ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ I

Звезду (например, Солнце) можно представить как газовый шар, находящийся в гидростатическом равновесии. Это значит, что на каждом расстоянии r от её центра выполняется *уравнение гидростатического равновесия:*

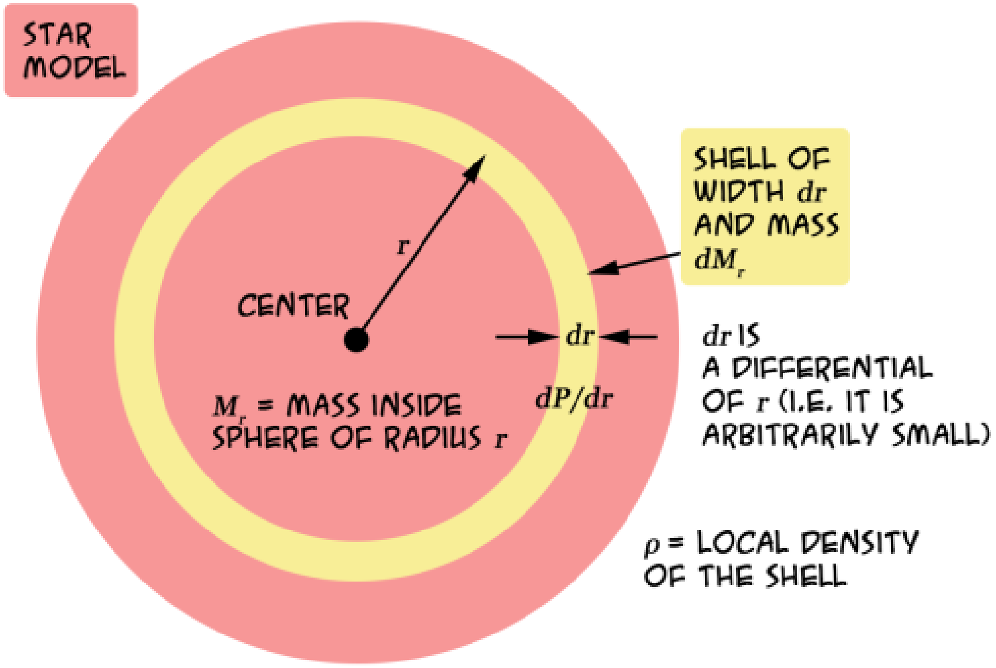
$$\frac{dP}{dr} = \frac{GM_r\rho}{r^2},$$

где P – давление, ρ – плотность, а $M_r = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr'$ -- полная масса внутри сферы радиуса r. Ориентируясь на это уравнение, получите оценки (из соображений размерности) для:

а) давления в центре Солнца $P_c = P(0)$,

б) температуры в центре Солнца $T_c = T(0)$.

Газ звезды считайте идеальным и состоящим из атомов водорода. Масса Солнца равна $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г, а радиус $R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ см



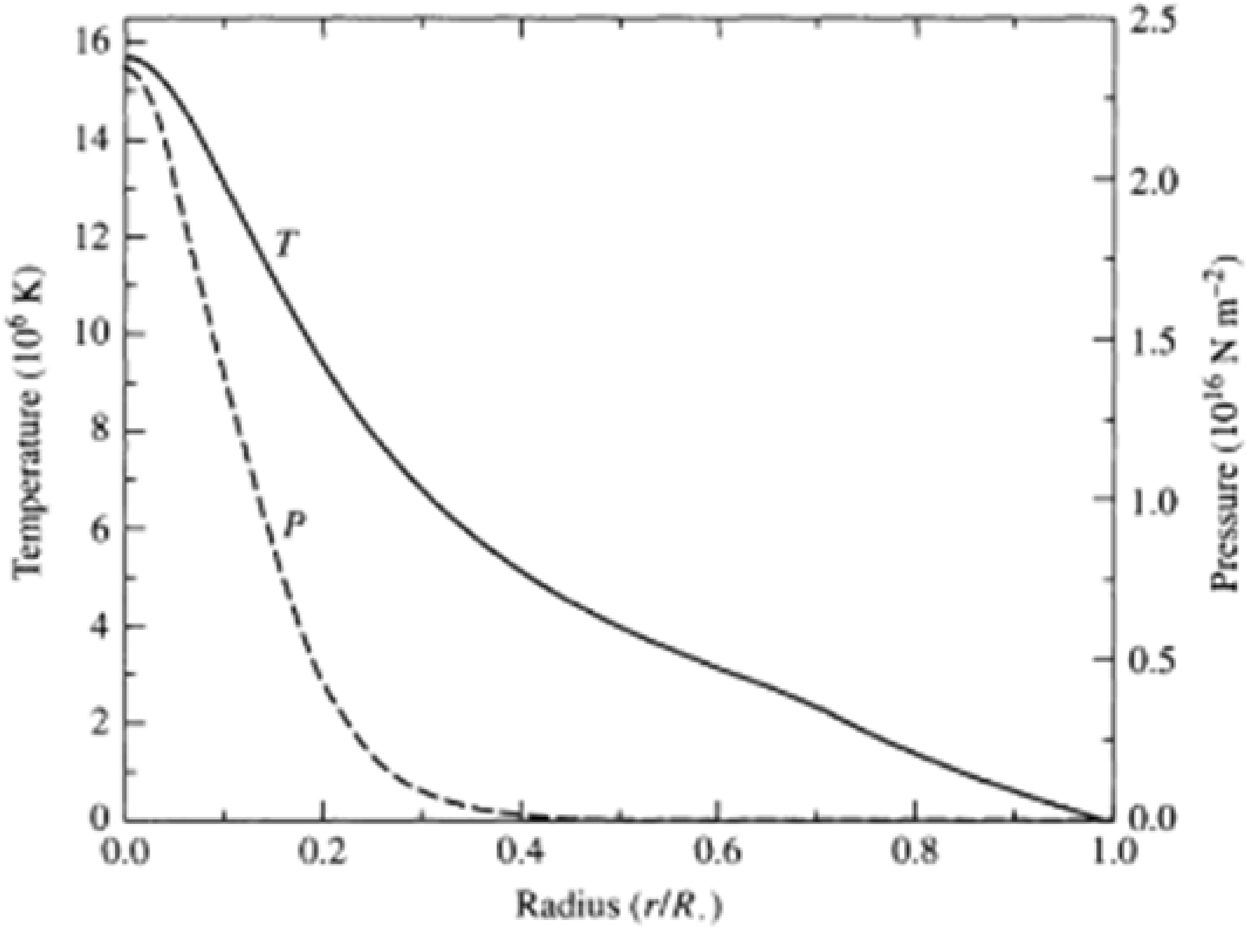
РЕШЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ I

