

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.В. Холшевников

В.Б. Титов

# ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

*Учебное пособие*

*Санкт-Петербург*

*2007*

ББК 22.6

X74

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, проф. Л.К.Бабаджанянц  
(С.-Петербургский гос. ун-т),  
канд. физ.-мат. наук, доц. Л.Г.Лукьянов,  
канд. физ.-мат. наук, доц. Г.И.Ширмин  
(Московский гос. ун-т)

*Печатается по постановлению*

*Редакционно-издательского совета*

*С.-Петербургского государственного университета*

**Холщевников К.В., Титов В.Б.**

X74

Задача двух тел: Учеб. пособие. – СПб., 2007. – 180 с.

В книге дается современная трактовка задачи двух тел (двух притягивающихся по закону всемирного тяготения материальных точек), являющейся фундаментом небесной механики и теории космического полета. В различных системах отсчета выводятся дифференциальные уравнения движения, определяется фазовое пространство, строится полная система интегралов и общее решение. Все вырожденные случаи описаны вместе с их окрестностями. В частности, дается единое описание окрестности параболического движения, а также окрестности прямолинейного движения любого типа. Подробно излагается представление решения как явной функции времени в виде рядов трех типов: по степеням времени, по степеням эксцентриситета, рядов Фурье. Должное внимание уделяется вопросам сходимости. Вводятся метрические пространства кеплеровских орбит и исследуются их свойства, полезные при решении задач отождествления космических объектов и исследовании столкновений или близких прохождений небесных тел. Решаются основные задачи определения невозмущенных орбит. Часть результатов получена на кафедре небесной механики С.-Петербургского университета. Изложение сопровождается многочисленными примерами и задачами. Последние снабжены ответами, так что книга может служить справочником.

Для студентов и аспирантов астрономических и астрономо-геодезических отделений и кафедр университетов, а также специалистов в области небесной механики, космической геодезии, гравиметрии, теории космического полета.

**ББК 22.6**

© К.В.Холщевников, В.Б.Титов, 2007

© С.-Петербургский гос. университет, 2007

## Оглавление

Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Дифференциальные уравнения задачи двух тел, их интегралы и решение . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Дифференциальные уравнения задачи одного притягивающего центра . . . . .	9
1.2. Дифференциальные уравнения задачи двух тел; интегралы движения центра масс; уравнения относительного движения . . . . .	11
1.3. Интегралы площадей и энергии; уравнение траектории . . . . .	13
1.4. Эллипс и гипербола . . . . .	22
1.5. Близпараболическое движение . . . . .	31
1.6. Прямолинейное движение . . . . .	34
1.7. Матрица сдвига вдоль траектории . . . . .	40
Задачи к главе 1 . . . . .	42
<b>Глава 2. Пространства орбит . . . . .</b>	<b>53</b>
2.1. Пространство непрямолинейных орбит $\mathcal{H}(b)$ . . . .	55
2.2. Пространство орбит $\mathcal{H}$ . . . . .	58
2.3. Взаимное расположение пары кеплеровских орбит	62
2.3.1. Пересечение . . . . .	63
2.3.2. Зацепление . . . . .	69
2.4. Теоретико-множественное расстояние . . . . .	75
2.5. Симметрии . . . . .	79
Задачи к главе 2 . . . . .	82
<b>Глава 3. Разложения в ряды . . . . .</b>	<b>87</b>
3.1. Ряды Ли . . . . .	88
3.2. Ряды по степеням времени в кеплеровском движении	90
3.3. Ряды по степеням эксцентриситета . . . . .	93
3.3.1. Уравнение Кеплера . . . . .	94

3.3.2.	Связь переменных $e, \beta, \gamma$ . . . . .	98
3.4.	Функции Бесселя . . . . .	104
3.4.1.	Определение и основные свойства функций Бесселя . . . . .	105
3.4.2.	Многочлены Ломмеля . . . . .	110
3.5.	Обобщенный ряд Пуассона . . . . .	111
3.6.	Ряды Фурье в эллиптическом движении . . . . .	114
3.6.1.	Решение уравнения Кеплера . . . . .	114
3.6.2.	Простые функции от эксцентрической аномалии . . . . .	115
3.6.3.	Средние значения . . . . .	121
3.7.	Некоторые другие разложения . . . . .	126
3.8.	Сходимость рядов . . . . .	131
3.8.1.	Сходимость рядов по степеням времени . . . . .	131
3.8.2.	Сходимость рядов по степеням эксцентриситета . . . . .	138
3.8.3.	Сходимость рядов Фурье . . . . .	140
3.8.4.	Сходимость рядов Пуассона . . . . .	141
	Задачи к главе 3 . . . . .	143
<b>Глава 4.</b>	<b>Определение орбит . . . . .</b>	<b>150</b>
4.1.	Некоторые задачи конструирования орбит . . . . .	151
4.1.1.	Траектория баллистической ракеты . . . . .	151
4.1.2.	Эллипсы Гомана–Цандера . . . . .	153
4.2.	Определение орбиты по положению и скорости . . . . .	155
4.3.	Определение орбиты по положениям . . . . .	156
4.3.1.	Метод Гиббса определения орбиты по трем положениям . . . . .	156
4.3.2.	Определение орбиты по двум положениям . . . . .	158
4.4.	Определение орбиты по трем наблюдениям . . . . .	162
4.4.1.	Метод Гаусса . . . . .	162
4.4.2.	Метод Лапласа . . . . .	166
4.5.	Определение орбит экзопланет по лучевым скоростям . . . . .	167
	Задачи к главе 4 . . . . .	171
	<b>Литература . . . . .</b>	<b>173</b>
	Именной указатель . . . . .	177
	Предметный указатель . . . . .	178

## Введение

Эта книга — вторая в серии пособий по курсу небесной механики. В первой (Холшевников, Питъев, Титов, 2005) излагается теория тяготения, важнейшей частью которой является теория гравитационного потенциала. Вторая, которую читатель держит в руках, посвящена задаче двух тел, фундаменту небесной механики. В свою очередь знание небесной механики необходимо для понимания других разделов астрономии, геодезии и гравиметрии, теории космического полета. При написании пособия авторы использовали свой 30-летний опыт преподавания курса небесной механики для студентов-астрономов III курса Петербургского университета.

Под *задачей двух тел* в математическом естествознании понимают задачу о движении двух материальных точек, притягивающихся по *закону всемирного тяготения*, открытому Исааком Ньютоном (1643–1727) и опубликованному в его знаменитых *Philosophiae Naturalis Principia mathematica* в 1687 г. Там же содержится математическая формулировка задачи двух тел как системы обыкновенных дифференциальных уравнений и ее общее решение, найденное автором и облаченное им в геометрическую форму. Позднее Леонард Эйлер (1707–1783) придал решению близкую к современной аналитическую форму.

Нахождение общего решения даже в явной форме представляет собой лишь часть полного решения математической задачи (не говоря уже о ее естественно-научных приложениях). В дальнейшем требуется усовершенствовать и упростить вывод решения и тщательно изучить его свойства. Полезны обобщения и нахождение связей с казалось бы далекими областями науки. Вклад в этот процесс внесли многие выдающиеся ученые разных стран. Задача двух тел оказалась интереснейшей моделью для многих разделов математики и теоретической механики. Создание теории аналитических

функций, рядов Фурье, введение функций Бесселя во многом стимулировалось вопросами представления решений рядами различного вида и определения их области сходимости. Удивительно, но новые интересные результаты в старой задаче двух тел появлялись в течение XIX и XX века и продолжают появляться сейчас. Часть результатов получена сотрудниками кафедры небесной механики Ленинградского–Петербургского университета.

Предполагается знакомство читателя с курсами математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, теоретической механики. Знание определенных сведений из курсов математической физики, геометрии, топологии и приближенных вычислений желательно, хотя и не обязательно. Для овладения материалом в конце каждой главы предлагаются задачи по рассматриваемой теме. При изложении теоретических вопросов для большей ясности и понимания вместо полного и подробного доказательства иногда приводится лишь его схема, которая дополняется ссылками на задачи. Поэтому роль задач не сводится только к упражнениям. Ко всем задачам приводятся ответы, так что пособие может играть и роль справочника. Трудные задачи сопровождаются указаниями.

Стиль изложения материала — абстрактно-теоретический, принятый в большинстве руководств. Конкретные примеры из астрономии и космонавтики приведены в некоторых задачах. Образец менее абстрактного и более астрономического подхода читатель найдет в книге (*Murray, Dermott, 1999*).

В конце книги приводятся именной и предметный указатели и список литературы, содержащий, в частности, справочники, учебники и задачки по небесной механике. Прекрасные книги классиков не устаревают, как не устаревают таблицы логарифмов: вспомните слова из песни «трижды три — навеки девять». Однако в век информатики ориентация на вычисления с логарифмами и арифмометрами воспринимается с трудом, что вызывает потребность в новых учебниках и монографиях. Укажем на великолепную книгу (*Battin, 1999*), но на русском языке подобного учебника нет, и настоящее пособие частично восполняет этот пробел.

Книга состоит из четырех глав. Опишем их содержание и приведем краткие исторические сведения. Подробнее история развития небесной механики изложена в книгах (*Дубошин, 1975*), (*Идельсон, 1975*), (*Соболев, 1999*), (*Субботин, 1947*), (*Субботин, 1968*), (*Уинтнер, 1967*), (*Шарлье, 1966*), (*Battin, 1999*), (*Murray, Dermott, 1999*).

В первой главе записываются векторное дифференциальное уравнение задачи одного притягивающего центра по Ньютону (ускорение равно силе на единицу массы) и Лежандру (ускорение равно градиенту гравитационного потенциала) и аналогичные уравнения для задачи двух тел. Определяется фазовое пространство и находится полный набор интегралов движения. В результате фазовое пространство подразделяется на шесть подпространств, в каждом из которых — свой тип движения. Для всех типов приводятся соотношения, определяющие по начальным данным положение и скорость в любую эпоху. Вырожденные случаи мы сопровождаем формулами, описывающими не только саму орбиту, но и ее полную окрестность в фазовом пространстве. В эллиптическом случае основные соотношения выведены еще Кеплером и дополнены Ньютоном и Эйлером. Удобная и свободная от особенностей формула (1.29) приписывается Бэттином (1999) Бруке и Чефале, однако она встречается раньше у Уинтнера (1967). Траектория в задаче двух тел обычно параметризуется одной из трех так называемых аномалий: истинной, эксцентрической и средней. Михаил Федорович Субботин (1907–1966) показал, что все они являются частным случаем некоторой обобщенной аномалии. Мы не описываем этот общий результат, но все же довольно подробно рассматриваем *сопряженную аномалию* (название не общепринято). Последняя часто используется при описании поступательно-вращательного движения синхронных с планетой спутников.

Во второй главе строятся метрические *пространства орбит* и описываются их топологические свойства. Впервые вопросы топологии орбит рассмотрены в работах (Györgyi, 1968), (Moser, 1970) и (Шмуфель, Шейфеле, 1975), а метрики — в статье (Kholshchevnikov, Vassiliev, 1999b). Эта тема еще недостаточно разработана. Здесь мы изучаем взаимное расположение орбит, уделяя основное внимание пересечению, зацеплению, а также расстоянию между орбитами как точками пространства орбит и как кривыми в обычном пространстве. Описываемые метрические пространства орбит введены К.В. Холшевниковым (Холшевников, 2006).

Третья глава посвящена представлению решения в виде явной функции времени с помощью рядов трех основных типов. Ряды по степеням времени в кеплеровском движении получены здесь по общей теории рядов Ли. Идея выразить функции  $F$  и  $G$  через три независимые от ориентации системы координат величины, произ-

водные по времени от которых суть линейные комбинации самих величин, восходит к Лагранжу. В.Бондом, Р.Беттином и др. выведены различные рекуррентные соотношения. Нам удалось существенно упростить их. Область сходимости определена Гамильтоном и Мультином. Выполненное нами преобразование к истинной аномалии приводит к области, непрерывно и монотонно зависящей от эксцентриситета во всем промежутке его изменения от нуля до бесконечности. Основные результаты по разложению функций небесной механики по степеням эксцентриситета получены Лагранжем. Радиус сходимости был найден Лапласом, но его доказательство содержит существенный пробел. Полное доказательство получено Шарлье и Леви-Чивита. Основные результаты по разложению функций небесной механики в ряды Фурье получены Эйлером, Лагранжем, Бесселем. Область сходимости получается элементарно после нахождения области сходимости рядов по степеням времени.

Четвертая глава посвящена определению невозмущенной орбиты по небольшому числу известных величин и минимальным априорным сведениям (или при отсутствии таковых) об орбите. Рассматриваются как модельные, так и реальные астрономические задачи. Классические результаты принадлежат Эйлеру, Лапласу, Гиббсу, Гауссу и многим другим астрономам, подробно об этом рассказывается в монографии Субботина (1968). Определение орбит двойных звезд и внесолнечных планет по спектральным данным подробно изложено в работе (*Ferraz-Mello et al., 2005*).

Книга содержит материал, входящий в стандартные курсы небесной механики, а также немало дополнительного материала. Последний изложен во второй главе и в разделах 3.1, 3.3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 4.3.1, 4.5.

За редкими исключениями в книге принята единая система обозначений. Векторы выделяются жирным шрифтом. Их модули записываются теми же буквами обычным шрифтом. Пространства обозначаются полыми, а матрицы — фигурными буквами. Формулы, задачи, теоремы, рисунки нумеруются двумя числами, первое соответствует номеру главы. Ссылки на литературу даны курсивом в круглых скобках.

Мы признательны **Российскому Фонду Фундаментальных Исследований** (грант 05-02-17408) и **Совету по грантам президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ** (грант НШ-4929.2006.2) за финансовую поддержку.



## Глава 1

# Дифференциальные уравнения задачи двух тел, их интегралы и решение

### 1.1. Дифференциальные уравнения задачи одного притягивающего центра

Вынесенная в заголовок задача является простейшей нетривиальной задачей небесной механики. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  дана система из двух точек  $Q_0$  массой  $m_0$  и  $Q$  массой  $m$ , на которую наложена голономная связь:  $Q_0$  неподвижна (рис 1.1). Определить движение точки  $Q$  под действием ньютоновского притяжения к точке  $Q_0$ .

Эта задача приобретает физический смысл, если рассматривать ее как модель движения системы двух шарообразных тел, из которых  $Q_0$  много массивнее  $Q$ , а внешним влиянием на систему  $\{Q_0, Q\}$  можно пренебречь.

Так как точка  $Q_0$  неподвижна, то система отсчета с началом в  $Q_0$  инерциальна, и мы получаем дифференциальное уравнение движения (*Холшевников, Питъев, Титов, 2005*, §1.1)

$$\ddot{\mathbf{r}} + \kappa^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — вектор  $Q_0Q$ ,

$$\kappa^2 = Gm_0,$$

где  $G$  — постоянная тяготения. Ниже всегда считаем  $\kappa > 0$ ; удобство обозначения  $\kappa^2$  выяснится ниже. Физическая размерность  $G$  —  $\text{м}^3/(\text{с}^2\text{кг})$ ,  $\kappa^2$  —  $\text{м}^3/\text{с}^2$ . Если не оговорено противное, мы будем ука-

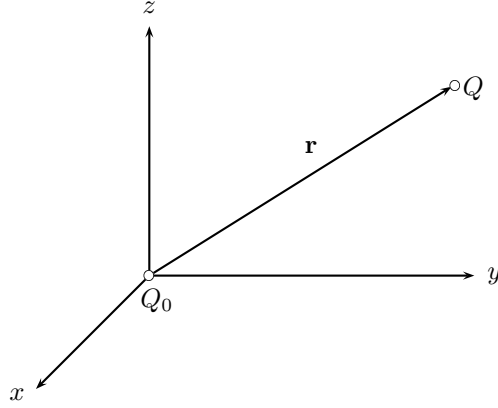


Рис. 1.1. К задаче одного притягивающего центра.

зывать размерность в системе СИ, хотя в астрономии употребительны и другие системы. Векторное уравнение второго порядка (1.1) равносильно системе трех скалярных уравнений второго порядка, или системе 6 уравнений первого порядка. На языке механики уравнение (1.1) описывает консервативную систему с тремя степенями свободы, являющуюся также нормальной автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка.

Конфигурационным пространством  $\mathbb{K}_1$  системы служит  $\mathbb{R}^3$  с выколотым началом координат:  $\mathbb{K}_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{Q_0\}$ ; пространство скоростей  $\mathbb{K}_2$  совпадает с  $\mathbb{R}^3$ ; фазовое пространство  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ .

Пространство  $\mathbb{K}_1$  некомпактно. Во-первых, оно неограничено. Это, впрочем, не несет осложнений, так как в силу (1.1) ускорение  $|\ddot{\mathbf{r}}|$  быстро стремится к нулю с ростом  $r$ . Во-вторых, оно примыкает к особой точке  $Q_0$ , при стремлении к которой ускорение растет до бесконечности. Здесь возникают реальные сингулярности, рассмотренные ниже в разделе о прямолинейном движении.

Основное уравнение (1.1) можно переписать в виде (Холшевников, Питьев, Титов, 2005, §1.1)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \text{grad } V(Q), \quad (1.2)$$

где

$$V(Q) = V(\mathbf{r}) = V(r) = \frac{\kappa^2}{r}. \quad (1.3)$$

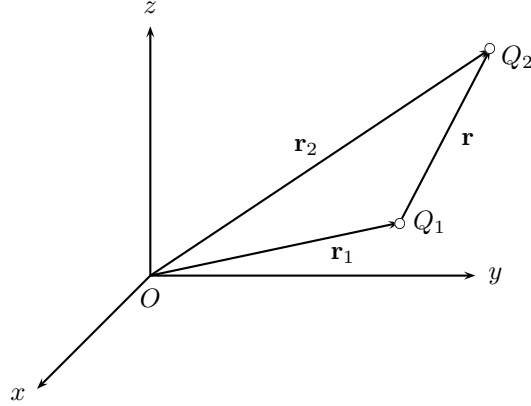


Рис. 1.2. К задаче двух тел.

Функция  $V$  называется потенциалом (гравитационным). Физический смысл  $V$  — потенциальная энергия единицы массы точки  $Q$  (со знаком минус) в гравитационном поле точки  $Q_0$  массой  $m_0$ ; размерность  $V$  совпадает с таковой для квадрата скорости.

## 1.2. Дифференциальные уравнения задачи двух тел; интегралы движения центра масс; уравнения относительного движения

Задача двух тел отличается от задачи одного притягивающего центра отсутствием механических связей: обе точки свободны. Чтобы подчеркнуть их равноправие, назовем их  $Q_1$  и  $Q_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Из закона всемирного тяготения следуют уравнения

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} &= 0, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор точки  $Q_i$  в некоторой инерциальной системе отсчета,  $\mathbf{r} = Q_1 Q_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  (рис. 1.2). Уравнения (1.4) описывают

консервативную систему с шестью степенями свободы. Ее конфигурационное пространство  $\mathbb{K}_1$  есть  $\mathbb{R}^6$  без трехмерной плоскости  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ , на которой  $r = 0$ , а пространство скоростей  $\mathbb{K}_2$  совпадает с  $\mathbb{R}^6$ . Система изолирована, а потому ее центр масс движется прямолинейно и равномерно:

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{A}, \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  — постоянные интегрирования (векторы). Вектор-функции  $m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$ ,  $m_1(\mathbf{r}_1 - \dot{\mathbf{r}}_1 t) + m_2(\mathbf{r}_2 - \dot{\mathbf{r}}_2 t)$  называются интегралами импульса, или интегралами центра масс, и отвечают закону сохранения импульса (количества движения) или, что то же, прямолинейности и равномерности движения центра инерции. Чуть отступая от строгости, интегралами называют и сами соотношения (1.5). Напомним, что интегралом системы дифференциальных уравнений называется непрерывная функция фазовых переменных и времени, постоянная вдоль решений системы, но не сводящаяся к тождественной постоянной.

Шесть (в скалярной форме) интегралов (1.5) позволяют понизить порядок системы с 12 до 6. Для этого проще всего перейти к относительному движению. Действительно, если мы знаем  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  и значения постоянных  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , то получим и  $\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i$ . Дифференциальное же уравнение для  $\mathbf{r}$  выводится из (1.4) элементарно и оказывается совпадающим с уравнением (1.1), но при другом значении параметра  $\varkappa$ :

$$\varkappa^2 = G(m_1 + m_2).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для движения точек  $Q_i$  относительно центра масс  $Q_0$ . Обозначая  $\boldsymbol{\varrho}_i = Q_0 Q_i$  барицентрический радиус-вектор точки  $Q_i$ , получаем для  $\boldsymbol{\varrho}_i$  то же уравнение (1.1), где следует  $\mathbf{r}$  заменить на  $\boldsymbol{\varrho}_i$ , а параметру  $\varkappa^2$  присвоить значение

$$\varkappa^2 = \frac{Gm_{3-i}^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Заметим, что если масса  $m_2$  пренебрежимо мала по сравнению с  $m_1$ , то уравнения относительного и барицентрического движения точки  $Q_2$  в пределе  $m_2 \rightarrow 0$  стремятся к уравнению (1.1) при  $\varkappa^2 = Gm_1$ , т.е. мы возвращаемся к задаче одного притягивающего центра.

### 1.3. Интегралы площадей и энергии; уравнение траектории

Мы убедились, что относительное и барицентрическое движение в задаче двух тел совпадают с движением в задаче одного притягивающего центра с модифицированным значением  $\kappa$ . Займемся поэтому фундаментальным уравнением (1.1). Для наглядности считаем, что оно описывает движение материальной точки  $Q$  единичной массы в инерциальной системе отсчета  $Oxyz$ , для краткости обозначаемой также  $O$ , в поле центральной силы с потенциалом (1.3). По общим теоремам механики точки это уравнение обладает интегралом площадей

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} \quad (1.6)$$

и интегралом энергии

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{\kappa^2}{r} = h. \quad (1.7)$$

Здесь  $\mathbf{c}$  — произвольная векторная, а  $h$  — скалярная постоянная. Каждая из них по отдельности может принимать любые значения; при любом  $h$  направление вектора  $\mathbf{c}$  может быть произвольным. Однако значения пары  $(c, h)$  заполняют лишь часть полуплоскости, см. ниже неравенство (1.19).

Мы получили 10 (в скалярной форме) классических интегралов (1.5)–(1.7), пользуясь лишь общими теоремами механики изолированной консервативной системы точек. Тем самым задачу можно свести к системе второго порядка. Выполним это сведение и убедимся, что приведенная система останется консервативной системой на плоскости, к тому же с циклической переменной, так что интегрирование выполняется без труда. «Сверх программы» выяснится, что интегралы окажутся элементарными в подходящих переменных, найденных еще Кеплером.

Консервативность приведенной системы влечет существование еще одного интеграла. В качестве последнего возьмем интеграл Лапласа

$$\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}}{\kappa^2} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{e}$  — постоянный вектор. Векторный интеграл Лапласа равносильен трем скалярным, но только один из них независим от (1.6), (1.7): напомним, что автономная система шестого порядка имеет не

более пяти автономных интегралов. В самом деле, величины  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $h$  связаны двумя соотношениями

$$\mathbf{c}\mathbf{e} = 0, \quad 2hc^2 = \varkappa^4(e^2 - 1). \quad (1.9)$$

Соотношение (1.7) представляет собой закон сохранения механической энергии. Постоянная энергии  $h$  имеет размерность энергии единицы массы, или, что то же, квадрата скорости, т.е.  $\text{м}^2/\text{с}^2$ . Соотношение (1.6) представляет собой закон сохранения момента импульса. Постоянная  $c$  имеет размерность момента импульса единицы массы, или, что то же, секторной скорости, т.е.  $\text{м}^2/\text{с}$ . В координатном виде (1.6) запишется так:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_3. \quad (1.10)$$

Умножим (1.6) скалярно на  $\mathbf{r}$ . Слева получится смешанное произведение  $(\mathbf{r}\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})$ , тождественно равное нулю. В результате

$$\mathbf{c}\mathbf{r} = 0, \quad (1.11)$$

или в координатах

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0. \quad (1.12)$$

Если  $c > 0$ , мы получаем уравнение плоскости, проходящей через притягивающий центр, с нормальным вектором  $\mathbf{c}$ . Плоскость ориентирована: движение происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{c}$ . Так что плоскости, отвечающие векторам  $\mathbf{c}$  и  $(-\mathbf{c})$ , считаются различными.

Если  $c = 0$ , то соотношение (1.11) превращается в тривиальное  $0 = 0$ . Возвращаясь к (1.6), заключаем, что векторы  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  коллинеарны. Поскольку  $\mathbf{r} \neq 0$  (конфигурационное пространство не содержит нуля), то скорость всегда направлена вдоль луча  $\mathcal{L}$ , содержащего  $\mathbf{r}$ . По симметрии луч  $\mathcal{L}$  неподвижен. Итак, при  $c = 0$  орбита целиком лежит на луче (такие траектории принято называть прямолинейными). Вместе со случаем  $c > 0$  мы получили, что *всякая траектория — плоская кривая; при  $c > 0$  содержащая траекторию плоскость (ориентированная) единственна; при  $c = 0$  траектория лежит на луче, через который можно провести однопараметрическое семейство плоскостей.*

Естественно, исследовать траекторию удобнее в ее плоскости. Введем систему отсчета, в которой за основную принята ориентированная плоскость орбиты. Пусть сначала вектор  $\mathbf{c}$  отличен от нуля

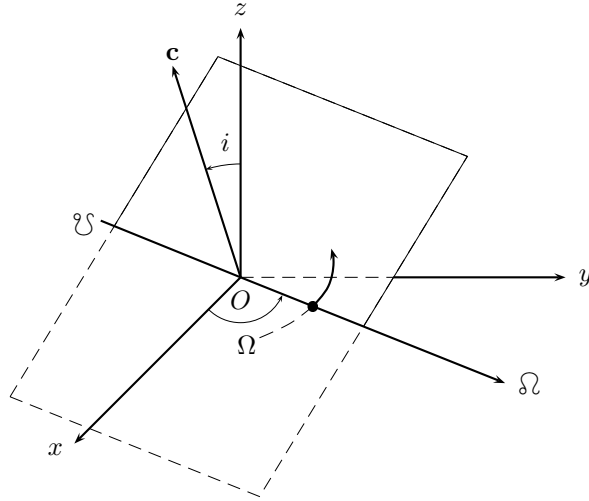


Рис. 1.3. Основные векторы, оси, плоскости и часть траектории.

и не коллинеарен оси  $z$ . Плоскость орбиты пересекается с плоскостью  $x, y$  по проходящей через начало прямой, именуемой *линией узлов*. Эта линия ориентирована (рис. 1.3). Положительным считается направление на *восходящий узел*  $\Omega$ , отрицательным — на *нисходящий*  $\Upsilon$ . Восходящим называется тот из узлов, в котором орбита переходит из южного полушария ( $z < 0$ ) в северное ( $z > 0$ ).

По традиции в астрономии сохраняется небесная (единичная в математической терминологии) сфера, точки которой соответствуют концам единичных векторов (рис. 1.4). Проекция орбиты на небесную сферу изобразится большим кругом (со стрелкой на рис. 1.4).

Ориентация орбитальной плоскости определяется двумя углами: *наклоном*  $i$  и *долготой восходящего узла*  $\Omega$ . Наклон  $i$  (называемый также *наклонением* или *наклонностью*) есть угол между векторами  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{c}$ , изменяется в промежутке  $[0, \pi]$ . Долгота узла  $\Omega$  — это угол, на который надо повернуть ось  $x$  в плоскости  $x, y$  в положительном направлении до совмещения с положительным лучом линии узлов. В справочниках принято считать  $\Omega \in [0, 2\pi)$ . В теории удобнее не накладывать ограничений и считать  $\Omega \in (-\infty, +\infty)$ .

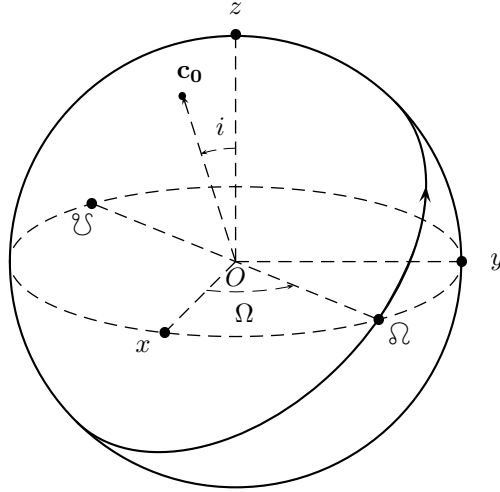


Рис. 1.4. Основные точки на небесной сфере;  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}/c$ .

Если  $0 \leq i < \pi/2$ , движение называется *прямым* — в проекции на плоскость  $x, y$  оно происходит с запада на восток; если  $\pi/2 < i \leq \pi$ , движение — *обратное*, с востока на запад. При  $i = \pi/2$  движение ортогонально основной плоскости (долгота постоянна, меняясь скачком на  $\pi$  в полюсах).

В сделанном предположении относительно вектора  $\mathbf{c}$  наклон  $i$  может принимать значения лишь из интервала  $(0, \pi)$ ; соответствие между ориентированной орбитальной плоскостью и парой  $(i, \Omega) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi)$  взаимно-однозначно. Обозначим  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  орты соответствующих осей. Если вектор  $\mathbf{c}$  коллинеарен с  $\mathbf{z}$ , то  $i$  принимает значения 0 (прямое) или  $\pi$  (обратное движение), а угол  $\Omega$  становится неопределенным. Сколь угодно малое шевеление орбитальной плоскости при достаточной близости  $i$  к нулю или  $\pi$  приводит к большим изменениям  $\Omega$ . Такова плата за то, что положение плоскости в астрономии определяют обычно двумя параметрами  $i, \Omega$ . Если определить ее тремя параметрами  $c_{01}, c_{02}, c_{03}$ , связанными соотношением  $c_{01}^2 + c_{02}^2 + c_{03}^2 = 1$ , неоднозначность и сингулярность исчезают. Здесь  $c_{0k}$  — компоненты единичного вектора  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}/c$ .

Если  $\mathbf{c} = 0$ , то орбитальную плоскость можно выбрать произ-



вольно среди однопараметрического семейства плоскостей, проходящих через луч  $\mathcal{L}$ .

Итак, каждой орбитальной плоскости отвечает пара  $(i, \Omega)$ . Эта пара единственна на множестве  $(0, \pi) \times [0, 2\pi)$ , если  $\mathbf{c} \neq k\mathbf{z}$  при некотором вещественном  $k$ . В противном случае пары  $(i, \Omega)$  образуют однопараметрическое семейство. Перейдем от основной системы отсчета  $\mathcal{O}$  к вспомогательной  $\mathcal{O}_1$  с помощью поворота на угол  $\Omega$  вокруг оси  $z$ , так что новая ось абсцисс пройдет по лучу восходящих узлов. Аналитически поворот осуществляется преобразованием

$$\mathbf{r} = \mathcal{A}_z(\Omega)\mathbf{r}_1. \quad (1.13)$$

Здесь и ниже  $\mathbf{r}_k$  — радиус-вектор точки  $Q$ , отнесенный к системе координат  $\mathcal{O}_k$ ;  $\mathcal{A}_z(\varphi)$  — матрица поворота на угол  $\varphi$  вокруг оси  $z$ . Аналогичный смысл имеют матрицы  $\mathcal{A}_x(\varphi)$  и  $\mathcal{A}_y(\varphi)$ :

$$\mathcal{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_y = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для перехода к орбитальной системе  $\mathcal{O}_2$ , в которой ось  $z_2$  проходит через вектор  $\mathbf{c}$  (при  $\mathbf{c} = 0$  в качестве  $\mathbf{c}$  берется любой ненулевой вектор, ортогональный лучу  $\mathcal{L}$ ), надо повернуть  $\mathcal{O}_1$  на угол  $i$  вокруг оси  $x_1$ , так что  $\mathbf{r}_1 = \mathcal{A}_x(i)\mathbf{r}_2$ . Подставляя в (1.13), получаем

$$\mathbf{r} = \mathcal{A}_2(i, \Omega)\mathbf{r}_2, \quad (1.14)$$

где  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_z(\Omega)\mathcal{A}_x(i)$  с учетом ассоциативности умножения матриц. Выполняя умножение, находим

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Напомним, что столбцы матрицы поворота дают координаты новых ортов в старой системе. В частности, третий столбец  $\mathcal{A}_2$  дает координаты вектора  $\mathbf{c}_0$  в системе  $\mathcal{O}$ .

Поскольку матрица  $\mathcal{A}_2$  постоянна, преобразование (1.14) связывает и скорости  $\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}_2$ . В системе  $\mathcal{O}_2$  справедливы уравнения (1.1) и инвариантные соотношения (1.6, 1.7). Кроме того,  $z_2$  тождественно равно нулю. Более того, постоянная энергии  $h$  сохраняет то же значение, как и вектор  $\mathbf{c}$ . Координатное выражение последнего в системе  $\mathcal{O}_2$  принимает вид  $(0, 0, c)$ . До конца параграфа, если не оговорено противное, мы будем работать только в системе  $\mathcal{O}_2$ , опуская у переменных индекс 2. Первые две компоненты векторного интеграла (1.6) вырождаются в тривиальное  $0 = 0$ , а третья принимает вид  $x\dot{y} - y\dot{x} = c$ . Перейдем к полярным координатам

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u,$$

в которых интегралы площадей и энергии записываются в виде

$$r^2 \dot{u} = c, \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2 - 2\kappa^2/r = 2h. \quad (1.15)$$

Поскольку  $r > 0$ , переменную  $\dot{u}$  справа можно исключить:

$$\dot{u} = \frac{c}{r^2}, \quad \dot{r}^2 = 2h + \frac{2\kappa^2}{r} - \frac{c^2}{r^2}. \quad (1.16)$$

Второе из соотношений (1.16) есть уравнение с разделяющимися переменными и интегрируется одной квадратурой, после чего еще одна квадратура решает первое из этих уравнений. Фактическое интегрирование проводится несколько иначе.

Рассмотрим сначала случай  $c > 0$ . Тогда  $\dot{u} > 0$  и угол  $u$  может играть роль независимой переменной. Из (1.16) с очевидностью вытекает

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \frac{2h}{c^2} r^4 + \frac{2\kappa^2}{c^2} r^3 - r^2.$$

Предложенная Бине подстановка

$$w = \frac{1}{r} - \frac{\kappa^2}{c^2}$$

приводит к простому уравнению

$$(dw/du)^2 = A^2 - w^2, \quad (1.17)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{\kappa^4}{c^4} + \frac{2h}{c^2}}. \quad (1.18)$$

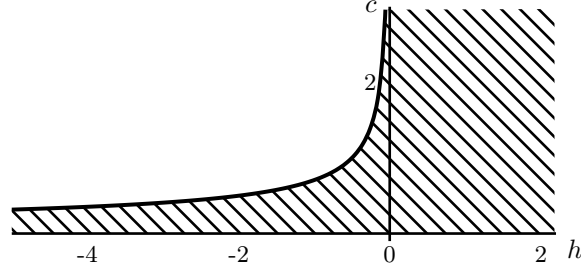


Рис. 1.5. Область значений  $h, c$  (справа от граничной кривой  $2hc^2 = -\kappa^4$ , которой соответствуют круговые орбиты); принято  $\kappa = 1$ .

Поскольку левая часть уравнения (1.17) неотрицательна, такова же и правая. В реальном движении подкоренное выражение в (1.18) неотрицательно, так что

$$2hc^2 \geq -\kappa^4. \quad (1.19)$$

Предельным переходом убеждаемся, что (1.19) должно соблюдаться и при  $c = 0$ , когда, впрочем, оно не накладывает никаких ограничений на  $h$ .

Общее решение (1.17) хорошо известно:

$$w = A \cos(u - g),$$

где  $g$  — произвольная постоянная. Возвращаясь к  $r$ , получаем

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad u = g + \theta \quad (1.20)$$

при

$$p = \frac{c^2}{\kappa^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{\kappa^4}}. \quad (1.21)$$

Мы получили в полярных координатах уравнение конического сечения с фокальным параметром  $p$  и эксцентриситетом  $e$ ; притягивающий центр  $O$  находится в фокусе орбиты; угол  $\theta$  считается от направления на перицентр  $\Pi$  (ближайшая к  $O$  точка орбиты) в сторону движения. Прямую  $OP$  называют *линией апсид*, а перицентр  $\Pi$  и *апоцентр*  $A$  — наиболее удаленную от  $O$  точку орбиты (она не

всегда существует) — апсидами. Если  $h = 0$ , то  $e = 1$  и уравнение (1.20) представляет параболу. Если  $-\kappa^4/(2c^2) \leq h < 0$ , то  $0 \leq e < 1$  и (1.20) представляет эллипс; при  $h = -\kappa^4/(2c^2) \iff e = 0$  это окружность. Если  $h > 0$ , то (1.20) представляет гиперболу (точнее, одну ее ветвь). В последних двух случаях полезно ввести величину  $a$  по формуле

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \iff p = a(1 - e^2). \quad (1.22)$$

Для эллипса  $a$  является большой полуосью,  $a > 0$ . Для гиперболы  $a < 0$ ,  $|a|$  является вещественной полуосью. В астрономии во всех случаях принято  $a$  называть большой полуосью. Для параболы принято  $1/a = 0$ ,  $a = \pm\infty$ . Знак  $\langle - \rangle$  отвечает представлению параболы как предела гиперболы при  $e \rightarrow 1 + 0$ ; знак  $\langle + \rangle$  — как предела эллипса при  $e \rightarrow 1 - 0$ . В обоих предельных случаях считается  $p = \text{const}$ , или, что эквивалентно,  $p/(1 + e) = \text{const}$ . Выражая  $p$ ,  $e$  через  $h$ ,  $c$ , выводим из (1.22)

$$h = -\frac{\kappa^2}{2a}, \quad (1.23)$$

что справедливо для всех трех типов конических сечений. Согласно (1.21), (1.23) параметр взаимно-однозначно связан с моментом  $c$ , а большая полуось — с энергией  $h$ . Эксцентриситет же  $e$  зависит от обеих физических констант  $c$ ,  $h$ .

Полезно ввести еще одну орбитальную систему отсчета  $\mathcal{O}_3$ , в которой ось  $x_3$  смотрит в перицентр. Для этого надо  $\mathcal{O}_2$  повернуть на угол  $g$  вокруг оси  $z_2$ . В результате

$$\mathbf{r} = \mathcal{A}_3(i, \Omega, g) \mathbf{r}_3, \quad (1.24)$$

где

$$\mathcal{A}_3(i, \Omega, g) = \mathcal{A}_2(i, \Omega) \mathcal{A}_z(g) = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos g - \cos i \sin \Omega \sin g & -\cos \Omega \sin g - \cos i \sin \Omega \cos g & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega \cos g + \cos i \cos \Omega \sin g & -\sin \Omega \sin g + \cos i \cos \Omega \cos g & -\sin i \cos \Omega \\ \sin i \sin g & \sin i \cos g & \cos i \end{pmatrix}.$$

В небесной механике пользуются также *неинерциальной* орбитальной системой  $\mathcal{O}_4$ , в которой ось  $x_4$  направлена в движущуюся точку  $Q$ . Очевидно, что

$$\mathbf{r} = \mathcal{A}_3(i, \Omega, u) \mathbf{r}_4. \quad (1.25)$$

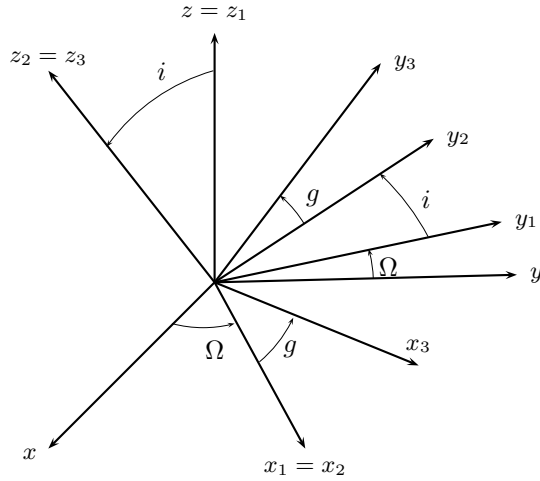


Рис. 1.6. Четыре системы отсчета  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_3$ . В плоскости  $x, y$  лежат оси  $x, x_1 = x_2, y, y_1$ , в орбитальной плоскости — оси  $x_1 = x_2, x_3, y_2, y_3$ , в ортогональной к орбитальной плоскости — оси  $y_1, y_2, z = z_1, z_2 = z_3$ .

*Замечание 1.* В астрометрии и небесной механике используется великое множество углов. Их принято делить на группы со специфическими названиями. *Долготами* называют углы, отсчитываемые от оси  $x$ ; *аргументами* — от восходящего узла; *аномалиями* — от перицентра. В частности,  $\Omega$  — долгота узла,  $u$  — аргумент широты,  $g$  — аргумент перицентра,  $\theta$  — истинная аномалия, а вот «ломаный угол»  $\Omega + u$  именуют долготой в орбите.

*Замечание 2.* В древности мировым центром считали Землю. Соответственно, ближайшая к этому центру точка орбиты именовалась перигеем. С теорией Коперника появился перигелий. Потом пошли перийовии, периастры, перигалаксии... а в космическую эру периселения, перифобосы, периидии, перизэросы... В конце концов было решено ввести общее понятие перицентра. Иногда употребляется термин *перифокус*, но мы считаем его неудачным. Внимание концентрируется на геометрии орбиты и имеет смысл лишь в рамках задачи двух тел. Термин *перицентр* говорит о близости к притягивающему *центру* и более физичен.

## 1.4. Эллипс и гипербола

Мы доказали, что при  $c > 0$  орбитой служит коническое сечение (эллипс, гипербола или парабола), а при  $c = 0$  орбита лежит на луче. Осталось найти положение точки на орбите (по терминологии теоретической механики получить кинематическое уравнение). Начнем со случая эллипса  $c > 0$ ,  $-\kappa^4/2c^2 \leq h < 0$ ,  $0 < p \leq a$ ,  $0 \leq e < 1$ . Перейдем к системе  $\mathcal{O}_3$ . На невырожденном эллипсе угол  $g$  определяется однозначно вместе с перицентром. При  $e = 0$ , на окружности, любая точка может считаться перицентром и  $g$  произвольно. В любом случае система  $\mathcal{O}_3$  существует. Следуя Кеплеру, параметризуем эллипс наряду с истинной аномалией  $\theta$  также эксцентрической аномалией  $E$ :

$$x_3 = r \cos \theta = a \cos E - ae, \quad y_3 = r \sin \theta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (1.26)$$

Появление слагаемого  $(-ae)$  вызвано тем, что начало координат находится не в центре, а в фокусе эллипса. Из (1.26) следует  $r^2 = a^2(1 - e \cos E)^2$ . Выражение в скобках положительно в силу  $0 \leq e < 1$ . Оно неотрицательно и при  $e = 1$ , этот случай нам понадобится ниже. Поэтому

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (1.27)$$

Геометрический смысл эксцентрической аномалии раскрывает рис. 1.7.

Тригонометрические функции истинной и эксцентрической аномалий легко выражаются друг через друга. Полученные в задаче 1.22 формулы показывают интересное свойство: подстановка  $e \longleftrightarrow -e$ ,  $E \longleftrightarrow \theta$  оставляет любую формулу вида  $f(e, \theta, E) = 0$  справедливой. Из результата задачи 1.23 вытекает связь между аномалиями

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (1.28)$$

Связь однозначна, так как согласно второй из формул (1.26) углы  $\theta, E$  одновременно находятся либо в верхней, либо в нижней полуплоскости (см. также рис. 1.7). С вычислительной точки зрения равенство (1.28) неудобно вблизи апоцентра  $\theta \approx \pi$ ,  $E \approx \pi$ . Этого неудобства легко избежать, пользуясь формулой

$$\theta - E = 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin \theta}{1 + \beta \cos \theta}. \quad (1.29)$$

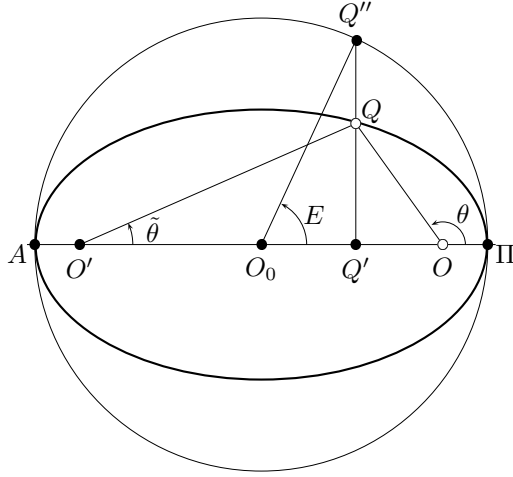


Рис. 1.7. Геометрия эллипса (нарисован жирной линией). Тонкими линиями нарисованы линия апсид АП, проходящая через А, П окружность радиусом  $a$ , проходящая через точку  $Q$  эллипса нормаль  $Q'Q''$  к линии апсид и отрезки  $OQ, O_0Q'', O'Q$ ;  $O$  — расположенный в фокусе эллипса притягивающий центр,  $O_0$  — центр эллипса,  $O'$  — пустой фокус.

Здесь

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e},$$

$$e = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}, \quad \sqrt{1 - e^2} = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}, \quad \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \quad (1.30)$$

Приступим к выводу кинематического уравнения. Дифференцируя (1.27) и сравнивая с первой из формул задачи 1.28, находим

$$\dot{E} = \frac{\kappa \sin \theta}{a^{3/2} \sqrt{1 - e^2} \sin E} = \frac{\kappa a^{-3/2}}{1 - e \cos E},$$

где в конце использована последняя из формул задачи 1.22. Мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде

$$(1 - e \cos E) dE = n dt, \quad (1.31)$$

где

$$n = \varkappa a^{-3/2} \quad (1.32)$$

имеет размерность угловой скорости (1/с) и называется в астрономии *средним движением*. Интегрируя, находим

$$E - e \sin E = M, \quad (1.33)$$

где

$$M = n(t - T) \quad (1.34)$$

называют *средней аномалией*. Формулой (1.34) введена последняя постоянная интегрирования  $T$  — эпоха перицентра. Названия оправданы: в перицентре  $E = 0 \implies M = 0 \implies t = T$ . В апоцентре  $E = \pi \implies M = \pi$ .

Равенство (1.32) представляет собой одну из форм записи третьего закона Кеплера: в гравитационном поле с заданным  $\varkappa$  средняя угловая скорость обращения пропорциональна  $a$  в степени  $(-3/2) \implies$  период обращения пропорционален  $a$  в степени  $(3/2)$ . Коэффициент пропорциональности однозначно определяется величиной  $\varkappa$ , зависящей от масс. Зная период и большую полуось орбиты, мы находим сумму масс. Зная период и большие полуоси в барицентрическом движении, мы находим массу каждой из двух точек (задачи 1.60, 1.61). Напомним, что постоянная тяготения известна с низкой точностью, тогда как точность произведения  $G$  на массу Солнца или Земли на 6 порядков выше (*Холшевников, Питьев, Титов, 2005*, §1.1). Поэтому ответы указанных задач лучше переписать в форме

$$\frac{m_1 + m_2}{m_0} = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_0 P^2}, \quad \frac{m_k}{m_0} = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)^2 a_{3-k}}{Gm_0 P^2}, \quad (1.35)$$

где  $m_0$  — масса тела сравнения, для которого  $Gm_0$  хорошо известно.

