



쉽게 배우는 알고리즘

9장. 그래프 알고리즘

9장. 그래프 알고리즘

수학은 패턴의 과학이다. 음악 역시 패턴들이다.
컴퓨터 과학은 추상화와 패턴의 형성에 깊은 관련이 있다.
컴퓨터 과학이 다른 분야들에 비해 특징적인 것은 지속적으로 차원이
급상승한다는 점이다. 미시적 관점에서
거시적 관점으로 도약하는 것이다.

-도널드 크누스

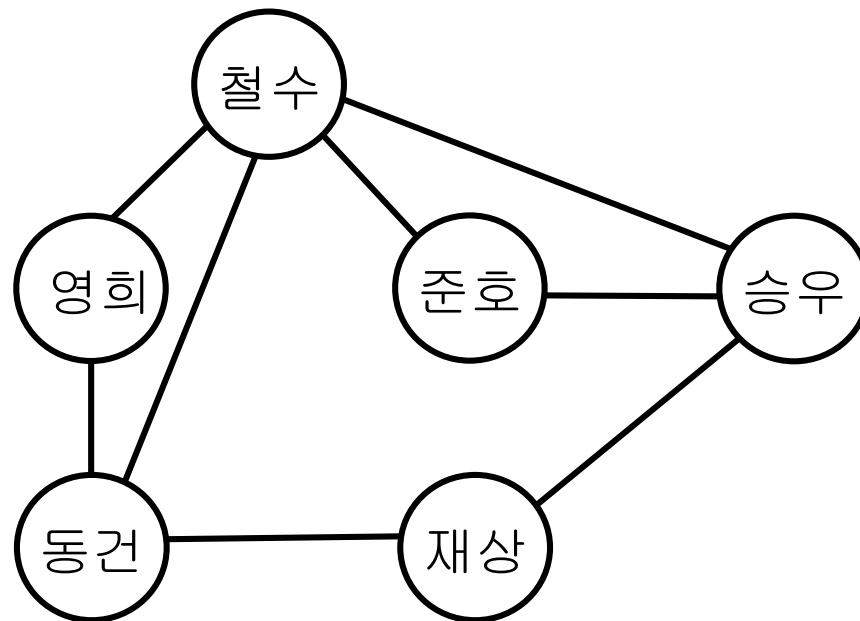
학습목표

- 그래프의 표현법을 익힌다.
- 너비우선탐색과 깊이우선탐색의 원리를 충분히 이해하도록 한다.
- 신장트리의 의미와 최소신장트리를 구하는 두 가지 알고리즘을 이해한다.
- 그래프의 특성에 따라 가장 적합한 최단경로 알고리즘을 선택할 수 있도록 한다.
- 위상정렬을 이해하고 DAG의 경우에 위상정렬을 이용해 최단경로를 구하는 방법을 이해한다.
- 강연결요소를 구하는 알고리즘을 이해하고 이 알고리즘의 정당성을 확신할 수 있도록 한다.
- 본문에서 소개하는 각 알고리즘의 수행시간을 분석할 수 있도록 한다.

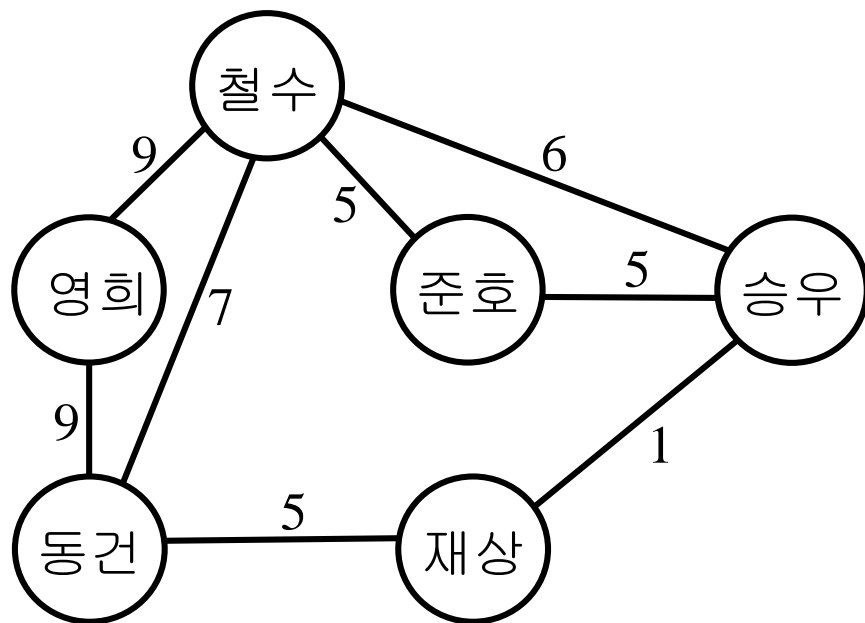
Graph

- 현상이나 사물을 정점 vertex와 간선 edge으로 표현한 것
- Graph $G = (V, E)$
 - V : 정점 집합
 - E : 간선 집합
- 두 정점이 간선으로 연결되어 있으면 인접하다고 한다
 - 인접 = adjacent
 - 간선은 두 정점의 관계를 나타낸다

그래프의 예

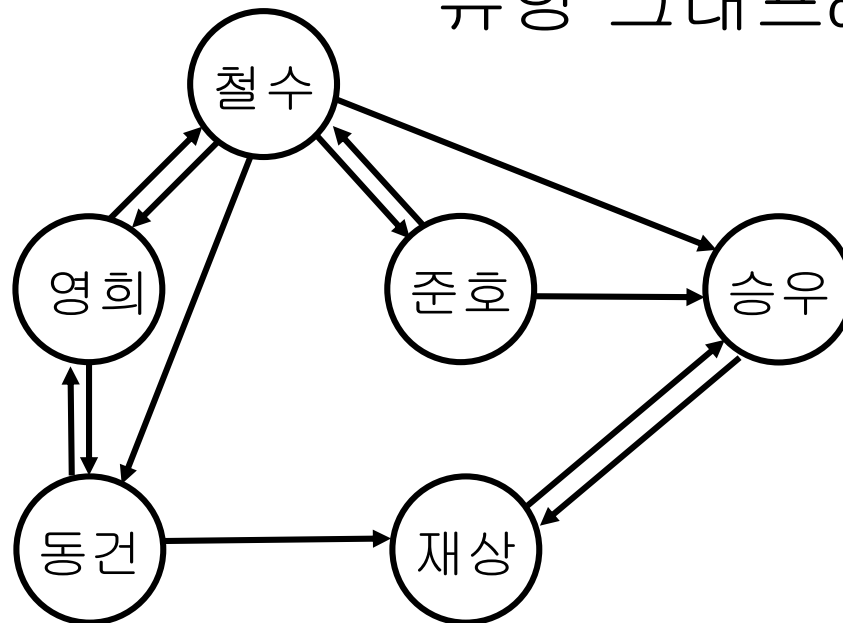


사람들간의 친분 관계를 나타낸 그래프

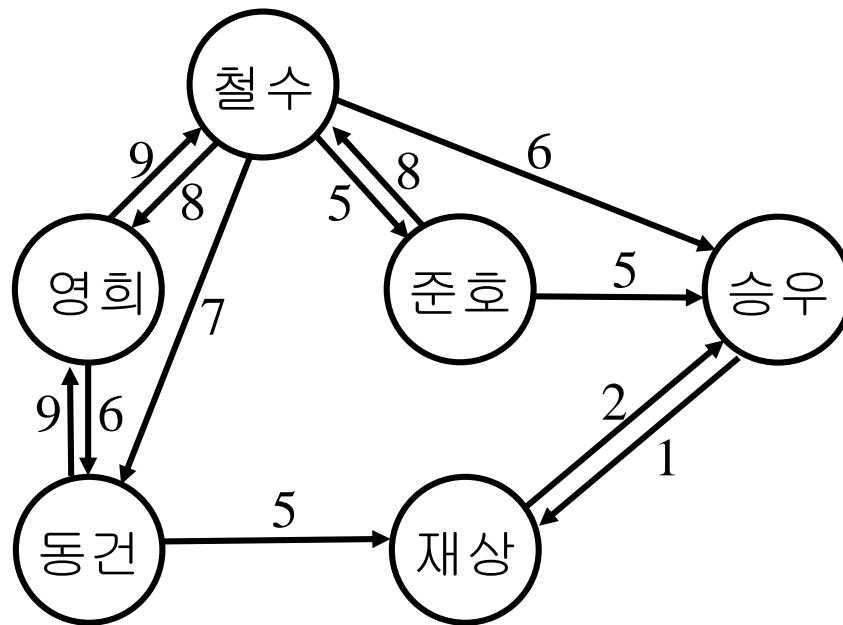


친밀도를 가중치로 나타낸 친분관계 그래프

유향 그래프 directed graph=digraph



방향을 고려한 친분관계 그래프

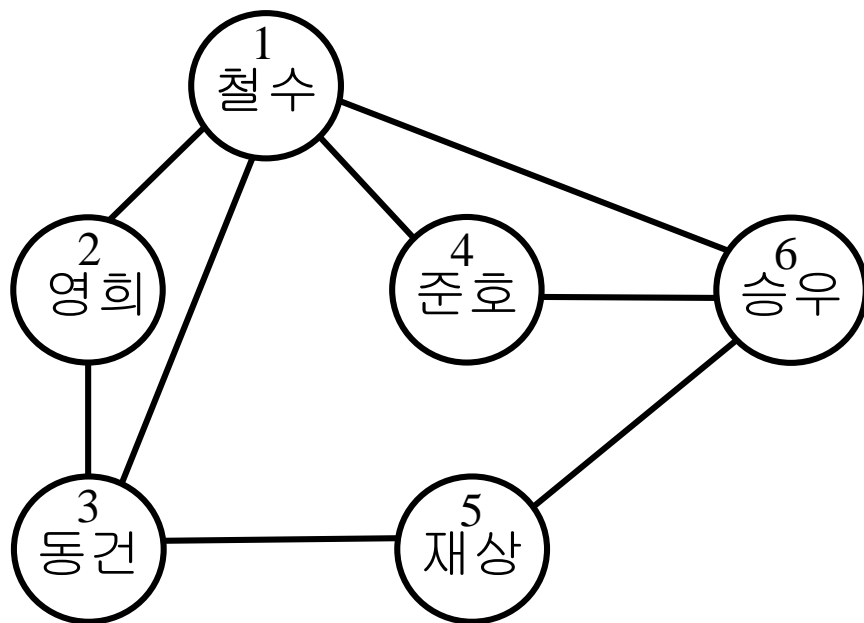


가중치를 가진 유향 그래프

Graph의 표현 1: Adjacency Matrix

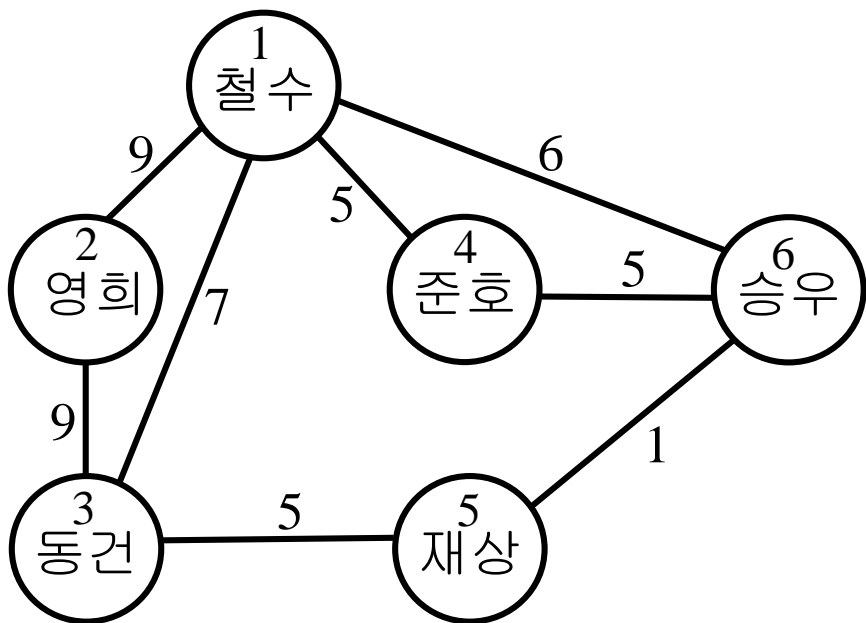
N : 정점의 총 수

- Adjacency matrix
 - $N \times N$ 행렬로 표현
 - 원소 $(i, j) = 1$: 정점 i 와 정점 j 사이에 간선이 있음
 - 원소 $(i, j) = 0$: 정점 i 와 정점 j 사이에 간선이 없음
 - 유향 그래프의 경우
 - 원소 (i, j) 는 정점 i 로부터 정점 j 로 연결되는 간선이 있는지를 나타냄
 - 가중치 있는 그래프의 경우
 - 원소 (i, j) 는 1 대신에 가중치를 가짐



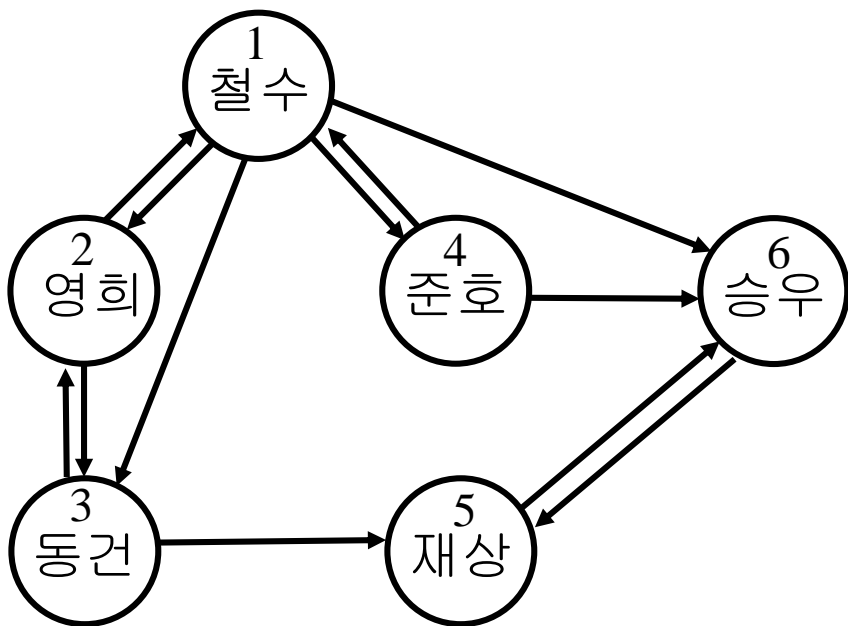
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	1
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	0	1	0
4	1	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	1
6	1	0	0	1	1	0

무향 그래프의 예



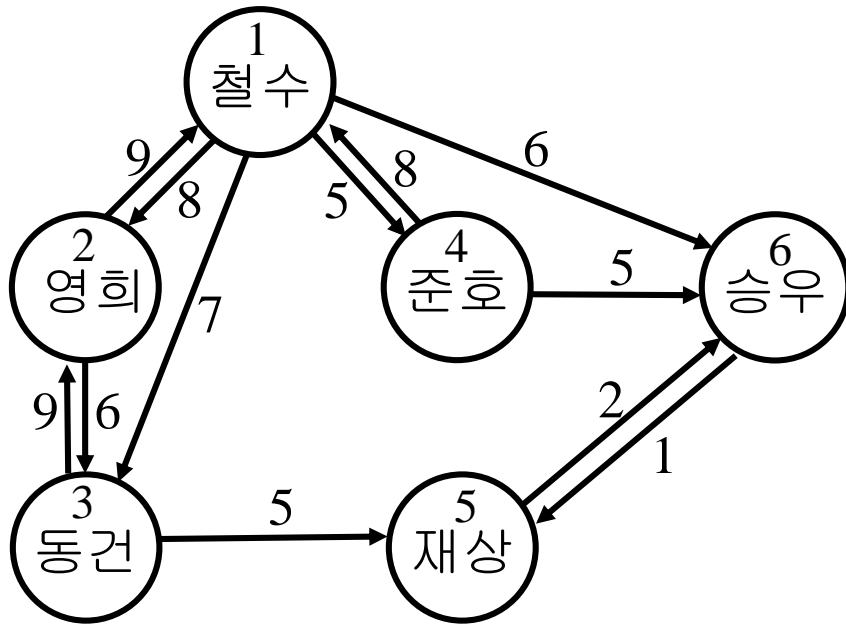
	1	2	3	4	5	6
1	0	9	7	5	0	6
2	9	0	9	0	0	0
3	7	9	0	0	5	0
4	5	0	0	0	0	5
5	0	0	5	0	0	1
6	6	0	0	5	1	0

