко решаются.

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}y_k}{s_{ii}}, \quad (i > 1).$$

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n s_{ik}x_k}{s_{ii}}, \quad (i < n).$$

При практическом применении метода последовательно *прямым ходом* вычисляются коэффициенты  $s_{ij}$  и  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а затем *обратным ходом* находятся неизвестные  $x_i$  ( $i = n, n-1, \dots, 1$ ).

Пример. Методом квадратного корня решить систему уравнений

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & & -2x_5 & = 0,5 \\ 3x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +x_4 & -3x_5 & = 5,4 \\ -2x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 5,0 \\ & x_2 & -2x_3 & +5x_4 & +3x_5 & = 7,5 \\ -2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = 3,3 \end{array}$$

Расчетный бланк решения.

$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$	$a_{i5}$	$b_i$
1	3	-2	0	-2	0,5
3	4	-5	1	-3	5,4
-2	-5	3	-2	2	5,0
0	1	-2	5	3	7,5
-2	-3	2	3	4	3,3
$s_{i1}$	$s_{i2}$	$s_{i3}$	$s_{i4}$	$s_{i5}$	$y_i$
1	3	-2	0	-2	0,5
	2,2361i	-0,4472i	-0,4472i	-1,3416i	-1,7471i
		0,8944i	2,0125i	1,5653i	-7,5803i
			3,0414i	2,2194	-2,2928
				0,8221i	0,1643i
-6,0978	-2,2016	-6,8011	-8,8996	0,1998	$x_i$

### 1.1.5 Схема Халецкого

Дана система  $A\bar{x} = \bar{b}$ , где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} a_{1n+1} \\ \dots \\ a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

Представляем матрицу  $A$  в виде произведения двух матриц  $B$  и  $C$ , т.е.  $A = BC$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  определяются по формуле:

$$\begin{cases} b_{i1} = a_{i1}, & c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}, & c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}), \\ (i \geq j > 1), & (1 < i < j). \end{cases}$$

Вектор решения  $\bar{x}$  может быть найден из последовательного решения уравнений

$$B\bar{y} = \bar{b}, \quad C\bar{x} = \bar{y}.$$

Так как  $B$  и  $C$  матрицы треугольные, то

$$y_1 = \frac{a_{1n+1}}{b_{11}}; \quad y_i = \left( a_{in+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k \right) / b_{ii}, \quad (i > 1),$$

и

$$x_n = y_n; \quad x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik}x_k, \quad (i < n).$$

Пример. Методом Халецкого решить систему уравнений

$$\begin{array}{rrrrr} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ -5x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -12 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & 1,0 \\ x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & 3 \end{array}$$

Расчетный вид бланка и схема решения системы.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	3	1	-1	2	6
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$a_{25}$	-5	1	3	-4	-12
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	$a_{35}$	2	0	1	-1	1
$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$	$a_{45}$	1	-5	3	-3	3
$b_{11} 1$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$c_{15}$	3 1	1/3	-1/3	2/6	2
$b_{21}$	$b_{22} 1$	$c_{23}$	$c_{24}$	$c_{25}$	-5	8/3	1	0,5	-0,75
$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33} 1$	$c_{34}$	$c_{35}$	2	-2/3	2	1	-1,25
$b_{41}$	$b_{42} 1$	$b_{43}$	$b_{44} 1$	$c_{45}$	1	-16/3	6	2,5	1
				$x_1$					1
				$x_2$					-1
				$x_3$					2
				$x_4$					3

Ответ:  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 3$ .

### 1.1.6 Метод отражений. Вариант 1

Метод отражений решения системы уравнений  $Ax = f$  состоит в выполнении  $n-1$  шагов ( $n$  - порядок матрицы), в результате чего матрица  $A$  системы приводится к верхней треугольной форме, и последующем решении системы с верхней треугольной матрицей.

Пусть в результате выполнения  $k-1$  шагов матрица  $A$  привелась к виду

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1k+1}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & a_{2k+1}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{k-1k-1}^{(k-1)} & a_{k-1k}^{(k-1)} & a_{k-1k+1}^{(k-1)} & \dots & a_{k-1n}^{(k-1)} \\ & & & & a_{kk}^{(k-1)} & a_{kk+1}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & & & & 0 & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & a_{nk}^{(k-1)} & a_{nk+1}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Опишем  $k$ -й шаг процесса. Цель  $k$ -го шага - обнулить все поддиагональные элементы  $k$ -го столбца. Для этого определим вектор нормали  $p^{(k)} = (0, \dots, 0, p_k^{(k)}, p_{k+1}^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})^T$ , положив

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^n (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad \sigma_k = \begin{cases} 1, & a_{kk}^{(k-1)} \geq 0, \\ -1, & a_{kk}^{(k-1)} < 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$p_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, \quad l = k+1, \dots, n. \quad (7)$$

Определим теперь матрицу отражения  $P_k$  с элементами  $p_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij} - 2p_i^{(k)} p_j^{(k)} / \sum_{l=k}^n (p_l^{(k)})^2$ , где  $\sigma_{ij}$  — символ Кронеккера.

Легко проверить, что матрица  $A_k = P_k A_{k-1}$  имеет вид

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1k+1}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & a_{2k+1}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_{k-1k-1}^{(k-1)} & a_{k-1k}^{(k-1)} & a_{k-1k+1}^{(k-1)} & \dots & a_{k-1n}^{(k-1)} \\ & & & & 0 & a_{kk+1}^{(k-1)} & \dots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & 0 & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & a_{nk+1}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

т.е. поддиагональные элементы ее  $k$ -ого столбца равны нулю, а первые  $k-1$  строк и столбцов ее совпадают, с соответствующими строками и столбцами матрицами  $A_{k-1}$ . Кроме того, можно показать, что остальные элементы вычисляются по формулам

$$a_{kk}^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^n (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2p_i^{(k)} \frac{\sum_{l=k}^n (p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)})}{\sum_{l=k}^n (p_l^{(k)})^2}, \quad (8)$$

$$i = k, k+1, \dots, n, \quad j = k+1, \dots, n.$$

В результате выполнения всех  $n-1$  шагов матрица  $A$  приведет к верхней треугольной матрице

$$A_{n-1} = P_{n-1} P_{n-2} \dots P_2 P_1 A,$$

которую мы в дальнейшем будем обозначать через  $R$  :  $R = A_{n-1}$ . Обозначив еще  $Q = P_1 P_2 \dots P_{n-1}$ , приходим к равенству  $A = QR$ , которое удобно использовать для получения решения системы  $Ax = f$ .

Обратимся теперь к решению системы  $Ax = f$ . Если мы получили разложение  $A = QR$ , то для решения этой системы нам, очевидно, достаточно решить систему  $Rx = Q^* f$  с треугольной матрицей  $R$  и правой частью  $g = Q^* f$ . Решение этой системы находится по простым явным формулам:

$$x_n = g_n / r_{nn}, \quad x_i = \frac{g_i - \sum_{j=i+1}^n r_{ij} x_j}{r_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Однако прежде чем находить решение по этим формулам, нам необходимо сначала вычислить правую часть преобразованной системы, т.е. вектор  $g = P_{n-1} \dots P_2 P_1 f$ . Обозначим  $f^{(k)} = P_k P_{k-1} P_1 f$ . Тогда  $f^{(k)} = P_k f^{(k-1)}$ . Предположим, что вектор  $f^{(k-1)}$  имеет вид

$$f^{(k-1)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots, f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k-1)}, f_{k+1}^{(k-1)}, \dots, f_n^{(k-1)})^T.$$

В силу определения матрицы  $P_k$  и определяющего ее вектора  $p^{(k)}$  легко проверить, что вектор  $f^{(k)}$  будет иметь вид

$$f^{(k)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots, f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})^T,$$

где элементы  $f_i^{(k)}$  вычисляются по формулам

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - 2p_l^{(k)} \frac{\sum_{l=k}^n p_l^{(k)} f_l^{(k-1)}}{\sum_{l=k}^n (p_l^{(k)})^2}, \quad i = k, k+1, \dots, n.$$

Пример. Решить систему методом отражения

$$\begin{cases} 6,03x_1 + 13x_2 - 17x_3 = 2,0909 \\ 13x_1 + 29,03x_2 - 38x_3 = 4,1509 \\ -17x_1 - 38x_2 + 50,03x_3 = -5,1191 \end{cases}$$