Нам осталось разрешить относительно  $M$  кинематическое уравнение (1.33), называемое уравнением Кеплера. Перепишем (1.33) в форме

$$M(e, E) = E - e \sin E. \quad (1.36)$$

Справа стоит целая функция от  $e, E$ . Достаточно пока считать ее функцией от вещественной переменной  $E \in (-\infty, \infty)$ , зависящей от вещественного параметра  $e \in [0, 1]$ . На эллипсе  $0 \leq e < 1$ , случай  $e = 1$  встретится дальше в §1.6.



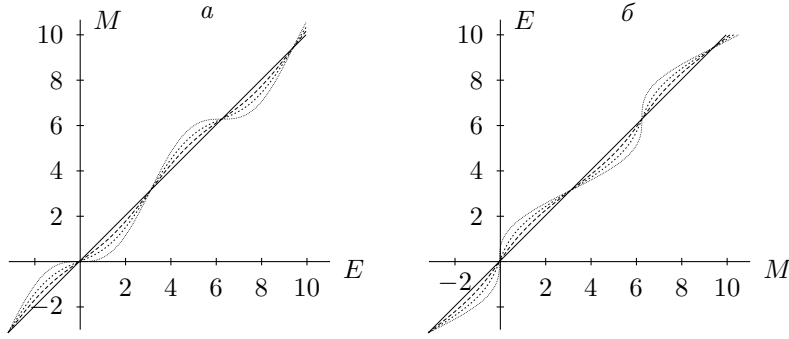


Рис. 1.8. Средняя аномалия в функции от эксцентрисической (а) и эксцентрисическая аномалия в функции от средней (б). Семейство графиков при  $e = 0, 0.3, 0.6, 1$ .

Вычислим и оценим производную

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E, \quad 1 - e \leq \frac{dM}{dE} \leq 1 + e. \quad (1.37)$$

При  $e < 1$  производная положительна и отделена от нуля. При  $e = 1$  производная неотрицательна и обращается в нуль в изолированных точках  $E = 2k\pi$ . В обоих случаях отсюда следует строгое возрастание  $M$ , так что существует строго возрастающая на  $(-\infty, \infty)$  при фиксированном  $e \in [0, 1]$  обратная функция

$$E = \mathfrak{E}(e, M), \quad (1.38)$$

причем

$$\frac{1}{1+e} \leq \frac{dE}{dM} = \frac{1}{1-e \cos E} \leq \frac{1}{1-e}. \quad (1.39)$$

Очевидно, что функции (1.36), (1.38) непрерывны, нечетны и совпадают в апсидах, когда  $E = M = k\pi$ , а разность  $E - M$  — периодическая функция как от  $E$ , так и от  $M$ . При фиксированном  $e < 1$  функция  $\mathfrak{E}$  аналитична при всех вещественных  $M$ . При  $e = 1$  появляются вещественные особенности в перигеии при  $E = M = 2k\pi$ , где производная  $dE/dM$  обращается в  $+\infty$  (рис. 1.8).

Итак, мы установили существование, единственность и основные свойства решения уравнения Кеплера. Как находить решение

на практике? Разработаны многие сотни, если не тысячи способов решения. Каждый год (см. реферативный журнал *Астрономия*) появляется несколько новых. Это хотя бы частично оправдано тем, что во многих астрономических центрах и центрах управления космическими полетами уравнение Кеплера решается многократно для сотен тысяч внесенных в каталоги небесных тел с известными с различной степенью точности орбитами, так что нужны близкие к оптимальным алгоритмы. Часть их можно найти в монографии (*Battin, 1999*). В этой книге мы ограничимся лишь тремя, два из которых приведены в главе 3, а один опишем сейчас. Перепишем уравнение (1.36) в форме

$$E = f(E) \quad \text{при} \quad f(E) = M + e \sin E \quad (1.40)$$

и применим к нему метод итераций

$$E_{k+1} = f(E_k) = M + e \sin E_k. \quad (1.41)$$

За начальное приближение можно взять  $E_0 = M$ . Достаточное условие сходимости (при произвольном начальном приближении)  $|f'(E)| = |e \cos E| \leq e < 1$  на эллипсе всегда выполняется. Итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $e$ .

При  $e = 1$  в точках  $E = s\pi$  имеем  $|f'(E)| = 1$ . Возьмем наихудший случай  $M = 0$ ,  $E_0 = \alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  (так как  $|E - M| = |\sin E| \leq 1$ , то допустимо считать  $|\alpha| \leq 1$ ; случай отрицательного  $\alpha$  практически не отличается от случая  $\alpha > 0$ ; случай  $M = \pi$  аналогичен случаю  $M = 0$ ). Очевидно  $E_n = \sin^{[n]} \alpha$ , где  $\sin^{[1]} \alpha = \sin \alpha$ ,  $\sin^{[n]} \alpha = \sin(\sin^{[n-1]} \alpha)$ . Поскольку  $0 < \sin^{[n+1]} \alpha < \sin^{[n]} \alpha$ , то последовательность  $E_n$  убывает и ограничена снизу. Следовательно, она имеет предел  $E^*$ . Как известно, предел удовлетворяет уравнению (1.40).

Таким образом, итерации (1.41) сходятся всегда, хотя при большом эксцентриситете в апсидальных точках сходимость очень медленна. Конечно, при  $M = 0$  или  $M = \pi$  надобности в итерациях нет — мы знаем точное решение ( $E = 0$  и соответственно  $E = \pi$ ). Неприятности происходят вблизи этих точек.

Перейдем к гиперболе. Можно получить аналоги выведенных для эллипса формул, идя тем же путем и используя стандартную параметризацию гиперболы (точнее, ее ветви). Но проще заметить,

что гиперболу формально можно получить из эллипса посредством комплексной арифметики (фактически понадобятся лишь вещественные и чисто мнимые числа). Достаточно в формулах этого параграфа считать  $E = iH$ ,  $\sqrt{1 - e^2} = \pm i\sqrt{e^2 - 1}$ ,  $\sqrt{a} = \pm i\sqrt{|a|}$ . Знак следует выбрать из условия, что  $H$  возрастает вместе со временем. В результате получим без труда основные формулы гиперболического движения. Для удобства читателя выпишем в две колонки формулы для эллипса и гиперболы:

$$\begin{aligned}
x_3 &= a(\cos E - e), & x_3 &= a(\operatorname{ch} H - e), \\
y_3 &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E, & y_3 &= -a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\
r &= a(1 - e \cos E), & r &= a(1 - e \operatorname{ch} H), \\
\cos \theta &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, & \cos \theta &= \frac{e - \operatorname{ch} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \\
\sin \theta &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, & \sin \theta &= \frac{\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \\
\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}, \\
\cos E &= \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta}, & \operatorname{ch} H &= \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta}, \\
\sin E &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}, & \operatorname{sh} H &= \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}, \\
n &= \varkappa a^{-3/2}, & n &= \varkappa |a|^{-3/2}, \\
M &= n(t - T), & M &= n(t - T), \\
E - e \sin E &= M, & e \operatorname{sh} H - H &= M,
\end{aligned} \tag{1.42}$$

к которым следует добавить (1.29).

Истинная аномалия на гиперболе изменяется в ограниченных пределах, см. рис. 1.9. Для сохранения непрерывности полагают  $\theta = 0$  в перигентре. Тогда  $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ , где  $\theta_0$  — предел  $\theta$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ . Согласно задаче 1.26

$$\begin{aligned}
\cos \theta_0 &= -\frac{1}{e}, & \sin \theta_0 &= \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}, \\
\operatorname{tg} \theta_0 &= -\sqrt{e^2 - 1}, & \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} &= \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}}.
\end{aligned}$$

Поэтому переменная  $H$  изменяется на оси  $-\infty < H < \infty$ , когда

$\theta$  пробегает интервал от  $-\theta_0$  до  $\theta_0$ . Поскольку  $|\theta/2| < \pi/2$ , в формуле типа (1.29) нет необходимости. Для гиперболы аналог (1.28) свободен от сингулярностей, так что

$$\begin{aligned}\theta &= 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2} \right), \\ H &= \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} \quad \text{при} \quad \xi = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\tag{1.43}$$

Функция  $e \operatorname{sh} H - H$  возрастает вместе с  $H$  при фиксированном  $e \geq 1$ , поэтому она имеет обратную, также возрастающую функцию. Иными словами, кинематическое уравнение

$$e \operatorname{sh} H - H = M\tag{1.44}$$

имеет единственное решение для любых  $M \in (-\infty, \infty)$ ,  $e \in [1, \infty)$ .

Как и для эллипса, уравнение (1.44) перепишем в удобной для итераций форме  $H = f(H)$ , где

$$f(H) = \operatorname{Arsh} \frac{H+M}{e} = \ln \left[ \frac{H+M}{e} + \sqrt{1 + \left( \frac{H+M}{e} \right)^2} \right],$$

и решим его по схеме

$$H_{k+1} = f(H_k), \quad H_0 = 0.\tag{1.45}$$

Теперь

$$f'(H) = \left[ e \sqrt{1 + \left( \frac{H+M}{e} \right)^2} \right]^{-1}.$$

На гиперболе итерации (1.45) сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $1/e$ . При  $e = 1$  сходимость тоже гарантирована, хотя в окрестности перицентра  $H = M = 0$  она чрезвычайно медленна.

Формула  $f(e, \theta, H) = 0$ , если  $\theta$  встречается только под знаком тригонометрических, а  $H$  — гиперболических функций, остается справедливой при подстановке  $e \mapsto -e$ ,  $\theta \longleftrightarrow H$  с одновременной взаимной заменой тригонометрических и гиперболических функций.

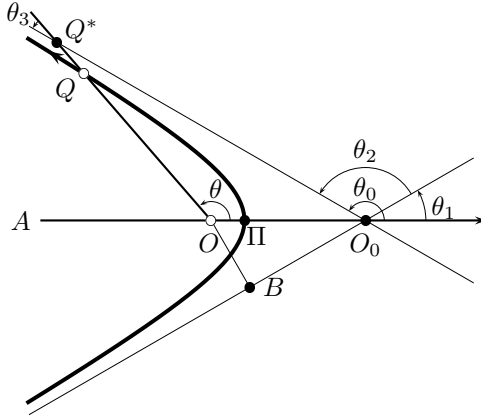


Рис. 1.9. Геометрия гиперболы (нарисована жирной линией). Тонкими линиями нарисованы линия апсид  $АП$ , асимптоты, продолженный до асимптоты в точке  $Q^*$  и далее радиус-вектор  $OQ$  и нормаль  $OB$  к асимптоте. Притягивающий центр  $O$  расположен в фокусе гиперболы,  $O_0$  — центр гиперболы; пустая ветвь и пустой фокус не показаны;  $\theta_0$  — верхняя грань  $\theta$ ;  $\theta_1$  — половина угла между лучами асимптот, проведенных из  $O_0$  в сторону орбиты;  $\theta_2$  — полный угол поворота вектора скорости;  $\theta_3$  — угол между радиус-вектором и асимптотой.

*Замечание.* Определяющие орбиту постоянные интегрирования  $h, c_k, p, a, e, \dots, T$ , среди которых 6 независимых, принято называть *элементами* орбиты. Заметим, что траекторию определяют 5 элементов, шестой отвечает за положение на орбите. С начала XX века элементами называют и переменные величины — например,  $M, \theta$ . За историю небесной механики введены сотни элементов, на практике используются десятки. Вместо  $T$ , например, часто используют *среднюю аномалию эпохи*  $M_0 = n(t_0 - T)$ , где  $t_0$  — произвольный момент времени, например, эпоха каталога. Среднюю аномалию можно вычислить по формуле

$$M = M_0 + n(t - t_0). \quad (1.46)$$

Выпишем теперь формулы для скоростей:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\kappa e}{\sqrt{p}} \sin \theta = \frac{\kappa e}{\sqrt{a}} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}, & \dot{r} &= \frac{\kappa e}{\sqrt{|a|}} \frac{\operatorname{sh} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \\
r\dot{\theta} &= \frac{\kappa}{\sqrt{p}} (1 + e \cos \theta) = \frac{\kappa \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}(1 - e \cos E)}, & r\dot{\theta} &= \frac{\kappa \sqrt{e^2 - 1}}{\sqrt{|a|}(e \operatorname{ch} H - 1)}, \\
\dot{x}_3 &= -\frac{\kappa \sin \theta}{\sqrt{p}} = -\frac{\kappa}{\sqrt{a}} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}, & \dot{x}_3 &= -\frac{\kappa}{\sqrt{|a|}} \frac{\operatorname{sh} H}{e \operatorname{ch} H - 1}, \\
\dot{y}_3 &= \frac{\kappa}{\sqrt{p}} (\cos \theta + e) = \frac{\kappa \sqrt{1 - e^2} \cos E}{\sqrt{a}(1 - e \cos E)}, & \dot{y}_3 &= \frac{\kappa \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H}{\sqrt{|a|}(e \operatorname{ch} H - 1)}.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Формулы, содержащие в качестве аргумента истинную аномалию, справедливы для всех типов конических сечений. Содержащие  $E$  формулы пригодны для эллиптического, а содержащие  $H$  — гиперболического движения.

В заключение параграфа рассмотрим на эллипсе еще одну, именно *сопряженную аномалию*  $\tilde{\theta}$ , равную углу с вершиной в пустом фокусе  $O'$ , на который надо повернуть  $O'\Pi$  до совмещения с  $O'Q$  (см. рис. 1.7). Поскольку сумма расстояний от точки на эллипсе до фокусов равна  $2a$ , то длина отрезка  $O'Q$  равна  $2a - r$ , так что

$$r \cos \theta = (2a - r) \cos \tilde{\theta} - 2ae, \quad r \sin \theta = (2a - r) \sin \tilde{\theta}, \tag{1.48}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\cos \tilde{\theta} &= \frac{\cos \theta + \tilde{e}}{1 + \tilde{e} \cos \theta}, & \sin \tilde{\theta} &= \frac{b \sin \theta}{1 + \tilde{e} \cos \theta}, \\
\cos \theta &= \frac{\cos \tilde{\theta} - \tilde{e}}{1 - \tilde{e} \cos \tilde{\theta}}, & \sin \theta &= \frac{b \sin \tilde{\theta}}{1 - \tilde{e} \cos \tilde{\theta}}, \\
(1 + \tilde{e} \cos \theta)(1 - \tilde{e} \cos \tilde{\theta}) &= b^2 = 1 - \tilde{e}^2
\end{aligned} \tag{1.49}$$

при

$$b = \frac{1 - e^2}{1 + e^2}, \quad \tilde{e} = \frac{2e}{1 + e^2}, \quad e = \frac{1 - \sqrt{1 - \tilde{e}^2}}{\tilde{e}} = \frac{\tilde{e}}{1 + \sqrt{1 - \tilde{e}^2}}. \tag{1.50}$$

Симметрия формул (1.49) показывает, что любое соотношение между  $\theta$ ,  $\tilde{\theta}$ ,  $e$  остается справедливым при перемене мест  $\theta$ ,  $\tilde{\theta}$  и од-

новременном изменении знака  $e$ . Иными словами, из равенства  $F(\theta, \tilde{\theta}, e) = 0$  следует  $F(\tilde{\theta}, \theta, -e) = 0$ .

Несложные выкладки с использованием формул задачи 1.22 дают

$$\begin{aligned}\cos \tilde{\theta} &= \frac{\cos E + e}{1 + e \cos E}, & \sin \tilde{\theta} &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 + e \cos E}, \\ \cos E &= \frac{\cos \tilde{\theta} - e}{1 - e \cos \tilde{\theta}}, & \sin E &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \tilde{\theta}}{1 - e \cos \tilde{\theta}}.\end{aligned}\quad (1.51)$$

Сравнение с формулами задачи 1.22 показывает, что

$$\tilde{\theta}(e, E) = \theta(-e, E), \quad E(e, \tilde{\theta}) = E(-e, \theta). \quad (1.52)$$

Любую формулу, связывающую  $\theta$  и  $E$ , можно тем самым преобразовать к формуле, связывающей  $\tilde{\theta}$  и  $E$ . Достаточно сделать подстановку

$$e \mapsto -e, \quad E \mapsto E, \quad \theta \mapsto \tilde{\theta}.$$

Например, из равенств (1.28)–(1.29) следует

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ E - \tilde{\theta} &= 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin E}{1 + \beta \cos E} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin \tilde{\theta}}{1 - \beta \cos \tilde{\theta}}.\end{aligned}\quad (1.53)$$

## 1.5. Близпараболическое движение

При  $c > 0$ ,  $p > 0$ ,  $h = 0$ ,  $e = 1$  движение происходит по параболе. Очевидно, что эллипсы и гиперболы приближаются к параболе (к любой конечной ее части) при  $p = \operatorname{const}$ ,  $1/a \rightarrow 0$  сколь угодно близко. Однако формулы (1.42) переходят либо в тривиальные  $n = M = E = H = 0$ , либо в неопределенности вида  $0 \cdot \infty$  или  $0/0$ . Необходим предельный переход. Следуя Эйлеру, мы получим сначала формулы для близпараболического движения: ведь сколь угодно малым шевелением  $h$  мы превращаем параболу в эллипс или гиперболу.

Параметризуем коническое сечение переменной  $\sigma = \operatorname{tg} \theta/2$ . Эта подстановка хорошо известна в интегральном исчислении:

$$\cos \theta = \frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2}, \quad \sin \theta = \frac{2\sigma}{1 + \sigma^2}, \quad d\theta = \frac{2}{1 + \sigma^2} d\sigma. \quad (1.54)$$

Формулы (1.20), (1.26) переходят в

$$r = \frac{q(1 + \sigma^2)}{1 - \mu\sigma^2}, \quad x_3 = \frac{q(1 - \sigma^2)}{1 - \mu\sigma^2}, \quad y_3 = \frac{2q\sigma}{1 - \mu\sigma^2}, \quad (1.55)$$

где  $q = p/(1 + e)$  — перицентрическое расстояние,

$$\mu = \frac{e - 1}{e + 1}, \quad e = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}. \quad (1.56)$$

На эллипсе  $0 \leq e < 1$ ,  $-1 \leq \mu < 0$ ; на гиперболе  $1 < e < \infty$ ,  $0 < \mu < 1$ ; на параболе  $e = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $q = p/2$ . Для параболы формулы (1.55) упрощаются:

$$r = q(1 + \sigma^2), \quad x_3 = q(1 - \sigma^2), \quad y_3 = 2q\sigma. \quad (1.57)$$

Осталось получить кинематическое уравнение, для чего перепишем интеграл площадей (1.15) с учетом (1.20) в виде

$$r^2 \dot{\theta} = \kappa \sqrt{p}. \quad (1.58)$$

Перейдем к переменной  $\sigma$  с помощью (1.54)–(1.55):

$$\frac{1 + \sigma^2}{(1 - \mu\sigma^2)^2} d\sigma = \frac{2}{3} n^* dt, \quad (1.59)$$

где

$$n^* = \frac{3}{4} \kappa p^{-3/2} (1 + e)^2. \quad (1.60)$$

Разложим левую часть (1.59) в ряд по степеням  $\mu$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (1 + \sigma^2) \sigma^{2k} \mu^k d\sigma = \frac{2}{3} n^* dt. \quad (1.61)$$

После интегрирования

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left( \frac{\sigma^{2k+1}}{2k+1} + \frac{\sigma^{2k+3}}{2k+3} \right) \mu^k = \frac{2}{3} M^* \quad \text{при} \quad M^* = n^*(t - T). \quad (1.62)$$

Очевидно, что область сходимости рядов (1.61)–(1.62) дается неравенством

$$|\mu\sigma^2| < 1. \quad (1.63)$$



Иными словами, при фиксированном  $\mu$  ряд сходится вплоть до значений  $\sigma = \pm\sigma_0$ , где  $\sigma_0 = \sqrt{1/|\mu|}$ . Для эллипса

$$\sigma_0 = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad E_0 = \frac{\pi}{2},$$

что отвечает вершинам эллипса, лежащим на малой оси. Таким образом, уравнение (1.61) пригодно на половине эллипса, содержащей перицентр.

Для гиперболы

$$\sigma_0 = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}, \quad H_0 = \infty,$$

т.е. сходимость имеет место на всей гиперболе. Заметим, что  $\theta_0$  совпадает с верхней гранью для истинной аномалии гиперболы, так что обозначение  $\theta_0$  оправдано.

Замкнутое выражение для производной от левой части (1.62) по  $\sigma$  согласно (1.59) равно

$$\frac{1 + \sigma^2}{(1 - \mu\sigma^2)^2},$$

что положительно при условии (1.63). Таким образом, левая часть равенства (1.62) строго возрастает, поэтому уравнение (1.62) при условии (1.63) имеет единственное решение на гиперболе и указанной части эллипса. Для параболы

$$\sigma + \frac{\sigma^3}{3} = \frac{2}{3}M^*, \quad n^* = 3\kappa p^{-3/2}. \quad (1.64)$$

Как видим, аналог уравнения Кеплера для параболы значительно проще: это кубическое уравнение с нулевым коэффициентом при  $\sigma^2$ . Левая часть (1.64) возрастает, так что  $\sigma$  находится однозначно по правой части (1.64). Это вытекает также из формулы Кардано, дающей явное выражение для  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt[3]{\sqrt{1 + M^{*2}} + M^*} - \sqrt[3]{\sqrt{1 + M^{*2}} - M^*}. \quad (1.65)$$

В заключение параграфа приведем формулы для скоростей в околопараболическом движении:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{2\kappa e\sigma}{\sqrt{p}(1+\sigma^2)}, & r\dot{\theta} &= \frac{\kappa(1+e)(1-\mu\sigma^2)}{\sqrt{p}(1+\sigma^2)}, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{2\kappa\sigma}{\sqrt{p}(1+\sigma^2)}, & \dot{y}_3 &= \frac{\kappa(1+e)(1+\mu\sigma^2)}{\sqrt{p}(1+\sigma^2)}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

На параболе следует положить  $e = 1$ ,  $\mu = 0$ .

## 1.6. Прямолинейное движение

Пусть теперь  $c = 0$ . В зависимости от знака  $h$  различают три типа движений: прямолинейно-эллиптическое ( $h < 0$ ), прямолинейно-гиперболическое ( $h > 0$ ) и прямолинейно-параболическое ( $h = 0$ ). Эти термины звучат странно, но это термины. Для всех типов прямолинейного движения считается  $p = 0$ ,  $e = 1$ ,  $a = -\kappa^2/2h$ .

Переменные  $E, H$  регуляризуют задачу двух тел в ее эллиптическом и гиперболическом вариантах: уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dE^2} - \frac{a}{r}e \sin E \frac{d\mathbf{r}}{dE} + \frac{a}{r}\mathbf{r} = 0, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dH^2} + \frac{a}{r}e \operatorname{sh} H \frac{d\mathbf{r}}{dH} - \frac{a}{r}\mathbf{r} = 0 \quad (1.67)$$

с существенно ослабленной особенностью при  $r = 0$ . Формулы (1.42), (1.47), в которых не участвует  $\theta$ , сохраняют силу. В них просто следует положить  $e = 1$ . Истинная аномалия в прямолинейном движении тождественно равна  $\pi$ .

Фактически мы представляем прямолинейную орбиту пределом семейства эллипсов или гипербол при  $a = \text{const}$ ,  $p \rightarrow 0$ ,  $e \rightarrow 1$ , причем предельный переход тривиален, в отличие от рассмотренного в предыдущем параграфе (рис. 1.10 и 1.11).

Для прямолинейно-эллиптической орбиты соотношения (1.42), (1.47) с эксцентрической аномалией в качестве аргумента формально применимы при  $-\infty < M, E, t < \infty$ . Однако они представляют не *решение* уравнения (1.1), а его аналитическое продолжение через точку соударения. Напомним, что точка  $O$  (притягивающий центр) не принадлежит конфигурационному пространству. Таким образом, *непродолжимое решение* уравнения (1.1) определено при



Рис. 1.10. Отрезок как предел эллипсов с постоянной  $a > 0$  и закрепленными вершинами.

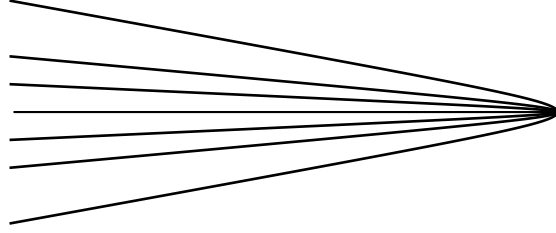


Рис. 1.11. Луч как предел гипербол с постоянной  $a < 0$  и закрепленной вершиной.

$0 < E, M < 2\pi, T < t < T + 2\pi/n$ . При стремлении  $t$  к концам интервала скорость согласно (1.47) обращается в бесконечность. Траекторией служит дважды проходимый промежуток  $-2a \leq x_3 < 0$ . Точнее, апоцентр  $x_3 = -2a$  проходится один раз при  $t = T + \pi/n$ , тогда как любая точка интервала  $-2a < x_3 < 0$  проходится дважды (на восходящей и нисходящей ветви).

Для прямолинейно-гиперболической орбиты соотношения (1.42), (1.47) с аргументом  $H$  формально применимы при  $-\infty < M, H, t < \infty$ . Однако они по-прежнему представляют собой аналитическое продолжение через точку соударения. Непродолжимых же прямолинейно-гиперболических решений при данных шести элементах существует два: восходящая ветвь при  $t > T, H > 0$  и нисходящая при  $t < T, H < 0$ . При  $t \rightarrow T, H \rightarrow 0$  на обеих ветвях скорость обращается в бесконечность.

Осталось рассмотреть прямолинейно-параболическую орбиту. Это — максимально вырожденный случай. Сколь угодно малым шевелением начальных данных парабола превращается в эллипс

или гиперболу; прямолинейно-эллиптическая орбита — в эллипс; прямолинейно-гиперболическая — в гиперболу. Сколь угодно малое шевеление начальных данных прямолинейно-параболической орбиты может превратить ее в любой из шести типов орбит. Поэтому описание полной окрестности представляет собой непростую задачу. Начнем с части окрестности, содержащей прямолинейные орбиты.

Пусть  $a < 0, e = 1$ . Запишем аналог уравнения Кеплера из (1.42) для прямолинейно-гиперболической орбиты  $\text{sh } H - H = M$  в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} H^{2k+1} = z^3, \quad (1.68)$$

где временно положено  $z = \sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{\kappa(t-T)}/\sqrt{-a}$ , что мало при больших  $|a|$ . Изменение знака  $z$  влечет изменение знака  $H$ , поэтому решение уравнения (1.68) представимо в виде ряда

$$H = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{2m+1}. \quad (1.69)$$

Подставляя (1.69) в равенство (1.68), получаем

$$\sum \frac{1}{(2k+1)!} c_{m_1} c_{m_2} \cdots c_{m_{2k+1}} z^{2m_1+2m_2+\dots+2m_{2k+1}+2k+1} = z^3.$$

Суммирование производится по множеству индексов  $k \geq 1, m_s \geq 0$ . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} c_0^3 &= 1, \\ \frac{1}{2} c_1 c_0^2 + \frac{1}{5!} c_0^5 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{2} c_s c_0^2 + f_s(c_0, c_1, \dots, c_{s-1}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.70)$$

где  $f_s$  — многочлен с положительными коэффициентами относительно указанных аргументов. Система (1.70) треугольна и легко решается:

$$c_0 = 6^{1/3}, \quad c_1 = -\frac{1}{10}, \quad \dots \quad (1.71)$$

Далее,

$$r = a \frac{d}{dH} (H - \text{sh } H) = -\frac{a dM}{dH} = -\frac{a dM/dz}{dH/dz} = -\frac{3az^2}{dH/dz},$$

или

$$r = -\frac{3az^2}{\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)c_m z^{2m}} = -\frac{3az^2}{c_0} \left( 1 - \frac{3c_1}{c_0} z^2 + \dots \right).$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{\frac{9}{2}\varkappa^2(t-T)^2} - \sqrt[3]{\frac{81\varkappa^4(t-T)^4}{4000a^3}} + \dots, \\ \dot{r} &= \sqrt[3]{\frac{4\varkappa^2}{3(t-T)}} - \sqrt[3]{\frac{6\varkappa^4(t-T)}{125a^3}} + \dots \end{aligned} \quad (1.72)$$

Ясно, что эти формулы справедливы и для прямолинейно-эллиптического случая  $a > 0$ .

В пределе  $a \rightarrow \pm\infty$  получаем формулы для прямолинейно-параболической орбиты

$$r = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\varkappa^2(t-T)^2}, \quad \dot{r} = \sqrt[3]{\frac{4\varkappa^2}{3(t-T)}}. \quad (1.73)$$

Интересно, что правые части (1.73), представляющие главные члены разложения (1.72), не зависят ни от каких элементов и одинаковы для всех типов прямолинейных орбит. Согласно (1.73)  $\dot{r}$  на прямолинейно-параболической орбите совпадает с параболической скоростью:

$$\dot{r} = v_p = \varkappa \sqrt{\frac{2}{r}}. \quad (1.74)$$

Для произвольных прямолинейных орбит согласно (1.72)

$$v_p - \dot{r} = \frac{\sqrt[3]{6\varkappa^4(t-T)}}{4a} + \dots \quad (1.75)$$

Эта формула показывает высокую эффективность гравитационных маневров в космонавтике. Сколь угодно малое изменение скорости

вблизи  $O$  сколь угодно сильно изменяет большую полуось. В частности, добавка к  $\dot{r}$  удвоенного значения правой части (1.75) для прямолинейно-эллиптической орбиты меняет знак  $a$ . Более того, можно добиться сколь угодно большой скорости на бесконечности (см. задачу 1.33), выбирая время маневра  $t$  близким к  $T$ . Очевидно, то же имеет место и на настоящих эллипсах и гиперболах вблизи притягивающего центра. Заметим только, что приблизиться к реальным центрам притяжения можно не ближе, чем на их радиус, что существенно ограничивает возможности гравитационного маневра.

*Замечание.* Формулы (1.73) представляют две орбиты: нисходящую ветвь при  $t < T$  и восходящую при  $t > T$ . Момент  $t = T$  исключается (в пределе  $t \rightarrow T \pm 0$  имеем  $r \rightarrow 0$ ,  $\dot{r} \rightarrow \pm\infty$ ). Однако аналитическое продолжение через точку соударения возможно: точку  $Q$  можно считать падающей на  $O$ , а при  $t = T$  — мгновенно меняющей свое направление на противоположное. Последнее верно для всех типов прямолинейного движения.

Рассмотрим теперь полную окрестность прямолинейно-параболической орбиты. За основу возьмем формулы (1.55), (1.56). Для удобства модифицируем малый параметр, положив

$$e = \frac{1 + s\mu^4}{1 - s\mu^4}, \quad \mu = \sqrt[4]{\left| \frac{e - 1}{e + 1} \right|}, \quad s = \text{sign}(e - 1). \quad (1.76)$$

За переменную, параметризующую положение на орбите, примем  $w = \mu\sigma$ . Поскольку параметр  $p$  стремится к нулю с приближением орбиты к прямолинейной, положим  $p = \mu^2 p_0$ , где  $p_0$  — имеющий размерность длины масштабный множитель. Таким образом,

$$p = p_0 \mu^2, \quad q = \frac{1}{2} p_0 \mu^2 (1 - s\mu^4), \quad w = \mu\sigma, \quad (1.77)$$

$$r = \frac{p_0(1 - s\mu^4)(\mu^2 + w^2)}{2(1 - s\mu^2 w^2)},$$

$$x_3 = \frac{p_0(1 - s\mu^4)(\mu^2 - w^2)}{2(1 - s\mu^2 w^2)}, \quad y_3 = \frac{p_0 \mu(1 - s\mu^4)w}{1 - s\mu^2 w^2}. \quad (1.78)$$

Дифференциальное уравнение (1.59) принимает форму

$$\frac{w^2 + \mu^2}{(1 - s\mu^2 w^2)^2} dw = \frac{1}{3} n^* dt, \quad (1.79)$$

где

$$n^* = \frac{6\kappa}{(1 - s\mu^4)^2} p_0^{-3/2}. \quad (1.80)$$

Разложение коэффициента при  $dw$  в левой части (1.79) в ряд по степеням  $\mu$  имеет вид

$$(w^2 + \mu^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) s^k \mu^{2k} w^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)w^{2k+2} + ksw^{2k-2}] s^k \mu^{2k}.$$

После интегрирования

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{k+1}{2k+3} w^{2k+3} + \frac{ks}{2k-1} w^{2k-1} \right] s^k \mu^{2k} = \frac{1}{3} M^*, \quad (1.81)$$

где

$$M^* = n^*(t - T). \quad (1.82)$$

Ряд (1.81) сходится в области

$$|\mu w| < 1, \quad (1.83)$$

совпадающей с (1.63).

При  $\mu = 0$  уравнение (1.81) вырождается в  $w^3 = M^*$ , так что

$$w = \sqrt[3]{M^*} = \sqrt[3]{n^*(t - T)}. \quad (1.84)$$

Следовательно, на самой прямолинейно-параболической орбите имеем  $x_3 = -r$ ,  $y_3 = 0$ , а для  $r, \dot{r}$  мы возвращаемся к (1.73).

В заключение параграфа приведем формулы для скоростей в окрестности прямолинейно-параболической орбиты:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{2\kappa(1 + s\mu^4)w}{\sqrt{p_0}(1 - s\mu^4)(w^2 + \mu^2)}, \quad r\dot{\theta} = \frac{2\kappa\mu(1 - s\mu^2 w^2)}{\sqrt{p_0}(1 - s\mu^4)(w^2 + \mu^2)}, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{2\kappa w}{\sqrt{p_0}(w^2 + \mu^2)}, \quad \dot{y}_3 = \frac{2\kappa\mu(1 + s\mu^2 w^2)}{\sqrt{p_0}(1 - s\mu^4)(w^2 + \mu^2)}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

На прямолинейно-параболической орбите следует положить  $\mu = 0$ .

*Предостережение.* Смысл малого параметра  $\mu$  здесь и в §1.5 разный!

## 1.7. Матрица сдвига вдоль траектории

Задача одного притягивающего центра (1.1) является частным случаем динамической системы, описываемой автономной системой дифференциальных уравнений шестого порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.86)$$

где  $\mathbf{x}$  — шестимерный фазовый вектор, распадающийся на два трехмерных вектора положения и скорости  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Вектор  $\mathbf{x}$  изменяется в некоторой области  $\mathbb{K}$  пространства  $\mathbb{R}^6$ ,  $\mathbf{f}$  — вещественно-аналитическая функция  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^6$ . Решить уравнения (1.86) — значит найти *оператор сдвига вдоль траектории*, позволяющий по значению фазового вектора  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$  в эпоху  $t_0$  получить его значение в эпоху  $t$ . В общем случае система (1.86) не интегрируется и оператор сдвига определяется численными методами, хотя многие его свойства могут быть установлены аналитически (например, сохранение энергии и фазового объема для консервативных систем).

Система (1.1) проинтегрирована, и тем самым для нее найден оператор сдвига. Запишем его явно в виде функциональной  $(2 \times 2)$ -матрицы.

Для прямолинейной траектории векторы  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$  неколлинеарны и определяют плоскость движения. Любой лежащий в этой плоскости вектор однозначно представляется их линейной комбинацией. В частности,

$$\mathbf{r} = F\mathbf{r}_0 + G\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v} = F'\mathbf{r}_0 + G'\mathbf{v}_0, \quad (1.87)$$

где скаляры  $F, G, F', G'$  зависят от  $t, t_0$  и постоянных интегрирования.

Для прямолинейной траектории векторы положения и скорости коллинеарны. Разложение (1.87) сохраняет силу, хотя и теряет однозначность. Последняя восстанавливается предельным переходом.

Итак, представление (1.87) универсально. Удобно записать его в матричной форме:

$$\mathbf{x} = \mathcal{B}\mathbf{x}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix}, \quad (1.88)$$

где

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} F & G \\ F' & G' \end{pmatrix}.$$



Для определения элементов матрицы  $\mathcal{B}$  заметим, что соотношения (1.87) с очевидностью справедливы в любой системе отсчета. Это легко доказать и формально, умножив обе части на соответствующую ортогональную матрицу. Спроектируем векторные равенства (1.87) на оси системы  $\mathcal{O}_3$  с учетом (1.26), (1.47). Получим две системы, из двух линейных уравнений каждая. В случае непрямолинейного движения

$$\begin{aligned} r_0 \cos \theta_0 F - \frac{\varkappa \sin \theta_0}{\sqrt{p}} G &= r \cos \theta, \\ r_0 \sin \theta_0 F + \frac{\varkappa (\cos \theta_0 + e)}{\sqrt{p}} G &= r \sin \theta; \\ r_0 \cos \theta_0 F' - \frac{\varkappa \sin \theta_0}{\sqrt{p}} G' &= -\frac{\varkappa \sin \theta}{\sqrt{p}}, \\ r_0 \sin \theta_0 F' + \frac{\varkappa (\cos \theta_0 + e)}{\sqrt{p}} G' &= \frac{\varkappa (\cos \theta + e)}{\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Матрицы коэффициентов обеих систем одинаковы, определитель равен  $\varkappa \sqrt{p}$ . Окончательно

$$\begin{aligned} F &= \frac{r}{p} [\cos(\theta - \theta_0) + e \cos \theta], & G &= \frac{r r_0}{\varkappa \sqrt{p}} \sin(\theta - \theta_0); \\ F' &= \frac{\varkappa}{p \sqrt{p}} [-\sin(\theta - \theta_0) - e \sin \theta + e \sin \theta_0], & (1.89) \\ G' &= \frac{r_0}{p} [\cos(\theta - \theta_0) + e \cos \theta_0]. \end{aligned}$$

Соотношения (1.42) позволяют выразить  $F, \dots, G'$  через эксцентрические аномалии в эпохи  $t_0$  и  $t$ :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\cos(E - E_0) - e \cos E_0}{1 - e \cos E_0}, & G &= \frac{\sin(E - E_0) - e \sin E + e \sin E_0}{n}, \\ F' &= -\frac{n \sin(E - E_0)}{(1 - e \cos E)(1 - e \cos E_0)}, & G' &= \frac{\cos(E - E_0) - e \cos E}{1 - e \cos E}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Формулы (1.90) справедливы и для прямолинейно-эллиптической орбиты. См. также задачи 1.57 и 1.58.

Вернемся к матрице сдвига  $\mathcal{B}$ . Прямое вычисление по формулам (1.89) показывает, что

$$\det \mathcal{B} = 1. \quad (1.91)$$

Последнее соотношение верно для всех типов орбит. В самом деле, умножим векторно первое из равенств (1.87) на второе:

$$\mathbf{c} = (FG' - F'G)\mathbf{c}.$$

При  $\mathbf{c} \neq 0$  отсюда вытекает  $FG' - F'G = 1$ . При  $\mathbf{c} = 0$  последнее равенство устанавливается предельным переходом.

Равенство (1.91) позволяет сразу написать обратную к  $\mathcal{B}$  матрицу

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} G' & -G \\ -F' & F \end{pmatrix}. \quad (1.92)$$

К тому же результату можно прийти, используя групповое свойство матрицы сдвига. Фиксируя начальные данные и указывая явно зависимость от времени, запишем ее в виде  $\mathcal{B}(t, t_0)$ . Тогда по определению сдвига

$$\mathcal{B}(t_2, t_0) = \mathcal{B}(t_2, t_1)\mathcal{B}(t_1, t_0). \quad (1.93)$$

В частности,

$$\mathcal{B}^{-1}(t, t_0) = \mathcal{B}(t_0, t), \quad (1.94)$$

поскольку  $\mathcal{B}(t, t)$  — единичная матрица (сдвиг за нулевое время). Соотношения (1.92) и (1.94) эквивалентны.

## Задачи к главе 1

**Задача 1.1.** Вывести уравнения (1.1) из закона всемирного тяготения.

**Задача 1.2.** Показать, что фазовое пространство системы (1.1) есть  $\mathbb{R}^6$  без трехмерной плоскости, а фазовое пространство системы (1.4) —  $\mathbb{R}^{12}$  без 9-мерной плоскости.

**Задача 1.3.** Откуда следует консервативность систем (1.1), (1.4)?

**Задача 1.4.** Показать инвариантность системы (1.4) относительно перестановки  $Q_1$  и  $Q_2$ .

**Задача 1.5.** Вывести соотношения (1.5) из уравнений (1.4).

**Задача 1.6.** Выразить  $\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i$  через  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ , используя интегралы (1.5).

Ответ:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{A}t + \mathbf{B} - m_2\mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{A}t + \mathbf{B} + m_1\mathbf{r}}{m_1 + m_2},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{A} - m_2\dot{\mathbf{r}}}{m_1 + m_2}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{A} + m_1\dot{\mathbf{r}}}{m_1 + m_2}.$$

**Задача 1.7.** Получить из (1.4) дифференциальные уравнения относительного, а затем барицентрического движения.

**Задача 1.8.** Вывести интеграл площадей (1.6), умножая обе части (1.1) слева векторно на  $\mathbf{r}$ .

**Задача 1.9.** Показать, что вектор  $\mathbf{c}$  равен удвоенному вектору секторной скорости. Иными словами, левые части равенств (1.10) равны удвоенной секторной скорости проекции движения на соответствующую координатную плоскость.

**Задача 1.10.** Показать, что интеграл площадей в полярных координатах в орбитальной плоскости записывается в форме

$$r^2\dot{u} = r^2\dot{\theta} = c = \kappa\sqrt{p}.$$

**Задача 1.11.** Вывести интеграл энергии (1.7), умножая обе части (1.2) скалярно на  $\dot{\mathbf{r}}$ .

**Задача 1.12.** Доказать соотношение (1.8), дифференцируя его левую часть.

**Задача 1.13.** Доказать, что модуль  $\mathbf{e}$  равен  $e$ , а направлен вектор  $\mathbf{e}$  вдоль линии апсид от притягивающего центра к перигею.

**Задача 1.14.** Доказать соотношения (1.9).

**Задача 1.15.** Убедиться, что при фиксированном  $c > 0$  энергия  $h$  минимальна для круговой орбиты, на которой  $h = -\kappa^4/(2c^2)$ ,  $a = c^2/\kappa^2$ .

**Задача 1.16.** Пусть  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  — вектор луча, на котором лежит прямолинейная орбита. Найти одну из пар  $(i, \Omega)$ , если  $\mathbf{l}$  не слишком близок к оси  $z$ , т.е.  $l_1^2 + l_2^2$  не слишком мало (малость определяется разрядной сеткой ЭВМ).

*Указание.* Введите фиктивный вектор площадей  $\mathbf{c} = \mathbf{l} \times \mathbf{z}$ .

Ответ:

$$i = \pi/2, \quad \cos \Omega = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}, \quad \sin \Omega = \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}.$$

**Задача 1.17.** То же, если  $\mathbf{l}$  не слишком близок к оси  $x$ .

*Указание.* Введите фиктивный вектор площадей  $\mathbf{c} = \mathbf{x} \times \mathbf{l}$ .

Ответ:

$$\cos i = \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 + l_3^2}}, \quad \sin i = \frac{l_3}{\sqrt{l_2^2 + l_3^2}}, \quad \Omega = 0.$$

**Задача 1.18.** Проверить, что матрицы  $\mathcal{A}_k$  ортогональны с равным единице определителем.

**Задача 1.19.** Показать, что  $\mathcal{A}_3(i, \Omega, g) = \mathcal{A}_2(i, \Omega)\mathcal{A}_z(g)$  и убедиться в справедливости следующей за (1.24) формулы.

**Задача 1.20.** Вывести формулы

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \cos i \sin u \sin \Omega), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \cos i \sin u \cos \Omega), \\ z &= r \sin i \sin u. \end{aligned}$$

**Задача 1.21.** Показать, что геометрия рис. 1.7 соответствует формулам (1.26).

**Задача 1.22.** Показать, что для эллипса

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta}, \quad \sin E = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \theta}{1 + e \cos \theta}, \\ \cos \theta &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \end{aligned}$$

**Задача 1.23.** Используя результат задачи 1.22, вывести формулы

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 - e \cos E}} \cos \frac{E}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e \cos E}} \sin \frac{E}{2}.$$

**Задача 1.24.** Вывести равенство (1.29) из (1.28). Показать, что под арктангенсом следует понимать главную ветвь со значениями в промежутке  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

**Задача 1.25.** Показать, что на эллипсе значения  $\theta$  заполняют всю ось.

**Задача 1.26.** На параболе и гиперболе считаем, что  $\theta = 0$  в перигеуме. Показать, что значения  $\theta$  заполняют интервал  $(-\theta_0, \theta_0)$ , где  $\theta_0 = \pi - \arccos 1/e$ . В частности, для параболы  $\theta_0 = \pi$ .

**Задача 1.27.** Пусть  $\theta_1$  — половина угла между лучами асимптот, проведенных из центра гиперболы в сторону орбиты;  $\theta_2$  — полный угол поворота вектора скорости, т.е.  $\pi - 2\theta_1$ ;  $\theta_3$  — угол между радиус-вектором и асимптотой (см. рис. 1.9). Выразить  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  через эксцентриситет гиперболы.

*Ответ:*  $\theta_1 = \pi - \theta_0 = \arccos 1/e, \theta_2 = \pi - 2\theta_1 = 2\theta_0 - \pi = 2 \arcsin 1/e, \theta_3 = \theta_0 - \theta$ .

**Задача 1.28.** Найти компоненты скорости в полярных координатах при  $c > 0$ .

*Указание.* Продифференцировать (1.20) и воспользоваться результатом задачи 1.10.

*Ответ:*

$$\dot{r} = \frac{\kappa}{\sqrt{p}} e \sin \theta, \quad r\dot{\theta} = \frac{\kappa\sqrt{p}}{r}, \quad |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{\kappa^2}{p}(1 + 2e \cos \theta + e^2).$$

**Задача 1.29.** Найти вектор скорости в системе  $\mathcal{O}_3$  при  $c > 0$ .

*Ответ:*

$$\dot{x}_3 = -\frac{\kappa}{\sqrt{p}} \sin \theta, \quad \dot{y}_3 = \frac{\kappa}{\sqrt{p}}(e + \cos \theta).$$

**Задача 1.30.** Найти годограф вектора скорости при  $c > 0$ .

*Ответ:* окружность для эллипса, часть окружности для гиперболы и параболы.

**Задача 1.31.** Найти годограф вектора скорости при  $c = 0$ .

*Ответ:* прямая при  $h < 0$ , открытый луч  $(v_\infty, \infty)$  или  $(-\infty, -v_\infty)$  при  $h \geq 0$ .

**Задача 1.32.** При  $c > 0$  вывести формулы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}[\sin u \cos \Omega + \cos i \cos u \sin \Omega + e(\sin g \cos \Omega + \cos i \cos g \sin \Omega)], \\ \dot{y} &= -\frac{\varkappa}{\sqrt{p}}[\sin u \sin \Omega - \cos i \cos u \cos \Omega + e(\sin g \sin \Omega - \cos i \cos g \cos \Omega)], \\ \dot{z} &= \frac{\varkappa}{\sqrt{p}} \sin i (\cos u + e \cos g).\end{aligned}$$

**Задача 1.33.** Выразить  $h, c, a, p, e$  на гиперболе через *прицельное расстояние*  $q_0$  (отрезок  $OB$  на рис. 1.9) и скорость на бесконечности  $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\mathbf{r}}|$ .