가중치 있는 무향 그래프의 예



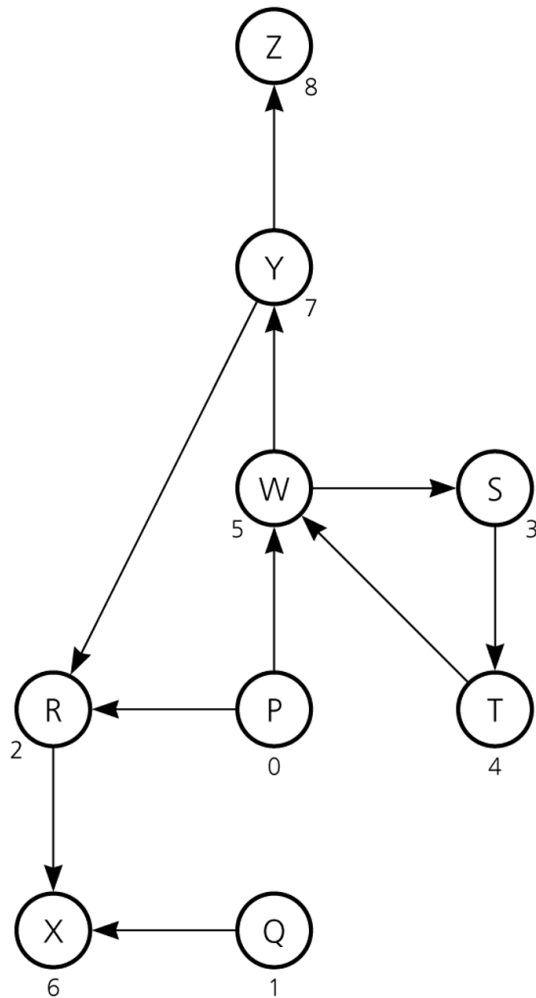
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	1
2	1	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	1	0
4	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	1	0

유향 그래프의 예



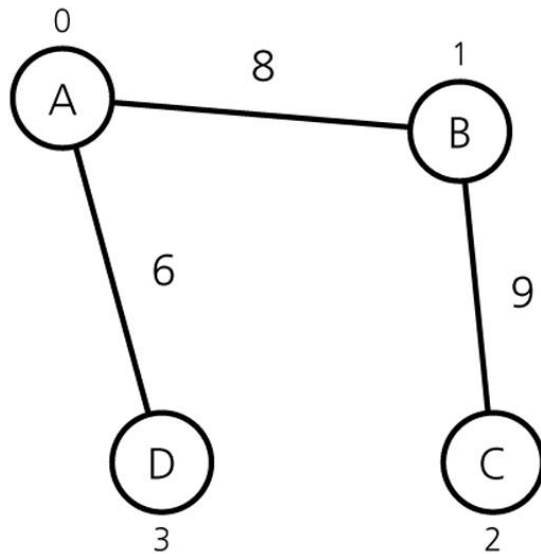
	1	2	3	4	5	6
1	0	8	7	5	0	6
2	9	0	6	0	0	0
3	0	9	0	0	5	0
4	8	0	0	0	0	5
5	0	0	0	0	0	2
6	0	0	0	0	1	0

가중치 있는 유향 그래프의 예



		0	1	2	3	4	5	6	7	8
		P	Q	R	S	T	W	X	Y	Z
0	P	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	Q	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2	R	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3	S	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	T	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	W	0	0	0	1	0	0	0	1	0
6	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	Y	0	0	1	0	0	0	0	0	1
8	Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0

유형 그래프의 다른 예

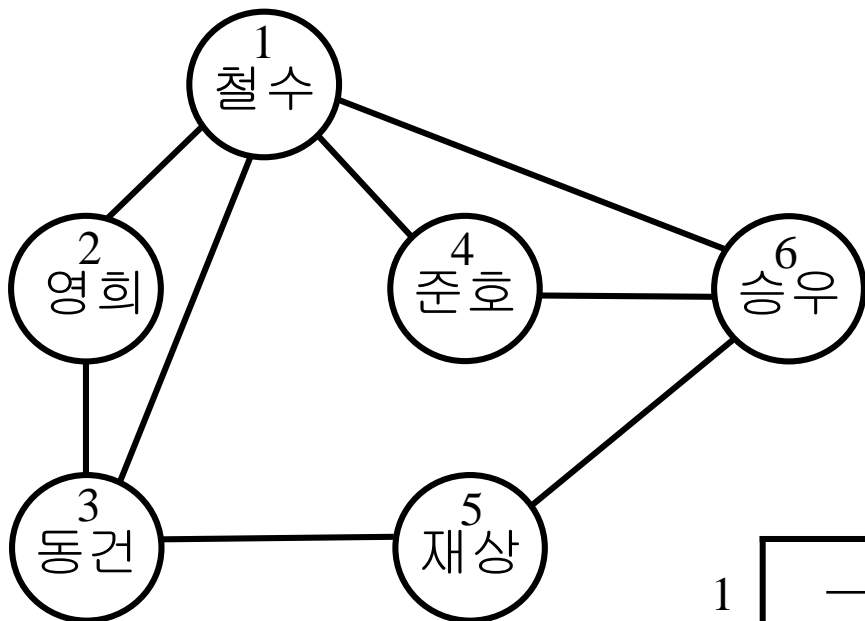


		0	1	2	3
		A	B	C	D
0	A	∞	8	∞	6
1	B	8	∞	9	∞
2	C	∞	9	∞	∞
3	D	6	∞	∞	∞

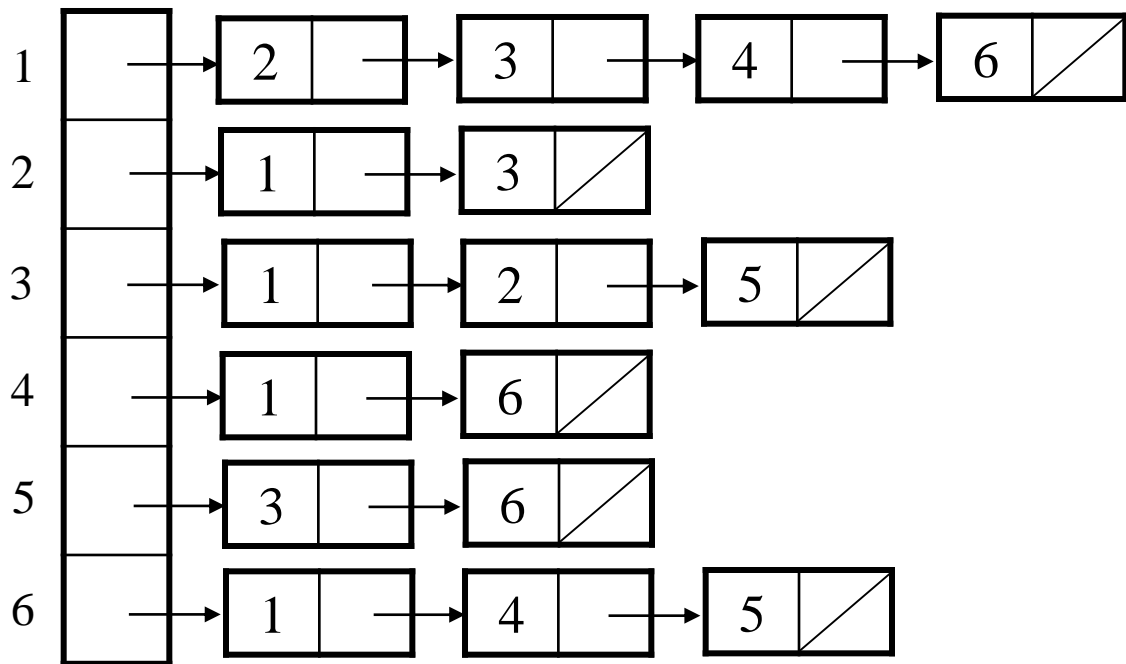
가중치 있는 그래프의 다른 예

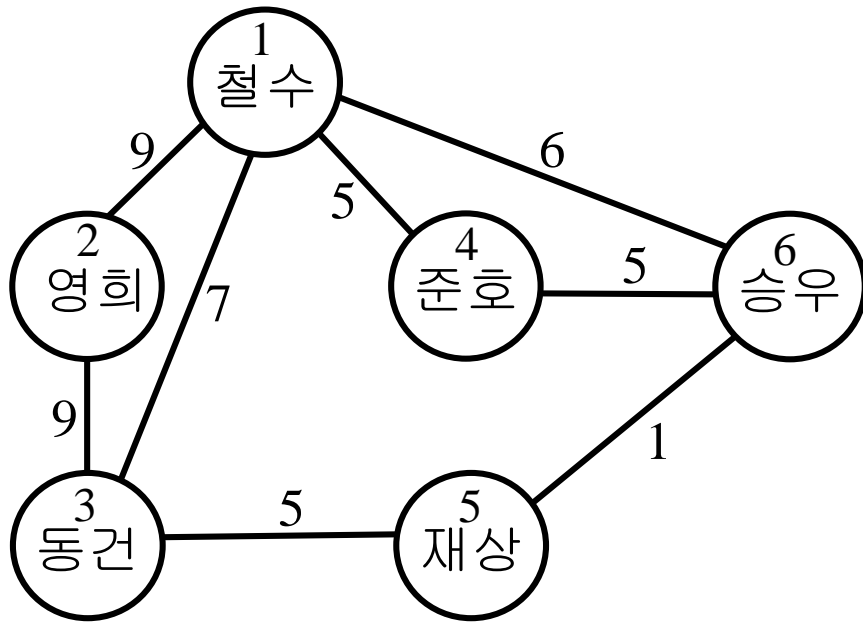
Graph의 표현 2: Adjacency List

- Adjacency list
 - N 개의 연결 리스트로 표현
 - i 번째 리스트는 정점 i 에 인접한 정점들을 리스트로 연결해 놓음
 - 가중치 있는 그래프의 경우
 - 리스트는 가중치도 보관한다

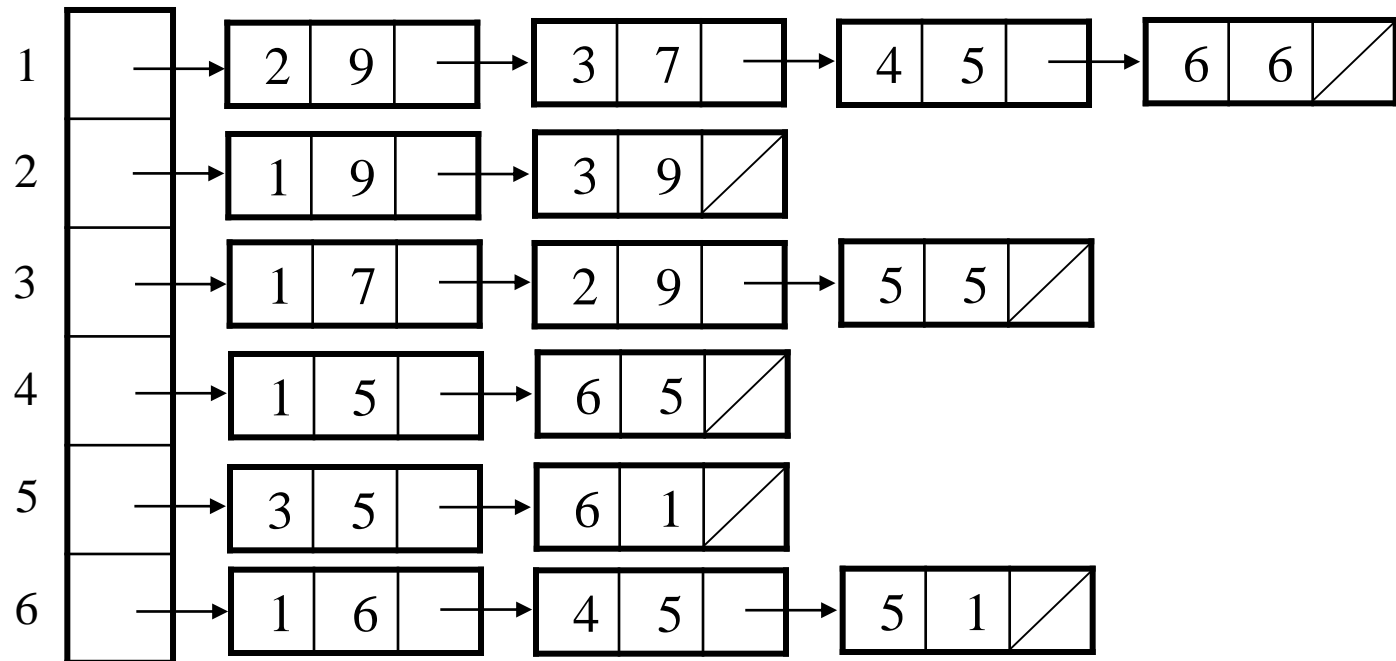


무향 그래프의 예





가중치 있는 그래프의 예



Graph Traversal

- 대표적 두가지 방법
 - BFS (Breadth-First Search)
 - DFS (Depth-First Search)
- 너무나 중요함
 - 그래프 알고리즘의 기본
 - DFS/BFS는 간단해 보이지만 제대로 아는 사람은 매우 드물다
 - DFS/BFS는 뱃속 깊이 이해해야 좋은 그래프 알고리즘을 만들 수 있음

DFS 깊이우선탐색

```
DFS( $G$ )
{
```

```
    for each  $v \in V$ 
```

```
        visited[ $v$ ]  $\leftarrow$  NO;
```

```
    for each  $v \in V$ 
```

```
        if (visited[ $v$ ] = NO) then aDFS( $v$ );
```

```
}
```

```
aDFS ( $v$ )
```

```
{
```

```
    visited[ $v$ ]  $\leftarrow$  YES;
```

```
    for each  $x \in L(v)$   $\triangleright L(v)$  : 정점  $v$ 의 인접 리스트
```

```
        if (visited[ $x$ ] = NO) then aDFS( $u$ );
```

```
}
```

✓ 수행 시간: $\Theta(|V|+|E|)$

BFS너비우선탐색

```

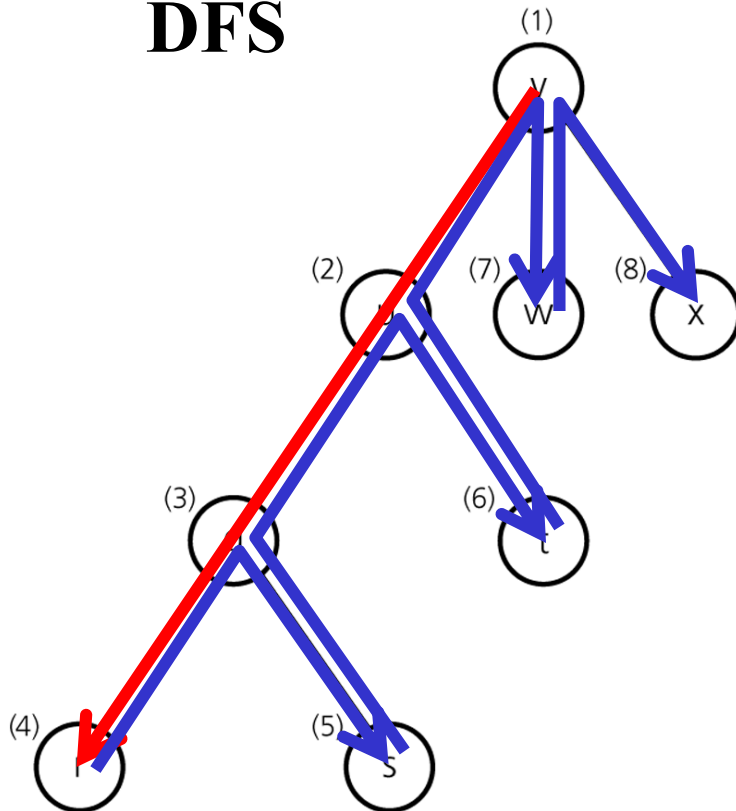
BFS( $G, v$ )
{
    for each  $v \in V$ 
        visited[ $v$ ]  $\leftarrow$  NO;
    visited[ $s$ ]  $\leftarrow$  YES;
    enqueue( $Q, s$ );
    while ( $Q \neq \Phi$ ) {
         $u \leftarrow$  dequeue( $Q$ );
        for each  $v \in L(u)$ 
            if (visited[ $v$ ] = NO) then
                visited[ $u$ ]  $\leftarrow$  YES;
                enqueue( $Q, v$ );
    }
}

