ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 5

Вычислите время t_{KH}, за которое Солнце излучит всю свою внутреннюю тепловую энергию, если продолжит излучать с той же светимостью, что и сейчас – тепловое время (оно же время Кельвина-Гельмгольца).

Считайте, что Солнце это самогравитирующий газовый шар с политропным уравнением состояния $P = K\rho^{\gamma}$, где $K = const$, а $\gamma = 5/3$ (что соответствует одноатомному идеальному газу). Формулу для t_{KH} необходимо вывести (подсказка: воспользуйтесь уравнением гидростатического равновесия).

Для расчёта Вам понадобятся:

- Масса Солнца $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ г
- Радиус Солнца $R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10}$ см
- Светимость Солнца $L_{\odot} = 4 \cdot 10^{33}$ эрг/с

РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ 5

Запишем уравнение гидростатического равновесия для сферически-симметричной звезды в следующем виде:

$$-\frac{Gm(r)}{r} = \frac{r}{\rho}\frac{dP}{dr}$$

и проинтегрируем его по массе. То есть, используем переменную m так, что $m(0) = 0$ в центре звезды и $m(R) = M$ на её поверхности. Учитывая, что $dm = 4\pi r^2\rho \cdot dr$, а давление на поверхности $P(R) = 0$, получим интеграл от правой части в виде:

$$\int_0^M \frac{r}{\rho}\frac{dP}{dr}\,dm = \int_0^R \frac{r}{p}\frac{dP}{dr}\,\rho\, 4\pi r^2 dr = 4\pi P r^3 \Big|_0^R - 3\int_0^R P\, 4\pi r^2 dr = -3\int_V P\,dV\,.$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям. В последнем выражении интегрирование ведется по всему объёму звезды.

РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ 5

При этом, интеграл от левой части уравнения представляет собой ни что иное, как полную гравитационную энергию системы W. То есть получается, что

$$W = -3\int_V P dV\,.$$

Это – теорема вириала для самогравитирующей системы в общем случае. При политропном уравнении состояния $P = K\rho^\gamma$, выражение справа здесь пропорционально полной внутренней энергии системы U. Действительно, так как $du = -Pdv$ (где u и v – удельные величины, на единицу массы), то:

$$du = -K\rho^\gamma d\left(\frac{1}{\rho}\right) = K\rho^{\gamma-2}d\rho \Rightarrow u = K\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{K\rho^\gamma}{\rho(\gamma-1)} \Rightarrow P = (\gamma-1)\rho u$$

и

$$W = -3(\gamma-1)\int_V u\cdot\rho dV = -3(\gamma-1)\int_0^M u\cdot dm \Rightarrow W = -3(\gamma-1)U$$

Это – важный частный случай теоремы вириала для политропного шара. Она связывает полную внутреннюю тепловую энергию равновесной системы и её гравитационную энергию.

РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ 5

Посчитаем теперь гравитационную энергию сферически-симметричной системы. В общем случае:

$$W = -\int_0^M \frac{Gm(r)dm}{r} = -\frac{1}{2}\int_c^s \frac{G}{r}d(m^2) = -\frac{1}{2}\left[\frac{Gm^2}{r}\Big|_c^s + \int_c^s \frac{Gm^2}{r^2}dr\right] = -\frac{GM^2}{2R} - \frac{1}{2}\int_c^s G\left(\frac{m}{r}\right)^2 dr\,.$$

Здесь и далее пределы интегрирования обозначают центр звезды ($c = center$) и её поверхность ($s = surface$). При этом мы учли, что

$$\frac{Gm^2}{r}\Big|_c^s = \frac{G}{r}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \bar{\rho}^2 r^6\Big|_0^R = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 GR^5\bar{\rho}^2 = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 GR^2\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 = \frac{GM^2}{R}\,.$$

РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ 5

Для политропного уравнения состояния:

$$d\left(\frac{P}{\rho}\right) = (\gamma - 1)K\rho^{\gamma-2}d\rho = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\gamma K\rho^{\gamma-1}d\rho}{\rho} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{dP}{\rho},$$

а значит, из уравнения равновесия

$$-\frac{dP}{\rho} = \frac{Gm}{r^2}dr \Rightarrow G\left(\frac{m}{r}\right)^2 dr = -m\frac{dP}{\rho} = -m\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,d\left(\frac{P}{\rho}\right).$$