*Ответ:*

$$h = \frac{v_\infty^2}{2}, \quad c = q_0 v_\infty, \quad a = -\frac{\varkappa^2}{v_\infty^2}, \quad p = \frac{q_0^2 v_\infty^2}{\varkappa^2}, \quad e^2 = 1 + \frac{q_0^2 v_\infty^4}{\varkappa^4}.$$

**Задача 1.34.** То же для углов  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ .

*Ответ:*

$$\theta_1 = \pi - \theta_0 = \arccos \left( 1 + \frac{q_0^2 v_\infty^4}{\varkappa^4} \right)^{-1/2}, \quad \theta_2 = 2 \arcsin \left( 1 + \frac{q_0^2 v_\infty^4}{\varkappa^4} \right)^{-1/2}.$$

**Задача 1.35.** То же для перицентрического расстояния  $q = a(1 - e) = p/(1 + e)$ .

*Ответ:*

$$q = \sqrt{q_0^2 + \frac{\varkappa^4}{v_\infty^4}} - \frac{\varkappa^2}{v_\infty^2} = \frac{q_0^2}{\frac{\varkappa^2}{v_\infty^2} + \sqrt{q_0^2 + \frac{\varkappa^4}{v_\infty^4}}}.$$

**Задача 1.36.** Выразить  $q_0$  через  $q, v_\infty$ .

*Ответ:*

$$q_0 = q \sqrt{1 + 2 \frac{\varkappa^2}{q v_\infty^2}}.$$

**Задача 1.37.** Показать, что  $q \rightarrow 0$  при фиксированном  $q_0$  и  $v_\infty \rightarrow 0$ ;  $q \rightarrow q_0$  при фиксированном  $q_0$  и  $v_\infty \rightarrow \infty$ .

*Замечание.* Задачи 1.34–1.37 описывают *гравитационное рассеяние* частиц в поле притягивающего центра  $O$  и *гравитационный*

*маневр* космического аппарата. В реальной ситуации при  $q \leq R$  происходит падение на притягивающее тело  $O$ , радиус которого мы обозначили  $R$ . Прицельное расстояние  $q_0$  при  $q = R$  называют эффективным радиусом тела  $O$ . Результативность маневра (например, угол поворота скорости  $\theta_2$ ) возрастает с уменьшением  $v_\infty$ , но одновременно растет эффективный радиус, ограничивающий реальные возможности маневра. Следующая задача решает вопрос, что важнее для эффективности рассеяния (маневра): малый радиус и малая масса или большой радиус и большая масса.

**Задача 1.38.** Считая притягивающий центр шаром с радиусом  $R$  и средней плотностью  $\rho$ , выразить  $q_0$  и  $\theta_2$  при  $q = R$  через  $R, \rho, v_\infty$ .

*Ответ:*

$$q_0 = R \sqrt{1 + \frac{8\pi G \rho R^2}{3v_\infty^2}}, \quad \frac{\theta_2}{2} = \arcsin \left[ 1 + \frac{3v_\infty^2(3v_\infty^2 + 8\pi G \rho R^2)}{16\pi^2 G^2 \rho^2 R^4} \right]^{-1/2}.$$

**Задача 1.39.** В условиях задачи 1.38 показать, что  $q_0 \rightarrow R, \theta_2 \rightarrow 0$  при  $v_\infty \rightarrow \infty$  и фиксированных  $\rho, R$ ;  $q_0 \rightarrow \infty, \theta_2 \rightarrow \pi$  при  $v_\infty \rightarrow 0$  и фиксированных  $\rho, R$ .

**Задача 1.40.** В условиях задачи 1.38 показать, что  $q_0$  и  $\theta_2$  возрастают вместе с  $\rho$  при фиксированных  $R, v_\infty$ .

**Задача 1.41.** В условиях задачи 1.38 показать, что  $q_0$  и  $\theta_2$  возрастают вместе с  $R$  при фиксированных  $\rho, v_\infty$ .

**Задача 1.42.** Показать, что при  $c = \text{const}, v_\infty \rightarrow 0$  гипербола бесконечно мало отличается от параболы; при  $c = \text{const}, v_\infty \rightarrow \infty$  — от прямой, проходящей бесконечно близко от  $O$ ; при  $c \rightarrow \infty, v_\infty \rightarrow \infty, c/v_\infty = \text{const}$  — от прямой, проходящей на расстоянии  $c/v_\infty$  от  $O$ . Имеется в виду близость любого сколь угодно большого, но конечного участка гиперболы.

**Задача 1.43.** При фиксированном  $r$  скорость на круговой орбите называется *круговой* или *первой космической* скоростью (последнее употребляется, как правило, при  $r$ , равном или немного больше радиуса притягивающего тела); скорость на параболической орбите — *параболической* или *второй космической* или *скоростью убегания*. Найти эти скорости.

*Ответ:*

$$v_c = \frac{\varkappa}{\sqrt{r}}, \quad v_p = \varkappa \sqrt{\frac{2}{r}}, \quad v_p = v_c \sqrt{2}.$$

*Замечание.* Вектор круговой скорости надо направить перпендикулярно вектору  $\mathbf{r}$ , чтобы получить круговую орбиту. Вектор параболической скорости при любом направлении, неколлинеарном вектору  $\mathbf{r}$ , приводит к параболе.

**Задача 1.44.** Показать, что формулы (1.48)–(1.49) справедливы и для гиперболы; в формулах (1.50) следует изменить знак перед корнем.

*Замечание.* В соответствии с определением сопряженной аномалии (см. с. 30) на гиперболе луч  $O'П$  при  $\theta > 0$  вращается по часовой стрелке до совмещения с  $O'Q$ . Поэтому  $\theta$  и  $\tilde{\theta}$  имеют разные знаки. В согласии с рис. 1.9 следует считать  $-(\pi - \theta_0) < \tilde{\theta} < \pi - \theta_0$ . В предельном случае параболы сопряженная аномалия вырождается в тождественный нуль:  $\tilde{\theta} = 0$ .

**Задача 1.45.** Выразить координаты через сопряженную аномалию:

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - 2e \cos \tilde{\theta} + e^2}{1 - e \cos \tilde{\theta}}, \quad \frac{x_3}{a} = \frac{(1 + e^2) \cos \tilde{\theta} - 2e}{1 - e \cos \tilde{\theta}}, \quad \frac{y_3}{a} = \frac{(1 - e^2) \sin \tilde{\theta}}{1 - e \cos \tilde{\theta}}.$$

**Задача 1.46.** Выразить скорости через сопряженную аномалию:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}}{v_c} &= \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\tilde{\theta}}{1-2e\cos\tilde{\theta}+e^2}, & \frac{r\dot{\theta}}{v_c} &= \frac{\sqrt{1-e^2}(1-e\cos\tilde{\theta})}{1-2e\cos\tilde{\theta}+e^2}, \\ \frac{\dot{x}_3}{v_c} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}\sin\tilde{\theta}}{1-2e\cos\tilde{\theta}+e^2}, & \frac{\dot{y}_3}{v_c} &= \frac{\sqrt{1-e^2}(\cos\tilde{\theta}-e)}{1-2e\cos\tilde{\theta}+e^2}, \\ & & \frac{v}{v_c} &= \sqrt{\frac{1-e^2}{1-2e\cos\tilde{\theta}+e^2}}, \end{aligned}$$

где  $v_c$  — круговая скорость на расстоянии  $a$ .

**Задача 1.47.** Найти максимальное значение (чебышевскую норму) разности аномалий  $E - M$  в эллиптическом движении.

*Ответ:*

$$\|E - M\| = e.$$

**Задача 1.48.** То же для  $\theta - E$ ,  $\tilde{\theta} - E$ .

*Указание.* Вывести сначала формулу

$$\frac{d(\theta - E)}{dE} = \frac{2\beta(\cos E - \beta)}{1 - 2\beta \cos E + \beta^2}$$

и воспользоваться (1.29).



Ответ:

$$\|\theta - E\| = \|\tilde{\theta} - E\| = 2 \arcsin \beta = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} \beta^{2k+1}.$$

С точностью до пятой степени

$$\|\theta - E\| = 2\beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{3\beta^5}{20} = e + \frac{7}{24}e^3 + \frac{103}{640}e^5.$$

Ряды сходятся при  $|\beta| \leq 1$ ,  $|e| \leq 1$ .

**Задача 1.49.** То же для  $\theta - M$ .

*Указание.* Вывести сначала формулы

$$\begin{aligned} \theta - M &= e \sin E + 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E}, \\ \frac{d(\theta - M)}{dE} &= \frac{e [-2\beta \cos^2 E + 2(1 + \beta^2) \cos E - \beta(1 + \beta^2)]}{1 - 2\beta \cos E + \beta^2}. \end{aligned}$$

Производная обращается в нуль при

$$\cos E = (1 + \beta^2 - \sqrt{1 - \beta^4})/(2\beta), \quad \sin E = \pm \alpha/(2\beta),$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt{2 \left[ (1 + \beta^2) \sqrt{1 - \beta^4} - 1 + \beta^2 \right]}.$$

Ответ:

$$\|\theta - M\| = \frac{\alpha}{1 + \beta^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \beta^4} - \beta^2}.$$

Разлагая в ряды, получаем

$$\|\theta - M\| = 4\beta \left( 1 - \frac{13}{24}\beta^2 + \dots \right) = 2e \left( 1 + \frac{11}{96}e^2 + \dots \right).$$

Радиус сходимости рядов равен единице.

**Задача 1.50.** Найти стационарные точки функции  $f(E) = \tilde{\theta} - M$ .

*Указание.* Вывести сначала формулы

$$\begin{aligned} f(E) &= e \sin E - 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin E}{1 + \beta \cos E}, \\ \frac{df(E)}{dE} &= \frac{e\beta}{1 + 2\beta \cos E + \beta^2} (2 \cos^2 E - 1 - \beta^2). \end{aligned}$$

*Ответ.* По симметрии достаточно считать  $0 \leq E \leq \pi$ . В этом промежутке две стационарные точки  $E_1, E_2$ :

$$\cos E_1 = -\cos E_2 = \sqrt{(1+\beta^2)/2}, \quad \sin E_1 = \sin E_2 = \sqrt{(1-\beta^2)/2},$$

$$f(E_1) = \frac{\beta\sqrt{2(1-\beta^2)}}{1+\beta^2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{2} + \beta\sqrt{1+\beta^2}},$$

$$f(E_2) = \frac{\beta\sqrt{2(1-\beta^2)}}{1+\beta^2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{2} - \beta\sqrt{1+\beta^2}}.$$

**Задача 1.51.** Найти  $\|\tilde{\theta} - M\|$ .

*Указание.* Пользуясь соотношениями

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < x \quad \text{при} \quad x > 0,$$

доказать неравенства

$$f(E_1) > 0, \quad f(E_2) < 0, \quad |f(E_2)| - f(E_1) > 0.$$

*Ответ:*

$$\|\tilde{\theta} - M\| = |f(E_2)| = \beta^2 \left( 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\beta + \dots \right) = \frac{e^2}{4} \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}e + \dots \right).$$

Радиус сходимости рядов равен единице.

**Задача 1.52.** Шарообразный спутник движется вокруг шарообразной планеты по эллиптической орбите (рис. 1.12). Ось вращения спутника совпадает с направлением вектора площадей, а периоды вращения и обращения совпадают. Отрезок, соединяющий центр планеты  $O$  с центром спутника  $Q$ , пересекает поверхность спутника в точке  $B$ . Параметризуем  $B$  истинной аномалией  $\theta$ . Показать, что описывающий геометрическую либрацию угол  $\psi = B(0)QB(\theta)$  равен  $\theta - M$ . Найти наибольшее значение  $\psi$  для Луны ( $e = 0.05$ ) и Фобоса ( $e = 0.02$ ).

*Ответ:*  $\|\psi\| \approx 0.10003 \approx 5.731^\circ$  и  $\|\psi\| \approx 0.04000 \approx 2.292^\circ$  соответственно.

**Задача 1.53.** Пусть в условиях задачи 1.52 отрезок, соединяющий пустой фокус  $O'$  с центром спутника  $Q$ , пересекает поверхность

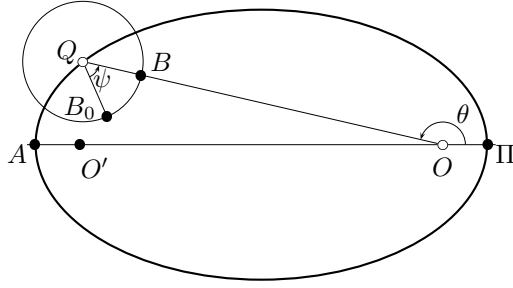


Рис. 1.12. Геометрическая либрация шарообразного спутника на эллиптической орбите. Точки  $O$  и  $Q$  — центры планеты и спутника,  $O'$  — пустой фокус;  $B$  — точка поверхности спутника, в которой планета видна в зените;  $B_0$  — точка поверхности спутника, в которой планета видна в зените в эпоху перигея; АП — линия апсид;  $\theta$  — истинная аномалия,  $\psi$  — угол геометрической либрации.

спутника в точке  $\tilde{B}$ . Параметризуем  $\tilde{B}$  сопряженной аномалией  $\tilde{\theta}$ . Показать, что угол  $\tilde{\psi} = \tilde{B}(0)Q\tilde{B}(\tilde{\theta})$  равен  $\tilde{\theta} - M$ . Найти наибольшее значение  $\tilde{\psi}$  для Луны и Фобоса.

Ответ:  $\|\tilde{\psi}\| \approx 0.00065 \approx 2'.25$  и  $\|\tilde{\psi}\| \approx 0.00010 \approx 0'.35$  соответственно.

Таким образом, синхронные с планетой спутники практически обращены одной стороной к пустому фокусу.

**Задача 1.54.** Доказать сходимость процесса (1.45) при  $e = 1$ ,  $M = 0$  и произвольном  $H_0$ .

**Задача 1.55.** Показать, что  $F'(t_0, t), G'(t_0, t)$  в формулах (1.87) суть производные от  $F(t_0, t), G(t_0, t)$  по  $t$ .

**Задача 1.56.** Показать, что  $F, G$  как функции от  $t$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\ddot{w} + \frac{\kappa^2}{r^3} w = 0$$

с начальными данными

$$F = \dot{G} = 1, \quad \dot{F} = G = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

**Задача 1.57.** Получить аналог формул (1.90) для гиперболы и прямолинейно-гиперболической орбиты.

*Ответ:*

$$F = \frac{\operatorname{ch}(H - H_0) - e \operatorname{ch} H_0}{1 - e \operatorname{ch} H_0}, \quad G = \frac{-\operatorname{sh}(H - H_0) + e \operatorname{sh} H - e \operatorname{sh} H_0}{n},$$

$$F' = -\frac{n \operatorname{sh}(H - H_0)}{(1 - e \operatorname{ch} H)(1 - e \operatorname{ch} H_0)}, \quad G' = \frac{\operatorname{ch}(H - H_0) - e \operatorname{ch} H}{1 - e \operatorname{ch} H}.$$

**Задача 1.58.** Получить аналог формул (1.90) для параболы.

*Ответ:*

$$F = \frac{1 + 2\sigma\sigma_0 - \sigma^2}{1 + \sigma_0^2}, \quad G = \frac{(\sigma - \sigma_0)(1 + \sigma\sigma_0)}{n_0},$$

$$F' = \frac{2n_0(\sigma_0 - \sigma)}{(1 + \sigma^2)(1 + \sigma_0^2)}, \quad G' = \frac{1 + 2\sigma\sigma_0 - \sigma_0^2}{1 + \sigma^2}.$$

Здесь  $n_0 = 2\kappa p^{-3/2}$ .

**Задача 1.59.** Получить две последние из формул (1.89) из первых двух дифференцированием по времени, отвечающему истинной аномалии  $\theta$ . Прodelайте аналогичную операцию с формулами (1.90) и формулами задач 1.57, 1.58.

**Задача 1.60.** Известен период  $P$  и большая полуось  $a > 0$  относительного движения тел  $Q_1, Q_2$ . Найти сумму масс.

*Ответ:*

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}.$$

**Задача 1.61.** Известен период  $P$  и большие полуоси  $a_1, a_2$  движения тел  $Q_1, Q_2$  относительно барицентра. Найти массы  $Q_1, Q_2$ .

*Ответ:*

$$m_1 = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)^2 a_2}{GP^2}, \quad m_2 = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)^2 a_1}{GP^2}.$$

## Глава 2

# Пространства орбит

Мы подробно изучили решения уравнения (1.1). Основное внимание уделялось свойствам конкретной орбиты. Пора исследовать свойства совокупности орбит, т. е. перейти к построению пространства орбит и определению его свойств, прежде всего метрических и, следовательно, топологических.

Слово *орбита* употребляется в астрономии в нескольких смыслах (ясных обычно из контекста). Перечислим основные.

1. Решение уравнения (1.1) как параметризованная временем кривая<sup>1</sup>, вложенная в подходящее пространство. Обычно это конфигурационное пространство. Но можно считать ее вложенной в фазовое пространство и даже в расширенное конфигурационное или фазовое пространство с добавлением времени в качестве еще одной координаты. Все эти представления эквивалентны, ибо связаны взаимно однозначной зависимостью. Поскольку орбиту (будем называть ее в этом случае кинематической) можно отождествить с шестимерным вектором положения и скорости, пространство кинематических орбит совпадает с фазовым пространством  $\mathbb{K}$ . Последнее легко метризуется — достаточно пользоваться любой метрикой пространства  $\mathbb{R}^6 \supset \mathbb{K}$ .

Наглядно орбиту можно представить себе как проволоку (траекторию) со скользящей по ней бусинкой (планетой).

2. Класс всех параметризаций решения уравнения (1.1), не меняющих направления течения времени, т. е. вложенное в подхо-

---

<sup>1</sup>Вместо (1.1) можно рассматривать и другие уравнения движения.

дящее пространство множество точек кинематической орбиты вместе с порядком их прохождения. Орбиту определяет однозначно набор 5 элементов (эпоха  $T$  роли не играет). Наглядно орбиту можно представить себе как проволоку с указанным направлением движения.

Как и в предыдущем случае, для непрямолинейной орбиты безразлично, в какое пространство мы ее вкладываем. Но для прямолинейной орбиты пространство указать необходимо. Например, лежащие на одном луче восходящие ветви неограниченных прямолинейных орбит различны для разных  $h \geq 0$ , если они вложены в *фазовое* пространство. Но в *конфигурационном* пространстве они совпадают. Ситуацию иллюстрирует рис. 2.1, где на двумерном подпространстве  $(r, \dot{r})$  фазового пространства представлено семейство прямолинейных орбит, параметризованное энергией  $h$ . Каждому  $h \geq 0$  отвечают две орбиты (в верхней полуплоскости — восходящая, в нижней — нисходящая ветвь), имеющие горизонтальные асимптоты  $\dot{r} = \pm\sqrt{2h}$ . При  $h = 0$  обе асимптоты сливаются в одну  $\dot{r} = 0$ . При  $h < 0$  орбита одна, график простирается вправо до точки  $r = -\kappa^2/h, \dot{r} = 0$ , в которой касательная к графику вертикальна. Прямая  $r = 0$  — общая асимптота для графиков всех орбит.

3. Класс всех параметризаций решения уравнения (1.1), т. е. множество точек кинематической орбиты. Пространство вложения здесь безразлично. Наглядно орбиту можно представить себе как проволоку.

Последние два типа орбит назовем геометрическими.

Для разных задач нужны разные определения орбит. При нахождении орбит из наблюдений нужна кинематическая орбита. При отождествлении астероидов, поиске родительской кометы метеорных потоков нужна орбита, определенная в п. 2. При нахождении минимального расстояния и возможности пересечения (задачи астероидной опасности, выбора безопасных орбит космических аппаратов) нужна орбита, определенная в п. 3.

В этой главе мы будем заниматься только геометрическими орбитами. В первых двух параграфах рассмотрим орбиты п. 2, далее коснемся и орбит п. 3.

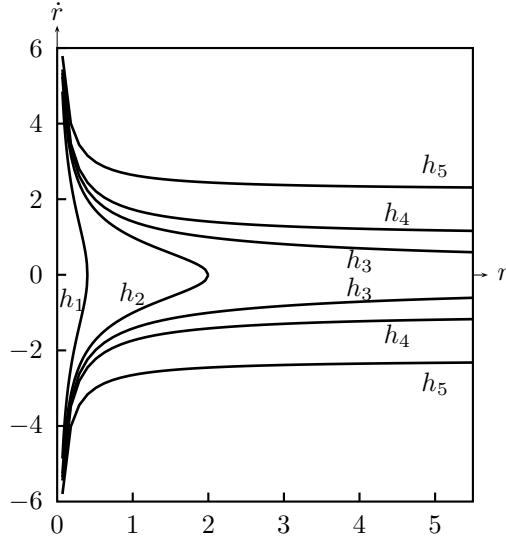


Рис. 2.1. Семейство прямолинейных орбит при  $h = h_n$ :  
 $h_1 = -5$ ,  $h_2 = -1$ ,  $h_3 = 0$ ,  $h_4 = 1$ ,  $h_5 = 5$ ;  $\varkappa^2 = 1$ .

## 2.1. Пространство непрямолинейных орбит $\mathcal{H}(b)$

Труднее всего поддаются описанию прямолинейные орбиты. Вспомним, например, что годограф скорости любой криволинейной орбиты представляет собой окружность или ее часть, а для прямолинейной орбиты — часть прямой (задачи 1.30, 1.31). Опишем сначала проще устроенное пространство  $\mathcal{H}(b)$ ,  $b \geq 0$ , состоящее из орбит с постоянной площадью  $c > b$ . Пространство  $\mathcal{H}(0)$  совпадает с пространством непрямолинейных орбит. На первый взгляд проще всего задать орбиту набором пяти элементов типа  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $g$ . Однако хотя эти пять чисел однозначно определяют орбиту, обратное неверно. Например, для круговой орбиты угол  $g$ , а для лежащей в основной плоскости угол  $\Omega$  безразличны, что затрудняет введение метрики и даже топологии. Мы зададим представляющую орбиту точку  $\mathcal{E} \in \mathcal{H}(b)$  набором векторных интегралов

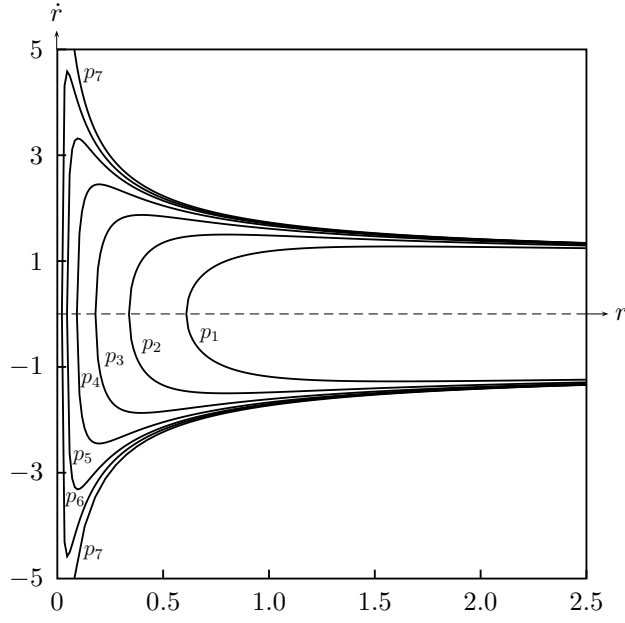


Рис. 2.2. Семейство гипербол, стягивающихся к прямолинейно-гиперболической орбите;  $h = \text{const}$ ,  $h > 0$ ,  $\varkappa^2 = 1$ ,  $p_1 = 1.6$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $p_3 = 0.4$ ,  $p_4 = 0.2$ ,  $p_5 = 0.1$ ,  $p_6 = 0.05$ ,  $p_7 = 0$ .

площадей и Лапласа  $(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = (c_1, c_2, c_3; e_1, e_2, e_3)$ , связанных соотношениями

$$\mathbf{c}\mathbf{e} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = 0, \quad (2.1)$$

$$c > b \quad \Longleftrightarrow \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 > b^2. \quad (2.2)$$

Вектор  $\mathbf{c}$  — ненулевой. Поэтому ориентированная плоскость движения, постоянная энергии, параметр, эксцентриситет, большая полуось определены однозначно. Согласно (1.9), (1.21), (1.22)

$$p = \frac{c^2}{\varkappa^2}, \quad e = |\mathbf{e}|, \quad h = \frac{\varkappa^4(e^2 - 1)}{2c^2}, \quad a = \frac{c^2}{\varkappa^2(1 - e^2)}. \quad (2.3)$$

Направление линии апсид при  $e = 0$  безразлично, а при  $e > 0$  определяется однозначно.



Итак, мы построили  $\mathcal{H}(b)$  как вложенное в  $\mathbb{R}^6$  посредством соотношений (2.1, 2.2) пятимерное многообразие. Иными словами,  $\mathcal{H}(b)$  — часть вложенного в  $\mathbb{R}^6$  пятимерного конуса второго порядка (2.1), расположенная вне произведения трехмерного пространства векторов  $\mathbf{e}$  на трехмерный шар  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \leq b^2$  пространства векторов  $\mathbf{c}$ . При  $b = 0$  удаляемый шар схлопывается в точку  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Многообразие некомпактно. Во-первых, оно неограничено. Во-вторых, его дополнение до конуса (2.1) содержит край  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = b^2$ . При  $b > 0$  его можно добавить в  $\mathcal{H}(b)$ , получив многообразие  $\overline{\mathcal{H}(b)}$  с краем. При  $b = 0$  этого делать нельзя. Действительно, точке  $(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = (0, 0, 0; 2, 0, 0)$  не отвечает ни одна орбита (прямолинейные орбиты имеют единичный вектор Лапласа), а точке  $(0, 0, 0; 1, 0, 0)$  отвечает континуум прямолинейных орбит при произвольном  $h$ .

В  $\mathcal{H}(b)$  естественно ввести метрику, отвечающую метрике объемлющего пространства  $\mathbb{R}^6$ , например, евклидову. Именно, любым двум орбитам  $\mathcal{E}_k(\mathbf{c}_k, \mathbf{e}_k) \in \mathcal{H}(b)$  сопоставим расстояние между ними

$$\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{\frac{1}{\varkappa^2 a_0} (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)^2 + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^2}. \quad (2.4)$$

Здесь  $a_0 > 0$  — имеющий размерность длины масштабный множитель; расстояние (2.4) оказывается безразмерным. Если потребовать, чтобы расстояние имело размерность длины, следует  $\varrho$  заменить на  $\varrho^* = a_0 \varrho$ .

### Теорема 1

Пространство  $\mathcal{H}(b)$ ,  $b \geq 0$  связно.

Доказательство. Пусть  $\mathcal{E}_k(\mathbf{c}_k, \mathbf{e}_k) \in \mathcal{H}(b)$ ,  $k = 1, 2$ . Соединим эти две точки расположенной в  $\mathcal{H}(b)$  непрерывной кривой следующим образом.

1. Начинаем с точки  $\mathcal{E}_1(\mathbf{c}_1, \mathbf{e}_1)$ . Не меняя направления  $\mathbf{e}_1$ , уменьшаем его длину до нуля. Приходим к точке  $\mathcal{E}_3(\mathbf{c}_1, 0)$ .
2. Поворачиваем  $\mathbf{c}_1$  до совпадения его направления с направлением  $\mathbf{c}_2$ . Приходим к точке  $\mathcal{E}_4(c_1 c_2 / c_2, 0)$ .
3. Не меняя направления вектора площадей, изменяем монотонно его длину до длины  $\mathbf{c}_2$ . Приходим к точке  $\mathcal{E}_5(\mathbf{c}_2, 0)$ .
4. Вектор Лапласа увеличиваем в направлении  $\mathbf{e}_2$  от 0 до  $\mathbf{e}_2$ . Приходим к точке  $\mathcal{E}_2(\mathbf{c}_2, \mathbf{e}_2)$ .

Все четыре операции сохраняют соотношения (2.1), (2.2). Теорема доказана.

## Теорема 2

Пространство  $\mathcal{H}(b)$ ,  $b \geq 0$  есть пятимерное открытое многообразие.

Пусть  $\mathcal{E}_0(\mathbf{c}_0, \mathbf{e}_0) \in \mathcal{H}(b)$ . Повернем оси координат так, чтобы вектор площадей и вектор Лапласа имели составляющие  $\mathbf{c}_0(0, 0, c_0)$ ,  $\mathbf{e}_0(e_0, 0, 0)$ . Заметим, что поворот осей не меняет метрики (2.4).

Представим координаты произвольной близкой к  $\mathcal{E}_0$  точки  $\mathcal{E} \in \mathcal{H}(b)$  в виде

$$c_1 = z_1, c_2 = z_2, c_3 = c_0 + z_3; \quad e_1 = e_0 + z_4, e_2 = z_5, e_3 = f(z), \quad (2.5)$$

где в силу (2.1), (2.2)

$$f(z) = -\frac{z_1(e_0 + z_4) + z_2 z_5}{c_0 + z_3},$$

$$c_0 > b, \quad z_1^2 + z_2^2 + (c_0 + z_3)^2 > b^2. \quad (2.6)$$

Отсюда вытекает, что любой точке  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{R}^5$  из достаточно малого шара  $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_5^2 < \varepsilon^2$  соответствует точка  $\mathcal{E}(c_1, c_2, c_3; e_1, e_2, e_3) \in \mathcal{H}(b)$  с координатами (2.5), причем из  $z \rightarrow 0$  (в смысле евклидовой метрики  $\mathbb{R}^5$ ) вытекает  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_0$  (в смысле метрики  $\varrho$ ). Обратно, каждой близкой к  $\mathcal{E}_0$  (в смысле метрики  $\varrho$ ) точке  $\mathcal{E} \in \mathcal{H}(b)$  соответствует точка  $z = (c_1, c_2, c_3 - c_0; e_1 - e_0, e_2) \in \mathbb{R}^5$ , причем из  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_0$  (в смысле метрики  $\varrho$ ) вытекает  $z \rightarrow 0$  (в смысле евклидовой метрики  $\mathbb{R}^5$ ). Непрерывность в обе стороны зависимости  $(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \longleftrightarrow z$  завершает доказательство.

Пространство  $\mathcal{H}(b)$ ,  $b \geq 0$  неполно: если  $\mathbf{c}_n \rightarrow \mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_0$ ,  $|\mathbf{c}_0| = b$ , то последовательность  $\{\mathcal{E}(\mathbf{c}_n, \mathbf{e}_n)\}$  не имеет предела в  $\mathcal{H}(b)$ . При  $b > 0$  его можно пополнить, добавив край  $c = b$ . При  $b = 0$  мы видели, что такое пополнение лишено содержательного смысла.

## 2.2. Пространство орбит $\mathcal{H}$

Будем считать *одной* орбитой восходящую и нисходящую ветви неограниченных прямолинейных траекторий. В противном случае нам не удастся метризовать пространства. Например, при фиксированном  $h > 0$  и  $e \rightarrow 1, p \rightarrow 0$  гипербола приближается к совокупности двух ветвей прямолинейно-гиперболической орбиты (см.

рис. 2.2). Если их считать двумя различными орбитами, то нарушится непрерывность и метризация невозможна.

При таком допущении орбита локально определяется пятью элементами и пространство орбит  $\mathcal{H}$  по-прежнему пятимерно. Но погрузить его теперь придется уже не в шестимерное, а в семимерное пространство, считая орбиту точкой  $\mathcal{E}(\mathbf{c}, \mathbf{e}, h) \in \mathbb{R}^7$ , расположенной на пятимерной алгебраической поверхности, определяемой двумя уравнениями

$$\mathbf{c}\mathbf{e} = 0, \quad 2hc^2 - \varkappa^4(e^2 - 1) = 0 \quad (2.7)$$

второго и третьего порядка соответственно.

Метрикой в  $\mathcal{H}$  будем считать евклидову метрику в  $\mathbb{R}^7$ :

$$\varrho_1(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{\frac{1}{\varkappa^2 a_0}(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2)^2 + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^2 + \frac{a_0^2}{\varkappa^4}(h_1 - h_2)^2}. \quad (2.8)$$

Можно ввести и имеющую размерность длины метрику  $\varrho_1^* = a_0 \varrho_1$ .

При любом  $b \geq 0$  пространство  $\mathcal{H}(b)$  есть подмножество пространства  $\mathcal{H}$ . Очевидно

$$\varrho \leq \varrho_1. \quad (2.9)$$

С другой стороны, для двух орбит из  $\mathcal{H}(b)$

$$h_1 - h_2 = \frac{\varkappa^4}{2c_1^2 c_2^2} [c_2^2(e_1^2 - e_2^2) + (1 - e_2^2)(c_1^2 - c_2^2)].$$

Поэтому во всякой ограниченной части  $\mathcal{H}(b)$ ,  $b > 0$  и во всякой компактной части  $\mathcal{H}(0)$  найдется постоянная  $A$  такая, что

$$\varrho_1 \leq A\varrho. \quad (2.10)$$

Следовательно,  $\varrho$ ,  $\varrho_1$  задают одинаковую топологию в  $\mathcal{H}(0)$ . В частности, если последовательность точек  $\mathcal{E}_n \in \mathcal{H}(0)$  сходится к точке  $\mathcal{E}_0 \in \mathcal{H}(0)$  в метрике  $\varrho$ , то она сходится к  $\mathcal{E}_0$  и в метрике  $\varrho_1$ . Обратно, сходимость в метрике  $\varrho_1$  влечет сходимость в метрике  $\varrho$ .

В пространстве  $\mathcal{H}(b)$ ,  $b > 0$  понятия сходимости в себе в метриках  $\varrho$  и  $\varrho_1$  также совпадают. Однако при  $b = 0$  это уже не так. В самом деле, последовательность точек  $\mathcal{E}_n(\mathbf{c}_n, \mathbf{e}_n, h_n) \in \mathcal{H}(0)$  при

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n &= \frac{\mathbf{c}_1}{n}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1 \sqrt{\frac{n+1}{2n}}, \quad h_n = nh_1, \\ |\mathbf{c}_1| &= \varkappa\sqrt{a_0}, \quad |\mathbf{e}_1| = \sqrt{2}, \quad \mathbf{c}_1\mathbf{e}_1 = 0, \quad h_1 = \frac{\varkappa^2}{2a_0} \end{aligned}$$

сходится в себе в метрике  $\varrho$  и расходится в метрике  $\varrho_1$ . Грубо говоря, для метрики  $\varrho$  все прямолинейные орбиты одинаковы, а метрика  $\varrho_1$  их различает по энергии  $h$ .

### Теорема 3

*Пространство  $\mathcal{H}$  связно.*

Доказательство. Если  $\mathbf{c}_1 \neq 0$ ,  $\mathbf{c}_2 \neq 0$ , то достаточно сослаться на теорему 1 с учетом эквивалентности метрик  $\rho$ ,  $\rho_1$  в  $\mathcal{H}(b)$  при  $2b = \min\{|\mathbf{c}_1|, |\mathbf{c}_2|\}$ . Если  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = 0$ , то достаточно повернуть единичные векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  до совпадения и изменить  $h_1$  до совпадения с  $h_2$ .

Пусть  $\mathbf{c}_1 \neq 0$ ,  $\mathbf{c}_2 = 0$ . Повернем пару  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{e}_1)$  так, чтобы направления  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  совпали. Затем изменим длину  $\mathbf{e}_1$  до его совпадения с  $\mathbf{e}_2$ , одновременно изменяя  $h_1$  до нуля в согласии со вторым из уравнений (2.7). Далее, не меняя направления  $\mathbf{c}_1$ , уменьшим его длину до нуля. Наконец, изменим  $h_1$  от нуля до  $h_2$ . Все выполненные операции не нарушали соотношений (2.7). Теорема доказана.

### Теорема 4

*Пространство  $\mathcal{H}$  есть пятимерное открытое многообразие.*

Рассмотрим произвольную точку  $\mathcal{E}_0 \in \mathcal{H}$ . Если она лежит в  $\mathcal{H}(0)$ , то по теореме 2 она входит в  $\mathcal{H}(0)$  вместе с некоторой окрестностью в смысле метрики  $\varrho$ , а, следовательно, и в смысле метрики  $\varrho_1$ .

Пусть  $\mathcal{E}_0$  представляет собой прямолинейную орбиту. Поворачивая оси, запишем ее координаты в виде  $\mathcal{E}_0(0, 0, 0; 0, 0, 1; h_0)$ . Координаты произвольной близкой к  $\mathcal{E}_0$  точки  $\mathcal{E} \in \mathcal{H}$  представим в виде

$$c_1 = z_1, c_2 = z_2, c_3 = f(z); e_1 = z_3, e_2 = z_4, e_3 = 1+g(z); h = h_0+z_5, \quad (2.11)$$

где в силу (2.1)

$$z_1 z_3 + z_2 z_4 + (1+g)f = 0, \quad 2(h_0+z_5)(z_1^2+z_2^2+f^2) = z_3^2+z_4^2+(1+g)^2-1. \quad (2.12)$$

Обозначая временно  $x = (1+g)^2$ , найдем из первого из соотношений (2.12)

$$f = -\frac{z_1 z_3 + z_2 z_4}{\sqrt{x}}. \quad (2.13)$$

Подставляя во второе из равенств (2.12), получаем квадратное уравнение

$$x^2 - Bx - C = 0, \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} B &= 1 - (z_3^2 + z_4^2) + 2(h_0 + z_5)(z_1^2 + z_2^2), \quad C = 2(h_0 + z_5)(z_1 z_3 + z_2 z_4)^2, \\ D &= B^2 + 4C = 1 - 2[(z_3^2 + z_4^2) - 2(h_0 + z_5)(z_1^2 + z_2^2)] + \left\{ (z_3^2 + z_4^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. 4(h_0 + z_5)^2(z_1^2 + z_2^2)^2 - 4(h_0 + z_5)[(z_1^2 + z_2^2)(z_3^2 + z_4^2) - 2(z_1 z_2 + z_3 z_4)^2] \right\}. \end{aligned}$$

Определим  $x$  как следующее решение (2.14):

$$x = \frac{1}{2}(B + \sqrt{D}),$$

откуда

$$g = \sqrt{\frac{1}{2}(B + \sqrt{D})} - 1, \quad f = -(z_1 z_3 + z_2 z_4) \sqrt{\frac{2}{B + \sqrt{D}}}. \quad (2.15)$$

Фиксируем точку  $z = (z_1, \dots, z_5) \in \mathbb{R}^5$  из произвольного достаточно малого шара

$$z_1^2 + \dots + z_5^2 < \varepsilon^2. \quad (2.16)$$

Тогда  $B = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,  $C = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,  $D = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,  $f$  и  $g$  вещественны, причем  $f = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,  $g = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

Отсюда вытекает, что любой точке  $z = (z_1, \dots, z_5) \in \mathbb{R}^5$  из достаточно малого шара (2.16) соответствует точка  $\mathcal{E}(c_1, c_2, c_3; e_1, e_2, e_3; h) \in \mathcal{H}$  с координатами (2.11), причем из  $z \rightarrow 0$  (в смысле евклидовой метрики  $\mathbb{R}^5$ ) вытекает  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_0$  (в смысле метрики  $\varrho_1$ ). Обратно, каждой близкой к  $\mathcal{E}_0$  (в смысле метрики  $\varrho_1$ ) точке  $\mathcal{E} \in \mathcal{H}$  соответствует точка  $z = (c_1, c_2, e_1, e_2, h - h_0) \in \mathbb{R}^5$ , причем из  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_0$  (в смысле метрики  $\varrho_1$ ) вытекает  $z \rightarrow 0$  (в смысле евклидовой метрики  $\mathbb{R}^5$ ). Непрерывность в обе стороны зависимости  $(\mathbf{c}, \mathbf{e}, h) \longleftrightarrow z$  завершает доказательство.

### Теорема 5

*Пространство  $\mathcal{H}$  полно.*

Таблица 2.1. Характеристики типов орбит

Тип орбиты	$c$	$p$	$h$	$a$	$e$	$\dim$
эллипс	+	+	−	+	$0 \leq e < 1$	5
окружность	+	+	−	+	0	3
гипербола	+	+	+	−	$e > 1$	5
парабола	+	+	0	$\pm\infty$	1	4
прямолинейно-эллиптическая	0	0	−	+	1	3
прямолинейно-гиперболическая	0	0	+	−	1	3
прямолинейно-параболическая	0	0	0	$\pm\infty$	1	2

Доказательство следует из полноты  $\mathbb{R}^7$  и непрерывности левых частей (2.7).

В заключение параграфа приведем таблицу, описывающую качественно все типы орбит (табл. 2.1).

Таблица содержит все 6 основных типов орбит, а также один подтип — круговые орбиты, являющиеся частным случаем эллиптических. Знаки (+) и (−) поставлены вместо ( $> 0$ ) и ( $< 0$ ). В последнем столбце приведена размерность подпространства  $\mathcal{H}$ , отвечающего данному типу орбит.

### 2.3. Взаимное расположение пары кеплеровских орбит

Основное внимание мы уделяли до сих пор свойствам конкретной орбиты и ее окружения. Сейчас займемся свойствами произвольной пары орбит. Можно сказать, что от задачи притягивающего центра мы переходим к декартовому произведению таких задач. Одно подобное свойство уже установлено в предыдущих параграфах этой главы: любые две орбиты можно преобразовать друг в друга непрерывной деформацией.

Под орбитой в этом и следующем параграфах будем понимать множество точек в конфигурационном пространстве  $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{R}^3$ .

### 2.3.1. Пересечение

В случае общего положения две орбиты не имеют общих точек. Пересечение орбит — случай исключительный. Он становится общим, если считать орбиты расположенными в одной плоскости. Каково наибольшее количество общих точек у двух *различных* орбит  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ ?

Две прямолинейные орбиты, расположенные на разных лучах, общих точек не имеют. Если же они лежат на одном луче, то одна из них является частью другой: существует континуум общих точек.

Прямолинейная и криволинейная орбиты могут иметь лишь одну общую точку.

Далее в этом разделе считаем орбиты различными и непрямолинейными. Докажем, что они пересекаются не более чем в двух точках.

Пусть орбиты некомпланарны. Пересечение может произойти только на линии узлов, причем совпасть могут лишь пары точек, лежащие по разные стороны от  $O$ .

Для компланарных орбит примем их общую плоскость за основную. Условие пересечения орбит сводится к уравнению

$$\frac{p_1}{1 + e_1 \cos(u - g_1)} = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos(u - g_2)} \quad (2.17)$$

относительно общего аргумента широты  $u$ . Соотношение (2.17) равносильно тригонометрическому уравнению первого порядка

$$A \cos u + B \sin u = C \quad (2.18)$$

при

$$A = p_2 e_1 \cos g_1 - p_1 e_2 \cos g_2, \quad B = p_2 e_1 \sin g_1 - p_1 e_2 \sin g_2, \quad C = p_1 - p_2.$$

Вычислим квадрат амплитуды синусоиды

$$D = A^2 + B^2 = p_2^2 e_1^2 + p_1^2 e_2^2 - 2p_1 p_2 e_1 e_2 \cos(g_2 - g_1).$$

Вырождение уравнения (2.18), т. е. обращение  $D$  в нуль, возможно в двух случаях. Во-первых, для круговых орбит  $e_1 = e_2 = 0$ . Очевидно, что несовпадающие круговые орбиты общих точек не имеют. Во-вторых, при  $g_1 = g_2$ ,  $p_2 e_1 = p_1 e_2$ . Тогда для несовпадающих орбит  $p_1 \neq p_2 \implies C \neq 0$  и (2.18) решений не имеет.

Итак, при  $D = 0$  орбиты не пересекаются. При  $D < C^2$  уравнение (2.18) не имеет вещественных корней,  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  не пересекаются. При  $D = C^2$  на окружности имеется один двойной корень

$$\cos u = A/C, \quad \sin u = B/C. \quad (2.19)$$

При  $D > C^2$  на окружности имеются два простых корня

$$\cos u = \frac{AC \pm B\sqrt{D-C^2}}{D}, \quad \sin u = \frac{BC \mp A\sqrt{D-C^2}}{D}. \quad (2.20)$$

Если  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  — эллипсы, простым корням отвечают две точки трансверсального пересечения, двойному — одна точка касания эллипсов, так что последние лежат в одной плоскости, причем один из них лежит внутри другого.

Если обе орбиты  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  неограничены, один или оба корня могут быть посторонними. Напомним, что знаменатели в (2.17) должны быть положительны. Если одна из орбит эллиптическая, посторонние корни отсутствуют, ибо одна из частей равенства (2.17) положительна при всех  $u$ .

Итак, если хотя бы одна из орбит  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  эллиптическая, двум простым вещественным корням (2.18) отвечают две точки трансверсального пересечения, одному кратному корню — точка касания орбит.

В случае двух неограниченных орбит, как показывают следующие ниже примеры, могут появиться посторонние корни и следует проверять положительность знаменателей (2.17).

*Пример 1.* Пусть  $e_1 = 2, e_2 = 3, g_1 = g_2 = 0, p_1 = 1 - \alpha, p_2 = 2 - \alpha, 0 \leq \alpha < 1$  (рис. 2.3).

Тогда  $A = 1 + \alpha, B = 0, C = -1$ , откуда

$$\cos u = -\frac{1}{1 + \alpha}.$$

При  $\alpha = 0$  имеем двойной посторонний корень  $u = \pi$ . При  $0 < \alpha < 1$  имеем два простых посторонних корня  $u = \pi \pm \arccos(1 + \alpha)^{-1}$ .

*Пример 2.* Пусть  $e_1 = 1, g_1 = 0, e_2 > 1, \cos g_2 = 1/e_2, \sin g_2 = -\sqrt{e_2^2 - 1}/e_2$  (рис. 2.4).

Тогда  $A = p_2 - p_1, B = p_1\sqrt{e_2^2 - 1}, C = p_1 - p_2$ , откуда получаем два простых корня

$$u = \pi, \quad u = 2 \operatorname{arctg} \frac{p_1 - p_2}{p_1\sqrt{e_2^2 - 1}},$$



первый из которых — посторонний, а второй отвечает трансверсальному пересечению параболы и гиперболы.

*Пример 3.* Пусть  $e_1 = e_2 = 1$ ,  $g_1 = g_2 = 0$ .

Тогда  $A = p_2 - p_1$ ,  $B = 0$ ,  $C = p_1 - p_2$ , откуда  $\cos u = -1$ , что отвечает двойному постороннему корню  $u = \pi$ .