```

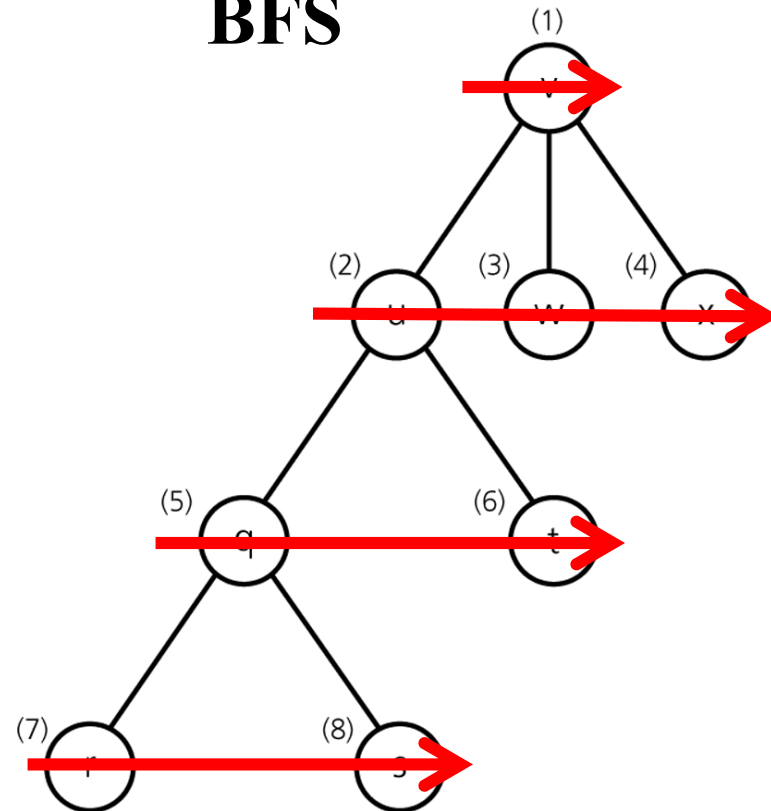
✓수행시간: $\Theta(|V|+|E|)$

동일한 Tree를 각각 DFS/BFS로 방문하기

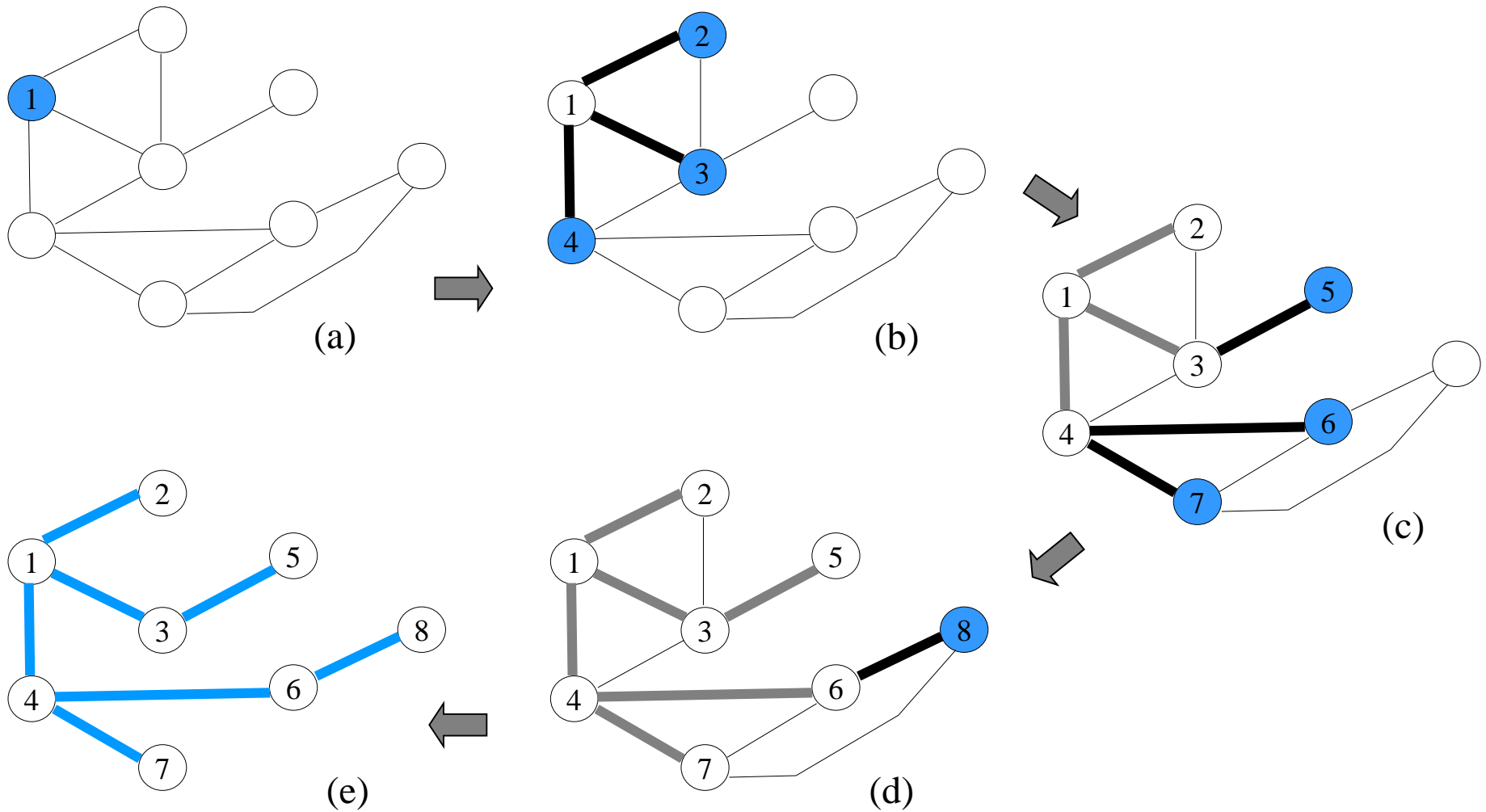
DFS



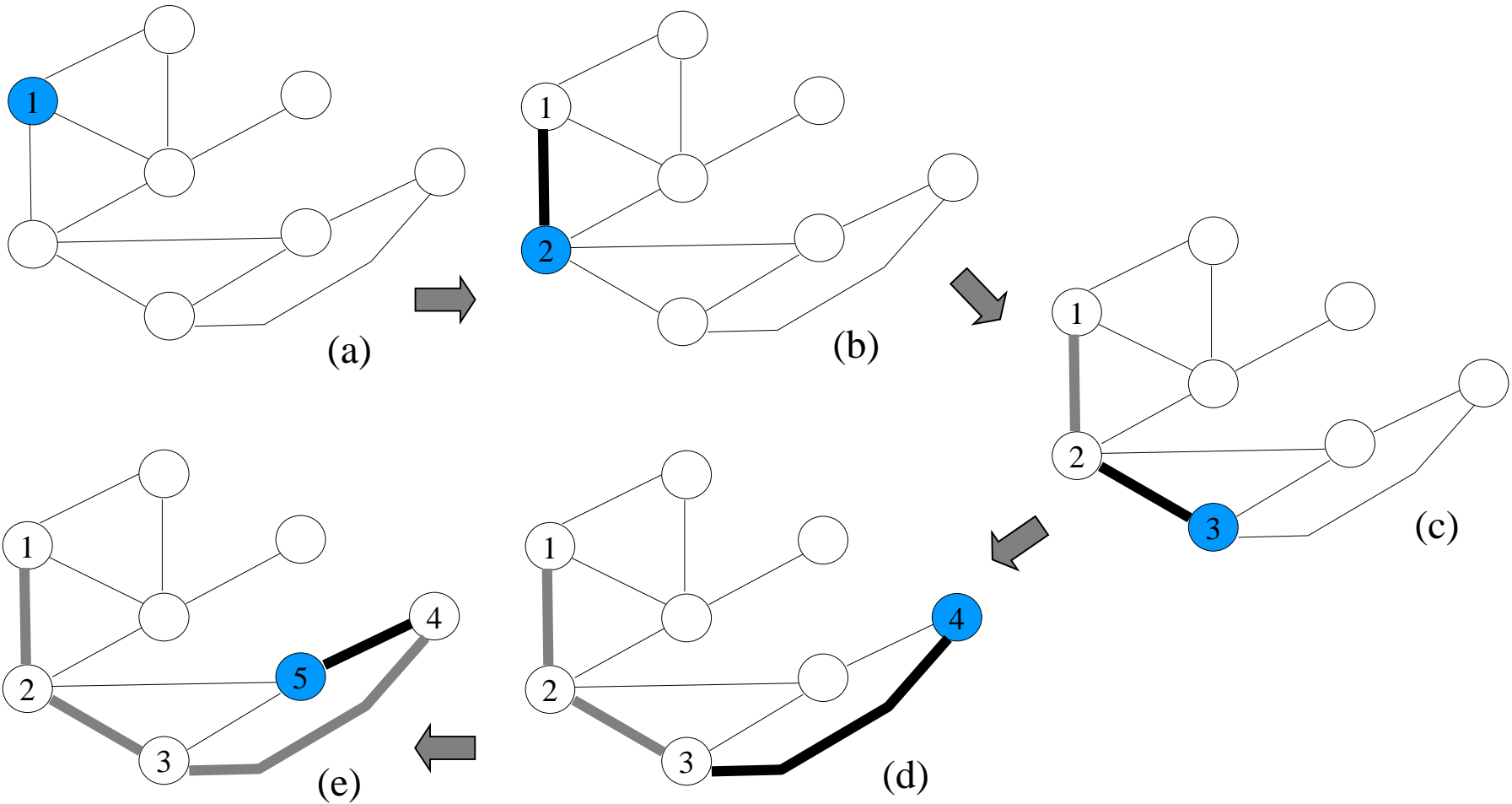
BFS



BFS의 작동 예



DFS의 작동 예



Minimum Spanning Trees

- 조건
 - 무향 연결 그래프
 - 연결 그래프 connected graph : 모든 정점 간에 경로가 존재하는 그래프
- 트리
 - 사이클이 없는 연결 그래프
 - n 개의 정점을 가진 트리는 항상 $n-1$ 개의 간선을 갖는다
- 그래프 G 의 신장트리
 - G 의 정점들과 간선들로만 구성된 트리
- G 의 최소신장트리
 - G 의 신장트리들 중 간선의 합이 최소인 신장트리

Prim Algorithm

Prim (G, r)

```
{
   $S \leftarrow \emptyset$ ;
  정점  $r$ 을 방문되었다고 표시하고, 집합  $S$ 에 포함시킨다;
  while ( $S \neq V$ ) {
     $S$ 에서  $V-S$ 를 연결하는 간선들 중 최소길이의 간선  $(x,y)$  를 찾는다;  $\triangleright (x \in S, y \in V-S)$ 
    정점  $y$ 를 방문되었다고 표시하고, 집합  $S$ 에 포함시킨다;
  }
}
```

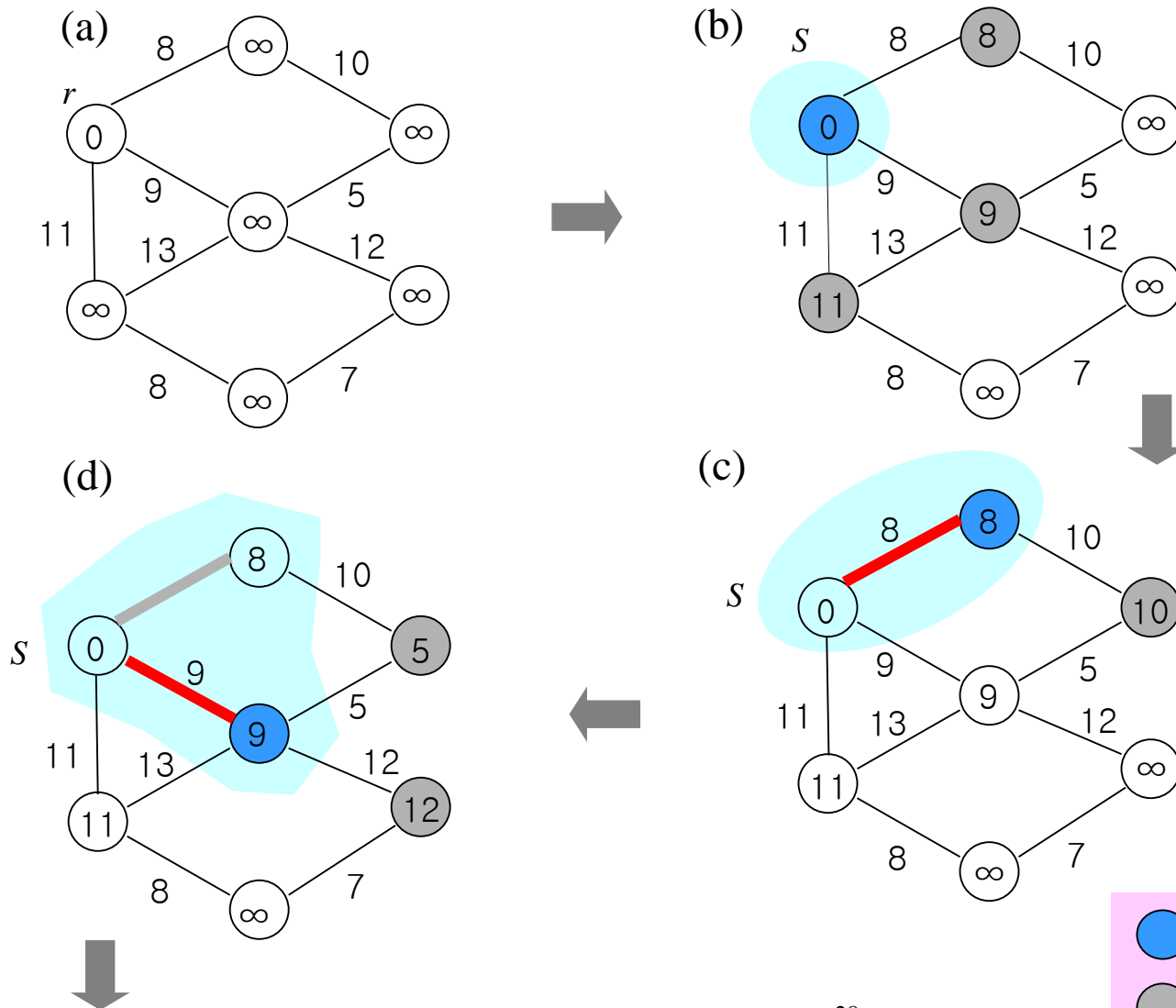
- ✓ Prim 알고리즘은 그리디 greedy 알고리즘의 일종
- ✓ 그리디 알고리즘으로 최적해를 보장하는 드문 예

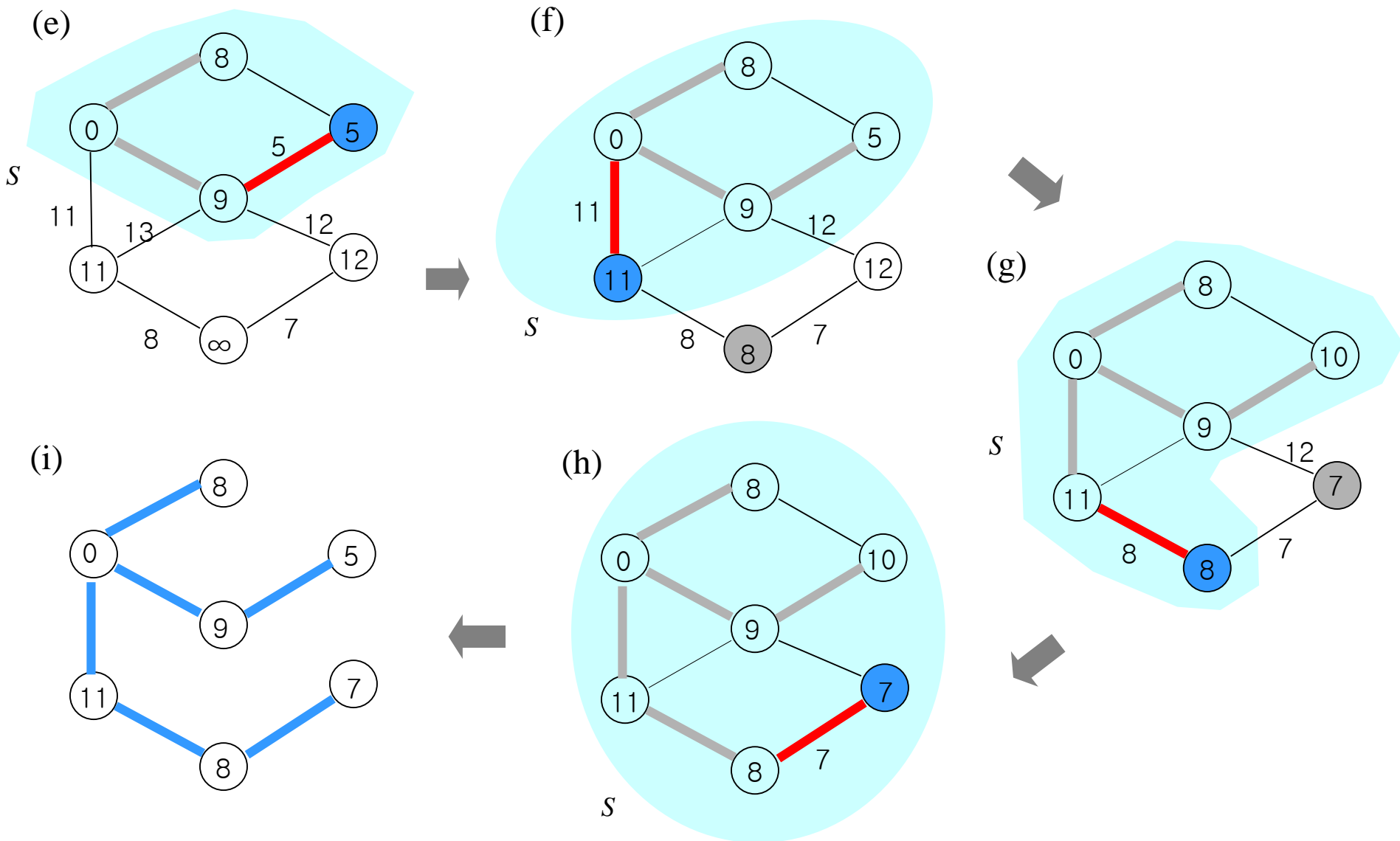
✓수행시간: $O(|E|\log|V|)$

↖
힙 이용

한빛아카데미

Prim Algorithm의 작동 예





Kruskal Algorithm

Kruskal (G, r)