Расчетный бланк

k	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$p$	$z^{(2)}$	$z^{(3)}$	$z^{(4)}$
k	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$p_1$	$2r_2p_1/s$	$2r_3p_1/s$	$2r_4p_1/s$
	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$p_2$	$2r_2p_2/s$	$2r_3p_2/s$	$2r_4p_2/s$
	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	$p_3$	$2r_2p_3/s$	$2r_3p_3/s$	$2r_4p_3/s$
					$s = \ p\ ^2$	$r_2 = (p, a_2)$	$r_3 = (p, a_3)$	$r_4 = (p, a_4)$
0	6,03	13	-17	2,0909	28,2642	62,5533	-82,0807	8,9989
	13	29,03	-38	4,1509	13	28,7711	-37,7526	4,1390
	-17	-38	50,03	-5,1191	-17	-37,6238	49,3688	-5,4126
					1256,867	1390,825	-1825,002	200,084
1	-22,2342	-49,5533	65,0807	-6,9080	0		0	0
	0	0,2589	-0,2473	0,0119	0,7156		-0,9322	-0,2231
	0	-0,3762	0,6611	0,2934	-0,3762		0,4901	0,1173
					0,6536		-0,4257	-0,1019
	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	$x$			
2	-22,2342	-49,5533	65,0807	-6,9080	1,03			
	0	-0,4567	0,6849	0,2350	1,03			
	0	0	0,1710	0,1761	1,03			

Ответ:  $x_1 = 1,03$ ,  $x_2 = 1,03$ ,  $x_3 = 1,03$ .

### 1.1.7 Метод отражений. Вариант 2

Метод отражений применяется для решения системы уравнений  $Ax = f$  с комплексно неособенной матрицей. В этом методе матрица  $A$  раскладывается на произведение двух матриц: унитарной матрицы и правой треугольной.

При реализации данного метода необходимо воспользоваться следующими соотношениями:

$$\bar{\omega} = \chi(\bar{s} - \alpha\bar{e}), \alpha = |\alpha|e^{arg\alpha}, |\alpha| = \sqrt{(\bar{s}, \bar{s})}, arg\alpha = arg(\bar{s}, \bar{e}) - \pi,$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2[|\alpha|^2 + |\alpha| |(\bar{s}, \bar{e})|]}}. \quad (9)$$

Разложение комплексной матрицы  $A$  в произведение унитарной и правой треугольной происходит за несколько шагов.

Шаг 1.

В качестве вектора  $\bar{s}$  выберем первый столбец матрицы  $A$ , т.е.  $\bar{s} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$ , а за  $\bar{e}$  возьмем вектор  $\bar{e} = (1, 0, \dots, 0)'$ . Воспользуемся соотношениями (9) для нахождения  $\alpha, \chi, \bar{\omega}_1$ . Построим матрицу  $C_1 = E - 2\bar{\omega}_1\bar{\omega}_1^*$ . Обозначим  $A_1 = C_1A$ . Матрица  $A_1$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdot & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdot & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \cdot & a_{\dots}^{(1)} \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdot & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Шаг 2.

В качестве вектора  $\bar{s}$  выберем  $\bar{s} = (0, a_{21}^{(1)}, \dots, a_{n1}^{(1)})'$ , а за  $\bar{e}$  возьмем вектор  $\bar{e} = (0, 1, \dots, 0)'$ . Затем находим  $\bar{\omega}_2$  и строим матрицу  $C_2 = E - 2\bar{\omega}_2\bar{\omega}_2^*$ . Обозначим  $A_2 = C_2A$ . Матрица  $A_2$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{31}^{(2)} & \cdot & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdot & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdot & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \cdot & a_{\dots}^{(2)} & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdot & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Продолжая этот процесс, получаем в итоге матрицу  $A_{n-1}$ , имеющую правотреугольный вид.

Рассмотрим, как находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом отражений.

Обозначим через  $A_0 = \{a_1^{(0)}, \dots, a_{n+1}^{(0)}\}$  расширенную матрицу системы  $Ax = f$ , где  $a_{n+1}^{(0)} = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$ ,  $a_k^{(0)} = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{1n})'$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Данная матрица преобразуется к правой треугольной с помощью матриц отражения

$$A_{k+1} = C_{k+1}A_k \quad \text{или} \quad \bar{a}_i^{(k+1)} = C_{k+1}\bar{a}_i^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

При построении матрицы  $C_{k+1}$  в качестве векторов  $\bar{e}$  и  $\bar{s}$  возьмем векторы  $\bar{e} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)'$ ,  $\bar{s} = (0, \dots, 0, a_{k+1k+1}^{(k)}, a_{k+2k+1}^{(k)}, \dots, a_{nk+1}^{(k)})'$ .

После  $n-1$  шага система  $Ax = f$  имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= a_{1n+1}^{(n-1)}, \\ a_{22}^{(n-1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(n-1)}x_n &= a_{2n+1}^{(n-1)}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= a_{nn+1}^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Решение системы (10) находится по формулам

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_k = \frac{a_{kn+1}^{(n-1)} - \sum_{i=k+1}^n a_{ni}^{(n-1)}x_i}{a_{kk}^{(n-1)}}. \tag{11}$$

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом отражений.

$$\begin{cases} 2x_1 + (-9 + 4i)x_2 + (4 - 3i)x_3 = 15 - i \\ -(9 + 4i)x_1 + 6x_2 + (-1 + 2i)x_3 = -22 + 26i \\ -(4 + 5i)x_1 - (1 + 2i)x_2 - 3x_3 = -12 + 10i \end{cases}$$



Решение. Пользуясь приведенным алгоритмом, находим:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -9 + 4i & 4 - 3i & 15 - i \\ -9 - 4i & 6 & -1 + 2i & -22 + 26i \\ -4 - 5i & -1 - 2i & -3 & -12 + 10i \end{bmatrix}$$

Шаг первый прямого хода.

$$\bar{s} = (2, -9 - 4i, -4 - 5i), \quad \bar{e} = (1, 0, 0)$$

$$\alpha = -11,9164; \quad \chi = 0,05491$$

$$\bar{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0,7641 \\ -0,4942 - 0,2196i \\ -0,2196 - 0,2746i \end{bmatrix} \quad \bar{\omega}_1^* = [0,7641, -0,4942 + 0,2196i, -0,2196 + 0,2746i]$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0,1678 & 0,7553 - 0,3357i & 0,3357 - 0,4196i \\ 0,7553 + 0,3357i & 0,4151 & -0,3377 + 0,1749i \\ 0,3357 + 0,4196i & -0,3377 - 0,1749i & 0,528 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -11,9163 & 4,8671 - 2,9371i & -1,7622 + 3,6084i & -10,2378 + 35,581i \\ 0 & -4,9621 + 0,5005i & 4,626 - 0,6176i & 4,8363 + 9,5965i \\ 0 & -7,4783 - 4,98837i & 1,0306 + 0,1708i & 8,3972 + 8,5532i \end{bmatrix}$$

Шаг второй прямого хода.

$$\bar{s} = (0, -4,9621 + 0,5005i, -7,4783 - 4,9884i), \quad \bar{e} = (0, 1, 0)$$

$$\arg \alpha = -\pi + 3,0411; \quad \alpha = 10,2282 - 1,0316i; \quad \chi = 0,05644$$

$$\bar{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,8574 + 0,08648i \\ -0,4221 - 0,2816i \end{bmatrix} \quad \bar{\omega}_2^* = [0, -0,8574 - 0,08648i, -0,4221 + 0,2816i]$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4851 & -0,6751 + 0,5558i \\ 0 & -0,6751 - 0,5558i & 0,4851 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -11,9163 & 4,8671 - 2,9371i & -1,7622 + 3,6084i & -10,2378 + 35,581i \\ 0 & 10,2283 - 1,0317i & -3,0349 + 0,7571i & -12,7689 - 5,7625i \\ 0 & 0 & -2,9662 - 2,0714i & 6,1426 - 5,017i \end{bmatrix}$$

Обратный ход.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -0,214 - 3,1751i \\ -1,2676 - 0,0212i \\ -0,5981 + 2,1091i \end{bmatrix}$$

## 1.2 Итерационные методы

Пусть дана система  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными

[illegible]

Итерационные методы дают решение системы линейных алгебраических уравнений в виде предела последовательности некоторых векторов, построение которых осуществляется при помощи единообразного процесса, называемого процессом итерации. Для решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами предварительно приводят систему к виду удобному для итерации

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x}. \quad (13)$$

Сделать это можно несколькими способами. Например, если в матрице  $A$   $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  для каждого  $i = 1, \dots, n$ , то удобно разрешить каждое из уравнений системы относительно диагонального неизвестного, поделив обе части  $i$ -го уравнения на  $a_{ii}$  и перенеся все члены его, кроме  $x_i$ , вправо.

