

Судина Анастасия ИУУ-12.1

Данное задание №1  
Линейное программирование  
Вариант №14

Дано:

$$\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 - 6x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ 2x_1 + 3x_2 - \quad - 2x_4 \geq 2 \quad (*) \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 4 \end{cases}$$

1) Составить двойственную задачу и решить ее графически;

(В случае, когда исходная задача является задачей минимизации, ее следует привести к стандартной форме двойственной задачи, а двойственную задачу записать в стандартной форме primal.)

Задача (\*) является задачей минимизации и записана в стандартной форме двойственной задачи, поэтому, в соответствии с заданием, запишем двойственную к ней задачу в стандартной форме primal:



$$\begin{cases} g = 2y_1 + 3y_2 \rightarrow \max \\ 2y_1 + 4y_2 \leq 18 \\ 3y_1 + y_2 \leq 4 \\ -5y_2 \leq -6 \\ -2y_1 \leq -1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (**)$$

Будем интерпретировать пары  $(y_1, y_2)$  как точки на плоскости  $Oy_1, y_2$ . Тогда мы в точке, удовлетворяющей ограничениям задачи будем иметь вид:

$$2y_1 + 4y_2 = 18 \Leftrightarrow \frac{y_1}{18/2} + \frac{y_2}{18/4} = 1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{9} + \frac{y_2}{4.5} = 1 \quad (1)$$

$$3y_1 + y_2 = 4 \Leftrightarrow \frac{y_1}{4/3} + \frac{y_2}{4} \quad (2)$$

$$-5y_2 = -6 \Leftrightarrow y_2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow y_2 = 1.2$$

$$-2y_1 = -1 \Leftrightarrow y_1 = 0.5$$

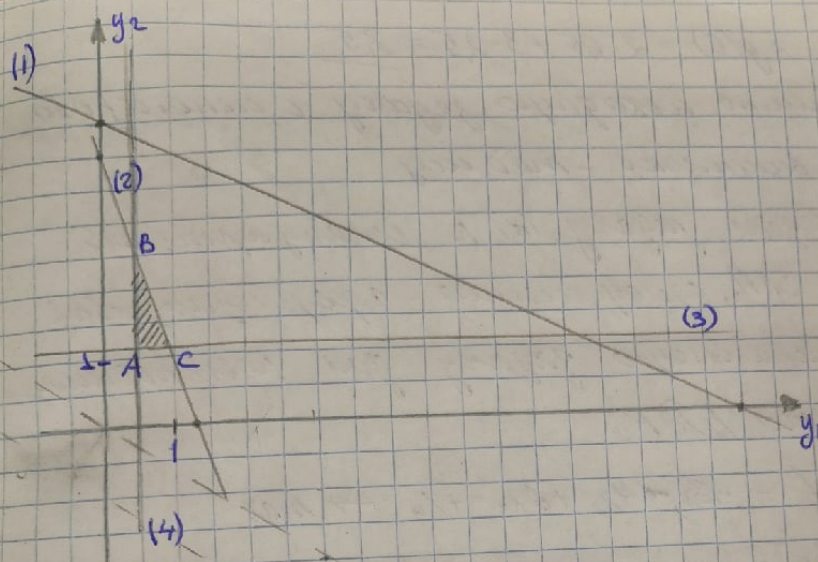
$$g = 2y_1 + 3y_2 \Leftrightarrow g - 2y_1 - 3y_2 = 0$$

Линия пересечения плоскости  $\perp Oy_1, y_2$

$$g = 0 - 2y_1 - 3y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{3}y_1$$

$$\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial y_1} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \vec{j} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$





Перемещая линию уровня целевой функции в направлении град  $g$  до тех пор, пока эта линия имеет общие точки с мн-вом допустимых решений. Последнее доп. решение при этом пересечении будет оптимальным.

В нашем случае это пересечение прямых (2)/(3)

$$C = (2) \cap (3)$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 4 \\ -2y_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.5 + y_2 = 4 \\ y_1 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 2.5 \\ y_1 = 0.5 \end{cases}$$

$$C = (0.5, 1.5)$$



$$g_{\text{опт}} = g(C) = 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 2,5 = \underline{8,5}$$

д) Решить исходную задачу с использованием симплекс-таблицы.

Приведем задачу (\*) к стандартной форме ЗЛП, одновременно сформулировав вспомогательную задачу для построения начального БДР:

$$\begin{cases} f_* = -f = -18x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 - x_5 + y_1 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - x_6 + y_2 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Целевая функция вспомогательной задачи

$$w = -y_1 - y_2 = -2 + 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 - x_5 - 3 + 4x_1 + x_2 - 5x_3$$

$$-x_6 = -5 + 6x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 - x_5 - x_6$$

Целев	Баз	Знач	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$y_2$
1	$y_1$	2	2	3	0	-2	-1	0	1	0
	$y_2$	3	4	1	-5	0	0	-1	0	1
	$-f$	0	-18	-4	6	1	0	0	0	0
	$-w$	5	6	4	-5	-2	-1	-1	0	0



$x_1$  в базисе;  $y_2$  из базиса

номер	баз	знак	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$y_2$	
2	$y_1$	$1/2$	0	$5/2$	$5/2$	-2	-1	$1/2$	1	$-1/2$	$1/5$
	$x_1$	$3/4$	1	$1/4$	$-5/4$	0	0	$-1/4$	0	$1/4$	3
	f	$24/2$	0	$1/2$	$-33/2$	1	0	$-9/2$	0	$9/2$	
	-w	$1/2$	0	$5/2$	$5/2$	-2	-1	$1/2$	0	$-3/2$	

$x_2$  в базисе,  $y_1$  из базиса

номер	баз	знак	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$y_2$	
3	$x_2$	$1/5$	0	1	1	$-4/5$	$-1/5$	$1/5$	$2/5$	$-1/5$	
	$x_1$	$4/10$	1	0	$-3/2$	$1/5$	$1/10$	$-3/10$	$-1/10$	$3/10$	$3/2$
	f	$64/5$	0	0	-14	$4/5$	$1/5$	$-23/5$	$-1/5$	$23/5$	
	-w	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	

Смещение для w оптимальна  $\Rightarrow y_1, y_2 = 0$

$x_2, x_1$  - начальный базис.