{

$T \leftarrow \Phi$; $\triangleright T$: 신장트리

단 하나의 정점만으로 이루어진 n 개의 집합을 초기화한다;

모든 간선을 가중치가 작은 순으로 정렬한다;

while (T 의 간선수 $< n-1$) {

최소비용 간선 (u, v) 를 제거한다;

정점 u 와 정점 v 가 서로 다른 집합에 속하면 {

두 집합을 하나로 합친다;

$T \leftarrow T \cup \{u, v\}$;

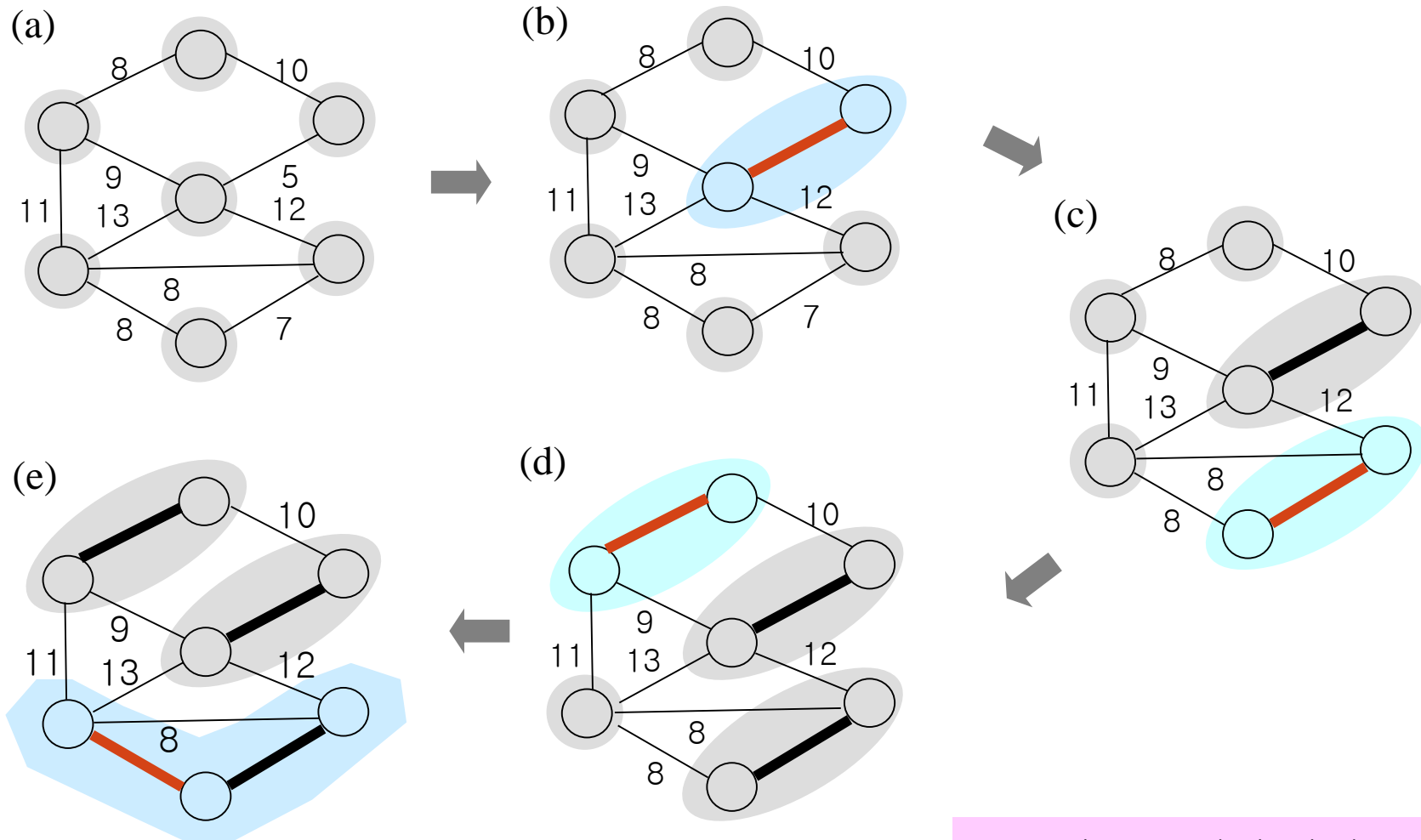
}

}

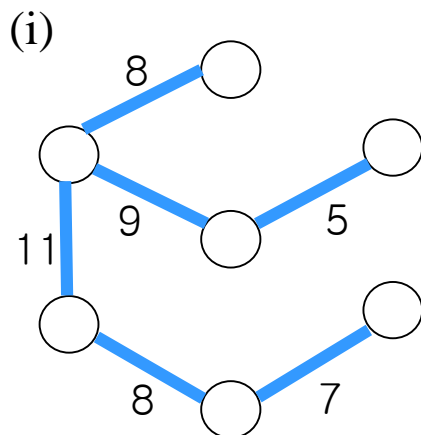
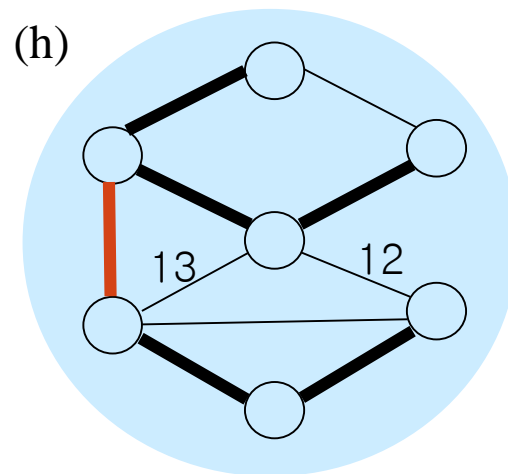
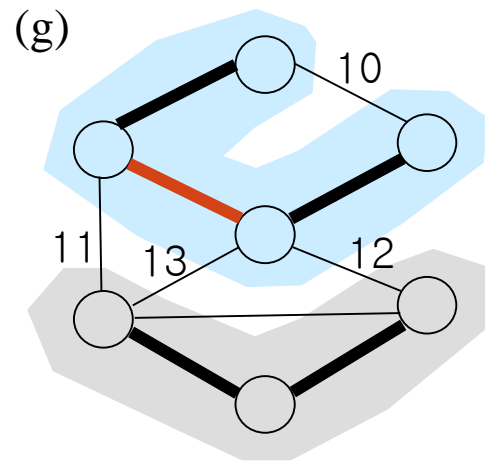
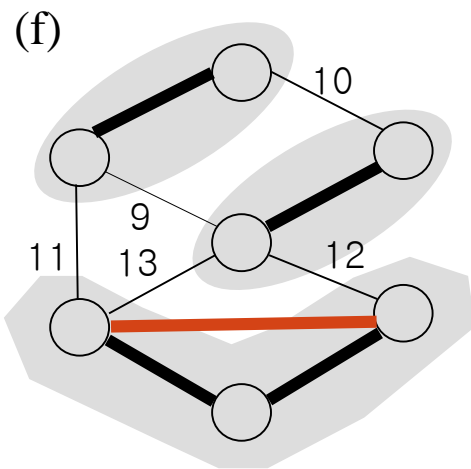
}

✓수행시간: $O(|E|\log|V|)$

Kruskal Algorithm의 작동 예

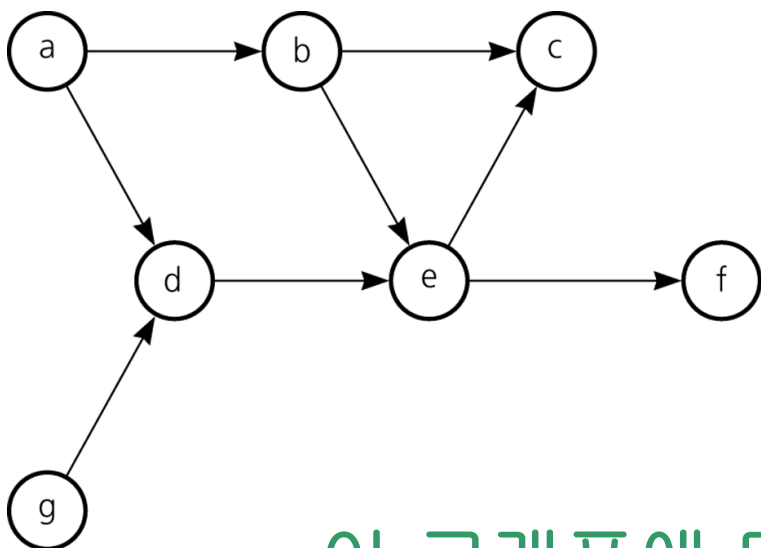


— : 방금 고려한 간선
 — : 성공적으로 더해진 간선

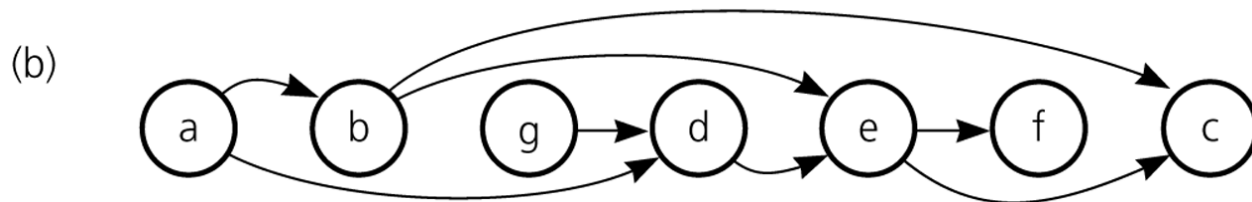
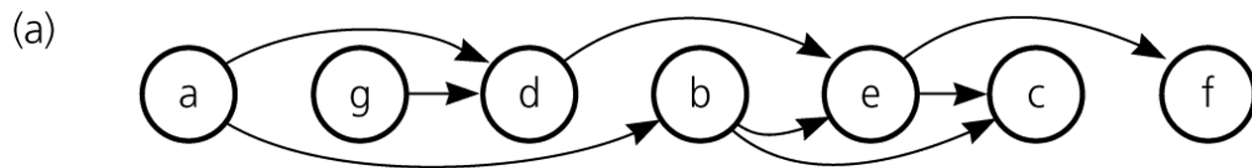


Topological Sorting

- 조건
 - 사이클이 없는 유향 그래프
- Topological Sorting 위상정렬
 - 모든 정점을 일렬로 나열하되
 - 정점 x 에서 정점 y 로 가는 간선이 있으면 x 는 반드시 y 보다 앞에 위치한다
 - 일반적으로 임의의 유향 그래프에 대해 복수의 위상 순서가 존재한다



이 그래프에 대한 위상정렬의 예 2개



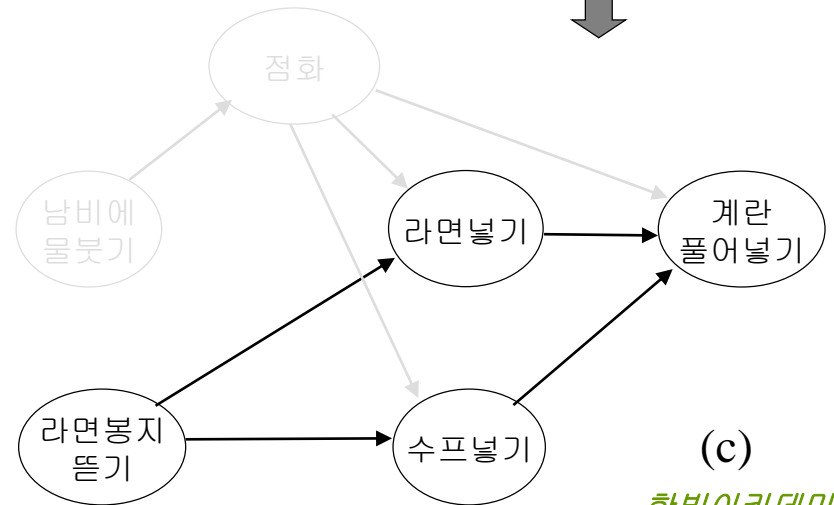
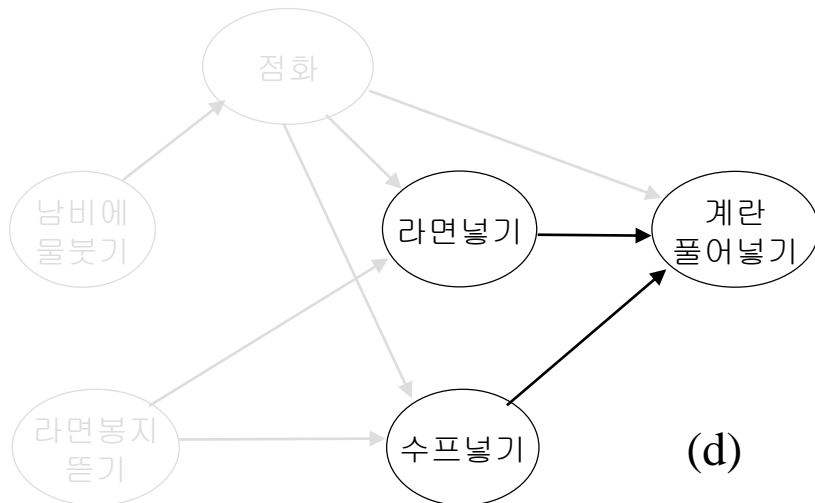
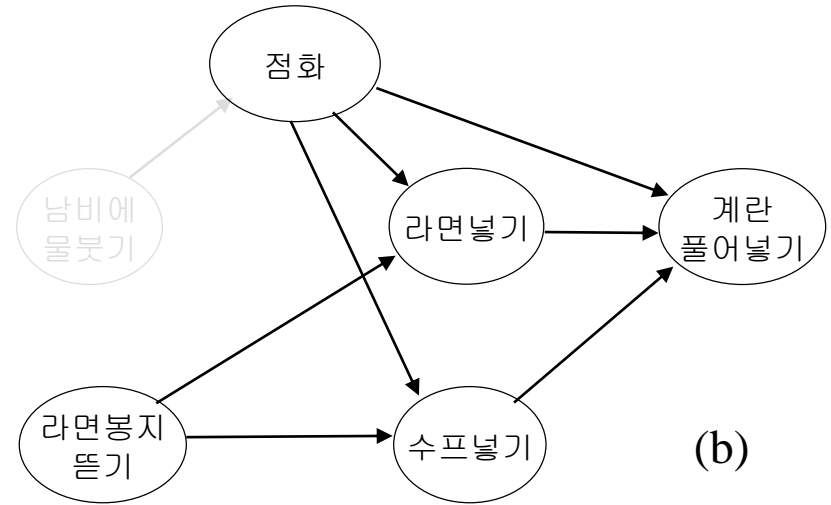
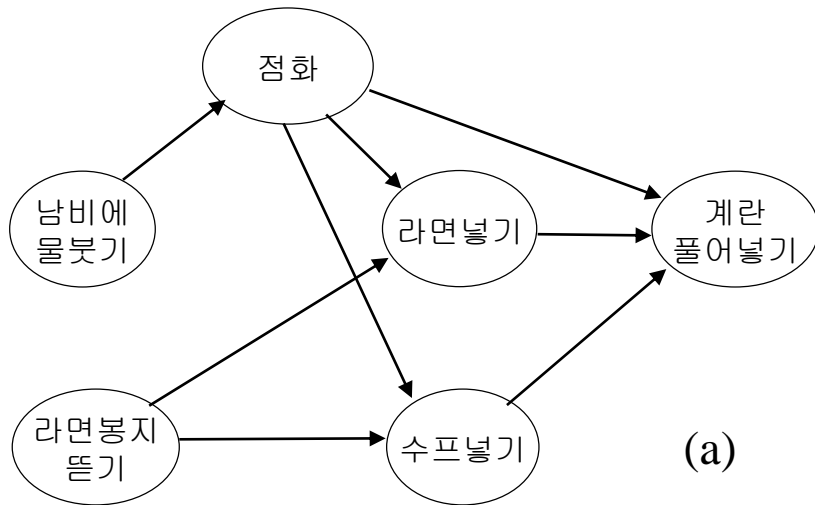
위상정렬 알고리즘 1