Можно также привести систему (12) к виду (13), если прибавить к обеим частям  $i$ -го уравнения  $x_i$ , а затем перенести свободные члены влево.

Сходящийся процесс обладает важным свойством самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новый начальный вектор.

Обычно итерации продолжаются до тех пор, пока  $\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - заданная точность.

### 1.2.1 Метод простой итерации

В методе простой итерации в качестве начального приближения берем произвольный вектор  $\bar{x}^{(0)}$  и подставляем в правую часть системы, приведенной к виду, удобному для итерации. Получаем некоторый вектор  $\bar{x}^{(1)}$ . Продолжая этот процесс, получим последовательность векторов

$$\begin{aligned}\bar{x}^{(1)} &= \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(0)} \\ \bar{x}^{(2)} &= \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \bar{x}^{(k)} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(k-1)}\end{aligned}$$

Если при  $k \rightarrow \infty$   $\bar{x}^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ , то вектор  $\bar{x}^{(k)}$  будет решением системы (13), т. е. системы (12).

Достаточные условия сходимости метода простой итерации устанавливаются теоремой 1. Для сходимости процесса простой итерации достаточно, чтобы какая-либо из норм матрицы  $\alpha$  была меньше единицы

$$\|\alpha\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad (14)$$

$$\|\alpha\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad (15)$$

$$\|\alpha\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1. \quad (16)$$

Следствие. Для системы  $A\bar{x} = \bar{b}$  метод простой итерации сходится, если

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

или

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Пример. Методом простой итерации решить систему уравнений с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ :

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Так как диагональные элементы матрицы  $A$  данной системы по модулю превосходят сумму модулей остальных элементов соответствующих строк, то метод простой итерации в этом случае сходится [Положий].

Разрешая систему относительно неизвестных, стоящих на диагонали, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = -0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

Принимая начальное приближение  $\bar{x}^{(0)} = 0$ , получаем следующие результаты вычислений:

k	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ _1$
1	1	1,2	0,8	
2	0,68	0,94	0,58	0,32
3	0,754	1,016	0,638	0,076
4	0,733	0,997	0,623	0,021
5	0,7383	1,0021	0,6270	0,0053
6	0,73688	1,00077	0,62596	0,00142
7	0,73725	1,00112	0,62624	0,00037

Сравнивая эти результаты с точным решением

$$x_1 = \frac{704}{955} = 0,73717, \quad x_2 = \frac{956}{955} = 1,00105, \quad x_3 = \frac{598}{955} = 0,62618,$$

видим, что метод простой итерации в данном случае сходится довольно быстро [8].

### 1.2.2 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода простой итерации. Основная его идея состоит в том, что при вычислении  $(k+1)$ -го приближения неизвестной  $x_i$  учитывается уже вычисленное ранее  $(k+1)$ -е приближения неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Пусть система, приведенная к виду удобному для итерации, записана так:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \quad (i = 1, \dots, n)$$

Выберем произвольно начальные приближения корней  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ .

Далее, предполагая, что  $k$ -е приближения  $x_i^{(k)}$  корней известны, согласно Зейделю будем строить  $(k+1)$ -е приближение корней по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)} \\ &\dots\dots\dots \\ x_i^{(k+1)} &= \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} &= \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Указанная ранее теорема сходимости для метода простой итерации остается верной для итерации по методу Зейделя.

Пример. Методом Зейделя решить следующую систему с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ :

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Разрешая систему относительно неизвестных, стоящих на диагонали, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = -0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

Достаточные условия сходимости метода Зейделя здесь выполнены.

Принимая начальное приближение  $\bar{x}^{(0)} = 0$ , из первого уравнения найдем  $x_1 = 1$ . При  $x_1 = 1$  и  $x_3 = 0$  второе уравнение дает  $x_2 = 1,1$ . Наконец, при  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 1,1$  находим из третьего уравнения  $x_3 = 0,59$ . Таким образом, первое приближение будет:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1,1, \quad x_3 = 0,59.$$

Аналогично вычисляем последующие приближения. Получаем следующие результаты вычислений:

k	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ _1$
1	1	1,1	0,59	
2	0,721	1,00990	0,62691	0,279
3	0,73533	1,00109	0,62636	0,01433
4	0,73715	1,00101	0,62618	0,00182
5	0,73718	1,00105	0,62618	0,00003

Если сравнить полученные результаты с точным решением

$$x_1 = \frac{704}{955} = 0,73717, \quad x_2 = \frac{956}{955} = 1,00105, \quad x_3 = \frac{598}{955} = 0,62618,$$

то видно, что метод Зейделя в данном случае сходится быстро, так как уже пятое приближение совпадает с точным решением до пятого знака [8].

### 1.2.3 Метод релаксации

При решении системы линейных алгебраических уравнений методом релаксации поступают следующим образом.

Систему  $A\bar{x} = \bar{b}$  преобразуем к виду

$$-\bar{x} + \bar{\beta} + \alpha\bar{x} = 0,$$

т.е.

$$-x_i + \beta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}x_j = 0, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (1)$$

Взяв в качестве начального приближения  $\bar{x}^{(0)}$  и подставив его в систему (1), получим невязки

$$\delta_i^{(0)} = -x_i + \beta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij}x_j = 0. \quad (2)$$

Если одной из неизвестных  $x_k^{(0)}$  дать приращение  $\Delta x_k^{(0)}$ , то соответствующая невязка  $\delta_k^{(0)}$  уменьшится на величину  $\Delta x_k^{(0)}$ , а все остальные невязки  $\Delta x_i^{(0)} (i \neq k)$  увеличатся на величину  $\alpha_{ik}\Delta x_k^{(0)}$ . Таким образом, чтобы обратить невязку  $\delta_k^{(0)}$  в нуль, достаточно величине  $x_k^{(0)}$  дать приращение  $\Delta x_k^{(0)} = \delta_k^{(0)}$ , тогда

$$\delta_k^{(1)} = 0,$$

а все

$$\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(0)} + \alpha_{ik}\delta_k^{(0)} \quad (i \neq k).$$

Обращаем в нуль максимальную по модулю невязку путем изменения соответствующей компоненты на величину, равную этой невязке, т.е. мы получаем невязки  $\delta_i^{(1)}$ . С ними поступаем аналогично и т.д. Процесс заканчивается на  $N$  шаге, когда все невязки будут равны нулю с заданной степенью точности  $\varepsilon$ .

Суммируя все приращения  $\Delta x_i^{(m)} (i = \overline{1, n}, m = \overline{1, N})$  с  $x_i^{(0)}$ , получим значения корней

$$x_i^{(N+1)} = x_i^{(0)} + \sum_{m=1}^N \Delta x_i^{(m)} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Пример. Решить систему методом релаксации с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\begin{cases} 15,21x_1 + 1,11x_3 = 9,01 \\ 1,32x_1 + 14,82x_2 - 0,61x_3 = 8,52 \\ 0,75x_1 - 1,26x_2 - 15,44x_3 = 8,33 \end{cases}$$

Решение. Исходная система, подготовленная к релаксации, имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1 - 0,0730x_3 + 0,5924 = 0 \\ -x_2 - 0,0891x_1 + 0,0412x_3 + 0,5790 = 0 \\ -x_3 + 0,048x_1 - 0,081x_2 - 0,5395 = 0 \end{cases}$$

Выбрав в качестве  $x^{(0)} = 0$ , находим вектор невязки  $\bar{\delta}^{(0)} = (0,5924; 0,5790; -0,5395)$ . Норма этого вектора больше  $10^{-3}$ , поэтому будем улучшать "пробное" решение с целью уменьшения невязок  $\delta_i^{(0)}$ . Выбираем одну из них, которая имеет наибольшее по модулю численное значение. Это  $\delta_1^{(0)} = 0,5924$ . Будем приводить ее к нулю, путем соответствующего изменения значения переменной  $x_1$  на величину  $\Delta x_1^{(0)} = \delta_1^{(0)} = 0,5924$ .

