

The background features a dark blue gradient with faint, stylized celestial patterns. On the left, there are concentric circular arcs and radial lines, some with numerical labels like 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210, 220, 230, 240, 250, and 260. On the right, there are circular paths with arrows indicating direction, suggesting orbital or rotational motion.

ДОПОЛНЕНИЕ К АСТРОСТАТИСТИКЕ

(ЛЕКЦИЯ 7. МОДУЛЬ «АСТРОФИЗИКА». ВЕСНА 2022. ВШЭ)

АНТОН БИРЮКОВ, К.Ф.-М.Н.

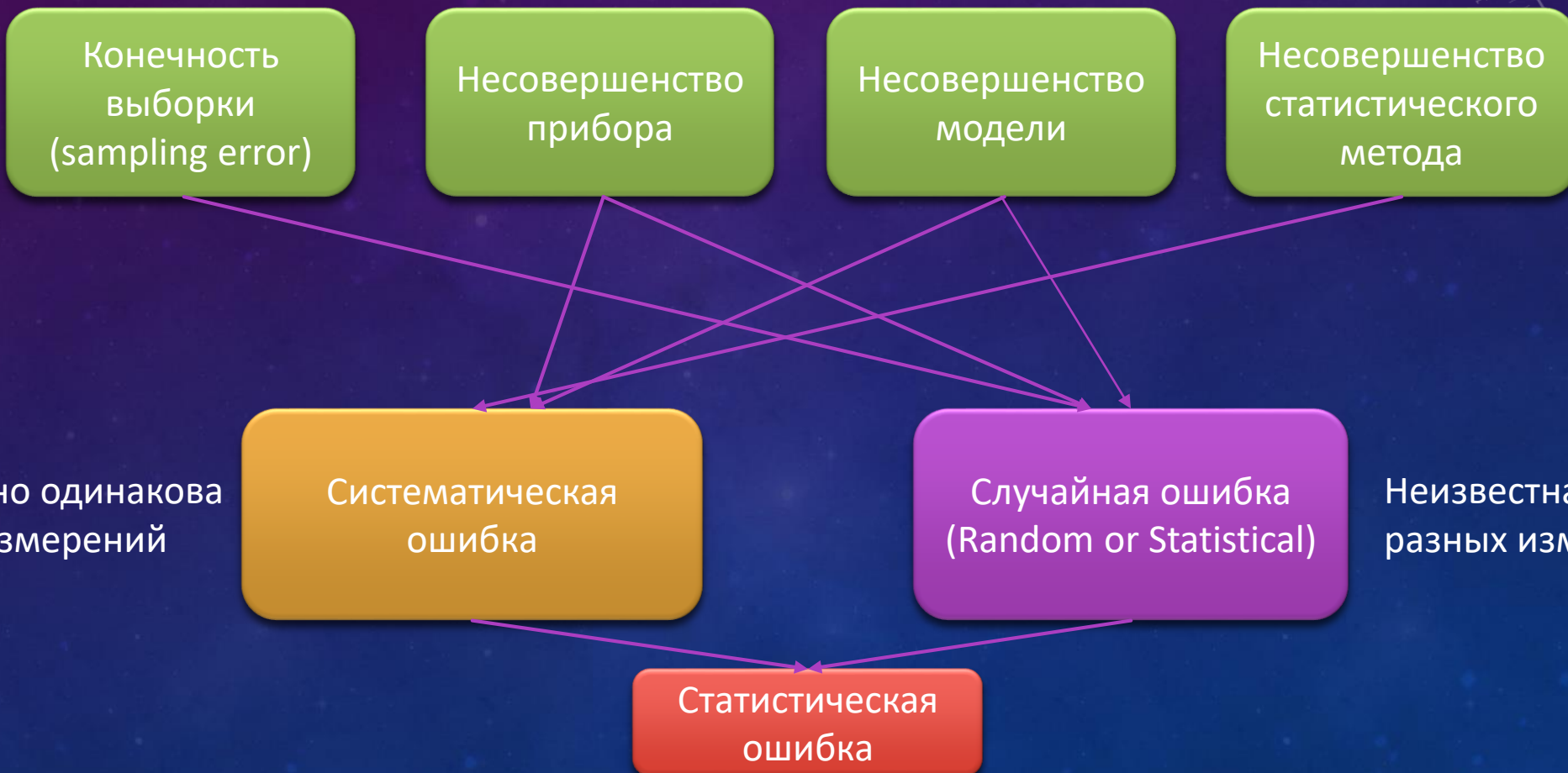
ТРИ ТЕЗИСА

- Температура фотосферы Солнца равна 5770 К
- В классической (ньютоновой) механике сила взаимного притяжения между двумя точечными массами описывается кулоновским потенциалом: $\phi \propto \frac{1}{r}$
- Скорость света в вакууме равна 299 792 458 метров в секунду.

ТРИ ТЕЗИСА-2

- Параллакс GAIA для источника #5957660191302614528 $\pi = -273 \mu\text{as} \pm 767 \mu\text{as}$
 $\pm 0.46???$
- Параметр Хаббла на текущую эпоху по свойствам реликтового фона $H_0 = 67.74 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$
- Элементарный заряд в СИ $e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ А} \cdot \text{с}$ точно.

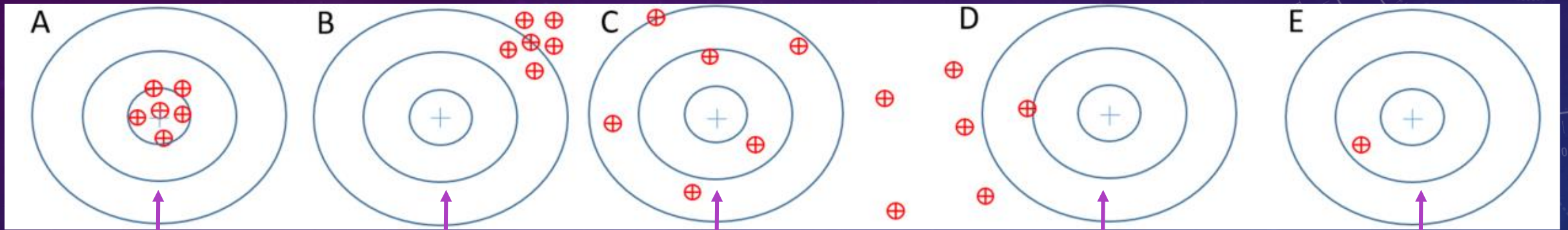
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОШИБКА



Неизвестна, но одинакова для разных измерений

Неизвестна, и разная для разных измерений

СЛУЧАЙНЫЕ И СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ



Маленькая случ.
Маленькая сист.

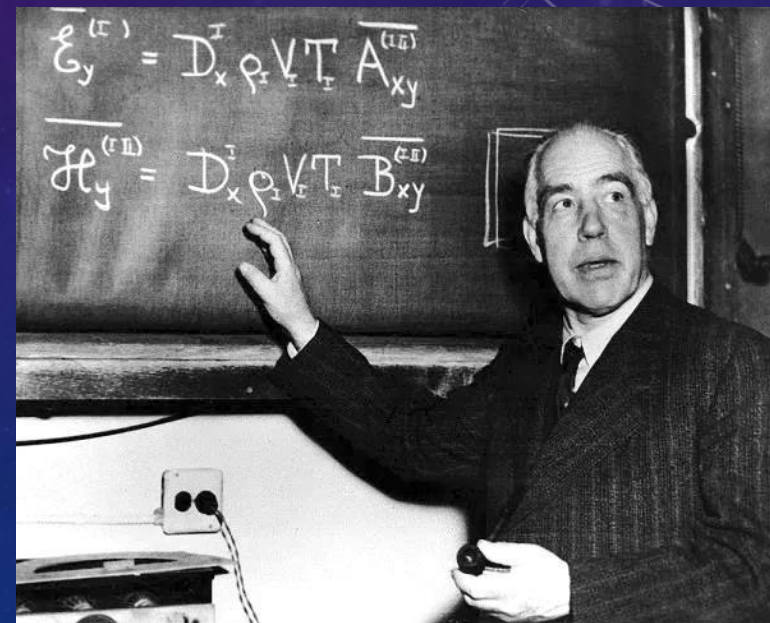
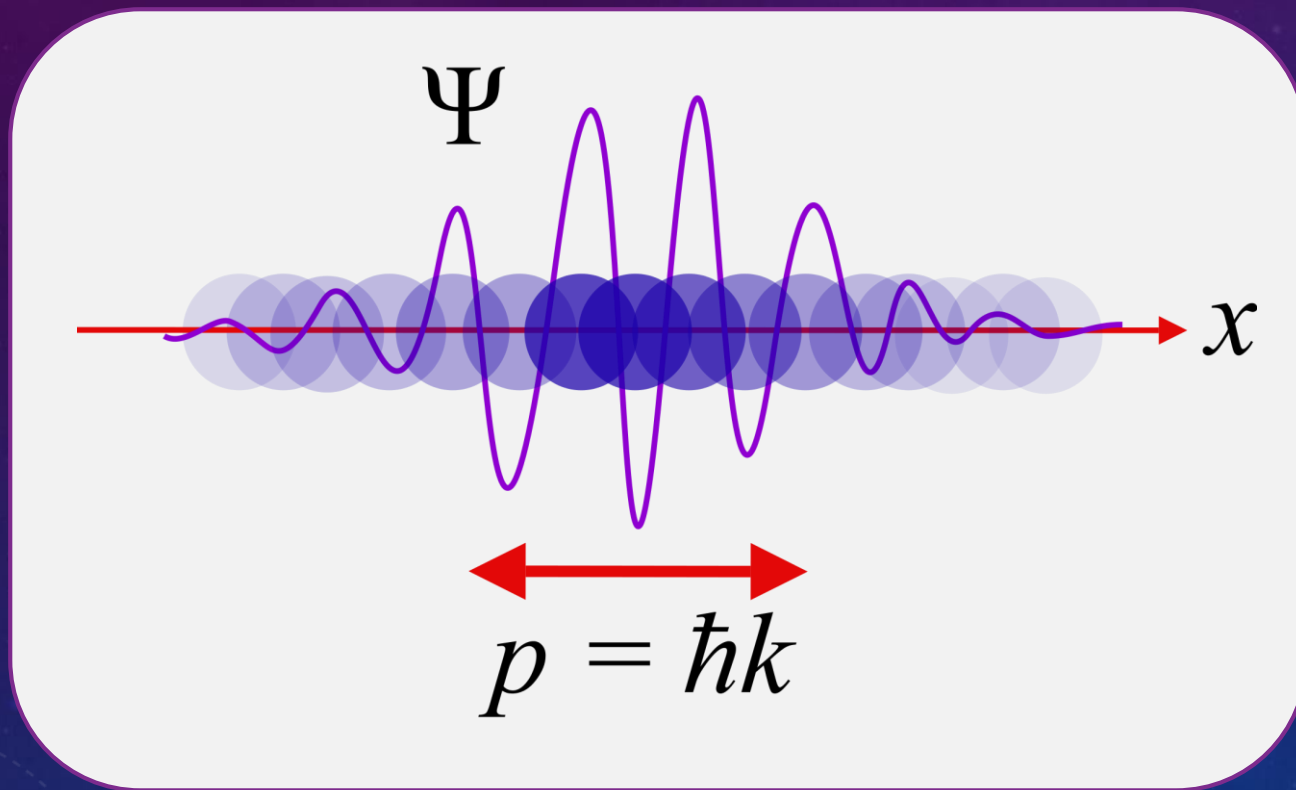
Маленькая случ.
Большая сист.