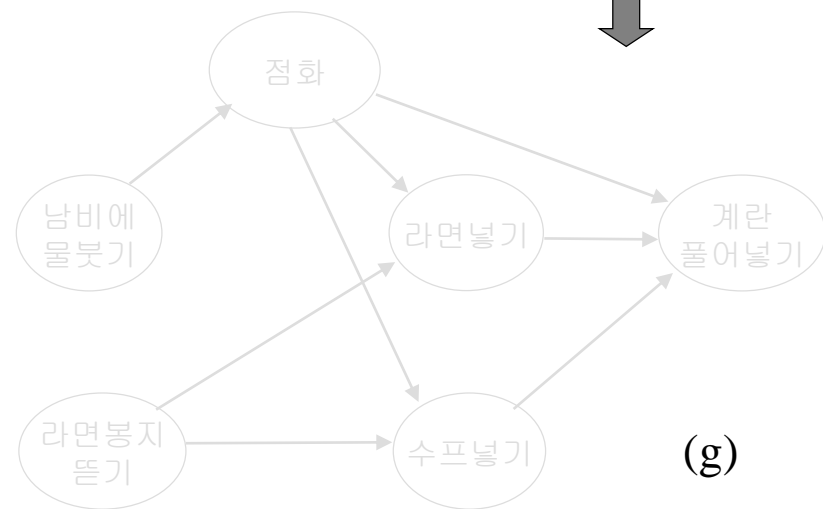
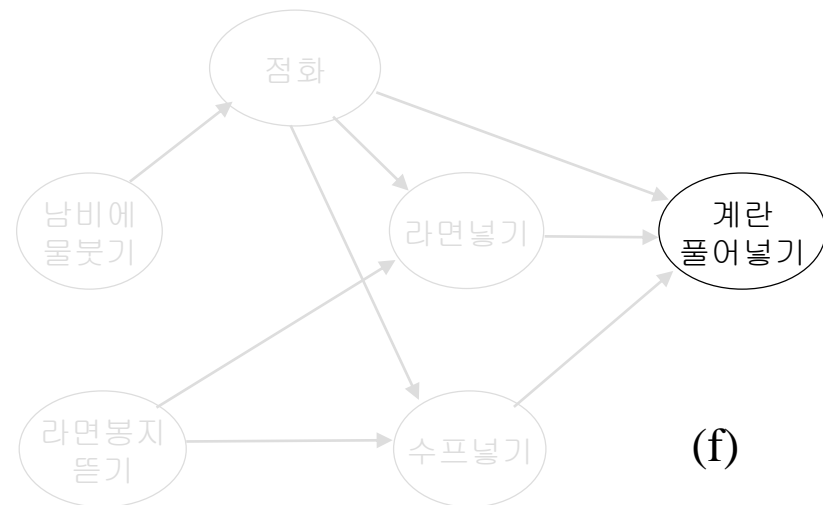
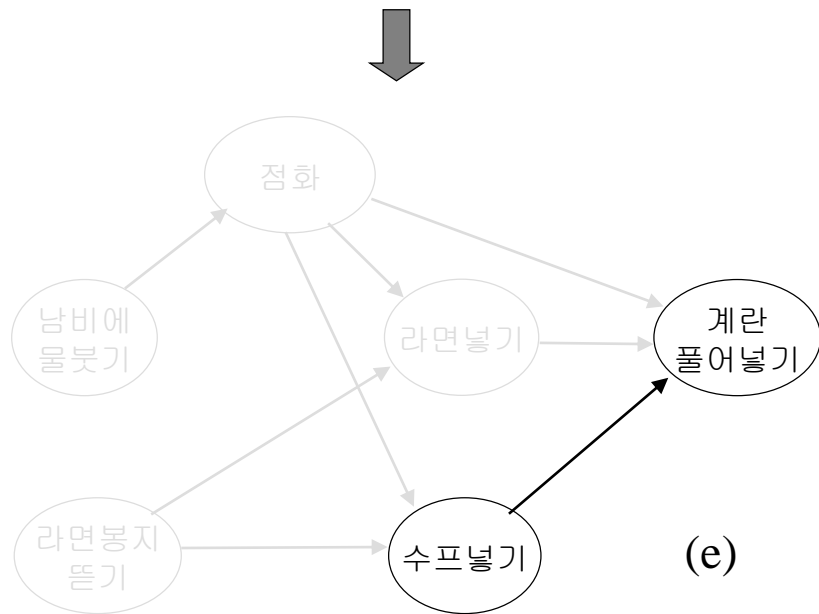
topologicalSort1(G)

```
{  
    for  $\leftarrow 1$  to  $n$  {  
        진입간선이 없는 정점  $u$ 를 선택한다;  
         $A[i] \leftarrow u$ ;  
        정점  $u$ 와,  $u$ 의 진출간선을 모두 제거한다;  
    }  
    ▷ 이 시점에 배열  $A[1...n]$ 에는 정점들을 위상정렬 되어 있다  
}
```

✓수행시간: $\Theta(|V|+|E|)$

위상정렬 알고리즘 1의 작동 예





위상정렬 알고리즘 2

topologicalSort2(G)

{

for each $v \in V$

$\text{visited}[v] \leftarrow \text{NO};$

for each $v \in V$ ▷ 정점의 순서는 아무 순서나 무관

if ($\text{visited}[v] = \text{NO}$) **then** DFS-TS(v);

}

DFS-TS(v)

{

$\text{visited}[v] \leftarrow \text{YES};$

for each $x \in L(v)$ ▷ $L(v)$: v 의 인접 리스트

if ($\text{visited}[x] = \text{NO}$) **then** DFS-TS(x);

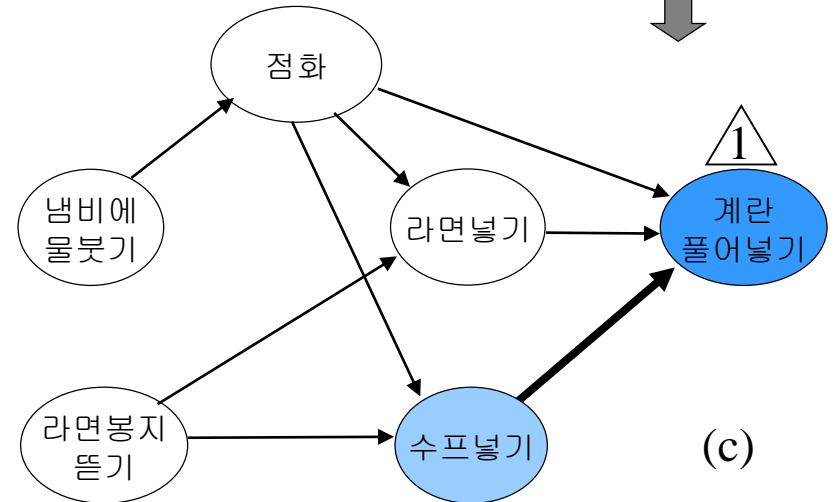
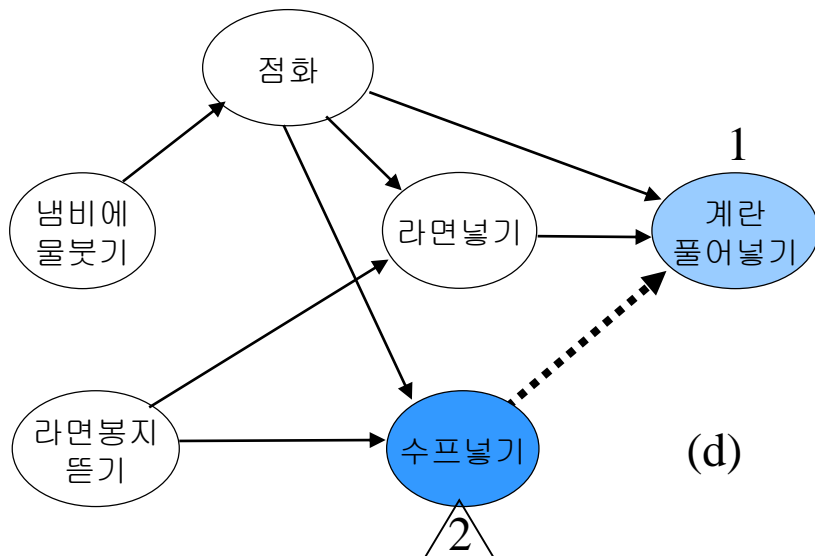
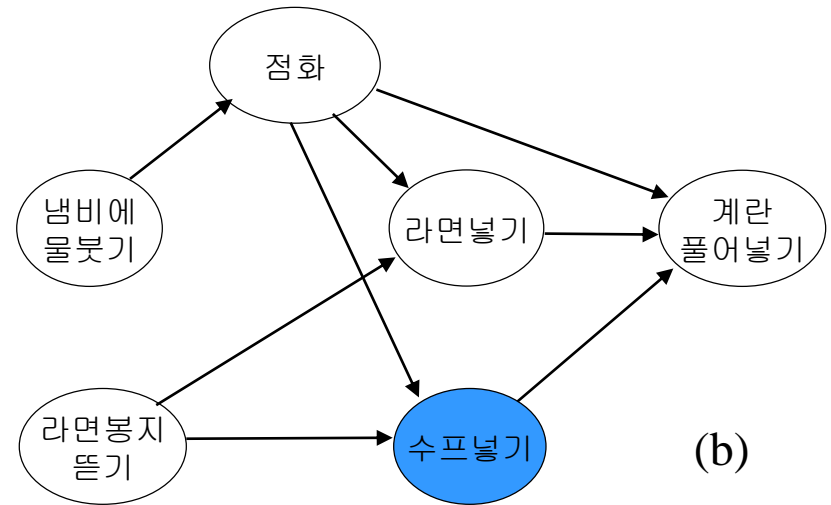
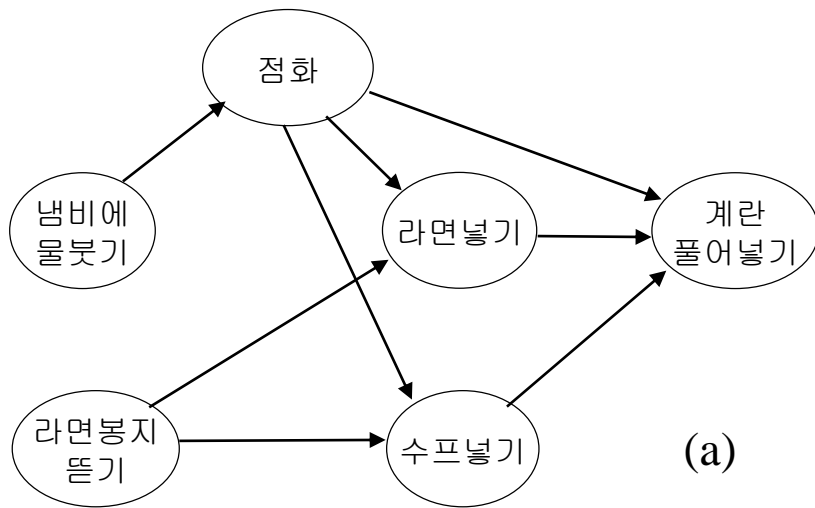
 연결 리스트 R 의 맨 앞에 정점 v 를 삽입한다;

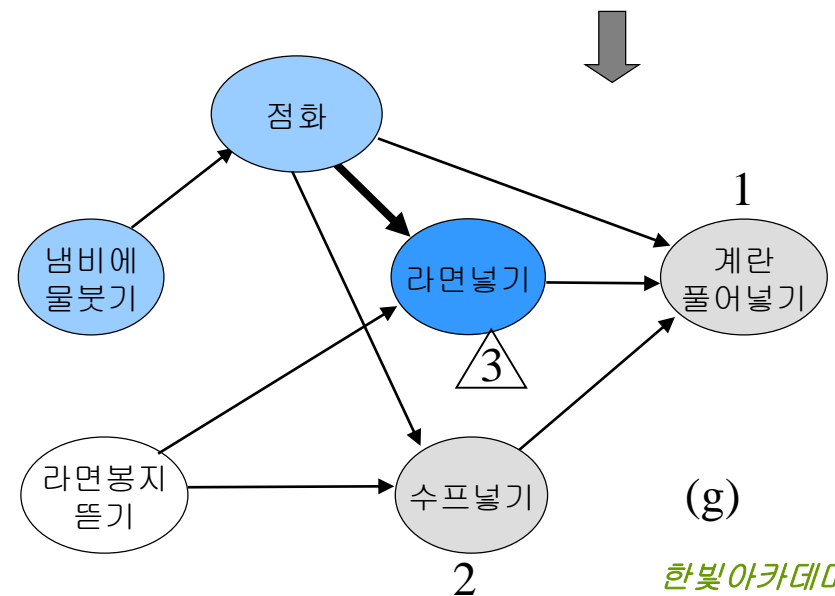
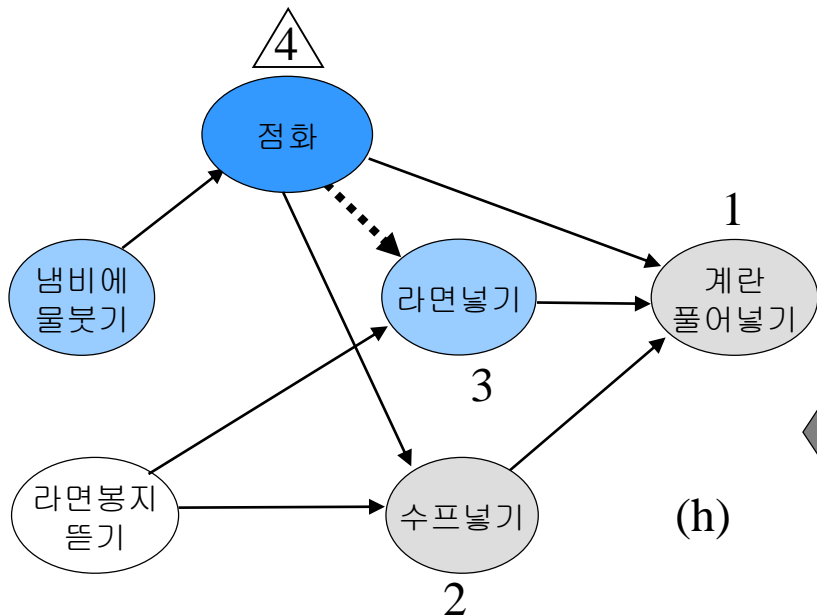
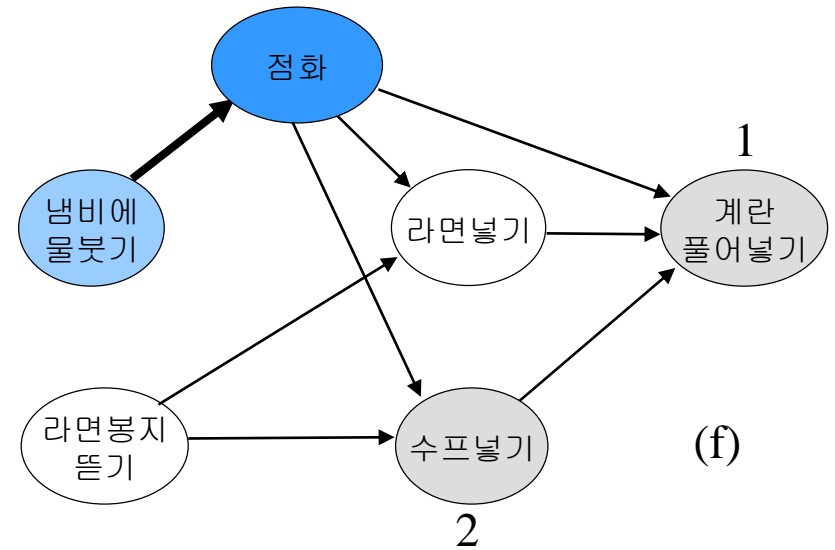
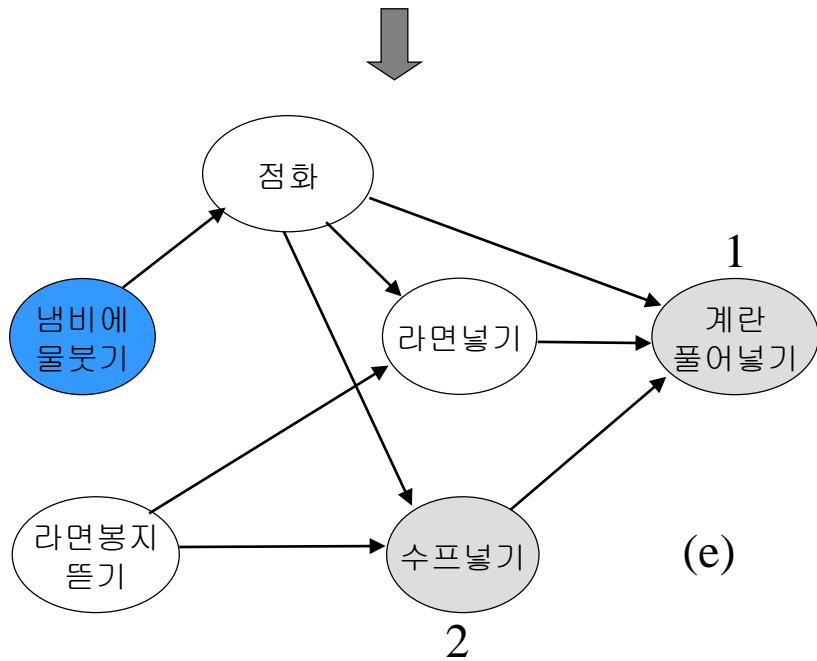
}

