

# ЛЕКЦИЯ 3: ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ВВЕДЕНИЕ В АСТРОФИЗИКУ. ВШЭ 2022/2023. БАКАЛАВРЫ, 4-Й МОДУЛЬ.

АНТОН БИРЮКОВ (АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ МГУ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА И ВШЭ), К.Ф.-М.Н

# НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

- **Небесная механика** – раздел классической астрономии, изучающий эволюцию систем многих тел в поле взаимного тяготения. Как в рамках ньютоновского приближения, так и в рамках ОТО.
- Ньютоновский потенциал точечной массы:  $\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}$ . А релятивистские (пост-ньютоновские) поправки в первом приближении пропорциональны  $\left|\frac{\varphi}{c^2}\right|$ .

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \left|\frac{\varphi}{c^2}\right| \approx 2 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{-1}$$

$$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$$

$$R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10} \text{ см} \approx 109 R_{\oplus}$$

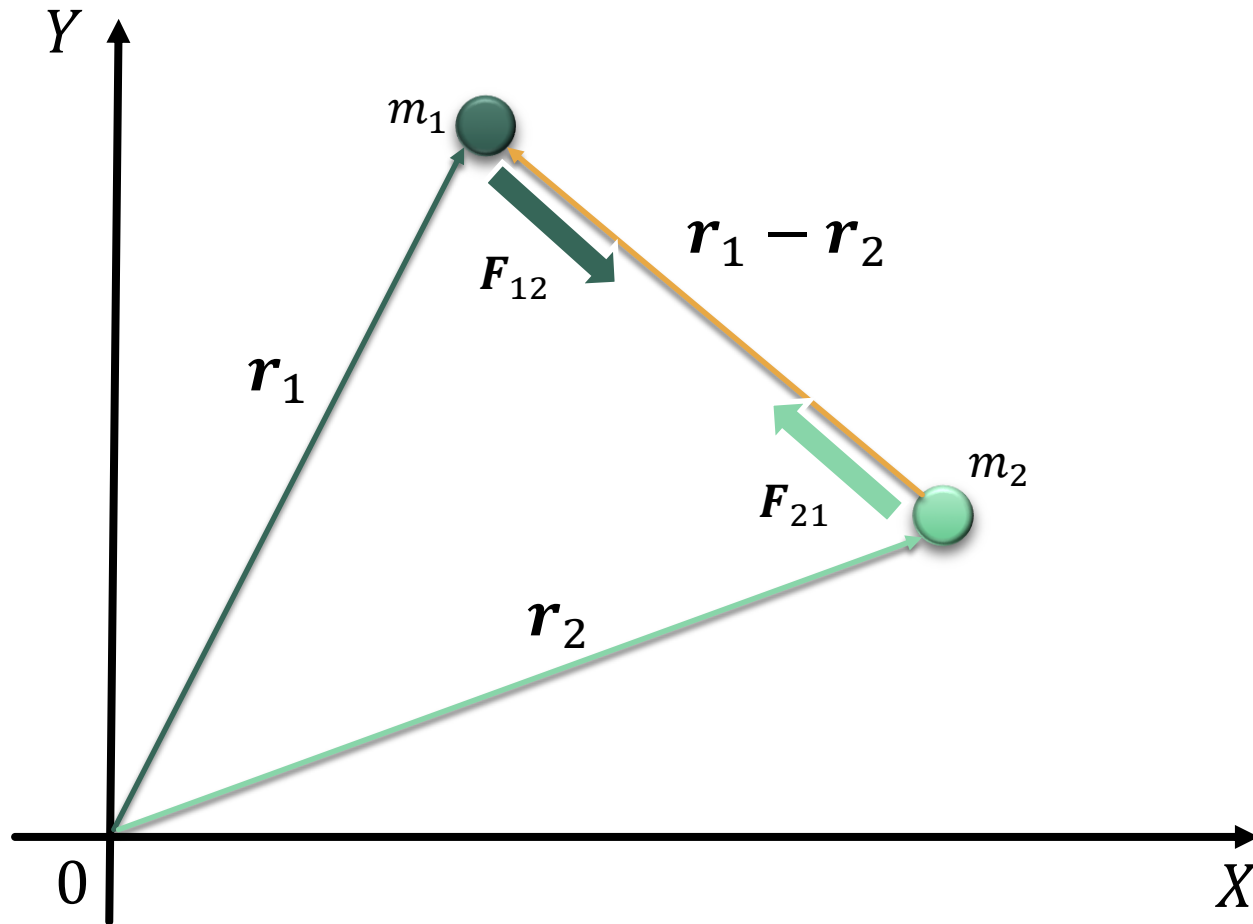
$$G = 6.67430(15) \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ с}^{-2}$$

(CODATA 2018)

Объект	$\varphi/c^2$
Земля	$6 \cdot 10^{-10}$
Солнце	$2 \cdot 10^{-8}$
Белый карлик	$7 \cdot 10^{-6}$
Вся наша Галактика	$10^{-9}$
Нейтронная звезда	0.2
Чёрная дыра	0.5

} ОТО

# ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ



-- классическая задача о движении двух точечных масс во взаимном потенциале.

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}$$

$$\mathbf{r}_1(t=0) = \mathbf{r}_{10}$$

$$\mathbf{r}_2(t=0) = \mathbf{r}_{20}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1(t=0) = \mathbf{v}_{10}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2(t=0) = \mathbf{v}_{20}$$

# ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ

- Сложим уравнения движения обеих масс:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0$$

– полный импульс системы сохраняется. Значит,  $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}t + \mathbf{B}$  и радиус-вектор центра масс системы движется равномерно и прямолинейно:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \mathbf{r}_1(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \mathbf{r}_2(t) = \frac{\mathbf{A}t + \mathbf{B}}{m_1 + m_2}$$

- В итоге, с центром масс можно связать инерциальную систему отсчёта. Лагранжиан пары масс в ней имеет стандартный вид. Положим  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ , тогда

$$\mathcal{L}_{\text{bary}} = \frac{m_1 v_{1,\text{bary}}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2,\text{bary}}^2}{2} + \underbrace{\frac{Gm_1 m_2}{r}}$$

# ПРИВЕДЁННАЯ МАССА

➤ Скорость точки  $m_1$  относительно центра масс (и аналогично для  $m_2$ ):

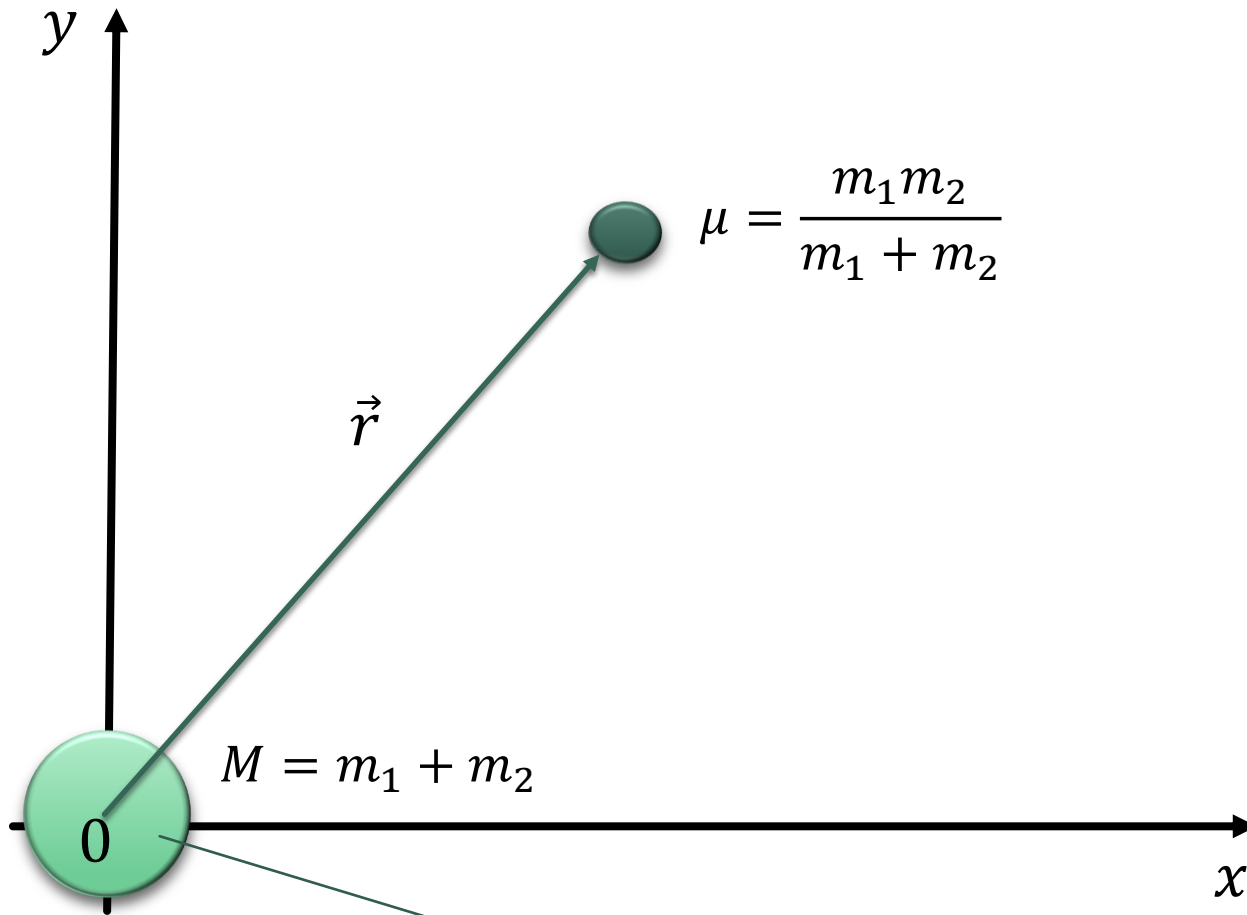
$$\mathbf{v}_{1,\text{bary}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underbrace{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}_{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}$$

Тогда лагранжиан можно выразить через относительную скорость двух масс  $\mathbf{v}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} \left( \frac{m_2}{M} \right)^2 v^2 + \frac{m_2}{2} \left( \frac{m_1}{M} \right)^2 v^2 + \frac{Gm_1m_2}{r} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{GM\mu}{r},$$

где  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  -- **приведённая масса** системы, а  $M = m_1 + m_2$  -- её полная масса.

# ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЗАДАЧА И СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ



- Полная энергия системы сохраняется:

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - G \frac{M\mu}{r} = \mu \cdot h = \text{const}$$

Часто используют **постоянную энергии** (или **постоянную живой силы**):

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = \text{const}$$

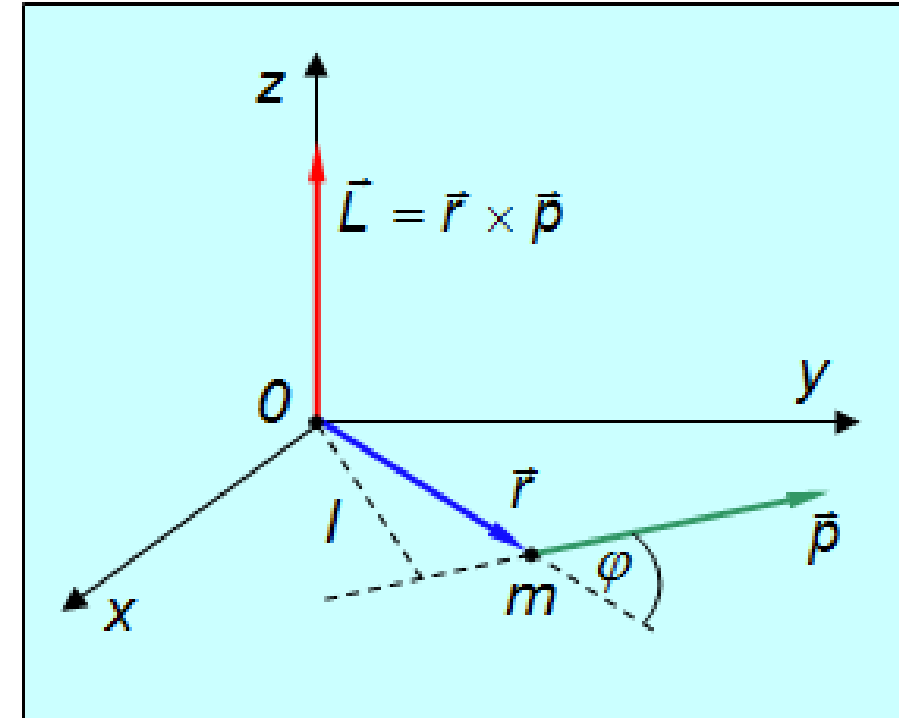
# СОХРАНЕНИЕ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

➤  $\mathbf{L} = \mu \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$  -- полный момент импульса системы.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mu \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \underbrace{\mu (\mathbf{v} \times \mathbf{v})}_0 + \underbrace{\mu (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})}_0 = 0$$