Большая случ.
Маленькая сист.

Большая случ.
Большая сист.

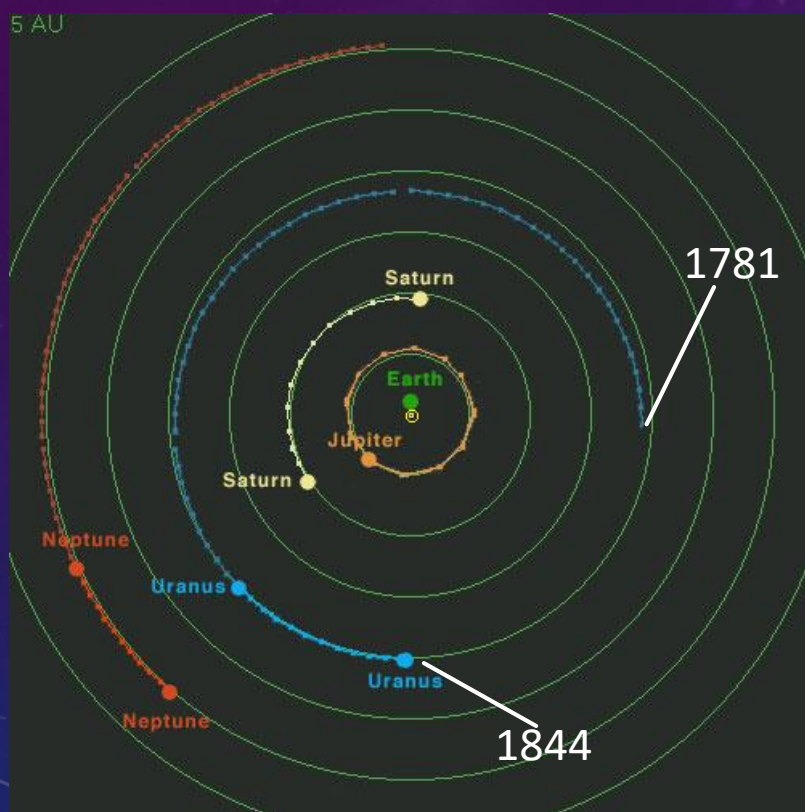
«Поток = один
мезон за сезон»

ПРИНЦИП ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ ВЕЗДЕ!

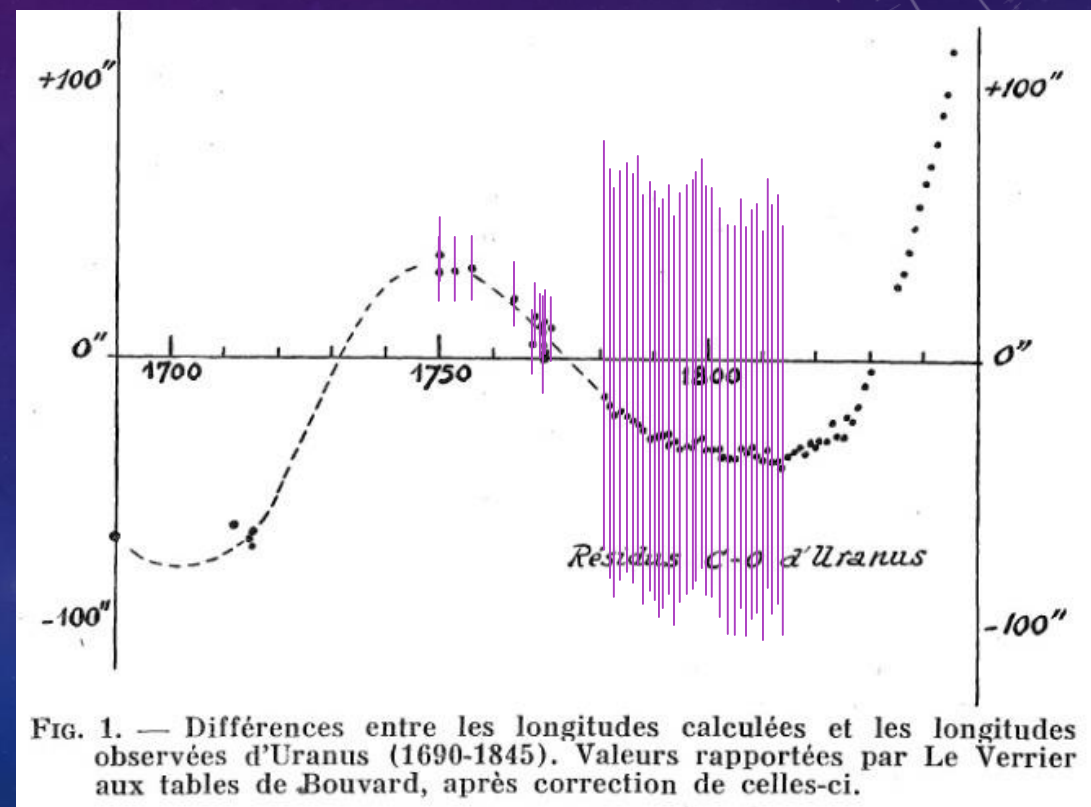


Нильс Бор (1885-1962)

ЧТО ЗДЕСЬ НЕ ТАК?

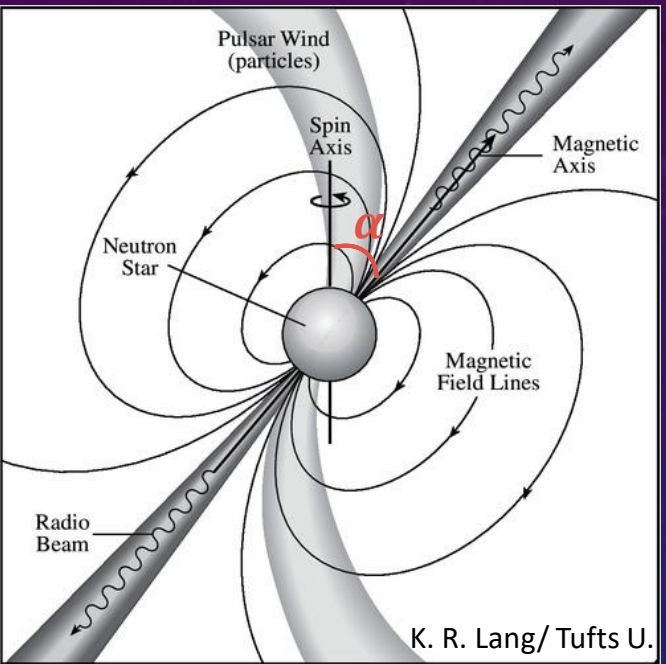


<http://faculty.humanities.uci.edu/bjbecker/exploringthecosmos/lecture12.html>



Danjon 1946, C&T, 62, 369

ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ



Магнитный угол
нейтронной звезды –
угол между осью
вращения и магнитным
моментом.

Table 1. Beam parameters for cone-dominated pulsars.

PSR	<i>P</i> (s)	2Δ <i>φ</i> (°)	2Δ <i>ψ</i> (°)	(<i>dψ/dφ</i>) _{<i>m</i>}	β ₉₀ (°)	ρ ₉₀ (°)	2Δ <i>ψ_p</i> (°)	β _{<i>n</i>}	α (°)	β (°)
0031-07	0.943	36.0	20.0	-0.5	—	—	—	—	—	—
0105+65	1.284	17.0	60.0	-6.0	9.6	12.8	83.1	0.75	27.9	4.5
0136+57	0.272	12.0	70.0	5.3	10.9	12.4	58.0	0.88	53.7	8.7
0148-06	1.465	40.0	125.0	7.4	7.8	21.4	136.9	0.36	15.5	2.1
0149-16	0.833	13.0	150.0	30.0	1.9	6.8	147.2	0.28	90.0	1.9

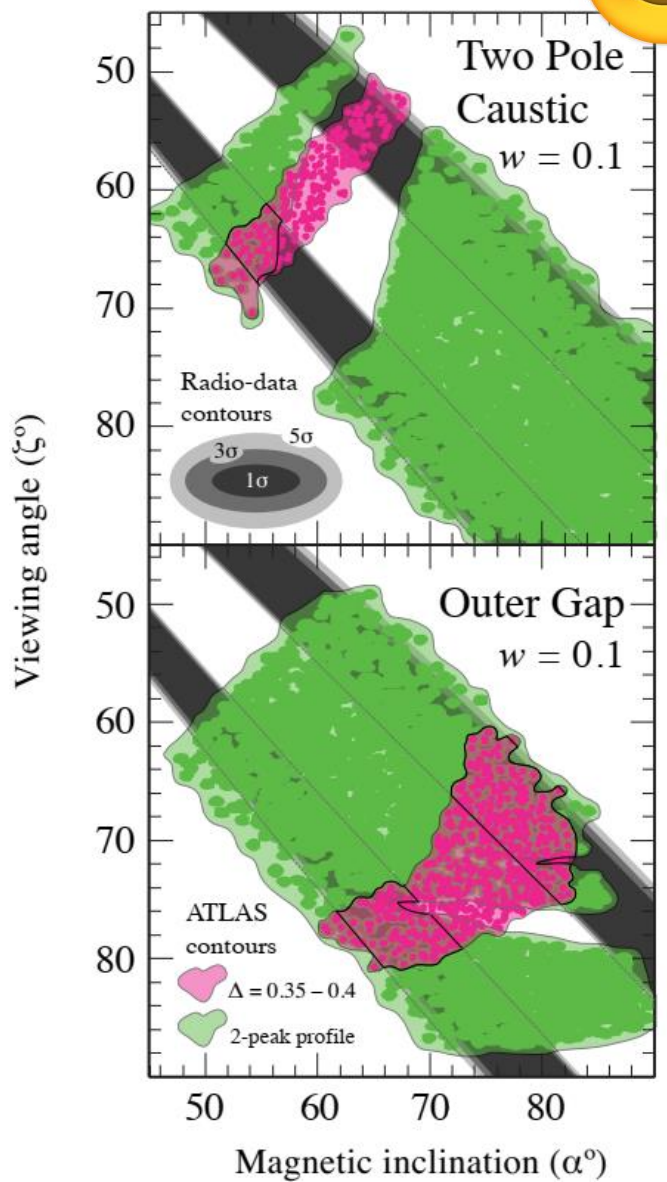
Lyne & Manchester 1988, MNRAS, 234, 477

Table 5. Model parameters from the RVM fit to the observed position-angle variations