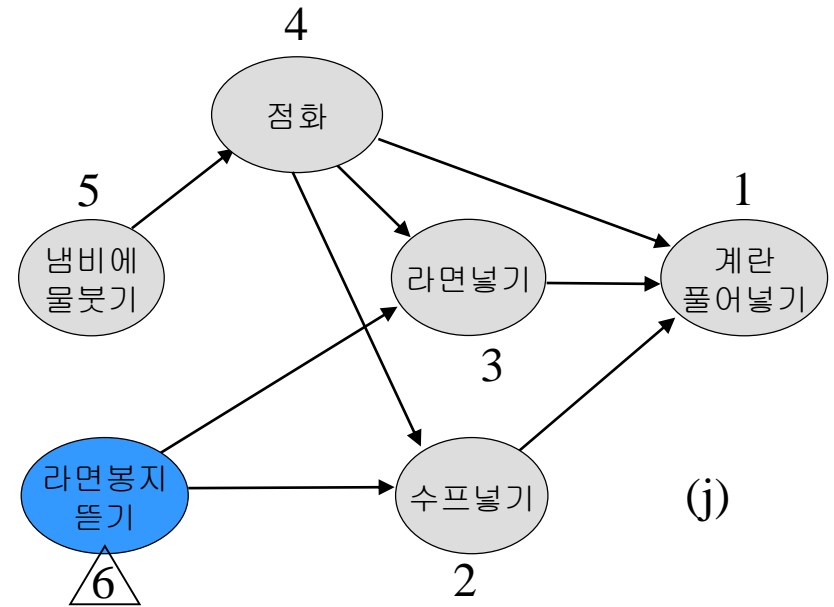
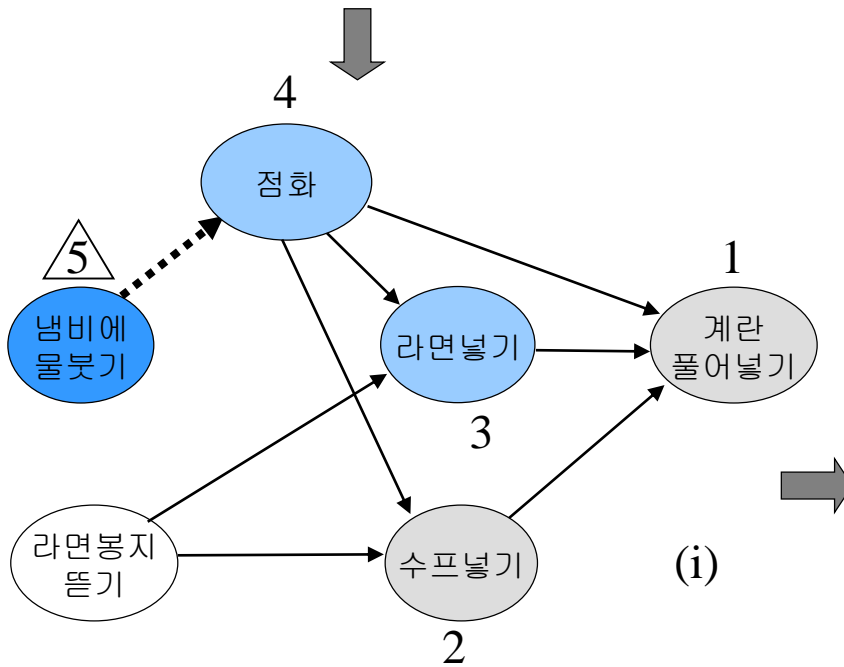
✓수행시간: $\Theta(|V|+|E|)$

✓알고리즘이 끝나고 나면 연결 리스트 R 에는 정점들이 위상정렬된 순서로 매달려 있다.

위상정렬 알고리즘 2의 작동 예







Shortest Paths

- 조건
 - 간선 가중치가 있는 유향 그래프
 - 무향 그래프는 각 간선에 대해 양쪽으로 유향 간선이 있는 유향 그래프로 생각할 수 있다
 - 즉, 무향 간선 (u,v) 는 유향 간선 (u,v) 와 (v,u) 를 의미한다고 가정하면 된다
- 두 정점 사이의 최단경로
 - 두 정점 사이의 경로들 중 간선의 가중치 합이 최소인 경로
 - 간선 가중치의 합이 음인 싸이클이 있으면 문제가 정의되지 않는다

- 단일 시작점 최단경로
 - 단일 시작점으로부터 각 정점에 이르는 최단경로를 구한다
 - 다익스트라 알고리즘
 - 음의 가중치를 허용하지 않는 최단경로
 - 벨만-포드 알고리즘
 - 음의 가중치를 허용하는 최단경로
 - 싸이클이 없는 그래프의 최단경로
- 모든 쌍 최단경로
 - 모든 정점 쌍 사이의 최단경로를 모두 구한다
 - 플로이드-워샬 알고리즘

Dijkstra Algorithm

모든 간선의 가중치는 음이 아니어야 함

Dijkstra(G, r)

▷ $G=(V, E)$: 주어진 그래프

▷ r : 시작으로 삼을 정점

{

$S \leftarrow \Phi$; ▷ S : 정점 집합

for each $u \in V$

$d_u \leftarrow \infty$;

$d_r \leftarrow 0$;

while ($S \neq V$) { ▷ n 회 순환된다

$u \leftarrow \text{extractMin}(V-S, d)$;

$S \leftarrow S \cup \{u\}$;

for each $v \in L(u)$ ▷ $L(u)$: u 로부터 연결된 정점들의 집합

if ($v \in V-S$ **and** $d_v < d_u + w_{u,v}$) **then** $d_v \leftarrow d_u + w_{u,v}$;

}

}

이완(relaxation)

extractMin(Q, d)

{

집합 Q 에서 d 값이 가장 작은 정점 u 를 리턴한다;

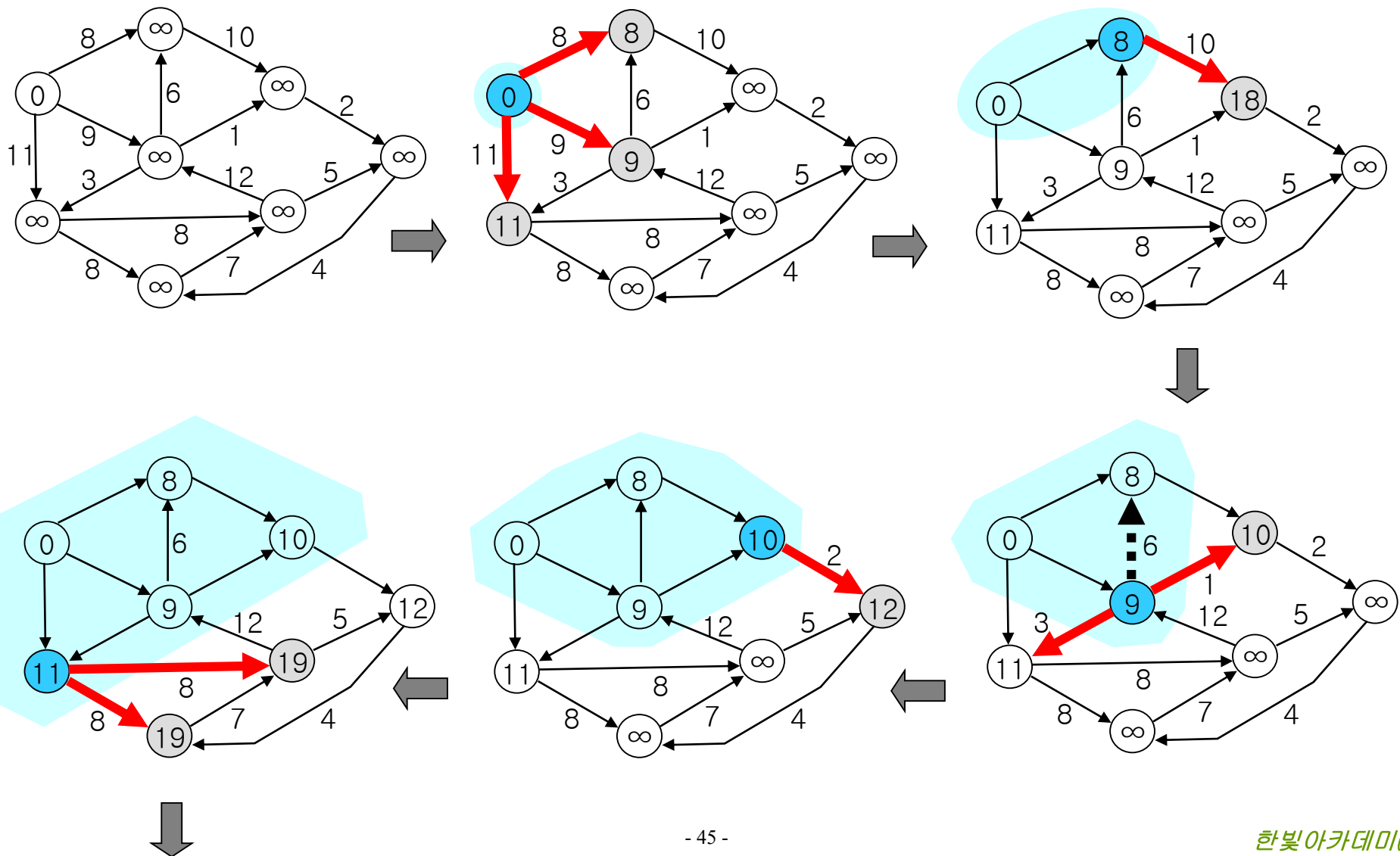
}

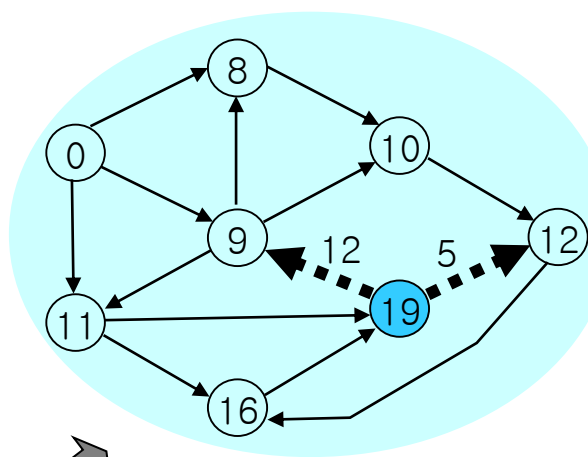
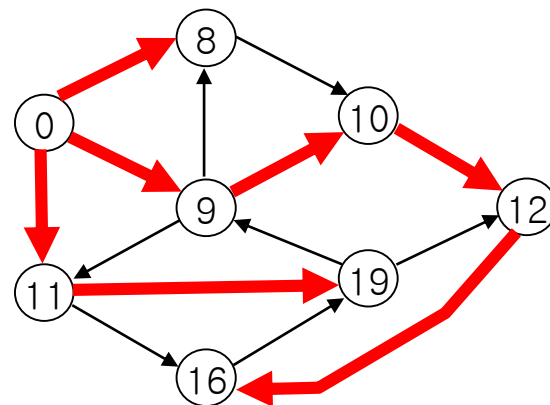
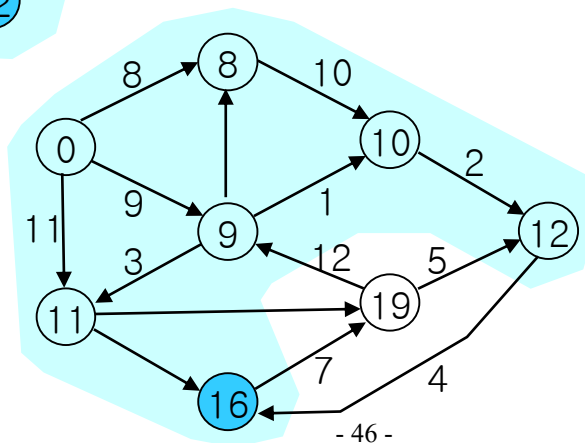
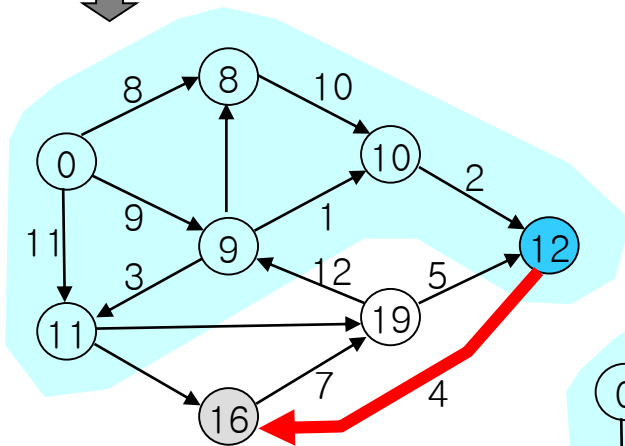
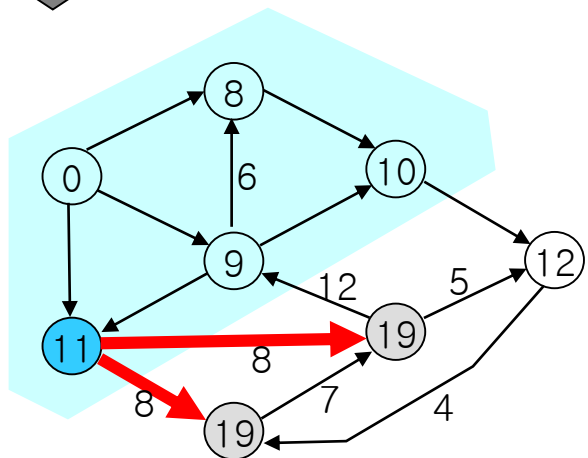
✓수행시간: $O(|E|\log|V|)$

↖
힙 이용

한빛아카데미

Dijkstra Algorithm의 작동 예





Bellman-Ford Algorithm

음의 가중치를 허용한다

BellmanFord(G, r)

{

for each $u \in V$

$d_u \leftarrow \infty$;

$d_r \leftarrow 0$;

for $i \leftarrow 1$ **to** $|V|-1$

for each $(u, v) \in E$

if $(d_u + w_{u,v} < d_v)$ **then** $d_v \leftarrow d_u + w_{u,v}$;