ускорение  
↓

– два тела всегда остаются в одной и той же плоскости, задаваемой направлением вектора  $\mathbf{L}$

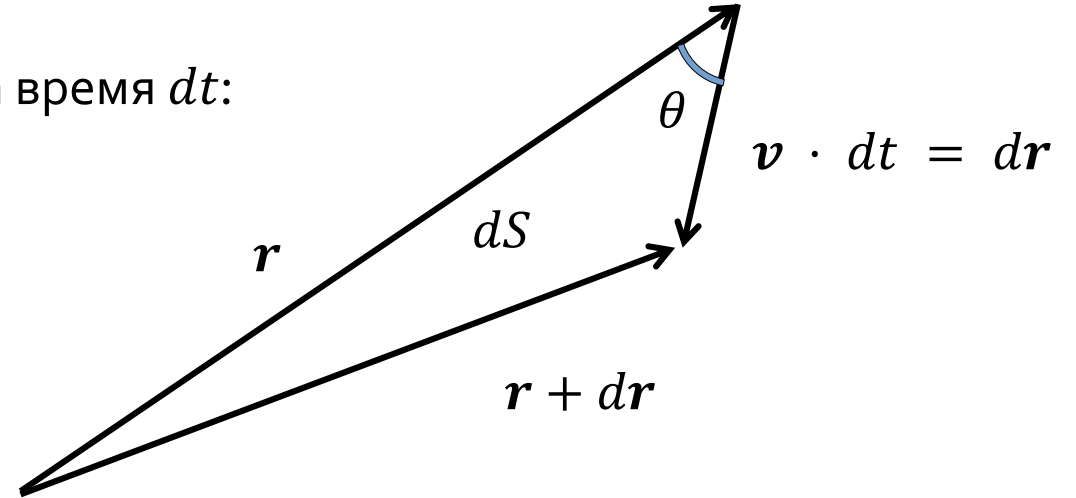


## ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ: 2-Й ЗАКОН КЕПЛЕРА

- Площадь, которую заметает радиус-вектор точки за время  $dt$ :

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot (v \cdot dt) \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} c \cdot dt$$

$$\frac{|L|}{\mu} = c = \text{const}$$



- Величина  $c$  в задаче двух тел называется **интегралом площадей**.
- Радиус-вектор, соединяющий материальные точки в задаче двух тел, за равные промежутки времени заметает равные площади. Это 2-й закон Кеплера для планетных орбит.

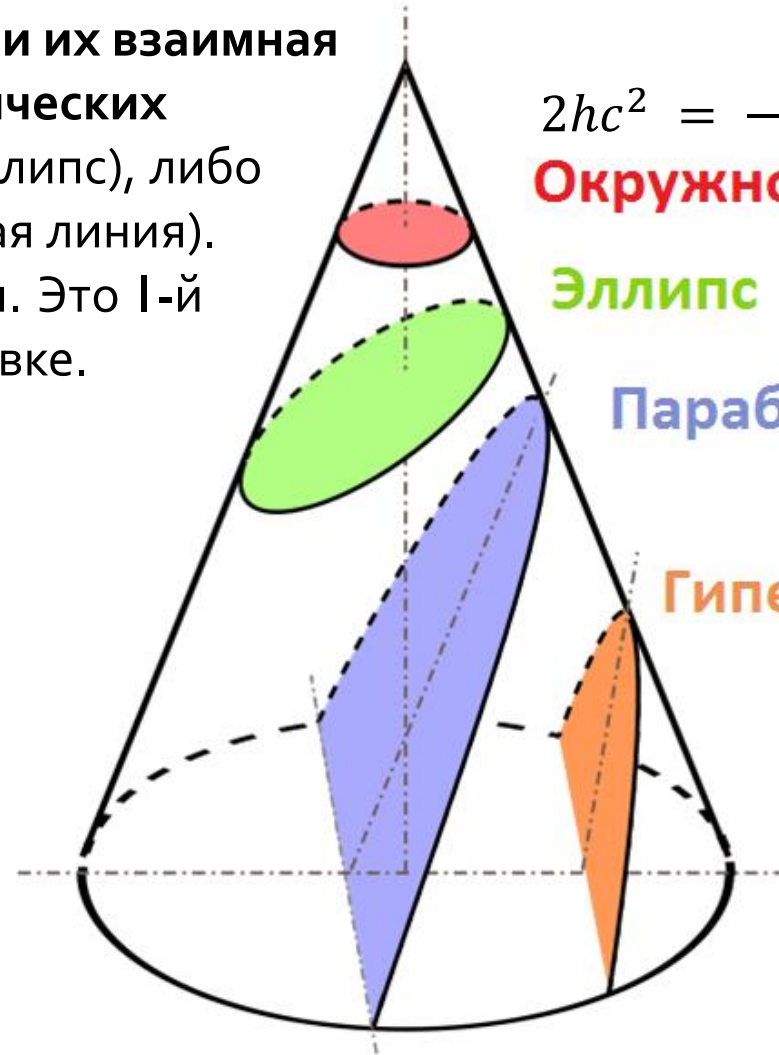


# КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ: I-Й ЗАКОН КЕПЛЕРА

- Две массы движутся в одной плоскости, и их взаимная орбита представляет собой одно из конических сечений. Либо замкнутое (окружность, эллипс), либо разомкнутое (парабола, гипербола, прямая линия). Форму орбиты задают начальные условия. Это I-й закон Кеплера в современной формулировке.

$$\begin{cases} h = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} \\ c = r_0 \cdot v_0 \cdot \sin\theta_0 \end{cases}$$

(начальные условия)



$$2hc^2 = -(GM)^2 < 0$$

**Окружность**

**Эллипс**  $-(GM)^2 \leq 2hc^2 \leq 0$

**Парабола**  $h = 0$

**Гипербола**  $h > 0$

# ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ

В полярных координатах:  $r(u) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos u}$

$a, b$  – большая и малая полуоси

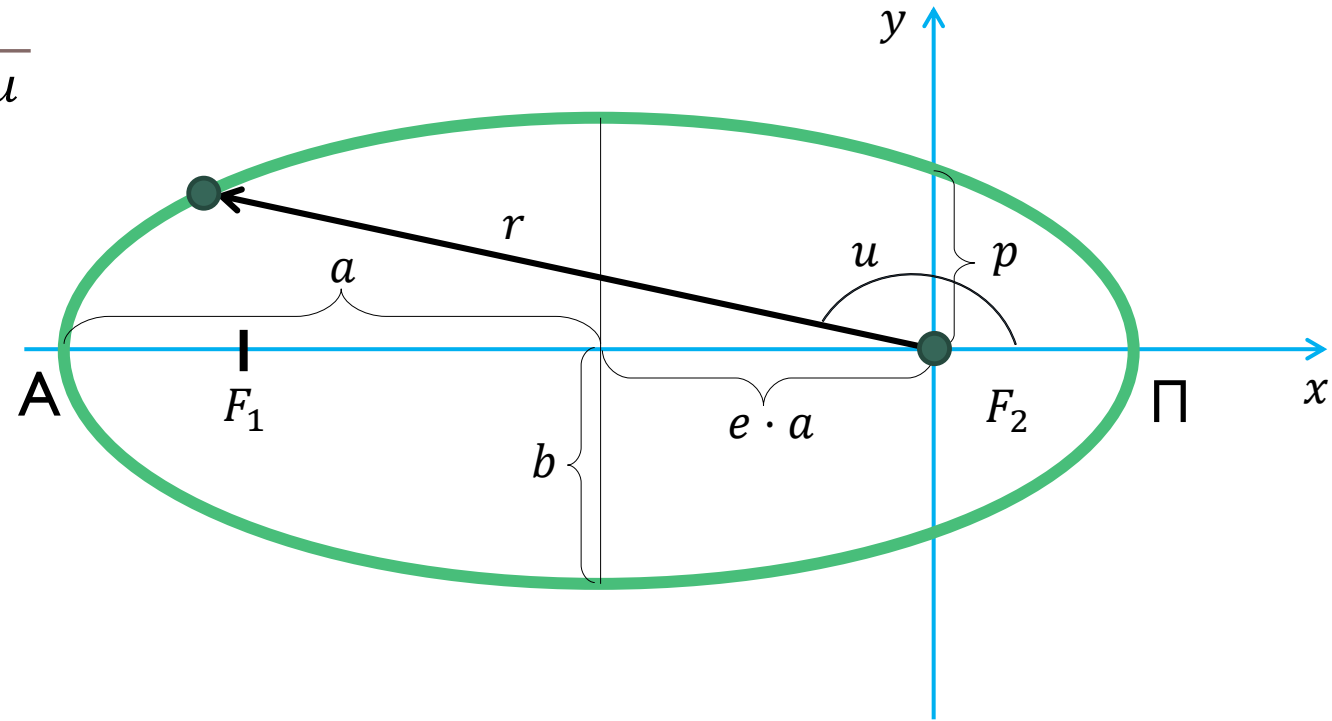
$u$  – истинная аномалия

$e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  -- эксцентриситет

$p = b^2/a = a(1 - e^2)$  – фокальный параметр

**А** – апоцентр (самая дальняя точка орбиты)

**П** – перицентр (самая ближняя)

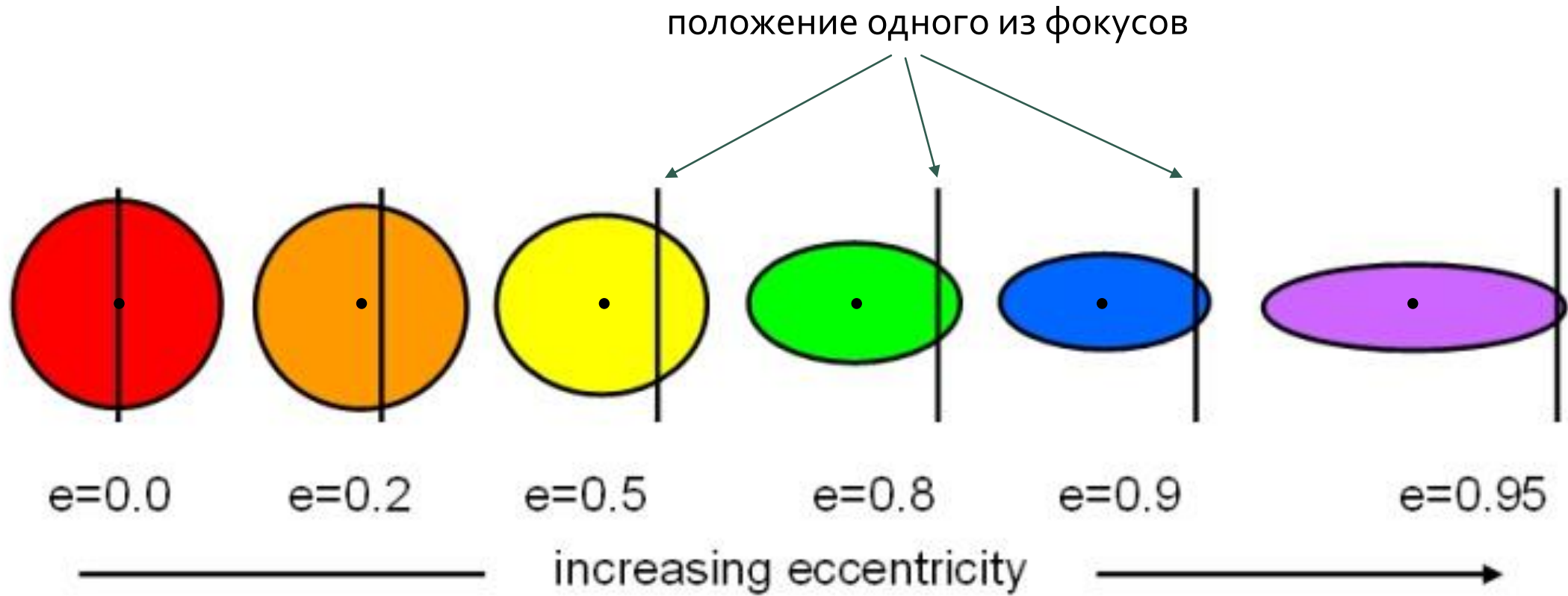


$$e = \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{(GM)^2}}$$

Окружность	$e = 0$
Эллипс	$0 < e < 1$
Парабола	$e = 1$
Гипербола	$e > 1$

$$a(1 - e^2) = \frac{c^2}{GM}$$

# ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ



## 3-Й ЗАКОН КЕПЛЕРА

Из закона площадей (2-го закона Кеплера) следует очень важное в астрофизике соотношение. Вычислим площадь эллиптической орбиты:

$$S = \pi ab = \pi a \cdot a\sqrt{1 - e^2}$$

Если  $T$  – это орбитальный период, то  $S/T = c/2$  (по 2-му закону Кеплера). В то же время с параметрами орбиты постоянная площадей связана как

$c^2 = GMp = G(m_1 + m_2) \cdot a(1 - e^2)$ , значит  $S^2/P^2 = \pi^2 a^4(1 - e^2)/P^2 = \frac{1}{4} G(m_1 + m_2) \cdot a(1 - e^2)$ , откуда окончательно получаем:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

**Квадрат орбитального периода пропорционален кубу большей полуоси взаимной орбиты.**

# КЕПЛЕРОВЫ ПАРАМЕТРЫ ОРБИТЫ

- I. Большая полуось  $a$
- II. Эксцентриситет  $e$
- III. Долгота восходящего узла  $\Omega$
- IV. Аргумент перигентра  $\omega$
- V. Наклонение  $i$
- VI. Истинная аномалия  $\nu$  или средняя аномалия  $M$
- VII. Начальная эпоха  $t_0$   
(прохождения перигентра).