Parameter	Value ^a
Assumed parameters:	
Orbit inclination <i>i</i>	73°
Precession rate Ω _{<i>p</i>}	1°36 yr ⁻¹
RVM reference phase φ ₀	0.0
Reference time for precession	MJD 53000.0
Derived parameters:	
Spin-orbit misalignment angle δ	93° (-9°, +16°)
Precession angle Φ ₀	175°5 (-2°8, +1°8)
Offset in PA Δφ ₀	-118.7 ± 0.2
Magnetic inclination α	160° (-16°, +8°)

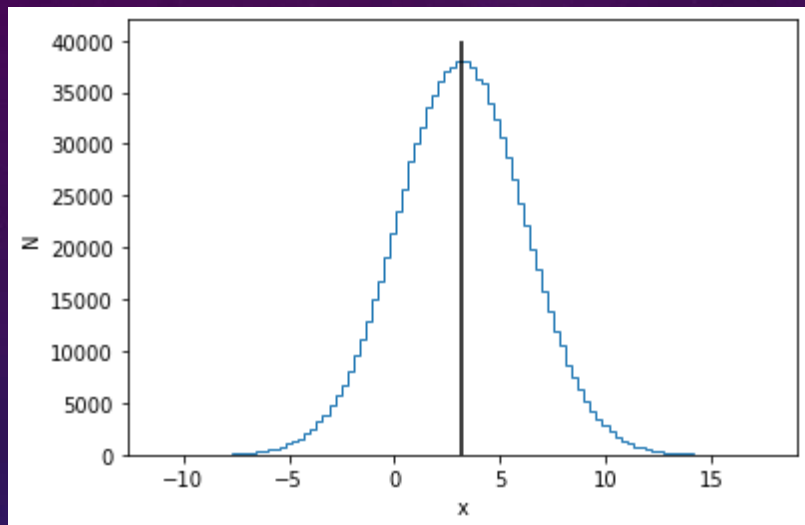
^aMost probable value and 68% confidence limits.

Manchester et al., arXiv:1001.1483



arXiv:1012.4658

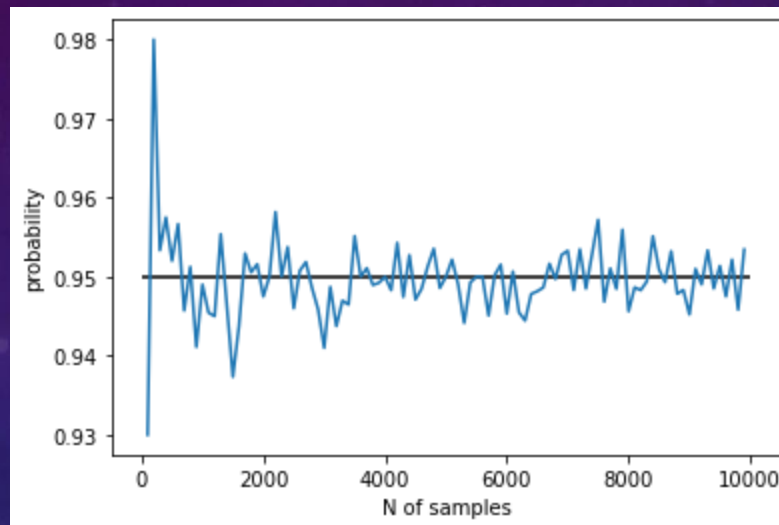
ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ (CONFIDENCE)



$$x \sim \text{normal}(\pi, 2.0)$$

$$N_{\text{gen}} = 10^6$$

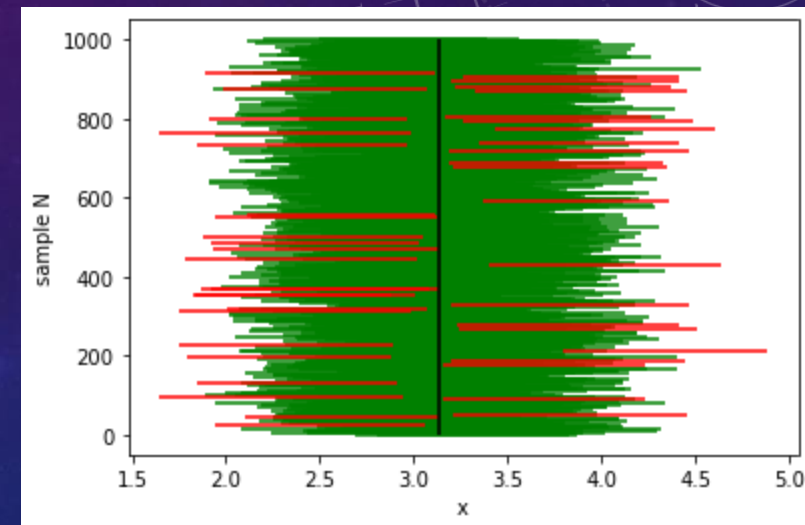
$$n = 100$$



$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

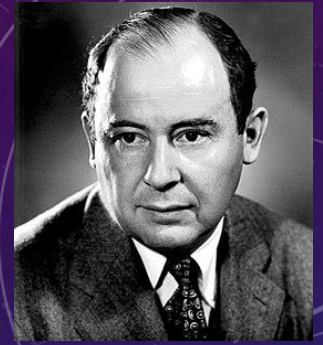
$$p(\pi \in m - 2s \dots m + 2s) = ?$$



1000 доверительных интервалов,
построенных на независимых
выборках по 100 элементов.

≈ 95% включают π , ≈ 5% нет

Джон фон Нейман
(1903-1957)



УРОВЕНЬ ЗНАЧИМОСТИ α

- НЕ означает, что истинное значение параметра лежит внутри интервала $[a; b]$ с вероятностью α
- НЕ означает долю экспериментов, в которых параметр лежит в интервале $[a; b]$
- **Уровень значимости – это доля доверительных интервалов, которые могут быть построены в рамках эксперимента на независимых выборках и содержащих истинное значение параметра.**



ВІСЕР2: ВИХРЕВАЯ МОДА ПОЛЯРИЗАЦИИ

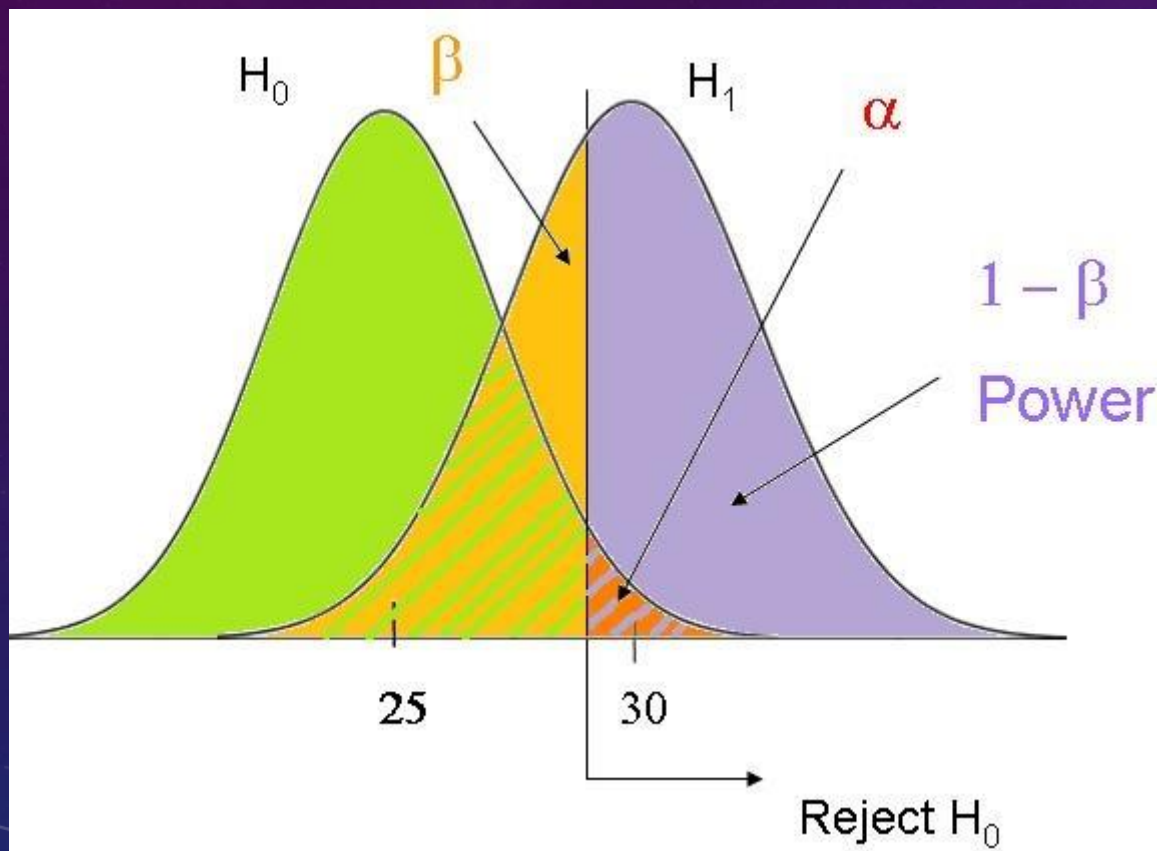


arXiv:1403.3985

at 1.7σ . The observed B -mode power spectrum is well fit by a lensed- Λ CDM + tensor theoretical model with **tensor-to-scalar ratio $r = 0.20^{+0.07}_{-0.05}$, with $r = 0$ disfavored at 7.0σ** . Accounting for the contribution of foreground dust will shift this value downward by an amount which will be better constrained with upcoming datasets.