Для удобства выписываем матрицу  $\alpha$ :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0730 \\ -0,0890 & 0 & 0,0412 \\ 0,0486 & -0,0816 & 0 \end{bmatrix},$$

Возьмем  $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ . Тогда  $\delta^{(0)} = (0,5924; 0,5790; -0,5395)$ .

Расчетный бланк дальнейших вычислений

$k$	$\Delta x_k^{(m)}$	$\delta_1^{(m)}$	$\delta_2^{(m)}$	$\delta_3^{(m)}$	$m$
1	0,5924	0	0,5263	-0,5107	1
2	0,5263	0	0	-0,5536	2
3	-0,5536	0,0404	-0,0228	0	3
1	0,0404	0	-0,0264	0,0019	4
2	0,0264	0	0	0,0040	5
3	0,0040	-0,0002	0,0001	0	6
1	-0,0002	0	0	0	7

Решение  $x^{(8)} = (0,6326; 0,5000; -0,5496)$ , невязка  $\delta^{(8)} = (-0,0001; 0; 0)$ .

### 1.3 Задания

1. Решить системы методом Гаусса с выбором главного элемента.
2. Решить системы методом единственного деления.
3. Решить системы методом оптимального исключения.
4. Решить системы методом отражения (вариант 1).

1.

$$\begin{cases} -6,45x_1 + 7,11x_2 - 9,34x_3 + 7,78x_4 = -36; \\ 8,45x_1 + 6,23x_2 + 4,68x_3 + 0,91x_4 = 2,1; \\ -4,41x_1 + 6,51x_2 - 7,89x_3 + 0,63x_4 = -0,2; \\ 9,26x_1 + 9,37x_2 - 9,89x_3 + 9,49x_4 = 35,6. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 6,54x_1 + 4,37x_2 + 0,92x_3 - 4,71x_4 = 96,1; \\ 6,21x_1 - 8,49x_2 + 7,72x_3 + 9,24x_4 = 91,0; \\ 6,96x_1 + 6,21x_2 + 3,18x_3 - 0,61x_4 = 87,2; \\ -7,43x_1 + 1,96x_2 + 4,53x_3 - 3,51x_4 = 78,2. \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} -5, 38x_1-9, 31x_2-4, 68x_3-3, 99x_4=-89, 8; \\ 1, 33x_1+7, 35x_2-1, 31x_3-3, 96x_4=-24, 8; \\ 4, 73x_1-9, 22x_2+5, 52x_3+6, 31x_4=-14, 5; \\ 1, 83x_1-1, 85x_2+9, 99x_3-1, 86x_4=60, 7. \end{cases}$$
5. 
$$\begin{cases} 1, 77x_1-5, 31x_2+6, 46x_3-8, 85x_4=-52, 3; \\ 7, 62x_1+8, 77x_2+6, 40x_3+5, 17x_4=40, 7; \\ 1, 58x_1-3, 24x_2+8, 34x_3-4, 90x_4=88, 5; \\ -6, 56x_1-1, 46x_2+1, 98x_3-9, 48x_4=29, 2. \end{cases}$$
7. 
$$\begin{cases} -0, 07x_1+9, 89x_2-0, 17x_3-0, 28x_4=0, 1; \\ 9, 55x_1-0, 72x_2-1, 16x_3+8, 13x_4=-0, 3; \\ 3, 03x_1-4, 90x_2+2, 08x_3+7, 19x_4=99, 8; \\ -0, 72x_1-3, 53x_2+5, 75x_3-7, 77x_4=-0, 5. \end{cases}$$
9. 
$$\begin{cases} -1, 03x_1+7, 21x_2-3, 28x_3-6, 61x_4=32, 1; \\ -0, 43x_1+2, 97x_2-7, 46x_3+5, 51x_4=-24, 9; \\ 8, 06x_1+3, 58x_2+1, 65x_3-4, 77x_4=-92, 8; \\ 6, 88x_1-7, 88x_2+9, 00x_3-8, 88x_4=-17, 6. \end{cases}$$
11. 
$$\begin{cases} -3, 64x_1+4, 65x_2-8, 99x_3+5, 66x_4=-21, 5; \\ 6, 68x_1+2, 35x_2-0, 97x_3-8, 61x_4=2, 1; \\ 0, 43x_1+1, 82x_2-7, 75x_3+4, 08x_4=80, 7; \\ 6, 34x_1+0, 42x_2-3, 24x_3+7, 19x_4=-17, 1. \end{cases}$$
13. 
$$\begin{cases} -0, 44x_1+2, 56x_2-7, 87x_3+4, 7x_4=1, 3; \\ 6, 84x_1+1, 55x_2-1, 6x_3+9, 95x_4=64, 3; \\ -1, 65x_1-1, 7x_2+6, 66x_3-5, 03x_4=-34, 4; \\ -8, 37x_1-3, 4x_2-1, 77x_3+4, 83x_4=-70. \end{cases}$$
15. 
$$\begin{cases} 1, 8x_1-5, 57x_2+6, 24x_3-9, 33x_4=-42, 8; \\ 6, 92x_1+7, 59x_2+4, 51x_3+2, 11x_4=34, 5; \\ -3, 37x_1+8, 75x_2-4, 62x_3-5, 87x_4=91, 7; \\ -0, 48x_1+3, 66x_2-6, 82x_3+6, 84x_4=26, 2. \end{cases}$$
17. 
$$\begin{cases} 2, 62x_1-0, 64x_2-8, 02x_3+1, 35x_4=50, 1; \\ 3, 33x_1-5, 32x_2+8, 02x_3-7, 3x_4=-91, 4; \\ -9, 27x_1-6, 56x_2-5, 83x_3-2, 39x_4=58, 7; \\ 1, 79x_1+9, 4x_2+1, 19x_3+0, 6x_4=67, 4. \end{cases}$$
19. 
$$\begin{cases} -5, 31x_1+8, 25x_2-7, 05x_3-8, 79x_4=-12, 8; \\ -5, 83x_1-4, 62x_2-0, 45x_3+4, 94x_4=-75, 9; \\ -5, 51x_1+9, 44x_2-6, 06x_3-6, 62x_4=11, 4; \\ -2, 68x_1+0, 7x_2+8, 02x_3-1, 28x_4=35, 5. \end{cases}$$
4. 
$$\begin{cases} 4, 92x_1+4, 25x_2-0, 84x_3-6, 60x_4=18, 7; \\ 2, 56x_1+5, 96x_2-1, 48x_3-5, 53x_4=-62, 7; \\ 2, 99x_1+7, 46x_2+0, 44x_3-2, 11x_4=56; \\ 8, 32x_1-3, 80x_2-5, 48x_3+0, 71x_4=93, 3. \end{cases}$$
6. 
$$\begin{cases} -5, 87x_1-7, 28x_2-3, 15x_3-0, 42x_4=25, 1; \\ 6, 43x_1-3, 98x_2-7, 55x_3-1, 53x_4=30, 3; \\ 0, 93x_1+9, 41x_2+0, 35x_3-0, 23x_4=-44, 6; \\ -9, 87x_1-0, 09x_2+0, 04x_3+9, 96x_4=85, 8. \end{cases}$$
8. 
$$\begin{cases} 6, 61x_1+5, 03x_2+1, 64x_3-3, 32x_4=79, 8; \\ 8, 33x_1-4, 99x_2-6, 66x_3-1, 65x_4=-97, 9; \\ 1, 69x_1-9, 95x_2+1, 75x_3+1, 80x_4=82; \\ -6, 45x_1+5, 36x_2+8, 92x_3+4, 29x_4=84, 1. \end{cases}$$
10. 
$$\begin{cases} 5, 97x_1+3, 33x_2-0, 70x_3-7, 38x_4=98, 7; \\ 1, 92x_1+4, 54x_2-3, 55x_3-0, 01x_4=87, 5; \\ -2, 57x_1-1, 59x_2+5, 84x_3-5, 75x_4=86, 2; \\ -9, 91x_1-5, 66x_2-5, 57x_3-1, 24x_4=73, 6. \end{cases}$$
12. 
$$\begin{cases} 1, 4x_1+7, 68x_2-0, 92x_3-3, 23x_4=-60, 4; \\ 5, 85x_1-7, 38x_2+8, 48x_3-8, 89x_4=-88, 5; \\ 9, 6x_1-9, 28x_2-9, 67x_3-8, 95x_4=-48, 8; \\ -8, 61x_1-7, 55x_2-6, 16x_3-3, 71x_4=-37, 2. \end{cases}$$
14. 
$$\begin{cases} 9, 86x_1+8, 75x_2+8, 61x_3+7, 36x_4=-69, 3; \\ 5, 98x_1+3, 35x_2-0, 67x_3-7, 31x_4=79; \\ 2, 03x_1+4, 72x_2-3, 24x_3-8, 52x_4=-90, 3; \\ -1, 75x_1-0, 26x_2+7, 99x_3-2, 27x_4=88, 8. \end{cases}$$
16. 
$$\begin{cases} 0, 68x_1-5, 55x_2+5, 13x_3+9, 59x_4=-99, 8; \\ 4, 73x_1+4, 33x_2-0, 94x_3-6, 61x_4=68, 7; \\ 2, 46x_1+5, 85x_2-1, 69x_3-5, 83x_4=69; \\ 2, 49x_1+6, 67x_2-0, 83x_3-4, 16x_4=37, 7. \end{cases}$$
18. 
$$\begin{cases} -9, 21x_1-2, 61x_2-1, 81x_3+5, 59x_4=-82, 1; \\ 6, 21x_1+9, 38x_2-6, 83x_3-7, 45x_4=24; \\ -4, 27x_1-1, 71x_2+4, 02x_3-7, 68x_4=41, 9; \\ 6, 35x_1+8, 67x_2+5, 02x_3+3, 69x_4=-34, 1. \end{cases}$$
20. 
$$\begin{cases} 9, 96x_1+7, 68x_2+7, 64x_3+5, 33x_4=-32, 5; \\ 2, 97x_1-1, 69x_2-8, 71x_3-0, 4x_4=54, 8; \\ 0, 89x_1-9, 51x_2+1, 39x_3+1, 89x_4=-77, 7; \\ -6, 71x_1+5, 18x_2+6, 47x_3+3, 66x_4=77, 2. \end{cases}$$