Малые отклонения от замкнутой орбитой можно описать переменными параметрами.

Всего в задаче двух тел **7** сохраняющихся независимых величин: полный импульс  $\mathbf{p}_{tot}$ , полный момент импульса  $\mathbf{L}$ , полная энергия  $E$

ЛЕКЦИЯ 3: ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ



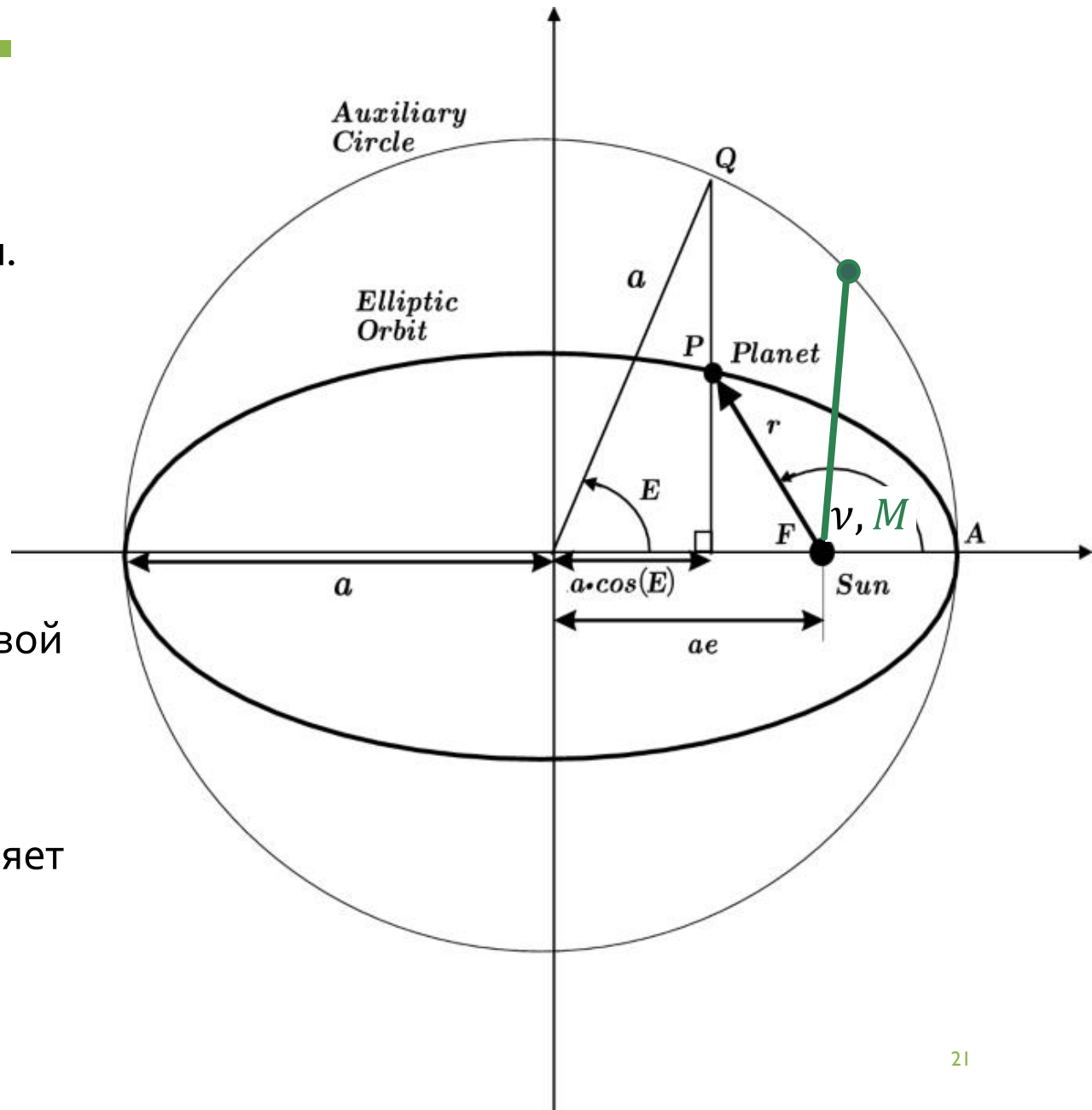
# УРАВНЕНИЕ КЕПЛЕРА

$r(E) = a(1 - e \cos E)$  -- эксцентрическая аномалия.

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad \text{-- связь эксцентрической и истинной аномалий.}$$

Средняя аномалия  $M = 2\pi(t - t_0)/P$  -- описывает равномерное движение фиктивной точки по круговой орбите. Его удобно считать.

$E - e \sin E = M$  -- уравнение Кеплера. Оно Позволяет сравнительно просто посчитать  $E$

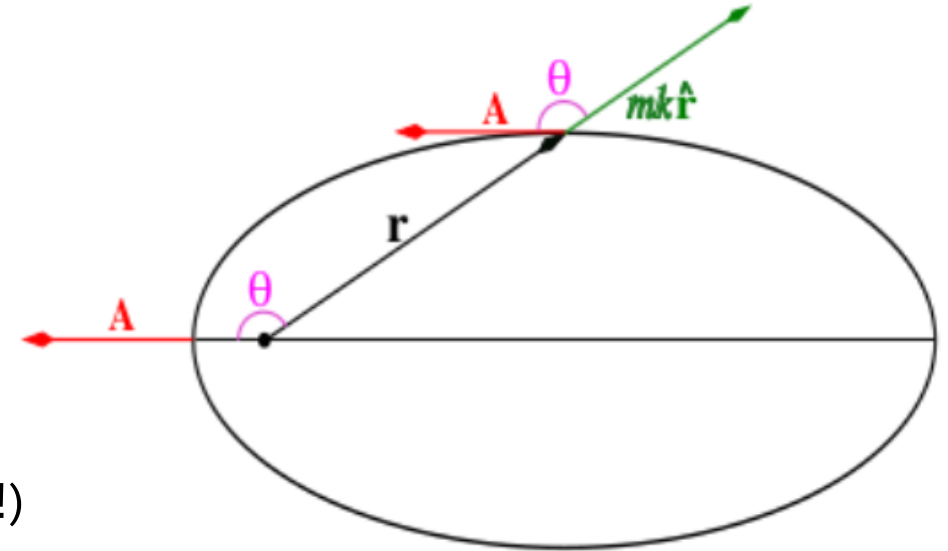


# ВЕКТОР ЛАПЛАСА-РУНГЕ-ЛЕНЦА

- Специфический интеграл движения для задачи двух тел.
- В общем, является следствием того, что движение происходит в сферически-симметричном потенциале.
- Если конкретно  $\varphi \propto 1/r$ , то:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{GM\mu}{r} \mathbf{r} = \text{const},$$

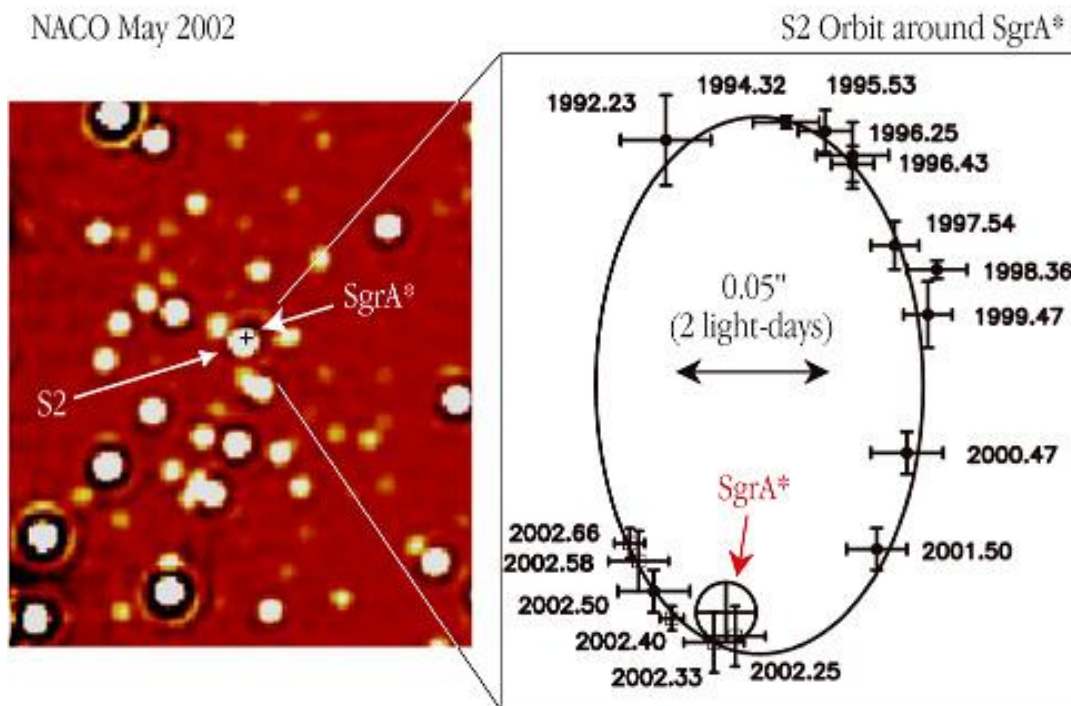
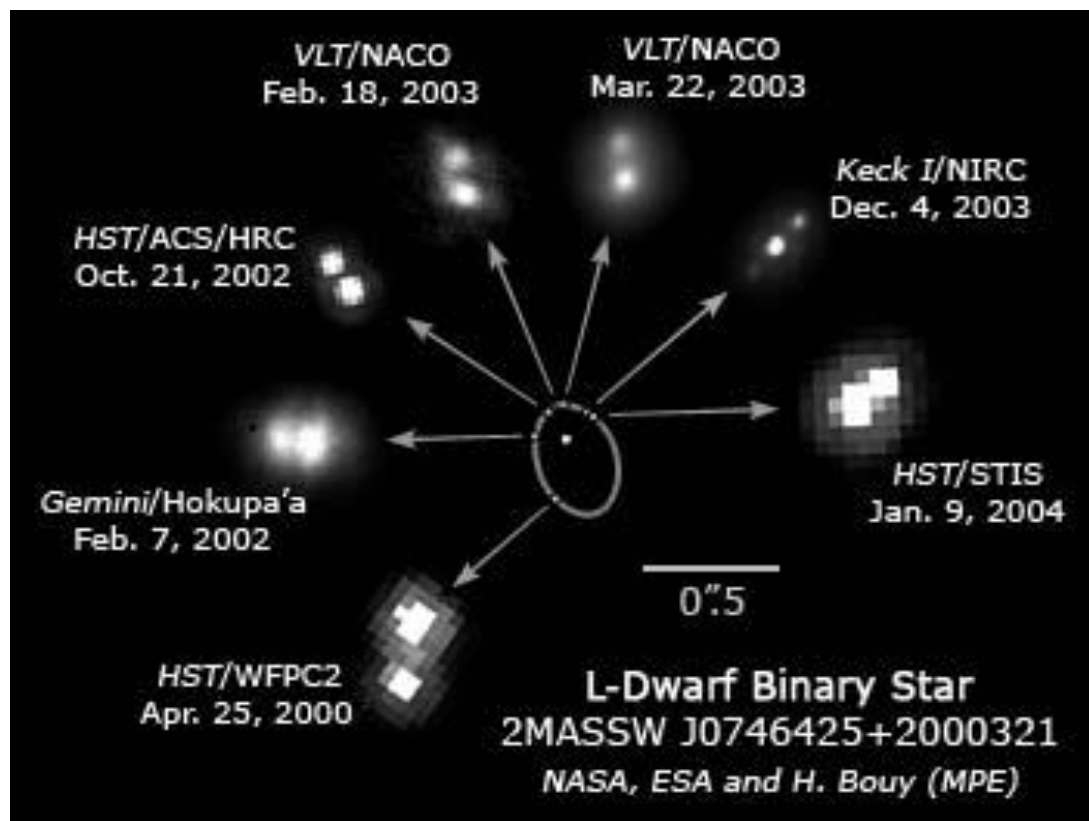
где здесь  $\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}$  (не путайте с фокальным параметром!)



- Через вектор ЛРЛ можно ввести «вектор эксцентриситета:  $\mathbf{e} = \mathbf{A}/GM\mu$
- То есть в задаче двух тел сохраняется пространственная ориентация большей полуоси орбиты.



