ИТОГ: 10/10 баллов

ДЗ 3

Винецкая Полина

Задача

Реликтовое излучение представляет собой изотропный фон теплового излучения со средней температурой $T_{CMB} = 2.73$ К.

а) Определите скорость Солнечной системы (её барицентра) относительно реликтового фона, если амплитуда дипольной составляющей в неоднородности его температуры составляет $\Delta T \approx 6.7 \times 10^{-3}$ К

б) С какой скоростью должна была бы двигаться Солнечная система, чтобы $\Delta T = T_{CMB}$?

Решение

а) При использовании приближения излучения абсолютно черного тела угловое распределение температуры будет зависеть от угла между вектором скорости наблюдателя (в нашем случае, барицентра Солнечной системы) и направлением излучения:

$$T(\theta) = T_{CMB}\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{1}$$

Поскольку $\Delta T/T_{CMB} \ll 1$, легально предположить движение нерелятивистским, а значит, можно разложить формулу 1 в ряд Тейлора по малому параметру $v/c \ll 1$:

$$\frac{T(\theta)}{T_{CMB}} \approx (1 - \frac{v^2}{2c^2})(1 + \frac{v}{c}\cos\theta) \approx 1 + \frac{v}{c}\cos\theta - O(\frac{v^2}{c^2}) \tag{2}$$

Амплитуда дипольной составляющей[1]:

$$\frac{\Delta T}{T_{CMB}} = \frac{v}{c}(\max(\cos\theta) - \min(\cos\theta)) = 2\frac{v}{c} = 2.4 \times 10^{-3} \tag{3}$$

Следовательно, скорость барицентра Солнечной системы относительно реликтового фона будет равна

$$\boxed{v = \frac{\Delta T}{2T_{CMB}}c = 1.2 \times 10^{-3}c \approx 368 \text{ км/c}} \tag{4}$$

б) Если $\Delta T = T_{CMB}$, приближение 2 уже не работает, и надо решать искать дипольный вклад честно. Это значит, что нужно найти коэффициент разложения при втором (собственно, дипольном) члене разложения функции 1 по сферическим гармоникам, то есть по полиномам Лежандра[2] $P_i(\cos\theta)$. Дипольный вклад будет соответствовать коэффициенту при $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$.

В общем виде коэффициенты разложения по полиномам Лежандра выглядят так:

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx \tag{5}$$

[1] То, что амплитудой называется не префактор перед косинусом, а разница максимума и минимума температур не кажется очевидным, однако следует из рис. 1 Автор некорректно употребил слово "амплитуда" в условии... Прошу прощения)

[2] и не забыть умножить на 2, чтобы получить амлитуду в том же смысле, что и в п.а)

Для простоты будем обозначать $\beta := \frac{v}{c}$. Нас интересует $x = \cos\theta$, $n = 1$:

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta x} x dx = \frac{3\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta^2}\int_{-\beta}^{\beta} \frac{zdz}{1-z} = \frac{3\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta^2}\left[\ln\frac{1-\beta}{1+\beta} - 2\beta\right] \tag{6}$$

Теперь надо вспомнить про домножение на 2 и найти β:

$$\frac{3\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\left[\ln\frac{1-\beta}{1+\beta} - 2\beta\right] = \frac{\Delta T}{T_{CMB}} = 1 \tag{7}$$

Решением такого уравнения являются 2 корня:

$$\beta = \frac{v}{c} \approx \left[\begin{matrix} 0.488 \\ 0.997 \end{matrix}\right. \implies \boxed{\begin{matrix} v = 0.49c \\ v = 0.99c \end{matrix}} \tag{8}$$

Второй корень слишком близок к 1, поэтому я не уверена в том, насоколько физичным является ответ $v = 0.99c$, однако в целом ситуация $\Delta T = T_{CMB}$ не реалистична, поэтому я его оставила в ответе.

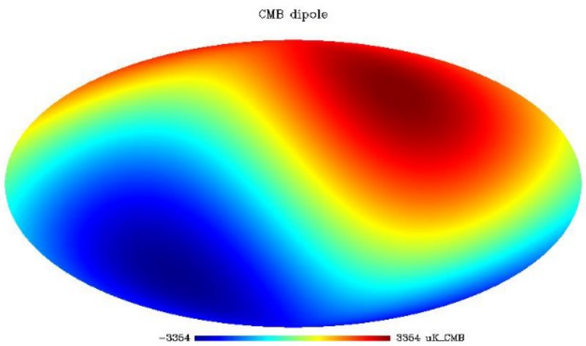

Рис. 1: Карта дипольной анизотропии реликтового излучения (из лекции)

По всей видимости, второй корень является артефактом и отражает то, что разложение по мультиполям малого порядка не описывает реальный размах температуры. Но формально отдельные компоненты разложения (не только дипольная) будут обладать такой особенностью. Возможно, что даже все -- не проверял.