5. Решить системы  $(D + kC)x = b$  методом квадратного корня.

6. Решить системы  $(D + kC)x = b$  методом Халецкого.

1.  $k = 0, 1(0, 1)1, 5$ .

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

2.  $k = 0, 1(0, 1)1, 5$ .

$$D = \begin{bmatrix} 1,28 & 2,32 & 4,14 & -3,24 & -5,15 \\ 2,32 & 1,49 & 5,26 & 1,56 & 3,92 \\ 4,14 & 5,26 & 4,06 & 2,44 & 4,39 \\ -3,24 & 1,56 & 2,44 & 5,42 & 1,94 \\ -5,15 & 3,92 & 4,39 & 1,94 & 4,63 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} -3,02 \\ 3,26 \\ 0,83 \\ -8,20 \\ -6,45 \end{bmatrix}$$

7. Решить системы методом простой итерации и методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

8. Решить системы методом релаксации с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

$$D = \begin{bmatrix} 6,22 & 1,42 & -1,72 & 1,91 \\ 1,42 & 5,33 & 1,11 & -1,82 \\ -1,72 & 1,11 & 5,24 & 1,42 \\ 1,91 & -1,82 & 1,42 & 6,55 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 7,53 \\ 6,06 \\ 8,05 \\ 8,06 \end{bmatrix} \quad k = 0(1)15.$$

9. Решить системы методом отражения (вариант 2).

$$1. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 16+38i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 17+25i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = 1+25i. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 30-12i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 21+15i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = 21+11. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 61-i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 51-3i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = 21+21i. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 26+34i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 13+17i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = -1+23i. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 15+35i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 35+25i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = 4+28i. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 55i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = -8+21i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = -16+40i. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 40+67i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 15+33i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = -8+41i. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = -40-67i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = -15-33i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = 8-41i. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = 68+16i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 40+18i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = 37+17i. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} (1+2i)x_1 + (4-5i)x_2 + (7+4i)x_3 = -6+23i; \\ (8+i)x_1 + (2-i)x_2 + (1+i)x_3 = 10i; \\ (3+i)x_1 + (1+i)x_2 + (2+3i)x_3 = -16+3i. \end{cases}$$



## 2 Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

Собственным значением квадратной матрицы  $A$  называется такое число  $\lambda$ , для которого выполняется соотношение

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}, \quad (17)$$

если  $\bar{x}$  - некоторый не нулевой вектор, называемый собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующий собственному значению  $\lambda$ .

Это соотношение можно переписать в виде:

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}. \quad (18)$$

Условием существования ненулевого решения однородной системы (18) является требование

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n [\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \cdots - p_n] = 0. \quad (19)$$

Определение компонент собственного вектора требует решения системы  $n$  однородных уравнений с  $n$  неизвестными; для вычисления всех собственных векторов матрицы требуется решать  $n$  систем вида

$$(A - \lambda_i E)X_i = 0,$$

где  $X_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$  - собственный вектор матрицы  $A$ , принадлежащий собственному значению  $\lambda_i$ .

Под полной проблемой собственных значений понимается проблема нахождения всех собственных значений матрицы  $A$ , так же как и принадлежащих этим собственным значениям собственных векторов.

### 2.1 Методы получения характеристического многочлена

#### 2.1.1 Метод Лаверье.

Метод Лаверье основан на формулах Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения (19).

Пусть

$$Q_n(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \cdots - p_n] \quad (20)$$

характеристический полином матрицы  $A$  и  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  его корни, среди которых могут быть равные.

Тогда характеристический полином можно разложить на множители:

$$Q_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (21)$$

Перемножая скобки, стоящие справа в (21), а затем приведя подобные члены и сравнивая с коэффициентами из (20) получим, так называемые формулы Виета, выражающие коэффициенты многочлена через его корни:

$$p_1 = \sigma_1, p_2 = -\sigma_2, \dots, p_{n-1} = (-1)^{n-2}\sigma_{n-1}, p_n = (-1)^{n-1}\sigma_n,$$

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

$$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n,$$

$$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n,$$

...

$\sigma_n = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$  — элементарные симметрические функции корней характеристического уравнения. Рассмотрим еще следующие симметрические функции корней:

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема единственности, известная из курса высшей алгебры, утверждает: любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Это представление выражается для степенных сумм по формуле Ньютона

$$S_k - p_1 S_{k-1} - p_2 S_{k-2} - \dots - p_{k-1} S_1 - k p_k = 0, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (22)$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} p_1 = S_1, \\ p_2 = \frac{1}{2}(S_2 - p_1 S_1), \\ \dots\dots\dots \\ p_k = \frac{1}{k}(S_k - p_1 S_{k-1} - \dots - p_{k-1} S_1), \end{cases} \quad (23)$$

и можно найти все  $p_k$ , если будут известны  $S_k$ .

Эти суммы вычисляются следующим образом:

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = SpA,$$

т.е.

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Как известно,  $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$  являются собственными значениями матрицы  $A^k$ . Поэтому

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k = SpA^k,$$

т. е. если  $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$ , то

$$S_k = a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} + \dots + a_{nn}^{(k)}.$$

Таким образом, схема раскрытия векового определителя по методу Леверье весьма простая, а именно: сначала вычисляются  $A^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — степени матрицы  $A$ , затем находятся соответствующие  $S_k$  — суммы элементов главных диагоналей матриц  $A^k$  и, наконец, по формулам (23) определяются искомые коэффициенты  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Пример. Раскрыть характеристическое уравнение, найти собственные значения заданной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

k	$A^k$			$SpA^k$	$p_k$
1	2	1	1	7,5	7,5
	1	2,5	1		
	1	1	3		
2	6	5,5	6	25,25	-15,5
	5,5	8,25	6,5		
	6	6,5	11		
3	23,5	25,75	29,5	101,625	9,5
	25,75	32,625	33,25		
	29,5	33,25	45,5		

Ответ:  $Q_3(\lambda) = -(\lambda^3 - 7,5\lambda^2 + 15,5\lambda - 9,5)$ ;  $\lambda_1 = 1,185$ ;  $\lambda_2 = 1,76$ ;  $\lambda_3 = 4,555$ .

### 2.1.2 Метод Фадеева

Метод Д.К. Фадеева является видоизменением метода Леверье. Помимо упрощений при вычислении коэффициентов характеристического полинома он позволяет определить обратную матрицу и собственные вектора матрицы.