*Пример 4.* Пусть  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  — изображенные на рис. 2.5 вместе с охватывающими лучами асимптот компланарные гиперболические орбиты;

$$e_1 > 1, g_1 = 0, 0 < g_2 < \arcsin(1/e_1), \arccos(1/e_2) = g_2 + \arccos(1/e_1),$$

$$a_1 \sqrt{e_1^2 - 1} = a_2 \sqrt{e_2^2 - 1}.$$

Согласно задаче 1.27 угол  $\varphi_1$  равен  $\arccos(1/e_1)$ . Угол  $\varphi_2$  равен  $\varphi_1 + g_2 = \arccos(1/e_2)$ . В частности,  $\varphi_1 < \varphi_2 < \arccos(1/e_1) + \arcsin(1/e_1) = \pi/2$ , так что  $\varphi_2$  — острый угол, больший  $\varphi_1$ ;  $e_2 > e_1$ . Из треугольника  $OC_1C_2$  по теореме синусов

$$OC_2 = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} OC_1 = \frac{e_2}{\sqrt{e_2^2 - 1}} |a_1| \sqrt{e_1^2 - 1},$$

поскольку  $OC_1 = |a_1|e_1$ . Условие на большие полуоси показывает, что  $OC_2 = |a_2|e_2$ . Таким образом,  $C_2$  — центр гиперболы  $\mathcal{E}_2$ . Итак, луч  $C_1C_2$  — общая асимптота гипербол  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ . Вторые асимптоты пересекаются, поскольку  $\varphi_2 > \varphi_1$ .

Определим коэффициенты уравнения (2.18):

$$\cos g_2 = \frac{1 + \sqrt{(e_2^2 - 1)(e_1^2 - 1)}}{e_1 e_2}, \quad \sin g_2 = \frac{\xi}{e_1 e_2},$$

$$A = \frac{|a_1| \xi}{e_1} \sqrt{e_1^2 - 1}, \quad B = -\frac{|a_1| \xi}{e_1} (e_1^2 - 1), \quad C = -|a_1| \xi \sqrt{e_1^2 - 1}, \quad D = C^2,$$

где  $\xi = \sqrt{e_2^2 - 1} - \sqrt{e_1^2 - 1}$ .

Таким образом, уравнение (2.18) имеет двойной посторонний корень

$$u = \pi - \varphi_1 = \pi - \arccos(1/e_1).$$

Имеют ли посторонние корни какой-либо геометрический смысл? Безусловно.

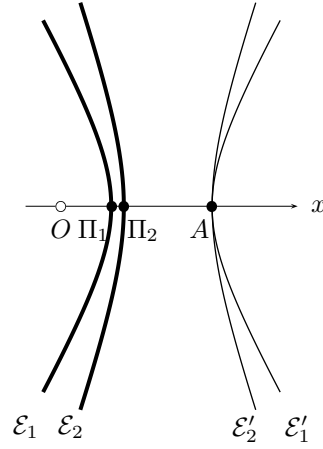


Рис. 2.3. Гиперболы  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  и их вторые ветви  $\mathcal{E}'_1$ ,  $\mathcal{E}'_2$  примера 1 (с. 64) при  $e_1 = 2$ ,  $p_1 = 1$ ,  $e_2 = 3$ ,  $p_2 = 2$ ,  $g_1 = g_2 = 0$ , так что  $OP_1 = 1/3$ ,  $OP_2 = 1/2$ ,  $OA = 1$ .

В примере 1 при  $\alpha = 0$  точка  $u = \pi$  отвечает касанию вторых ветвей гипербол в вершинах (докажите); при  $\alpha < 0$  вторые ветви расходятся, при  $\alpha > 0$  пересекаются.

В примере 2 одна из асимптот гиперболы параллельна оси параболы, так что соответствующие ветви «входят в бесконечность» параллельно друг другу (докажите).

В примере 3 ветви парабол «входят в бесконечность» параллельно друг другу.

В примере 4 направленные в будущее ветви гипербол имеют общую асимптоту, т. е. «касаются на бесконечности».

Заметим, что из всех посторонних корней «наименее посторонним» является двойной корень примера 4: при  $t \rightarrow \infty$  гиперболы неограниченно сближаются, сливаясь на бесконечности.

Мы доказали, что несовпадающие орбиты, ни одна из которых не является частью другой, имеют не более двух общих точек. Обратимся к проекциям несовпадающих орбит на произвольную плоскость (вспомним, что орбиты тел Солнечной системы приводятся, как правило, в проекции на плоскости эклиптики). Ситуация здесь существенно другая. Обозначим  $\tilde{\mathcal{E}}$  проекцию орбиты  $\mathcal{E}$  на некоторую плоскость. Рассмотрим следующие случаи.

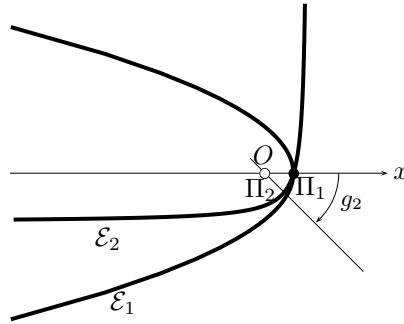


Рис. 2.4. Парабола  $\mathcal{E}_1$  и гипербола  $\mathcal{E}_2$  примера 2 (с. 64) при  $e_1 = 1$ ,  $p_1 = 1$ ,  $g_1 = 0$ ,  $e_2 = \sqrt{2}$ ,  $p_2 = 1$ ,  $g_2 = -\pi/4$ ; кривые пересекаются в вершине  $\Pi_1$  параболы  $u = 0$ ; одна из асимптот гиперболы горизонтальна.

1. Обе орбиты  $\mathcal{E}_k$  прямолинейны и лежат на одном луче. Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на перпендикулярную лучу плоскость совпадают с точкой  $O$ . Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на любую другую плоскость лежат на одном луче и имеют континуум общих точек.
2. Обе орбиты  $\mathcal{E}_k$  прямолинейны и лежат на противоположных лучах одной прямой. Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на перпендикулярную этой прямой плоскость совпадают с точкой  $O$ . Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на любую другую плоскость не имеют общих точек.
3. Обе орбиты  $\mathcal{E}_k$  прямолинейны и лежат на разных прямых. Проведем через них плоскость  $\Pi$ . Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на перпендикулярную  $\Pi$  плоскость или не пересекаются, или имеют континуум общих точек. Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на любую другую плоскость не имеют общих точек.
4. Орбита  $\mathcal{E}_1$  непрямолинейна,  $\mathcal{E}_2$  прямолинейна и не лежит в плоскости  $\mathcal{E}_1$ . Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на любую плоскость имеют не более одной общей точки.
5. Орбита  $\mathcal{E}_1$  непрямолинейна,  $\mathcal{E}_2$  прямолинейна и лежит в плоскости  $\mathcal{E}_1$ . Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на перпендикулярную  $\mathcal{E}_2$  плоскость имеют одну общую точку. Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на перпендикулярную  $\mathcal{E}_1$ , но не  $\mathcal{E}_2$  плоскость имеют континуум общих точек. Про-

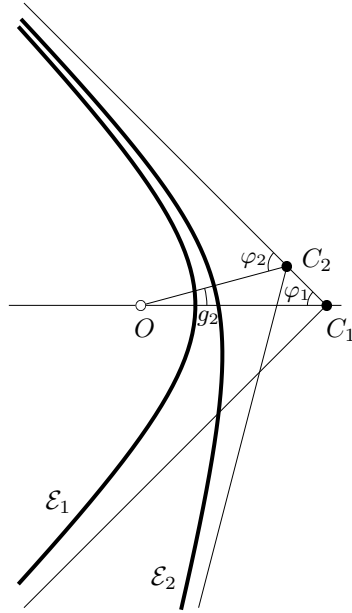


Рис. 2.5. Гиперболы  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  примера 4 (с. 65) при  $e_1 = \sqrt{2}$ ,  $e_2 = 2$ ,  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$ ,  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 15^\circ$ ,  $a_1 = -\sqrt{3}$ ,  $a_2 = -1$ ,  $p_1 = \sqrt{3}$ ,  $p_2 = 3$ .

екции  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на любую другую плоскость имеют не более одной общей точки.

6. Орбиты  $\mathcal{E}_k$  непрямолинейны и не лежат в одной плоскости. Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на любую плоскость имеют не более четырех общих точек. Действительно, одна из кривых  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  является кривой второго порядка, другая — кривой второго порядка или частью прямой. Пересечение в четырех точках возможно, как показывает пример 5 (с. 69).
7. Орбиты  $\mathcal{E}_k$  непрямолинейны и лежат в одной плоскости. Проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  на перпендикулярную  $\mathcal{E}_k$  плоскость имеют континуум общих точек. Проекция на любую другую плоскость имеют не более двух общих точек, причем общие точки проекций  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  являются проекциями общих точек  $\mathcal{E}_k$ .

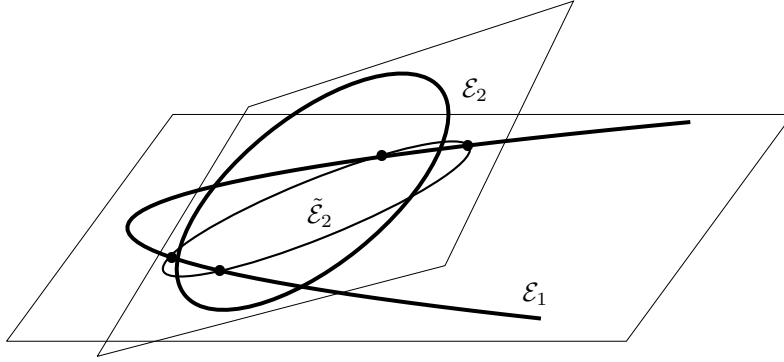


Рис. 2.6. Парабола  $\mathcal{E}_1$ , окружность  $\mathcal{E}_2$  и ее проекция  $\tilde{\mathcal{E}}_2$  на плоскость  $\mathcal{E}_1$  (пример 5, с. 69), имеющая четыре общих точки с  $\mathcal{E}_1$ .

*Пример 5.* Пусть  $\mathcal{E}_1$  — парабола, в подходящих координатах в силу (1.57) определяемая уравнениями

$$y^2 = p^2 - 2px, \quad z = 0, \quad (2.21)$$

$\mathcal{E}_2$  — окружность с элементами  $a > p$ ,  $\Omega = \pi/2$  (рис. 2.6). Согласно задаче 1.20 параметрические уравнения ее проекции на плоскость  $x, y$  суть

$$x = -a\varepsilon \sin u, \quad y = a \cos u$$

при  $\varepsilon = \cos i$ . Запишем неявное уравнение проекции

$$x^2 + \varepsilon^2 y^2 = a^2 \varepsilon^2. \quad (2.22)$$

Система (2.21), (2.22) при достаточно малом положительном  $\varepsilon$  имеет четыре решения

$$\begin{aligned} x &= p\varepsilon^2 + k_1\varepsilon\sqrt{a^2 - p^2(1 - \varepsilon^2)}, \\ y &= k_2\sqrt{p^2(1 - 2\varepsilon^2) - 2pk_1\varepsilon\sqrt{a^2 - p^2(1 - \varepsilon^2)}}, \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2$  независимо друг от друга принимают значения  $\pm 1$ .

### 2.3.2. Зацепление

Пересечение орбит, как уже говорилось, — случай исключительный. Значит ли это, что реальные орбиты *никогда* не пересекают-

ся? Нет, напротив! Можно указать пары орбит, которые обязательно *когда-нибудь* пересекутся. Ключевые слова выделены курсивом. Реальные орбиты изменяются под действием возмущений со стороны других небесных тел и потому в определенные моменты могут пересечься. Уловить момент нам помогут топологические соображения.

Ограничимся в этом разделе непрямолинейными орбитами, одна из которых эллиптическая. Две непересекающиеся орбиты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  могут быть вложены в  $\mathbb{R}^3$  двумя топологически различными способами: с зацеплением (случай  $A_1$ ) и без зацепления (случай  $A_2$ ). Непрерывный переход от одного типа вложения к другому возможен только через пересечение (случай  $A_3$ ). Выведем простой критерий различения типов  $A_k$ .

### Эллипс — эллипс

Параметрические уравнения эллипса  $\mathcal{E}$  в функции от истинной аномалии (1.20, 1.26) запишем в форме

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{P} \cos \theta + \mathbf{Q} \sin \theta), \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

Компоненты единичных ортогональных векторов  $\mathbf{P}$  (направлен в перигентр),  $\mathbf{Q}$  (направлен в точку орбиты при  $\theta = \pi/2$ ),  $\mathbf{Z} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$  (направлен вдоль вектора площадей  $\mathbf{c}$ ) даются столбцами матрицы  $\mathcal{A}_3$ , § 1.3. Векторы  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$  существуют всегда, хотя не единственны при  $e = 0$ .

Элементы второго эллипса  $\mathcal{E}'$  снабдим штрихами. Построим вектор  $\mathbf{w} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}'$ :

$$\mathbf{w} = \{-sc' \cos \Omega + cs' \cos \Omega', -sc' \sin \Omega + cs' \sin \Omega', ss' \sin(\Omega' - \Omega)\},$$

$$2w^2 = (2s^2 + 2s'^2 - 3s^2 s'^2) - 4csc's' \cos(\Omega - \Omega') - s^2 s'^2 \cos(2\Omega - 2\Omega'),$$

где для краткости положено  $c = \cos i, s = \sin i$ . Очевидно, что  $\mathbf{w}$  параллелен линии взаимных узлов, причем  $w = \sin I$ , где  $I$  — взаимный наклон. Для полноты приведем здесь же выражение для  $\cos I = \mathbf{Z}\mathbf{Z}'$ :

$$\cos I = cc' + ss' \cos(\Omega - \Omega').$$

Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  некомпланарны, так что  $w > 0$ .

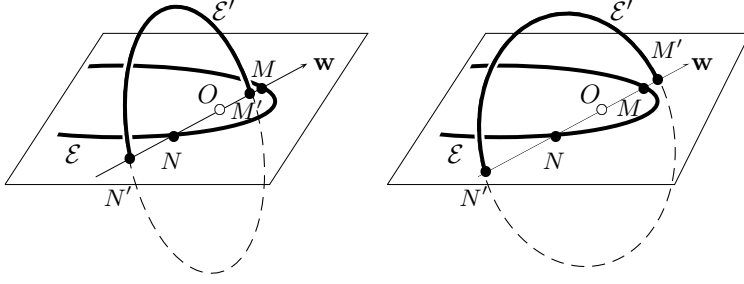


Рис. 2.7. Пара сцепленных (слева) и несцепленных (справа) некомпланарных эллипсов.

Обозначим  $M(r, \theta)$  единственную точку на  $\mathcal{E}$ , лежащую на параллельном  $\mathbf{w}$  луче, выходящем из  $O$  (рис. 2.7), и найдем ее полярные координаты. По определению  $\mathbf{P} \cos \theta + \mathbf{Q} \sin \theta = \lambda \mathbf{w}$  при некотором положительном  $\lambda$ . Левая часть представляет единичный вектор, так что  $\lambda = w^{-1}$ . Окончательно,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{P}\mathbf{w}}{w}, \quad r = \frac{pw}{w + e\mathbf{P}\mathbf{w}}. \quad (2.23)$$

Аналогично получаем точку  $M'(r', \theta') \in \mathcal{E}'$ , лежащую на том же луче

$$\cos \theta' = \frac{\mathbf{P}'\mathbf{w}}{w}, \quad r' = \frac{p'w}{w + e'\mathbf{P}'\mathbf{w}}. \quad (2.24)$$

Для точек  $N \in \mathcal{E}, N' \in \mathcal{E}'$ , лежащих на линии узлов по другую сторону от  $O$ , расстояния от  $O$  равны

$$R = \frac{pw}{w - e\mathbf{P}\mathbf{w}}, \quad R' = \frac{p'w}{w - e'\mathbf{P}'\mathbf{w}}, \quad (2.25)$$

поскольку истинные аномалии точек  $N, N'$  и  $M, M'$  отличаются на угол  $\pi$ .

*Определение.* Назовем первым коэффициентом зацепления величину

$$l_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = (r' - r)(R' - R). \quad (2.26)$$

Величина  $l_1$  зависит только от пары  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  и не зависит от системы координат. Кроме того,  $l_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = l_1(\mathcal{E}', \mathcal{E})$ . Очевидно, что первый

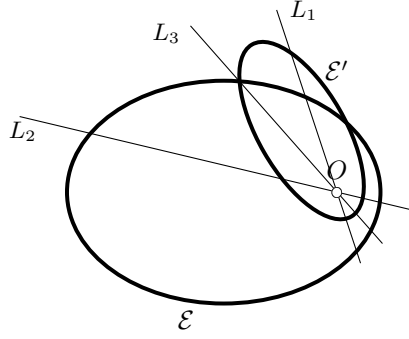


Рис. 2.8. Пара пересекающихся компланарных эллипсов.

коэффициент зацепления отрицателен, положителен или равен нулю в случаях  $A_1, A_2, A_3$  соответственно.

Нетрудно получить явное выражение  $l_1$  через орбитальные элементы:

$$l_1 = \left( \frac{pw}{w + e\mathbf{P}\mathbf{w}} - \frac{p'w}{w + e'\mathbf{P}'\mathbf{w}} \right) \left( \frac{pw}{w - e\mathbf{P}\mathbf{w}} - \frac{p'w}{w - e'\mathbf{P}'\mathbf{w}} \right), \quad (2.27)$$

где

$$\mathbf{P}\mathbf{w} = -sc' \cos g + cs' \cos g \cos(\Omega' - \Omega) + s' \sin g \sin(\Omega' - \Omega),$$

$$\mathbf{P}'\mathbf{w} = cs' \cos g' - sc' \cos g' \cos(\Omega' - \Omega) + s \sin g' \sin(\Omega' - \Omega).$$

Переменная  $l_1$  непрерывно зависит от  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  в пространствах  $\mathcal{H}(0)$ ,  $\mathcal{H}$  на множестве некомпланарных эллипсов. Однако, оставаясь ограниченной, она разрывна в окрестности компланарной пары. В самом деле, рассмотрим пару компланарных эллипсов, пересекающихся в двух точках (рис. 2.8). Считаем прямые  $L_k$  предельными положениями линии узлов. Тогда  $l_1 < 0$  вдоль линии  $L_1$ ,  $l_1 > 0$  вдоль  $L_2$  и  $l_1 = 0$  вдоль  $L_3$ . В первых двух случаях значения  $l_1$  не малы. Поэтому полезен непрерывный при всех  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  второй коэффициент зацепления

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{p^2 p'^2}{rr' RR'} w^2 l_1 = \\ &= [p'(w + e\mathbf{P}\mathbf{w}) - p(w + e'\mathbf{P}'\mathbf{w})] [p'(w - e\mathbf{P}\mathbf{w}) - p(w - e'\mathbf{P}'\mathbf{w})]. \end{aligned} \quad (2.28)$$



Очевидно, что  $l_2 < 0$  в случае  $A_1$ ,  $l_2 \geq 0$  в случаях  $A_2, A_3$ . Однако  $l_2 = 0$  как в случае  $A_3$  пересечения, так и в случае компланарных  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ .

Для компланарных орбит  $l_1$  не определен,  $l_2$  обращается в нуль, и мы не можем отличить случаи  $A_2$  и  $A_3$  (случай  $A_1$  невозможен). Для их различения заметим, что пересечение возможно лишь при  $D \geq C^2$ . Определение  $C, D$  дано после формулы (2.18). Введем поэтому третий коэффициент

$$l_3 = C^2 - D = p^2(1 - e'^2) + p'^2(1 - e^2) - 2pp'[1 - ee' \cos(\tilde{g} - \tilde{g}')], \quad (2.29)$$

где  $\tilde{g}, \tilde{g}'$  — аргументы перицентров, отсчитываемые в общей плоскости. Ясно, что  $l_3 > 0$ , если  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  не пересекаются;  $l_3 < 0$ , если  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  имеют две точки трансверсального пересечения;  $l_3 = 0$ , если  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  касаются друг друга в одной точке. Вместо  $l_3$  можно пользоваться более простым коэффициентом

$$\tilde{l}_3 = \frac{l_3}{(1 - e^2)(1 - e'^2)} = ap + a'p' - 2aa'[1 - ee' \cos(\tilde{g} - \tilde{g}')]. \quad (2.30)$$

Для вычисления  $l_3, \tilde{l}_3$  нет необходимости переходить к общей плоскости  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  как основной, поскольку  $\cos(\tilde{g} - \tilde{g}') = \mathbf{PP}'$ .

### Эллипс — гипербола или эллипс — парабола

Пусть  $\mathcal{E}'$  — эллипс,  $\mathcal{E}$  — гипербола или парабола. Единственная разница с исследованным вариантом эллипс — эллипс заключается в том, что не все значения  $\theta$  допустимы. Именно, должно быть  $e \cos \theta > -1$ .

Рассмотрим сначала случай  $e|\mathbf{Pw}| < w$ . Согласно (2.23), (2.25) обе точки  $M, N$  существуют (см. рис. 2.7, где  $\mathcal{E}$  считается гиперболой или параболой).

Пусть

$$p > 0, e \geq 1, w > 0, e|\mathbf{Pw}| \geq w, \mathbf{Pw} > 0. \quad (2.31)$$

Тогда  $M$  — единственная точка  $\mathcal{E}$  на линии узлов. Зацепленность зависит только от положения  $M'$ : она имеет место, если  $M'$  расположена дальше от  $O$ . Поэтому полагаем по определению

$$\tilde{l}_1 = r - r' = \frac{pw}{w + e\mathbf{Pw}} - \frac{p'w}{w + e'\mathbf{P'w}}. \quad (2.32)$$

Если неравенства (2.31) справедливы за исключением последнего, т. е. если  $\mathbf{P}\mathbf{w} < 0$ , то

$$\tilde{l}_1 = R - R' = \frac{pw}{w - e\mathbf{P}\mathbf{w}} - \frac{p'w}{w - e'\mathbf{P}'\mathbf{w}}. \quad (2.33)$$

Во всех случаях, как и прежде,  $\tilde{l}_1 < 0$  эквивалентно зацепленности,  $\tilde{l}_1 > 0$  — незацепленности,  $\tilde{l}_1 = 0$  — пересечению  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$ . Точно так же можно модифицировать и второй коэффициент зацепления:

$$\tilde{l}_2 = p(w + e'\mathbf{P}'\mathbf{w}) - p'(w + e\mathbf{P}\mathbf{w}), \quad (2.34)$$

если  $w \geq 0$ ,  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| \geq w$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{w} \geq 0$ ;

$$\tilde{l}_2 = p(w - e'\mathbf{P}'\mathbf{w}) - p'(w - e\mathbf{P}\mathbf{w}), \quad (2.35)$$

если  $w \geq 0$ ,  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| \geq w$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{w} \leq 0$ .

Если обе орбиты неограничены, коэффициенты зацепления теряют топологический смысл. Вопрос о пересечении должен решаться непосредственно. В случае некомпланарных орбит вычисляем  $r, r'$  согласно (2.23), (2.24), а  $R, R'$  — согласно (2.25). Если  $r = R > 0$  или  $r' = R' > 0$ , то имеет место пересечение орбит. В случае компланарных орбит решаем уравнение (2.18) по формулам (2.19), (2.20) и проверяем положительность  $r, r'$ .

Свойства сцепленности и пересекаемости в проекции связаны, хотя и нетривиальным образом. Ограничимся парами криволинейных орбит, одна из которых эллиптична.

### Теорема 6

Для любой пары  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  найдется плоскость  $\Pi$ , проекции  $\mathcal{E}_k$  на которую пересекаются.

Доказательство. В качестве  $\Pi$  можно взять плоскость, перпендикулярную линии узлов.

### Теорема 7

Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  сцеплены. Тогда их проекции на любую плоскость пересекаются.

Пусть это не так, проекции  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  орбит  $\mathcal{E}_k$  на некоторую плоскость  $\Pi$  не пересекаются. Образует цилиндры  $H_k$  с перпендикулярными  $\Pi$  образующими и с  $\tilde{\mathcal{E}}_k$  в качестве направляющих. Орбиты  $\mathcal{E}_k$  суть сечения  $H_k$ . Так как  $H_k$  не пересекаются, то  $\mathcal{E}_k$  не сцеплены и мы пришли к противоречию.

## 2.4. Теоретико-множественное расстояние

Рассмотренная задача о пересечении орбит важна при проектировании орбит космических аппаратов, при построении траекторий перехода с одних орбит на другие, при изучении столкновений небесных тел — как естественных, так и искусственных. Поскольку небесные тела имеют конечные размеры, больший интерес представляет не вопрос *пересекаются орбиты или нет*, а вопрос о расстоянии между орбитами, понимаемом в смысле теории множеств:

$$\delta(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \inf QQ', \quad (2.36)$$

где  $QQ'$  — евклидово расстояние между точками  $Q \in \mathcal{E}$  и  $Q' \in \mathcal{E}'$ . Для двух эллипсов нижняя граница достигается,  $\delta$  совпадает с величиной

$$\delta_0(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \min QQ'. \quad (2.37)$$

*Пример 6.* Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  — гиперболы, обе асимптоты которых параллельны, см. рис. 2.9. Легко показать, что гиперболы компланарны, а их эксцентриситеты совпадают. Расстояние между асимптотами

$$d = |a - a'| \sqrt{e^2 - 1},$$

а расстояние между перицентрами —

$$d_0 = |a - a'| (e - 1).$$

Поскольку  $d > d_0$ , то минимум в (2.37) достигается и  $\delta = \delta_0$ . Покажем, что  $\delta_0 = d_0$ . Пусть  $Q \in \mathcal{E}$ ,  $Q' \in \mathcal{E}'$  — точки, расстояние между которыми равно  $\delta_0$ . Касательные к  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  в этих точках нормальны к отрезку  $QQ'$  и тем самым параллельны друг другу. Кривые  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  подобны с центром подобия  $O$ . Их касательные, лежащие на выходящем из  $O$  луче, параллельны. Но никакие касательные к гиперболе в двух различных точках не параллельны друг другу. Следовательно,  $Q$  и  $Q'$  лежат на одном луче  $OQQ'$ . Поскольку касательная в отличной от перицентра точке образует острый угол с  $OQQ'$ , то точки  $Q$  и  $Q'$  лежат в перицентрах  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$ ,  $QQ' = d_0$ , что и требовалось доказать.

В общем случае  $\delta$  существует всегда,  $\delta_0$  или совпадает с  $\delta$ , или не существует. Задачи 2.23–2.26 полностью решают вопрос о соотношении между  $\delta$  и  $\delta_0$ .

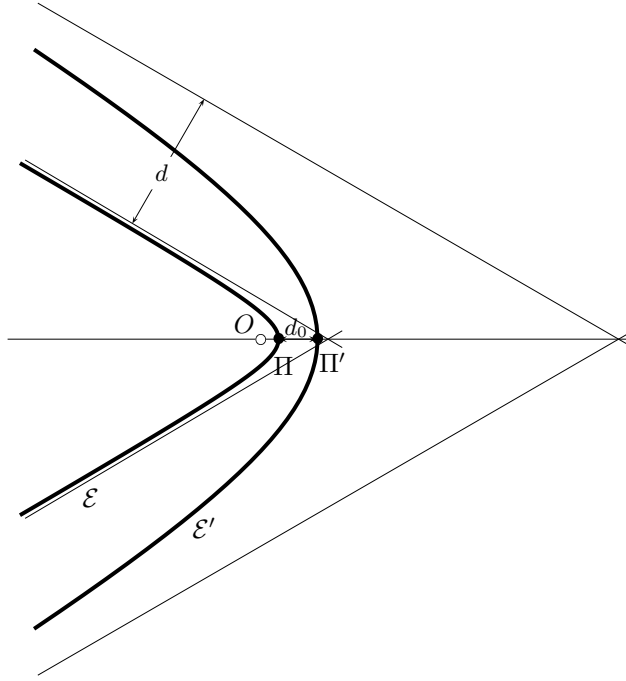


Рис. 2.9. Гиперболы с параллельными асимптотами.

Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  — эллипсы. Параметризуем эллипс эксцентрической аномалией согласно (1.24), (1.42):

$$\mathbf{r}/a = \mathbf{P}(\cos E - e) + \mathbf{S} \sin E, \quad (2.38)$$

где  $\mathbf{S} = \sqrt{1 - e^2} \mathbf{Q}$ . Из (2.38) выводим представление нормализованного безразмерного квадрата расстояния

$$W = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{2aa'}$$

между точками  $Q(E) \in \mathcal{E}$ ,  $Q'(E') \in \mathcal{E}'$  в виде тригонометрического многочлена второго порядка:

$$\begin{aligned} W = & W_0 + W_1 \cos E + W_2 \sin E + W_3 \cos E' + W_4 \sin E' + \\ & + 2[W_5 \cos E \cos E' + W_6 \cos E \sin E' + W_7 \sin E \cos E' + W_8 \sin E \sin E'] + \\ & + W_9 \cos 2E + W_{10} \cos 2E'. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь

$$4W_0 = 2(\alpha + \alpha') + \alpha e^2 + \alpha' e'^2 - 4PP'ee', \quad W_1 = PP'e' - \alpha e,$$

$$W_2 = P'Se', \quad W_3 = PP'e - \alpha'e', \quad W_4 = PS'e,$$

$$2W_5 = -PP', \quad 2W_6 = -PS', \quad 2W_7 = -P'S, \quad 2W_8 = -SS',$$

$$4W_9 = \alpha e^2, \quad 4W_{10} = \alpha' e'^2,$$

$PP', PS', P'S, SS'$  — скалярные произведения соответствующих векторов; по соображениям симметрии положено

$$\alpha = a/a', \quad \alpha' = a'/a.$$

Функция  $W$  определена на двумерном торе  $E, E' \in [0, 2\pi)$  и принимает наименьшее значение в одной из критических точек, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E'} = 0. \quad (2.40)$$

Вычисляя производные, представим (2.40) в виде

$$A \sin E' + B \cos E' = C, \quad M \sin E' + N \cos E' = K \sin E' \cos E'. \quad (2.41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= PS' \sin E - SS' \cos E, \\ B &= PP' \sin E - P'S \cos E, \\ C &= e' B - \alpha e \sin E (1 - e \cos E), \\ M &= PP' \cos E + P'S \sin E + \alpha' e' - PP'e, \\ N &= PS'e - SS' \sin E - PS' \cos E, \\ K &= \alpha' e'^2 \end{aligned}$$

являются тригонометрическими многочленами от  $E$  степени 0, 1 или 2.

Чтобы найти все критические точки функции  $W$  — в том числе дающие ее наименьшее значение  $\delta_0^2/(2aa')$ , — достаточно решить систему двух тригонометрических уравнений (2.41) второго порядка. Напомним, что тригонометрический многочлен порядка  $n$  эквивалентен алгебраическому многочлену порядка  $2n$ .

Оптимальный алгоритм решения системы (2.41) состоит в исключении одной из переменных, т.е. нахождении тригонометрического многочлена  $G(E)$ , обращающегося в нуль на каждом решении системы (2.41). Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный результат:

$$G(E) = K^2(A^2 - C^2)(B^2 - C^2) + 2KC[NA(A^2 - C^2) + MB(B^2 - C^2)] - (A^2 + B^2)[N^2(A^2 - C^2) + M^2(B^2 - C^2) - 2NMAB]. \quad (2.42)$$

Решив уравнение

$$G(E) = 0, \quad (2.43)$$

найдем из первого из соотношений (2.41)

$$\cos E' = \frac{BC + mA\sqrt{D}}{A^2 + B^2}, \quad \sin E' = \frac{AC - mB\sqrt{D}}{A^2 + B^2}$$

при

$$D = A^2 + B^2 - C^2, \quad m = \pm 1.$$

Знак  $m$  должен быть выбран так, чтобы удовлетворить второму из уравнений (2.41).

Вывод полинома  $G(E)$ , обсуждение свойств решений уравнений (2.41), (2.43) в общем и вырожденных случаях, распространение алгоритма на пары орбит произвольного типа можно найти в (*Kholshchevnikov, Vassiliev, 1999b*), (*Baluyev, Kholshchevnikov, 2005*). Здесь опишем лишь основные свойства в биеллиптическом случае.

- В общем случае степень тригонометрического многочлена  $G$  равна восьми; не существует многочлена  $\hat{G}$  меньшей степени такого, чтобы уравнение  $\hat{G}(E) = 0$  было следствием (2.41).
- В вырожденных случаях степень  $G$  можно уменьшить. Максимальное вырождение — случай компланарных окружностей. В этом и только этом случае  $G \equiv 0$ .

- Число различных вещественных корней  $G$  на окружности  $0 \leq E < 2\pi$  не меньше трех; за исключением случая двух компланарных окружностей число корней  $G$  не превосходит 16.

## 2.5. Симметрии

Некоторые группы симметрии задачи двух тел получаются из общих свойств динамической системы. Пример такой группы, сдвиг по траектории, уже приведен в разделе 1.7.: задача двух тел описывается автономной системой дифференциальных уравнений, следовательно, если  $\mathbf{r}(t)$  — решение задачи, то при  $\forall \tau$   $\mathbf{r}(t + \tau)$  также будет решением задачи. Увы, как уже сказано в разделе 1.7., чтобы найти оператор сдвига, необходимо знать решение системы (1.1).

Еще одно общее свойство, которым обладает задача двух тел, состоит в том, что силовая функция задачи центральна: потенциал зависит только от расстояния между телами. Очевидно, что траектории задач с центральной силовой функцией, а, значит, и траектории задачи двух тел остаются инвариантными при вращениях трехмерного пространства  $O(3)$ . Разумеется, можно ограничиться плоским случаем  $O(2)$ . Если  $\mathbf{r}(t)$  — решение задачи двух тел, то

$$\mathbf{r}_T(t) = \mathcal{A}(i, \Omega, g)\mathbf{r}(t)$$

также является решением задачи двух тел. Здесь матрица  $\mathcal{A}$  дается формулами (1.24).

И, наконец, последнее общее свойство, позволяющее нам получить еще одну симметрию задачи двух тел, состоит в том, что потенциал — однородная функция координат:  $V(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha V(x, y, z)$  при  $\alpha = -1$ ,  $\lambda > 0$ . Поскольку кинетическая энергия задачи — однородная функция степени 2 от импульсов, то новый лагранжиан при изменении времени  $t_T = \lambda^\gamma t$  примет форму

$$L_T = \lambda^{2-2\gamma} T(\dot{\mathbf{r}}) - \lambda^\alpha V(\mathbf{r})$$

и, значит, для ньютоновского потенциала ( $\alpha = -1$ )

$$\mathbf{r}_T(t) = \lambda \mathbf{r}(\lambda^{-3/2} t)$$

является решением задачи двух тел вместе с  $\mathbf{r}(t)$ . Такая симметрия называется симметрией растяжения или симметрией масштаба.

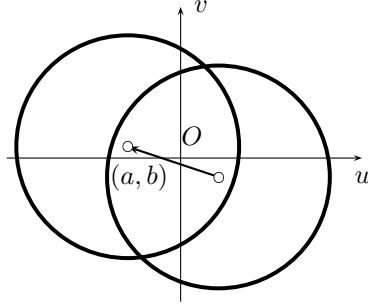


Рис. 2.10. Движение пространства скоростей.

Можно сказать, что динамические свойства задачи с однородным потенциалом зависят только от знака энергии (или от знака большой полуоси), а не от ее величины. Заметим, что только из свойства однородности потенциала задачи двух тел получается третий закон Кеплера.

Нетрудно увидеть, что все приведенные преобразования сохраняют форму орбиты — эксцентриситет не меняется. Интересно найти преобразование, изменяющее эксцентриситет.

Поскольку траектории задачи двух тел инвариантны относительно группы  $O(3)$ , мы можем искать только плоские преобразования траекторий. Вспомним задачу 1.30: в пространстве скоростей проекция фазовой траектории любого непрямолинейного решения представляет собой окружность или ее часть:

$$\begin{aligned} u &= w_x - \rho \sin(\theta + g), \\ v &= w_y + \rho \cos(\theta + g). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Здесь  $\rho = \kappa/\sqrt{p}$ ,  $w_x = -\rho e_y$ ,  $w_y = \rho e_x$ ,  $p$  — параметр орбиты,  $\mathbf{e}$  — вектор Лапласа. Движения пространства скоростей переводят окружность в окружность, т.е. проекцию фазовой траектории — в проекцию фазовой траектории; нам достаточно рассматривать только сдвиги, считая вращения уже известными.

Рассмотрим преобразование (рис. 2.10)

$$\begin{aligned} u' &= u + a, \\ v' &= v + b. \end{aligned}$$



При этом преобразовании значение интеграла площадей не изменяется, поскольку не изменяется радиус  $\rho$  окружности, т.е.  $x'v' - y'u' = xv - yu$ , подвергается сдвигу лишь вектор  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} w'_x &= w_x + a, \\ w'_y &= w_y + b. \end{aligned}$$

Вектор Лапласа при преобразовании (2.44) изменяется очевидным образом. Сравнивая вектора Лапласа для новых и исходных координат и скоростей, получаем:

$$\begin{aligned} x'/r' &= x/r, \\ y'/r' &= y/r, \end{aligned}$$

т.е. рассматриваемое преобразование не изменяет полярных углов в пространстве координат. Из неизменности интеграла площадей следует

$$r' = r \frac{xv - yu}{xv - yu + xb - ya}$$

и, значит, преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} x' &= x \frac{xv - yu}{xv - yu + xb - ya}, \\ y' &= y \frac{xv - yu}{xv - yu + xb - ya}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$u' = u + a, \quad v' = v + b. \tag{2.46}$$

Поскольку полярные углы при преобразовании (2.45) не изменяются, то очевидно  $d\theta'/d\theta = 1$  и из интеграла площадей имеем

$$\frac{dt'}{dt} = \left( \frac{r'}{r} \right)^2 = \left( \frac{\kappa\sqrt{p}}{\kappa\sqrt{p} + xb - ya} \right)^2. \tag{2.47}$$

*Замечание.* Знаменатель преобразования координат (2.45) представляет собой линейную функцию  $xb - ya = c$ . Если начало координат пространства скоростей находится вне результирующей окружности, то на орбите найдется точка, в которой знаменатель обращается в нуль. В этом случае в гиперболу переходит только часть исходной орбиты, расположенная по одну сторону от прообраза бесконечно удаленной точки преобразования. Вторая часть переходит

во вторую ветвь гиперболы, а движение по ней соответствует движению задачи двух тел с отрицательной массой, равной по модулю исходной.

Преобразования координат индуцированы преобразованиями скоростей, и поскольку последние представляют собой группу сдвигов, то преобразования (2.45) образуют группу преобразований фазового пространства, при которых фазовые траектории задачи двух тел переходят в фазовые траектории задачи двух тел.

Вместе с вращениями  $O(3)$  и растяжениями эта группа образует шестипараметрическую группу, которая точку  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$  фазового пространства  $\mathcal{H}(0)$  переводит в точку  $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$ .

Эту симметрию можно использовать при генерации орбит с заданными свойствами или при определении орбиты по некоторому набору наблюдаемых параметров.

## Задачи к главе 2

**Задача 2.1.** Доказать, что для метрик  $\varrho, \varrho_1$  выполнены аксиомы метрического пространства.

**Задача 2.2.** Найти постоянную  $A$  в формуле (2.10).

**Задача 2.3.** Как совместить открытость пространств  $\mathcal{H}(0)$ ,  $\mathcal{H}$  и попадание круговых орбит на границу области допустимых значений  $c, h$  (рис. 1.5)?

**Задача 2.4.** Доказать теорему 5.

**Задача 2.5.** Убедиться в справедливости последнего столбца таблицы 2.1.

**Задача 2.6.** Показать, что подпространство  $\mathcal{H}(0)$  и  $\mathcal{H}$ , отвечающее фиксированному  $\mathbf{c} \neq 0$ , двумерно и гомеоморфно двумерной плоскости.

**Задача 2.7.** Показать, что подпространство  $\mathcal{H}$ , отвечающее фиксированному  $\mathbf{c} = 0$ , трехмерно и гомеоморфно произведению двумерной сферы на прямую, т.е.  $\mathbb{R}^3$  с выколотым началом координат.

**Задача 2.8.** Показать, что подпространство  $\mathcal{H}(0)$ ,  $\mathcal{H}$ , отвечающее круговым орбитам, гомеоморфно  $\mathbb{R}^3$  с выколотым началом координат.

**Задача 2.9.** Выразить расстояние  $\varrho$  через кеплеровские элементы.

*Ответ:*

$$a_0 \varrho^2 = p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \xi + a_0(e_1^2 + e_2^2 - 2e_1 e_2 \eta).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos \Delta, \quad \eta = (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2) \cos \Delta + \\ &\quad (c_1 \sin g_1 \cos g_2 - c_2 \cos g_1 \sin g_2) \sin \Delta + s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2, \end{aligned}$$

где  $c_k = \cos i_k$ ,  $s_k = \sin i_k$ ,  $\Delta = \Omega_2 - \Omega_1$ .

**Задача 2.10.** Выразить расстояние  $\varrho_1$  через кеплеровские элементы.

*Ответ:*

$$\varrho_1^2 = \varrho^2 + \frac{a_0^2}{4} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)^2.$$

**Задача 2.11.** Показать, что при фиксированных  $i_1, i_2$  наибольшие значения  $\xi = \cos(i_1 - i_2)$  и  $\eta = 1$  из задачи 2.9 достигаются одновременно при  $\Delta = g_1 = g_2 = 0$ ; наименьшие значения  $\xi = \cos(i_1 + i_2)$ ,  $\eta = -1$  достигаются одновременно при  $\Delta = \pi, g_1 = g_2 = 0$ . Каким конфигурациям векторов  $\mathbf{c}_k, \mathbf{e}_k$  это соответствует?

**Задача 2.12.** Пусть  $\mathcal{E}_k, k = 1, 2$ , — две непрямолинейные орбиты с фиксированными  $p_k, e_k, i_k$ . Найти наименьшее и наибольшее из расстояний  $\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  по всевозможным значениям углов  $\Omega_k, g_k$ . Каким конфигурациям векторов  $\mathbf{c}_k, \mathbf{e}_k$  они соответствуют?

*Ответ:*

$$\min a_0 \varrho^2 = p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos(i_1 - i_2) + a_0(e_1 - e_2)^2,$$

$$\max a_0 \varrho^2 = p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos(i_1 + i_2) + a_0(e_1 + e_2)^2.$$

**Задача 2.13.** Показать, что  $\min \varrho$  из задачи 2.12 может служить расстоянием в фактор-пространстве, в котором отождествлены орбиты с одинаковыми  $p > 0, e, i$  вне зависимости от значений  $\Omega, g$ .

**Задача 2.14.** Доказать, что при  $D = C^2$  корни (2.20) сливаются в корень (2.19).

**Задача 2.15.** Почему параллельность асимптот (в случае параболы асимптоту следует заменить осью) влечет существование постороннего корня уравнения (2.18)?

*Указание.* Рассмотреть связь уравнений (2.17) и (2.18).

**Задача 2.16.** Почему пересечение вторых ветвей гипербол влечет существование посторонних корней уравнения (2.18)?

**Задача 2.17.** Показать, что не существует круговых зацепленных орбит.

**Задача 2.18.** Пусть для эллипса  $\mathcal{E}_1$  и непрямолинейной орбиты  $\mathcal{E}_2$  справедливо

$$a_1(1 + e_1) = \frac{p_1}{1 - e_1} < \frac{p_2}{1 + e_2} = a_2(1 - e_2).$$

Показать, что  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  не пересекаются и не сцеплены.

**Задача 2.19.** Пусть для эллипсов  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  справедливо

$$a_1(1 - e_1) < a_2(1 + e_2), \quad a_1(1 + e_1) > a_2(1 - e_2), \quad p_1 \neq p_2.$$

Показать, что вращением одной из орбит можно привести систему к любому из типов  $A_1, A_2, A_3$ .

*Указание.* Привести  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  в одну плоскость  $\Pi$  с разнонаправленными линиями апсид; повернуть вокруг линии апсид; повернуть вокруг перпендикулярной ей прямой, лежащей в плоскости  $\Pi$ .

**Задача 2.20.** Показать, что эллипсы с совпадающими значениями параметра  $p$  или сцеплены, или пересекаются.

*Указание.* Воспользоваться формулами (2.28) и (2.23)–(2.25).

**Задача 2.21.** Пусть размеры и форма эллипсов  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  фиксированы. Доказать ограниченность  $l_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  при всевозможных ориентациях эллипсов и указать верхнюю границу модуля  $l_1$ .

*Ответ:*

$$|l_1| \leq (|a' - a| + ae + a'e')^2. \quad (2.48)$$

**Задача 2.22.** Показать, что в (2.48) достигается равенство при  $e = e' = 0$  и при  $a = a'$ .

**Задача 2.23.** Доказать равенство

$$\delta(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = 0$$

для любых прямолинейных орбит  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ .

**Задача 2.24.** Пусть  $\mathcal{E}'$  — прямолинейная,  $\mathcal{E}$  — криволинейная орбита. Показать, что либо  $\delta = \delta_0$ , либо  $\delta = q$ , причем обе возможности

могут осуществиться. Здесь  $q$  — перицентрическое расстояние орбиты  $\mathcal{E}$ .

**Задача 2.25.** Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  непрямолинейны. Показать, что  $\delta = \delta_0$  за возможным исключением следующего случая:  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  — гиперболы, хотя бы одна пара асимптот которых параллельна.

*Замечание.* В примере 4 (с. 65)  $\delta = 0$ , а  $\delta_0$  не существует. В примере 6 (с. 75)  $\delta = \delta_0$ . Поэтому обе указанные возможности могут осуществиться.

**Задача 2.26.** Показать, что для круговых орбит

$$\delta_0 = |a - a'|.$$

**Задача 2.27.** Показать, что в условиях задачи 2.18

$$\delta_0 \geq \frac{p_2}{1 + e_2} - \frac{p_1}{1 - e_1} = a_2(1 - e_2) - a_1(1 + e_1).$$

**Задача 2.28.** Доказать неравенство

$$\delta^2 \leq |l_1|$$

и привести примеры, когда достигается равенство.

**Задача 2.29.** Доказать неравенство

$$\delta \leq \left| \frac{p}{1 + \frac{se}{w} \mathbf{P}\mathbf{w}} - \frac{p'}{1 + \frac{se'}{w} \mathbf{P}'\mathbf{w}} \right|$$

при  $s = \pm 1$ .

*Уточнение.* Если  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  — эллипсы, неравенство справедливо и при  $s = -1$ , и при  $s = 1$ .

Пусть  $\mathcal{E}$  — гипербола или парабола,  $\mathcal{E}'$  — эллипс. При  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| < w$  неравенство справедливо при  $s = \pm 1$ . При  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| \geq w, \mathbf{P}\mathbf{w} > 0$  неравенство справедливо при  $s = 1$ ; при  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| \geq w, \mathbf{P}\mathbf{w} < 0$  — при  $s = -1$ .

Пусть  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  — неограниченные непрямолинейные орбиты. При  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| < w, e'|\mathbf{P}'\mathbf{w}| < w$  неравенство справедливо при  $s = \pm 1$ . При  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| < w, e'|\mathbf{P}'\mathbf{w}| \geq w$  неравенство справедливо при  $s = 1$  для  $\mathbf{P}'\mathbf{w} > 0$  и при  $s = -1$  для  $\mathbf{P}'\mathbf{w} < 0$ . При  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| \geq w, e'|\mathbf{P}'\mathbf{w}| < w$  неравенство справедливо при  $s = 1$  для  $\mathbf{P}\mathbf{w} > 0$  и при  $s = -1$  для

$\mathbf{P}\mathbf{w} < 0$ . При  $e|\mathbf{P}\mathbf{w}| \geq w$ ,  $e'|\mathbf{P}'\mathbf{w}| \geq w$  неравенство справедливо при  $s = 1$  для  $\mathbf{P}\mathbf{w} > 0$ ,  $\mathbf{P}'\mathbf{w} > 0$ ; при  $s = -1$  для  $\mathbf{P}\mathbf{w} < 0$ ,  $\mathbf{P}'\mathbf{w} < 0$ ; если же  $\mathbf{P}\mathbf{w}$  и  $\mathbf{P}'\mathbf{w}$  имеют разные знаки, неравенство перестает быть справедливым.