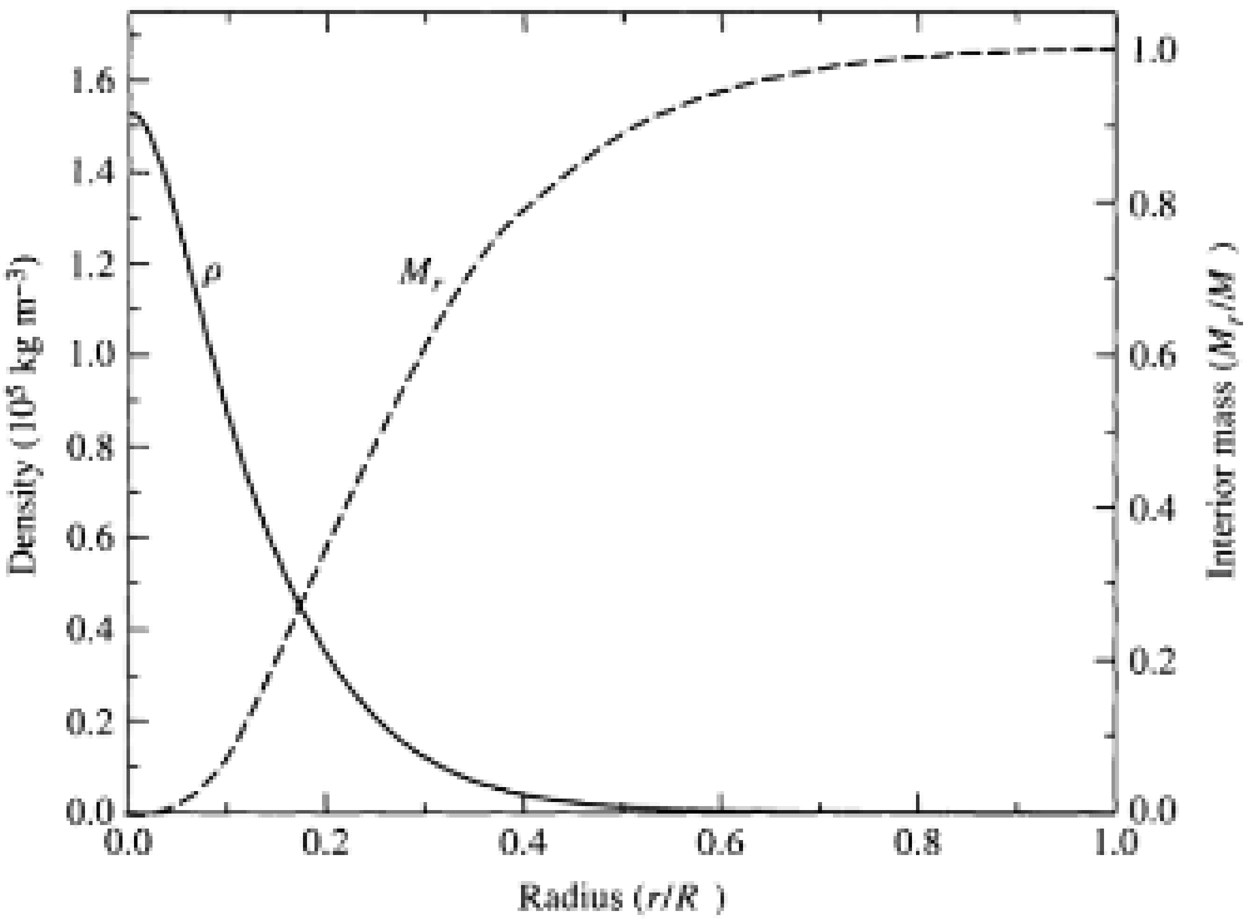
а) Для оценок из соображений размерности можно заменить производную dP/dr на конечную разность $\Delta P/\Delta r$. Причём, если рассмотреть крайний случай разницы давлений между центром Солнца и его поверхностью, то $\frac{dP}{dr} \to \left|\frac{P_c - 0}{0 - R}\right| = \frac{P_c}{R}$. В этом случае $M_r = M_R = M_\odot$, а плотность можно просто заменить на среднее значение $\rho \to \bar{\rho} = \frac{M_\odot}{R_\odot^3}$ (коэффициентом $4\pi/3$ в знаменателе пренебрегаем). Отсюда уравнение равновесия запишется как

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{P_c}{R_\odot} = \frac{GM_\odot}{R_\odot^2} \text{ откуда } P_c = \frac{GM_\odot}{R_\odot} \cdot \frac{M_\odot}{R_\odot^3} = \frac{GM_\odot^2}{R_\odot^4} \approx 10^{16} \text{ дин см}^{-2} = 10^{10} \text{ бар}.$$

б) $P = nkT = \frac{\rho}{m_p}kT$, откуда $T_c \approx \frac{P_c m_p}{\bar{\rho}k} \approx 2 \cdot 10^7$ К

КОММЕНТАРИЙ К ДЗ I





ЛЕКЦИЯ 3:
ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ВВЕДЕНИЕ В АСТРОФИЗИКУ. ВШЭ 2022/2023. БАКАЛАВРЫ, 4-Й МОДУЛЬ.

