Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 3

Тема Цепи Маркова

Студент Сушина А.Д.

Группа ИУ7-71б

Оценка (баллы) ________________

Преподаватель Рудаков И.В.

Москва.
2020 г

Задание на лабораторную работу

Необходимо для сложной системы S, имеющей не более 10 состояний, определить среднее время нахождения системы в предельных состояниях, т. е. при установившимся режиме работы.

Теоретическая часть

Случайный процесс называется марковским, если он обладает слудующим свойством: для каждого момента t0 вероятность любого состояния системы в будущем (при t>t0) зависит только от ее состояния в настоящем (при t = t0) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние. Вероятностью i-го состояния называется вероятность pi(t) того, что в момент t система будет находится в состоянии Si. Для любого момента времени t сумма вероятностей всех состоянии равна единице.

$$\sum_{i=0}^{N} p_i(t)=1 \quad (1)\ ,$$

где N - количество состояний.

Стационарное распределение цепи Маркова — это такое распределение вероятности, которое не меняется с течением времени. Если цепь является положительной возвратной (то есть в ней существует стационарное распределение) и апериодической, тогда, какими бы ни были исходные вероятности, распределение вероятностей цепи сходится при стремлении интервалов времени к бесконечности: говорят, что цепь имеет **предельное распределение**, что является ничем иным, как стационарным распределением.

Предельная вероятность состояния показывает **среднее время пребывания системы** в этом состоянии. Например, если предельная вероятность состояния e0 равна 0,5,то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии e0.

Для нахождения таких вероятностей используются уравнения Колмагорова. Они строятся по следующим принципам: в левой части каждого из уравнений стоит производная вероятности i-ого состояния; в правой части содержится столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием; если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак «минус», если в состояние — знак «плюс»; каждый член равен произведению интенсивности, соответствующей данной стрелке, и вероятности того состояния, из которого выходит стрелка.

Так как предельные вероятности постоянны, их производные равны нулю. Если в уравнениях Колмагорова приравнять производные к нулю, то получим систему уравнений, описывающих стационарный режим. Также для поиска решений необходимо добавить уравнение нормировки.

Получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} -(\lambda_{11}+\ldots+\lambda_{1n})\,p1+\lambda_{21}\,p_2+\ldots+\lambda_{n1}\,p_n=0 \\ \lambda_{12}\,p_1-(\lambda_{21}+\ldots+\lambda_{2n})\,p2+\ldots+\lambda_{n2}\,p_n=0 \\ \ldots \\ \lambda_{1n}\,p_1+\lambda_{2n}\,p_2+\ldots-(\lambda_{n1}+\ldots+\lambda_{nn})\,p_n=0 \\ p_1+p_2+\ldots+p_n=1 \end{cases} \quad (2)$$

Код программы

Код функции для решения системы уравнений представлен на листинге 1.

Листинг 1.

```
from numpy import linalg

def get_Kolmogorov_coeffs(matrix):
    n = len(matrix)

    return [
        [matrix[j][i] if j != i else -sum(matrix[i]) for j in range(n)]
        if i != (n - 1) else [1 for i in range(n)]
        for i in range(n)
        ]

def get_limit_probabilities(matrix):
    coeffs = get_Kolmogorov_coeffs(matrix)
    return linalg.solve(coeffs, [0 if i != (len(matrix) - 1) else 1 for i in range(len(matrix))]).tolist()

def calculate(matrix):
    limit_p = [round(x, 4) for x in get_limit_probabilities(matrix)]
    return limit_p
```

Результаты работы

Результаты работы представлены на рисунках 1, 2 и 3.

```
Введите количество состояний системы: 3

Матрица:
+--------+--------+--------+
|   s1   |   s2   |   s3   |
+--------+--------+--------+
|  0.0   | 0.559  | 0.2709 |
| 0.5025 |  0.0   | 0.0507 |
| 0.7526 | 0.2594 |  0.0   |
+--------+--------+--------+

Результат:
+-----------+-----------------------+
| Состояния | Предельные вероятности |
+-----------+-----------------------+
|     s1    |         0.4017        |
|     s2    |         0.4673        |
|     s3    |         0.1309        |
+-----------+-----------------------+
```

Рис 1. Результат работы для системы с тремя состояниями.

```
Введите количество состояний системы: 5

Матрица:
+--------+--------+--------+--------+--------+
|   s1   |   s2   |   s3   |   s4   |   s5   |
+--------+--------+--------+--------+--------+
|  0.0   | 0.9013 | 0.1638 | 0.6809 | 0.7857 |
| 0.0606 |  0.0   | 0.4221 | 0.0406 | 0.7021 |
| 0.0685 | 0.8816 |  0.0   | 0.1458 | 0.8564 |
|  0.68  | 0.0241 | 0.8815 |  0.0   | 0.2201 |
|  0.04  | 0.4557 | 0.6303 | 0.8752 |  0.0   |
+--------+--------+--------+--------+--------+

Результат:
+-----------+-----------------------+
| Состояния | Предельные вероятности |
+-----------+-----------------------+
|     s1    |         0.062         |
|     s2    |         0.3016        |
|     s3    |         0.2248        |
|     s4    |         0.1669        |
|     s5    |         0.2447        |
+-----------+-----------------------+
```

Рис 2. Результат работы для системы с пятью состояниями.

```
Введите количество состояний системы: 7

Матрица:
+--------+--------+--------+--------+--------+--------+--------+
|   s1   |   s2   |   s3   |   s4   |   s5   |   s6   |   s7   |
+--------+--------+--------+--------+--------+--------+--------+
|  0.0   | 0.834  | 0.7548 | 0.7049 | 0.8664 | 0.7237 | 0.4598 |
| 0.0287 |  0.0   | 0.8203 | 0.6737 | 0.901  | 0.2455 | 0.8017 |
| 0.4252 | 0.5881 |  0.0   | 0.894  | 0.7854 | 0.9498 | 0.3844 |
| 0.5773 | 0.7326 | 0.0871 |  0.0   | 0.1861 | 0.5587 | 0.2572 |
| 0.2009 | 0.9477 | 0.2429 | 0.6926 |  0.0   | 0.9164 | 0.5169 |
| 0.6856 | 0.4953 | 0.1367 | 0.5977 | 0.0738 |  0.0   | 0.8217 |
| 0.1306 | 0.1487 | 0.0698 | 0.206  | 0.1161 | 0.2447 |  0.0   |
+--------+--------+--------+--------+--------+--------+--------+

Результат:
+-----------+-----------------------+
| Состояния | Предельные вероятности |
+-----------+-----------------------+
|     s1    |         0.065         |
|     s2    |         0.1181        |
|     s3    |         0.056         |
|     s4    |         0.1638        |
|     s5    |         0.0827        |
|     s6    |         0.1382        |
|     s7    |         0.3762        |
+-----------+-----------------------+
```

Рис 3. Результат работы для системы с 7-ю состояниями.