В последнем случае на линии узлов лежит по одной точке орбит  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$ , и эти точки находятся по разные стороны от притягивающего центра  $O$ .

**Задача 2.30.** Показать, что из формул (2.45), (2.47) следует

$$\frac{dx'}{dt'} = u + a, \quad \frac{dy'}{dt'} = v + b,$$

т. е. в силу (2.46)

$$\frac{dx'}{dt'} = u', \quad \frac{dy'}{dt'} = v'.$$

**Задача 2.31.** Показать, что из формул (2.45)–(2.47) с учетом результатов предыдущей задачи следует

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} + \varkappa^2 \frac{x'}{r'^3} = \frac{d^2y'}{dt'^2} + \varkappa^2 \frac{y'}{r'^3} = 0.$$

*Замечание.* Задачи 2.30, 2.31 подтверждают, что соотношения (2.45)–(2.47) переводят орбиты в орбиты.

## Глава 3

### Разложения в ряды

Мы сумели выразить координаты и скорости в кеплеровом движении через 6 постоянных интегрирования и одну возрастающую со временем переменную (истинную аномалию, эксцентрическую аномалию и т.д.). Последняя находится решением трансцендентного, как правило, уравнения типа уравнения Кеплера. Этого достаточно, чтобы считать задачу двух тел решенной. Но во многих случаях желательно иметь решение в виде явной функции времени. Таковы, например, задача определения орбит из наблюдений и аналитическая теория возмущений. Стандартный путь достижения поставленной цели — разложение в ряды. Сложная функция представляется суммой большого числа (теоретически бесконечно-го) функций простых.

В этой главе мы рассмотрим основные используемые в небесной механике разложения, установим их область сходимости, оценим скорость сходимости, опишем важнейшие свойства. Обратим внимание на последнее. Нельзя суживать применение рядов до средства вычисления нужных величин с требуемой точностью. С помощью рядов, даже сходящихся чудовищно медленно и непригодных для вычислений, можно устанавливать положительность, монотонность, выпуклость и много других важных в приложениях свойств.

### 3.1. Ряды Ли

Начнем с наиболее универсального средства — рядов по степеням времени для решения нормальной системы дифференциальных уравнений общего вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  — вектор фазовых переменных,  $t$  — время (скаляр). Система задана в некоторой области  $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^{N+1}$  расширенного фазового пространства, где функция  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$  предполагается вещественно-аналитической.

Для компактной записи используем следующую систему обозначений. Начальную эпоху обозначим  $t$ , а текущее время  $\tilde{t} = t + \tau$ . Соответственно, текущее значение зависимых переменных обозначим  $\mathbf{x}(t + \tau)$ , а начальное  $\mathbf{x}(t)$ . Аргумент  $t$  часто будем опускать, но аргумент  $t + \tau$  всегда будем писать явно. Важно, что  $t$  и  $\mathbf{x}(t)$  считаются *переменными величинами*, по которым, в частности, возможно дифференцирование. Это значит, что мы рассматриваем не одну фиксированную траекторию, а трубку траекторий. В силу линейной зависимости  $\tilde{t} = t + \tau$  производные по  $\tilde{t}$ ,  $t$  и  $\tau$  совпадают.

По теореме Коши произвольное решение (3.1) может быть представлено рядом Маклорена по степеням  $\tau$ :

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \mathbf{x}^{(k)}(t), \quad (3.2)$$

сходящимся для каждой пары  $(t, \mathbf{x}(t))$  при достаточно малом  $\tau$ . Более того, так может быть представлено поведение произвольной аналитической функции  $g(t, \mathbf{x})$  вдоль решения системы (3.1):

$$g(t + \tau, \mathbf{x}(t + \tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} D^k g(t, \mathbf{x}). \quad (3.3)$$

Здесь  $D$  — оператор дифференцирования вдоль траекторий системы (3.1):

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.4)$$

Степени оператора, начиная со второй, определяются по индукции  $D^{k+1} = D(D^k)$ . Нулевая степень есть тождественный опера-



тор  $D^0 g = g$ , что иногда записывают в виде  $D^0 = 1$ , если это не приводит к путанице.

Для доказательства формулы (3.3) вычисляем сначала первые члены:

$$g(t + \tau, \mathbf{x}(t + \tau))|_{\tau=0} = g(t, \mathbf{x}(t)) = D^0 g(t, \mathbf{x}),$$

$$\left. \frac{dg(t + \tau, \mathbf{x}(t + \tau))}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{dg(t, \mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = Dg,$$

и далее убеждаемся, что коэффициент при  $\tau^k/k!$  в формуле (3.3) действительно равен  $D^k g$ .

Функция  $g$  в соотношении (3.3) может быть не только скалярной, но и векторной, матричной, тензорной — вообще  $g$  может быть элементом любого *линейного* пространства. *Оператор  $D$  отображает  $g$  в то же пространство.* Иными словами, для скалярной, векторной, матричной функции  $g$  функция  $Dg$  будет соответственно скалярной, векторной, матричной. В частности, для  $g(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$  формула (3.3) переходит в

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} D^k \mathbf{x}(t), \quad (3.5)$$

что совпадает с (3.2). Поскольку

$$D\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (3.6)$$

то в (3.5) можно снизить степень оператора на единицу:

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \mathbf{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} D^{k-1} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (3.7)$$

Представляющие решение уравнения (3.1) и любую функцию вдоль решения ряды (3.7) и (3.3) называются *рядами Ли* по имени тщательно изучившего их свойства норвежского математика Софуса Ли. Конечно, правая часть (3.7) есть ряд Маклорена для  $\mathbf{x}(t + \tau)$ . Но для нас существенно, что общий член рядов (3.3), (3.7) выражен только через известные функции  $\mathbf{f}$  и  $g$  — предварительного знания решения уравнения (3.1) не требуется. Поэтому выделение рядов вида (3.3) в особый класс оправдано.

В автономном случае, когда *обе* функции  $\mathbf{f}$ ,  $g$  не зависят от времени, в определении оператора  $D$  можно опустить дифференцирование по  $t$ :

$$D = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.8)$$

(см. задачу 3.2).

## 3.2. Ряды по степеням времени в кеплеровском движении

Мы получили решение в задаче одного притягивающего центра не без некоторых усилий. Теперь мы хотим представить решение рядом по степеням времени. Удивительно, но проще найти требуемое разложение, используя только уравнение (1.1), как будто мы не знаем его решений! А вот для определения области сходимости знание решения будет весьма полезным. Но вопросы сходимости мы рассмотрим в последнем параграфе этой главы.

Запишем уравнение (1.1) в виде (3.1), где  $\mathbf{x}$  — фазовый шестимерный вектор, или, что то же, положение и скорость  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Его производная  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})$  в силу (1.1) равна  $(\dot{\mathbf{r}}, -\kappa^2 r^{-3} \mathbf{r})$ . Мы пришли к уравнению (3.1) при

$$\mathbf{f} = (\mathbf{v}, -\kappa^2 r^{-3} \mathbf{r}). \quad (3.9)$$

Вектор  $\mathbf{f}$  не зависит от времени. Имея дело в дальнейшем лишь с не зависящими явно от времени величинами  $g(\mathbf{x})$ , мы можем воспользоваться формулой (3.8) и получить для оператора  $D$  выражение

$$D = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{i=1}^3 \left( \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\kappa^2}{r^3} x_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right). \quad (3.10)$$

В этом параграфе компоненты вектора  $\mathbf{r}$  нам удобнее обозначать  $x_1, x_2, x_3$ , а не  $x, y, z$ .

Вычислим действие  $D$  на фазовый вектор  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ :

$$D\mathbf{r} = \mathbf{v}, \quad D^2\mathbf{r} = D\mathbf{v} = -\kappa^2 r^{-3} \mathbf{r}. \quad (3.11)$$

По правилу Лейбница (см. задачу 3.3) дальнейшие степени  $D^3\mathbf{r}$ ,  $D^4\mathbf{r}, \dots$  являются линейными комбинациями векторов  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  с коэффициентами, зависящими от  $r, Dr, D^2r, \dots$  или, что то же, от

$r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots$  Напомним, что  $D$  — это оператор дифференцирования вдоль траектории. По правилам векторного анализа с учетом (1.1)

$$r^2 = \mathbf{r}^2, \quad r\dot{r} = \mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}, \quad \dot{r}^2 + r\ddot{r} = \dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}^2 - \kappa^2/r.$$

Скаляры  $r, \dot{r}$  относятся к начальным данным, а  $\ddot{r}$  оказалось равным

$$\ddot{r} = \frac{1}{r} \left( \mathbf{v}^2 - \dot{r}^2 - \frac{\kappa^2}{r} \right),$$

так что  $\ddot{r}$  зависит от трех переменных — расстояния  $r$ , радиальной скорости  $\dot{r}$  и квадрата полной скорости  $\mathbf{v}^2$ . Производные от  $r, \dot{r}$  и  $\mathbf{v}^2$  легко выразить через эти же величины. Поэтому

$$D^k \mathbf{r} = F_k \mathbf{r} + G_k \mathbf{v}, \quad D^k \mathbf{v} = D^{k+1} \mathbf{r} = F_{k+1} \mathbf{r} + G_{k+1} \mathbf{v}, \quad (3.12)$$

где  $F_k, G_k$  — функции от указанных трех аргументов. Формулы (3.5), (3.12) обычно представляют в форме

$$\mathbf{r}(t + \tau) = F\mathbf{r} + G\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(t + \tau) = F'\mathbf{r} + G'\mathbf{v}, \quad (3.13)$$

где  $F, G, F', G'$  зависят от тех же трех величин и  $\tau$  и выражаются рядами

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} F_k, \quad G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} G_k, \quad F' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} F_{k+1}, \quad G' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} G_{k+1}. \quad (3.14)$$

С точностью до обозначений начальных и текущих векторов положения и скорости формулы (1.87) и (3.13) совпадают, так что  $F, G, F', G'$  представляют одни и те же величины. Здесь мы находим их разложения по степеням времени.

Начальные члены последовательностей  $F_k, G_k$  известны по линейному приближению  $\mathbf{r}(t + \tau) = \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}\tau + \dots$ , откуда

$$F_0 = G_1 = 1, \quad F_1 = G_0 = 0. \quad (3.15)$$

Остальные легко получить по индукции. Для этого применим оператор  $D$  к первому из равенств (3.12) с учетом правила Лейбница (см. задачу 3.3)

$$D^{k+1} \mathbf{r} = (DF_k)\mathbf{r} + F_k(D\mathbf{r}) + (DG_k)\mathbf{v} + G_k(D\mathbf{v}).$$

Подставляя  $D\mathbf{r}$ ,  $D\mathbf{v}$  из (3.11), приходим к соотношению

$$D^{k+1}\mathbf{r} = (DF_k)\mathbf{r} + F_k\mathbf{v} + (DG_k)\mathbf{v} + G_k(-\varkappa^2 r^{-3}\mathbf{r}).$$

Сравнение со вторым из равенств (3.12) приводит к искомым рекуррентностям

$$F_{k+1} = DF_k - \varkappa^2 r^{-3}G_k, \quad G_{k+1} = F_k + DG_k. \quad (3.16)$$

Последовательное вычисление  $F_k$ ,  $G_k$  можно значительно облегчить, если перейти от  $r, \dot{r}, \mathbf{v}^2$  к эквивалентной тройке

$$\xi = \varkappa^{2/3}r^{-1}, \quad \eta = \varkappa^{-4/3}r\dot{r}, \quad \zeta = \varkappa^{-4/3}\dot{\mathbf{r}}^2 - 2\varkappa^{2/3}r^{-1} = 2\varkappa^{-4/3}h. \quad (3.17)$$

Полезно знать физическую размерность введенных величин:  $\varepsilon^{-2/3}$ ,  $\varepsilon^{1/3}$  и  $\varepsilon^{-2/3}$  для  $\xi, \eta, \zeta$  соответственно. Прямое дифференцирование дает

$$D\xi = -\xi^3\eta, \quad D\eta = \xi + \zeta, \quad D\zeta = 0.$$

Отсюда следует, что для произвольной дифференцируемой функции  $g(\xi, \eta, \zeta)$  ее производная вдоль траектории

$$Dg = -\xi^3\eta\frac{\partial g}{\partial \xi} + (\xi + \zeta)\frac{\partial g}{\partial \eta} \quad (3.18)$$

также зависит только от  $\xi, \eta, \zeta$ .

Считая  $F_k, G_k$  функциями от  $\xi, \eta, \zeta$ , преобразуем (3.16) к виду, пригодному для практических вычислений:

$$F_{k+1} = -\xi^3G_k - \xi^3\eta\frac{\partial F_k}{\partial \xi} + (\xi + \zeta)\frac{\partial F_k}{\partial \eta}, \quad G_{k+1} = F_k - \xi^3\eta\frac{\partial G_k}{\partial \xi} + (\xi + \zeta)\frac{\partial G_k}{\partial \eta}. \quad (3.19)$$

Выпишем первые члены последовательности  $F_k, G_k$ :

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, & G_0 &= 0, \\ F_1 &= 0, & G_1 &= 1, \\ F_2 &= -\xi^3, & G_2 &= 0, \\ F_3 &= 3\xi^5\eta, & G_3 &= -\xi^3, \\ F_4 &= 4\xi^6 - 15\xi^7\eta^2 + 3\xi^5\zeta, & G_4 &= 6\xi^5\eta, \\ F_5 &= -60\xi^8\eta + 105\xi^9\eta^3 - 45\xi^7\eta\zeta, & G_5 &= 10\xi^6 - 45\xi^7\eta^2 + 9\xi^5\zeta. \end{aligned}$$

Как видим, начальные коэффициенты постоянны, затем последовательно появляется зависимость от  $\xi, \eta, \zeta$ . От всех трех аргументов  $F_k$  зависят при  $k \geq 4$ , а  $G_k$  — при  $k \geq 5$ .

### 3.3. Ряды по степеням эксцентриситета

Из всех орбит самой простой является круговая — голубая мечта многих древнегреческих философов. В Солнечной системе большие планеты, регулярные спутники планет, существенная часть малых планет, большинство искусственных спутников Земли имеют небольшие эксцентриситеты орбит. Среди внесолнечных планет, двойных и кратных звезд небольшие эксцентриситеты тоже типичны. По этим причинам представляется вполне естественным изучить явное представление основных функций небесной механики в виде рядов по степеням эксцентриситета.

Можно обобщить задачу, исследуя орбиты в окрестности произвольного значения  $e_0$ . Однако на этом пути не удалось получить сколько-нибудь значительных результатов, поскольку отвечающая значению  $e_0$  орбита ничуть не проще соседних. Есть лишь два исключения:  $e_0 = 0$  и  $e_0 = 1$ . Разложения в окрестности  $e_0 = 1$  мы уже рассматривали в § 1.5. После Эйлера эта тема существенно не продвинута.

Далее мы займемся случаем  $e_0 = 0$ , где классиками получено множество результатов.

Обратим внимание, что задача *разложить данную физическую величину по степеням эксцентриситета* является недоопределенной. Мы имеем более десятка связанных между собой элементов орбиты и надо выбрать из них пять независимых, не считая эксцентриситета. Разный выбор дает разные результаты. В качестве отвечающих за ориентацию элементов всегда будем брать  $i$ ,  $\Omega$ ,  $g$ . Соответствующий размеру орбиты элемент обычно — большая полуось  $a$ , но иногда удобнее параметр  $p$ . Наконец, надо выбрать одну из аномалий  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $E$ ,  $M$ . Иногда используют и более сложный набор элементов.

На простейших примерах видно, что одна и та же величина в разных системах независимых элементов имеет разные ряды Маклорена по эксцентриситету. Скажем,  $r^{-1}$  есть бесконечный ряд в системе  $e$ ,  $a$ ,  $\theta$  и линейная функция эксцентриситета в системе  $e$ ,  $p$ ,  $\theta$ . В системе  $e$ ,  $a$ ,  $E$  радиус линейно зависит от эксцентриситета и представляется бесконечным рядом в системе  $e$ ,  $a$ ,  $\theta$ .

Как в системе с фиксированным  $a$ , так и с фиксированным  $p$  декартовы координаты и радиус в эллиптическом движении являются многочленами относительно  $e$ ,  $\sqrt{1-e^2}$ ,  $1/\sqrt{1-e^2}$ ,  $\cos E$ ,  $\sin E$  в лю-

бой из рассмотренных систем отсчета. Компоненты вектора скорости являются многочленами от указанных величин и  $(1 - e \cos E)^{-1}$ . Поэтому декартовы координаты и скорости, включая  $r$ ,  $\dot{r}$ ,  $r\dot{\theta}$ , легко разлагается в ряды по степеням эксцентриситета с коэффициентами, зависящими от  $E$ . Коэффициенты рядов — многочлены относительно синусов и косинусов  $E$ . Радиус сходимости не меньше единицы. То же справедливо для разностей аномалий  $E - M$  (тривиально) и  $\theta - E$ ,  $\dot{\theta} - E$  (см. формулы (1.29), (1.53)). Для встречающихся на практике функций наименьший по всем  $E$  радиус сходимости равен 1 или  $\infty$ . То же верно, если поменять местами эксцентрическую и истинную или сопряженную аномалии.

Наибольший интерес представляет система  $e, a, M$  (реже — мало отличающаяся от нее система  $e, p, M$ ), ибо только в этом случае можно говорить о записи в виде явной функции времени.

### 3.3.1. Уравнение Кеплера

Прежде всего надо представить решение уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (3.20)$$

в виде ряда по степеням  $e$  с коэффициентами, зависящими от  $M$ . Ввиду важности этой задачи для небесной механики и того обстоятельства, что она служит относительно простой моделью для многих более сложных задач, разберем этот случай подробно.

1. *Последовательное дифференцирование.* Представим  $E$  в стандартной форме ряда Маклорена

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(M) e^k, \quad \text{где} \quad a_k = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k E}{de^k} \right|_{e=0}. \quad (3.21)$$

Напомним, что  $M$  считается вещественным параметром. При  $e = 0$  имеем  $E = M$ , поэтому  $a_0 = M$ . Остальные коэффициенты  $a_k$  периодически зависят от  $M$ , поэтому (3.21) обычно записывают в виде

$$E - M = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(M) e^k. \quad (3.22)$$

Дифференцирование (3.20) дает  $(1 - e \cos E) dE - \sin E de = 0$ , поэтому

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \quad (3.23)$$

Поскольку  $M$  считается параметром, то  $dM = 0$ .

Вычислим вторую производную

$$\frac{d^2 E}{de^2} = \left( \frac{\partial}{\partial e} + \frac{dE}{de} \frac{\partial}{\partial E} \right) \frac{\sin E}{1 - e \cos E} = \frac{-5e \sin E + 4 \sin 2E - e \sin 3E}{4(1 - e \cos E)^3}.$$

Предположим, что

$$\frac{d^k E}{de^k} = \frac{\Phi_k(e, E)}{4^{k-1}(1 - e \cos E)^{2k-1}}, \quad (3.24)$$

где  $\Phi_k$  – многочлен Фурье по синусам порядка не выше  $2k - 1$ , коэффициенты которого – многочлены от  $e$  степени не выше  $k - 1$  с целыми коэффициентами. При  $k = 1, 2$  это верно:

$$\Phi_1 = \sin E, \quad \Phi_2 = -5e \sin E + 4 \sin 2E - e \sin 3E.$$

Предположение доказывается по индукции с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1} = & 4(2k - 1)(\cos E - e)\Phi_k + (4 \sin E - 2e \sin 2E) \frac{\partial \Phi_k}{\partial E} + \\ & (4 + 2e^2 - 8e \cos E + 2e^2 \cos 2E) \frac{\partial \Phi_k}{\partial e}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

легко выводимого дифференцированием (3.24).

Формула (3.25) позволяет найти  $\Phi_k$  вплоть до любого желаемого порядка  $k$ , после чего останется положить

$$a_k = \frac{1}{4^{k-1}k!} \Phi_k(0, M).$$

2. *Итерации.* В § 1.4 описан метод итераций для численного решения уравнения Кеплера. Модифицируем его, полагая

$$E_0 = M, \quad \tilde{E}_{n+1} = M + e \sin E_n, \quad E_{n+1} = \mathcal{P}_{n+1}(\tilde{E}_{n+1}), \quad (3.26)$$

где оператор  $\mathcal{P}_{n+1}$  сопоставляет произвольной аналитической функции от  $e$  ее многочлен Маклорена до  $e^{n+1}$  включительно. Последовательно вычисляем

$$\tilde{E}_1 = M + e \sin M, \quad E_1 = M + e \sin M;$$

$$\tilde{E}_2 = M + e \sin(M + e \sin M) = M + e [\sin M + \cos M \cdot e \sin M + \dots],$$

$$E_2 = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M;$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3 = M + e \sin \left( M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M \right) = M + e \left[ \sin M + \right. \\ \left. + \cos M \left( e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M \right) - \frac{1}{2} \sin M \left( e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M \right)^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

$$E_3 = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{e^3}{8} (3 \sin 3M - \sin M)$$

и так далее. Итерация  $E_{n+1}$  восстанавливает выражение  $E_n$  и добавляет член, пропорциональный  $e^{n+1}$ . Причина — множитель  $e$  перед  $\sin E_n$  в формуле (3.26). Таким образом,  $E_n$  — отрезок ряда Маклорена степени  $n$  для эксцентрической аномалии.

3. *Ряд Бюрмана–Лагранжа*, служащий для нахождения обратной функции. Почти в каждом учебнике по теории функций комплексной переменной он приводится в близкой к следующей форме.

Пусть

$$z = \varphi(w) \quad (3.27)$$

является голоморфной в окрестности нуля функцией,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) \neq 0$ . Тогда в окрестности нуля голоморфна и обратная функция  $w = \psi(z)$ . Любая голоморфная в окрестности нуля функция  $f(w)$ , рассматриваемая как функция  $f(\psi(z))$  от  $z$ , разлагается в сходящийся в окрестности нуля ряд

$$f(\psi(z)) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dw^{k-1}} \left[ f'(w) \left( \frac{w}{\varphi(w)} \right)^k \right]_{w=0}. \quad (3.28)$$

Часто более удобна другая форма ряда Бюрмана–Лагранжа (*Гурвиц, 1933*), (*Battin, 1999*). Рассмотрим уравнение

$$z = w - \mu \varphi(w), \quad (3.29)$$

где  $z$ ,  $\mu$ ,  $w$  — комплексные переменные;  $\mu$  изменяется в окрестности нуля,  $w$  и  $z$  — в некоторой области, где функция  $\varphi$  голоморфна. Требуется найти решение  $w = w(\mu, z)$  уравнения (3.29), обращающееся в  $z$  при  $\mu = 0$ , т. е.  $w(0, z) = z$ . Любая голоморфная в той же



области функция  $f(w)$  может быть представлена вдоль решения рядом

$$f(w(\mu, z)) = f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [f'(z)\varphi^k(z)] , \quad (3.30)$$

сходящимся при достаточно малых  $\mu$ .

В частности, сами решения уравнений (3.27), (3.29) получаются при  $f(w) = w$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(w) = 1$  и соответственно  $f(z) = z$ ,  $f'(z) = 1$ . Например,

$$w(\mu, z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [\varphi^k(z)] . \quad (3.31)$$

Уравнение Кеплера (3.20) имеет вид (3.29) при  $z = M$ ,  $\mu = e$ ,  $w = E$ ,  $\varphi(w) = \sin w = \sin E$ . Поэтому решение дается изменением обозначений в (3.31):

$$E - M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (\sin^k M) . \quad (3.32)$$

Рассмотренные три метода имеют свои достоинства и недостатки. Итерации быстрее всего ведут к цели для первых двух-трех членов ряда. Формуле (3.25) или (3.32) трудно отдать предпочтение. Последняя из них много изящнее, но при переходе от  $k$  к  $k+1$  производную высокого порядка надо брать от новой функции, так что для больших  $k$  предпочтительнее (3.25). Зато из (3.32) легко вывести, что  $a_k$  — многочлен Фурье степени  $k$  по синусам кратных  $M$  с рациональными коэффициентами, примерно половина из которых обращается в нуль. Именно, ненулевыми являются лишь коэффициенты при  $\sin(k-2s)M$ ,  $s = 0, 1, \dots, [k/2]$ . Более того, из (3.32) можно вывести явный вид  $a_k$  как многочленов Фурье. Для этого обратимся к известным формулам тригонометрии (*Градштейн, Рыжик, 1971*)

$$\begin{aligned} \sin^{2k} M &= \sum_{s=0}^k a_{2k,s} \cos(2k-2s)M, \\ \sin^{2k+1} M &= \sum_{s=0}^k a_{2k+1,s} \sin(2k+1-2s)M, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где

$$a_{2k,s} = \frac{(-1)^{k+s}}{2^{2k-1}} \binom{2k}{s}, \quad \text{если} \quad 0 \leq s \leq k-1,$$

$$a_{2k,k} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}, \quad a_{2k+1,s} = \frac{(-1)^{k+s}}{2^{2k}} \binom{2k+1}{s}.$$

Подставляя (3.33) в (3.32), получаем

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{s=0}^{k-1} (2k-2s)^{2k-1} a_{2k,s} \sin(2k-2s)M,$$

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{s=0}^k (2k+1-2s)^{2k} a_{2k+1,s} \sin(2k+1-2s)M,$$

что равносильно единой формуле

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{s=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^s \frac{(k-2s)^{k-1}}{s!(k-s)!} \sin(k-2s)M. \quad (3.34)$$

4. *Разложение в ряд Фурье по средней аномалии с последующим разложением коэффициентов в ряд Маклорена по эксцентриситету и перестановкой суммирования.*

Естественно, этот метод применим лишь после знакомства с разложениями функций кеплерова движения в ряды Фурье, чем мы займемся в следующих параграфах.

Заметим, что уже изложенные три метода легко позволяют найти несколько первых членов ряда Маклорена любой интересующей нас функции кеплеровского движения и получить рекуррентные соотношения. В то же время простой явный вид коэффициентов известен не для всех функций. Например, его нет для *уравнения центра*  $\theta - M$ , несмотря на значительные усилия ряда астрономов и математиков. Впрочем, само по себе уравнение центра не нужно — на практике используются лишь  $\cos(\theta - M)$  и  $\sin(\theta - M)$ , для которых простые представления существуют.

### 3.3.2. Связь переменных $e$ , $\beta$ , $\gamma$

Определяемая соотношениями (1.30) величина  $\beta = e/(1 + \eta)$ , где  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ , часто используется при описании эллиптического

движения. Ниже встретится введенная Леви-Чивита функция  $\gamma = \beta \exp \eta$ . Исследуем их взаимозависимость при  $0 \leq e \leq 1$ , а затем найдем степенные разложения.

Выпишем определяющие соотношения

$$\beta = \frac{e}{1+\eta} = \frac{1-\eta}{e}, \quad e = \frac{2\beta}{1+\beta^2}, \quad \eta = \sqrt{1-e^2} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}, \quad \gamma = \beta \exp \eta \quad (3.35)$$

и производные

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{de} &= -\frac{e}{\eta}, \quad \frac{d^2\eta}{de^2} = -\frac{1}{\eta^3}, \quad \frac{d\beta}{de} = \frac{1}{\eta(1+\eta)} = \frac{\beta}{e\eta}, \\ \frac{d^2\beta}{de^2} &= \frac{\beta(1+2\eta)}{\eta^3(1+\eta)}, \quad \frac{d\gamma}{de} = \frac{\eta}{1+\eta} \exp \eta = \frac{\eta}{e} \gamma, \quad \frac{d^2\gamma}{de^2} = -\frac{1+\eta+\eta^2}{\eta(1+\eta)} \gamma. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Очевидные свойства функций  $\beta(e), \gamma(e)$  и их двух производных показывают, что с изменением  $e$  от нуля до единицы  $\beta(e)$  возрастает от 0 до 1, оставаясь выпуклой вниз;  $\gamma(e)$  возрастает от 0 до 1, оставаясь выпуклой вверх. Касательная к графику  $\beta(e)$  вертикальна, а к графику  $\gamma(e)$  горизонтальна при  $e = 1$ .

Далее,

$$e - \beta = \beta\eta, \quad \gamma - e = \beta(\exp \eta - 1 - \eta).$$

Правые части обоих равенств положительны внутри интервала  $0 < e < 1$  и обращаются в нуль на его концах. Поэтому график  $\beta(e)$  лежит ниже, а график  $\gamma(e)$  — выше главной диагонали единичного квадрата (рис. 3.1).

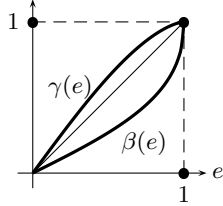


Рис. 3.1. Графики функций  $\beta(e), \gamma(e)$  и тождественной функции.

Перейдем к степенным рядам.

1. Обозначим  $z = \beta^k$ ,  $k \geq 1$ . Для нахождения степенного ряда составим дифференциальное уравнение для  $z(e)$ . Продифференцируем  $z$  два раза:

$$z'(e) = \frac{k}{e\eta} z, \quad z''(e) = \frac{k}{e^2\eta^3} (-1 + 2e^2 + k\eta) z,$$

откуда

$$e^2(1 - e^2)z'' + e(1 - 2e^2)z' - k^2z = 0. \quad (3.37)$$

Очевидно, что величина  $\beta$  разлагается по нечетным степеням  $e$ , поэтому искомый ряд имеет вид

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_{kn} e^{k+2n}. \quad (3.38)$$

Подставим (3.38) в (3.37):

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(1 - e^2)(k+2n)(k+2n-1) + (1 - 2e^2)(k+2n) - k^2] c_n e^{k+2n} = 0. \quad (3.39)$$

Для краткости мы часто будем опускать первый индекс у  $c_{kn}$ . Остается приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях эксцентриситета:

$$\begin{aligned} e^k : & \quad 0c_0 = 0, \\ e^{k+2} : & \quad 4(k+1)c_1 = (k+1)kc_0, \\ \dots & \quad \dots \\ e^{k+2n} : & \quad 4n(k+n)c_n = (k+2n-1)(k+2n-2)c_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Последнее из соотношений (3.40) справедливо при  $n \geq 1$ . Можно считать его выполненным при  $n \geq 0$ , если принять естественное соглашение  $c_{-1} = 0$ .

Рекуррентность (3.40) легко разрешается:

$$c_n = \frac{k(k+2n-1)!}{4^n n! (k+n)!} c_0. \quad (3.41)$$

Коэффициент  $c_0$  не может быть определен по однородному уравнению (3.37). Однако его нахождение не представляет труда. По определению (3.35)

$$\eta = 1 - \frac{1}{2}e^2 + \dots, \quad \beta = \frac{e}{2} \left( 1 + \frac{e^2}{4} + \dots \right), \quad \beta^k = \frac{e^k}{2^k} \left( 1 + \frac{k}{4}e^2 + \dots \right),$$

откуда

$$c_{k0} = \frac{1}{2^k}, \quad c_{k1} = \frac{k}{2^{k+2}}.$$

Подставляя в (3.41), получаем окончательно

$$c_{kn} = \frac{k(k+2n-1)!}{2^{k+2n}n!(k+n)!} \quad (k \geq 1, n \geq 0). \quad (3.42)$$

Коэффициенты  $c_{kn}$  положительны. Поэтому не только первые две производные от  $\beta$  по  $e$ , но и производные любого порядка от  $\beta^k$  по  $e$  положительны.

Для иллюстрации выпишем разложение  $\beta$ :

$$\beta = e \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{16}e^4 + \frac{5}{128}e^6 + \frac{7}{256}e^8 + \dots \right). \quad (3.43)$$

Бросается в глаза, что знаменатели коэффициентов — степени двойки. Докажем это. При  $n \geq 2$  выразим  $c_{1n}$  через биномиальные коэффициенты:

$$c_{1n} = \frac{1}{2^{2n+1}n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2^{2n+1}(n+1)} \binom{2n}{n},$$

что можно представить в виде

$$2^{2n+1}c_{1n} = \frac{A}{n} = \frac{B}{n+1}$$

с натуральными  $A, B$ . Отсюда

$$B = \frac{n+1}{n}A.$$

Так как  $n, n+1$  взаимно просты, то  $B$  может быть целым, только если  $A$  делится на  $n$ , а тогда  $2^{2n+1}c_{1n}$  — целое число, что и требовалось доказать. Более того, коэффициенты  $c_{kn}$  при любом  $k$  суть целые числа, деленные на степень двойки. В самом деле, из определения  $c_{kn}$  следует

$$\sum_{s=0}^n c_{ks} e^{2s} = \left( \sum_{m=0}^n c_{1m} e^{2m} \right)^k + \dots,$$

где невыписанные члены имеют порядок  $e^{2n+2}$  и выше. Очевидно, что  $c_{kn}$  представляет собой конечную сумму произведений  $c_{1m}$  и потому обладает указанным свойством.

*Замечание.* Зачем в астрономической книге уделять внимание арифметическим свойствам коэффициентов? Дело в том, что при вычислениях в арифметике вещественных чисел происходит потеря точности. Ее можно полностью избежать, если перейти к арифметике рациональных чисел. Мы показали, что тот же результат достигается переходом к конечным  $p$ -ичным дробям, если  $p$  делится на два — в частности, к самым распространенным двоичным, восьмеричным и десятичным дробям.

2. Обозначим

$$e^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} \beta^{k+2n}, \quad k \geq 1. \quad (3.44)$$

Согласно (3.35) последний ряд — биномиальный, так что

$$a_{kn} = (-1)^n \frac{2^k (k+n-1)!}{n!(k-1)!} = 2^k (-1)^n \binom{k+n-1}{n}. \quad (3.45)$$

Поскольку биномиальные коэффициенты — целые числа, целыми являются и  $a_{kn}$ . В частности, для  $k=1$  имеем  $a_{1n} = 2(-1)^n$ .

3. Величина  $\gamma$  встречается реже и мы исследуем только первую ее степень. Обозначим

$$\gamma(\beta) = \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \beta^{2n+1}, \quad (3.46)$$

где  $\epsilon = 2.71828 \dots$  — неперово число. Этот множитель введен, чтобы согласно (3.35) обратить  $\gamma_0$  в единицу. Из (3.36) выводим дифференциальное уравнение

$$\beta(1 + \beta^2)^2 \gamma' = (1 - \beta^2)^2 \gamma, \quad (3.47)$$

а далее соотношение типа (3.39)

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2n + 4(n+1)\beta^2 + 2n\beta^4] \gamma_n \beta^{2n+1} = 0 \quad (3.48)$$

и рекуррентности

$$0\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 + 2\gamma_0 = 0, \quad n\gamma_n + 2n\gamma_{n-1} + (n-2)\gamma_{n-2} = 0. \quad (3.49)$$

Последняя формула справедлива при  $n \geq 0$ , если условиться  $\gamma_{-1} = \gamma_{-2} = 0$ . Вычисляя последовательно  $\gamma_n$ , получаем

$$\gamma(\beta) = \epsilon \beta \left( 1 - 2\beta^2 + 4\beta^4 - \frac{22}{3}\beta^6 + \frac{38}{3}\beta^8 + \dots \right). \quad (3.50)$$

Согласно задаче 3.9 коэффициенты  $\gamma_n$  знакопереваются и возрастают по модулю.

Точно так же для

$$\gamma(e) = \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n e^{2n+1} \quad (3.51)$$

найдем последовательно

$$e^2(1 - e^2)\gamma'' + e\gamma' - (1 - e^2)^2\gamma = 0, \quad (3.52)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2n(2n+1)(1 - e^2) + (2n+1) - (1 - e^2)^2] \delta_n e^{2n+1} = 0, \quad (3.53)$$

$$0\delta_0 = 0, \quad 4\delta_1 + \delta_0 = 0, \quad 4n(n+1)\delta_n - 2n(2n-3)\delta_{n-1} - \delta_{n-2} = 0. \quad (3.54)$$

Вычисляя последовательно  $\delta_n$ , находим

$$\gamma(e) = \frac{\epsilon e}{2} \left( 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{192}e^6 - \frac{1}{384}e^8 - \dots \right). \quad (3.55)$$

Из (3.54) следует, что  $\delta_2 = 0$ , а  $\delta_1$  и  $\delta_n$  при  $n \geq 3$  отрицательны, убывают по модулю, а их отношение стремится к единице при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда вытекает, что все производные от  $\gamma(e)$ , начиная со второй, отрицательны при  $0 < e < 1$ .

4. Перейдем к обратным функциям. Для них не удастся составить линейное дифференциальное уравнение. Проще всего подставить искомый ряд непосредственно в (3.50). Предварительно сделаем естественную замену  $\gamma = \epsilon \bar{\gamma}$  и обозначим

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{\gamma}^{2n+1}. \quad (3.56)$$

Указанная подстановка принимает вид

$$\bar{\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{\gamma}^{2n+1} - 2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{\gamma}^{2n+1} \right)^3 + 4 \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{\gamma}^{2n+1} \right)^5 + \dots$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\bar{\gamma}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}^1 : \quad & 1 = b_0, \\
\bar{\gamma}^3 : \quad & 0 = b_1 - 2b_0^3, \\
\bar{\gamma}^5 : \quad & 0 = b_2 - 2(3b_0^2b_1) + 4b_0^5, \\
\bar{\gamma}^7 : \quad & 0 = b_3 - 2(3b_0^2b_2 + 3b_0b_1^2) + 4(5b_0^4b_1) - \frac{22}{3}b_0^7, \\
\bar{\gamma}^9 : \quad & 0 = b_4 - 2(3b_0^2b_3 + 6b_0b_1b_2 + b_1^3) + 4(5b_0^4b_2 + 10b_0^3b_1^2) - \\
& - \frac{22}{3}(7b_0^6b_1) + \frac{38}{3}b_0^9.
\end{aligned}$$

Последовательно получаем окончательный результат

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 8, \quad b_3 = \frac{118}{3}, \quad b_4 = 214.$$

Аналогично для

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \bar{\gamma}^{2n+1}, \quad (3.57)$$

где положено  $\gamma = (\epsilon/2)\bar{\gamma}$ , получаем из (3.55)

$$\begin{aligned}
1 &= c_0, \\
0 &= c_1 - \frac{1}{4}c_0^3, \\
0 &= c_2 - \frac{1}{4}(3c_0^2c_1), \\
0 &= c_3 - \frac{1}{4}(3c_0^2c_2 + 3c_0c_1^2) - \frac{1}{192}c_0^7, \\
0 &= c_4 - \frac{1}{4}(3c_0^2c_3 + 6c_0c_1c_2 + c_1^3) - \frac{1}{192}(7c_0^6c_1) - \frac{1}{384}c_0^9.
\end{aligned}$$

Очевидно, все  $c_n$  положительны.

Окончательный результат:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{3}{16}, \quad c_3 = \frac{37}{192}, \quad c_4 = \frac{59}{256}.$$

### 3.4. Функции Бесселя

В важнейшем для астрономии случае эллиптического движения фазовые координаты периодически зависят от времени и потому разлагаются в ряд Фурье. Добавим сюда и прямолинейно-эллиптическое движение, рассматривая аналитическое продолжение решения через точку соударения. Фазовые координаты (1.42),



(1.47) являются тригонометрическими многочленами от  $E$  или  $\theta$ , или тригонометрическими многочленами, помноженными на  $(1 - e \cos E)^{-1}$  или  $(1 + e \cos \theta)^{-1}$ . Поэтому ряды Фурье по кратным  $E$  или  $\theta$  находятся сравнительно просто. Основным интерес представляет зависимость от средней аномалии. Классиками, начиная с Эйлера, здесь получено множество результатов. Ключевую роль играют функции Бесселя, знакомству с которыми мы посвятим этот параграф.

### 3.4.1. Определение и основные свойства функций Бесселя

Функции Бесселя определим с помощью производящей функции:

$$\Phi(x, y) \stackrel{def}{=} \text{Exp}(x \sin y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \text{Exp } ny. \quad (3.58)$$

Мы ввели обозначение  $\text{Exp } y = \exp iy$ , где  $i$  — мнимая единица. Функция слева является целой функцией двух комплексных переменных  $x, y$ ,  $2\pi$ -периодической по  $y$  и удовлетворяющей условию

$$\Phi(-x, y + \pi) = \Phi(x, y). \quad (3.59)$$

Поэтому она разлагается в ряд Фурье по кратным  $y$  с зависящими от  $x$  коэффициентами, сходящийся абсолютно и равномерно в области  $|x| \leq x_0$ ,  $|\Im y| \leq y_0$  при любых положительных  $x_0, y_0$ . По теореме единственности равенство (3.58) однозначно определяет  $J_n(x)$ , называемые функциями Бесселя. Из сказанного ясно, что  $J_n$  — целые функции от  $x$ .

Согласно (3.58)

$$\text{Exp}(-x \sin y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x) \text{Exp } ny = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \text{Exp}(-ny),$$

поскольку слева знак «минус» мы можем отнести как к  $x$ , так и к  $y$ . Заменяя в последнем ряде индекс  $n$  на  $-n$ , представим его в форме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(x) \text{Exp } ny.$$

Сравнение коэффициентов дает  $J_{-n}(x) = J_n(-x)$ .

Подстановка (3.59) приводит к ряду

$$\text{Exp}(x \sin y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(-x) \text{Exp} ny,$$

так что  $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ .

Итак,

$$\begin{aligned} J_n(-x) &= (-1)^n J_n(x), & J_{-n}(x) &= J_n(-x) = (-1)^n J_n(x), \\ J_{-n}(-x) &= J_n(x), \end{aligned} \quad (3.60)$$

что позволяет считать  $n \geq 0$ , а для непрерывного аргумента считать  $x \geq 0$  в случае его вещественности.

Заменяя в левой части (3.58)  $\sin y$  на  $(\text{Exp} y - \text{Exp}(-y))/2i$ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \exp\left(\frac{x}{2} \text{Exp} y\right) \exp\left(-\frac{x}{2} \text{Exp}(-y)\right) = \\ &= \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \text{Exp} my \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{2}\right)^k \text{Exp}(-ky). \end{aligned}$$

Собирая члены, для которых  $m - k = n$ , находим

$$J_n(x) = \sum_{0 \leq m, k < \infty, m-k=n} \frac{(-1)^k}{m!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+k},$$

что при  $n \geq 0$  можно представить в виде

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \quad (3.61)$$

При отрицательных  $n$  нижний предел суммирования следует заменить на  $|n|$ . Впрочем, формулу (3.61) считают справедливой и при  $n < 0$ , полагая в согласии со свойствами гамма-функции Эйлера  $1/s! = 0$  при целых отрицательных  $s$ .

Радиус сходимости ряда (3.61) равен бесконечности, что, впрочем, было отмечено на с. 105. Функция Бесселя оказалась вещественной при вещественных  $x$ .

Почленным дифференцированием найдем

$$J'_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+2k)}{2k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1}. \quad (3.62)$$

Позже мы увидим, что в небесной механике функция  $J_0$  почти не встречается, а аргументом  $J_n$  при  $n \geq 1$  чаще всего служит  $x = ne$ . Поэтому полезны представления

$$J_n(ne) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{ne}{2}\right)^{n+2k}, \quad (3.63)$$

$$J'_n(ne) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(n+2k)}{2k!(n+k)!} \left(\frac{ne}{2}\right)^{n+2k-1} \quad (3.64)$$

при  $n \geq 1$ .

*Замечание 1.* В формуле (3.64) и ей подобных штрих означает производную по аргументу функции Бесселя, т.е. по  $x$ , а не по  $e$ .

*Замечание 2.* Обозначим  $q, q'$  модуль отношения отвечающего индексу  $(k+1)$ -го члена к предыдущему в формулах (3.63), (3.64) соответственно:

$$q = \frac{n^2}{4(k+1)(n+k+1)}e^2, \quad q' = \frac{(n+2k+2)n^2}{4(n+2k)(k+1)(n+k+1)}e^2,$$

что быстро стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$  и закрепленных  $n, e$ . Но при закрепленных  $k, e$  величины  $q, q'$  стремятся к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ . Например, при  $k = 0$

$$q = \frac{n^2}{4(n+1)}e^2, \quad q' = \frac{n(n+2)}{4(n+1)}e^2. \quad (3.65)$$

Разрешим (3.65) относительно  $n$ :

$$n_0(q, e) = 2 \frac{q + \sqrt{q^2 + qe^2}}{e^2}, \quad n_1(q', e) = \frac{2q' - e^2 + \sqrt{4q'^2 + e^4}}{e^2}.$$

Табл. 3.1 дает представление о величинах  $n_0(q, e)$  и  $n_1(q', e)$  при  $q = q' = 1$ .

Поэтому при больших  $n$  и умеренных  $e$  требуется много членов рядов (3.63), (3.64) для достижения высокой относительной точности. При  $k = (n/4) - 1$

$$q = \frac{4}{5}e^2, \quad q' = \frac{4}{5} \left(1 - \frac{4}{3n}\right)^{-1} e^2.$$

Таблица 3.1. Зависимость целой части  $n_0$  и  $n_1$  от  $e$  при  $q = q' = 1$

$e$	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$[n_0]$	40 000	400	100	45	25	16	12	9	7	5	4
$[n_1]$	39 999	399	99	43	24	15	12	9	7	5	4

Поэтому при  $e \leq 1$  остаток ряда (3.63) имеет лейбницевский тип, по крайней мере начиная с  $k = [n/4] - 1$  при  $n \geq 4$ , а остаток ряда (3.64) — начиная с  $k = [n/4] - 1$  при  $n \geq 8$ . В частности, в этих условиях при обрыве рядов на члене с индексом  $k$  погрешность будет меньше первого отброшенного члена и иметь его знак. Разумеется, ситуация улучшается с уменьшением  $e$ . В частности, сами ряды имеют лейбницевский тип при  $n \leq n_0(1, e)$  и  $n \leq n_1(1, e)$  соответственно.