# МАССЫ ЗВЁЗД



The Motion of a Star around the Central Black Hole in the Milky Way

ESO PR Photo 23c/02 (9 October 2002)

© European Southern Observatory



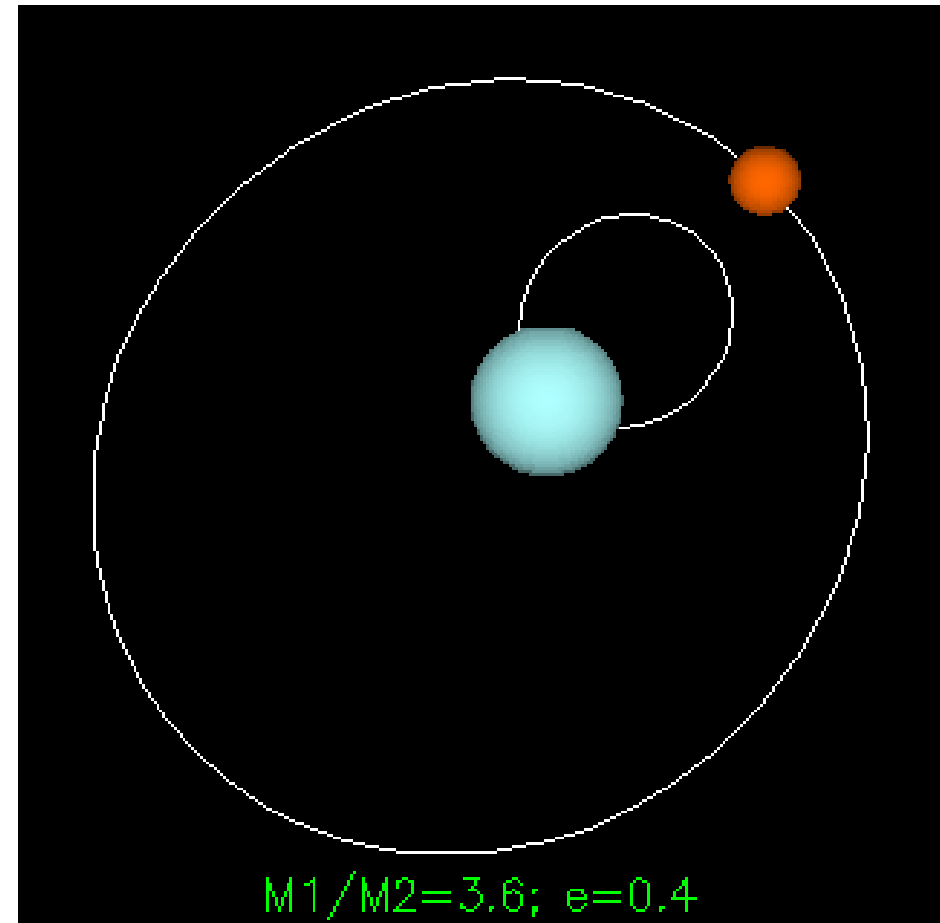
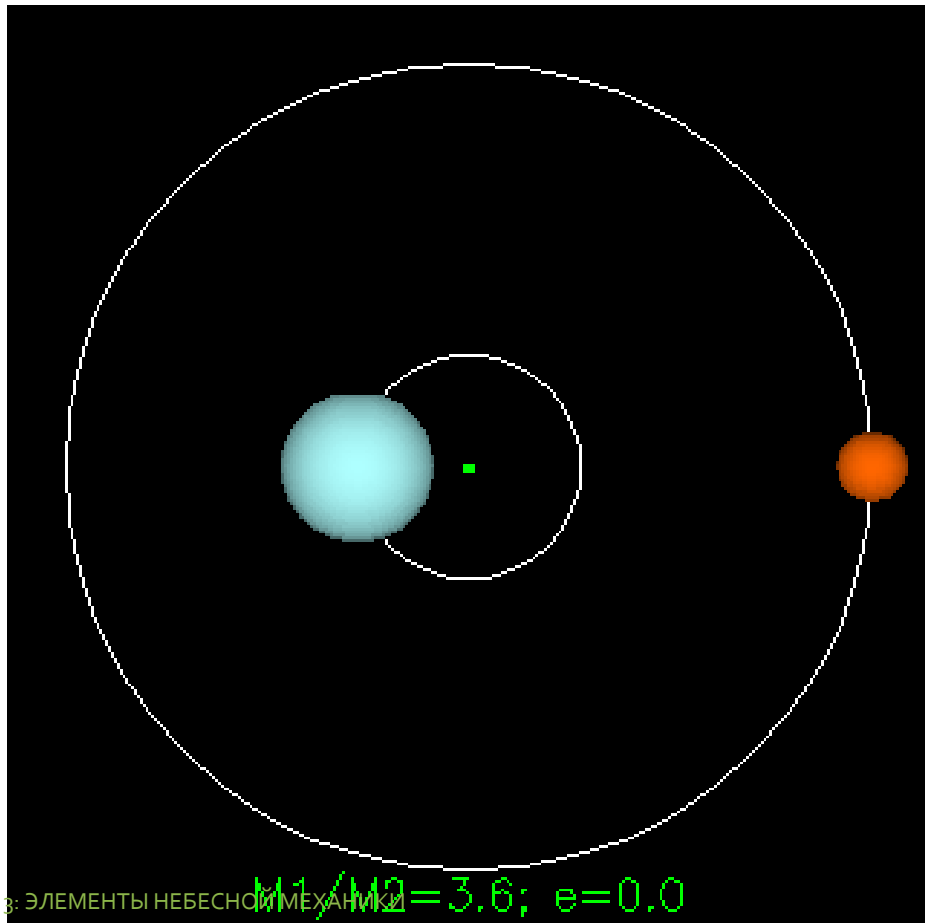
ЛЕКЦИЯ 3: ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

$$\left(\frac{a}{\text{a. e.}}\right)^3 = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \left(\frac{P}{\text{лет}}\right)^2$$

$$M_{\text{bh}} = \frac{a_{\text{a.e.}}^3}{P_{\text{лет}}^2} \approx \frac{(10^3)^3}{(15.2)^2} \approx 4 \times 10^6 M_{\odot}$$



# ОРБИТЫ В ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ



# ОРБИТЫ В ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ

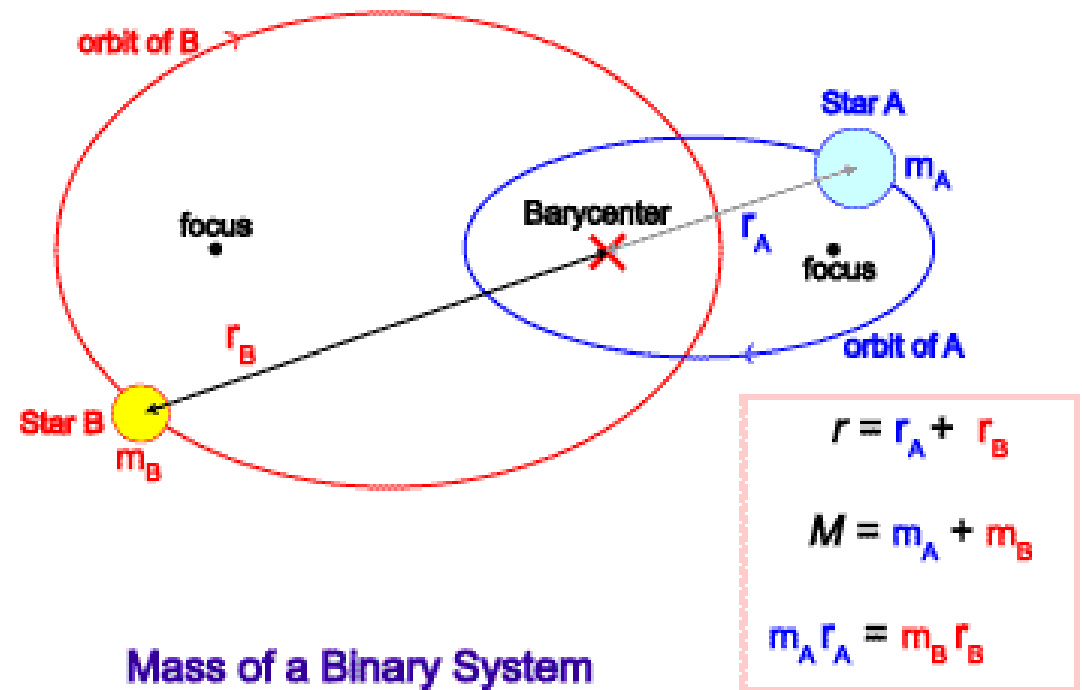
- Большая полуось взаимной орбиты равна сумме полуосей орбит относительно барицентра:

$$a = a_1 + a_2$$

- Поэтому, в частности, если два тела равной массы  $m$  находятся на **общей** круговой орбите, то орбитальный период будет равен:

$$P = \left( \frac{4\pi^2}{G(m + m)} (R + R)^3 \right)^{1/2} = 4\pi \left( \frac{R^3}{Gm} \right)^{1/2},$$

где  $R$  – радиус орбиты.



# ФУНКЦИЯ МАСС ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ

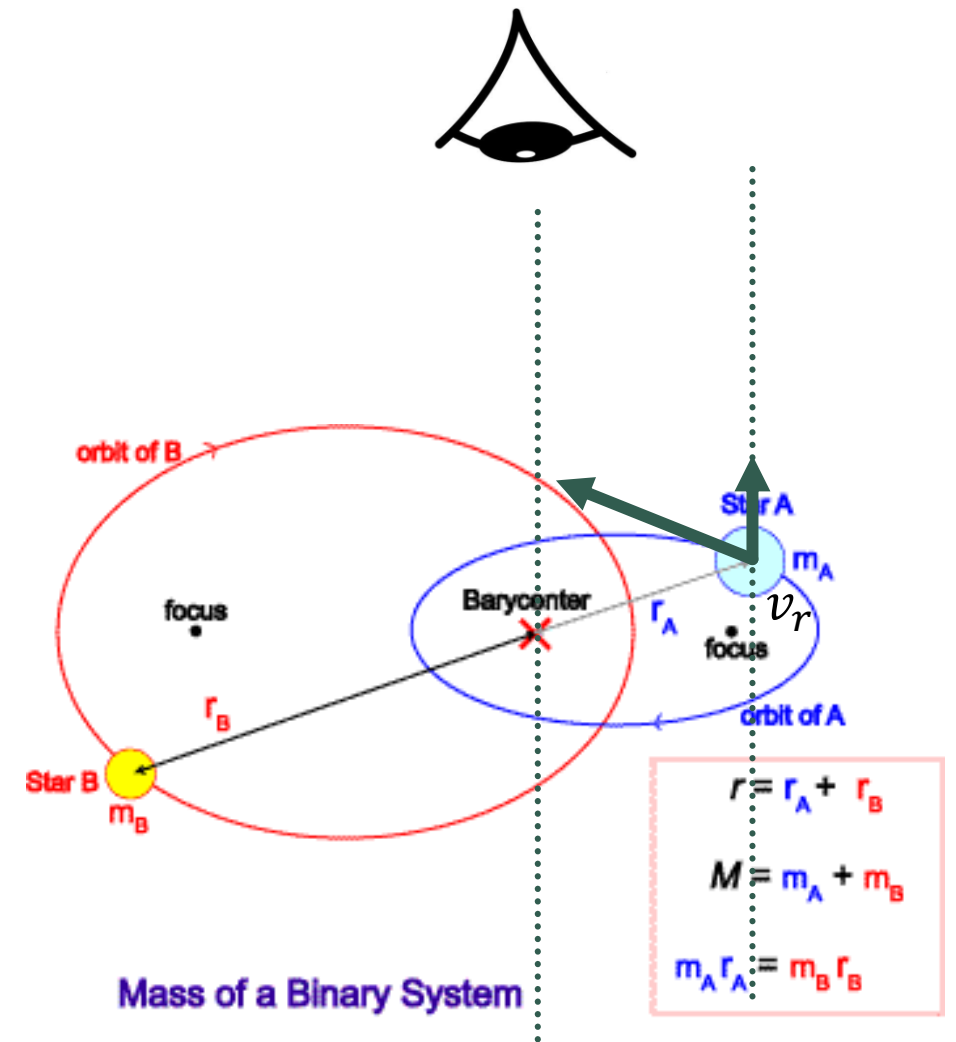
- Часто наблюдается только один из двух компонентов системы. Его лучевая скорость будет испытывать вариации с амплитудой  $K$  из-за эффекта Доплера.

- Для системы справедливы:

a.  $G(M_0 + m_x) = \frac{4\pi^2}{P^2} (a_0 + a_x)^3$  -- 3-й закон Кеплера;

b.  $M_0 a_0 = m_x a_x$  -- условие центра масс;

c.  $K = \frac{2\pi}{P} a_0 \sin i$  -- амплитуда лучевой скорости за счёт проекции орбиты на картинную плоскость.