АНТОН БИРЮКОВ (АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ МГУ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА И ВШЭ), К.Ф.-М.Н

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

- **Небесная механика** – раздел классической астрономии, изучающий эволюцию систем многих тел в поле взаимного тяготения. Как в рамках ньютоновского приближения, так и в рамках ОТО.
- Ньютоновский потенциал точечной массы: $\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{GM}{r^2}\boldsymbol{r}$. А релятивистские (пост-ньютоновские) поправки в первом приближении пропорциональны $\left|\frac{\varphi}{c^2}\right|$.

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \left|\frac{\varphi}{c^2}\right| \approx 2\cdot 10^{-8}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-1}$$

$$M_\odot = 2\cdot 10^{33}\ \text{г}$$

$$R_\odot = 7\cdot 10^{10}\ \text{см} \approx 109 R_\oplus$$

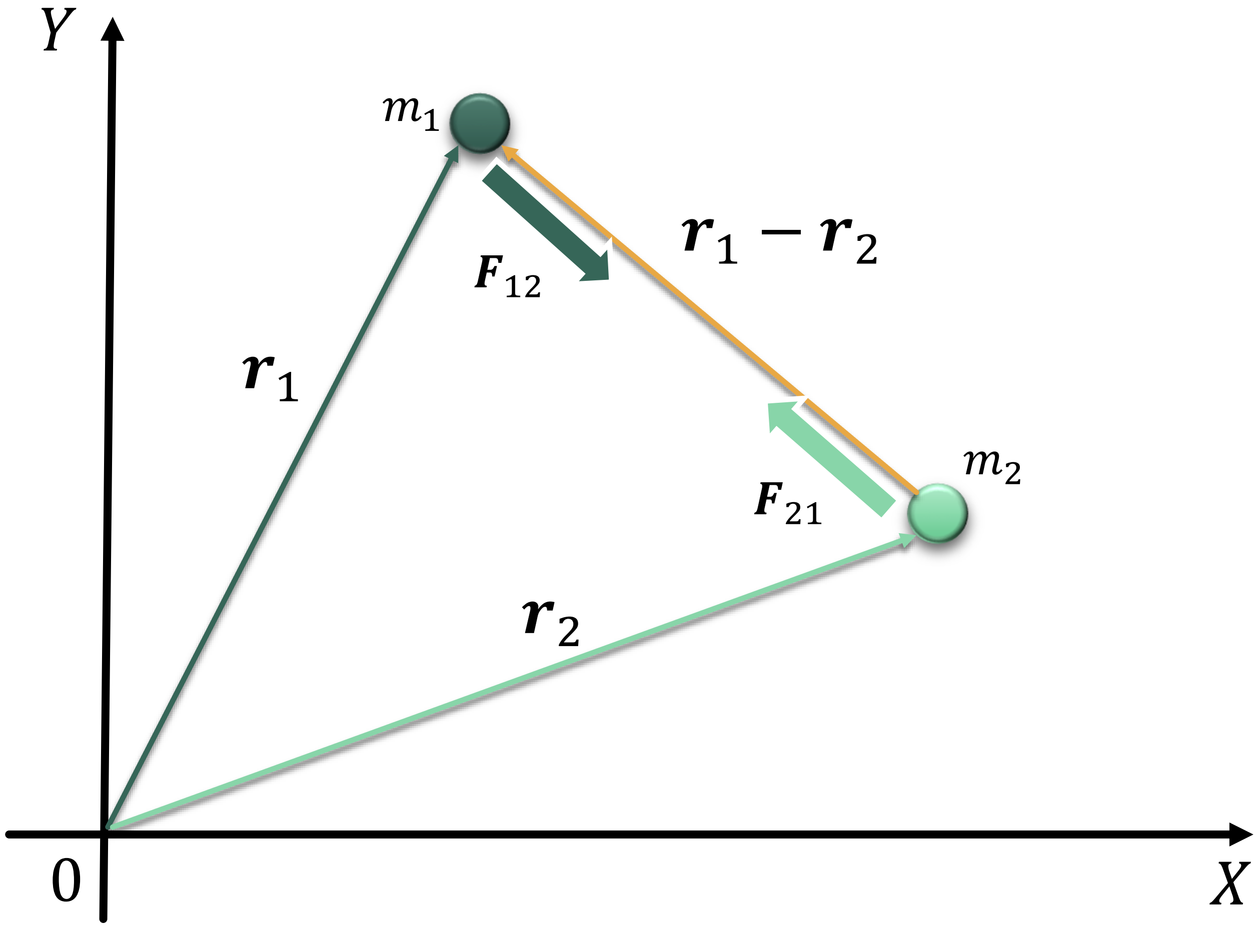
$$G = 6.67430(15)\cdot 10^{-8}\ \text{см}^3\ \text{г}^{-1}\ \text{с}^{-2}$$

(CODATA 2018)

Объект	φ/c^2
Земля	$6\cdot 10^{-10}$
Солнце	$2\cdot 10^{-8}$
Белый карлик	$7\cdot 10^{-6}$
Вся наша Галактика	10^{-9}
Нейтронная звезда	0.2
Чёрная дыра	0.5

ОТО

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ



-- классическая задача о движении двух точечных масс во взаимном потенциале.