ТЕСТИРОВАНИЕ ГИПОТЕЗ



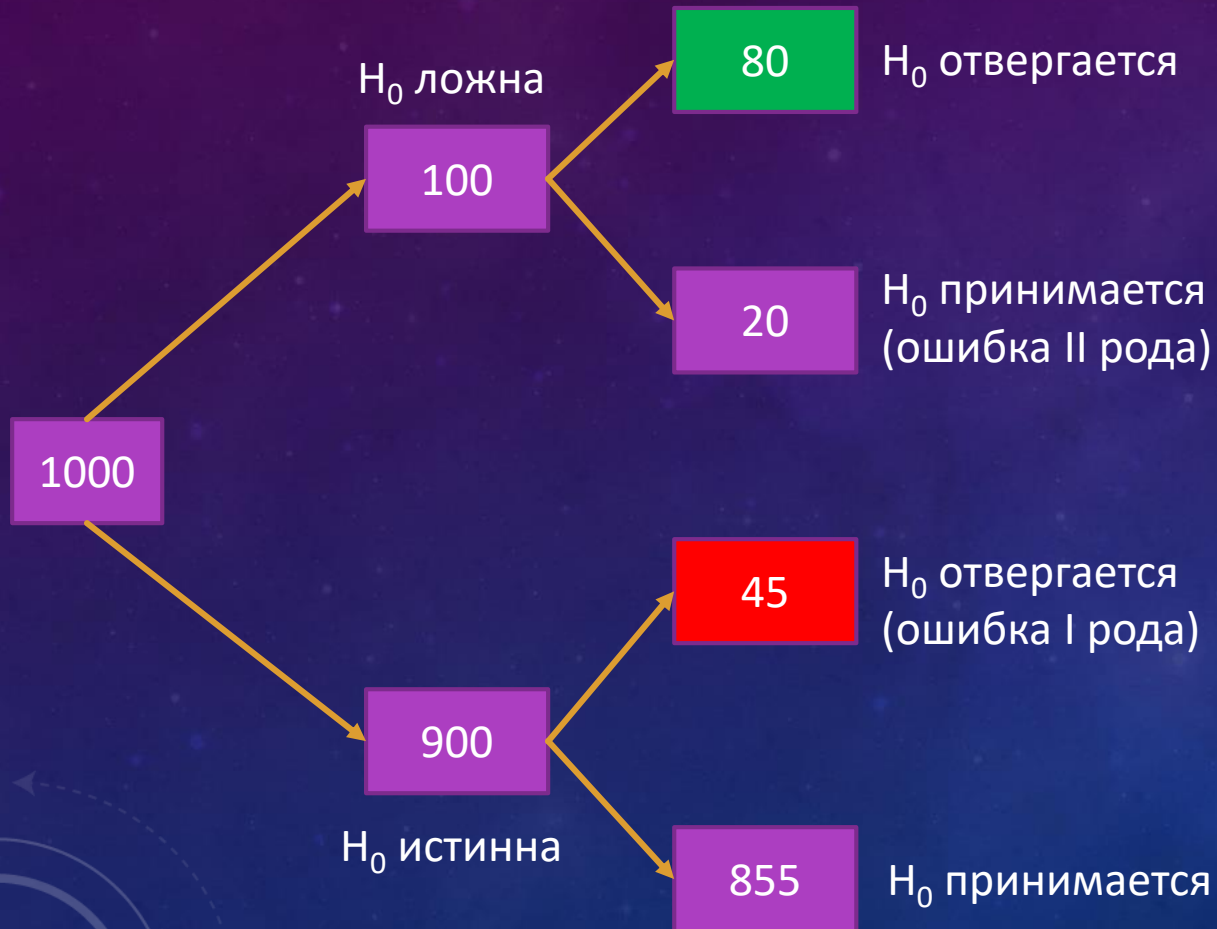
<https://www.theanalysisfactor.com/confusing-statistical-terms-1-alpha-and-beta/>

$1 - \alpha$ = вероятность отвергнуть верную нулевую гипотезу (совершить ошибку I рода)

β = вероятность принять неверную нулевую гипотезу (совершить ошибку II рода)

	Принимаем H_0	Отвергаем H_0
H_0 истинна	«Уровень значимости» (p-значение) $p = 1 - \alpha$	Ошибка I рода $p = \alpha$
H_0 ложна	Ошибка II рода $p = \beta$	«Мощность критерия» $p = 1 - \beta$

КРИЗИС ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ?



Джон Иоаннидис
(р. 1965)

- Пусть гипотезы проверяются на уровне значимости 5%, мощность критерия 80%
- 45 из 125 «открытий» -- ложноположительные...

Essay

Why Most Published Research Findings Are False

John P. A. Ioannidis

<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1182327/>

P-VALUE И ТОЧНЫЙ ТЕСТ ФИШЕРА



Рональд Фишер
(1890 – 1962)

n.	P = .99.	.98.	.95.	.90.	.80.	.70.
1	.000157	.000628	.00393	.0158	.0642	.148
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508

	.50.	.30.	.20.	.10.	.05.	.02.	.01.
1	.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.024	6.635
2	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.879	9.210
3	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

For larger values of n , the expression $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}$ may be used as a normal deviate with unit standard error.

Бин	P1	P2	Всего
1	x1	y1	x1 + y1
2	x2	y2	x2 + y2
Всего:	x1+x2	y1+y2	N

$$p = \frac{(x_1 + x_2)! (y_1 + y_2)! (x_1 + y_1)! (x_2 + y_2)!}{N! x_1! y_1! x_2! y_2!}$$

Совместная вероятность двух независимых выборок из одной генеральной совокупности описывается гипергеометрическим распределением.

СМЫСЛ P-VALUE

1. Р-значения указывают на то, насколько несовместимы данные с конкретной статистической моделью.
2. Р-значение НЕ измеряет вероятность того, что изучаемая гипотеза верна или что данные получены исключительно по случайности (примерно про то же и п.6.)
3. Научный вывод НЕ может быть сделан *только* на основе р-значения.
4. Публикуя р-значение, необходимо публиковать *всё*, что имело отношение к его расчёту.
5. Р-значение НЕ измеряет величину эффекта.
6. Само по себе, р-значение не может служить количественной характеристикой качества модели или гипотезы.

ПРИМЕНИМОСТЬ МЕТОДОВ

- Непараметрическая статистика Колмогорова-Смирнова (KS-test) чувствительна к разности средних в распределениях, но слабо чувствительна к разности дисперсий.
- Для корректного использования теста χ^2 при сравнении распределений, в каждом бине должно быть не менее 10 событий.
- Для корректного расчёта значимости малого превышения сигнала над шумом лучше пользоваться не нормальным, а t -распределением, т.к., вообще говоря $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s\sqrt{n}}$
- Решая задачу максимума правдоподобия для малых данных, нужно максимизировать не квадратичный функционал, основанный на нормальном распределении, а более сложным, основанной на распределении Пуассона $l(\lambda, x) = -n\lambda - \sum_i \ln x_i! + \ln \lambda \sum_i x_i$