# ФУНКЦИЯ МАСС ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ

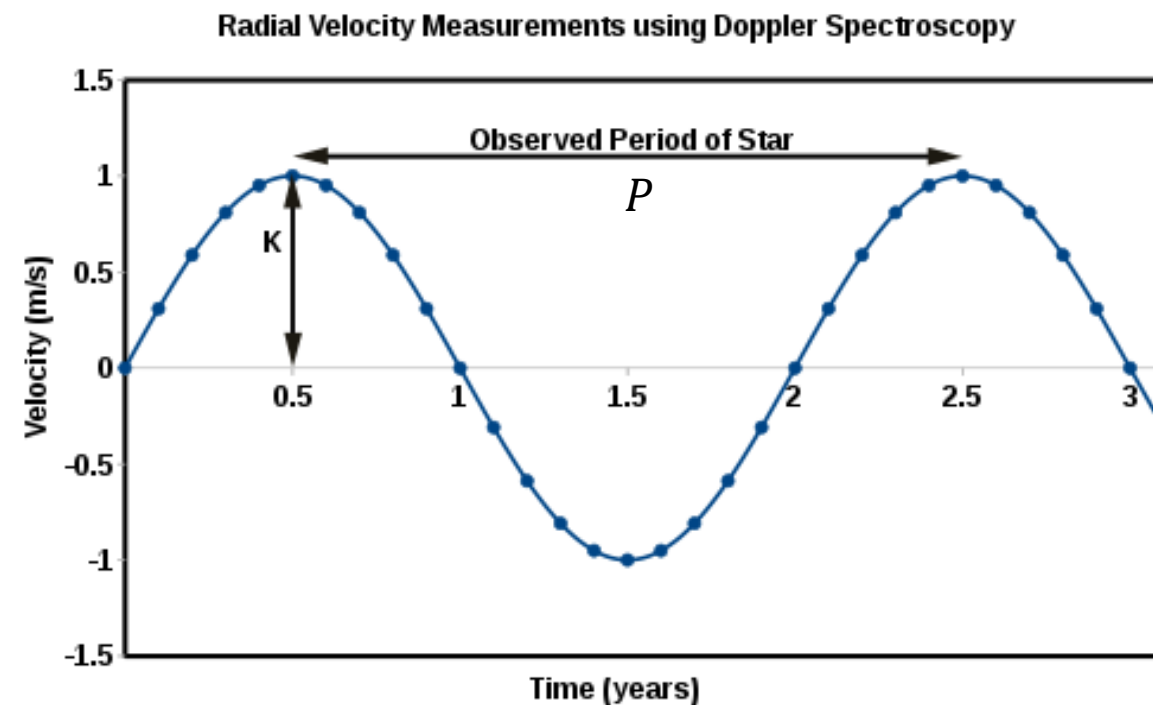
- В итоге 3-й закон Кеплера переходит в выражение:

$$f(m_x) = \frac{m_x^3 \sin^3 i}{(M_0 + m_x)^2} = \frac{PK^3}{2\pi G}$$

-- это **функция масс двойной системы**. Она позволяет получить нижнюю оценку на массу невидимого компонента из условия  $\sin i = 1$ .

- В частном случае:

$$m_x > \begin{cases} f(m_x), \text{ если } m_x \gg M_0 \text{ (чёрная дыра)} \\ M_0^{2/3} f^{1/3}, \text{ если } m_x \ll M_0 \text{ (планета)} \end{cases}$$



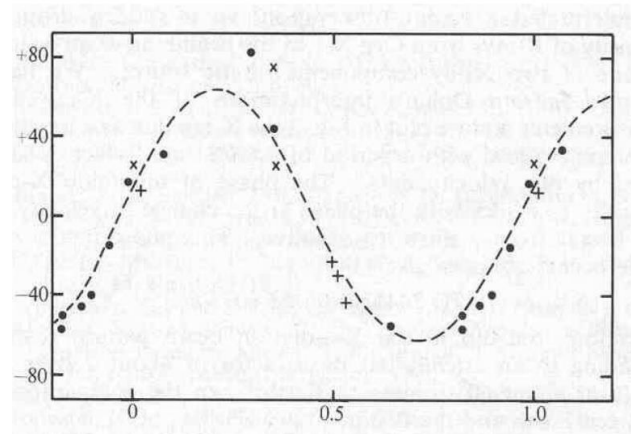
# ЛЕБЕДЬ X-1 (CYGNUS X-1)

$$\left\{ \begin{array}{l} K \approx 75 \text{ км с}^{-1} \\ M_{\text{opt}} \sim 30 - 40 M_{\odot} \text{ (O9.7Iab)} \\ P_{\text{orb}} = 5.6^d \\ d = 2.2 \text{ kpc} \end{array} \right.$$

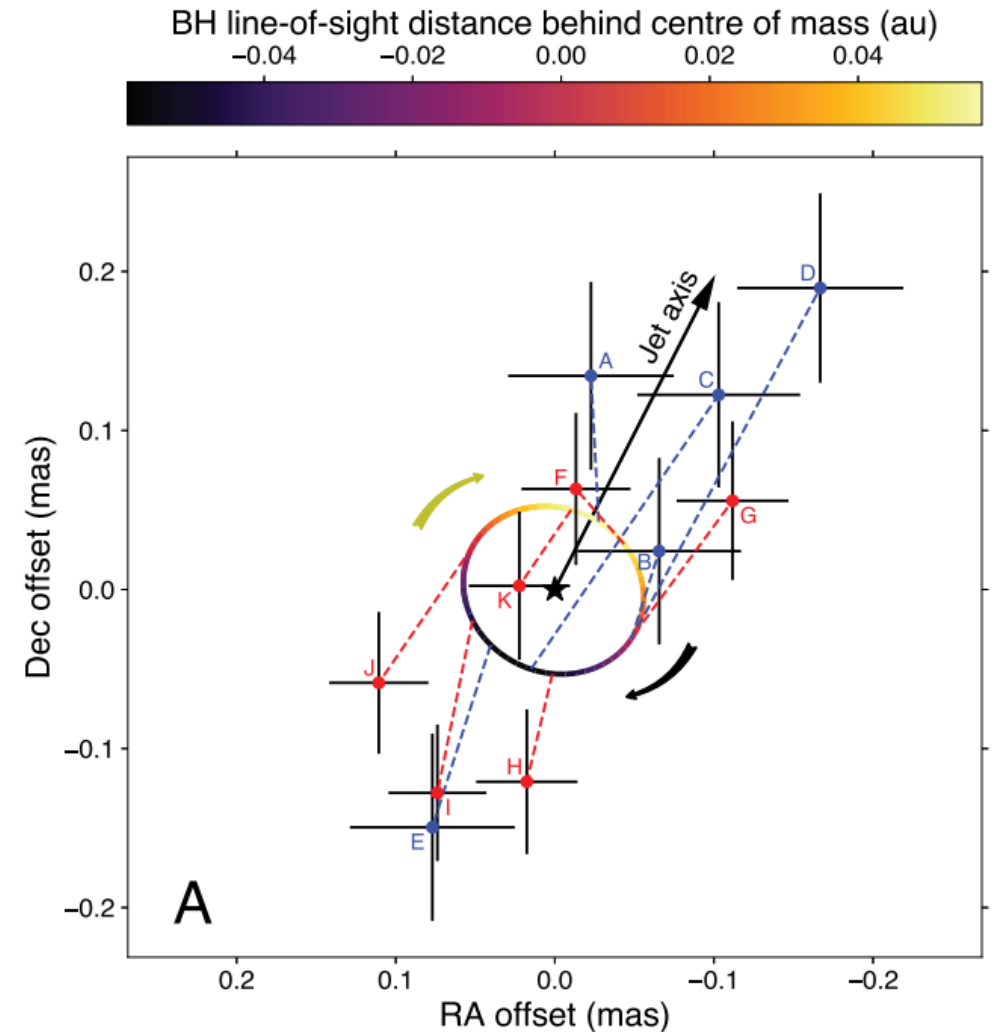
$$f(m_x) = \frac{K^3 P_{\text{orb}}}{2\pi G} \approx 0.25 M_{\odot}$$

Более аккуратная оценка:  $i \approx 27^\circ \Rightarrow m_x = 14.8 \pm 1.0 M_{\odot}$

Последняя оценка:  $m_x = 21.2 \pm 2.2 M_{\odot}$  (arXiv:2102.09091)



Webster & Murdin 1972



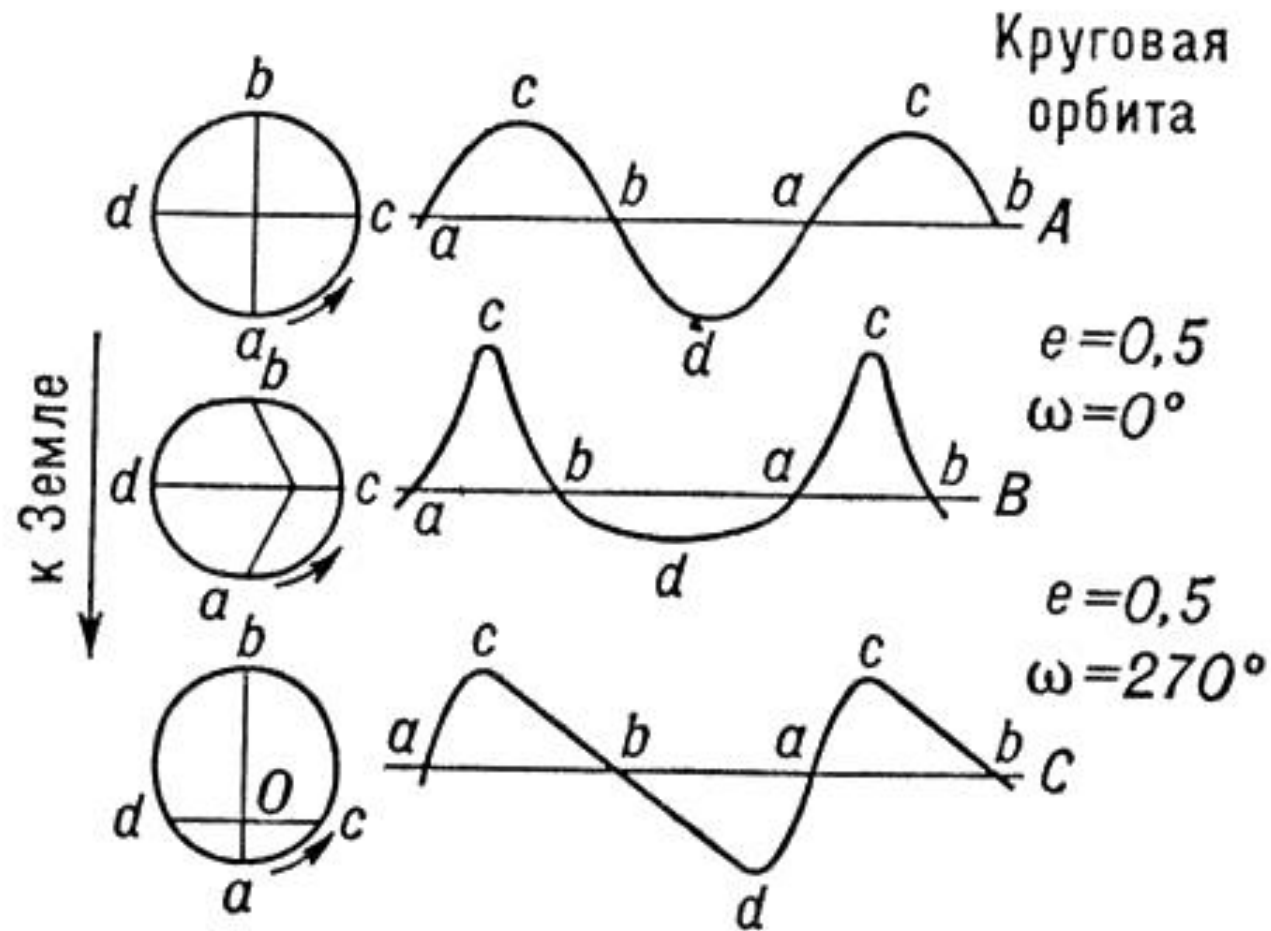
arXiv:2102.09091

# ЛУЧЕВЫЕ СКОРОСТИ В ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Скорость по лучу зрения определяется из эффекта Доплера и очень информативна с точки зрения параметров системы:

$$V_r = \frac{2\pi}{P} \frac{a_0 \sin i}{\sqrt{1-e^2}} [\cos(\nu + \omega) + e \cos \omega] + \gamma$$

$\gamma$  – это так называемая «гамма-скорость». Так называют скорость всей системы как целого относительно наблюдателя.



# ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ

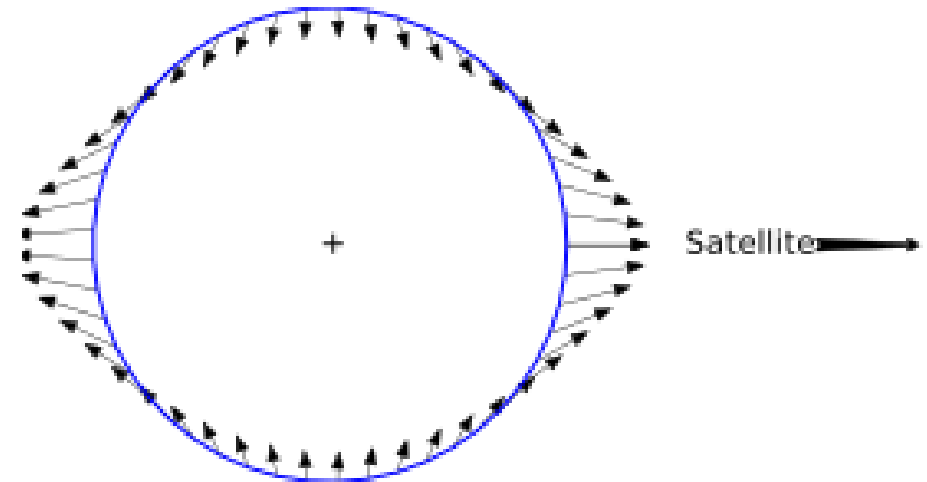
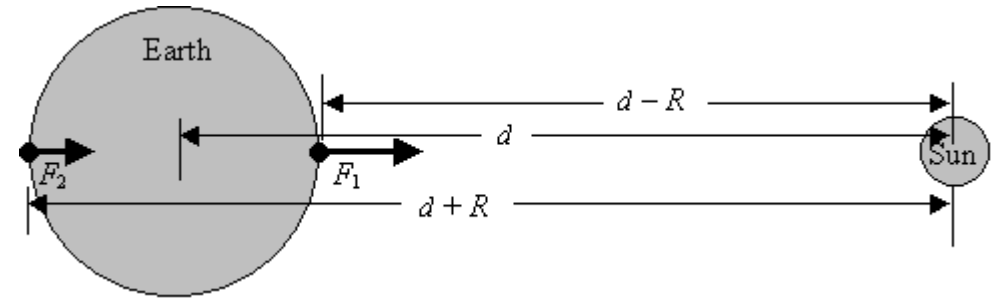
- Приливные силы возникают из-за неоднородности поля тяготения.

$$\frac{Gm}{R^2} = GM \left( \frac{1}{(d-R)^2} - \frac{1}{(d+R)^2} \right) \sim \frac{GMR}{d^3}$$

Откуда:

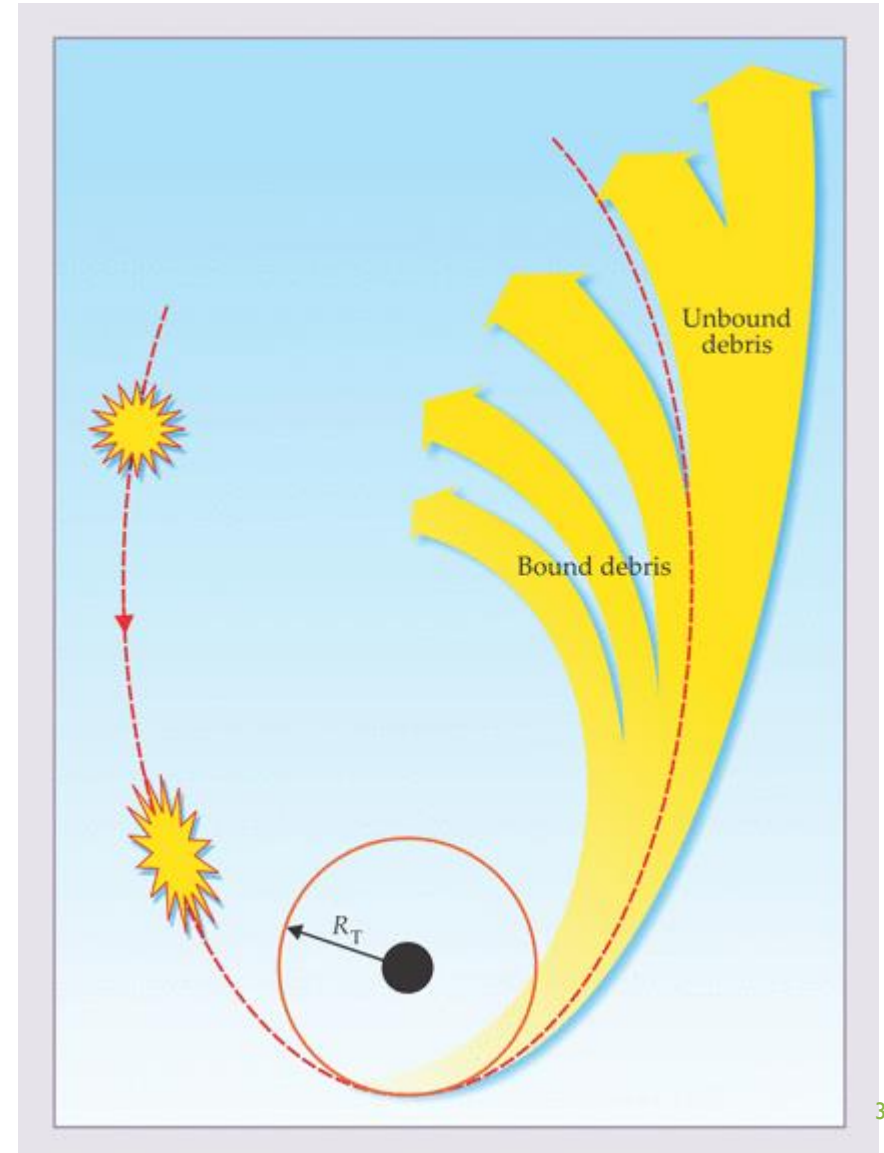
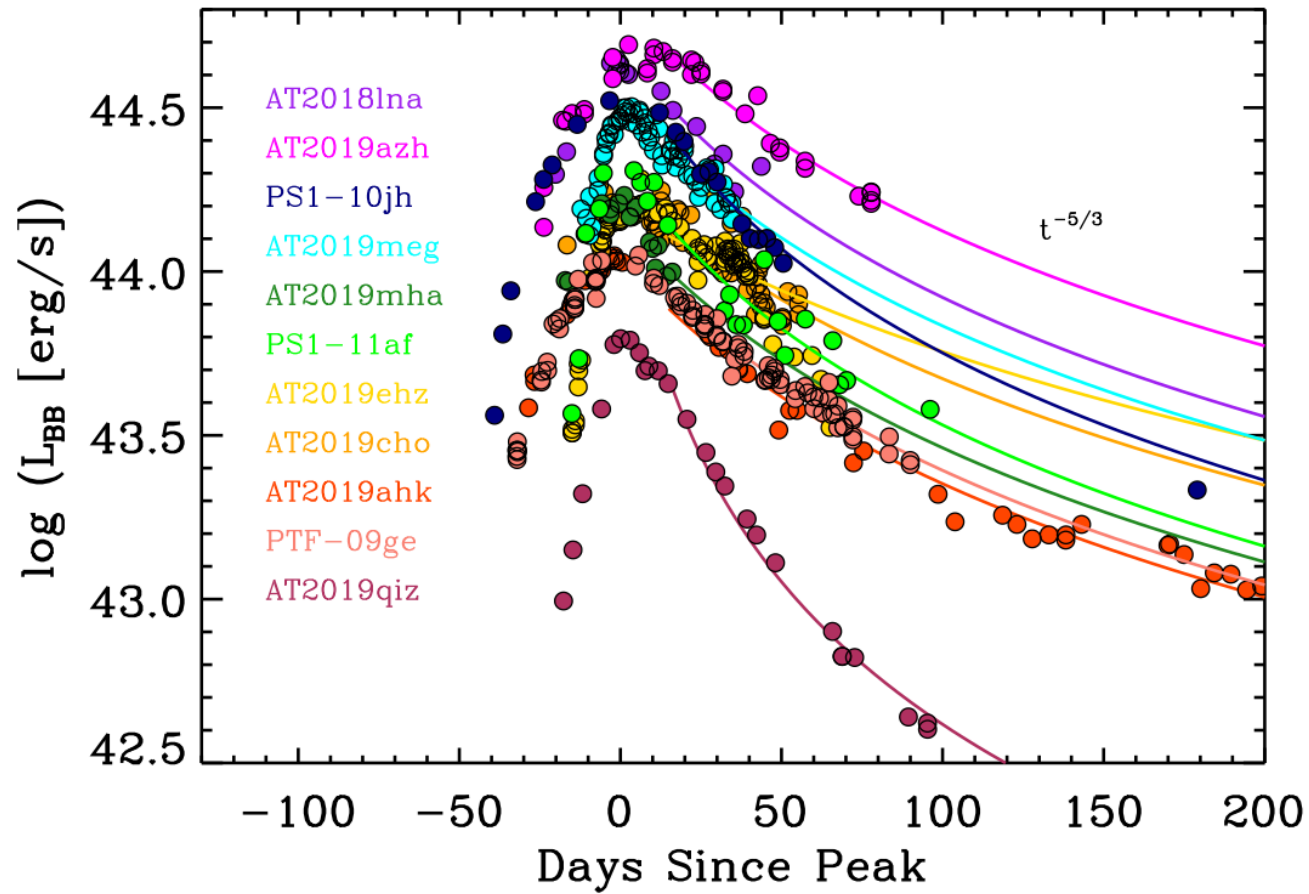
$$d_{\min} \approx R \left( \frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

-- **предел Роша**, ближе которого тело разрывается приливными силами.



Поле остаточных приливных ускорений  
относительно центра масс тела.

# TIDAL DISRUPTION EVENT (TDE)





# DEVELOPMENT EPHEMERIS (DE, NASA JPL)

- В астрономии *эфемерида* – это таблица предвычисленных координат небесных тел.
- NASA JPL DE – широко используемые эфемериды тел внутри Солнечной системы.
- По сути DE это набор коэффициентов полиномов Чебышева для координат и скоростей тел СС, полученные численно с учётом постньютоновских поправок.
- Текущий вариант: DE440/441 (Park et al. 2021, The Astronomical Journal, Volume 161, Issue 3, id.105, 15 pp.)

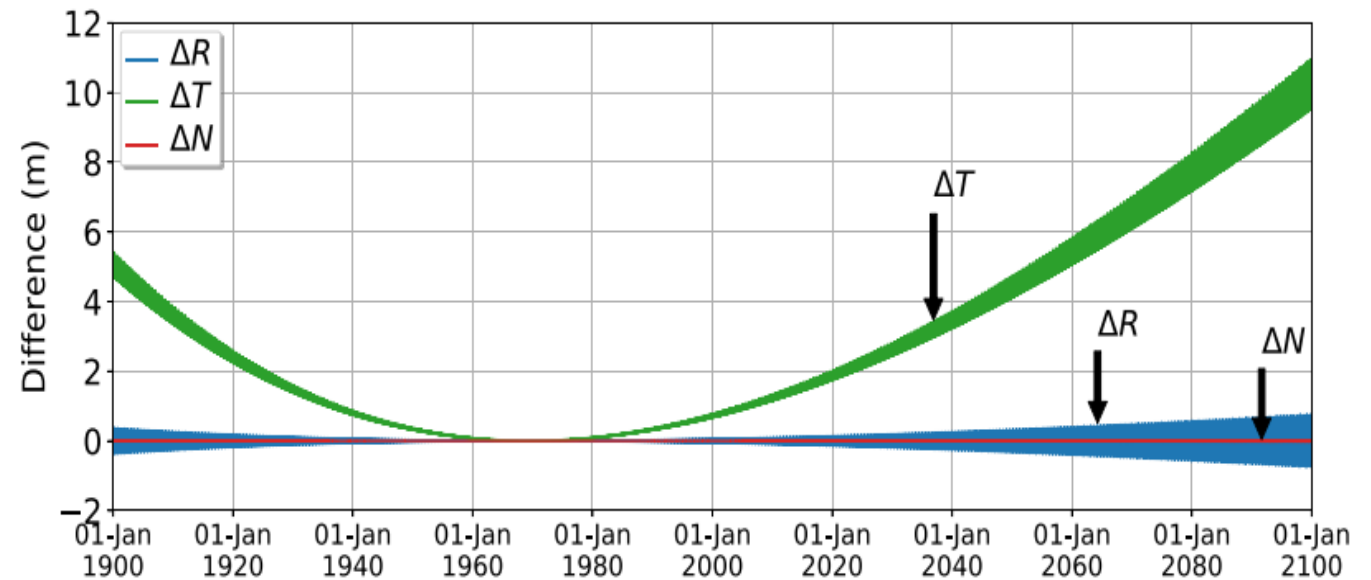
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i,\text{pm-pm}} = & \sum_{j \neq i} \frac{GM_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \right. \\ & \times \sum_{k \neq i} \frac{GM_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{GM_k}{r_{jk}} \\ & + \gamma \left( \frac{v_i}{c} \right)^2 + (1 + \gamma) \left( \frac{v_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \\ & \left. - \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{v}_j}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{a}_j \right\} \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{r_{ij}^3} \{ [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j] \cdot [(2 + 2\gamma)\mathbf{v}_i \\ & - (1 + 2\gamma)\mathbf{v}_j] \} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \\ & + \frac{(3 + 4\gamma)}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{GM_j \mathbf{a}_j}{r_{ij}}, \end{aligned} \quad (27)$$

# DEVELOPMENT EPHEMERIS (DE, NASA JPL)

- 8 больших планет, 343 малых, 30 объектов пояса Койпера.
- DE440 учитывает вязкое трение между жидким ядром Луны и её корой. Справедлива в интервале 1550-2650 гг. с точность лучше метра. DE441 зато работает в интервале годов -13200...+17191.