$$\boldsymbol{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \cdot (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

$$\boldsymbol{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} \cdot (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_{12} \qquad m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_{21}$$

$$\boldsymbol{r}_1(t=0) = \boldsymbol{r}_{10} \qquad \boldsymbol{r}_2(t=0) = \boldsymbol{r}_{20}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1(t=0) = \boldsymbol{v}_{10} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_2(t=0) = \boldsymbol{v}_{20}$$

ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ

- Сложим уравнения движения обеих масс:

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2) = 0$$

– полный импульс системы сохраняется. Значит, $m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B}$ и радиус-вектор центра масс системы движется равномерно и прямолинейно:

$$\boldsymbol{R}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \boldsymbol{r}_1(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \boldsymbol{r}_2(t) = \frac{\boldsymbol{A}t + \boldsymbol{B}}{m_1 + m_2}$$

- В итоге, с центром масс можно связать инерциальную систему отсчёта. Лагранжиан пары масс в ней имеет стандартный вид. Положим $r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$, тогда

$$\mathcal{L}_{\text{bary}} = \frac{m_1 v_{1,\text{bary}}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2,\text{bary}}^2}{2} + \underbrace{\frac{G m_1 m_2}{r}}$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных масс: $U = -\frac{G m_1 m_2}{r}$

ПРИВЕДЁННАЯ МАССА

- Скорость точки m_1 относительно центра масс (и аналогично для m_2):

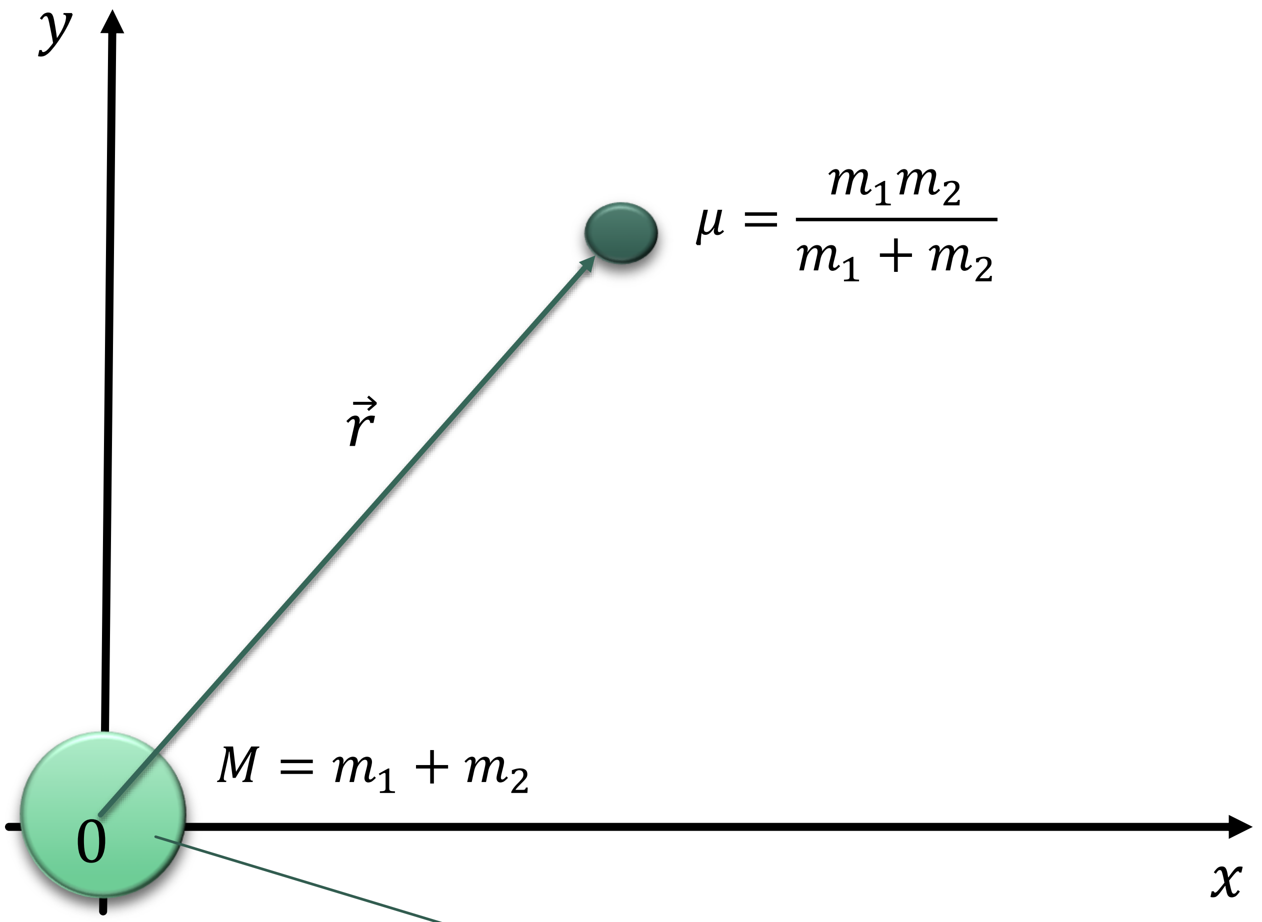
$$\boldsymbol{v}_{1,\mathrm{bary}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\underbrace{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)}_{\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}$$

Тогда лагранжиан можно выразить через относительную скорость двух масс $\boldsymbol{v}$:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 v^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{M}\right)^2 v^2 + \frac{G m_1 m_2}{r} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{GM\mu}{r},$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ -- **приведённая масса** системы, а $M = m_1 + m_2$ **--** её полная масса.