СЛУЧАЙ КЕПЛЕР-452В

$$\frac{\sigma_P}{P} \sim 10^{-6} !!!$$

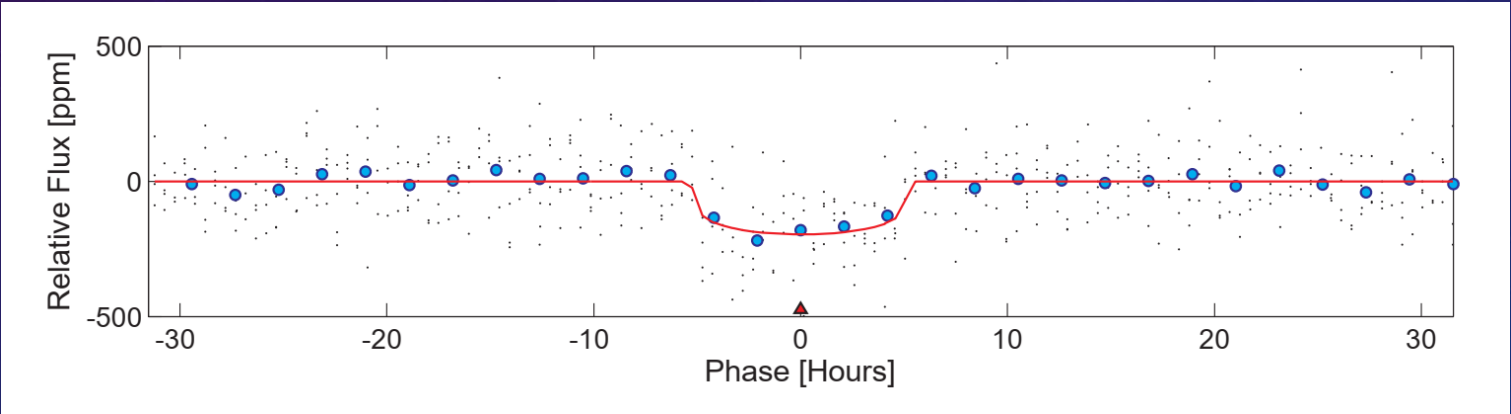
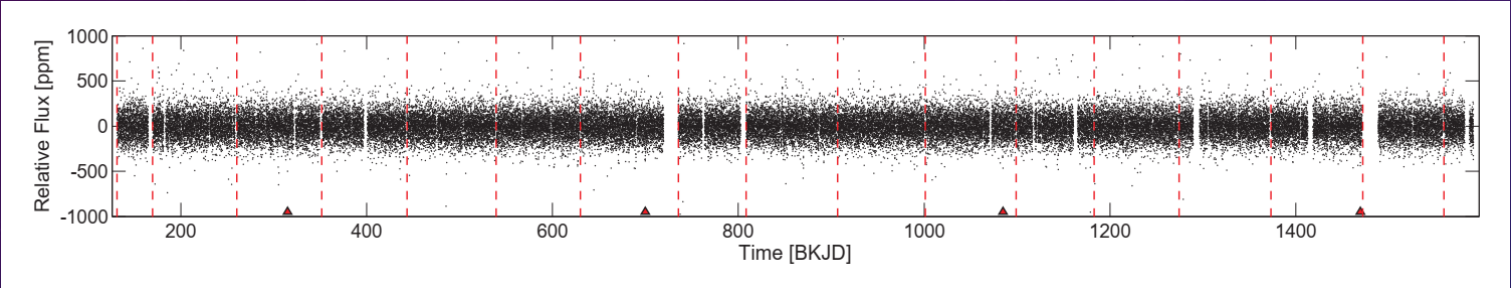
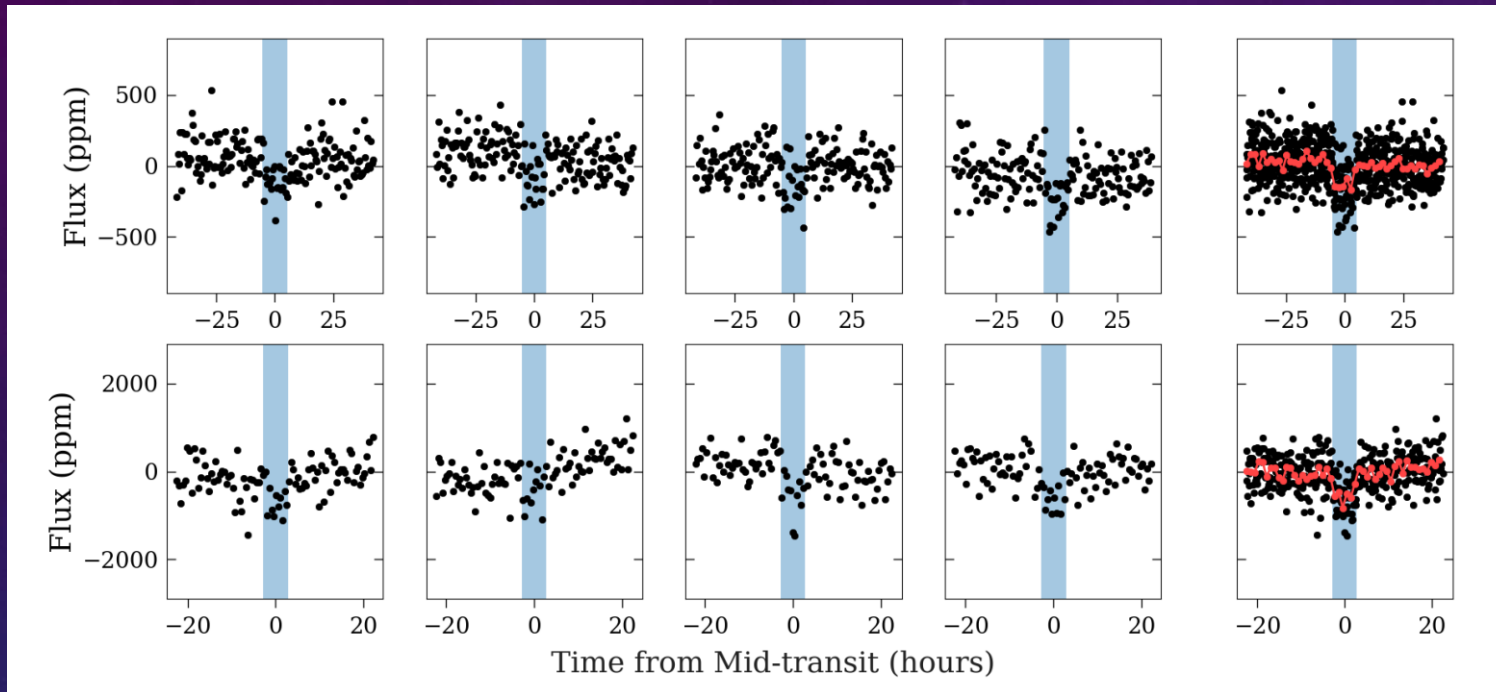


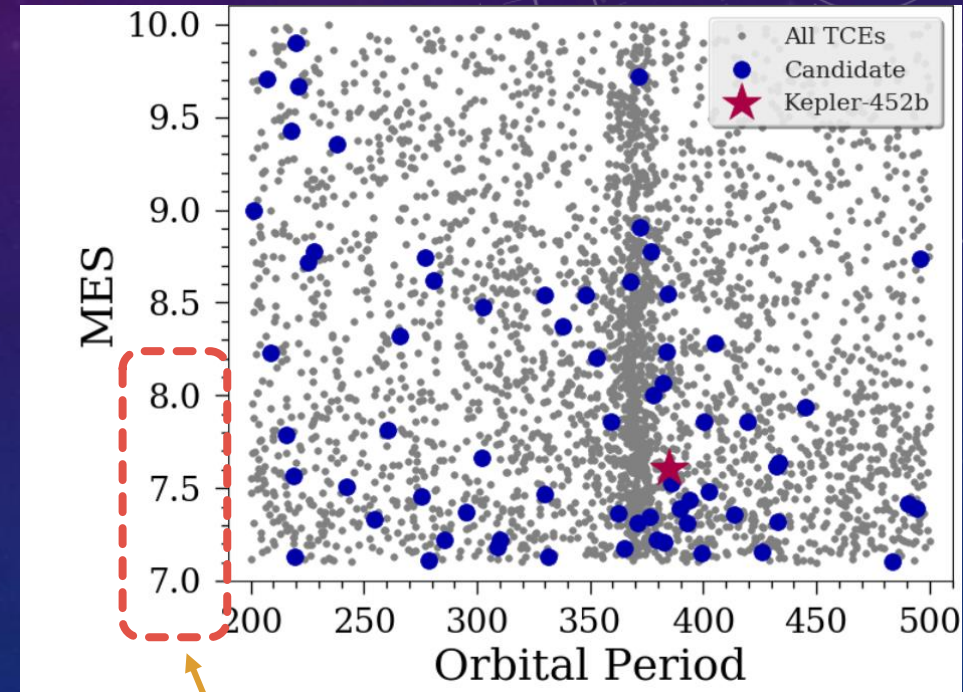
Table 3. Planet Parameters for Kepler-452b

Parameter	Value	Notes
Transit and orbital parameters		
Orbital period P (day)	$384.843^{+0.007}_{-0.012}$	a, b
Epoch (BJD - 2454833)	$314.985^{+0.015}_{-0.019}$	a, b
Scaled planet radius R_P/R_*	$0.0128^{+0.0013}_{-0.0006}$	a, b
Impact parameter $b \equiv a \cos i / R_*$	$0.69^{+0.16}_{-0.45}$	a, b
Orbital inclination i (deg)	$89.806^{+0.134}_{-0.049}$	a
Transit depth T_{dep} (ppm)	199^{+18}_{-21}	a
Transit duration T_{dur} (hr)	$10.63^{+0.53}_{-0.60}$	a
Eccentricity $e \cos(\omega)$	$0.03^{+0.75}_{-0.39}$	a, b
Eccentricity $e \sin(\omega)$	$-0.02^{+0.31}_{-0.31}$	a, b
Planetary parameters		
Radius R_P (R_\oplus)	$1.63^{+0.23}_{-0.20}$	a
Orbital semimajor axis a (AU)	$1.046^{+0.019}_{-0.015}$	a
Equilibrium temperature T_{equ} (K)	265^{+15}_{-13}	c
Insolation relative to Earth	$1.10^{+0.29}_{-0.22}$	d

СЛУЧАЙ КЕПЛЕР-452В

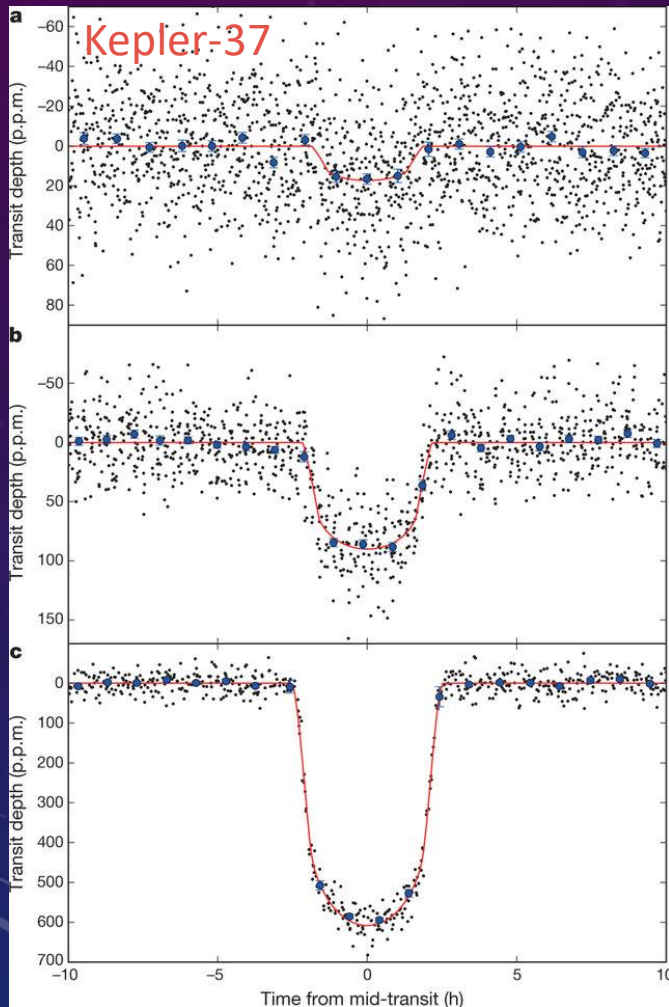


arXiv:1803.11307



отношение сигнал-шум¹⁸

ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ-ШУМ



SNR = 13

SNR = 49

SNR = 282

SNR
0.5

1.0

2.0

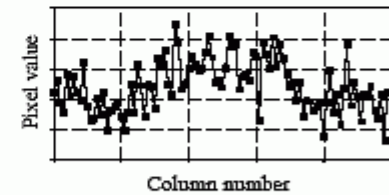
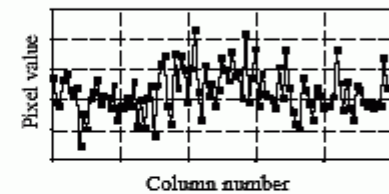
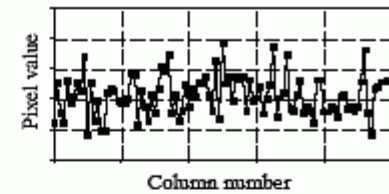


FIGURE 25-8

Minimum detectable SNR. An object is visible in an image only if its contrast is large enough to overcome the random image noise. In this example, the three squares have SNRs of 2.0, 1.0 and 0.5 (where the SNR is defined as the contrast of the object divided by the standard deviation of the noise).