Как коэффициент ряда Фурье (3.58) функция Бесселя равна интегралу

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Exp}(x \sin y - ny) dy. \quad (3.66)$$

Представим экспоненту как  $\cos z - i \sin z$  при  $z = ny - x \sin y$ . Функция  $\sin z$  нечетна по  $y$  и пропадает при интегрировании. Функция  $\cos z$  четна, что позволяет вдвое уменьшить промежуток интегрирования:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny - x \sin y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ny - x \sin y) dy. \quad (3.67)$$

Нетрудно получить рекуррентные соотношения для функций Бесселя и их производных (см. задачи 3.13, 3.14):

$$2nJ_n(x) = x[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)], \quad (3.68)$$

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x). \quad (3.69)$$

Последовательное дифференцирование (3.69) позволяет выразить производную любого порядка через сами функции. Например,

$$4J''_n(x) = J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x). \quad (3.70)$$

Комбинируя последние три формулы, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2 J''_n + x J'_n - (n^2 - x^2) J_n = 0. \quad (3.71)$$

Запишем равенство Парсеваля для ряда (3.58), рассматривая  $x$  как вещественный параметр:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\text{Exp}(x \sin y)|^2 dy = 1,$$

поскольку модуль экспоненты чисто мнимой переменной равен единице. Группируя слева слагаемые, различающиеся знаком индекса, представляем равенство Парсеваля в форме

$$J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.72)$$

Отсюда получаем для всех вещественных  $x$

$$|J_0(x)| \leq 1, \quad |J_n(x)| \leq 1/\sqrt{2} \quad \text{при } n \geq 1. \quad (3.73)$$

Дадим без вывода еще несколько полезных неравенств (*Ватсон, 1949*):

$$|J_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left| \frac{x}{2} \right|^n, \quad |J'_n(x)| \leq \frac{1}{2(n-1)!} \left[ 1 + \frac{x^2}{2n(n+1)} \right] \left| \frac{x}{2} \right|^{n-1}, \quad (3.74)$$

$$0 \leq J_n(ne) \leq \gamma^n, \quad J_n(ne) \leq \frac{\gamma^n}{\sqrt{2\pi n}}, \quad 0 \leq J'_n(ne) \leq \frac{\sqrt[4]{1+e^2}}{e\sqrt{2\pi n}} \gamma^n, \quad (3.75)$$

$$\frac{C_1}{n^{1/3}} < J_n(n) < \frac{C_2}{n^{1/3}}, \quad \frac{C_3}{n^{2/3}} < J'_n(n) < \frac{C_4}{n^{2/3}} \quad (3.76)$$

при  $C_1 = 0.44$ ,  $C_2 = 0.447307$ ,  $C_3 = 0.325$ ,  $C_4 = 0.410850$ . Формулы (3.74) верны при всех вещественных  $x$ ;  $n \geq 0$  в первой из них,  $n \geq 1$  — во второй. Первая из формул (3.75) верна при  $n \geq 0$ ,  $0 \leq e \leq 1$ ; вторая — при  $n \geq 1$ ,  $0 \leq e < 1$ ; третья — при  $n \geq 1$ ,  $0 \leq e \leq 1$  с учетом  $\gamma/e \rightarrow e/2$  при  $e \rightarrow 0$ . Формулы (3.76) справедливы при  $n \geq 1$ .

Многочисленные представления функций Бесселя рядами, интегралами, цепными дробями обстоятельно разобраны в книге (*Ватсон, 1949*). Там же приведены оценки, корни, ряды по функциям Бесселя, свойства ортогональности и многое другое. Ниже мы приведем еще лишь самое необходимое для дальнейшего.

### 3.4.2. Многочлены Ломмеля

Функция  $J_{n+1}$  выражается через  $J_n, J_{n-1}$  согласно (3.68), подобное выражение для  $J_{n-1}$  тривиально:

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x}J_n - J_{n-1}, \quad J_{n-1} = J_{n-1}. \quad (3.77)$$

Этот результат можно обобщить:

$$J_{n+m}(x) = R_{mn}(x)J_n(x) - R_{m-1,n+1}(x)J_{n-1}(x), \quad (3.78)$$

где *многочлены Ломмеля*  $R_{mn}$  определены при всех целых  $m, n$ . Обратим внимание, что многочленами они являются относительно  $x^{-1}$ . Сравнение соотношений (3.77) и (3.78) показывает, что

$$R_{1n} = \frac{2n}{x}, \quad R_{0n} = 1, \quad R_{-1,n} = 0, \quad R_{-2,n} = -1. \quad (3.79)$$

Отсюда можно идти в обе стороны по  $m$  с помощью рекуррентности (Ватсон, 1949)

$$R_{m-1,n} + R_{m+1,n} = \frac{2(n+m)}{x}R_{mn}. \quad (3.80)$$

При  $m \geq 0, n \geq 0$  Ломмелем получено и явное выражение (Ватсон, 1949)

$$R_{mn}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(m-k)!(m+n-k-1)!}{k!(m-2k)!(n+k-1)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2k}. \quad (3.81)$$

Случай  $m \leq -2$  сводится к случаю положительного первого индекса с помощью соотношений

$$R_{mn} = (-1)^m R_{m,-n-m+1} = (-1)^{m-1} R_{-m-2,2-n} = -R_{-m-2,n+m+1}. \quad (3.82)$$

Дополним формулы (3.79) до  $m = \pm 4$ :

$$R_{4n} = \frac{16(n+3)(n+2)(n+1)n}{x^4} - \frac{12(n+2)(n+1)}{x^2} + 1,$$

$$R_{3n} = \frac{8(n+2)(n+1)n}{x^3} - \frac{4(n+1)}{x}, \quad R_{2n} = \frac{4(n+1)n}{x^2} - 1,$$

$$R_{-3,n} = -\frac{2(n-2)}{x}, \quad R_{-4,n} = -\frac{4(n-3)(n-2)}{x^2} + 1. \quad (3.83)$$

В небесной механике по традиции принято приводить результат к функциям  $J_n, J'_n$ . Это нетрудно сделать, поскольку из (3.69), (3.70) вытекает

$$J_{n-1} = \frac{n}{x} J_n + J'_n. \quad (3.84)$$

Остается подставить (3.84) в (3.78)

$$J_{n+m} = \left( R_{mn} - \frac{n}{x} R_{m-1,n+1} \right) J_n - R_{m-1,n+1} J'_n. \quad (3.85)$$

В частности,

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{n}{x} J_n - J'_n, \quad J_{n+2} = \left[ \frac{2(n+1)n}{x^2} - 1 \right] J_n - \frac{2(n+1)}{x} J'_n, \\ J_{n-1} &= \frac{n}{x} J_n + J'_n, \quad J_{n-2} = \left[ \frac{2n(n-1)}{x^2} - 1 \right] J_n + \frac{2(n-1)}{x} J'_n. \end{aligned} \quad (3.86)$$

### 3.5. Обобщенный ряд Пуассона

Наряду с функциями Бесселя важную роль в Фурье-представлении кеплеровского движения играют функции Пуассона (название не общепринято)  $P_{nm}(z)$ . Обозначим

$$\Phi(z, y) = 1 - 2z \cos y + z^2$$

и определим  $P_{nm}(z)$  с помощью производящей функции  $\Phi^{-n}$ :

$$\Phi^{-n}(z, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{nm}(z) z^{|m|} \text{Ехр } my. \quad (3.87)$$

Вещественное число  $n$  произвольно, но в приложениях в основном встречаются целые и полуцелые положительные  $n$ .

Поскольку (3.87) — ряд по косинусам, то

$$P_{n,-m}(z) = P_{nm}(z) \quad (3.88)$$

и можно считать, если удобно,  $m \geq 0$ .

Разложим квадратный трехчлен  $\Phi$  на линейные множители

$$\Phi = (1 - z \text{Ехр } y)[1 - z \text{Ехр } (-y)], \quad (3.89)$$

возведем в степень  $(-n)$  и для каждого из двух множителей воспользуемся биномиальным рядом

$$\Phi^{-n} = \sum_{k,s=0}^{\infty} \frac{n^{\bar{k}} n^{\bar{s}}}{k!s!} z^{s+k} \text{Exp}(s-k)y. \quad (3.90)$$

Мы используем удобный символ возрастающей степени (*Грэхем, Кнут, Паташник, 1998*): при целом неотрицательном  $k$

$$x^{\bar{k}} = \begin{cases} x(x+1) \cdots (x+k-1), & \text{если } k \geq 1, \\ 1, & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

В частности,  $1^{\bar{k}} = k!$ .

Полагая  $s-k = m$  и перегруппировывая слагаемые, приходим к представлению (3.87), где при  $m \geq 0$

$$P_{nm}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{nm}^k z^{2k}, \quad P_{nm}^k = \frac{n^{\bar{k}} n^{\overline{k+m}}}{k!(k+m)!}. \quad (3.91)$$

При  $n = 1$  коэффициент  $P_{1m}^k$  тождественно равен единице, и для  $P_{1m}$  получаем геометрическую прогрессию

$$P_{1m}(z) = \frac{1}{1-z^2}. \quad (3.92)$$

Нетрудно догадаться, что в общем случае мы встретим гипергеометрический ряд. В самом деле, представим  $P_{nm}^k$  в виде

$$P_{nm}^k = \frac{n^{\bar{m}}}{m!} \tilde{P}_{nm}^k, \quad \text{где} \quad \tilde{P}_{nm}^k = \frac{n^{\bar{k}} (n+m)^{\bar{k}}}{k!(m+1)^{\bar{k}}}$$

есть общий член гипергеометрического ряда. В результате

$$P_{nm}(z) = \frac{n^{\bar{m}}}{m!} F(n, n+m, m+1, z^2). \quad (3.93)$$

Пусть  $n$  — целое отрицательное. По свойству гипергеометрической функции с неположительным вторым аргументом функция Пуассона  $P_{nm}$  при  $m \leq |n|$  является многочленом от  $z^2$  степени  $|n| - m$ . При  $m > |n|$  возрастающая степень  $n^{\bar{m}} = 0$ , а вместе с ней и  $P_{nm}(z) = 0$ . Например,

$$P_{-1,m}(z) = (-1)^m \left( 1 + \frac{1-m}{1+m} z^2 \right), \quad 0 \leq m \leq 1,$$



$$P_{-2,m}(z) = \frac{(-2)^{\bar{m}}}{m!} \left[ 1 + \frac{2(2-m)}{m+1} z^2 + \frac{(2-m)(1-m)}{(2+m)(1+m)} z^4 \right], \quad (3.94)$$

$$0 \leq m \leq 2.$$

Существует множество формул преобразования гипергеометрических функций. Например, тождество Эйлера (*Грэхем, Кнут, Паташник, 1998*)

$$F(a, b, c, x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, x)$$

позволяет представить (3.93) в форме

$$P_{nm}(z) = \frac{n^{\bar{m}}}{m!} (1-z^2)^{1-2n} F(m+1-n, 1-n, m+1, z^2). \quad (3.95)$$

Пусть  $n$  — целое положительное. По свойству гипергеометрической функции с неположительным первым или вторым аргументом функция  $F$  при  $m \leq n-1$  является многочленом от  $z^2$  степени  $n-m-1$ , а при  $m \geq n$  — степени  $n-1$ . При  $n=1$  явное выражение  $P_{1m}$  дается формулой (3.92). Приведем еще два примера:

$$P_{2m}(z) = \frac{m+1}{(1-z^2)^3} \left( 1 + \frac{1-m}{1+m} z^2 \right),$$

$$P_{3m}(z) = \frac{(m+1)(m+2)}{2(1-z^2)^5} \left[ 1 + \frac{2(2-m)}{1+m} z^2 + \frac{(2-m)(1-m)}{(2+m)(1+m)} z^4 \right]. \quad (3.96)$$

Бросается в глаза совпадение многочленов в (3.94) и (3.96). Это не случайно: гипергеометрическая функция (3.93) совпадает с (3.95), если в последней  $n$  заменить на  $1-n$ . Точнее,

$$n^{\bar{m}} P_{1-n,m}(z) = (1-n)^{\bar{m}} (1-z^2)^{2n-1} P_{nm}(z). \quad (3.97)$$

При полуцелом  $n$  функции Пуассона (называемые в этом случае *коэффициентами Лапласа*) уже неэлементарны. Например, при  $n=1/2, m=0$  согласно (3.93) аргументами функции  $F$  служат  $1/2, 1/2, 1, z^2$ , что приводит к полному эллиптическому интегралу первого рода (*Градштейн, Рыжик, 1971*)

$$P_{1/2,0}(z) = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(z). \quad (3.98)$$

## 3.6. Ряды Фурье в эллиптическом движении

### 3.6.1. Решение уравнения Кеплера

Мы выяснили в § 1.4, что решение уравнения Кеплера (3.20) есть сумма средней аномалии и нечетной  $2\pi$ -периодической функции от средней аномалии. Поэтому

$$E - M = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(e) \sin nM \quad (3.99)$$

при

$$c_n(e) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e \sin E \sin nM dM.$$

Под знаком интеграла стоит неэлементарная функция  $\sin E$  от  $M$ . Чтобы избавиться от этого неудобства, перейдем к интегрированию по эксцентрической аномалии:  $M = E - e \sin E$ ,  $dM = (1 - e \cos E) dE$ , так что

$$c_n(e) = \frac{2e}{\pi} \int_0^{\pi} \sin E (1 - e \cos E) \sin(nE - x \sin E) dE. \quad (3.100)$$

Через  $x$  в этом параграфе всегда обозначается произведение  $x = ne$ . Произведение тригонометрических функций представим суммой косинусов линейной комбинации аргументов

$$c_n(e) = \frac{e}{2\pi} \int_0^{\pi} \{2 \cos[(n-1)E - x \sin E] - 2 \cos[(n+1)E - x \sin E] - \\ - e \cos[(n-2)E - x \sin E] + e \cos[(n+2)E - x \sin E]\} dE.$$

Согласно равенству (3.66)

$$2c_n = 2e(J_{n-1} - J_{n+1}) - e^2(J_{n-2} - J_{n+2}).$$

Аргументом функций Бесселя служит  $x = ne$ , если не оговорено противное. Применяя формулы (3.86), находим

$$c_n(e) = \frac{2}{n} J_n(x). \quad (3.101)$$

Возвращаясь к равенству (3.99), получаем

$$E - M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(x) \sin nM. \quad (3.102)$$

*Предостережение.* В формулах типа (3.102) аргумент  $x = pe$  зависит и от  $e$ , и от  $n$ .

### 3.6.2. Простые функции от эксцентрической аномалии

Мы получим ниже разложения основных функций небесной механики. Для краткости коэффициенты Фурье будем обозначать одинаково как  $c_n$ , а чтобы это не приводило к путанице, разобьем этот раздел на пункты.

1. *Тригонометрические функции эксцентрической аномалии.* Пусть

$$\text{Exp } mE = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e) \text{Exp } nM, \quad (3.103)$$

где  $m$  — натуральное число. Как и в (3.100), представим  $c_n$  интегралом по эксцентрической аномалии:

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \text{Exp}[x \sin E - (n-m)E](1-e \cos E) dE. \quad (3.104)$$

При  $n = 0$ ,  $m \geq 2$  интеграл обращается в нуль. При  $n = 0$ ,  $m = 1$  он равен  $(-\pi e)$ . Пусть  $n \neq 0$ . По формуле Эйлера  $2 \cos E = \text{Exp } E + \text{Exp }(-E)$ , так что

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \text{Exp}[x \sin E - (n-m)E] - \frac{x}{2n} \text{Exp}[x \sin E - (n-m-1)E] - \frac{x}{2n} \text{Exp}[x \sin E - (n-m+1)E] \right\} dE,$$

откуда согласно (3.66)

$$c_n = J_{n-m} - \frac{x}{2n} J_{n-m-1} - \frac{x}{2n} J_{n-m+1} = \frac{m}{n} J_{n-m}.$$

Окончательно,

$$\text{Exp } E = -\frac{e}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} \frac{1}{n} J_{n-1}(x) \text{Exp } nM, \quad (3.105)$$

$$\text{Exp } mE = \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} \frac{m}{n} J_{n-m}(x) \text{Exp } nM, \quad m \geq 2, \quad (3.106)$$

где  $\mathbb{Z}_0$  — множество целых чисел без нуля.

Отделяя вещественную и мнимую части и пользуясь формулой (3.60), получаем

$$\begin{aligned}\cos E &= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \cos nM, \\ \sin E &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \sin nM,\end{aligned}\quad (3.107)$$

а при  $m \geq 2$

$$\begin{aligned}\cos mE &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} [J_{n-m}(x) - J_{n+m}(x)] \cos nM, \\ \sin mE &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} [J_{n-m}(x) + J_{n+m}(x)] \sin nM.\end{aligned}\quad (3.108)$$

Применение (3.85) позволяет свести все коэффициенты к комбинации  $J_n(x)$  и  $J'_n(x)$ , поскольку

$$\begin{aligned}J_{n-m} \pm J_{n+m} &= \left[ (R_{-m,n} \pm R_{mn}) - \frac{n}{x} (R_{-m-1,n+1} \pm R_{m-1,n+1}) \right] J_n - \\ &\quad - [R_{-m-1,n+1} \pm R_{m-1,n+1}] J'_n.\end{aligned}\quad (3.109)$$

При  $m = 1$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J'_n(x) \cos nM, \quad \sin E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{x} J_n(x) \sin nM.\quad (3.110)$$

При  $m = 2$

$$\begin{aligned}\cos 2E &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{8}{x} J'_n(x) - \frac{8}{x^2} J_n(x) \right] \cos nM, \\ \sin 2E &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{8}{nx} J'_n(x) + 4 \frac{2n^2 - x^2}{nx^2} J_n(x) \right] \sin nM.\end{aligned}\quad (3.111)$$

При малых  $e$  вычисление коэффициентов в (3.109) может привести к потере точности, а при  $e = 0$  формулы непригодны. Разложение по степеням  $x$  стирает особенность: из представления (3.108) следует  $c_n \sim e^{|n-m|}$ .

2. *Степени  $r$ .* Пусть

$$\left(\frac{r}{a}\right)^s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(e) \cos nM, \quad (3.112)$$

где

$$c_n = \frac{2 - \delta_{0n}}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin E - nE) (1 - e \cos E)^{s+1} dE.$$

Интеграл с очевидностью выражается через функции Бесселя при  $s \geq -1$ . Результат особенно прост при  $s = -1$ . Свободный член, как обычно, не связан с функциями Бесселя:  $c_0 = 1$ . Остальные коэффициенты вычисляются по формуле (3.66), так что

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2J_n(x) \cos nM. \quad (3.113)$$

Для  $s = 1, 2$  имеем  $r/a = 1 - e \cos E$ ,  $2(r/a)^2 = (2 + e^2) - 4e \cos E + e^2 \cos 2E$  и остается воспользоваться формулами (3.110), (3.111):

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e}{n} J'_n(x) \cos nM, \\ \left(\frac{r}{a}\right)^2 &= \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} J_n(x) \cos nM. \end{aligned} \quad (3.114)$$

При  $s \leq -2$  коэффициент  $c_n$  не является линейной комбинацией бесселевых функций.

3. *Тригонометрические функции эксцентрической аномалии, помноженные на степени  $r$ .* Пусть

$$\left(\frac{r}{a}\right)^s \operatorname{Exp} mE = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e) \operatorname{Exp} nM. \quad (3.115)$$

Как и для (3.112), получаем

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Exp}[x \sin E - (n - m)E] (1 - e \cos E)^{s+1} dE.$$

Как и в предыдущем пункте, интеграл легко выражается через бесселевы функции аргумента  $x$  при  $m > 0$ ,  $s \geq -1$ . При  $s = -1$ ,  $m \geq 1$  свободный член равен нулю, а для  $n \neq 0$

$$c_n = J_{n-m}(x).$$

Отделяя вещественную и мнимую части в (3.115), приходим к аналогу (3.108):

$$\begin{aligned}\frac{a}{r} \cos mE &= \sum_{n=1}^{\infty} [J_{n-m}(x) + J_{n+m}(x)] \cos nM, \quad m \geq 1, \\ \frac{a}{r} \sin mE &= \sum_{n=1}^{\infty} [J_{n-m}(x) - J_{n+m}(x)] \sin nM.\end{aligned}\quad (3.116)$$

Как и выше, коэффициенты в (3.116) можно выразить через  $J_n(x)$  и  $J'_n(x)$ . Например,

$$\frac{a}{r} \cos E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{x} J_n(x) \cos nM, \quad \frac{a}{r} \sin E = \sum_{n=1}^{\infty} 2J'_n(x) \sin nM;\quad (3.117)$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{r} \cos 2E &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{4}{x} J'_n(x) + 2 \frac{2n^2 - x^2}{x^2} J_n(x) \right] \cos nM, \\ \frac{a}{r} \sin 2E &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4n}{x} J'_n(x) - \frac{4n}{x^2} J_n(x) \right] \sin nM.\end{aligned}\quad (3.118)$$

При  $s \leq -2$  коэффициент  $c_n$  не является в общем случае линейной комбинацией бесселевых функций. Но бывают исключения. Например, двукратным дифференцированием по средней аномалии получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dM}(\cos E - e) &= -\frac{\sin E}{1 - e \cos E}, \quad \frac{d \sin E}{dM} = \frac{\cos E}{1 - e \cos E}; \\ \frac{d^2}{dM^2}(\cos E - e) &= \frac{e - \cos E}{(1 - e \cos E)^3}, \quad \frac{d^2 \sin E}{dM^2} = -\frac{\sin E}{(1 - e \cos E)^3}.\end{aligned}\quad (3.119)$$

Поэтому разложения (3.117) являются простым следствием (3.110), из которых немедленно получаем также

$$\begin{aligned}\frac{\cos E - e}{(1 - e \cos E)^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2n J'_n(x) \cos nM, \\ \frac{\sin E}{(1 - e \cos E)^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{x} J_n(x) \sin nM.\end{aligned}\quad (3.120)$$

4. *Некоторые функции истинной аномалии.* Согласно (1.42)

$$\cos \theta = \frac{a(\cos E - e)}{r}, \quad \sin \theta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r} \sin E. \quad (3.121)$$

Поэтому из формул (3.107), (3.113), (3.117) следует:

$$\cos \theta = -e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-e^2)}{e} J_n(x) \cos nM, \quad (3.122)$$

$$\sin \theta = \sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2J'_n(x) \sin nM;$$

$$\frac{r}{a} \cos \theta = -\frac{3}{2}e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J'_n(x) \cos nM, \quad (3.123)$$

$$\frac{r}{a} \sin \theta = \sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{x} J_n(x) \sin nM.$$

5. *Декартовы координаты и скорости.* Обозначим  $\xi = r \cos \theta$ ,  $\eta = r \sin \theta$  декартовы координаты в орбитальной системе отсчета  $\mathcal{O}_3$ . Их разложения Фурье уже даны формулами (3.123). Скорости в полярных координатах с точностью до постоянных множителей даются формулами (3.122), (3.113), так что

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}}{v_c} &= e \sum_{n=1}^{\infty} 2J'_n(x) \sin nM, \\ \frac{r\dot{\theta}}{v_c} &= \sqrt{1-e^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2J_n(x) \cos nM \right\}, \end{aligned} \quad (3.124)$$

где  $v_c = \kappa/\sqrt{a}$  — круговая скорость на расстоянии  $a$ . Выражения (1.47) для  $\dot{\xi}, \dot{\eta}$  позволяют записать

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\xi}}{v_c} &= - \sum_{n=1}^{\infty} 2J'_n(x) \sin nM, \\ \frac{\dot{\eta}}{v_c} &= \sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e} J_n(x) \cos nM. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Дадим еще разложение квадрата скорости, получающееся из интеграла энергии и ряда (3.113):

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = v_c^2 \left[ 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \cos nM \right]. \quad (3.126)$$

6. *Декартовы координаты и скорости; свойства коэффициентов.* Ввиду важности представления декартовых координат и скоростей рядами Фурье опишем подробно свойства их коэффициентов. Перепишем формулы (3.123), (3.124) в виде

$$\frac{\xi}{a} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e) \cos nM, \quad \frac{\eta}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(e) \sin nM, \quad (3.127)$$

$$\frac{\dot{\xi}}{v_c} = - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(e) \sin nM, \quad \frac{\dot{\eta}}{v_c} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(e) \cos nM. \quad (3.128)$$

Обозначим временно

$$A_1 = \sqrt{1 - e^2}, \quad A_2 = \sqrt{1 + e^2},$$

$$A_3 = \frac{\exp A_1}{1 + A_1}, \quad \gamma = e A_3, \quad A_4 = \frac{1 + A_1}{(A_1 + A_2) \exp A_1}.$$

### Теорема 8

Коэффициенты  $a_n(e)$ ,  $b_n(e)$  представления (3.127), (3.128) обладают при  $n \geq 1$  следующими свойствами.

1.  $a_n(e) \geq 0$ ,  $b_n(e) \geq 0$ , причем равенство в первом соотношении достигается только при  $e = 0$ ,  $n \geq 2$ ; во втором — только при  $e = 0$ ,  $n \geq 2$  и  $e = 1$ ,  $n \geq 1$ .
2.  $a_1(e)$ ,  $b_1(e)$  — убывающие функции от  $e$ .
3.  $a_n(e)$ ,  $b_n(e)$  при каждом  $n \geq 2$  с увеличением  $e$  от 0 до 1 сначала возрастают, а затем убывают.
4.  $n a_n(e)$ ,  $n b_n(e)$  при каждом  $e$  — убывающие функции от  $n$ .
- 5.

$$a_n(e) \leq \sqrt{\frac{2A_2}{\pi n^3}} A_3 \gamma^{n-1}, \quad b_n(e) \leq \sqrt{\frac{2A_1}{\pi n^3}} A_3 \gamma^{n-1},$$

условия достижения равенств те же, что в свойстве 1.



6.  $c_n(e) \geq 0$ , где  $c_n = b_n - a_n$ , причем равенство достигается только при  $e = 0$ .
7.  $c_n(e)$  при каждом  $n$  возрастает с увеличением  $e$ .
8.  $nc_n(e)$  при каждом  $e$  убывает с увеличением  $n$ .
- 9.

$$c_n(e) \leq \sqrt{\frac{8}{\pi n^3 A_2}} A_4 \gamma^{n+1},$$

причем равенство достигается лишь при  $e = 0$ .

Свойство 1 очевидно. Свойства 2, 3 вытекают из соотношений для наименьших положительных корней функций  $J_n(x)$ ,  $J'_n(x)$ ,  $J''_n(x)$  (Ватсон, 1949). Свойства 4, 5 доказаны Ватсоном, §8.5 его монографии. Свойства 6–9 доказаны в статье (Холшевников, 1988) методом Ватсона. Там же приведены несколько более грубые, но простые оценки

$$a_n(e), b_n(e) \leq \frac{1.084}{n^{3/2}} \gamma^{n-1}, \quad c_n(e) \leq \frac{0.9488}{n^{3/2}} \gamma^{n+1}. \quad (3.129)$$

### 3.6.3. Средние значения

Читатель уже заметил, что для любой из разобранных функций  $f(e, M)$  свободный член ряда Фурье, т.е. среднее значение  $\mathbf{E}f(e)$ , значительно проще остальных коэффициентов. Поскольку в механике возмущенного движения среднее значение играет важную роль, постараемся найти его для возможно более широкого класса функций.

1. Среднее значение любой нечетной по  $M$  функции равно нулю.
2. Степени  $r$ . Поскольку

$$dM = \frac{r}{a} dE = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} d\theta, \quad (3.130)$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \frac{r}{a} \right)^s &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^{s+1} dE = \\ &= \frac{(1-e^2)^{s+3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \theta)^{-s-2} d\theta. \end{aligned} \quad (3.131)$$

При  $s \geq -1$  следует пользоваться первой из формул (3.131). По формуле бинома

$$(1 - e \cos E)^{s+1} = \sum_{k=0}^{s+1} \binom{s+1}{k} (-e)^k \cos^k E. \quad (3.132)$$

Остается применить результаты задачи 3.25 при  $m = 0$ :

$$\mathbf{E} \left( \frac{r}{a} \right)^s = \sum_{k=0}^{\lfloor (s+1)/2 \rfloor} \frac{(s+1)! e^{2k}}{(s+1-2k)! (2^k k!)^2}. \quad (3.133)$$

В частности,

$$\mathbf{E} \frac{a}{r} = \mathbf{E} 1 = 1, \quad \mathbf{E} \frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2}, \quad \mathbf{E} \left( \frac{r}{a} \right)^2 = 1 + \frac{3}{2} e^2, \quad (3.134)$$

что согласуется с (3.113), (3.114).

При  $s \leq -2$  следует пользоваться второй из формул (3.131). Сравнивая ее с первой, получаем интересное соотношение

$$\mathbf{E} \left( \frac{a}{r} \right)^{s+3} = (1 - e^2)^{-s-3/2} \mathbf{E} \left( \frac{r}{a} \right)^s. \quad (3.135)$$

Здесь использовано, что оба интеграла (3.131) инвариантны относительно замены  $e \mapsto -e$ . С учетом (3.133)

$$\mathbf{E} \left( \frac{a}{r} \right)^s = (1 - e^2)^{3/2-s} \sum_{k=0}^{\lfloor (s-2)/2 \rfloor} \frac{(s-2)! e^{2k}}{(s-2-2k)! (2^k k!)^2} \quad (3.136)$$

при  $s \geq 2$ . В частности,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \frac{a}{r} \right)^2 &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}, & \mathbf{E} \left( \frac{a}{r} \right)^3 &= (1 - e^2)^{-3/2}, \\ \mathbf{E} \left( \frac{a}{r} \right)^4 &= (1 - e^2)^{-5/2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.137)$$

3. Функция  $f_{sm}(e, M) = \left( \frac{r}{a} \right)^s \cos mE$ ,  $s$  — целое,  $m$  — натуральное. Для вычисления среднего значения перейдем к интегрированию по эксцентрической аномалии:

$$\mathbf{E} f_{sm}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^{s+1} \cos mE dE. \quad (3.138)$$

При  $s \geq -1$  воспользуемся суммой (3.132) и результатом задачи 3.25. В итоге

$$\mathbf{E}f_{sm} = (-1)^m \sum_{k=0}^{\lfloor (s-m+1)/2 \rfloor} \frac{(s+1)!}{(s+1-m-2k)!(m+k)!k!} \left(\frac{e}{2}\right)^{m+2k}. \quad (3.139)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}f_{-1,m} = 0, \quad \mathbf{E}f_{01} = -\frac{e}{2}, \quad \mathbf{E}f_{0m} = 0 \quad \text{при } m \geq 2, \\ \mathbf{E}f_{11} = -e, \quad \mathbf{E}f_{12} = \frac{e^2}{4}, \quad \mathbf{E}f_{1m} = 0 \quad \text{при } m \geq 3. \end{aligned}$$

Вообще,  $\mathbf{E}f_{sm} = 0$  при  $m \geq s+2$ .

При  $s \leq -2$  следует воспользоваться обобщенным рядом Пуассона. Впрочем, этот прием работает и при  $s \geq -2$ , давая результат тоже в конечном виде в функции от  $\beta$ .

Прямая замена  $e$  на  $\beta$  согласно (1.30) приводит к тождеству

$$\frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{1 + \beta^2}{1 - 2\beta \cos E + \beta^2}. \quad (3.140)$$

Сопоставление (3.87), (3.138) и (3.140) дает

$$\begin{aligned} \mathbf{E}f_{sm} = \frac{\beta^m}{2\pi(1+\beta^2)^{s+1}} \left\{ P_{-s-1,-m} \int_0^{2\pi} \text{Exp}(-mE) \cos mE dE + \right. \\ \left. + P_{-s-1,m} \int_0^{2\pi} \text{Exp} mE \cos mE dE \right\}. \end{aligned}$$

Интегралы элементарны, а функции Пуассона симметричны по второму индексу согласно (3.88):

$$\mathbf{E}f_{sm} = \frac{\beta^m}{(1+\beta^2)^{s+1}} P_{-s-1,m}(\beta). \quad (3.141)$$

Свойства  $P_{nm}$  описаны в §3.5. В частности,

$$\mathbf{E}f_{-2,m} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \beta^m, \quad \mathbf{E}f_{-3,m} = \frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)^3} [(m+1) - (m-1)\beta^2] \beta^m.$$

4. Функция  $g_{sm}(e, M) = \left(\frac{r}{a}\right)^s \cos m\theta$ ,  $s$  — целое,  $m$  — натуральное. Для вычисления среднего значения перейдем к интегрированию по истинной аномалии

$$\mathbf{E}g_{sm}(e) = \frac{(1-e^2)^{s+3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta d\theta}{(1+e \cos \theta)^{s+2}}.$$

Сделаем подстановку  $\theta \mapsto \pi + \theta$ :

$$\mathbf{E}g_{sm}(e) = (-1)^m \frac{(1-e^2)^{s+3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\theta d\theta}{(1-e \cos \theta)^{s+2}},$$

откуда в согласии с (3.138) дает

$$\mathbf{E}g_{sm}(e) = (-1)^m (1-e^2)^{s+3/2} \mathbf{E}f_{-s-3,m}(e), \quad (3.142)$$

что сводит вычисление  $\mathbf{E}g_{sm}$  к уже решенной задаче вычисления  $\mathbf{E}f_{sm}$ .

5. *Степени скорости.* Запишем интеграл энергии в виде

$$v^2 = \frac{\varkappa^2}{a} \frac{1+e \cos E}{1-e \cos E},$$

или

$$v = v_c \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}}, \quad (3.143)$$

где  $v_c = \varkappa/\sqrt{a}$  — круговая скорость на расстоянии  $a$ . Отсюда

$$\mathbf{E} \left( \frac{v}{v_c} \right)^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e \cos E)^{s/2}}{(1-e \cos E)^{(s-2)/2}} dE. \quad (3.144)$$

Интеграл не меняется при замене  $e$  на  $-e$ , как показывает подстановка  $\theta \mapsto (\theta + \pi)$ . Поэтому

$$\mathbf{E} \left( \frac{v_c}{v} \right)^s = \mathbf{E} \left( \frac{v}{v_c} \right)^{s+2}. \quad (3.145)$$

При четном  $s$  интеграл (3.144) элементарен. При  $s = 2$  он равен единице — ср. с формулой (3.126). Таким образом, круговая скорость на расстоянии  $a$  совпадает со среднеквадратичной скоростью.

Несложно вычислить интеграл (3.144) и при  $s = 4$ :

$$\mathbf{E} \left( \frac{v}{v_c} \right)^4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+e \cos E)^2}{1-e \cos E} dE.$$

Представляя числитель в форме  $[2 - (1 - e \cos E)]^2 = 4 - 4(1 - e \cos E) + (1 - e \cos E)^2$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \frac{v}{v_c} \right)^4 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{4}{1 - e \cos E} - 4 + (1 - e \cos E) \right] dE = \\ &= -3 + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dE}{1 - e \cos E}. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dE}{1 - e \cos E} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dM}{(1 - e \cos E)^2} = 2\pi \mathbf{E} \left( \frac{a}{r} \right)^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}}$$

согласно (3.137). Окончательно,

$$\mathbf{E} \left( \frac{v_c}{v} \right)^2 = \mathbf{E} \left( \frac{v}{v_c} \right)^4 = \frac{4 - 3\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (3.146)$$

При нечетном  $s$  интеграл (3.144) сводится к эллиптическим. Подстановка  $E = \pi/2 - t$  приводит его к виду

$$\mathbf{E} \left( \frac{v}{v_c} \right)^s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + e \sin t)^{s/2}}{(1 - e \sin t)^{(s-2)/2}} dt. \quad (3.147)$$

При  $s = 1$

$$\mathbf{E} \frac{v}{v_c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}_2(e), \quad (3.148)$$

где  $\mathbf{K}_2$  — полный эллиптический интеграл второго рода (мы ввели это нестандартное обозначение, так как символ  $\mathbf{E}$  здесь означает среднее значение функции).

При  $s = 3$

$$\mathbf{E} \left( \frac{v}{v_c} \right)^3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + e \sin t)^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}} dt.$$

Числитель запишем в виде  $2 + 2e \sin t - (1 - e^2 \sin^2 t)$ . Слагаемое  $2e \sin t$  нечетно и не влияет на результат. Окончательно,

$$\mathbf{E} \frac{v_c}{v} = \mathbf{E} \left( \frac{v}{v_c} \right)^3 = \frac{2}{\pi} [2\mathbf{K}_1(e) - \mathbf{K}_2(e)], \quad (3.149)$$

где  $\mathbf{K}_1$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

### 3.7. Некоторые другие разложения

В небесной механике известно много других разложений, — например, в ряды Фурье по кратным эксцентрической и истинной аномалии. Их можно найти в объемистых учебниках (*Дубошин, 1975*), (*Субботин, 1968*), (*Уинтнер, 1967*). Мы ограничимся несколькими примерами, отражающими основные приемы, ведущие к цели.

#### 1. Уравнение

$$\operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} x, \quad (3.150)$$

где  $x, y$  — углы,  $b$  — положительный параметр. Требуется найти  $y$  как непрерывную функцию от  $x$ , обращающуюся в нуль при  $x = 0$ .

Уравнение вида (3.150) нам уже известно. Это соотношение (1.28), связывающее эксцентрическую и истинную аномалии. Оно встречается и в других задачах астрономии. Например, в сферической тригонометрии (рис. 3.2) оно связывает гипотенузу  $y$ , катет  $x$  и угол между ними  $\varphi$ ,  $b = 1/\cos \varphi$ .

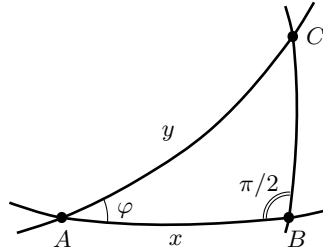


Рис. 3.2. Прямоугольный сферический треугольник.

Предложенный еще Л. Эйлером (до Ж. Фурье!) прием решения подобных уравнений заключается в замене тригонометрических функций экспонентами, разложением в ряд Лорана и возвращением к тригонометрическим функциям. В конкретном случае уравнения (3.150) положим

$$\xi = \operatorname{Exp} x, \quad \eta = \operatorname{Exp} y, \quad \beta = \frac{b-1}{b+1},$$

откуда

$$b = \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad i \operatorname{tg} x = \frac{\xi - \xi^{-1}}{\xi + \xi^{-1}}, \quad i \operatorname{tg} y = \frac{\eta - \eta^{-1}}{\eta + \eta^{-1}}.$$

Уравнение (3.150) принимает форму

$$\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} = b \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad \eta^2 = \xi^2 \frac{1 - \beta \xi^{-2}}{1 - \beta \xi^2}.$$

Логарифмируем последнее равенство. Поскольку  $y = 0$  при  $x = 0$ , то в окрестности этих значений нужные нам ветви логарифма суть  $\ln \xi = ix$ ,  $\ln \eta = iy$ , так что

$$2iy = 2ix + \ln(1 - \beta \xi^{-2}) - \ln(1 - \beta \xi^2),$$

или

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \frac{\xi^{2n} - \xi^{-2n}}{2i}.$$

Возвращаясь к тригонометрическим функциям, получаем окончательно

$$y = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin 2nx. \quad (3.151)$$

Ряд этот абсолютно сходится при  $|\beta| < 1$  и всех вещественных  $x$ . При  $x = k\pi/2$  — это ряд из нулей. Для других значений  $x$  при  $\beta = \pm 1$  ряд сходится условно, а при  $|\beta| > 1$  расходится. Величина  $\beta$  с ростом  $b$  от 0 до  $\infty$  возрастает от  $-1$  до 1, принимая значение 0 при  $b = 1$ . Таким образом, ряд (3.151) сходится для всех значений  $b$ . Скорость сходимости тем выше, чем ближе  $\beta$  к нулю, или, что то же, чем ближе  $b$  к единице.

Уравнение (3.150) инвариантно относительно подстановки  $x \longleftrightarrow y$ ,  $b \mapsto b^{-1}$ ,  $\beta \mapsto -\beta$ . Поэтому из (3.151) автоматически следует

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \beta^n \sin 2ny. \quad (3.152)$$

Для задачи из сферической тригонометрии  $b = 1/\cos \varphi \implies \beta = \operatorname{tg}^2 \varphi/2$ . Условие  $b > 0$  равносильно остроте угла  $\varphi$ , и тогда  $0 \leq \beta < 1$ . Ряд сходится тем быстрее, чем меньше  $\varphi$ .

Для задачи о связи эксцентрисической и истинной аномалии  $x = E/2$ ,  $y = \theta/2$ ,

$$b = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad \beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}, \quad (3.153)$$

так что  $\beta$  здесь и в главе 1 обозначает одно и то же.

Разложения

$$\theta - E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \beta^n \sin nE = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \beta^n \sin n\theta \quad (3.154)$$

сходятся абсолютно при  $0 \leq e < 1 \iff 0 \leq \beta < 1$  и условно при  $e = \beta = 1$  для всех вещественных  $E, \theta$ . Однако их справедливость установлена для  $0 \leq e < 1$ . Что будет при  $e = 1$  (см. задачи 3.34, 3.35)?

2. *Уравнение центра.* Функцию  $(\theta - M)$  легко представить рядом Фурье по кратным эксцентрической или истинной аномалии. Комбинируя первое из уравнений (3.154) с уравнением Кеплера, получаем сразу

$$\theta - M = c_1 \sin E + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n} \beta^n \sin nE, \quad (3.155)$$

где

$$c_1 = \frac{3 + \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} e = 2\beta \frac{2 + \beta^2}{1 + \beta^2}.$$

Когда аргументом служит истинная аномалия, следует воспользоваться одной из формул (1.42)

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

и аналогом (3.140)

$$\frac{1}{1 + e \cos \theta} = \frac{1 + \beta^2}{1 + 2\beta \cos \theta + \beta^2} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n \cos n\theta \right),$$

где в конце использовано представление (3.87) при  $n = 1$  с учетом (3.92). Отсюда

$$\sin E = \sin \theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n \sin \theta \cos n\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\beta^{n-1} - \beta^{n+1}) \sin n\theta.$$

Осталось воспользоваться вторым из соотношений (3.154)

$$\theta - M = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \beta^n \left( \frac{1}{n} + \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \right) \sin n\theta. \quad (3.156)$$

Области сходимости рядов (3.156) и (3.154) совпадают.



3. *Сопряженная аномалия.* Разложение сопряженной аномалии по кратным синусов эксцентрической аномалии дается непосредственно формулой (3.154) с учетом (1.52):

$$\tilde{\theta} - E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-\beta)^n \sin nE, \quad (3.157)$$

откуда аналогично (3.155) получаем

$$\tilde{\theta} - M = b_1 \sin E + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n} (-\beta)^n \sin nE \quad (3.158)$$

при

$$b_1 = -\frac{2\beta^3}{1 + \beta^2}.$$

Выведенных в этой главе формул достаточно, чтобы получить разложение *любой* из встречающихся в небесной механике функций эллиптического движения в ряд Фурье по средней аномалии *с одной оговоркой*. Коэффициенты получаются в виде отрезков ряда по степеням  $e$  или  $\beta$ , или даже в более общем виде. Важно, что можно получить конечное выражение, погрешность которого будет порядка  $e^{\sigma+1}$  при произвольном заранее заданном  $\sigma$ . Для простых функций при малых  $\sigma$  это можно сделать быстро вручную. Для сложных функций при больших  $\sigma$  требуются средства компьютерной алгебры.

Высказанное утверждение будет установлено, если показать, что лишь конечное число коэффициентов Фурье данной функции имеют порядок  $e^{\sigma}$  или ниже, что выходит за рамки этой книги. Но для всех рассмотренных выше примеров это так. Для иллюстрации рассмотрим еще два примера.

4. *Уравнение центра как функция средней аномалии.* Согласно (3.102), (3.154)

$$\theta - M = \sum_{n=1}^{\sigma} \frac{2}{n} [J_n(ne) \sin nM + \beta^n \sin nE] + \varepsilon,$$

где символом  $\varepsilon$  будем обозначать различные величины порядка

$\sigma + 1$  или выше относительно эксцентриситета. Воспользуемся рядами (3.108):

$$\begin{aligned} \theta - M &= \sum_{n=1}^{\sigma} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin nM + \\ &+ \sum_{m=1}^{\sigma} 2\beta^m \left[ \sum_{n=1}^{\sigma} \frac{1}{n} J_{n-m}(ne) \sin nM + \sum_{n=1}^{\sigma-2m} \frac{1}{n} J_{n+m}(ne) \sin nM \right] + \varepsilon, \end{aligned}$$

что можно переписать в виде

$$\theta - M = \sum_{n=1}^{\sigma} c_n \sin nM + \varepsilon, \quad (3.159)$$

где

$$c_n = \frac{2}{n} J_n(ne) + \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{\sigma} \beta^m J_{n-m}(ne) + \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{[(\sigma-n)/2]} \beta^m J_{n+m}(ne) + \varepsilon. \quad (3.160)$$

Осталось  $J_{n-m}(ne)$ ,  $J_{n+m}(ne)$  заменить отрезками ряда Маклорена (3.61) (с учетом возможной отрицательности  $n-m$ ) вплоть до  $e^{\sigma-m}$ , а также выразить  $\beta^k$  через  $e$  или  $e^k$  через  $\beta$  по формулам (3.38), (3.42) или (3.44), (3.45). При  $\sigma = 6$  получим, отбрасывая  $\varepsilon \sim e^7$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= 2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5, & c_2 &= \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6, \\ c_3 &= \frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5, & c_4 &= \frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6, \\ c_5 &= \frac{1097}{960}e^5, & c_6 &= \frac{1223}{960}e^6. \end{aligned}$$

5. *Сопряженная аномалия в функции средней аномалии.* Преобразуем (3.158) к средней аномалии в качестве независимой переменной:

$$\tilde{\theta} - M = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nM. \quad (3.161)$$

Для  $c_n$  из (3.107), (3.108) получаем с точностью до третьей степени эксцентриситета

$$c_1 = -\frac{e^3}{2}, \quad c_2 = \frac{e^2}{4}, \quad c_3 = \frac{e^3}{6}, \quad c_n = \mathcal{O}(e^4) \quad (n \geq 4).$$

Как видим, амплитуда старшего члена здесь на множитель  $e/8$  меньше, чем в (3.159): угол  $\tilde{\theta}$  растет почти равномерно со временем при умеренных эксцентриситетах.

Найдем чебышевскую норму (максимум модуля) разности  $\tilde{\theta} - M$ . По нечетности достаточно найти максимум  $\tilde{\theta} - M$ . С погрешностью  $\sim e$  наибольшее значение достигается при  $\sin 2M = 1$ ,  $M = -3\pi/4$ . Положим  $M = -3\pi/4 + x$ ,  $x \sim e$  и представим (3.161) рядом

$$\tilde{\theta} - M = \frac{e^2}{4} \left[ 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}e + 2\sqrt{2}ex - 2x^2 + \dots \right]. \quad (3.162)$$

Отброшенные члены или имеют вид  $Ae^2$  и не влияют на положение максимума, или имеют более высокий порядок малости. Наибольшее значение  $1 + 2\sqrt{2}e/3 + e^2$  трехчлен в квадратных скобках принимает при  $x = e/\sqrt{2}$ . Поскольку отброшенные слагаемые вида  $Ae^2$  влияют на значение максимума, окончательный результат таков:

$$\|\tilde{\theta} - M\| = \frac{e^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{6}e^3 + \dots \quad (3.163)$$

в согласии с задачей 1.51.

## 3.8. Сходимость рядов

За редкими исключениями сходимость введенных в этой главе рядов не исследовалась. Заполним этот пробел. Ввиду трудности материала доказательства приводим не полностью.

### 3.8.1. Сходимость рядов по степеням времени

Рассмотрим сначала эллиптический случай  $a > 0$ ,  $0 \leq e < 1$ . Поскольку  $M$  — линейная функция времени, достаточно рассмотреть разложения по степеням  $(M - M_0)$ . Все величины  $M_0$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\dots$  считаются фиксированными вещественными параметрами, а  $M$  — комплексной переменной. Прежде всего взглянем на уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (3.164)$$

как на соотношение вида  $M = F(E)$  с параметром  $e$ , которое надо разрешить относительно  $E$ :  $E = \Phi(M)$ . Наша задача — найти

особенности аналитической функции  $\Phi$  и указать на ближайшую к точке  $M_0$ . Не умаляя общности, считаем  $-\pi \leq M_0 \leq \pi$ .