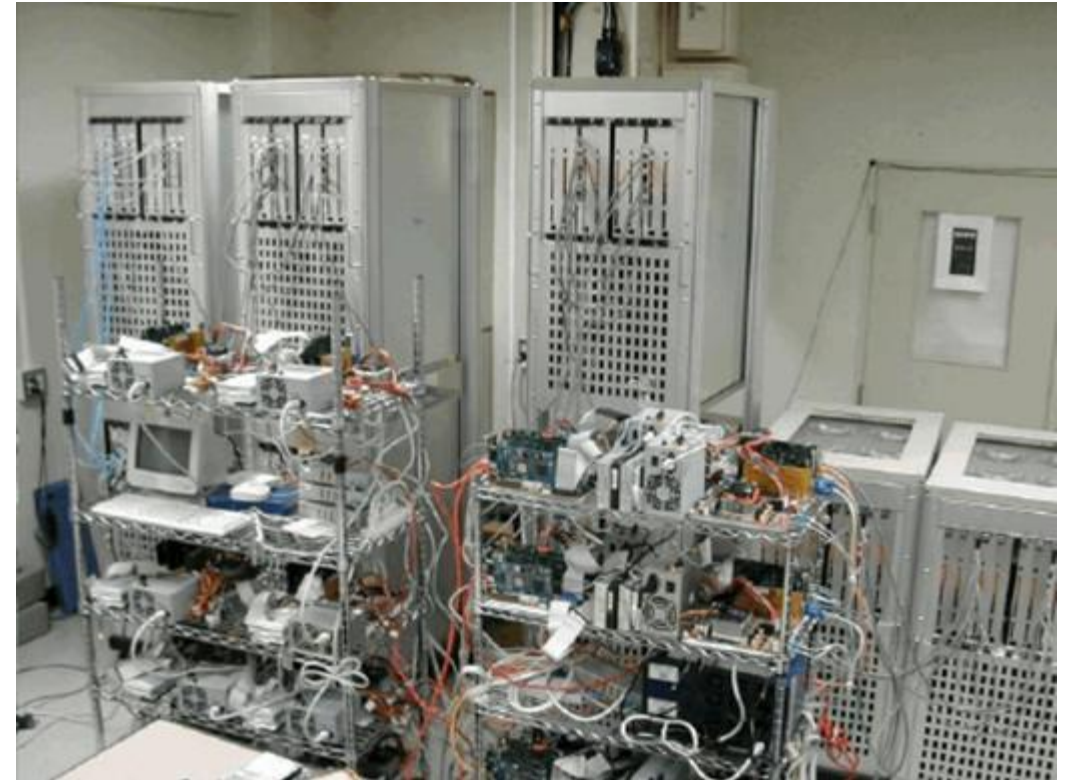
Table 2  
Planetary Masses Used in DE440 and DE441

Parameter	Value
$GM_{\text{Sun}}$	$132712440041.279419 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (estimated from DE440)
$GM_{\text{Mercury}}$	$22031.868551 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (Konopliv et al. 2020)
$GM_{\text{Venus}}$	$324858.592000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (Konopliv et al. 1999)
$GM_{\text{Earth}}$	$398600.435507 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (estimated from DE440)
$GM_{\text{Mars System}}$	$42828.375816 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (Konopliv et al. 2016)
$GM_{\text{Jupiter System}}$	$126712764.100000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (SSD JPL 2020)
$GM_{\text{Saturn System}}$	$37940584.841800 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (SSD JPL 2020)
$GM_{\text{Uranus System}}$	$5794556.400000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (Jacobson 2014)
$GM_{\text{Neptune System}}$	$6836527.100580 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (Jacobson 2009)
$GM_{\text{Pluto System}}$	$975.500000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (Brozovic et al. 2015)
$GM_{\text{Moon}}$	$4902.800118 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (estimated from DE440)
$GM_{\text{Ceres}}$	$62.62890 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (Park et al. 2016; Konopliv et al. 2018; Park et al. 2019, 2020a)
$GM_{\text{Vesta}}$	$17.288245 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ (Konopliv et al. 2014; Park et al. 2014)



# N-BODY SIMULATIONS

- NEMO (<https://github.com/teuben/nemo> )
- AMUSE (<https://github.com/amusecode/amuse> )
- Gadget2  
(<https://github.com/amusecode/amuse/tree/main/src/amuse/community/gadget2>)
- ASCL (<https://www.ascl.net/2102.019>)
- Задачи звёздной динамики, эволюции Солнечной системы, космологии, эволюции галактик и пр.



GRAPE-6 (GRAvity piPE)

# ТЕОРЕМА ВИРИАЛА

Вириал системы  $N$  материальных точек  $\mathbf{r}_k$ , движущихся под действием сил  $\mathbf{F}_k, k = 1..N$ :

$$V = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k.$$

Для стабильной (финитной) системы, связанной только внутренними потенциальными силами:

$$2\langle T \rangle_t = - \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \rangle_t.$$

В случае кулоновского потенциала, средняя по времени кинетическая и средняя потенциальная энергии системы связаны соотношением:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

-- это теорема вириала. Для случая самогравитирующих систем:

$$M \langle v^2 \rangle \sim \frac{GM^2}{R},$$

где  $v$  – характерная скорость частиц в системе,  $M$  – масса системы, а  $R$  – её характерный радиус.

# ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

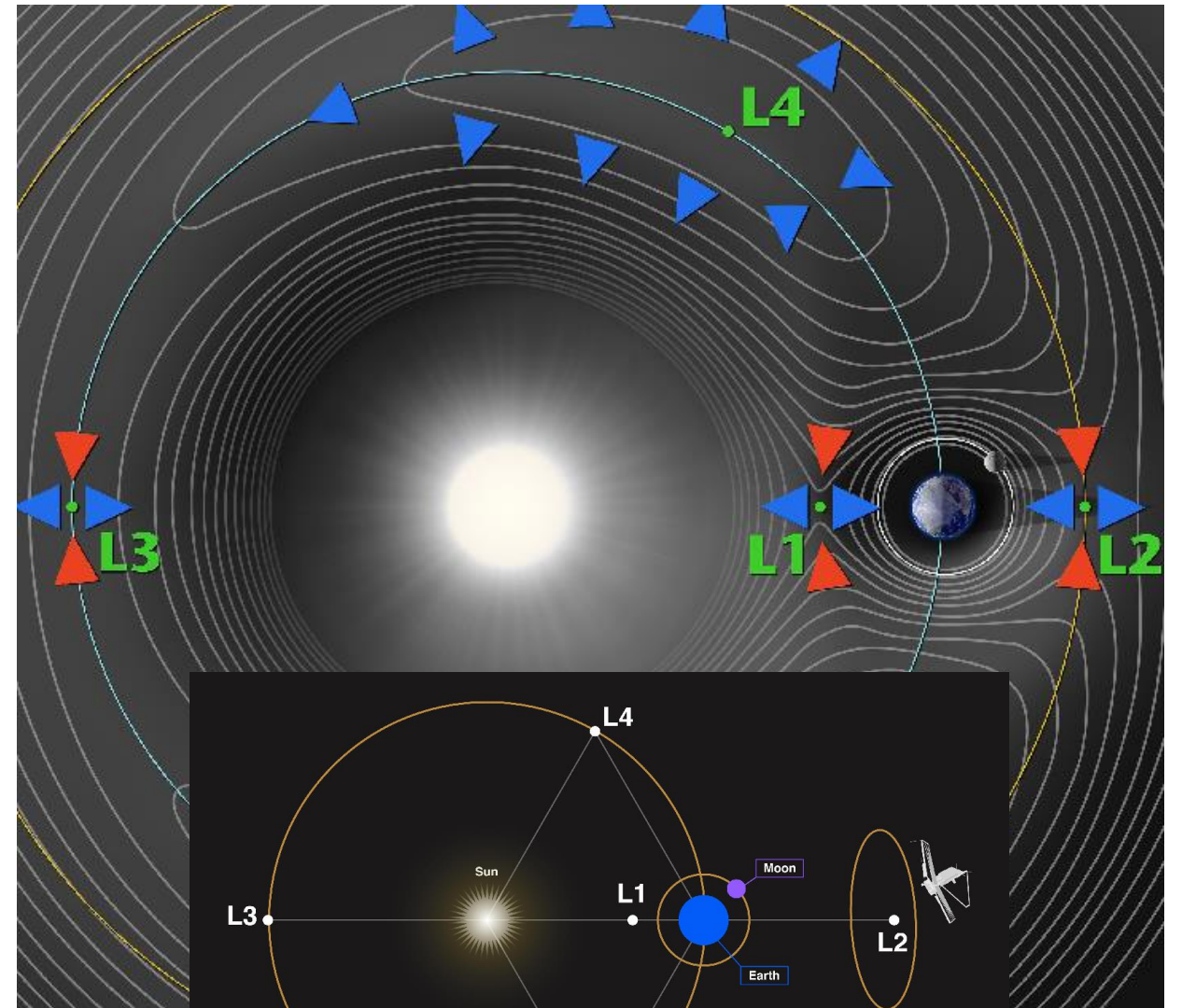
- Это равновесные точки во **вращающейся** системе отсчёта, связанной с двойной системой.
- Вращение добавляет центробежную и кориолисову компоненты в полный потенциал, в котором движется пробная частица массы  $m$ .

$$\mathbf{F}_m = -\frac{GM_1 m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \frac{GM_2 m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) +$$

$$+m\omega^2\mathbf{r} - \cancel{2m\omega\dot{\mathbf{r}}}$$

центробежная сила

ЛЕКЦИЯ 3: ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ



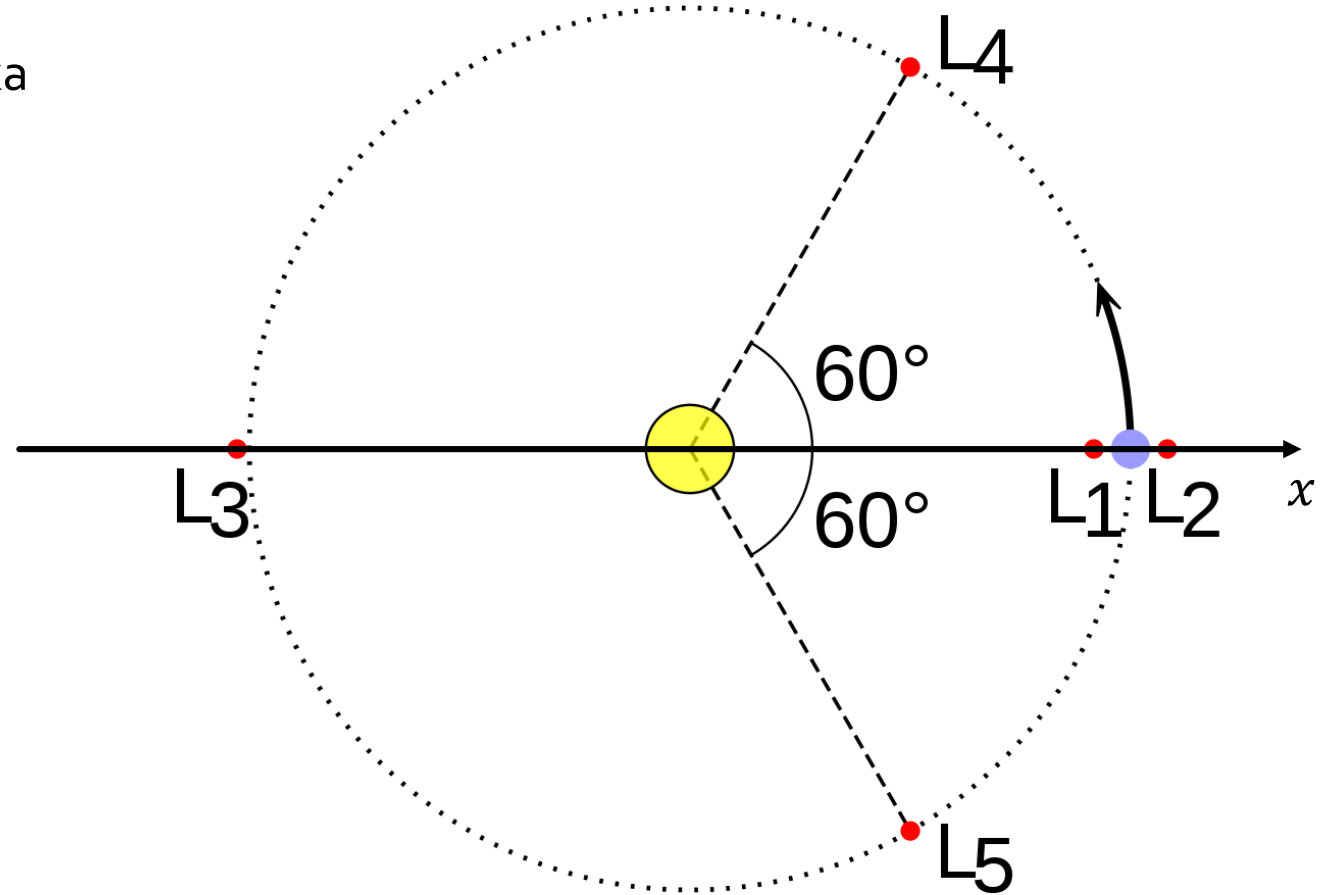
# ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