Будем вместо последовательности  $A, A^2, \dots, A^n$  вычислять последовательность матриц  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , построенную следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A, & SpA_1 &= p_1, & B_1 &= A_1 - p_1E, \\
 A_2 &= AB_1, & \frac{SpA_2}{2} &= p_2, & B_2 &= A_2 - p_2E, \\
 &\dots & & & & \\
 A_{n-1} &= AB_{n-2}, & \frac{SpA_{n-1}}{n-1} &= p_{n-1}, & B_{n-1} &= A_{n-1} - p_{n-1}E, \\
 A_n &= AB_{n-1}, & \frac{SpA_n}{n} &= p_n, & B_n &= A_n - p_nE.
 \end{aligned}$$

Можно доказать, что

- 1)  $B_n$  - нулевая матрица,
- 2) если  $A$  - неособенная матрица, то  $A^{-1} = B_{n-1}/p_n$ ,
- 3) каждый столбец матрицы

$$R_k = \lambda_k^{n-1}E + \lambda_k^{n-2}B_1 + \dots + B_{n-1}$$

состоит из компонент собственного вектора, принадлежащего собственному числу  $\lambda_k$ .

Пример. Построить характеристическое уравнение матрицы по методу Д.К. Фадеева

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

k	$A_k$			$p_k = q_k$	$B_k$		
1	2	1	1	7,5	-5,5	1	1
	1	2,5	1		1	-5	1
	1	1	3		1	1	-4,5
2	-9	-2	-1,5	-15,5	6,5	-2	-1,5
	-2	-10,5	-1		-2	5	-1
	-1,5	-1	-11,5		-1,5	-1	4
3	9,5	0	0	9,5	0	0	0
	0	9,5	0		0	0	0
	0	0	9,5		0	0	0

Ответ:  $Q_3(\lambda) = -(\lambda^3 - 7,5\lambda^2 + 15,5\lambda - 9,5)$ ;  $\lambda_1 = 1,185$ ;  $\lambda_2 = 1,76$ ;  $\lambda_3 = 4,555$ .

Попутно получилась обратная матрица  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,68421 & -0,21053 & -0,15789 \\ -0,21053 & 0,52632 & -0,10526 \\ -0,15789 & -0,10526 & 0,42105 \end{bmatrix}$

## 2.2 Частичная проблема собственных значений.

Для решения *частичной проблемы собственных значений*, состоящей в определении одного или нескольких собственных значений и соответствующих им собственных векторов, обычно используются итерационные методы. Строится такой итерационный процесс, который сходится к одному собственному значению и собственному вектору, причем используемые алгоритмы обычно весьма экономичны.

### 2.2.1 Метод простой итерации

Построим итерационный процесс, применяя метод простой итерации к решению системы уравнений

$$\lambda \vec{x} = A\vec{x}. \quad (24)$$

Запишем (24), введя вспомогательный вектор  $\vec{y}$ :

$$\vec{y} = A\vec{x}, \quad (25)$$

$$\lambda \vec{x} = \vec{y}. \quad (26)$$

Пусть  $\vec{x}^{(0)}$  - начальное приближение собственного вектора  $\vec{x}$ , причем собственные векторы на каждой итерации нормированы, так что  $|\vec{x}| = 1 (k = 1, 1, \dots)$ . Используем соотношение (25) для вычисления  $\vec{y}^{(1)}$ :

$$\vec{y}^{(1)} = A\vec{x}^{(0)}.$$

Соотношение (26) используем для вычисления первого приближения  $\lambda^{(1)}$ , применяя умножение обеих частей равенства скалярно на  $\vec{x}^{(0)}$ :

$$\lambda = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}^{(0)}}{\vec{x}^{(0)} \cdot \vec{x}^{(0)}} = \vec{y}^{(1)} \cdot \vec{x}^{(0)}.$$

Здесь учтено, что вектор  $\vec{x}^{(0)}$  нормирован. Следующее приближение собственного вектора  $\vec{x}^{(1)}$  можно вычислить, нормируя вектор  $\vec{y}^{(1)}$ .

Окончательно итерационный процесс записывается в виде

$$\begin{aligned}\vec{y}^{(k+1)} &= A\vec{x}^{(k)}, \\ \lambda^{(k+1)} &= \vec{y}^{(k+1)} \cdot \vec{x}^{(k)}, \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \frac{\vec{y}^{(k+1)}}{|\vec{y}^{(k+1)}|}, \quad k = 0, 1, \dots,\end{aligned}\tag{27}$$

и продолжается до установления постоянных значений  $\lambda$  и  $\vec{x}$ . В качестве критерия завершения итераций следует проверять близость векторов  $(\text{sign}\lambda^{(k+1)})\vec{x}^{(k+1)}$  и  $\vec{x}^{(k)}$ .

Найденное в результате итерационного процесса (27) число  $\lambda$  является наибольшим по модулю собственным значением данной матрицы  $A$ , а  $\vec{x}$  - соответствующим ему собственным вектором. Скорость сходимости этого итерационного процесса зависит от удачного выбора начального приближения. Если начальный вектор близок к истинному собственному вектору, то итерации сходятся быстро.

Пример. Найти максимальное собственное значение и собственный вектор матрицы  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

За начальный вектор примем  $\vec{x} = (1, 1, 1)$ . Итерации дадут:

k	1	2	3	4	5
$x_1$	0,5111	0,4913	0,4855	0,4837	0,4831
$x_2$	0,5750	0,5686	0,5648	0,5631	0,5623
$x_3$	0,6389	0,6598	0,6673	0,6701	0,6711
$\lambda$	13,5000	4,5490	4,5543	4,5549	4,5550
$y_1$	4,0000	2,2361	2,2110	2,2031	2,2005
$y_2$	4,5000	2,5875	2,5725	2,5648	2,5615
$y_3$	5,0000	3,0027	3,0393	3,0522	3,0570
$ y $	7,8262	4,5510	4,5545	4,5550	4,5550
$\max_i  \vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k $	0,4889	0,0209	0,0075	0,0028	0,0010
$ \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} $		8,951	0,0053	0,0007	0,0001

Ответ:  $\lambda_{max} = 4,555$ ,  $\vec{x} = (0,4831; 0,5623; 0,6711)$ .

## 2.2.2 Метод прямых итераций

Предположим, что матрица  $A$  имеет только вещественные различные по модулю собственные значения. Занумеруем их в порядке убывания модулей:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots |\lambda_n| > 0.$$

Метод прямых итераций предназначен для вычисления наибольшего по модулю собственного значения  $\lambda_1$  и отвечающего ему собственного вектора  $u^{(1)}$  и состоит в следующем. Выберем произвольный вектор  $x^{(0)}$  и построим последовательность векторов  $x^{(k)}$  по правилу

$$x^{(k)} = A(x^{(k-1)} / \alpha_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\alpha_{k-1}$  - наибольшая по модулю компонента вектора  $x^{(k-1)}$ , т.е.  $|\alpha_{k-1}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k-1)}|$ . Известно, что при  $k \rightarrow \infty$

$$\alpha_k = \lambda_1, \quad x^{(k)} \rightarrow u^{(1)}.$$

На практике вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|\alpha_k - \alpha_{k-1}| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - заданная точность вычисления собственного значения  $\lambda_1$ . При этом  $\alpha_k$  принимают за приближенное значение  $\lambda_1$ , а  $x^{(k)}$  - за приближение к  $u^{(1)}$ . Если за  $M$  итераций ( $M$  - предельно допустимое число итераций, задаваемое программистом), заданная точность не достигается, вычисления прекращаются.

Пример. Найти наибольшее собственное значение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и соответствующий ему собственный вектор.