Поскольку  $F$  — целая функция, все особенности  $\Phi$  делятся на два класса.

Первый класс: *асимптотические значения*. Так называются точки комплексной плоскости со следующим свойством:  $\lim F(E) = M$ , если  $E$  стремится к бесконечности вдоль некоторого пути  $L$  комплексной плоскости.

Второй класс: *алгебраические особенности*. Это корни производной  $F'(E)$ , определяются решением системы

$$M = F(E), \quad F'(E) = 0. \quad (3.165)$$

Фактически решить нужно лишь одно (второе) уравнение, а первое даст алгебраическую особую точку.

Можно показать, что асимптотические значения для (3.164) отсутствуют (Холшевников, 1985). Алгебраические даются уравнением

$$1 - e \cos E = 0. \quad (3.166)$$

При  $e = 0$  решений нет. При  $0 < e < 1$  вещественных решений нет, но есть счетное множество комплексных:

$$E = 2k\pi \pm i \ln \frac{1}{\beta}. \quad (3.167)$$

Подставляя в (3.164), найдем все особенности  $E$  как функции от  $M$ :

$$M = 2k\pi \pm i\mu_0(e), \quad (3.168)$$

где

$$\mu_0 = \ln \frac{1}{\beta} - \sqrt{1 - e^2}.$$

Расстояние от точки (3.168) при  $k = 0$  до  $M_0$  дает радиус сходимости  $\mu$ :

$$\mu = \sqrt{M_0^2 + \mu_0^2}. \quad (3.169)$$

С помощью (3.36) находим производную от правой части

$$\frac{d\mu_0}{de} = -\frac{\eta}{e} < 0.$$

Таблица 3.2. Значения  $\mu_0$  в зависимости от  $e$

$e$	$\mu_0$ (радианы)	$\mu_0$ (градусы)
0	$\infty$	$\infty$
0.001	6.60	378
0.01	4.30	246
0.031803	$\pi$	180
0.1	2.00	115
0.2	1.31	75.1
0.3	0.920	52.7
0.4	0.650	37.2
0.5	0.451	25.8
0.6	0.299	17.1
0.7	0.181	10.4
0.8	0.0931	5.33
0.9	0.0313	1.79
0.99	0.000947	0.0543
0.999	0.000030	0.0017
1	0	0

Таким образом, с ростом  $e$  от нуля до единицы  $\mu_0$  уменьшается от бесконечности до нуля. Радиус сходимости  $\mu$  минимален при разложении по степеням  $M$  в окрестности перицентра и максимален при разложении по степеням  $M - \pi$  в окрестности апоцентра. Приведем таблицу (табл. 3.2) значений  $\mu_0$  в функции от  $e$ .

В таблице выделено значение  $e_0 = 0.031803$ . При  $e \leq e_0$  движение можно представить степенным рядом на всем эллипсе даже при  $M_0 = 0$ . При больших  $e$  ряд в этом случае сходится лишь на части эллипса. Орбиты Луны, Юпитера, Марса, не говоря уже о подавляющем большинстве малых планет, не могут быть целиком представлены исследуемым рядом при  $M_0 = 0$ .

С другой стороны, любая орбита даже при  $e = 0.999$  представляется таким рядом при  $M_0 = \pi$ . Переходя к пределу  $e \rightarrow 1$  при  $a = \text{const}$ , получаем  $\mu_0 = 0, \mu = M_0$ , так что и прямолинейно-эллиптическая орбита (вся!) может быть описана рядом по степеням  $M - \pi$ .

*Замечание.* Как замечает А. Уинтнер (*Уинтнер, 1967*), доказательства голоморфности эксцентрической аномалии в функции от  $M$  или в функции от  $e$  в подавляющем большинстве учебников по небесной механике дефектны, поскольку проводятся лишь с учетом алгебраических особенностей. К счастью, для функции (3.164) асимптотические значения отсутствуют. Приведем пример, где они играют главную роль.

*Пример.* Пусть  $M = F(E) = 1 - \exp E$ ,  $E = \Phi(M) = \ln(1 - M)$ . Здесь отсутствуют алгебраические особенности  $F$ : производная  $F'(E) = -\exp E$  не имеет корней в комплексной плоскости. Если забыть про асимптотическое значение ( $M \rightarrow 1$  при  $E \rightarrow \infty$  вдоль отрицательной части вещественной оси), можно прийти к неверному выводу, что логарифм — целая функция.

Перейдем к гиперболе  $a < 0, e > 1$ . Как и выше, допускаются и прямолинейно-гиперболические орбиты  $e = 1$ . Вместо (3.164), (3.166) имеем теперь

$$e \operatorname{sh} H - H = M, \quad e \operatorname{ch} H - 1 = 0, \quad (3.170)$$

откуда находим образы особых точек на плоскости  $H$ :

$$H = i[2k\pi \pm \mu_1(e)], \quad (3.171)$$

а затем сами особые точки на плоскости  $M$ :

$$M = i[-2k\pi \pm \mu_0(e)]. \quad (3.172)$$

Здесь

$$\mu_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}, \quad \mu_0 = \sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}. \quad (3.173)$$

С ростом  $e$  от 1 до  $\infty$  функции  $\mu_1, \mu_0$  возрастают от 0 до  $\pi/2$  и  $\infty$  соответственно, так как

$$\frac{d\mu_1}{de} = \frac{1}{e\sqrt{e^2 - 1}} > 0, \quad \frac{d\mu_0}{de} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} > 0.$$

Ближайшая к вещественной оси среди точек (3.172) в зависимости от  $e$  может отвечать разным  $k$ . Покажем, что тем не менее нужно принимать во внимание только случай  $k = 0$ .

Пусть переменная  $H$  изменяется в полосе

$$|\Im H| < \mu_1(e). \quad (3.174)$$

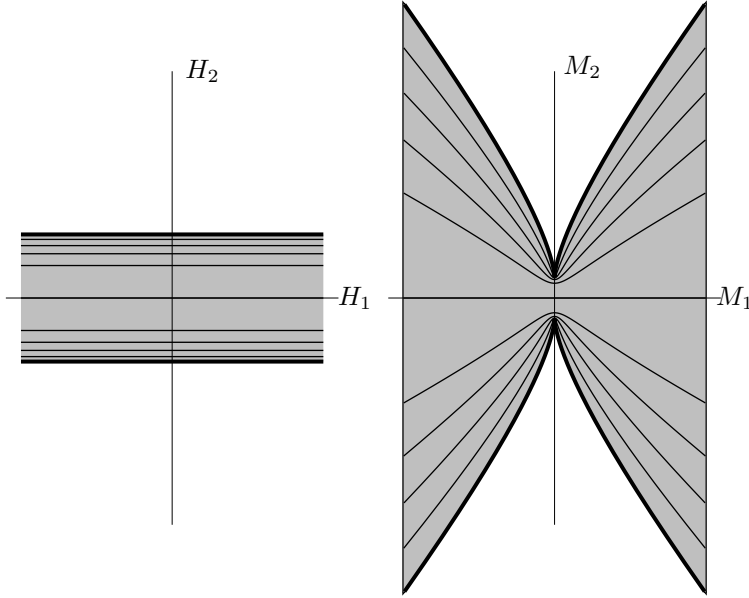


Рис. 3.3. Отображение полосы (3.174) на  $\Pi$  при  $e = 1.5$ ; индексы 1 и 2 отмечают вещественную и мнимую части.

Граничная прямая  $H = \xi + i\mu_1(e)$ ,  $-\infty < \xi < \infty$  при отображении  $M = e \operatorname{sh} H - H$  переходит в кривую

$$M = (\operatorname{sh} \xi - \xi) + i \left[ \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} \xi - \mu_1(e) \right] \quad (3.175)$$

плоскости  $M$  (рис. 3.3). С ростом  $\xi$  от 0 до  $\infty$  абсцисса кривой (3.175) растет от 0 до  $\infty$ , а ордината — от  $\mu_0$  до  $\infty$ ; кривая (3.175) симметрична относительно мнимой оси. Аналогично поведение образа прямой  $H = \xi + ib$ ,  $0 < b < \mu_1(e)$ . Действительно, можно считать  $b = \mu_1(e_1)$ ,  $1 < e_1 < e$ , и вместо (3.175) получить

$$M = \left( \frac{e}{e_1} \operatorname{sh} \xi - \xi \right) + i \left[ \frac{e}{e_1} \sqrt{e_1^2 - 1} \operatorname{ch} \xi - \mu_1(e_1) \right]. \quad (3.176)$$

При фиксированном  $\xi \geq 0$  точка (3.176) лежит правее и ниже точки (3.175). Первое очевидно, а второе вытекает из того, что

$$\frac{\partial}{\partial e_1} \left[ \frac{e}{e_1} \sqrt{e_1^2 - 1} \operatorname{ch} \xi - \mu_1(e_1) \right] = \frac{e \operatorname{ch} \xi}{e_1^2 \sqrt{e_1^2 - 1}} - \frac{e_1}{e_1^2 \sqrt{e_1^2 - 1}} > 0.$$

Таким образом, кривая (3.176) лежит ниже (3.175). Следовательно, полоса (3.174) однолистно отображается на криволинейную полосу  $\Pi$ , ограниченную сверху кривой (3.175) и снизу — кривой (3.176) с изменением знака перед  $i$ . Полоса (3.174) не содержит точек (3.171), имея на границе две из них, отвечающие  $k = 0$ . Поэтому полоса  $\Pi$  свободна от особенностей, имея их на границе: это две точки (3.172) при  $k = 0$ .

Итак, в гиперболическом случае радиус сходимости по-прежнему определяется соотношением (3.169), где  $\mu_0$  дается формулой (3.173).

Для параболы исследование упрощается, поскольку имеется явная формула (1.65). Особые точки радикалов даются соотношениями

$$1 + M^{*2} = 0, \quad \sqrt{1 + M^{*2}} \pm M^* = 0. \quad (3.177)$$

Последнее из уравнений (3.177) решений не имеет, а для первого  $M^* = \pm i$ . Поэтому для параболы

$$\mu = \sqrt{1 + M_0^{*2}}. \quad (3.178)$$

Разложение в окрестности перицентра сходится при  $|M^*| < 1$ , чему отвечает  $|\sigma| < \sigma^*$ , где

$$\sigma^* = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} = 0.5960716,$$

что соответствует истинной аномалии

$$\theta^* = 2 \operatorname{arctg} \sigma^* = 61.59594^\circ.$$

Вернемся к эллипсу. Мы нашли радиус сходимости ряда, представляющего эксцентрическую аномалию. Тем самым задача решена практически для произвольной используемой в небесной механике функции. Как правило, это целые функции от  $\cos E, \sin E, (1 \pm e \cos E)^s$  при целом  $2s$ . Найденные нами особые точки (3.167) обращают в нуль  $1 - e \cos E$ . Сдвиг на  $\pi$  приводит к обращению в нуль



$1 + e \cos E$ . Так что никаких других особых точек не появляется. Вышеописанная область сходимости является таковой для произвольной функции из указанного класса. То же справедливо и для случаев движения по гиперболе и параболе.

*Замечание.* Отнюдь не малое значение  $\theta^*$  находится в кажущемся противоречии с последней строкой табл. 3.2. Парадокс объясняется тем, что средняя аномалия стремится к нулю при  $e \rightarrow 1$  и фиксированном  $\theta$ . Чтобы дать представление о дуге орбиты, на которой сходятся ряды по степеням времени, приведем таблицу значений  $\theta^*(e)$  для всех типов конических сечений (табл. 3.3).

Таблица 3.3. Значения  $\theta^*$  в зависимости от  $e$

$e$	$\theta^*$ (радианы)	$\theta^*$ (градусы)
0.001	6.601528250298313	378.2397070784763
0.01	4.280125005760749	245.2330986184981
0.03180306588706623	$\pi$	180.0
0.1	2.170410245270669	124.3553468659631
0.2	1.714495645670539	98.2333644904789
0.3	1.500166641544981	85.95321712684244
0.4	1.371119862367967	78.55938132024281
0.5	1.283593980206589	73.54451767423645
0.6	1.219825984600545	69.89088065800139
0.7	1.171072579292546	67.09751629696232
0.8	1.132475478808628	64.88606533779147
0.9	1.101098180947576	63.08827859782834
0.99	1.077456575722109	61.73371439749463
0.999	1.075290614341494	61.60961395179706
1	1.075051984214769	61.59594142526711
1.001	1.074813756683877	61.5822920205871
1.01	1.072687655358461	61.4604753878236
1.05	1.063613006477568	60.9405363063853
1.1	1.053062479014848	60.3360356111346
1.2	1.034236295610196	59.2573747577088
1.3	1.017927350050183	58.3229410088115
1.4	1.003656106305464	57.5052589738366
1.5	0.991058733927011	56.7834827035965
1.8	0.960782539435553	55.0487845395187
2.0	0.945148813949547	54.1530380511045
3.0	0.896029471805100	51.3387070537686
5.0	0.854005484160059	48.9309099233979
10.0	0.820624871022533	47.0183416730587
$\infty$	0.785398163397448	45.0

### 3.8.2. Сходимость рядов по степеням эксцентриситета

Здесь нужен только эллиптический случай. Основные функции небесной механики — целые относительно  $e$ ,  $\sqrt{1-e^2}$ ,  $(1 \pm e \cos E)^s$ . Последнюю величину можно заменить на  $(1 \pm e \cos \theta)^s$ .

Примем за независимые переменные пару  $(e, E)$ . Выбор третьей переменной, например  $a$ ,  $p$ ,  $q_\pi = a(1-e)$  или  $q_\alpha = a(1+e)$ , не играет роли. Обозначим  $R_E$  наименьший по всем вещественным  $E$  радиус сходимости разложений по степеням эксцентриситета. Очевидно, что  $R_E$  равен единице или бесконечности. То же верно и для пары  $(e, \theta)$ . Нетривиальна только пара  $(e, M)$ , и опять все определяют свойства решений уравнения Кеплера. Теперь его надо переписать в виде

$$e = F(E) = \frac{E - M}{\sin E}, \quad (3.179)$$

где  $M$  считается вещественным параметром. Нужно найти особые точки обратной функции  $E = \Phi(e)$ .

Функция  $F$  уже не целая, и к вышеперечисленным двум классам особенностей  $\Phi$  нужно добавить третий: особенности  $F$ , т.е. точки  $E = k\pi$ . Если  $M \neq k\pi$ , то (3.179) дает неинтересную сингулярность  $e = \infty$ . Пусть  $M = k\pi$ . Положим  $E = k\pi + x$  и получим из (3.179)

$$e = (-1)^k \frac{x}{\sin x} \longrightarrow (-1)^k \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Сингулярности  $e = \pm 1$  тоже неинтересны. Можно показать, что асимптотические особенности отсутствуют (Холшевников, 1985). Для нахождения алгебраических составим производную

$$\frac{dF(E)}{dE} = \frac{1 - e \cos E}{\sin E}.$$

Корни знаменателя только что исследованы. Остаются корни числителя, и мы опять приходим к уравнению (3.166), точнее, к системе (3.164), (3.166). Существенная разница с ситуацией предыдущего раздела: теперь  $e$  комплексно, а  $M$  вещественно. Из (3.164), (3.166) следует

$$e = \frac{E - M}{\sin E} = \frac{1}{\cos E}.$$

Полагая  $E = u + iv$ , отсюда получаем

$$\begin{aligned}(u - M) \cos u \operatorname{ch} v + v \sin u \operatorname{sh} v &= \sin u \operatorname{ch} v, \\ -(u - M) \sin u \operatorname{sh} v + v \cos u \operatorname{ch} v &= \cos u \operatorname{sh} v, \\ |e| &= (\operatorname{ch}^2 v - \sin^2 u)^{-1/2}.\end{aligned}\quad (3.180)$$

При  $\sin u = 0 \iff u = k\pi$  первые два уравнения (3.180) переходят в

$$(u - M) \operatorname{ch} v = 0, \quad v \operatorname{ch} v = \operatorname{sh} v \implies v = 0, \quad M = u = k\pi, \quad |e| = 1.$$

При  $\cos u = 0 \iff u = 2k\pi \pm \pi/2$  первые два уравнения переходят в

$$v \operatorname{sh} v = \operatorname{ch} v, \quad (u - M) \operatorname{sh} v = 0 \implies u = M = 2k\pi \pm \pi/2.$$

В этом случае  $v = 1.199678640$  есть корень уравнения  $v = \operatorname{cth} v$ ;  $|e| = 1/\operatorname{sh} v = 0.662743419$ .

Итак, радиус сходимости  $R(M)$  разложений по степеням эксцентриситета при  $M = k\pi$  равен единице, при  $M = 2k\pi \pm \pi/2$  равен

$$R_0 = R(\pi/2) = 0.662743419.$$

Можно показать, что

$$R_0 \leq R(M) \leq 1. \quad (3.181)$$

Число  $R_0$  называют *пределом Лапласа*. При  $|e| < R_0$  ряды по степеням эксцентриситета сходятся при всех  $M$ . При  $|e| > R_0$  найдутся такие значения  $M$ , для которых ряды расходятся.

*Замечание 1.* Общий член ряда по степеням эксцентриситета имеет порядок

$$n^\sigma \left[ \frac{e}{R(M)} \right]^n,$$

где  $R(M)$  — единый для всех рассмотренных функций радиус сходимости,  $\sigma$  зависит от вида функции. Грубо говоря, ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем  $e/R(M)$ , в худшем случае он равен  $e/R_0 \approx (3/2)e$ .

*Замечание 2.* Если вместо эксцентриситета использовать переменную Леви-Чивита  $\gamma$ , то радиус сходимости возрастет до единицы (Уинтнер, 1967). Однако практики предпочитают  $e$  или  $\beta$  по

двум причинам. Во-первых, коэффициенты рядов по  $\gamma$  вычисляются сложнее и, как правило, иррациональны. Во-вторых, решение задачи двух тел описывается хорошо и без рядов. Разложения нужны для представления возмущающих сил в более сложных задачах небесной механики, например, в задаче нескольких тел. А там радиус сходимости рядов по степеням эксцентриситета редко превышает  $0.2 \div 0.3$ , и переход к  $\gamma$  не дает существенного выигрыша.

### 3.8.3. Сходимость рядов Фурье

Тригонометрические ряды Фурье  $2\pi$ -периодической функции  $f(y)$  сходятся в полосе

$$\rho_1 < \Im y < \rho_2$$

(и расходятся вне ее), если  $f$  голоморфна внутри и имеет особенности на верхней и нижней границах полосы. Для функций, вещественных при вещественных  $y$ , полоса сходимости симметрична относительно вещественной оси

$$|\Im y| < \rho. \quad (3.182)$$

Для вещественных значений аргумента ряд сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $\exp(-\rho)$ .

Полуширина  $\rho$  полосы голоморфности функций небесной механики нами уже найдена в разделе 3.8.1. Действительно, особые точки  $E$  как функции от  $M$  при фиксированном вещественном  $e$  даются формулами (3.168), откуда

$$\rho = \ln \frac{1}{\beta} - \sqrt{1 - e^2}, \quad \exp(-\rho) = \gamma. \quad (3.183)$$

Таким образом, ряды Фурье сходятся при всех значениях эксцентриситета  $0 \leq e < 1$  на любом эллипсе. Сходимость при фиксированном  $e$  абсолютна и равномерна при  $-\infty < M < \infty$ . Более того, сходимость равномерна по обоим переменным  $e, M$  в полосе  $0 \leq e \leq e_0$ ,  $-\infty < M < \infty$  для любого  $e_0 < 1$ . При  $e = 1$  для прямолинейно-эллиптического движения поведение ряда зависит от вида функции. Ряд может расходиться при всех  $M$ ; расходиться при одних  $M$  и сходиться условно или абсолютно при других  $M$ ; сходиться абсолютно при всех  $M$ . В последнем случае сходимость равномерна при  $0 \leq e \leq 1$ ,  $-\infty < M < \infty$ . Примеры разобраны

в задачах 3.36, 3.37. Здесь остановимся на рядах для координат (3.127) и скоростей (3.128). Из неравенств (3.129) вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов (3.127) в полосе  $0 \leq e \leq 1$ ,  $-\infty < M < \infty$ . Ряды (3.128) сходятся абсолютно и равномерно в полосе  $0 \leq e \leq e_0$ ,  $-\infty < M < \infty$  при любом положительном  $e_0 < 1$ . Первый из рядов (3.128) сходится в полосе  $0 \leq e \leq 1$ ,  $-\infty < M < \infty$ ; при  $e = 1$ ,  $0 < M < \pi$  он сходится условно; при  $e = 1$ ,  $M = \pi$  ряд (из нулей) сходится абсолютно к нулевому значению скорости; при  $e = 1$ ,  $M = 0$  ряд (из нулей) сходится к нулю, тогда как значение  $\xi$  в этой точке бесконечно. Второй из рядов (3.128) в полосе  $0 \leq e \leq 1$ ,  $-\infty < M < \infty$  сходится абсолютно, являясь при  $e = 1$  рядом из нулей.

*Замечание.* Во многих руководствах по небесной механике, даже изданных в XXI веке, приводятся неверные сведения о сходимости рядов Фурье по средней аномалии, вплоть до утверждений об их условной сходимости при эксцентриситете, превышающем предел Лапласа. Последний не имеет никакого отношения к сходимости рядов Фурье.

#### 3.8.4. Сходимость рядов Пуассона

Рассмотрим функцию двух переменных  $f(x, y)$ , голоморфную в произведении круга на полосу

$$|x| < R, \quad |\Im y| < \rho \quad (3.184)$$

и  $2\pi$ -периодическую по  $y$ . Она может быть представлена там абсолютно сходящимся рядом

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{kn} x^k \operatorname{Exp} ny, \quad (3.185)$$

называемым рядом Фурье–Тейлора или рядом Пуассона. При вещественных значениях аргументов степенной порядок общего члена (3.185) есть

$$\left| \frac{x}{R} \right|^k \exp(-|n|\rho). \quad (3.186)$$

Изученные выше функции от  $e, M$  принадлежат рассматриваемому классу. Есть два эквивалентных пути явного получения (3.185). Можно разложить  $f$  в ряд Маклорена по  $e$  с коэффициентами

$a_k(M)$ , а затем разложить  $a_k(M)$  в ряд Фурье с числовыми коэффициентами  $a_{kn}$ . А можно сначала разложить  $f$  в ряд Фурье по  $M$  с коэффициентами  $c_n(e)$ , а затем разложить  $c_n(e)$  в ряд Маклорена по  $e$  с коэффициентами  $c_{nk}$ :

$$f(e, M) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{kn} e^k \text{Ехр } nM = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} e^k \text{Ехр } nM. \quad (3.187)$$

Ясно, что  $a_{kn} = c_{nk}$ .

1. *Двойной ряд.* Если ряд (3.187) рассматривать как двойной, то он сходится абсолютно при

$$0 \leq e < R_0, \quad -\infty < M < \infty,$$

где  $R_0$  — предел Лапласа. При  $e > R_0$  найдутся значения  $M$ , для которых двойной ряд (3.187) расходится.

2. *Повторный ряд с внешним суммированием по степеням эксцентриситета.* Рассмотрим ряд (3.187) как повторный вида

$$f(e, M) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{kn} \text{Ехр } nM \right) e^k. \quad (3.188)$$

Внешний ряд сходится абсолютно при  $|e| < R(M)$ . В частности, при  $|e| < R_0$  сходимость абсолютна для всех  $M$ .

*Предостережение.* Абсолютная сходимость внешнего ряда означает сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{kn} \text{Ехр } nM \right| e^k,$$

а вовсе не ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{kn}| \right) e^k. \quad (3.189)$$

Сходимость (3.189) равносильна абсолютной сходимости двойного ряда.

Внутренний ряд в (3.188) на самом деле есть тригонометрический многочлен.

3. Повторный ряд с внутренним суммированием по степеням эксцентриситета. Это ряд вида

$$f(e, M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} e^k \right) \text{Exp } nM. \quad (3.190)$$

Внешний ряд сходится абсолютно для всех вещественных  $M$  при  $0 \leq e < 1$ . Радиус сходимости внутреннего ряда равен или бесконечности, или единице. Абсолютная сходимость внешнего ряда означает сходимость ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} e^k \right|,$$

а не ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| e^k.$$

### Задачи к главе 3

**Задача 3.1.** Найти общий член ряда Ли (3.3) для скалярного случая  $N = 1$ ,  $f(t, x) = 1$ ,  $g = g(x)$ .

*Ответ:*

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^k g = \frac{d^k g(x)}{dx^k},$$

так что

$$g(x + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} \frac{d^k g(x)}{dx^k}.$$

Таким образом, ряд Тейлора является частным случаем ряда Ли.

**Задача 3.2.** Пусть функции  $\mathbf{f}, g$  не зависят от  $t$ . Показать, что  $D^k g \equiv D_1^k g$ , где операторы  $D$  и  $D_1$  определены как правые части формул (3.4) и (3.8).

**Задача 3.3.** Доказать правило Лейбница для оператора  $D$

$$D(g_1 * g_2) = (Dg_1) * g_2 + g_1 * (Dg_2)$$

в следующих случаях:

а)  $g_1$  и  $g_2$  — скаляры, звездочкой обозначена операция умножения;  
 б)  $g_1$  и  $g_2$  — векторы одинаковой размерности, звездочкой обозначена операция скалярного или векторного произведения (в последнем случае размерность должна быть равна трем);  
 в)  $g_1$  и  $g_2$  — прямоугольные матрицы размером  $s_1 \times s_2$  и  $s_2 \times s_3$ , звездочкой обозначена операция матричного умножения. В случае векторного или матричного умножения переставлять сомножители в общем случае нельзя.

**Задача 3.4.** Показать дифференцированием по  $\tau$ , что из формул (3.13), (3.14) для  $\mathbf{r}(t+\tau)$ ,  $F$ ,  $G$  следуют формулы для  $\mathbf{v}(t+\tau)$ ,  $F'$ ,  $G'$ , причем  $F' = dF/d\tau$ ,  $G' = dG/d\tau$ .

**Задача 3.5.** Показать, что  $\xi, \zeta$  имеют размерность  $c^{-2/3}$ , а  $\eta$  — размерность  $c^{1/3}$ .

**Задача 3.6.** Показать, что  $F_k, G_{k+1}$  при  $k \geq 1$  суть многочлены от  $\xi, \eta, \zeta$  с целыми коэффициентами степени не выше  $3(k-1)$ .

**Задача 3.7.** Показать, что степень многочленов  $F_k, G_{k+1}$  при  $k \geq 2$  равна  $3(k-1)$ .

*Указание.* Показать, что  $F_k$  имеет единственный старший член  $(-1)^{k+1}(2k-3)!!\xi^{2k-1}\eta^{k-2}$ , а  $G_k$  имеет единственный старший член  $(-1)^k(k-2)(2k-5)!!\xi^{2k-3}\eta^{k-3}$ . Старшинство можно понимать как по совокупности переменных  $\xi, \eta, \zeta$ , так и по переменным  $\xi$  и  $\eta$  по отдельности.

**Задача 3.8.** Показать, что при  $k \geq 2$  степень многочленов  $F_k, G_{k+1}$  относительно  $\xi, \eta$  равна  $2k-1, k-2$  соответственно.

**Задача 3.9.** Доказать по индукции, что  $\gamma_n$  в формуле (3.46) знакопередаются и возрастают по абсолютной величине; отношение  $|\gamma_n/\gamma_{n-1}|$  убывает и стремится к единице при  $n \rightarrow \infty$ .

**Задача 3.10.** С помощью формулы (3.28) Бюрмана–Лагранжа показать, что ряд (3.56) можно представить в форме

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{\gamma}^n$$

при

$$c_n = \frac{\exp n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}} \left[ \exp \left( n \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + 1} \right) \right]_{\beta=0}.$$

Проверить, что  $c_n$  рациональны, причем  $c_n = 0$  при четном  $n$ .



**Задача 3.11.** То же для ряда (3.57).

*Ответ:*

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{\gamma}^n$$

при

$$c_n = \frac{\exp n}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{de^{n-1}} \left[ (1 + \eta)^n \exp(-n\eta) \right]_{e=0},$$

где  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ . Проверить, что  $c_n$  рациональны, причем  $c_n = 0$  при четном  $n$ .

**Задача 3.12.** Доказать, что  $J_0(0) = 1$ ,  $J_n(0) = 0$  при  $n \geq 1$  и что при  $x \neq 0$  в формулах (3.73) осуществляется строгое неравенство.

*Указание.* Вывести из (3.68)–(3.71), что смежные функции  $J_n, J_{n+1}$  не имеют общих корней за возможным исключением тривиального  $x = 0$ .

**Задача 3.13.** Дифференцированием (3.58) по  $y$  вывести формулу (3.68).

**Задача 3.14.** Дифференцированием (3.58) по  $x$  вывести формулу (3.69).

**Задача 3.15.** Вывести уравнение (3.71).

*Указание.* Сначала образуйте  $4J_n'' + 4J_n$  из (3.70), выразив результат с помощью (3.68) через  $J_{n-1}, J_{n+1}$ , затем воспользуйтесь (3.68), (3.69).

**Задача 3.16.** Вычислить  $c_n$  в формуле (3.115) при  $s = 1$ .

*Ответ:*

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) J_{n-m} - e(J_{n-m-1} + J_{n-m+1}) + \frac{e^2}{4}(J_{n-m-2} + J_{n-m+2}) = \\ &= \frac{m^2}{n^2} J_{n-m} - \frac{e}{n} J'_{n-m}. \end{aligned}$$

**Задача 3.17.** Представить равенства (3.122), (3.123) в виде

$$\begin{aligned} \text{Exp } \theta &= -e + \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} \left[ \frac{1 - e^2}{e} J_n(x) + \sqrt{1 - e^2} J'_n(x) \right] \text{Exp } nM, \\ \frac{r}{a} \text{Exp } \theta &= -\frac{3}{2}e + \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} \left[ \frac{\sqrt{1 - e^2}}{x} J_n(x) + \frac{1}{n} J'_n(x) \right] \text{Exp } nM. \end{aligned}$$

**Задача 3.18.** Показать, что

$$\frac{r}{a} \operatorname{Exp} \theta = -e + \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \operatorname{Exp} E + \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2} \operatorname{Exp}(-E).$$

Вывести отсюда результат задачи 3.17.

**Задача 3.19.** Пусть при целом  $s$  и целом неотрицательном  $k$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^s \operatorname{Exp} k\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e) \operatorname{Exp} nM.$$

Показать, что при  $s \geq k-1$  коэффициенты  $c_n$  (называемые коэффициентами Ганзена) — линейные комбинации бesselевых функций, а при  $s \leq k-2$  в общем случае это не так.

**Задача 3.20.** Доказать, что

$$\cos(\theta - M) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nM, \quad \sin(\theta - M) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \sin nM,$$

где

$$c_0 = \frac{1 - e^2}{e} J_1(e) + \sqrt{1 - e^2} J_1'(e), \quad c_1 = -e + \frac{1 - e^2}{e} J_2(2e) + \sqrt{1 - e^2} J_2'(2e),$$

$$\tilde{c}_1 = e + \frac{1 - e^2}{e} J_2(2e) + \sqrt{1 - e^2} J_2'(2e),$$

а остальные коэффициенты равны

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1 - e^2}{e} [J_{n+1}((n+1)e) + J_{n-1}((n-1)e)] + \\ &\quad \sqrt{1 - e^2} [J'_{n+1}((n+1)e) - J'_{n-1}((n-1)e)], \\ \tilde{c}_n &= \frac{1 - e^2}{e} [J_{n+1}((n+1)e) - J_{n-1}((n-1)e)] + \\ &\quad \sqrt{1 - e^2} [J'_{n+1}((n+1)e) + J'_{n-1}((n-1)e)]. \end{aligned}$$

**Задача 3.21.** Показать, что разложения  $c_n$ ,  $\tilde{c}_n$  из задачи 3.20 по степеням эксцентриситета начинаются с членов порядка  $e^n$ ; разложение  $c_1$  начинается с члена порядка  $e^3$ .

**Задача 3.22.** Вывести разложения

$$\text{Exp}(\theta - M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(e) \text{Exp } nM,$$

где  $c_{-1} = -e$ , а остальные коэффициенты равны

$$c_n = \frac{1 - e^2}{e} J_{n+1}((n+1)e) + \sqrt{1 - e^2} J'_{n+1}((n+1)e).$$

**Задача 3.23.** Показать, что разложение  $c_n$  из задачи 3.22 по степеням эксцентриситета начинается с члена порядка  $e^{|n|}$ .

**Задача 3.24.** С помощью формулы Эйлера доказать, что

$$2^{k+1} \cos^k x \cos mx = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} [\text{Exp}(k+m-2j)x + \text{Exp}(k-m-2j)x]$$

при целых  $m$  и целых неотрицательных  $k$ .

**Задача 3.25.** Пусть при целых неотрицательных  $k, m$

$$z(k, m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^k x \cos mx \, dx.$$

Опираясь на результат задачи 3.24, показать, что  $z(k, m) = 0$ , если  $k < m$ , или если  $k - m$  нечетно;

$$\begin{aligned} z(m+2k, m) &= 2^{-m-2k} \binom{m+2k}{k} = \\ &= \frac{(2k+m)(2k+m-1) \cdots (2k+1)(2k-1)!!}{(2k+2m)!!}. \end{aligned}$$

Напомним, что пустое произведение считается единицей, так же как пустая сумма — нулем.

**Задача 3.26.** Почему пределы интегрирования одинаковы в интегралах (3.144) и (3.147)?

**Задача 3.27.** Каков физический смысл соотношений (3.119) со вторыми производными?

**Задача 3.28.** Какой точный смысл можно придать утверждению: *большая полуось — это среднее расстояние планеты от Солнца?*

*Ответ.* Большая полуось — среднее между наибольшим и наименьшим расстоянием, а также среднее гармоническое расстояние (гармония небесных сфер?):

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}, \quad \mathbf{E} \frac{1}{r} = \frac{1}{a}.$$

**Задача 3.29.** Пусть  $U$  — средняя мощность излучения, падающего на шарообразную планету от материнской звезды постоянной светимости. Иными словами,  $U$  равно деленной на  $P$  энергии излучения, приходящего на планету за время  $P$ , где  $P$  — сидерический год. Пренебрегая размерами тел по сравнению с расстоянием между ними, показать, что при фиксированной большой полуоси или афелийном расстоянии  $U$  возрастает вместе с  $e$ ; при фиксированной малой полуоси, параметре или перигелийном расстоянии  $U$  убывает вместе с  $e$ .

Какие из этих утверждений очевидны из физических соображений?

**Задача 3.30.** Показать, что в задаче одного притягивающего центра при  $h \leq 0$

$$\mathbf{E}T = -h, \quad \mathbf{E}V = -2h, \quad \mathbf{E}V = 2\mathbf{E}T, \quad (3.191)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2, \quad V = \frac{\kappa^2}{r}$$

суть кинетическая энергия и силовая функция единицы массы,  $h$  — (постоянная) полная энергия единицы массы.

*Замечание.* Соотношения (3.191) называются в механике *теоремой вириала*.

**Задача 3.31.** Показать, что в задаче двух тел при  $h \leq 0$  также выполняются соотношения (3.191), где теперь

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2, \quad V = G \frac{m_1 m_2}{r}$$

суть кинетическая энергия и силовая функция,  $h$  — (постоянная) полная энергия системы.

**Задача 3.32.** Показать, что соотношение

$$V = 2T \quad (3.192)$$

выполняется тождественно для кругового движения, а для эллиптического движения — при  $\cos E = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = -e$ , т.е. в вершинах малой оси. Показать также, что в этих точках  $V = \mathbf{E}V$ ,  $T = \mathbf{E}T$ ; на ближней к притягивающему центру половине эллипса  $V < 2T$ , на дальней —  $V > 2T$ .

**Задача 3.33.** Показать, что  $\theta^* \rightarrow 45^\circ$  при  $e \rightarrow \infty$ .

*Указание.* В силу (3.172) при больших  $e$  можно  $\mu_0$  представить рядом Лорана

$$\mu_0 = e - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2e} + \dots,$$

затем подобным образом представляется решение первого из уравнений (3.170) при  $\mu = \mu_0$

$$H = H_0 + \frac{H_1}{e} + \dots,$$

где  $\operatorname{sh} H_0 = 1$ ,  $H_0 = \ln(\sqrt{2} + 1) = 0.881373$ ,  $H_1 = (H_0 - \pi/2)/\sqrt{2} = -0.487495$ . Далее согласно (1.42)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \operatorname{th} \frac{H_0}{2} + \left[ \operatorname{th} \frac{H_0}{2} + \frac{H_1}{2 \operatorname{ch}^2(H_0/2)} \right] \frac{1}{e} + \dots = \\ &= (\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{2} + H_0 - \pi/2}{(2 + \sqrt{2})e} + \dots \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2\sqrt{2} + 2H_0 - \pi}{4e} + \dots = \frac{\pi}{4} + \frac{0.362395}{e} + \dots$$

**Задача 3.34.** Показать, что первое из разложений (3.154) справедливо и при  $e = \beta = 1$ , если считать в прямолинейно-эллиптическом движении  $\theta = -\pi$  при  $-\pi \leq E < 0$  и  $\theta = \pi$  при  $0 < E \leq \pi$  и периодически продолжить эту зависимость на всю ось  $E$ .

**Задача 3.35.** Показать, что второе из разложений (3.154) неверно при  $e = \beta = 1$ .

**Задача 3.36.** С помощью неравенств (3.76) доказать, что при  $e = 1$  ряды (3.102), (3.105), (3.106), (3.114), (3.123) сходятся абсолютно.

**Задача 3.37.** С помощью неравенств (3.76) доказать, что при  $e = 1$ ,  $M \neq k\pi$  ряды (3.113), (3.116), (3.124), (3.125), (3.126) сходятся условно.

## Глава 4

### Определение орбит

Материал предыдущих глав дает нам возможность решить задачу построения эфемерид, т.е. таблиц положений небесных тел на некоторые моменты времени. Действительно, зная элементы эллиптического движения интересующего нас тела  $a, e, i, g, \Omega$  и  $M_0$ , мы можем, решив уравнение Кеплера (1.32), найти по формулам (1.26) прямоугольные координаты в системе координат  $\mathcal{O}_3$  и по формулам (1.24) — координаты в основной системе координат. Аналогично решается задача построения эфемерид для любого типа движения.

Задачи определения орбит (в рамках задачи двух тел) представляют собой широкий класс обратных задач, в которых элементы орбиты определяются из требуемых свойств орбиты либо из имеющихся наблюдений. Собственно элементами можно считать любые шесть взаимно независимых постоянных интегрирования задачи. Как правило выбирается классическая система  $a, e, i, g, \Omega$  и  $M_0$ . Такие элементы, или их очевидные комбинации, имеют простое, интуитивно ясное представление, и до 4 октября 1957 года их выбор для описания орбиты был вполне оправдан. С началом космической эры изменился и состав наблюдаемых параметров. Кроме классических  $\alpha$  и  $\delta$  добавились наклонная дальность, лучевая скорость, ускорения и т.д., а также другие используемые для конструирования орбит параметры. В конце концов уравнение (1.1) имеет шесть постоянных интегрирования:  $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$ , которые с помощью функций  $F$  и  $G$  (см. (1.87)), дают координаты и скорости (а значит, и все другие параметры) на любой момент времени. Во многих задачах конструирования орбит вообще

удается избежать трудоемких методов классического определения орбит.

В этой главе рассматриваются различные задачи определения орбит. В начале главы приводятся несколько простых задач конструирования орбит с заданными свойствами. Далее рассматривается классическая задача определения орбиты по положению и скорости, которую, вообще говоря, можно рассматривать просто как задачу перехода от одной системы элементов к другой. Следующие разделы посвящены описанию классических методов предварительного определения орбиты по двум положениям и по трем наблюдениям. Во всех случаях постоянная  $\kappa$  считается известной (подразумевается, что все небесные тела принадлежат Солнечной системе).

В последнем параграфе мы обращаемся к внесолнечным планетам. Здесь  $\kappa$  уже не может считаться известной априори. Более того, только в этом случае приходится рассматривать подлинно задачу двух тел. В Солнечной системе при построении первоначальной орбиты почти всегда можно ограничиться задачей одного притягивающего центра. Редкие исключения представляют двойные астероиды и система Плутон – Харон.

Объем пособия не дает возможности детального описания всех упомянутых методов, да и сами методы определения орбит используются лишь для предварительного их определения, в дальнейшем элементы орбиты уточняются методами дифференциального улучшения орбит. Однако приводимые здесь решения дают первоначальное представление о методах определения орбит.

## 4.1. Некоторые задачи конструирования орбит

### 4.1.1. Траектория баллистической ракеты

Рассмотрим задачу определения траектории баллистической ракеты, т.е. орбиты, проходящей через две точки на земной поверхности, точку запуска и цель:  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , см. рис. 4.1. Будем пренебрегать всеми силами, кроме силы притяжения сферической Земли, и размерами участков вывода на орбиту. Тогда определение орбиты можно выполнить в рамках задачи одного притягивающего центра. Поскольку в такой постановке Земля — шар, то  $r_1 = r_2 = R_\oplus$ .

По свойству симметрии находим значения истинных аномалий этих двух точек:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \pi - f, \\ \theta_2 &= \pi + f,\end{aligned}$$

где  $R_{\oplus}^2 \sin 2f = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|$ ,  $0 < 2f < \pi$ .

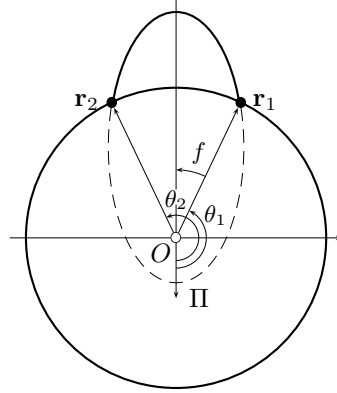


Рис. 4.1. Траектория баллистической ракеты.

Очевидно, что орбиты, проходящие через точки  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ , составляют однопараметрическое семейство. Выберем в качестве параметра эксцентриситет орбиты  $e$ :  $0 < e < 1$ . Круговая орбита будет проходить через две точки (но вряд ли долетит до цели, ведь Земля — не идеальная сфера). Параболические и гиперболические траектории тоже не подходят для баллистических траекторий, хотя бы по соображениям затраты топлива. Тогда из уравнения орбиты (1.20) получим параметр орбиты

$$p = r_1(1 + e \cos \theta_1),$$

а значит, и значение большой полуоси  $a$ . Значения компонент скорости  $\dot{\mathbf{r}}_1$  и  $\dot{\mathbf{r}}_2$  можно получить из формул (1.47). Определение орбиты по положению и скорости рассматривается в следующем разделе,



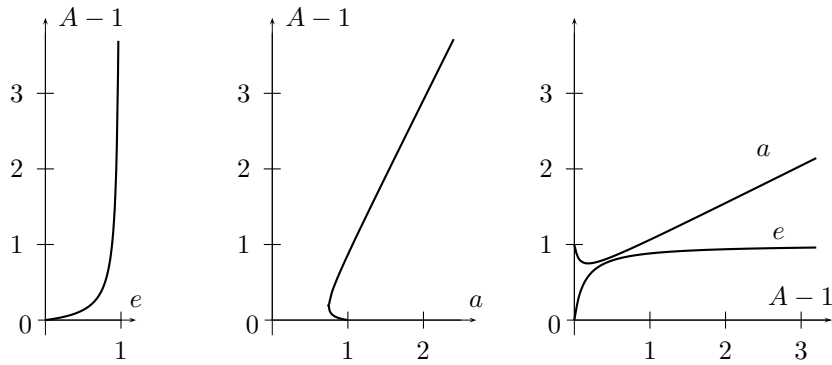


Рис. 4.2. Зависимость высоты апогея  $A - 1$  баллистических траекторий  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$ , угол между  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  равен  $60^\circ$ . На первом графике в качестве параметра принят эксцентриситет орбиты  $e$ , на втором — большая полуось  $a$ , на третьем — высота апогея, а большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  — функции этого параметра. Радиус  $R_\oplus$  принят за единицу.

приведем лишь формулу, дающую апогейное расстояние как функцию эксцентриситета:

$$A = a(1 + e) = R_\oplus(1 + e \cos \theta_1)/(1 - e).$$

На рис. 4.2 изображено однопараметрическое семейство баллистических траекторий для двух точек поверхности сферического тела, находящихся на расстоянии в  $60^\circ$  друг от друга. На левом рисунке в качестве параметра принят эксцентриситет орбиты  $e$ , на правом — большая полуось орбиты  $a$ . В такой идеальной постановке большая полуось является мерой энергетических затрат, которые требуются для запуска ракеты. Минимальная полуось (см. задачу 4.1) равна  $a = 0.75$ , при этом высота апогея орбиты  $A - 1 \approx 0.183$  радиуса Земли.

#### 4.1.2. Эллипсы Гомана–Цандера

При проектировании межпланетных перелетов самыми выгодными являются так называемые эллипсы Гомана–Цандера (рис. 4.3). В простейшем случае задача описывается так. Пусть планеты двигаются по круговым орбитам в одной ориентированной

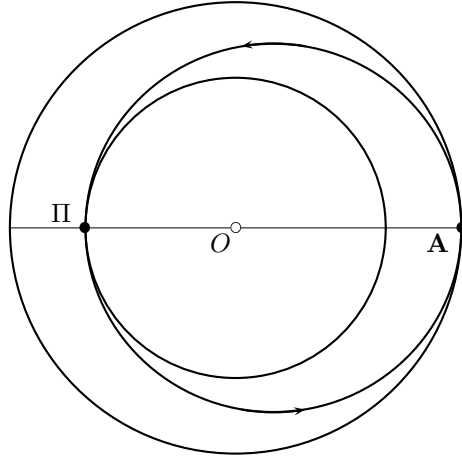


Рис. 4.3. Орбиты межпланетных перелетов.

плоскости. Найти орбиту космического аппарата, который, стартуя с одной планеты, достигает орбиты другой. Оптимальной в смысле затрат энергии будет в этом случае орбита, начальная и конечная точки которой являются апсидами. Таким образом, известны два положения. Два положения коллинеарны с центром притяжения, это условие позволяет нам определить орбиту. Разумеется, через две точки проходит однопараметрическое семейство орбит, эти точки определяют только линию апсид и не определяют плоскости орбиты. Но из энергетических соображений эта плоскость должна совпадать с плоскостью движения планет. Осталось определить только размер и форму орбиты перелета: большую полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$ , что элементарно:

$$a = (r_A + r_{\Pi})/2 = (a_1 + a_2)/2,$$

$$ae = (r_A - r_{\Pi})/2 = (a_2 - a_1)/2.$$

Значение скорости определяется из интеграла энергии, а ее направление в апсидах орбиты перпендикулярно радиус-вектору.