- Координаты **неустойчивых** точек Лагранжа относительно барицентра системы:

$$x(L_1) = a \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} \right)$$

$$x(L_2) = r_2 \left( 1 + \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} \right)$$

$$x(L_3) - r_1 = r_2 \left( 1 + \frac{5}{12} \frac{M_2}{M_1} \right)$$

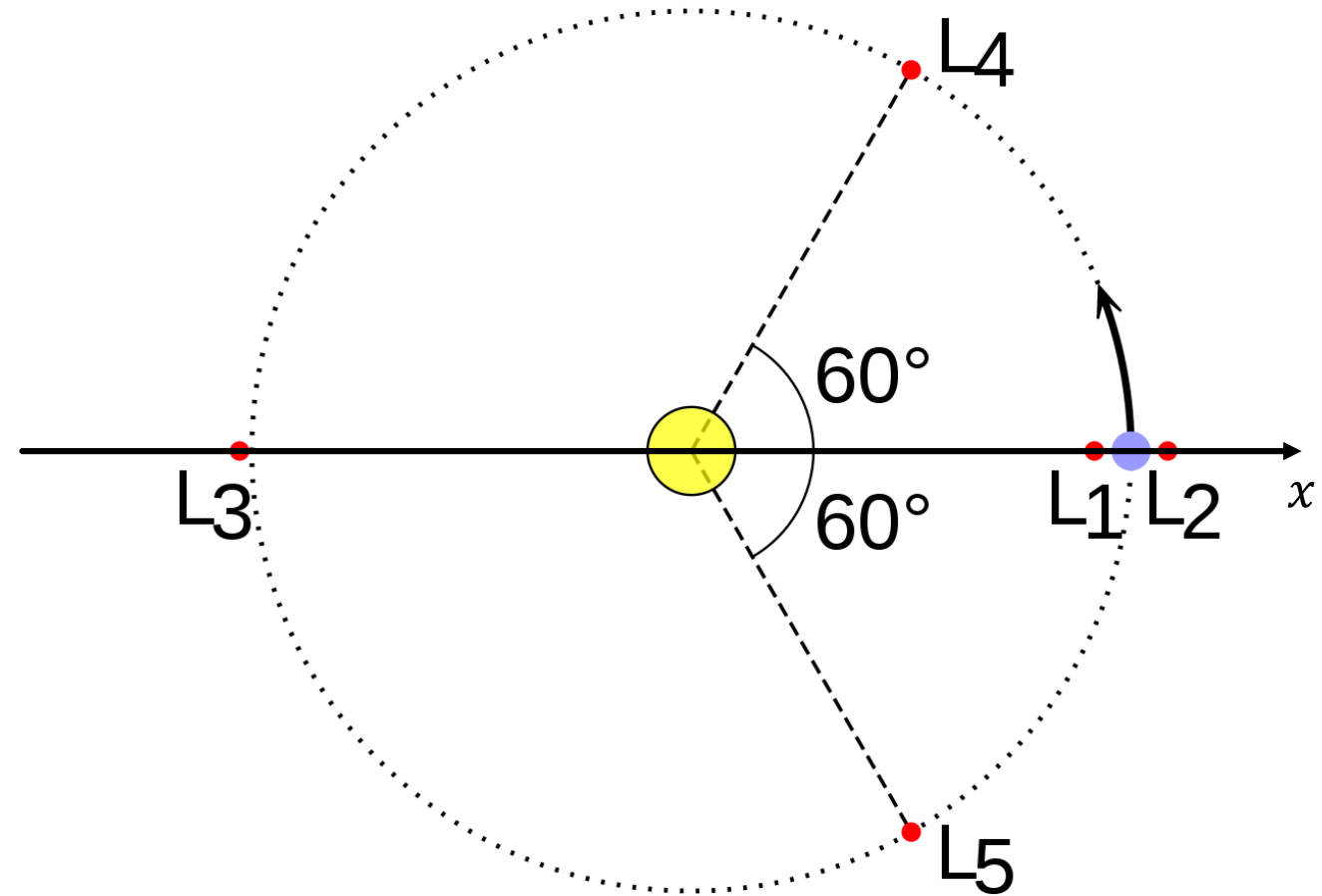
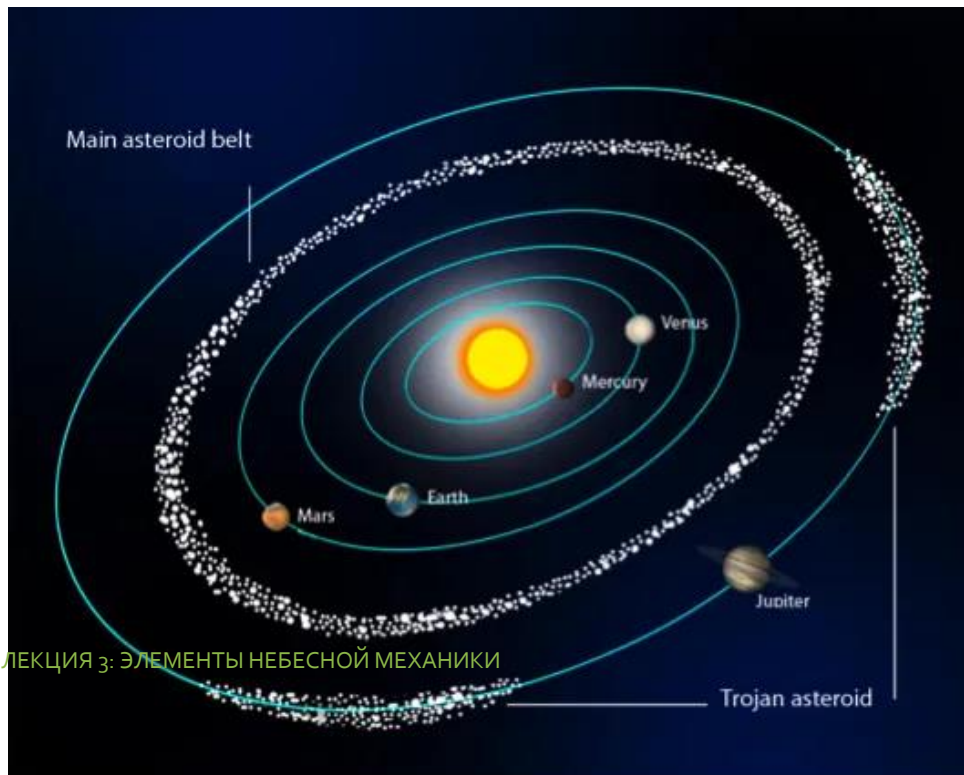




# ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

- Точки  $L_4$  и  $L_5$  являются устойчивыми, при условии:

$$\frac{M_1}{M_2} > \frac{25}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{625}} \right) \approx 24.96$$



В точках Лагранжа  $L_{4,5}$  системы Солнце-Юпитер концентрируются астероиды. Их называют «троянцы».

# ЛИТЕРАТУРА

- Кононович, Мороз. «Общий курс астрономии». §§ 2.7-2.19
- Холшевников, Титов. «Задача двух тел», Гл. I

Дополнительно:

- В. С. Бескин. «Гравитация и астрофизика». Учебное пособие (ФИАН-МФТИ, 2007)

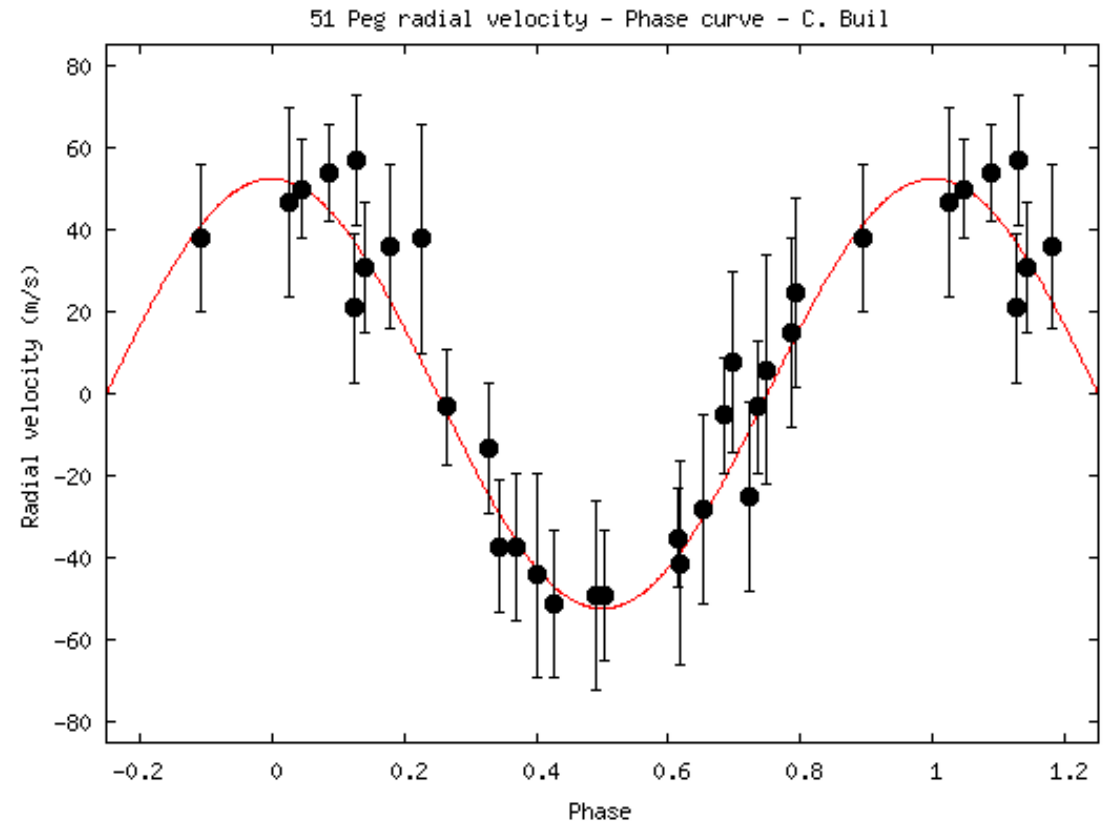


# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Первые внесолнечные планеты были открыты по своему гравитационному воздействию на звезду-компаньона. Лучевая скорость звезды относительно центра масс системы измеряется на основании эффекта Доплера и из амплитуды этой скорости рассчитывается масса невидимой планеты.

Планета у звезды типа Солнца 51 Пегаса b (51 Pegasi b = Dimidium) была открыта в 1995 году Мишелем Майором и Дидье Кело в 1995 году в рамках такого же метода лучевых скоростей (1995, Nature, 378, 355; нобелевская премия по физике 2019 г.).

Рассчитайте массу 51 Peg b (в массах Юпитера), если известно, что орбитальный период системы равен  $P_{\text{orb}} = 4.2^d$ , амплитуда лучевой скорости  $K = 112$  м/с, масса самой звезды 51 Peg b равна  $1.2M_{\odot}$ , а орбита планеты – круговая.



## РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Для системы справедливы следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_p = \sqrt{\frac{GM_*}{a}} \\ \frac{2\pi R}{V_*} = \frac{2\pi a}{V_p} = P_{\text{orb}} \\ \frac{R}{a} = \frac{M_p}{M_*} \end{array} \right.$$

-- орбитальная скорость планеты (из третьего закона Кеплера). Здесь считаем, что масса планеты много меньше массы звезды.

-- условие равенства орбитальных периодов (относительно центра масс) для планеты и звезды. Здесь  $R$  – радиус орбиты звезды вокруг центра масс.

-- свойство центра масс.

Совмещая, и учитывая, что  $K = 2V_*$  находим:

$$M_p = M_J \times \left( \frac{K}{23.8 \text{ м/с}} \right) \left( \frac{P_{\text{orb}}}{12 \text{ лет}} \right)^{1/3} \left( \frac{M_*}{M_{\odot}} \right)^{2/3} \approx 0.47 M_J$$