linear fits. To quantify the relation between the flux in magnitudes and color variations, we calculated the linear Pearson's correlation coefficient between them. The coefficients for Night 2, Night 3 and Night 4 are 0.35, 0.50 and 0.70, respectively, at the confidence level of more than 99.99%. This indicates that the relation can be taken as blue-when-bright trend which appears less, moderately and strongly pronounced during Night 2, Night 3 and Night 4, respectively. Similar observations were made by [46] in their study of the source on intranight timescales.

https://www.mdpi.com/2075-4434/6/1/2/htm#fig_body_display_galaxies-06-00002-f004

КОРРЕЛЯЦИЯ

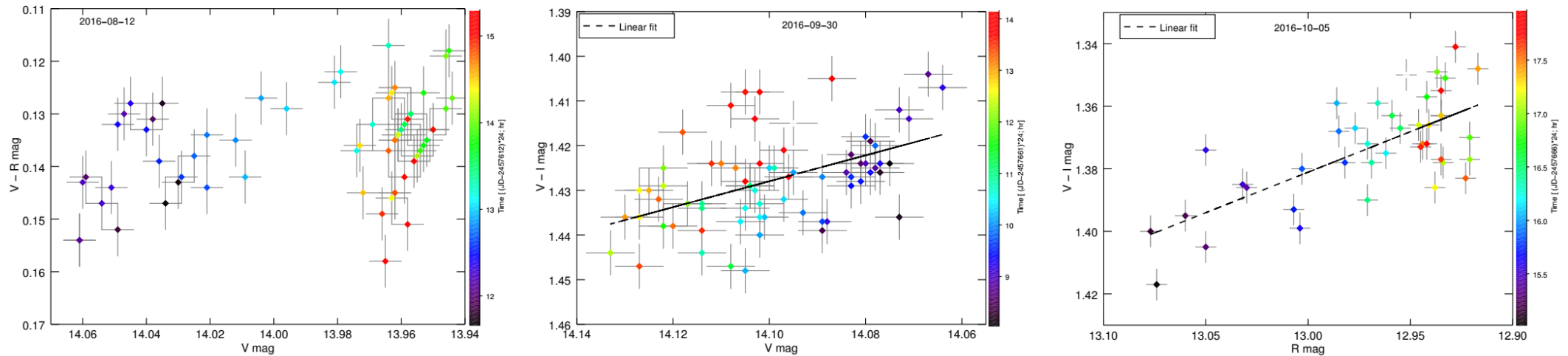
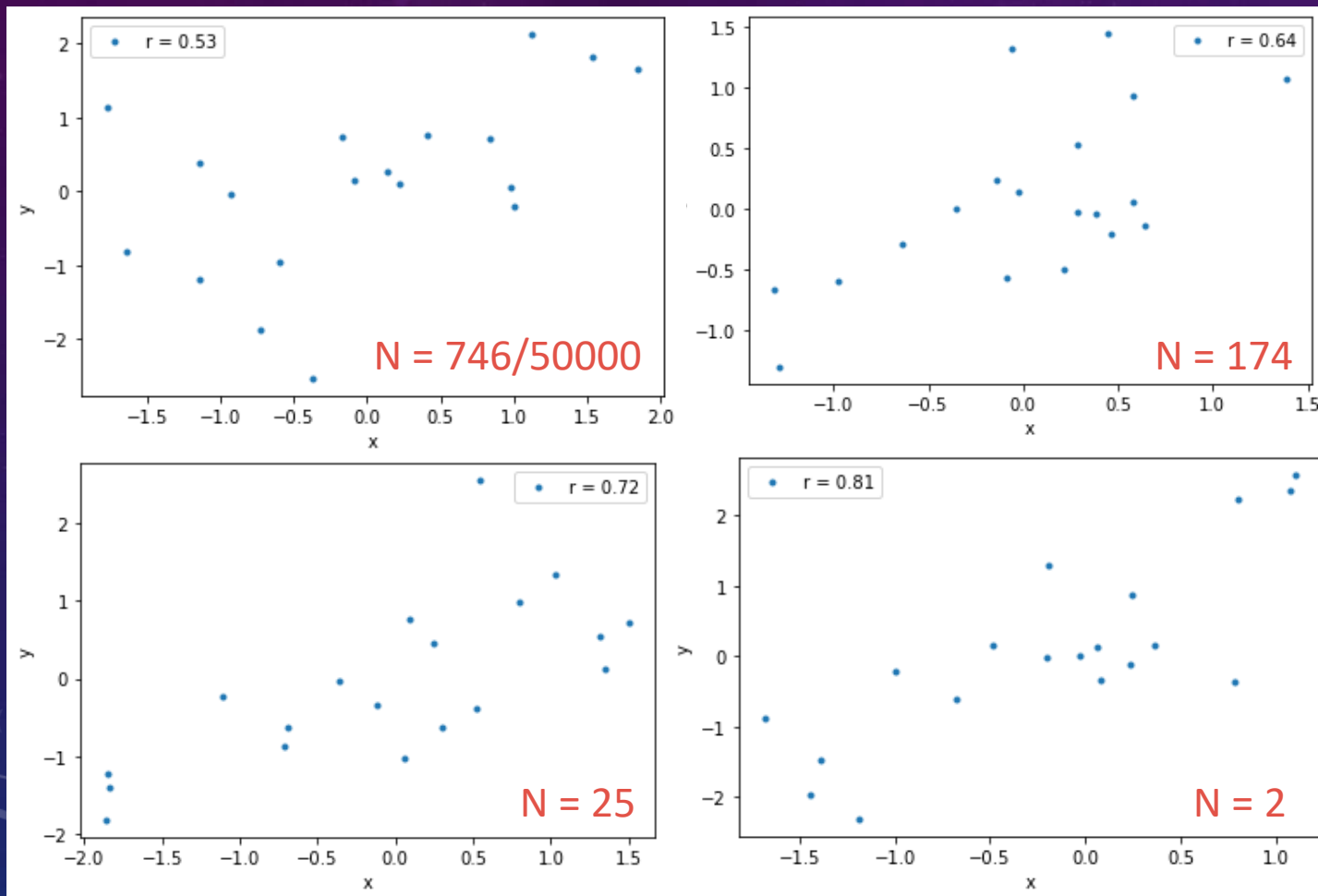


Figure 4. Intranight optical color magnitude relation the blazar BL Lac. The symbols are color coded to represent time.

КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ



Квази
генеральная
совокупность:

$$N_{\text{gen}} = 10^6$$

Выборки
элементов по:

$$n = 20$$

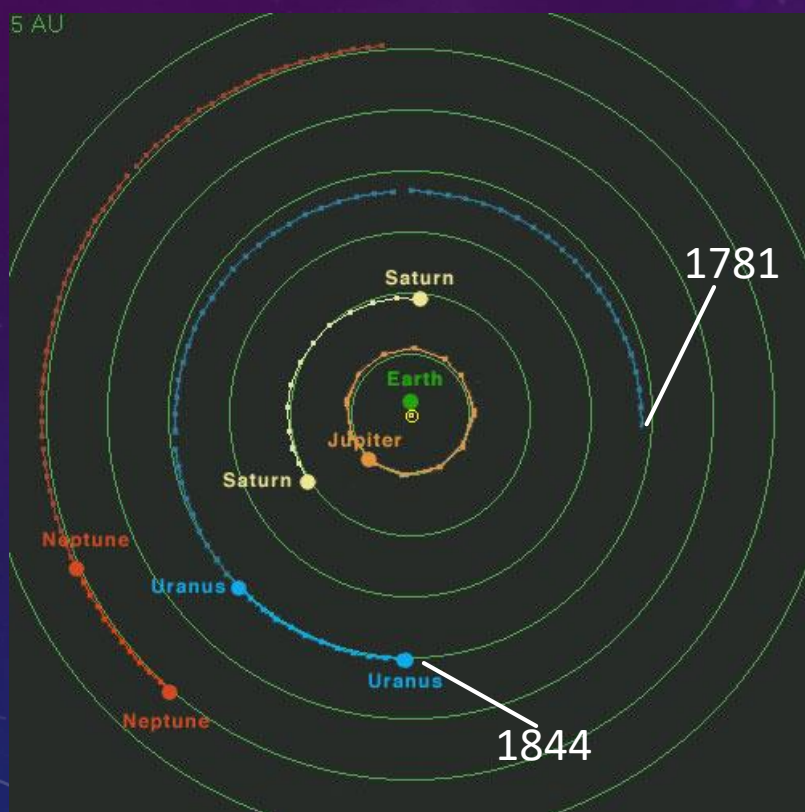
$$r = 0$$

$$x \sim \text{normal}(0, 1)$$

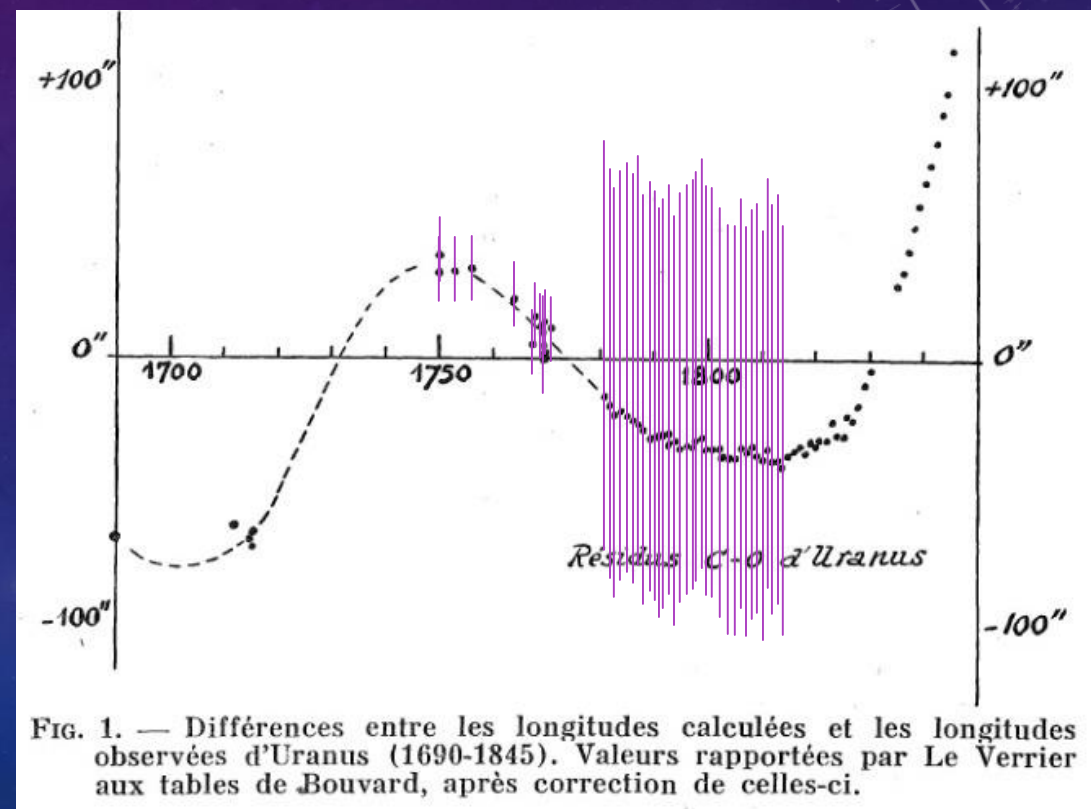
$$y \sim \text{normal}(0, 1)$$

Проблема множественности
сравнений!