$x_1$  в базисе,  $x_1$  из базиса

номер	баз	знак	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
4	$x_2$	3	4	1	-5	0	0	-1	
	$x_4$	$4/2$	5	0	$-15/2$	1	$1/2$	$-3/2$	
	f	$12/2$	-4	0	$-13/2$	0	$-1/2$	$-5/2$	$= -y_{opt}^T$



Строка dual + оптимальная

$$x_{opt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{opt} &= 18 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + -6 \cdot 0 \\ &\quad + -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ &= \frac{11}{2} = 5,5 \end{aligned}$$

Умно

1

3) Решить двойственную задачу с использованием симплекс-метода

Приведем задачу (\*\*) к стандартной форме ЗЛП, одновременно сформулируем вспомогательную задачу для построения начального БДР

$$g = 2y_1 + 3y_2 \rightarrow \max$$

$$2y_1 + 4y_2 + y_3 = 18$$

$$3y_1 + y_2 + y_4 = 4$$

$$-5y_2 - y_5 + z_1 = 6$$

$$2y_1 - y_6 + z_2 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, z_1, z_2 \geq 0$$

Целевая функция вспомогательной

задачи:

$$\begin{aligned} w &= -z_1 - z_2 = -6 + 5y_2 - y_5 - 1 + 2y_1 - y_6 = \\ &= -7 + 2y_1 + 5y_2 - y_5 - y_6 \end{aligned}$$



Умнож	баз	Знач	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$z_1$	$z_2$	
I	$y_3$	18	2	4	1	0	0	0	0	0	$\frac{9}{2}$
	$y_4$	4	3	1	0	1	0	0	0	0	$\frac{4}{3}$
	$z_1$	6	0	5	0	0	-1	0	1	0	$\frac{6}{5}$
	$z_2$	1	2	0	0	0	0	-1	0	1	
	$-g$	0	2	3	0	0	0	0	0	0	
	$-w$	4	2	5	0	0	-1	-1	0	0	

$y_2$  в базисе,  $z_1$  из базиса

Умнож	баз	Знач	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$z_1$	$z_2$	
II	$y_3$	$\frac{66}{5}$	2	0	1	0	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{66}{10}$
	$y_4$	$\frac{14}{5}$	3	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{14}{15}$
	$y_2$	$\frac{6}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{2}$
	$z_2$	1	2	0	0	0	0	-1	0	1	
	$-g$	$-\frac{18}{5}$	2	0	0	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	
	$-w$	1	2	0	0	0	0	-1	-1	0	

$y_1$  в базисе,  $z_2$  из базиса



Умк	Баз	Знач	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$z_1$	$z_2$
3	$y_3$	$\frac{61}{5}$	0	0	1	0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$
	$y_4$	$\frac{13}{10}$	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{2}$
	$y_2$	$\frac{6}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0
	$y_1$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$-y$	$-\frac{23}{5}$	0	0	0	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	-1
	$-w$	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Строка  $y_3$  в оптимальна  
 $y_6$  в базисе,  $y_4$  из базиса

Умк	Баз	Знач	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
4	$y_3$	$\frac{24}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
	$y_6$	$\frac{13}{15}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	1
	$y_2$	$\frac{6}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	0
	$y_1$	$\frac{14}{15}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	0
	$-y$	$-\frac{82}{15}$	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	0

$y_5$  в базисе,  $y_6$  из базиса



Итер	Баз	Знач	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
5	$y_3$	4	0	0	1	-4	0	-5
	$y_5$	$\frac{13}{2}$	0	0	0	5	1	$\frac{15}{2}$
	$y_2$	$\frac{5}{2}$	0	1	0	1	0	$\frac{3}{2}$
	$y_1$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
	$-g$	$-\frac{17}{2}$	0	0	0	-3	0	$-\frac{11}{2}$

$= -x_{opt}^T$

Итерация для  $g$  оптимальна

$$y_{opt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_{opt} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 13 \cdot \frac{5}{2} = \frac{17}{2} = 8,5$$

н) Сравнить найденные решения  
 конечное оптимальное решение  
 primal задачи должно равняться  
 конечному оптимальному решению  
 двойственной

$$g_{pr-opt} = f_{opt} = g_{opt} \Rightarrow \text{теорема доказана}$$

Почему это, контрадикторно при го-



политическая переменная в строке для  
целевой функции в опт симплекс-таб-  
лице исходной задачи совпадают с  
 $-y_{opt}^T$ . Аналогично, коэффициенты при  
дополнительных переменных в строке  
для целевой функции в опт симплекс-  
таблице двойственной задачи остаются  
 $-x_{opt}^T$ .

Таким образом, все найденное решение  
равно