## 4.2. Определение орбиты по положению и скорости

Пусть в фиксированный момент времени известны положение и скорость небесного тела. Из интеграла энергии, см. (1.7) и (1.23), получаем полуось орбиты:

$$a = (2/r - \varkappa^{-2} \dot{\mathbf{r}}^2)^{-1}. \quad (4.1)$$

Плоскость орбиты и значение эксцентриситета определяем из интеграла площадей (1.6), (1.21):

$$\frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|} = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|} \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$c = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|, \quad p = c^2/\varkappa^2, \quad e = \sqrt{1 - p/a}. \quad (4.3)$$

Из уравнения (1.20) и первого из уравнений (1.47) имеем

$$e \cos \theta = pr^{-1} - 1, \quad e \sin \theta = \dot{r}\sqrt{p}/\varkappa, \quad (4.4)$$

откуда определяем значение истинной аномалии в заданный момент и эксцентриситет  $e$ . Таким образом, эксцентриситет можно получить и из уравнения (4.3), и из уравнения (4.4). И в том, и в другом случае при малых значениях  $e$  происходит потеря точности при вычислении разности близких чисел, в первом случае  $1 - p/a$ , а во втором —  $p/r - 1$ . Второй случай, однако, предпочтительнее, см. задачу 4.3.

Значение аргумента широты  $u$  можно получить из формул задачи 1.20:

$$\begin{aligned} r \cos u &= x \cos \Omega + y \sin \Omega, \\ r \sin u &= z / \sin i. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Зная  $u$  и  $\theta$ , находим аргумент перицентра

$$g = u - \theta. \quad (4.6)$$

Эксцентрическая аномалия  $E$  дается формулой (1.28):

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

или, еще лучше, формулой (1.29):

$$E = \theta - 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin \theta}{1 + \beta \cos \theta}, \quad (4.7)$$

где, напомним,  $\operatorname{arctg}$  — настоящий, его значение изменяется от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Последний элемент  $M$  находится просто из уравнения Кеплера:

$$M = E - e \sin E, \quad (4.8)$$

которое теперь, собственно говоря, уравнением не является. Соотношения (4.1)–(4.5) справедливы для любого типа орбит. Исключение в случае параболы ( $1/a = 0$ ) составляет лишь последнее из уравнений (4.3). Если  $a < 0$ , то для вычисления средней аномалии в момент  $t_0$  используем уравнения (1.43) и (1.44).

В случае параболы вычисляем  $q = p/2$ , из формул (1.57) и (1.66) имеем

$$\sigma = \frac{r \dot{r}}{\kappa \sqrt{2q}},$$

а среднюю аномалию в момент  $t$  находим по формуле (1.64).

Если векторы  $\mathbf{r}$  и  $\dot{\mathbf{r}}$  коллинеарны, т.е.  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ , то движение прямолинейно. Плоскость орбиты в этом случае вырождается в прямую линию, а остальные элементы вычисляются в зависимости от постоянной энергии: если  $a > 0$  — эллиптическая орбита,  $a = \infty$  — параболическая, а если  $a < 0$  — гиперболическая.

### 4.3. Определение орбиты по положениям

#### 4.3.1. Метод Гиббса определения орбиты по трем положениям

Если нам известны три положения, то определение элементов орбиты становится тривиальным, используются только геометрические свойства, а момент времени нужен только для точки отсчета. Итак, пусть известны положения  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$ . Разумеется, эти положения должны быть различными и проходящая через них плоскость должна содержать начало координат (центральное тело или барицентр), в противном случае задача не имеет решения. Если положения получаются из измерений, т.е. с некоторой ошибкой,

то целесообразно привести их сначала к одной плоскости, а потом уже определять орбиту. В такой формулировке положения  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  могут быть коллинеарными, только если орбита прямолинейна, поскольку прямая пересекается с коническим сечением не более, чем в двух точках.

Пусть векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  попарно неколлинеарны. Их общая плоскость определяется сразу, в отличие от ее ориентации. Обычно считают, что за (известное нам) время  $t_3 - t_1$  радиус-вектор поворачивается на угол, меньший  $\pi$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}. \quad (4.9)$$

В противном случае справа следует поставить знак минус, что равносильно замене  $(i, \Omega) \rightarrow (\pi - i, \Omega + \pi)$ .

Так как векторы компланарны,  $\mathbf{r}_2$  можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{r}_2 = c_1 \mathbf{r}_1 + c_3 \mathbf{r}_3 \quad (4.10)$$

с некоторыми постоянными  $c_k$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= c_3 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3, \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 &= c_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для практического определения  $c_k$  проще всего спроектировать (4.11) на ту из координатных осей, которой отвечает наибольшая по модулю компонента  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3$ . Можно также перейти к системе координат  $\mathcal{O}_2$  согласно (1.14) и спроектировать (4.11) на ось  $z$  этой системы. На практике обычно предполагают выполненным следующее условие.

*Условие А.* Поворот от  $\mathbf{r}_1$  к  $\mathbf{r}_2$  и от  $\mathbf{r}_2$  к  $\mathbf{r}_3$  осуществляется углами  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{23}$ , причем  $\varphi_{12} > 0$ ,  $\varphi_{23} > 0$ ,  $\varphi_{12} + \varphi_{23} < \pi$ .

В этом случае

$$c_1 = \frac{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}, \quad c_3 = \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}. \quad (4.12)$$

Так как векторы удовлетворяют соотношению (4.10), то такому же соотношению удовлетворяют и их проекции, например на ось апсид. Из (1.20) и (1.26) легко вывести  $p - r = ex$  в системе  $\mathcal{O}_3$ . Поэтому

$$r_2 - p = c_1(r_1 - p) + c_3(r_3 - p),$$

откуда

$$p = \frac{c_1 r_1 + c_3 r_3 - r_2}{c_1 + c_3 - 1}. \quad (4.13)$$

При выполнении условия А знаменатель в (4.13) положителен. Действительно, равенство  $c_1 + c_3 = 1$  означало бы, что конец вектора  $\mathbf{r}_2$  лежит на отрезке, соединяющем концы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_3$ . Выпуклость эллипса и гиперболы влечет  $c_1 + c_3 > 1$ .

Для определения остальных элементов нам достаточно знать два положения. Задача сводится к определению орбиты по  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_3$  и  $p$ .

Обозначим  $2f = \theta_3 - \theta_1$ . При  $2f < \pi$

$$\begin{aligned} r_1 r_3 \sin 2f &= |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|, & r_1 r_3 \cos 2f &= \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3, \\ e \cos \theta_1 &= p r_1^{-1} - 1, & e \cos \theta_3 &= p r_3^{-1} - 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Отсюда находим  $f$  и

$$\begin{aligned} e \sin \theta_1 &= \frac{e \cos \theta_1 \cos 2f - e \cos \theta_3}{\sin 2f}, \\ e \sin \theta_3 &= \frac{-e \cos \theta_3 \cos 2f + e \cos \theta_1}{\sin 2f}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

что дает нам эксцентриситет и значения истинных аномалий на моменты  $t_1$  и  $t_3$ . Большая полуось находится элементарно:  $a = p/(1 - e^2)$ . Остальные элементы вычисляются по (4.5)–(4.8). Если  $2f > \pi$ , нужны очевидные модификации.

### 4.3.2. Определение орбиты по двум положениям

Если нам известны два положения и параметр орбиты, то определение остальных элементов не представляет особого труда. Обратимся к задаче определения орбиты по двум положениям  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и соответствующим моментам времени  $t_1$ ,  $t_2$ . По автономности уравнений движения реальное значение имеет лишь разность  $t_2 - t_1$ . Задача будет решена, если мы сможем определить  $p$ . Такое решение было получено Гауссом. Параметр орбиты  $p$  выражается через отношение площади сектора орбиты к площади треугольника  $\eta$ . Напомним, что согласно второму закону Кеплера площадь сектора —

линейная функция времени, а площадь треугольника легко вычислить, зная два вектора положения:

$$\eta = \frac{\varkappa\sqrt{p}(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin 2f}.$$

Для определенности считаем  $0 < 2f < \pi$ . Согласно задаче 1.23

$$\begin{aligned}\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2}, \\ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2}, \\ \sqrt{r_1 r_2} \sin f &= a\sqrt{1-e^2} \sin g, \\ \sqrt{r_1 r_2} \cos f &= a(\cos g - \cos h),\end{aligned}\tag{4.16}$$

где использованы обозначения

$$2g = E_2 - E_1, \quad \cos h = e \cos \frac{1}{2}(E_2 + E_1).$$

Выражение для  $\eta$  запишется тогда так:

$$\eta = \frac{\tau\sqrt{p}}{\kappa a \sqrt{1-e^2} \sin g},$$

где введены дополнительные обозначения  $\tau = \varkappa(t_2 - t_1)$ ,  $\kappa = 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f$ .

Перепишем  $\eta$  в виде

$$\eta = \frac{\tau}{\kappa \sqrt{a} \sin g}.\tag{4.17}$$

Нетрудно вывести выражения для суммы радиусов

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos g \cos h).$$

Выразим  $\cos h$  из последнего уравнения (4.16) в виде

$$\cos h = \cos g - \frac{\kappa}{2a},$$

а сумму радиусов — как

$$r_1 + r_2 = 2a \sin^2 g + \kappa \cos g.\tag{4.18}$$

Еще одно уравнение получим из уравнения Кеплера:

$$E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) = \varkappa a^{-3/2}(t_2 - t_1),$$

что дает нам

$$\tau a^{-3/2} = 2g - 2 \sin g \cos h,$$

или

$$\tau a^{-3/2} = 2g - \sin 2g + \kappa a^{-1} \sin g. \quad (4.19)$$

Исходя из (4.17), выразим  $a$  через  $\eta$ :

$$a^{-1} = \tau^{-2} \kappa^2 \eta^2 \sin^2 g.$$

Подставляя в (4.18), (4.19), получаем два уравнения относительно двух неизвестных  $\eta$ ,  $g$ :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2\tau^2 \kappa^{-2} \eta^{-2} + \kappa \cos g, \\ \tau^{-2} \kappa^3 \eta^3 \sin^3 g &= 2g - \sin 2g + \tau^{-2} \kappa^3 \eta^2 \sin^3 g, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{r_1 + r_2}{2\kappa} &= \tau^2 \kappa^{-3} \eta^{-2} + \frac{1}{2} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{g}{2} \right), \\ \tau^{-2} \kappa^3 (\eta^3 - \eta^2) &= \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Приведем (4.20) к более простому виду, обозначив

$$m = \frac{\tau^2}{\kappa^3}, \quad l = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2}{\kappa} - 1 \right),$$

где  $m$  и  $l$  — известные безразмерные величины. Введем функцию

$$X(x) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}, \quad x = \sin^2 \frac{g}{2}. \quad (4.21)$$

По непрерывности  $X(0) = 4/3$ .

Уравнения (4.20) принимают окончательную форму

$$\begin{aligned} \eta^3 - \eta^2 &= mX(x), \\ x &= m\eta^{-2} - l, \end{aligned} \quad (4.22)$$

что можно записать в виде одного уравнения с одной неизвестной  $\eta$

$$\eta^3 - \eta^2 = mX(m\eta^{-2} - l). \quad (4.23)$$

Хотя функция  $X(x)$  элементарна, полезно получить другие ее представления и исследовать аналитические свойства.



Как функция от переменной  $g$  функция  $X$  четна и разлагается в ряд по степеням  $g^2$ , и далее в ряд по степеням  $x$ :

$$X = \frac{4}{3} + \frac{2}{5}g^2 + \dots, \quad g^2 = 4x + \frac{4}{3}x^2 + \dots,$$

откуда

$$X(x) = \frac{4}{3} + \frac{8}{5}x + \dots$$

Стандартным способом легко получить и общий член разложения:

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+4)!!}{2(2n+3)!!} x^n, \quad (4.24)$$

поскольку  $X$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$2(x-x^2)\frac{dX}{dx} = 4 - (3-6x)X. \quad (4.25)$$

Представление (4.24) показывает, что  $X$  — гипергеометрическая функция:

$$X(x) = \frac{4}{3}F\left(1, 3, \frac{5}{2}, x\right). \quad (4.26)$$

При малых  $x$  следует пользоваться рядом (4.24), при больших — формулой (4.21).

Итак, первое из уравнений (4.22) содержит в левой части кубический полином от  $\eta$ , а в правой — функцию от неизвестного  $x$ , которая связана с  $\eta$  вторым соотношением (4.22). Вычислительный алгоритм для определения  $\eta$  такой. В качестве нулевого приближения берем  $\eta_0 = 1$ ,

$$x_n = m\eta_n^{-2} - l. \quad (4.27)$$

Далее вычисляем  $X_n = X(x_n)$  и решаем кубическое уравнение (4.22), корень, который больше единицы, принимаем за  $\eta_{n+1}$ . Согласно задачам 4.7, 4.9 нужный корень существует, единствен и выражается через радикалы от вещественных аргументов.

Процесс повторяется до достижения требуемой точности. Если имеющиеся наблюдения дают значение  $g < 4^\circ$ , то можно использовать следующую приближенную формулу, которая имеет ошибку, не превышающую единицы шестого знака (*Субботин, 1968*):

$$\eta \approx 1 + \frac{4}{3}m \left[ 1 - 1.1 \left( \frac{4}{3}m \right) - 1.2l \right]. \quad (4.28)$$

## 4.4. Определение орбиты по трем наблюдениям

### 4.4.1. Метод Гаусса

Классическое наблюдение небесного тела дает на некоторый момент времени  $t_i$  прямое восхождение  $\alpha_i$  и склонение  $\delta_i$ . Уравнения, дающие прямоугольные координаты тела, имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_i \lambda_i &= x_i + X_i, \\ \rho_i \mu_i &= y_i + Y_i, \\ \rho_i \nu_i &= z_i + Z_i,\end{aligned}\tag{4.29}$$

где  $\lambda_i = \cos \delta_i \cos \alpha_i$ ,  $\mu_i = \cos \delta_i \sin \alpha_i$ ,  $\nu_i = \sin \delta_i$  — направляющие косинусы,  $X_i, Y_i, Z_i$  — геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты Солнца.

Три наблюдения — минимальное количество наблюдений, по которым в большинстве случаев можно определить орбиту. Будем считать, что прямые восхождения и склонения или, что то же самое, направляющие косинусы  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$  заданы в моменты времени  $t_i, i = 1, 2, 3$ . На самом деле важнее знать промежутки времени между наблюдениями, поэтому введем  $\tau_1 = t_2 - t_1$ ,  $\tau_2 = t_3 - t_2$ . Воспользуемся представлением (3.13):

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_2 F(\tau) + \dot{\mathbf{r}}_2 G(\tau),$$

где  $F$  и  $G$  — ряды по степеням времени (3.14). Запишем выражения для координат в эпохи  $t_1 = t_2 - \tau_1$  и  $t_3 = t_2 + \tau_2$ :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 F_1 + \dot{x}_2 G_1, & x_3 &= x_2 F_2 + \dot{x}_2 G_2, \\ y_1 &= y_2 F_1 + \dot{y}_2 G_1, & y_3 &= y_2 F_2 + \dot{y}_2 G_2, \\ z_1 &= z_2 F_1 + \dot{z}_2 G_1, & z_3 &= z_2 F_2 + \dot{z}_2 G_2.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Значения коэффициентов разложений  $F$  и  $G$  по времени уже получены в предыдущей главе (см. (3.19)). Ограничиваясь первыми членами этих рядов, можно записать:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1 - \frac{1}{2}\xi^3\tau_1^2 - \frac{1}{2}\xi^5\eta\tau_1^3 + \frac{1}{24}(4\xi^6 - 15\xi^7\eta^2 + 3\xi^5\zeta)\tau_1^4 + \dots, \\
G_1 &= -\tau_1 + \frac{1}{6}\xi^3\tau_1^3 + \frac{1}{4}\xi^5\eta\tau_1^4 + \dots, \\
F_2 &= 1 - \frac{1}{2}\xi^3\tau_2^2 + \frac{1}{2}\xi^5\eta\tau_2^3 + \frac{1}{24}(4\xi^6 - 15\xi^7\eta^2 + 3\xi^5\zeta)\tau_2^4 + \dots, \\
G_2 &= \tau_2 - \frac{1}{6}\xi^3\tau_2^3 + \frac{1}{4}\xi^5\eta\tau_2^4 + \dots.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

где согласно (3.17)  $\xi = \varkappa^{2/3}r^{-1}$ ,  $\eta = \varkappa^{-4/3}r\dot{r}$ ,  $\zeta = \varkappa^{-4/3}\dot{r}^2 - 2\varkappa^{2/3}r^{-1}$ .

В соотношениях (4.30) присутствуют компоненты скорости. Исключив их, получим

$$\begin{aligned}
n_1x_1 - x_2 + n_2x_3 &= 0, \\
n_1y_1 - y_2 + n_2y_3 &= 0, \\
n_1z_1 - z_2 + n_2z_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Здесь

$$n_1 = \frac{G_2}{F_1G_2 - F_2G_1}, \quad n_2 = \frac{-G_1}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

Легко получить

$$F_1G_2 - F_2G_1 = \tau - \frac{1}{6}\xi^3\tau^3 + \frac{1}{4}\eta\xi^5\tau^3(\tau_2 - \tau_1) + \dots,$$

где  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ . Отсюда, выполнив очевидные выкладки, получим

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{\tau_2}{\tau} \left\{ 1 + \frac{\xi^3}{6}(\tau^2 - \tau_2^2) + \frac{\eta\xi^5}{4}\tau_1(\tau\tau_1 - \tau_2^2) + \dots \right\}, \\
n_2 &= \frac{\tau_1}{\tau} \left\{ 1 + \frac{\xi^3}{6}(\tau^2 - \tau_1^2) - \frac{\eta\xi^5}{4}\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2) + \dots \right\}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Подставим вместо  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  их выражения из (3.17):

$$n_1 = n_1^0 + c_1r^{-3} \quad n_2 = n_2^0 + c_2r^{-3}. \tag{4.34}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
n_1^0 &= \tau_2/\tau; \quad n_2^0 = \tau_1/\tau, \\
c_1 &= \frac{1}{6}\varkappa^2\tau_1\tau_2(1 + n_1^0) + \frac{1}{4}\varkappa^2\frac{\dot{r}}{r}\tau_1\tau_2(\tau\tau_1 - \tau_2^2)/\tau + \dots, \\
c_2 &= \frac{1}{6}\varkappa^2\tau_1\tau_2(1 + n_2^0) - \frac{1}{4}\varkappa^2\frac{\dot{r}}{r}\tau_1\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2)/\tau + \dots
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Подставив теперь в уравнения (4.32) выражения для геоцентрических координат (4.15), получим

$$\begin{aligned}\rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho_2 \lambda_2 + \rho_3 n_2 \lambda_3 &= n_1 X_1 - X_2 + n_2 X_3, \\ \rho_1 n_1 \mu_1 - \rho_2 \mu_2 + \rho_3 n_2 \mu_3 &= n_1 Y_1 - Y_2 + n_2 Y_3, \\ \rho_1 n_1 \nu_1 - \rho_2 \nu_2 + \rho_3 n_2 \nu_3 &= n_1 Z_1 - Z_2 + n_2 Z_3.\end{aligned}\quad (4.36)$$

Из этих уравнений мы определим геоцентрическое  $\rho$  и гелиоцентрическое  $r$  расстояние на средний момент времени. Решение линейной системы уравнений дает для  $\rho$  выражение

$$D\rho = D', \quad (4.37)$$

где  $D$  и  $D'$  — определители:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_1 & \mu_3 \\ \nu_2 & \nu_1 & \nu_3 \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} X_2 - n_1 X_1 - n_2 X_3 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ Y_2 - n_1 Y_1 - n_2 Y_3 & \mu_1 & \mu_3 \\ Z_2 - n_1 Z_1 - n_2 Z_3 & \nu_1 & \nu_3 \end{vmatrix}. \quad (4.38)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\lambda_{13} &= \mu_1 \nu_3 - \mu_3 \nu_1, \quad \mu_{13} = \nu_1 \lambda_3 - \nu_3 \lambda_1, \quad \nu_{13} = \lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1, \\ U_1 &= X_1 \lambda_{13} + Y_1 \mu_{13} + Z_1 \nu_{13}, \\ U_2 &= X_2 \lambda_{13} + Y_2 \mu_{13} + Z_2 \nu_{13}, \\ U_3 &= X_3 \lambda_{13} + Y_3 \mu_{13} + Z_3 \nu_{13}.\end{aligned}\quad (4.39)$$

Величины  $D$ ,  $\lambda_{13}$ ,  $\mu_{13}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $U_i$  известны. Неизвестные содержатся только в выражениях для  $n_1$  и  $n_2$ , точнее в выражениях для  $c_1$  и  $c_2$ .

Пусть  $D \neq 0$ . Положим

$$\begin{aligned}P &= D^{-1}(U - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2), \\ Q &= D^{-1}(c_1 U_1 + c_2 U_2), \\ C &= -(\lambda X + \mu Y + \nu Z).\end{aligned}$$

Записав в этих обозначениях уравнение (4.37) и добавив равенство, связывающее стороны треугольника, вершинами которого являются наблюдаемое тело, Солнце и точка наблюдения, получим для определения  $\rho$  и  $r$  систему уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned}\rho &= P - Qr^{-3}, \\ r^2 &= \rho^2 + 2C\rho + R^2.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Все коэффициенты здесь известны точно, за исключением входящих в  $Q$  величин  $c_1$  и  $c_2$ , в разложениях (4.35) которых по степеням времени присутствуют члены, зависящие от  $r$ ,  $\dot{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}^2$ . Однако, если в этих разложениях ограничиться членами второго порядка, получим

$$c_1 = \frac{1}{6}\varkappa^2\tau_1\tau_2(1+n_1^0), \quad c_2 = \frac{1}{6}\tau_1\tau_2(1+n_2^0) \quad (4.41)$$

и коэффициент  $Q$  в (4.40) тоже будет известен. Конечно, при этом промежутки между наблюдениями не должны быть большими.

Решить систему уравнений Лагранжа можно, например, методом Ньютона, записав первое уравнение в виде  $f(\rho) = 0$  при

$$f(\rho) = \rho - P + Qr^{-3}.$$

Второе из уравнений (4.40) используем для вычисления  $r$  и производной по  $\rho$ :

$$f'(\rho) = 1 - 3Q(\rho + C)r^{-5}.$$

Значение следующей итерации получаем по формуле

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\rho_n - P + Qr_n^{-3}}{1 - 3Q(\rho_n + C)r_n^{-5}},$$

вычисляя  $r_n$  из второго уравнения системы Лагранжа.

Другой путь решения системы (4.40) — приведение к одному алгебраическому уравнению восьмой степени относительно  $r$ :

$$r^8 = (Pr^3 - Q)^2 + 2Cr^3(Pr^3 - Q) + R^2, \quad (4.42)$$

или относительно  $\rho$ :

$$Q^2 = (P - \rho)^2(\rho^2 + 2C\rho + R^2)^3. \quad (4.43)$$

Если сначала решить (4.42), то  $\rho$  находится по первому из уравнений (4.40). Если же сначала решить (4.43), то первое из уравнений (4.40) даст нам  $r$ . Решений может быть несколько. Нужно удовлетворяет условиям  $r > 0$ ,  $\rho > 0$ . На практике ограничения жестче: наблюдая небесное тело Солнечной системы, мы за редчайшими исключениями знаем  $r$ ,  $\rho$  с точностью по крайней мере до порядка.

Геоцентрические расстояния для двух других моментов, если  $\rho$  и  $r$  уже известны, находим из системы (4.36), а гелиоцентрические координаты для наблюдений — из (4.29).

Если точность полученных положений нас не удовлетворяет, уточнение можно производить следующим образом. Соотношения (4.32) с точностью до обозначений совпадают с (4.10). Поэтому справедлив аналог (4.12)

$$n_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}, \quad n_2 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}.$$

Здесь  $[r_i r_j]$  — удвоенная площадь треугольника  $Or_i r_j$ . Отношения площадей треугольников можно выразить через отношения площадей секторов к площади треугольников. Если  $\eta_{ij} = (r_i r_j)$ , то

$$\bar{n}_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = n_1^0 \frac{\eta_{13}}{\eta_{23}}, \quad \bar{n}_2 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = n_2^0 \frac{\eta_{13}}{\eta_{12}},$$

$\eta$  можно вычислить по формулам предыдущего раздела, например, для небольших дуг по формулам (4.28). Решая затем систему уравнений Лагранжа, нужно вместо старых  $c_1, c_2$  использовать уточненные  $\bar{c}_1 = r_2^3(\bar{n}_1 - n_1^0)$  и  $\bar{c}_2 = r_2^3(\bar{n}_2 - n_2^0)$ .

Итак, решив систему Лагранжа и получив таким образом положение  $r_2$  на средний момент времени и найдя из уравнений (4.36) и (4.29) положения  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_3$ , мы получаем три положения  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$  на три момента времени  $t_1, t_2, t_3$ . Задачу же определения орбиты по положениям мы уже решили в предыдущем разделе.

Первое уравнение Лагранжа вырождается, если определитель  $D$  равен нулю, т.е. (задача 4.11) три видимые положения наблюдаемого тела лежат на большом круге. Но и в этом случае, если не все  $U, U_1, U_2$  из (4.39) равны нулю, можно определить из первого уравнения  $r$ , а из второго —  $\rho$ . Определить орбиту по трем наблюдениям невозможно (задача 4.12), если все три наблюдаемые положения тела лежат на эклиптике. Если определитель  $D$  мал, то возникающие ошибки могут свести на нет все вычисления. В таких случаях, если это возможно, следует определять орбиту по четырем наблюдениям.

#### 4.4.2. Метод Лапласа

Метод Лапласа относится к так называемым прямым методам определения орбит, использующим дифференциальное уравнение (1.1), а не его интегралы. Продифференцируем дважды уравнения (4.29) и добавим второе из соотношений (4.40):

$$\begin{aligned}
\ddot{\lambda}\rho + 2\dot{\lambda}\dot{\rho} + \lambda\ddot{\rho} &= (X - \lambda\rho)\varkappa^2 r^{-3} + \ddot{X}, \\
\ddot{\mu}\rho + 2\dot{\mu}\dot{\rho} + \mu\ddot{\rho} &= (Y - \mu\rho)\varkappa^2 r^{-3} + \ddot{Y}, \\
\ddot{\nu}\rho + 2\dot{\nu}\dot{\rho} + \nu\ddot{\rho} &= (Z - \nu\rho)\varkappa^2 r^{-3} + \ddot{Z}, \\
r^2 &= \rho^2 + 2C\rho + R^2.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Считая на некоторый момент времени наряду с  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  известными и их производные, первые три уравнения (4.44) приводим к виду первого уравнения Лагранжа (4.40). Существенная разница в том, что коэффициенты уравнения — известные величины в отличие от метода Гаусса, где при вычислении  $c_1$  и  $c_2$  мы вынуждены были ограничиться в разложениях только членами второго порядка. Вычислив  $\rho$  и  $r$ , из уравнений (4.44) получим  $\dot{\rho}$  и далее из уравнений (4.29)  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$ , что, как мы уже видели, равносильно знанию всех элементов орбиты.

Задача, таким образом, сводится к получению из наблюдений первых и вторых производных направляющих косинусов  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Эта задача относится к классу некорректных задач и не может быть решена без дополнительных условий. Однако если имеется большое число наблюдений, то можно получить производные с достаточной точностью. Преимущество прямых методов особенно заметно, если на короткой дуге выполняется множество наблюдений. К таким наблюдениям относятся, например, фотографические, когда по одной пластинке можно определить не только угловые координаты, но и дифференциальные параметры орбиты. Такой подход используется в методе параметров видимого движения (ПВД).

*Замечание.* Рассмотренные для гелиоцентрического движения методы применимы с минимальными модификациями к задаче определения орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ). Здесь роль  $\mathbf{r}$  играет геоцентрический вектор положения ИСЗ,  $\mathbf{R}$  — геоцентрический вектор положения наблюдателя,  $\boldsymbol{\rho}$  — топоцентрический вектор, соединяющий наблюдателя и ИСЗ.

## 4.5. Определение орбит экзопланет по лучевым скоростям

Планеты, обращающиеся вокруг звезд (не нашего Солнца), пока еще недоступны прямым наблюдениям. Для открытия этих новых

для нас небесных тел и определения их масс и орбитальных параметров используются различные астрономические явления: искривление траектории звезды на небесной сфере, изменение яркости звезды при прохождении планеты по ее диску, гравитационное микролинзирование, движение пылевой материи вокруг звезды и др. Но основным является доплеровское периодическое изменение лучевой скорости звезды.

С небесномеханической точки зрения определение орбиты внесолнечной планеты по лучевым скоростям тождественно с определением орбиты спектрально-двойной звезды. Однако есть и некоторые особенности. Измеряется скорость звезда–наблюдатель, в которую входит также скорость движения Земли. В случае двойных звезд лучевая скорость имеет порядок километра в секунду и выше, так что достаточно учесть движение Земли по орбите (с учетом эксцентricности орбиты Земли) и вращение Земли вокруг оси. В случае экзопланет, где точность измерения лучевой скорости — порядка метра в секунду, необходимо брать более точную модель движения Земли. Для иллюстрации укажем, что скорость движения Земли относительно барицентра системы Земля–Луна и скорость Солнца относительно барицентра системы Солнце–Юпитер составляет около 13 м/с.

Пусть все необходимые поправки учтены. Предполагаем, что вокруг звезды  $Q_0$  массой  $m_0$  обращается по эллиптической орбите одна планета  $Q$  массой  $m$ . Считаем известной лучевую скорость звезды относительно барицентра Солнечной системы  $S$  как функцию времени по доплеровским данным, а также массу звезды по ее спектру (Засов, Постнов, 2006) (заметим, что масса звезды в лучшем случае определяется с точностью до 8%). Введем систему координат  $\mathcal{O}$  с началом в  $S$ , осью  $z$ , проходящей через барицентр  $O$  системы звезда–планета, положение осей  $x, y$  безразлично. Элементы орбит будем относить к системе  $\mathcal{O}_1$  с началом в  $O$  и осями, параллельными осям системы  $\mathcal{O}$ . Плоскость  $x, y$  в системе  $\mathcal{O}_1$  называют в астрономии *картинной плоскостью*.

В настоящее время точность определения угловых элементов орбит внесолнечных планет составляет в лучшем случае доли градуса, тогда как собственные движения звезд — доли секунды дуги в год. Поэтому описанную систему координат можно считать инерциальной. Согласно задаче 1.32 измеренная лучевая скорость звезды представляется синусоидой в функции от аргумента широты  $s$



параметрами, зависящими от масс и элементов орбиты  $Q_0$  относительно  $O$ :

$$\dot{z} = v_0 + K(\cos u_0 + e \cos g_0). \quad (4.45)$$

Здесь  $v_0$  — лучевая скорость барицентра  $O$ ,

$$K = \sqrt{\frac{Gm^3}{a_0(1-e_0^2)} \frac{\sin i_0}{m_0 + m}}. \quad (4.46)$$

Переходя к элементам орбиты планеты относительно звезды

$$a_0 = \frac{m}{m_0 + m}a, \quad e_0 = e, \quad i_0 = i, \quad g_0 = g + \pi, \quad \Omega_0 = \Omega, \quad u_0 = u + \pi, \quad (4.47)$$

получаем окончательно

$$\dot{z} = w - K \cos u, \quad (4.48)$$

где

$$w = v_0 - Ke \cos g, \quad K = \frac{m \sin i}{\sqrt{m_0 + m}} \sqrt{\frac{G}{a(1-e^2)}}. \quad (4.49)$$

Доплеровская кривая не содержит информации о том, в прямом или обратном направлении обращается планета. Считаем для определенности  $0 < i \leq \pi/2$ . Значение  $i = 0$  исключается: в этом случае  $\dot{z} = \text{const}$  и планета не влияет на лучевую скорость звезды.

Период  $\dot{z}$  как функции от времени по третьему закону Кеплера равен

$$P = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_0 + m)}}. \quad (4.50)$$

Из наблюдаемой кривой лучевой скорости можно считать известной  $\dot{z}$  как функцию времени, и, следовательно, известными числа  $P$  и  $w = (\dot{z}_{\max} + \dot{z}_{\min})/2$ ,  $K = (\dot{z}_{\max} - \dot{z}_{\min})/2$ .

Масса и элементы орбиты подбираются так, чтобы теоретическая кривая (4.48) совпала с наблюдаемой (в пределах ошибок измерений, о чем дальше мы упоминать не будем). Массы планет значительно меньше масс звезд, поэтому в первом приближении можно заменить  $m_0 + m$  на  $m_0$  в формулах (4.49), (4.50) (в следующих приближениях можно подставить сюда оценку  $m$  из предыдущего приближения).

Прежде всего мы находим среднее движение и из (4.50) большую полуось:

$$n = \frac{2\pi}{P}, \quad a^3 = \frac{G(m_0 + m)P^2}{4\pi^2}. \quad (4.51)$$

Считаем далее известной функцию  $\cos u(t)$ . Ясно, что информация о положении узлов отсутствует, но связанные с эксцентricностью орбиты элементы оценить можно. При нулевом эксцентриситете наблюдаемая кривая представляет собой точную синусоиду.

В эллиптическом случае отметим на ней три последовательные точки  $\cos u(t_1) = 0$ ,  $\cos u(t_2) = 1$  и  $\cos u(t_3) = 0$ , считая  $u(t_1) = -\pi/2$ ,  $u(t_2) = 0$  и  $u(t_3) = \pi/2$ . Отмечая значения аномалий в эпохи  $t_k$  индексом  $k$ , получаем  $\theta_1 = -\pi/2 - g$ ,  $\theta_2 = -g$  и  $\theta_3 = \pi/2 - g$ . Согласно (1.29)

$$E_1 = -\frac{\pi}{2} - g + 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \cos g}{1 - \beta \sin g}, \quad E_2 = -g + 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin g}{1 + \beta \cos g},$$

$$E_3 = \frac{\pi}{2} - g - 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \cos g}{1 + \beta \sin g}.$$

Уравнение Кеплера дает три соотношения

$$M_k = E_k - e \sin E_k, \quad (4.52)$$

правые части которых зависят от двух неизвестных  $e, g$ . Разности средних аномалий можно считать известными, поскольку известно среднее движение (4.51). Таким образом, соотношения (4.52) влекут два уравнения относительно двух неизвестных, решение которых позволяет найти  $e, g$ , после чего  $M_1$  можно принять за среднюю аномалию эпохи  $t_1$ .

Определение произведения

$$m \sin i = K \sqrt{\frac{a(1 - e^2)(m_0 + m)}{G}} \quad (4.53)$$

завершает работу. Напомним, что  $m$  в правой части (4.53) считается равным нулю или оценке предыдущего приближения.

Более подробно вопрос рассматривается в (*Ferraz-Mello et al., 2005*).

Подведем итоги. По лучевым скоростям звезды можно определить  $a, e, g, M_0, m \sin i$ , но не  $\Omega$ . Последняя величина не представляет интереса. А вот невозможность раздельного определения наклона и массы досадна. Ее можно оценить лишь статистически, считая известным распределение наклонов, а также в отдельных редких случаях при наличии дополнительной информации, — например, когда наблюдаются прохождения планеты по диску звезды и наклон близок к  $\pi/2$ . Вероятность обнаружения таких планет — порядка отношения размера звезды к размеру орбиты планеты.

## Задачи к главе 4

**Задача 4.1.** Вычислить баллистическую траекторию с наименьшей стартовой скоростью. Угловое расстояние между точками запуска и цели  $2f \leq \pi$ .

*Ответ:*

$$a = R_{\oplus} \frac{\cos^2 f}{2(1 - \sin f)}, \quad e = \frac{1 - \sin f}{\cos f}, \quad V = \kappa \sqrt{\frac{2 \sin f (1 - \sin f)}{R_{\oplus} \cos^2 f}}.$$

**Задача 4.2.** Вычислить  $a$  и  $e$  орбиты перелета по полуэллипсу Гомана–Цандера, если орбиты планет не круговые, но коапсидальные.

**Задача 4.3.** Показать, что  $1 - p/a$  имеет второй порядок малости по  $e$ , а  $pr^{-1} - 1$  — первый.

**Задача 4.4.** Вывести формулы (4.15).

**Задача 4.5.** Раскрыть неопределенность в формуле (4.21), вычислив  $\lim_{x \rightarrow 0} X(x)$ .

**Задача 4.6.** Доказать, что функция  $X$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.25).

**Задача 4.7.** Запишем уравнение (4.23) при постоянной правой части в виде

$$x^3 - x^2 - a = 0, \tag{4.54}$$

где  $a > 0$ . Показать, что (4.54) имеет ровно один корень, больший единицы; значение корня растет вместе с  $a$ .

**Задача 4.8.** Показать, что сдвиг  $x = y + 1/3$  переводит (4.54) в уравнение

$$y^3 - \frac{1}{3}y - 2b = 0 \quad \text{при } b = \frac{a}{2} + \frac{1}{27}. \quad (4.55)$$

**Задача 4.9.** Найти решение (4.54) по формуле Кардано.

*Ответ:*

$$x = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{b + \sqrt{c}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{c}},$$

где  $c = b^2 - 1/27^2 = a/27 + a^2/4$ .

**Задача 4.10.** Показать, что уравнения (4.22) справедливы в случае произвольного конического сечения; для эллипса  $x > 0$ , для гиперболы  $x < 0$ , для параболы  $x = 0$ .

**Задача 4.11.** Показать, что определенная формулой (4.38) величина  $D$  обращается в нуль, если и только если три наблюдаемых положения небесного тела лежат на большом круге.

**Задача 4.12.** Показать, что определенные формулами (4.38), (4.39) величины  $D, U, U_1, U_2$  одновременно обращаются в нуль, если все три наблюдаемых положения небесного тела лежат на эклиптике.

**Задача 4.13.** Пусть все ориентации вектора площадей  $\mathbf{s}$  орбиты внесолнечной планеты равновероятны. Отождествляя  $\mathbf{s}$  и  $-\mathbf{s}$ , найти плотность вероятности наклонов при  $0 \leq i \leq \pi/2$ .

*Ответ:*

$$f(i) = \sin i.$$

**Задача 4.14.** В условиях задачи 4.13 найти математическое ожидание функции  $\sin i$ .

*Ответ:*

$$\mathbf{E} \sin i = \pi/4.$$

Таким образом, если распределения  $m$  и  $i$  независимы, то в условиях задачи 4.13

$$\mathbf{E}(m \sin i) = (\pi/4)\mathbf{E}m.$$

Масса планеты  $m$  в среднем равна измеряемой величине  $m \sin i$ , помноженной на  $4/\pi = 1.2732395$ .

## Литература

*Абалакин и др., 1976.* — Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука.

*Аксенов, 1977.* — Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука.

*Аксенов, 1986.* — Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М.: Наука.

*Балк и др., 1972.* — Балк М.Б., Дёмин В.Г., Куницын А.Л. Сборник задач по небесной механике и космодинамике. М.: Наука.

*Бейтмен, Эрдейи, 1973.* — Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука.

*Беттин, 1966.* — Беттин Р. Наведение в космосе. М.: Машиностроение.

*Брауэр, Клеменс, 1964.* — Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М.: Мир.

*Ватсон, 1949.* — Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. М.: ИЛ.

*Градштейн, Рыжик, 1971.* — Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука.

*Грибанов, 1983.* — Грибанов А.В. Некоторые свойства коэффициентов Ганзена // Труды Астрон. обсерв. Ленингр. ун-та. Т. 38. С. 165-181.

*Грэхем, Кнут, Паташник, 1998.* — Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир.

*Гурвиц, 1933.* — Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. Л.; М.: ГТТИ.

*Дубошин, 1975.* — Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука.

*Засов, Постнов, 2006.* — Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика. М.: Век 2.

*Идельсон, 1975.* — Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. М.: Наука.

*Корн, 1984.* — Корн Т., Корн Г. Справочник по математике. М.: Наука.

*Кузьмина, 2004.* — Кузьмина Р.П. Математические модели небесной механики. М.: УРСС.

*Питъев, Титов, Холшевников, 2002.* — Питъев Н.П., Титов В.Б., Холшевников К.В. Фигуры равновесия небесных тел. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та.

*Поляхова, 1974.* — Поляхова Е.Н. Сборник задач по динамике точки в поле центральных сил. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та.

*Соболев, 1999.* — Соболев В.В. (ред.) История астрономии в России и СССР. М.: Янус-К.

*Субботин, 1947.* — Субботин М.Ф. Курс небесной механики, Т. 1. Л.; М.: ГТТИ.

*Субботин, 1968.* — Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука.

*Уинтнер, 1967.* — Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М.: Наука.

*Холшевников, 1985.* — Холшевников К.В. Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та.

*Холшевников, 1988.* — Холшевников К.В. Свойства коэффициентов основных рядов кеплеровского движения // Кинематика и физика небесных тел. Т. 4, N 6. С. 79-83.

*Холшевников, 1994.* — Холшевников К.В. На рубежах познания Вселенной (Историко-астрономические исследования. Т. 24. М.: Янус). С. 181-191.

*Холшевников, 2006.* — Холшевников К.В. Пространства кеплеровских орбит // Труды 35-й международной студ. научн. конф. „Физика космоса“, 30 января – 3 февраля 2006 г. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. С. 186-197.

*Холшевников, Питъев, Титов, 2005.* — Холшевников К.В., Питъев Н.П., Титов В.Б. Притяжение небесных тел. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т.

*Шарлье, 1966.* — Шарлье К. Небесная механика. М.: Наука.

*Штифель, Шейфеле, 1975.* — Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука.

*Янке, Эмде, Лёш, 1964.* — Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука.

*Baluyev, Kholshchevnikov, 2005.* — Baluyev R.V., Kholshchevnikov K.V. Distance between Two Arbitrary Unperturbed Orbits // Celest. Mech. Dyn. Astr. Vol. 91, No 3-4. P. 287-300.

*Battin, 1999.* — Battin R.H. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. Revised Edition. AIAA educ. ser. Reston, Virginia.

*Ferraz-Mello et al, 2005.* — Ferraz-Mello S., Michtchenko T.A., Beaugé C., Callegari N. Extrasolar Planetary Systems (lectures) // Lecture Notes in Physics. Vol. 683. P. 219-271.

*Györgyi, 1968.* — Györgyi G. Kepler's Equation, Fock Variables, Baccry's Generators and Dirac Brackets // Nuovo Cimento, Vol. 53a, No 3. P. 717-736.

*Kholshchevnikov, Vassiliev, 1999a.* — Kholshchevnikov K.V., Vassiliev N.N. On the Linking Coefficient of Two Keplerian Elliptic Orbits // Celest. Mech. Dyn. Astr. Vol. 75, No 1. P. 67-74.

*Kholshevnikov, Vassiliev, 1999b.* — Kholshevnikov K.V., Vassiliev N.N. On the Distance Function between Two Keplerian Elliptic Orbits // Celest. Mech. Dyn. Astr. Vol. 75, No 2. P. 75-83.

*Moser, 1970.* — Moser J. Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold // Commun. Pure Appl. Math. Vol. 23, No 4. P. 609-636.

*Murray, Dermott, 1999.* — Murray C.D., Dermott S.F. Solar System Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press.



## Именной указатель

Бéссель Ф.В. (Bessel F.W.) 6, 8

Беттин Р. (Battin R.) 8

Бонд В. (Bond V.) 8

Гáмилътон В.А. (Hamilton W.A.) 8

Кéплер И. (Kepler I.) 7, 13, 22

Лагранже Ж.Л. (Lagrange J.L.) 8

Лаплас П.С. (Laplace P.S.) 8

Леви-Чивита Т. (Levi-Civita T.) 8

Лежандр А.М. (Legendre A.M.) 7

Ли С. (Lie S.) 7

Мўльтон Ф.Р. (Moulton F.R.) 8

Нью́тон И. (Newton I.) 5, 7

Субботин М.Ф. 7

Фурье Ж.Б.Ж. (Fourier J.B.J.) 6, 8, 126

Шарльé К.Л. (Charlier C.L.) 8

Эйлер Л. (Euler L.) 5, 7, 8, 126

## Предметный указатель

- Аномалии 21  
аномалия истинная 7, 8  
— сопряженная 7, 30  
— средняя 7, 24  
— эксцентрическая 7, 22  
апоцентр 19  
аргументы 21
- Близпараболическое движение 31
- Гравитационный потенциал 5, 7, 11
- Движения в пространстве скоростей 80  
долготы 21
- Задача двух тел 5, 9, 11  
интегралы импульса и центра масс 12  
конфигурационное пространство 12  
пространство скоростей 12  
уравнение траектории 13  
уравнения движения 11
- задача одного притягивающего центра 7, 9  
конфигурационное пространство 10  
пространство скоростей 10  
уравнение движения 9  
фазовое пространство 10  
закон всемирного тяготения 5
- Интеграл Лапласа 13, 56–58, 80, 81  
— площадей 13, 18, 32, 43, 44, 56, 58, 70, 81, 155  
— энергии 13, 18, 43, 120, 124, 154, 155
- Картинная плоскость 168  
коэффициенты Лапласа 113
- Линия апсид 19  
— узлов 15
- Метод Лапласа 166  
многочлены Ломмеля 110
- Орбита 53  
орбитальная система отсчета  $\mathcal{O}_3$  20
- Параметр орбиты 19  
переменная Леви-Чивита 139  
перицентр 19, 21  
предел Лапласа 139, 141, 142  
пространство орбит 7, 53  
 $\mathcal{H}$  58  
открытость 60  
полнота 61  
связность 60  
 $\mathcal{H}(b)$  55  
взаимное расположение пары орбит 62  
зацепление 69  
пересечение 63

- расстояние 75
- типы орбит 62
- прямолинейное движение 34
  - орбита прямолинейно-гиперболическая 35
  - прямолинейно-параболическая 35
  - прямолинейно-эллиптическая 34
- Ряд Ли 7, 88, 89, 143
  - Пуассона 111, 123, 141
  - Фурье 6, 8, 104, 105, 114, 119, 120, 126, 128, 129, 140
    - средние значения 121
  - Фурье для простых функций от эксцентрической аномалии 115
  - по степеням времени 90, 131
  - по степеням эксцентриситета 93, 136
- Связь между эксцентрической и истинной аномалиями 22
- сдвиг по траектории 40, 42, 79
- симметрия 79
  - $O(3)$  79
  - масштаба 79
- среднее движение 24
- сходимость рядов 131
- Траектории
  - гипербола 20
  - парабола 20
  - прямолинейные 14
  - эллипс 20
- Узел орбиты
  - восходящий 15
  - нисходящий 15
- уравнение Кеплера 24, 27, 87, 95, 97, 128, 131, 138, 150, 156, 159, 170
  - решение 25, 94, 114
  - — для параболы 33
- Функции  $F$  и  $G$  91
  - Бесселя 6, 104–109, 111, 114, 117
    - производящая функция 105
    - свойства 105
  - Пуассона 111–113, 123
  - Леви-Чивита, 99
- Элементы орбиты 29
  - аргумент перицентра 21
  - большая полуось 20
  - долгота восходящего узла 15
  - наклон 15
  - средняя аномалия эпохи 29
  - эксцентриситет 19

Учебное издание

*Константин Владиславович Холшевников,  
Владимир Борисович Титов*

## ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

*Учебное пособие*

Зав. редакцией Г. И. Чередниченко  
Обложка А. В. Калининой

Подписано к печати с оригинал-макета 26.04.2007.  
Печать офсетная. Ф-т 60×84/16. Усл. печ. л. 10,46. Уч.-изд. л. 10,71.  
Тираж 300 экз. Заказ N .

Редакция оперативной подготовки изданий СПбГУ.  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Типография Издательства СПбГУ.  
199061, Санкт-Петербург, Средний пр., 41.