ЧТО ЗДЕСЬ НЕ ТАК?



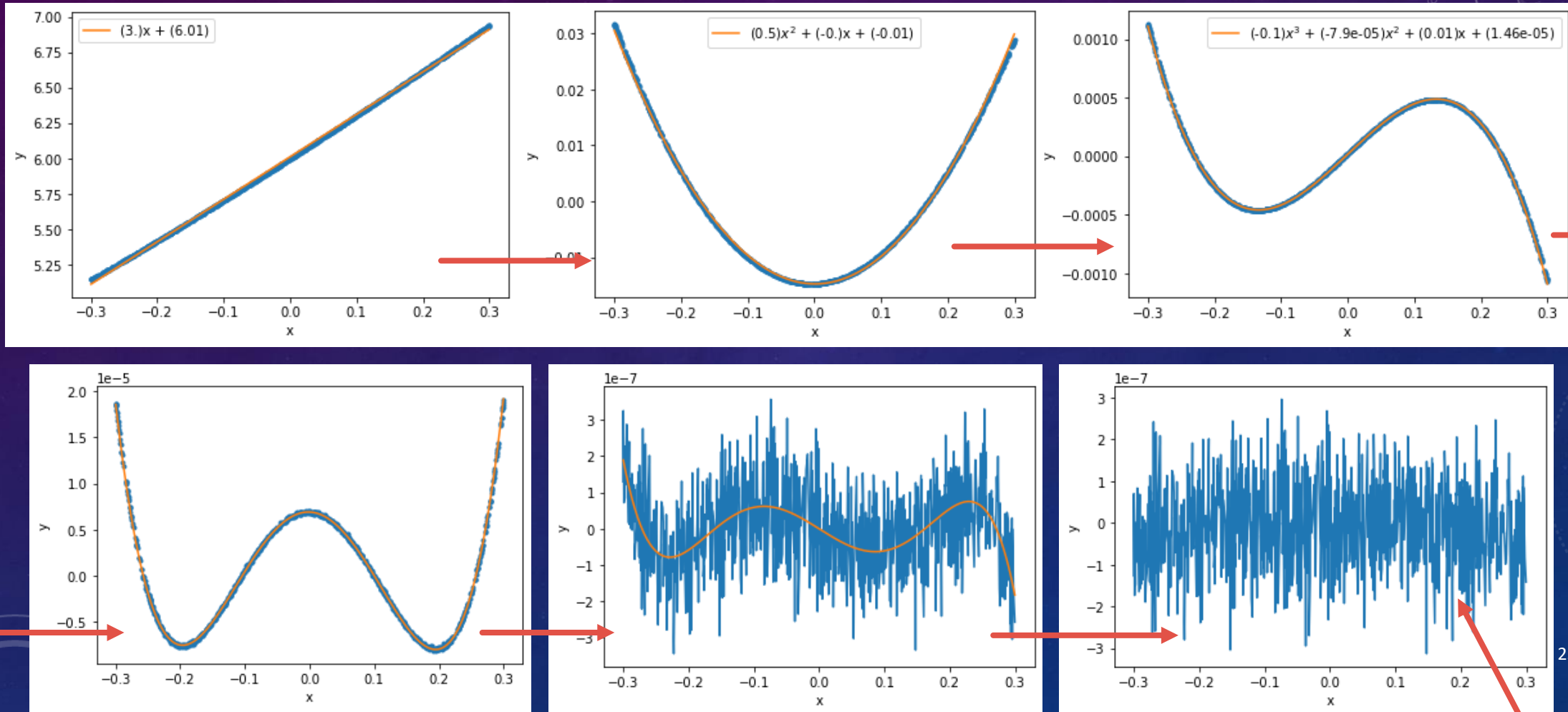
<http://faculty.humanities.uci.edu/bjbecker/exploringthecosmos/lecture12.html>



Danjon 1946, C&T, 62, 369

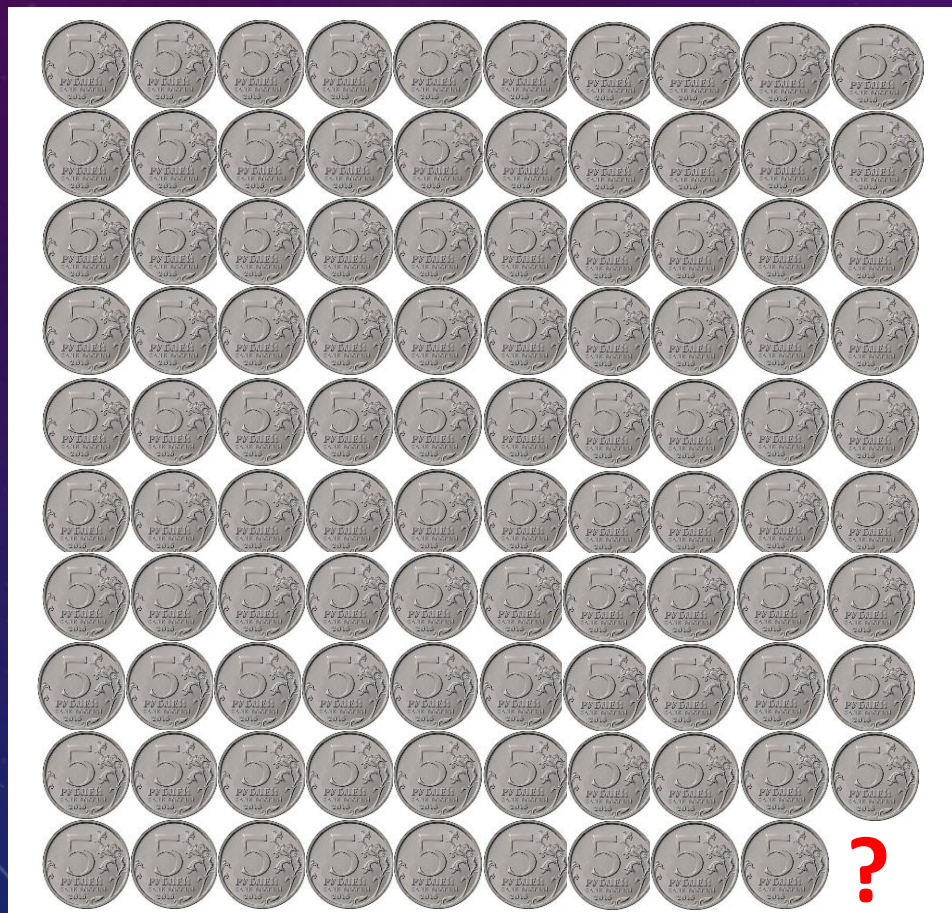
$$y = -6 \cdot 10^{-4}x^5 + 10^{-2}x^4 - 0.1x^3 + 0.5x^2 + 3x + 6 + N(0, 10^{-7})$$

МОДЕЛЬ



Остаточная «ошибка измерений»

ЗАКОЛДОВАННАЯ МОНЕТА

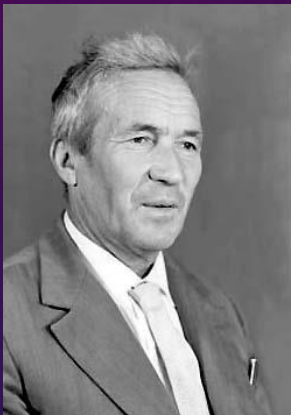


Выпадет орёл. Решка и так выпала 99 раз подряд! Если она выпадет и 100-й раз, это будет уж очень-очень маловероятно!

Каждый бросок монеты не зависит от предыдущего, поэтому орёл и решка выпадут с одинаковой вероятностью.

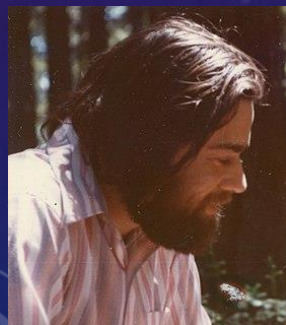
Выпадет решка! С монетой явно что-то не так! На лицо явная тенденция. Может там орла вообще нет?

АКСИОМЫ СТАТИСТИКИ



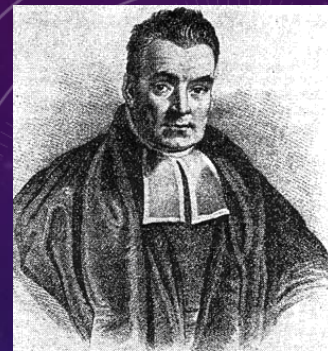
Андрей Колмогоров
(1903-1987)

- Каждому событию X из множества всех возможных событий в рамках эксперимента поставлено в соответствие вещественное число $\mathbf{P}(x)$, которое называется вероятностью события X
- Вероятность того, что произойдёт любое из всех возможных событий $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- Если события X и y не пересекаются, то $\mathbf{P}(x + y) = \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y)$



Мануэль Блум
(р. 1938)

Аксиомы Блума позволяют ввести понятие статистической *сложности* («колмогоровская сложность»). С ним задача о заколдованной монете решается иначе – выпадение орла в 100-м испытании более вероятно, т.к. делает последовательность более «сложной».



ДВЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ

1. Частотная:

- Вероятность -- это процентная доля успешных (подходящих) событий среди всех возможных событий.

2. Байесовская:

- Вероятность – это количественная характеристика доверия значению величины/исходу эксперимента/любому событию.