Решение. Выберем начальный вектор  $y = (1, 1, 1)$  и составим таблицу:

$k$	1	2	3	4	5	6
$y$	$Ay$	$A^2y$	$A^3y$	$A^4y$	$A^5y$	$A^6y$
1	4	17,5	78,75	357,375	1625,93	7403,34
1	4,5	20,25	91,625	416,062	1892,65	8616,39
1	5	23,5	108,25	495,125	2258,81	10295,03
$c_1^{(k)} = y_1^{(k+1)} / y_1^{(k)}$	4	4,375	4,5	4,5381	4,5500	4,5533
$c_2^{(k)} = y_2^{(k+1)} / y_2^{(k)}$	4,5	4,5	4,5247	4,5409	4,5490	4,5525
$c_3^{(k)} = y_3^{(k+1)} / y_3^{(k)}$	5	4,7	4,6064	4,5739	4,5621	4,5577
$\lambda^{(k)} = \frac{1}{3}(c_1^{(k)} + c_2^{(k)} + c_3^{(k)})$	4,5	4,525	4,5437	4,5510	4,5536	4,5545
$\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}$		0,025	0,0187	0,0073	0,0026	0,0009

В качестве собственного вектора матрицы  $A$  можно взять

$$A^6 y = \begin{bmatrix} 7403,34 \\ 8616,39 \\ 10295,03 \end{bmatrix}$$

Нормируя его ( $|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$ ), окончательно получаем

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0,4829 \\ 0,5620 \\ 0,6715 \end{bmatrix}, \quad \text{а} \quad \lambda_{max} = 4,5545.$$

### 2.2.3 Метод обратных итераций

Предположим, что матрица  $A$  имеет только вещественные различные по модулю собственные значения. Занумеруем их в порядке убывания модулей:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0.$$

Метод обратных итераций предназначен для вычисления наименьшего по модулю собственного значения  $\lambda_n$  и отвечающего ему собственного вектора  $u^{(n)}$  и состоит в следующем. Выберем произвольный вектор  $x^{(0)}$  и построим последовательность векторов  $x^{(k)}$ , каждый из которых является решением системы уравнений

$$Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\alpha_{k-1}$  - наибольшая по модулю компонента вектора  $x^{(k-1)}$ , т.е.  $|\alpha_{k-1}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k-1)}|$ . Известно, что при  $k \rightarrow \infty$

$$1/\alpha_k = \lambda_n, \quad x^{(k)} \rightarrow u^{(n)}.$$

На практике вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|1/\alpha_k - 1/\alpha_{k-1}| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - заданная точность вычисления собственного значения  $\lambda_n$ . При этом  $1/\alpha_k$  принимают за приближенное значение  $\lambda_n$ , а  $x^{(k)}$  - за приближение к  $u^{(n)}$ . Если за  $K$  итераций ( $K$  - предельно допустимое число итераций, задаваемое программистом), заданная точность не достигается, вычисления прекращаются.

Для решения систем уравнений  $Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}$  на каждом шаге можно воспользоваться методом Гаусса. Поскольку матрица у всех систем одна и та же, то ее треугольное разложение  $U + MA$  следует выполнить только один раз. Решение каждой системы  $Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}$  сводится, следовательно, к получению преобразованной правой части  $g^{(k)} = M(x^{(k-1)}/\alpha_{k-1})$  и последующему решению системы с треугольной матрицей

$$Ux^{(k)} = g^{(k)}.$$

## 2.3 Полная проблема собственных значений

### 2.3.1 Метод вращения с преградами

Метод вращения предназначен для решения полной проблемы собственных значений невырожденной симметричной матрицы, т. е. для нахождения собственных значений и собственных векторов исходной матрицы. Эта проблема решается с помощью сходящихся итерационных процессов. Для симметричных матриц эти процессы состоят в цепочке преобразований подобия, в результате которых в пределе получается диагональная матрица так, что ее собственные значения определяются непосредственно. Впервые этот процесс был предложен Якоби в 1976 г., однако практическое применение стало возможным лишь с развитием быстродействующих счетных устройств. В настоящее время имеется целый ряд модификаций метода Якоби. Одной из модификаций является метод вращений с преградами.

Элементарный шаг каждого эрмитова процесса заключается в преобразовании подобия посредством матрицы вращения

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c & \dots & & -s \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & s & \dots & & c & \\ & & & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

где  $c^2 + s^2 = 1$ . Эти матрицы принадлежат к классу ортогональных матриц, т.е.  $T_{ij} \cdot T_{ij}^* = E$ .

Процесс состоит в построении последовательности матриц  $A_0 = A, A_1, \dots$ , каждая из которых получается из предыдущей с помощью элементарного шага. Эти элементарные шаги должны быть подобраны так, чтобы  $A^{n+1}$  безгранично приближалась к диагональной матрице при  $m \rightarrow \infty$ . Дадим расчетные формулы  $(m+1)$  шага (при котором  $A^{m+1} = T_{ij}^* A^m T_{ij}$ ).

Для удобства введем обозначения  $C = A^{m+1}$ , тогда

$$\begin{aligned} C_{kl} &= a_{kl}^{(m)} \quad \text{при} \quad k \neq i, k \neq j, l \neq i, l \neq j \\ C_{ki} &= C_{ik} = ca_{ki}^{(m)} + sa_{kj}^{(m)} \quad \text{при} \quad k \neq i, k \neq j, \\ C_{kj} &= C_{jk} = -sa_{ki}^{(m)} + ca_{kj}^{(m)} \quad \text{при} \quad k \neq i, k \neq j, \\ C_{ii} &= c^2 a_{ii}^{(m)} + 2csa_{ij}^{(m)} + s^2 a_{jj}^{(m)}, \quad C_{jj} = s^2 a_{ii}^{(m)} - 2csa_{ij}^{(m)} + c^2 a_{jj}^{(m)} \\ C_{ij} &= C_{ji} = 0 \end{aligned}$$

Числа  $c, s$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{|a_{ii}^{(m)} - a_{jj}^{(m)}|}{d} \right)}, \\ s &= \text{sgn}[a_{ij}^{(m)} (a_{ii}^{(m)} - a_{jj}^{(m)})] \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{|a_{ii}^{(m)} - a_{jj}^{(m)}|}{d} \right)}, \quad d = \sqrt{(a_{ii}^{(m)} - a_{jj}^{(m)})^2 + 4a_{ij}^{(m)2}} \end{aligned}$$

Матрица вращения выбирается на  $(m+1)$  шаге так, чтобы элемент  $a_{ij}$  стал нулем. При этом пара индексов  $(ij)$  выбирается так, чтобы аннулировался наибольший по модулю внедиагональный элемент матрицы  $A^{(m)}$ , а именно  $|a_{ij}^{(m)}| \geq \sigma_k$ , где  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  монотонно убывающая к нулю последовательность чисел, называемых "преградами". Один из способов задания "преград" состоит в нахождении  $\sigma_k$  по формуле  $\sigma_k = \sqrt{\max |a_{ii}^{(m)}|} \cdot 10^{-k}$ , где  $k = 1, 2, \dots, p$ . Число  $p$  зависит от разрядности машины и требуемой точности решения поставленной задачи. После того как все внедиагональные элементы станут по модулю не больше  $\sigma_k$ , то "преграда"  $\sigma_k$  заменяется на  $\sigma_{k+1}$  и т.д.  $k = 1, 2, \dots, p$ . Процесс заканчивается, когда все внедиагональные элементы станут меньше по модулю  $\sigma_p$ . Известно, что процесс с "преградами" сходится.

Так как характеристические полиномы подобных матриц совпадают, следовательно,

$$\det(A - \lambda E) = \det(D - \lambda E) = (d_{11} - \lambda)(d_{22} - \lambda) \dots (d_{nn} - \lambda) = 0,$$

где  $D$  - есть диагональная матрица, полученная в результате выполнения описанного выше итерационного процесса.

Скажем несколько слов о нахождении собственных векторов матрицы  $A$ . Пусть итерационный процесс, описанный выше, доведен до того, что матрица

$$D = \prod_m T'_{imim} \cdot A \cdot \prod_m T_{imjm}$$

оказалась практически диагональной. Тогда столбцы матрицы  $\prod_m T_{imjm}$  будут собственными векторами исходной матрицы  $A$ . Домножив матрицу слева на  $W = \prod_m T_{imjm}$  и справа на



$W'$ , получим  $A = WDW'$ . Из этого равенства получаем, что  $AW = WD$ . Если расписать это равенство по столбцам, то окажется, что каждый  $i$ -ый столбец матрицы  $W$  является собственным вектором, соответствующим собственному значению  $\lambda_i$ .

В отличие от прямых методов, алгоритмы которых состоят из разнородных частей: преобразования исходной матрицы, вычисления корней многочлена, нахождения собственных векторов, метод вращения позволяет в результате выполнения итерационного процесса найти собственные значения и собственные вектора.

Хотя количество умножений в этом методе весьма значительно, ошибки округления накапливаются медленно, так как умножения происходят на коэффициенты  $c$  и  $s$  по модулю меньше единицы.