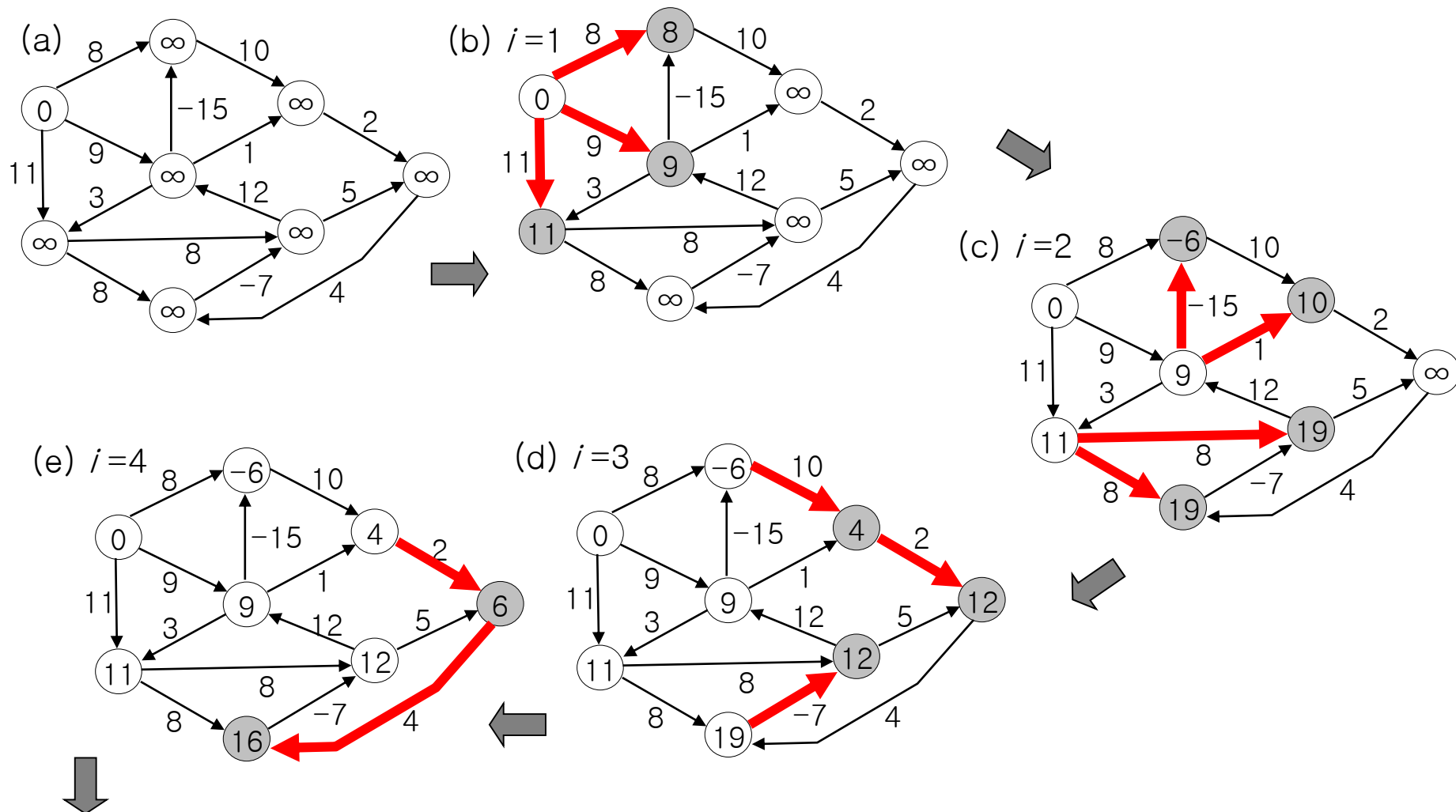
}

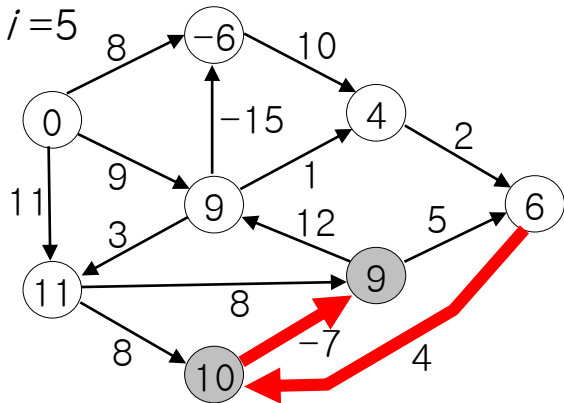
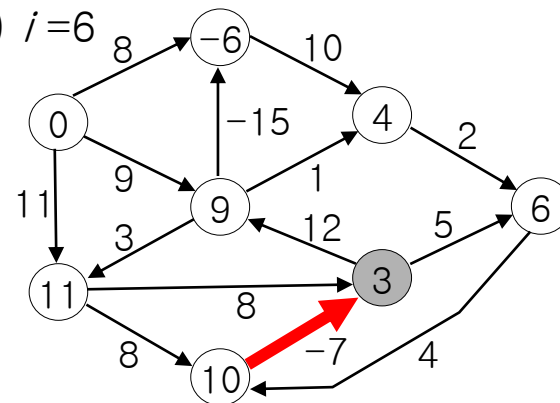
이 완(relaxation)



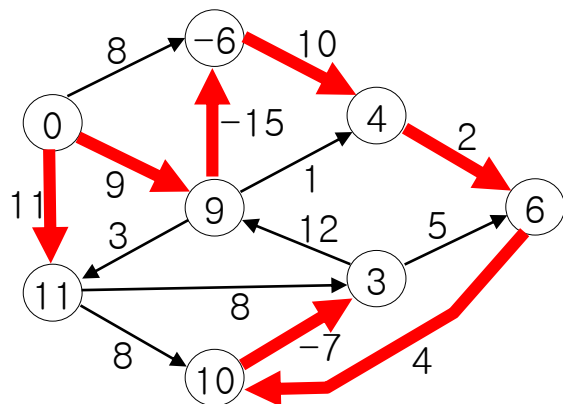
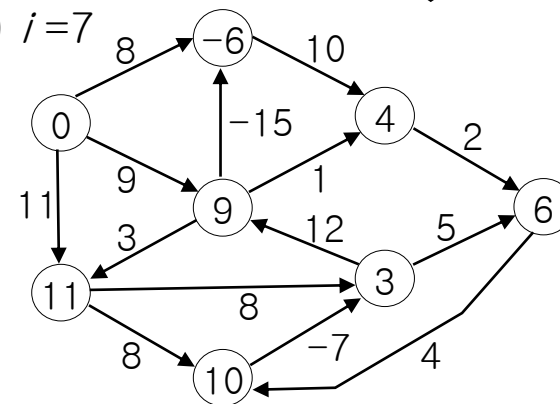
✓수행시간: $\Theta(|E||V|)$

Bellman-Ford Algorithm의 작동 예



(f) $i=5$ (g) $i=6$ 

(i)

(h) $i=7$ 

DP로 본 Bellman-Ford 알고리즘

- d_t^k : 중간에 최대 k 개의 간선을 거쳐
정점 r 로부터 정점 t 에 이르는 최단거리
- 목표: d_t^{n-1}

✓ 재귀적 관계

$$\left\{ \begin{array}{l} d_v^k = \min_{\text{for 모든 간선 } (u, v)} \{d_u^{k-1} + w_{u, v}\}, \quad k > 0 \\ d_r^0 = 0 \\ d_t^0 = \infty, \quad t \neq r \end{array} \right.$$

Floyd-Warshall Algorithm

- 모든 정점들간의 상호 최단거리 구하기
- 응용 예
 - Road Atlas
 - 네비게이션 시스템
 - 네트워크 커뮤니케이션

Floyd-Warshall Algorithm

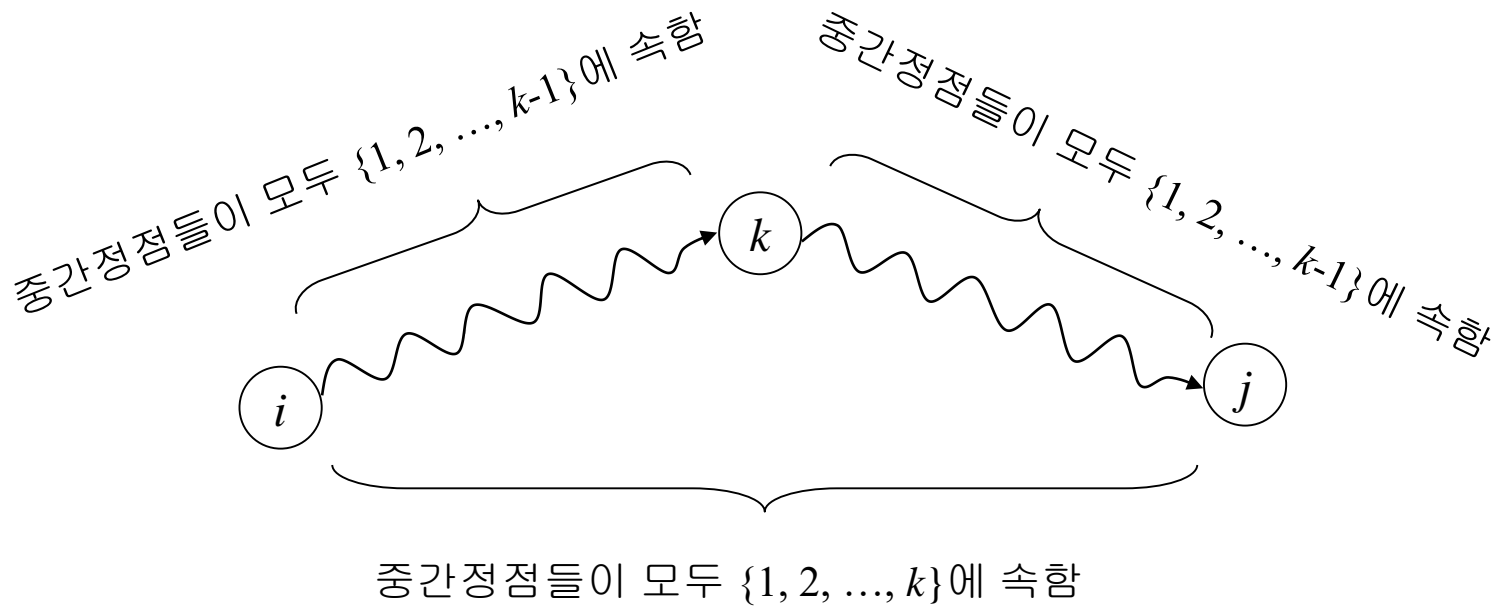
FloydWarshall(G)

```
{
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
        for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ 
             $d_{ij}^0 \leftarrow w_{ij}$ ;
    for  $k \leftarrow 1$  to  $n$ 
        for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
            for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ 
                 $d_{ij}^k \leftarrow \min \{d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\};$ 
}
```

▷ 중간정점 집합 $\{1, 2, \dots, k\}$
 ▷ i : 시작 정점
 ▷ j : 마지막 정점

✓ d_{ij}^k : 중간 정점으로 정점 집합 $\{1, 2, \dots, k\}$ 만을 사용하여
정점 i 에서 정점 j 에 이르는 최단경로

✓수행시간: $\Theta(|V|^3)$

d_{ij}^k 관련

싸이클이 없는 Graph의 Shortest Path

- 싸이클이 없는 유향 그래프를 DAG라 한다
 - DAG: Directed Acyclic Graph
- DAG에서의 최단경로는 선형시간에 간단히 구할 수 있다

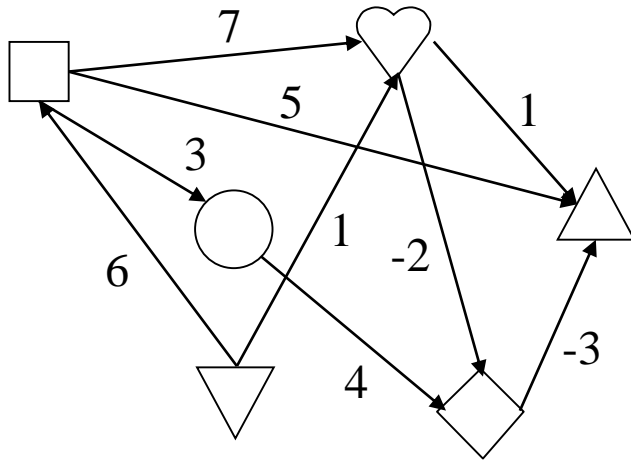
DAG-ShortestPath(G, r)

```
{
  for each  $u \in V$ 
     $d_u \leftarrow \infty$ ;
   $d_r \leftarrow 0$ ;
   $G$ 의 정점들을 위상정렬한다;
  for each  $u \in V$  (위상정렬 순서로)
    for each  $v \in L(u) \triangleright L(u)$  : 정점  $u$ 로부터 연결된 정점들의 집합
      if ( $d_u + w_{u,v} < d_v$ ) then  $d_v \leftarrow d_u + w_{u,v}$ ;
}
```

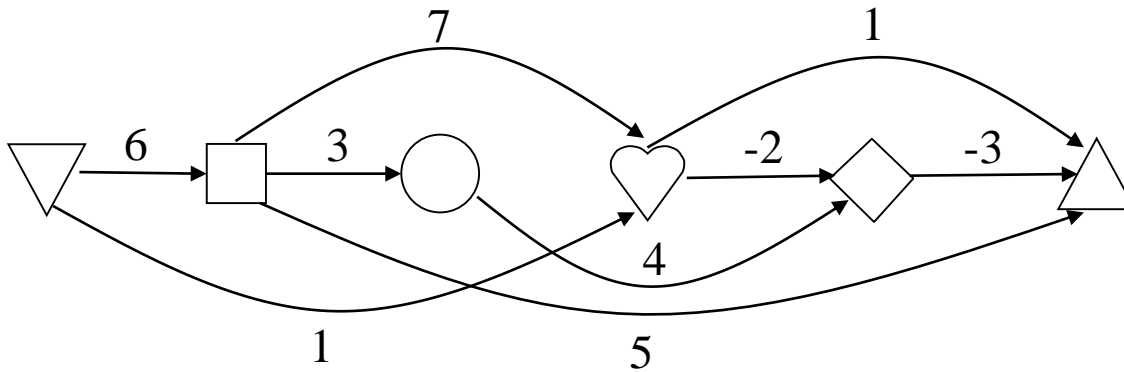
✓수행시간: $\Theta(|V|+|E|)$

DAG-ShortestPath의 작동 예

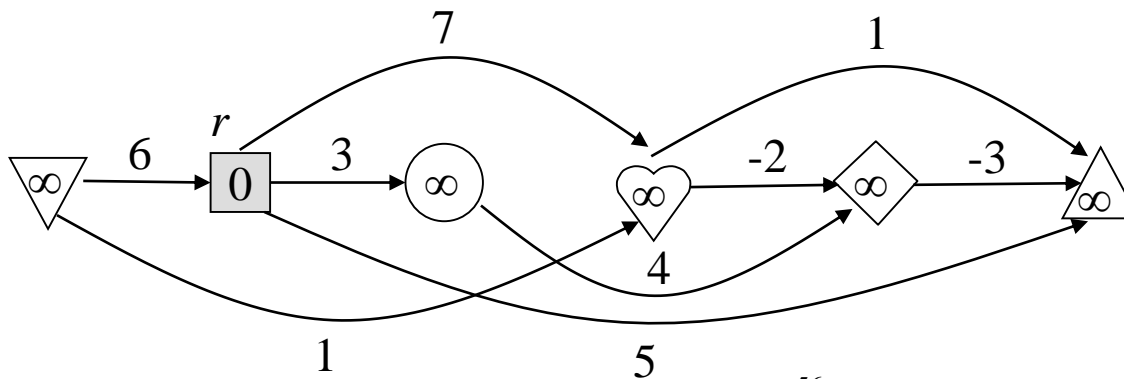
(a)