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЗАДАЧА И СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ



- Полная энергия системы сохраняется:

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - G\frac{M\mu}{r} = \mu \cdot h = const$$

Часто используют **постоянную энергии** (или **постоянную живой силы**):

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = const$$

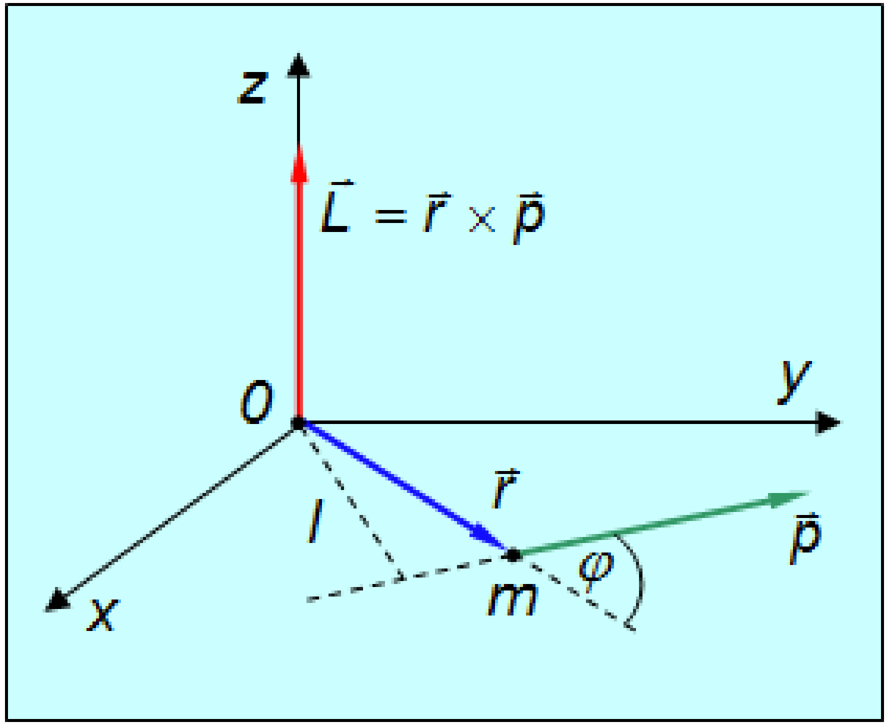
Это «тело» жестко закреплено в начале координат!

СОХРАНЕНИЕ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

- $\boldsymbol{L} = \mu \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$ -- полный момент импульса системы.

ускорение

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \mu \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \mu\underbrace{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v})}_{0} + \mu\underbrace{(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{v}})}_{0} = 0$$

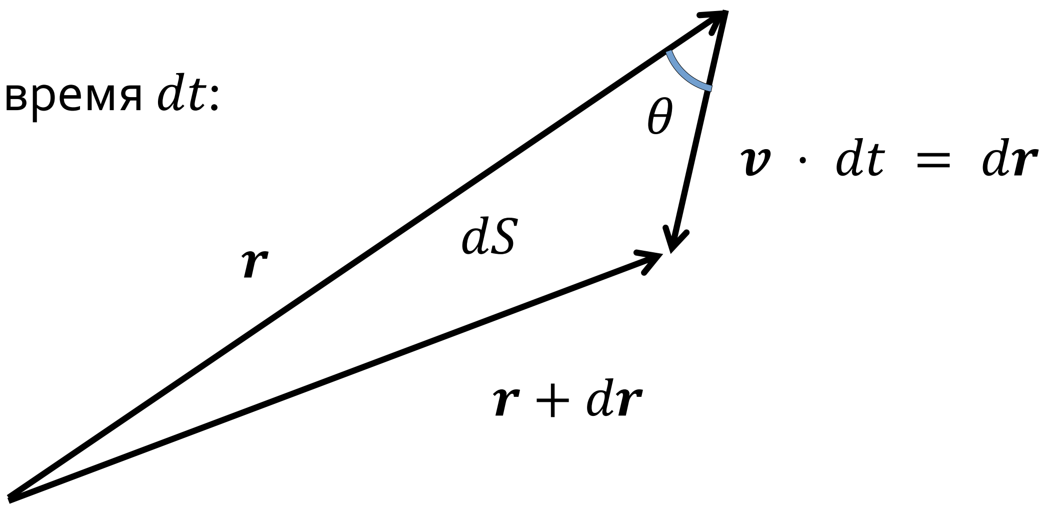


– два тела всегда остаются в одной и той же плоскости, задаваемой направлением вектора $\boldsymbol{L}$

ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ: 2-Й ЗАКОН КЕПЛЕРА

- Площадь, которую заметает радиус-вектор точки за время dt:

$$dS = \frac{1}{2}\underbrace{r \cdot (v \cdot dt) \cdot sin\theta}_{\frac{|\boldsymbol{L}|}{\mu} = c = const} = \frac{1}{2}c \cdot dt$$