Пример. Решить полную проблему собственных значений методом вращения с преградами для матрицы  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \sigma = (10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4})$$

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
0	2	1	1	0,788205	-0,615412	(1,2)
	1	2,5	1			
	1	1	3			

$T_{ij}$			$\sigma$
0,788205	0,615412	0	$10^{-1}$
-0,615112	0,788205	0	
0	0	1	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
1	1,219223	0	0,172793	0,741458	0,670999	(2,3)
	0	3,280773	1,403617			
	0,172793	1,403617	3			

$T_{ij}$			$\sigma$
1	0	0	$10^{-1}$
0	0,741458	-0,670999	
0	0,670999	0,741458	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
2	1,219223	0,115944	0,128119	0,973075	0,230488	(1,3)
	0,115924	4,551005	0			
	0,128119	0	1,729769			

$T_{ij}$			$\sigma$
0,973075	0	0,230488	$10^{-1}$
0	1	0	
-0,230488	0	0,973075	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
3	1,188876	0,112822	0	0,999439	0,033501	(1,2)
	0,112822	4,551005	0,026724			
	0	0,026724	1,760114			

$T_{ij}$			$\sigma$			
0,999439    0,033501    0			$10^{-1}$			
-0,033501    0,999439    0						
0                    0                    1						
k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
4	1,185091	0	0,000895	0,999954	0,009555	(2,3)
	0	4,554774	0,026709			
	-0,000895	0,026709	1,760114			
$T_{ij}$			$\sigma$			
1                    0                    0			$10^{-2}$			
0    0,999954    -0,009555						
0    0,009555    0,999954						
k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
5	1,185091	-0,000009	0,000895	0,999999	-0,001549	(1,3)
	0,000009	1,555030	0			
	0,000895	0	1,759858			
$T_{ij}$			$\sigma$			
0,999995    0    0,001549			$10^{-3}$			
0            1            0						
-0,001549    0    0,999999						
k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
6	1,185089	-0,000008	0			
	-0,000008	4,555030	0			
	0	0	1,759858			

Ответ:  $\lambda_1 = 1,185089$   $\lambda_2 = 4,555030$   $\lambda_3 = 1,759839$

$$W = T_{12}T_{23}T_{13}T_{12}T_{23}T_{13} = \begin{bmatrix} 0,846727 & 0,482795 & -0,223458 \\ -0,495220 & 0,561790 & -0,662646 \\ -0,194385 & 0,671789 & 0,714802 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = (0,846727; -0,495220; -0,194385)$$

$$\bar{x}_2 = (0,482795; 0,561790; 0,671789)$$

$$\bar{x}_3 = (-0,223458; -0,662646; 0,714802)$$

## 2.4 Задания

1. Раскрыть вековые определители методами Леверье и Фадеева, найти собственные значения следующих матриц.
2. Решить частную проблему нахождения собственных значений методом прямой или обратной итерации.
3. Найти методом вращения собственные значения и собственные вектора матриц с точностью  $10^{-3}$ .

$$\begin{array}{ll}
1. \begin{bmatrix} -0,755 & 0,392 & 0,562 & 3,599 \\ 6,968 & -3,273 & 4,121 & 2,521 \\ -1,374 & 2,456 & -1,507 & 7,163 \\ -0,359 & 6,148 & 2,542 & 0,783 \end{bmatrix} & 2. \begin{bmatrix} -3,916 & -2,795 & -1,392 & 2,993 \\ -1,719 & -0,860 & 3,906 & 2,613 \\ -0,581 & -0,773 & -0,063 & -4,53 \\ 1,878 & 1,123 & -0,802 & 1,331 \end{bmatrix} \\
3. \begin{bmatrix} -1,204 & 3,147 & 6,296 & -4,55 \\ -4,206 & 0,885 & 2,589 & 2,095 \\ -1,497 & 0,679 & 2,993 & 0,353 \\ 3,8953,732 & 5,577 & 0,704 & \end{bmatrix} & 4. \begin{bmatrix} -1,814 & 1,843 & -2,626 & -6,011 \\ 1,922 & 0,199 & -4,987 & -2,687 \\ -1,254 & -1,423 & 4,205 & -0,785 \\ -1,469 & -8,239 & -1,221 & -0,276 \end{bmatrix} \\
5. \begin{bmatrix} -7,519 & 1,042 & -4,896 & -0,873 \\ 6,831 & 2,969 & 6,192 & -5,857 \\ 0,137 & -1,21 & 1,881 & 4,47 \\ -0,689 & 13,012 & 0,622 & -2,331 \end{bmatrix} & 6. \begin{bmatrix} -3,921 & 6,24 & -0,052 & 2,524 \\ 13,926 & -0,506 & 10,705 & -1,52 \\ 3,702 & -2,802 & -1,267 & 4,394 \\ -4,707 & -1,599 & -1,157 & 0,717 \end{bmatrix} \\
7. \begin{bmatrix} 3,76 & 2,631 & 5,601 & -6,291 \\ 1,149 & -2,53 & 0,497 & -0,05 \\ 2,981 & 5,613 & 0,345 & 0,281 \\ 6,624 & 2,021 & -4,508 & 4,243 \end{bmatrix} & 8. \begin{bmatrix} -3,432 & -0,2 & 3,443 & -1,696 \\ -13,427 & -0,508 & 3,298 & 8,875 \\ -2,85 & 4,398 & 06,323 & -0,33 \\ -6,696 & 0,205 & -7,817 & -1,419 \end{bmatrix} \\
9. \begin{bmatrix} -2,071 & -3,107 & 3,08 & -2,49 \\ 2,85 & 1,658 & 0,007 & 11,607 \\ 1,108 & 8,249 & 0,964 & -2,536 \\ 0,239 & 3,139 & -4,587 & 4,513 \end{bmatrix} & 10. \begin{bmatrix} -6,834 & 0,61 & -2,941 & -11,302 \\ -1,292 & 2,357 & 3,539 & -4,173 \\ 3,241 & 10,977 & -1,337 & -1,444 \\ 3,882 & 1,769 & 2,233 & -0,797 \end{bmatrix}
\end{array}$$

В следующих вариантах матрица  $A = D + kC$ , где  $C, D$  - матрицы, а  $k$  - параметр.

$$\begin{array}{ll}
11. D = \begin{bmatrix} 9,9 & 8,8 & 7,7 & 6,6 \\ 8,8 & 5,5 & 4,4 & 3,3 \\ 7,7 & 4,4 & 2,2 & 1,1 \\ 6,6 & 3,3 & 1,1 & 0,0 \end{bmatrix}, & C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad k=0(1)10. \\
12. D = \begin{bmatrix} 1,111 & 1,222 & 0,333 \\ 1,222 & 1,444 & 0,555 \\ 0,333 & 0,555 & 1,666 \end{bmatrix}, & C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k=0(1)15. \\
13. D = \begin{bmatrix} 1,4 & 1,2 & -1,3 \\ 1,2 & 0,9 & 0,4 \\ -1,3 & 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}, & C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}, \quad k=0(1)7.
\end{array}$$

## Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука, 1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том II. -М.: Физматгиз, 1962. 640 с.
3. Волков Е.А. Численные методы. -М.: Наука, 1987. 248 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1966.

5. Калиткин Н.Н. Численные методы.-М.: Наука, 1978. 512 с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2-х т. -М.: Наука, 1976-1977.
7. Митченко А.Д. Численные методы линейной алгебры. -Владивосток, ДВГУ, 1991. 142 с.
8. Митченко А.Д., Хайрутдинова Г.З. Алгоритмы линейной алгебры. Методические указания (для студентов математического факультета). Владивосток, ДВГУ, 1993. 32 с.
9. Положий Г.Н., Пахарева Н.А. и др. Математический практикум. -М.: ГИФМЛ, 1960. 512 с.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.-М.: Наука,1989. 432 с.
11. Фадеев Д.К., Фадеев В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. -М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. 735 с.

Учебное издание

*Александр Георгиевич Колобов*  
*Лилия Александровна Молчанова*

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания и задания для студентов  
математических специальностей

В авторской редакции  
Технический редактор Л.М. Гурова  
Компьютерный набор и верстка Л. А. Молчановой

Подписано в печать 16.05.2008  
Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,1  
Тираж 100 экз.

Издательство Дальневосточного университета  
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.  
Отпечатано в лаборатории  
кафедры компьютерных наук ИМКН ДВГУ  
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 132.