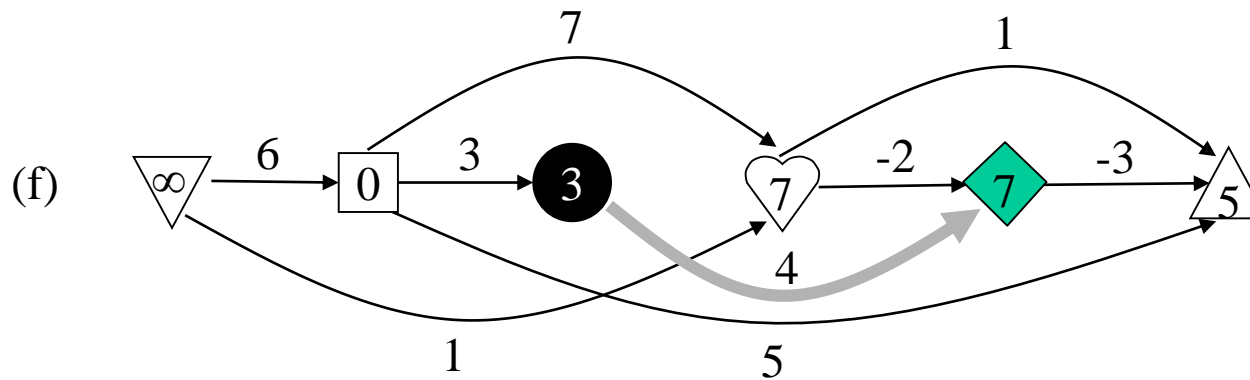
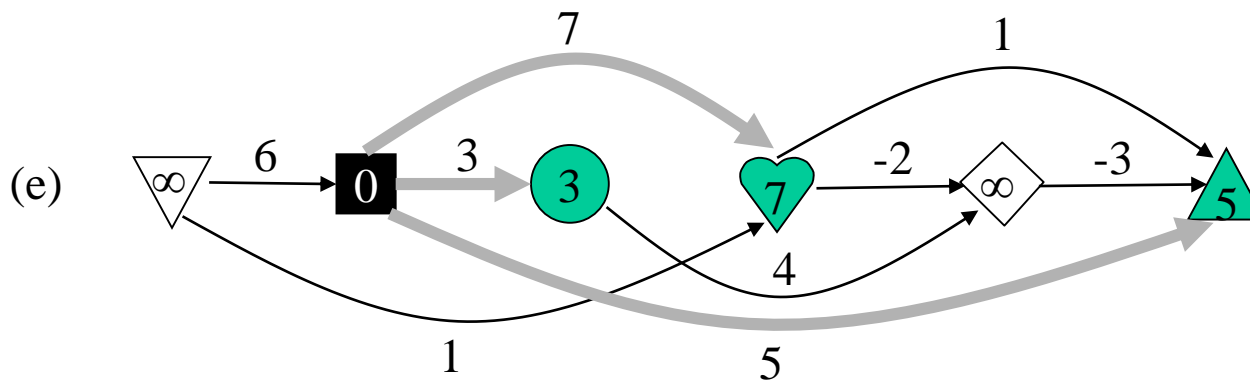
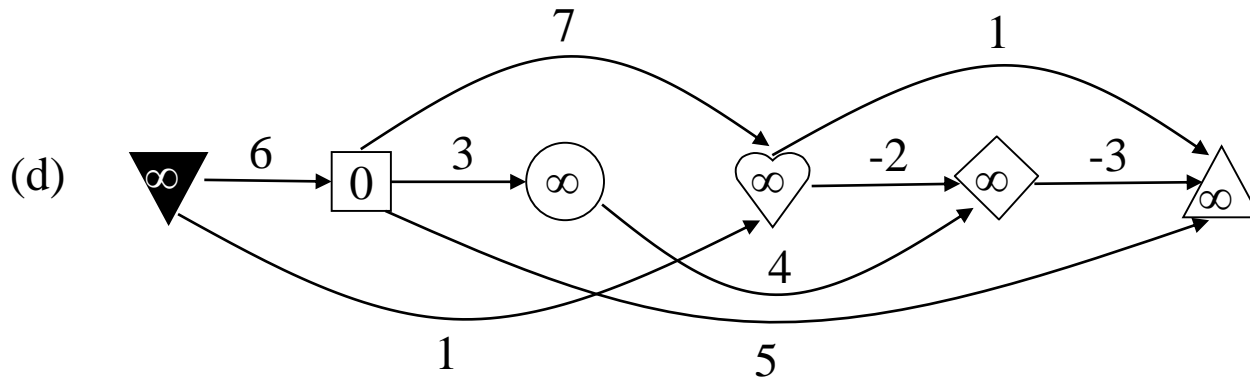


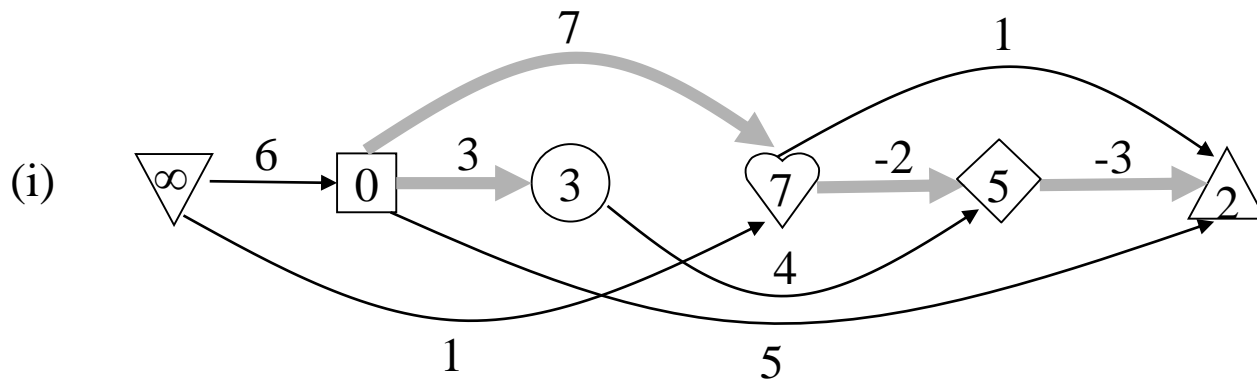
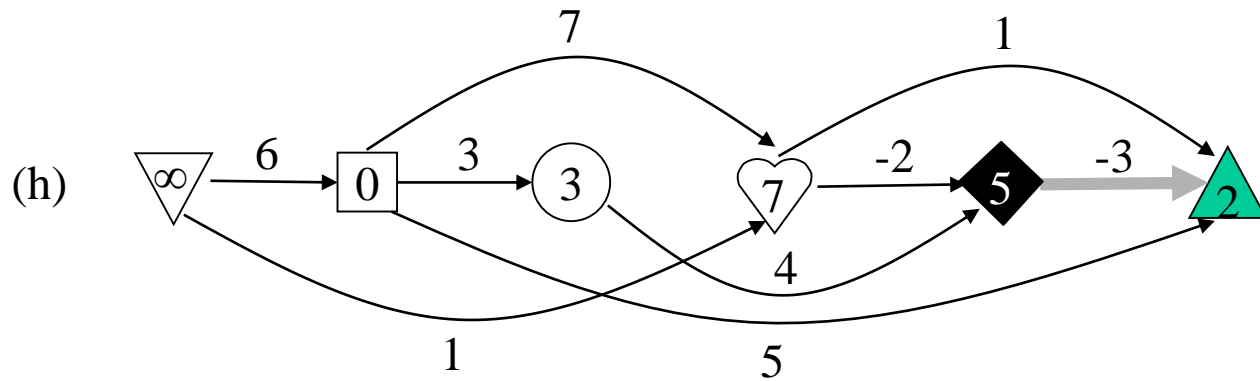
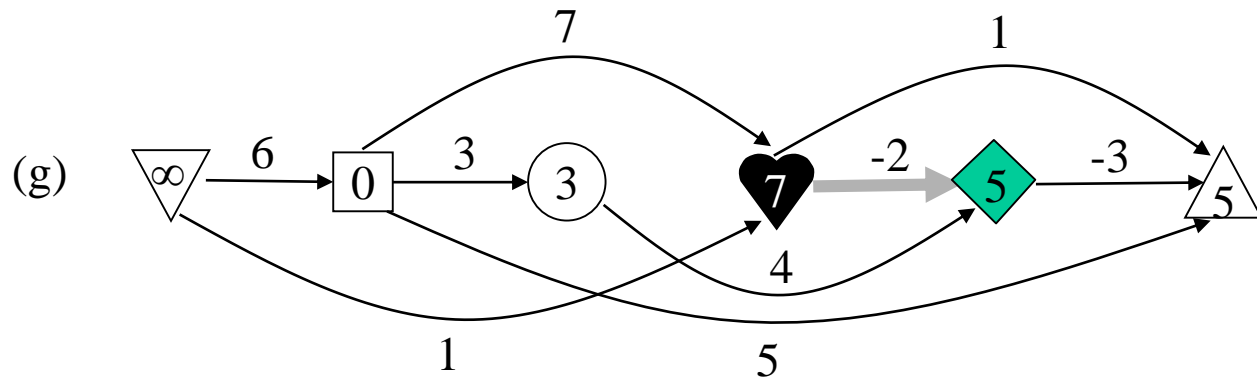
(b)



(c)







Strongly Connected Components

- 강하게 연결됨
 - 그래프의 모든 정점쌍에 대해서 양방향으로 경로가 존재하면 강하게 연결되었다고 한다
 - 강하게 연결된 부분 그래프를 강연결요소 Strongly connected component라 한다
- 임의의 그래프에서 강연결요소들을 찾는다

SCC 구하기 알고리즘

stronglyConnectedComponent(G)

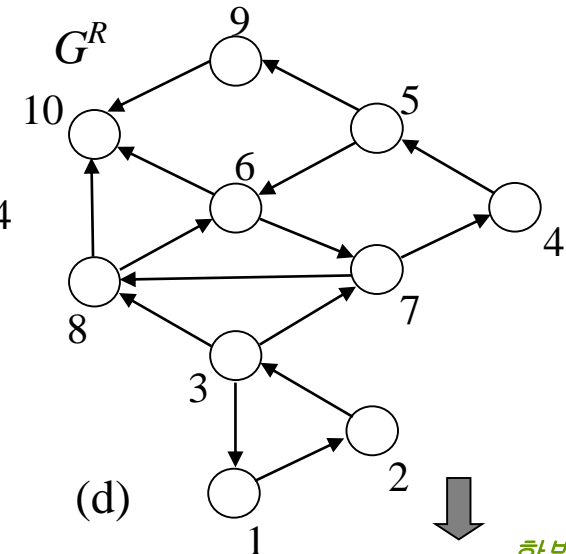
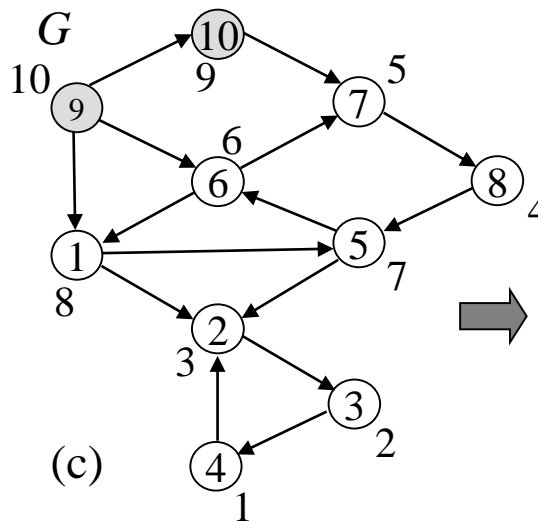
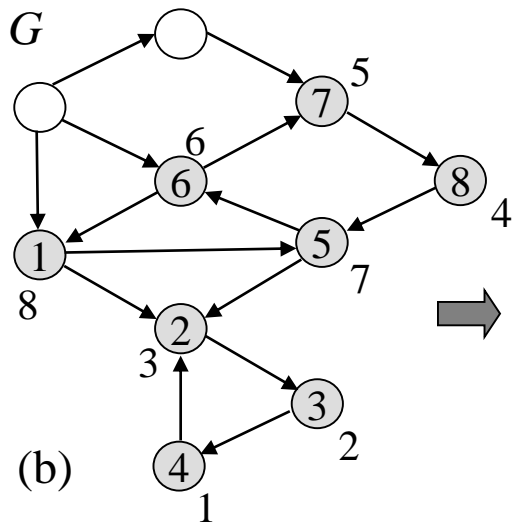
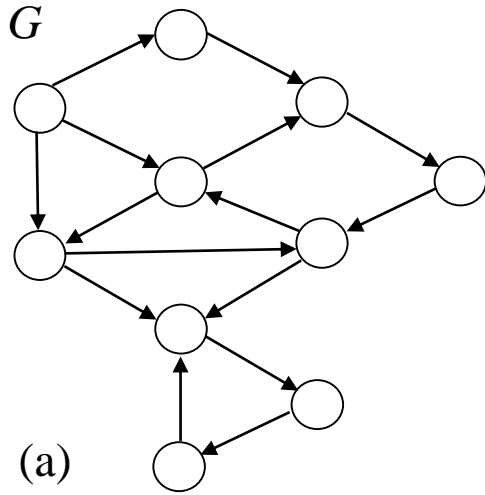
{

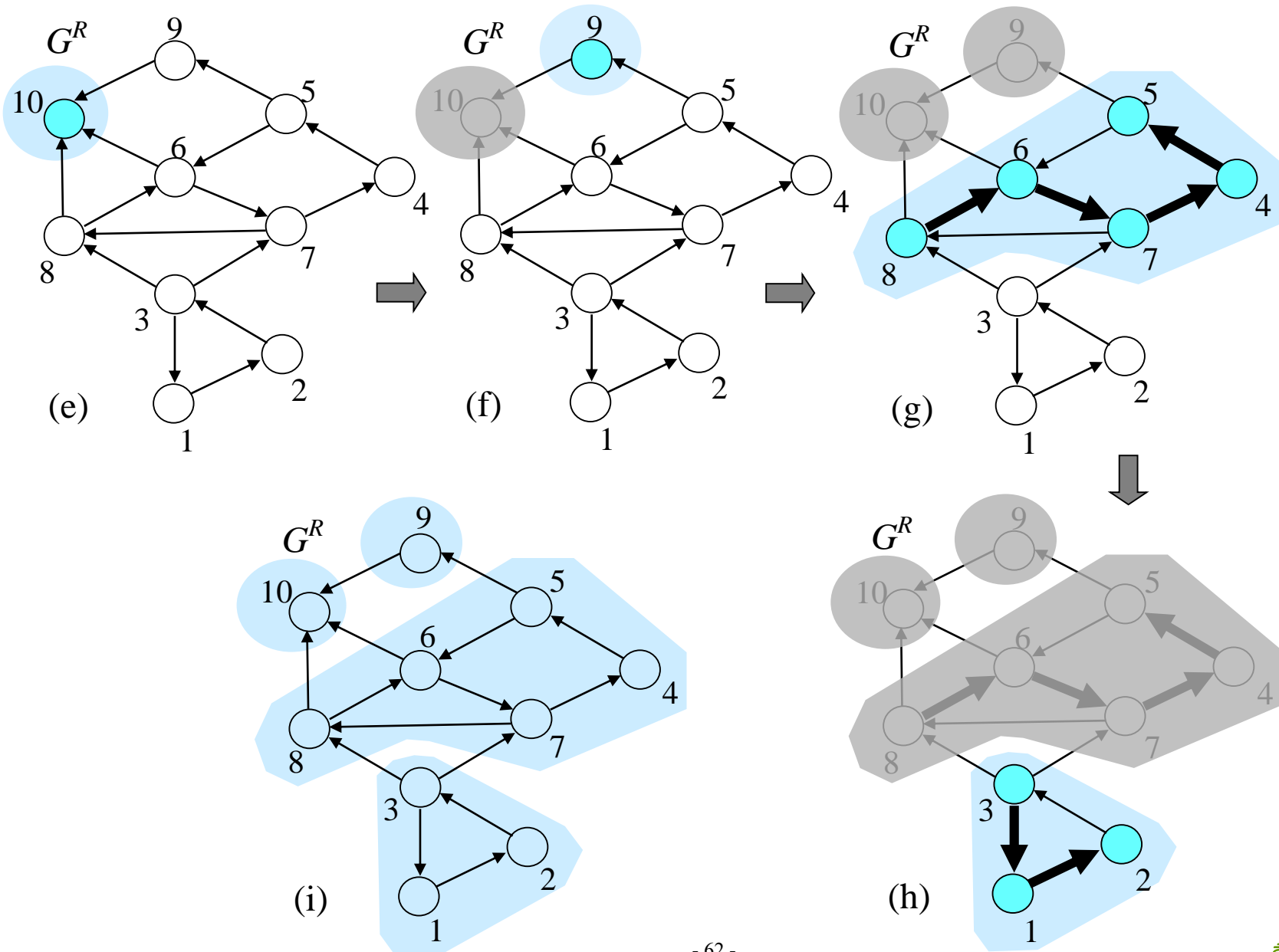
1. 그래프에 대해 DFS를 수행하여 각 정점 v 의 완료시간 f_v 를 계산한다;
2. G^R 을 만든다;
3. DFS를 수행하되 시작점은 1에서 구한 f_v 가 가장 큰 정점으로 잡는다;
4. 3에서 만들어진 분리된 트리들 각각을 강연결요소로 리턴한다;

}

✓수행시간: $\Theta(|V|+|E|)$

stronglyConnectedComponent의 작동 예







Thank you