- Величина c в задаче двух тел называется **интегралом площадей.**

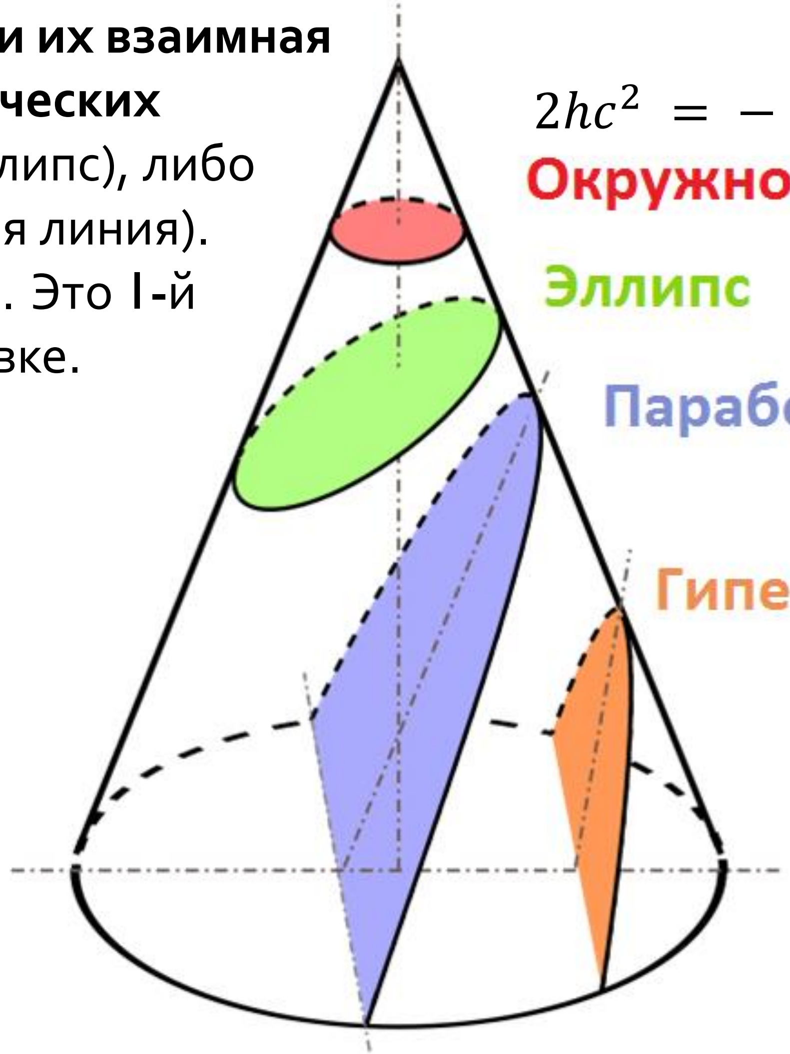
- **Радиус-вектор, соединяющий материальные точки в задаче двух тел, за равные промежутки времени заметает равные площади.** Это 2-й закон Кеплера для планетных орбит.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ: I-Й ЗАКОН КЕПЛЕРА

- **Две массы движутся в одной плоскости, и их взаимная орбита представляет собой одно из конических сечений.** Либо замкнутое (окружность, эллипс), либо разомкнутое (парабола, гипербола, прямая линия). Форму орбиты задают начальные условия. Это I-й закон Кеплера в современной формулировке.

$$\begin{cases} h = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{GM}{r_0} \\ c = r_0 \cdot v_0 \cdot sin\theta_0 \end{cases}$$

(начальные условия)



$2hc^2 = -(GM)^2 < 0$

Окружность

Эллипс $-(GM)^2 \leq 2hc^2 \leq 0$

Парабола $h = 0$

Гипербола $h > 0$

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ

В полярных координатах: $r(\nu) = \dfrac{p}{1 + e \cdot \cos\nu}$

a, b – большая и малая полуоси

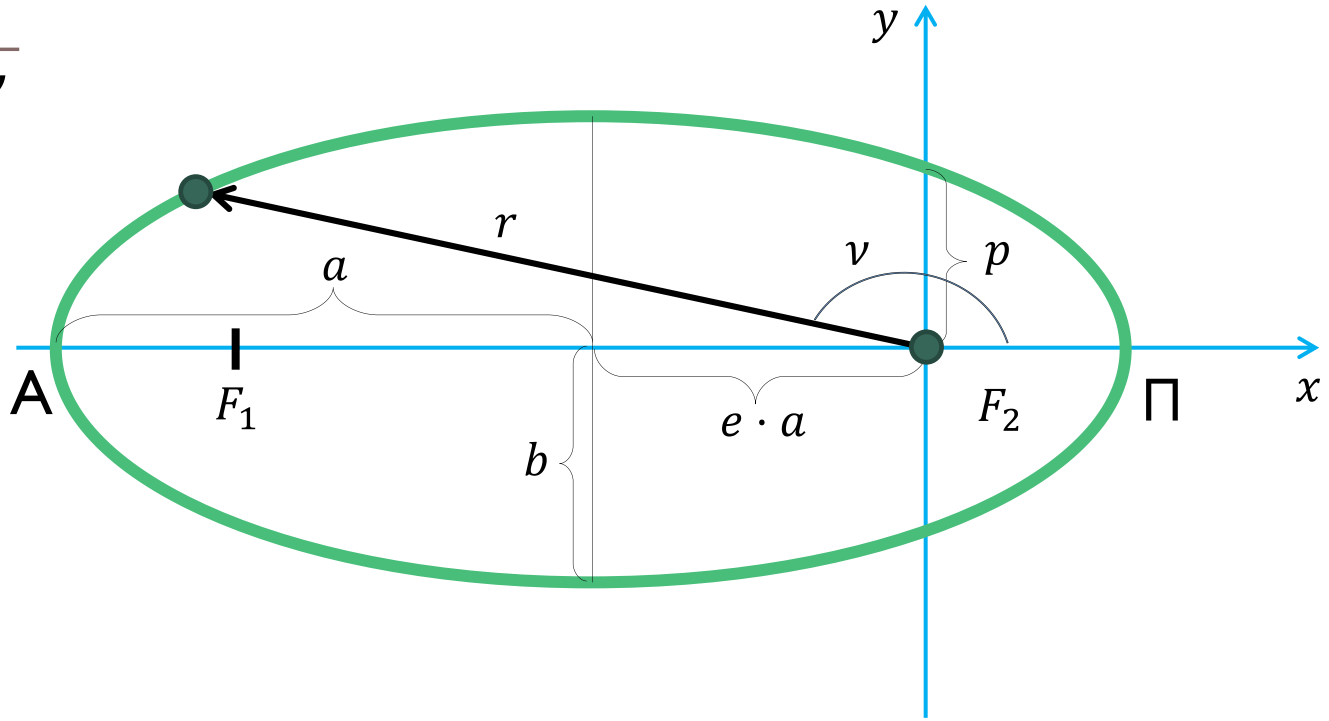
ν – истинная аномалия

$e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ -- эксцентриситет

$p = b^2/a = a(1 - e^2)$ – фокальный параметр

А – апоцентр (самая дальняя точка орбиты)

