Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgende, auf den Vorlesungsfolien postulierte Identität:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \overline{x}^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

Dabei sind $(x_1, y_1), \ldots, (y_N, x_N)$ beliebige Paare reeller Zahlen, und $\overline{x}$ und $\overline{y}$ bezeichnen die jeweiligen arithmetischen Mittel $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ und $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$.

Erstellen Sie bitte Ihre Lösung für die Abgabe mit Hilfe von LaTeX (wobei Sie das LaTeX-Sourcefile des Aufgabenblattes zur Unterstützung heranziehen können) und reichen Sie das erzeugte PDF-File ein.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \overline{x}^2)} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \overline{x}^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \overline{x} \cdot n\overline{y}}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \overline{x}^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \overline{x} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \overline{x}^2)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} \overline{x} y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \overline{x}^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i y_i - \overline{x} y_i)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \overline{x}^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - \overline{x}^2)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - n\overline{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\overline{x} \cdot n\overline{x} + n\overline{x}^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\overline{x} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i + n\overline{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} 2x_i\overline{x} + n\overline{x}^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}
\end{aligned}$$