Пусть событие А это «я забыл телефон, выходя из дома», $P(A) = 1/100$

Пусть событие В это «я опоздал на работу», $P(B) = 1/100$

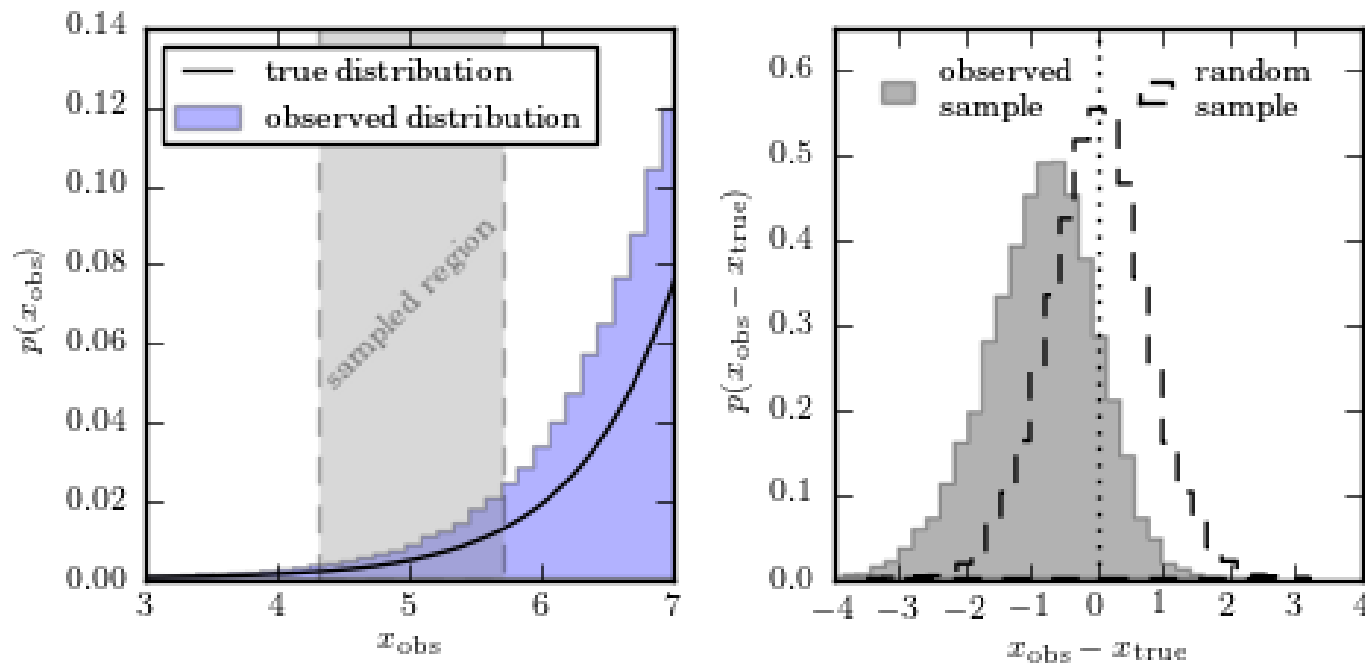
$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \neq 10^{-4}$$

$P(A|B) \neq P(B|A)$ - считать иначе, значит совершать «ошибку прокурора»

$$P(x|\text{data}) = \frac{P(x) \cdot P(\text{data}|x)}{P(\text{data})}$$

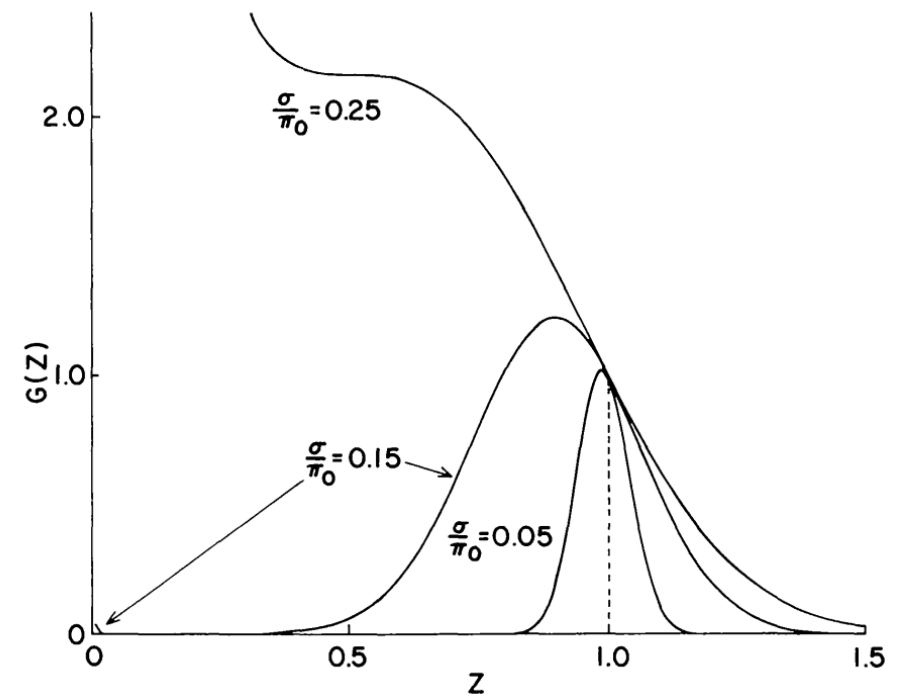
АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Эффект Малмквиста (Malmquist bias)



https://www.astroml.org/book_figures_1ed/chapter5/fig_malmquist_bias.html

Эффект Лутца-Келкера



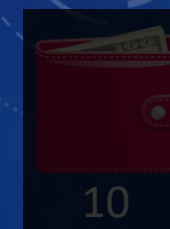
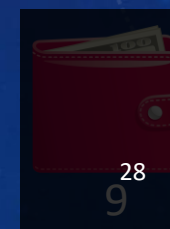
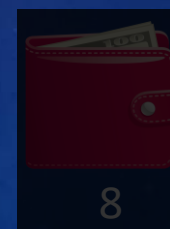
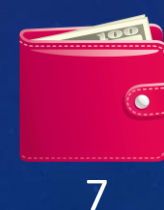
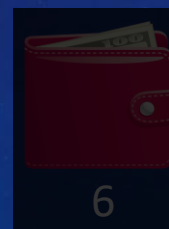
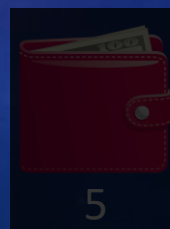
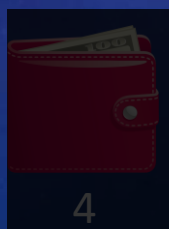
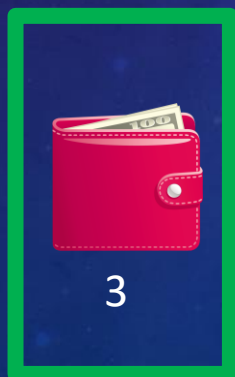
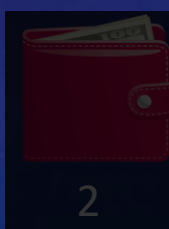
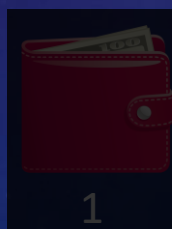
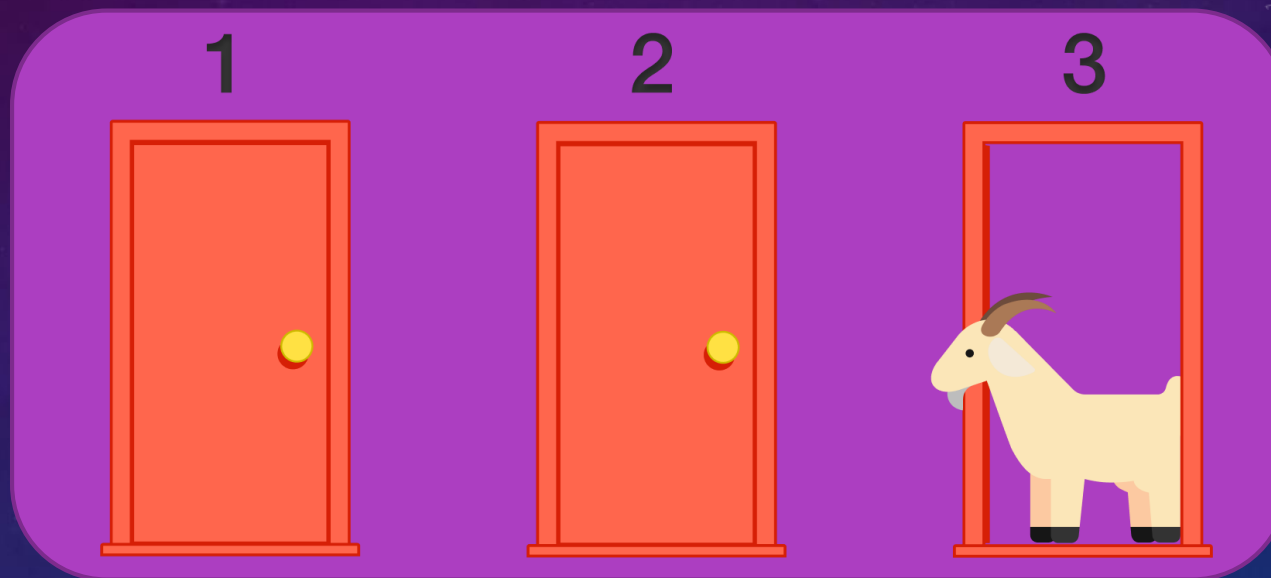
Lutz & Kelker 1973, PASP, 85, 573

<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/129506>

ПАРАДОКС МОНТИ ХОЛЛА



Монти Холл
(1921 – 2017)



ЧТО ПОЧИТАТЬ

- Д. Худсон, «Статистика для физиков»
<http://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Hudson1970ru.pdf>
- Wall & Jenkins, “Practical statistics for astronomers” (Cambridge series)
- Steven W. Smith, «The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing»
<http://www.dspguide.com/>
- 3 short lectures in AstroStatistics on American Astronomical Soc. 227th Meeting
https://hea-www.harvard.edu/astrostat/aas227_2016/lectures.html
- Andreon & Weaver, “Bayesian methods for the physical sciences”
<https://www.springer.com/gp/book/9783319152868>
- Д. Шпигельхалтер, «Искусство статистики», М: Манн, Иванов и Фербер, 2021
<https://www.mann-ivanov-ferber.ru/books/iskusstvo-statistiki/>

Спасибо! 😊