П – перицентр (самая ближняя)

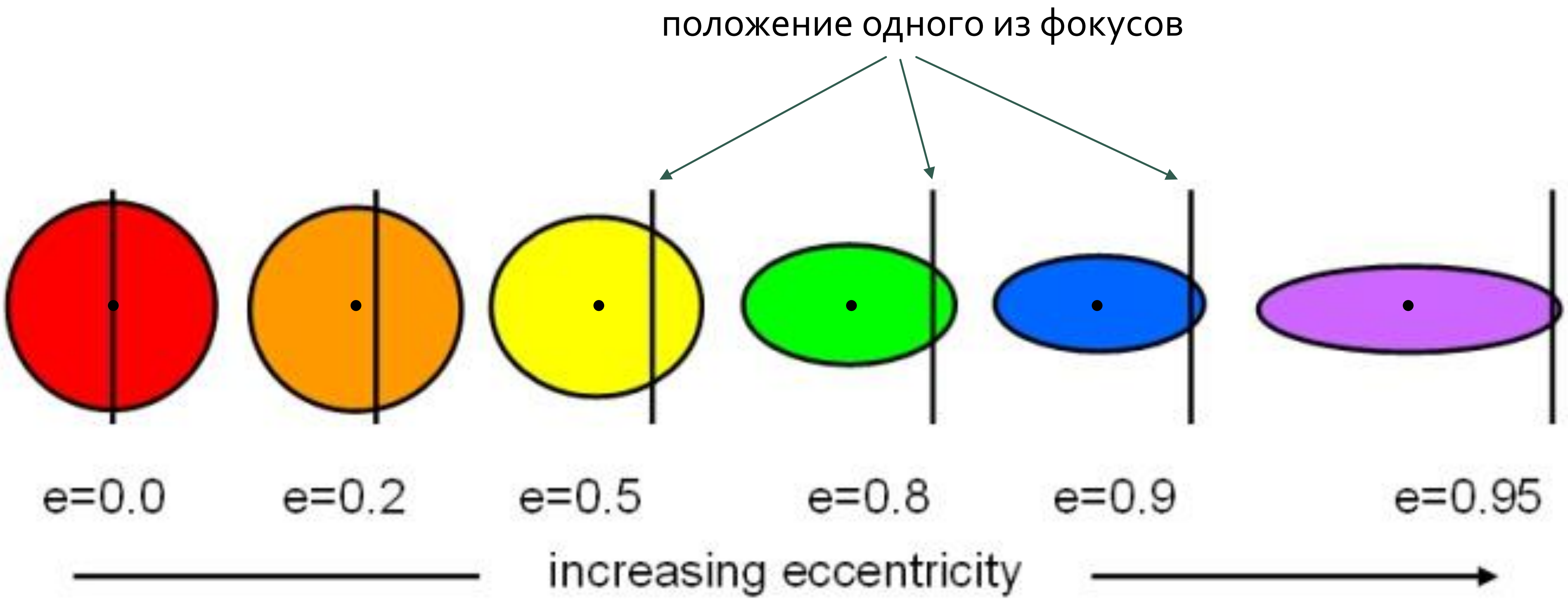


$$e = \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{(GM)^2}}$$

Окружность	$e = 0$
Эллипс	$0 < e < 1$
Парабола	$e = 1$
Гипербола	$e > 1$

$$a(1 - e^2) = \frac{c^2}{GM}$$

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ



3-Й ЗАКОН КЕПЛЕРА

Из закона площадей (**2**-го закона Кеплера) следует очень важное в астрофизике соотношение. Вычислим площадь эллиптической орбиты:

$$S = \pi ab = \pi a \cdot a\sqrt{1-e^2}$$

Если P – это орбитальный период, то $S/P = c/2$ (по **2**-му закону Кеплера). В то же время с параметрами орбиты постоянная площадей связана как

$c^2 = GMp = G(m_1+m_2)\cdot a(1-e^2)$, значит $S^2/P^2 = \pi^2 a^4(1-e^2)/P^2 = \frac{1}{4}G(m_1+m_2)\cdot a(1-e^2)$,
откуда окончательно получаем:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3$$

Квадрат орбитального периода пропорционален кубу большей полуоси взаимной орбиты.

КЕПЛЕРОВЫ ПАРАМЕТРЫ ОРБИТЫ

I. Большая полуось a
II. Эксцентриситет e
III. Долгота восходящего узла Ω
IV. Аргумент перицентра ω
V. Наклонение i
VI. Истинная аномалия ν или средняя аномалия M
VII. Начальная эпоха t_0 (прохождения перицентра).

Малые отклонения от замкнутой орбитой можно описать переменными параметрами.

Всего в задаче двух тел 7 сохраняющихся независимых величин: полный импульс $\boldsymbol{p}_{tot}$, полный момент импульса $\boldsymbol{L}$, полная энергия E