Тогда

$$W = -\frac{GM^2}{2R} - \frac{1}{2}\int_c^s G\left(\frac{m}{r}\right)^2 dr = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{\gamma}{2(\gamma - 1)}\int_c^s m\, d\left(\frac{P}{\rho}\right).$$

РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ 5

Интегрируя последнее выражение по частям, окончательно получаем:

$$W = -\frac{GM^2}{2R} + \left[\frac{\gamma}{2(\gamma-1)} m \frac{P}{\rho}\Big|_c^s - \frac{\gamma}{2(\gamma-1)} \int_c^s P \frac{dm}{\rho}\right] = -\frac{GM^2}{2R} - \frac{\gamma}{2(\gamma-1)} \int_c^s P dV\,.$$

Но из теоремы вириала для политропного шара $\int PdV = (\gamma-1)U = -W/3$. Значит

$$W = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{\gamma}{6(\gamma-1)} W,$$

откуда окончательно получаем выражение для гравитационной энергии:

$$W = -\frac{\gamma-1}{\frac{5}{3}\gamma-2} \frac{GM^2}{R}$$

РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ 5

А значит внутренняя тепловая энергия равновесного политропного шара массы M и радиуса R равна:

$$U = -\frac{W}{3(\gamma - 1)} = \frac{1}{5\gamma - 6}\frac{GM^2}{R}.$$

Полная энергия такой системы:

$$E_{tot} = W + U = -\frac{3\gamma - 4}{5\gamma - 6}\frac{GM^2}{R}$$

При заданном $\gamma = 5/3$ получаем соответственно:

$$U = \frac{3}{7}\frac{GM^2}{R} \text{ и } E_{tot} = -\frac{3}{7}\frac{GM^2}{R}$$

(то есть $U = -W/2$ – как в теореме вириала из механики для кулоновского потенциала.)

РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ 5

Окончательно, для параметров Солнца время Кельвина-Гельмгольца равно:

$$t_{\text{КН}} = \frac{3}{7}\frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}L_{\odot}} \approx 13\ \text{млн. лет}$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 6

Для того, чтобы обеспечить светимость Солнца, в его недрах должно происходить $\dot{N} \sim 10^{38}$ реакций образования ядер гелия каждую секунду. Считая, что эти реакции идут в области радиусом $R_{\mathrm{nuc}} \sim 0.1 R_{\odot}$ и что вещество в недрах Солнца находится в равновесии с излучением, оцените длину пути, который приходится пройти фотону*, рождённому в термоядерных реакциях, прежде чем он покинет пределы Солнца. Ответ выразите в радиусах Солнца.

* Фотон, разумеется, при этом испытывает множественные рассеяния, поглощения и переизлучения. Поэтому, технически, на выходе из Солнца появляется уже не «тот самый» фотон.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ 6

Из предыдущих оценок мы знаем, что температура в недрах Солнца равна, примерно, $T \sim 10^7$ К. Её же, кстати, можно оценить и из теоремы вириала как $T \sim \mu G M_\odot / 3\mathcal{R} R_\odot$ (где $\mathcal{R}$ -- универсальная газовая постоянная, а $\mu \sim 0.83$ для хим. состава солнечного ядра).

Если вещество находится в равновесии с излучением, значит спектр фотонов в ядре Солнца – чернотельный. Можно оценить их плотность $n \approx 20 \left(\frac{T}{1\ K}\right)^3$ см$^{-3}$. А полное число фотонов в области термоядерных реакций, соответственно, $N \sim n R_{\text{nuc}}^3$.

Поскольку при образовании одного ядра гелия возникает 2 гамма-кванта, то фотон должен проводить в недрах Солнца время порядка $t_{\text{out}} = \frac{N}{2\dot{N}} = \frac{20 T^3 R_{\text{nuc}}^3}{2\dot{N}} \approx 10^6$ лет. Пренебрегая временем, которое будет тратиться на поглощение и переизлучение, получим пройденное «фотоном» расстояние:

$$l = c t_{\text{out}} \approx 10^{23}\ \text{см} \approx 10^{13}\ R_\odot \approx 100\ \text{кпк}$$