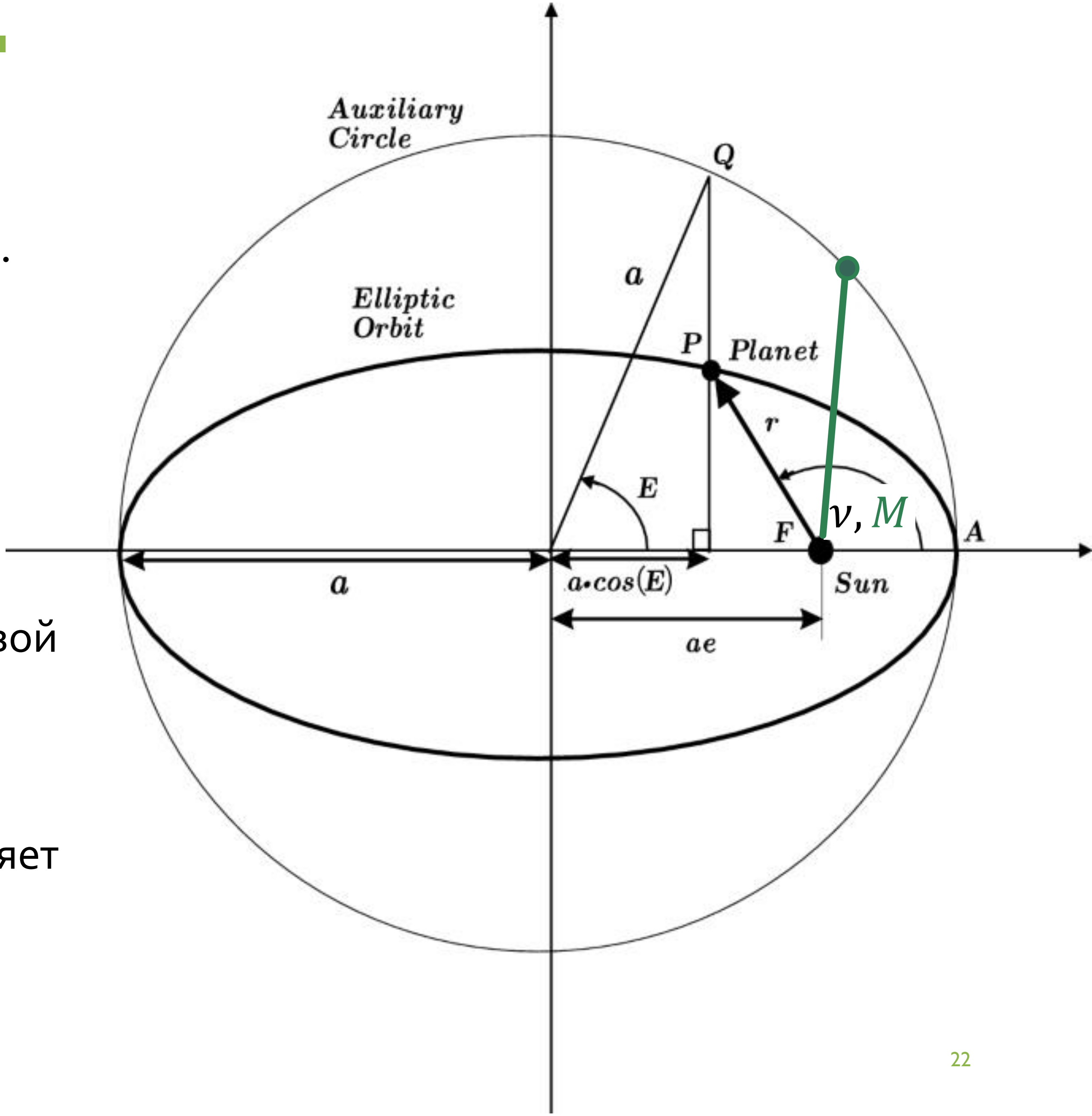
УРАВНЕНИЕ КЕПЛЕРА

$r(E) = a(1 - e\cos E)$ -- эксцентрическая аномалия.

$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$ -- связь эксцентрической и истинной аномалий.

Средняя аномалия $M = 2\pi(t - t_0)/P$ -- описывает равномерное движение фиктивной точки по круговой орбите. Его удобно считать.

$E - e\sin E = M$ -- уравнение Кеплера. Оно Позволяет сравнительно просто посчитать E



ВЕКТОР ЛАПЛАСА-РУНГЕ-ЛЕНЦА

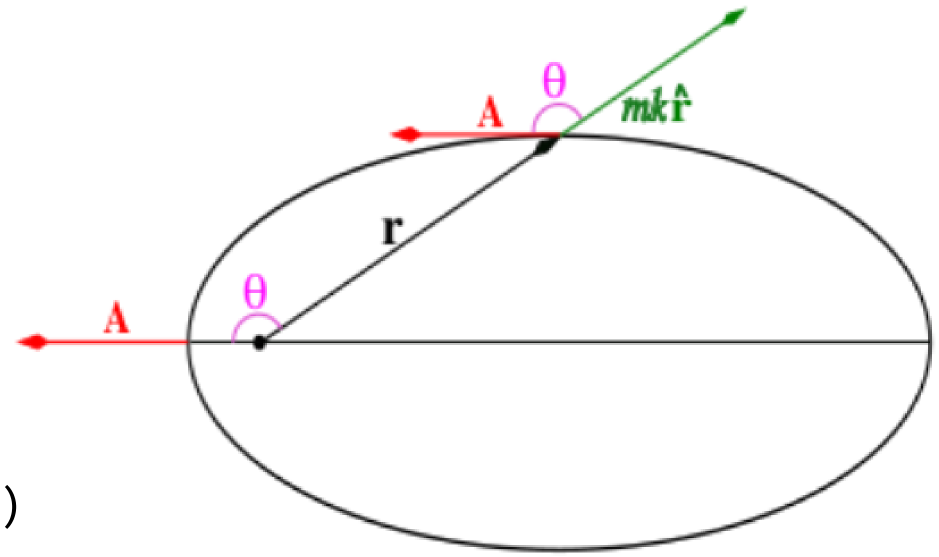
- Специфический интеграл движения для задачи двух тел.

- В общем, является следствием того, что движение происходит в сферически-симметричном потенциале.

- Если конкретно $\varphi \propto 1/r$, то:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) - \frac{GM\mu}{r}\boldsymbol{r} = const,$$

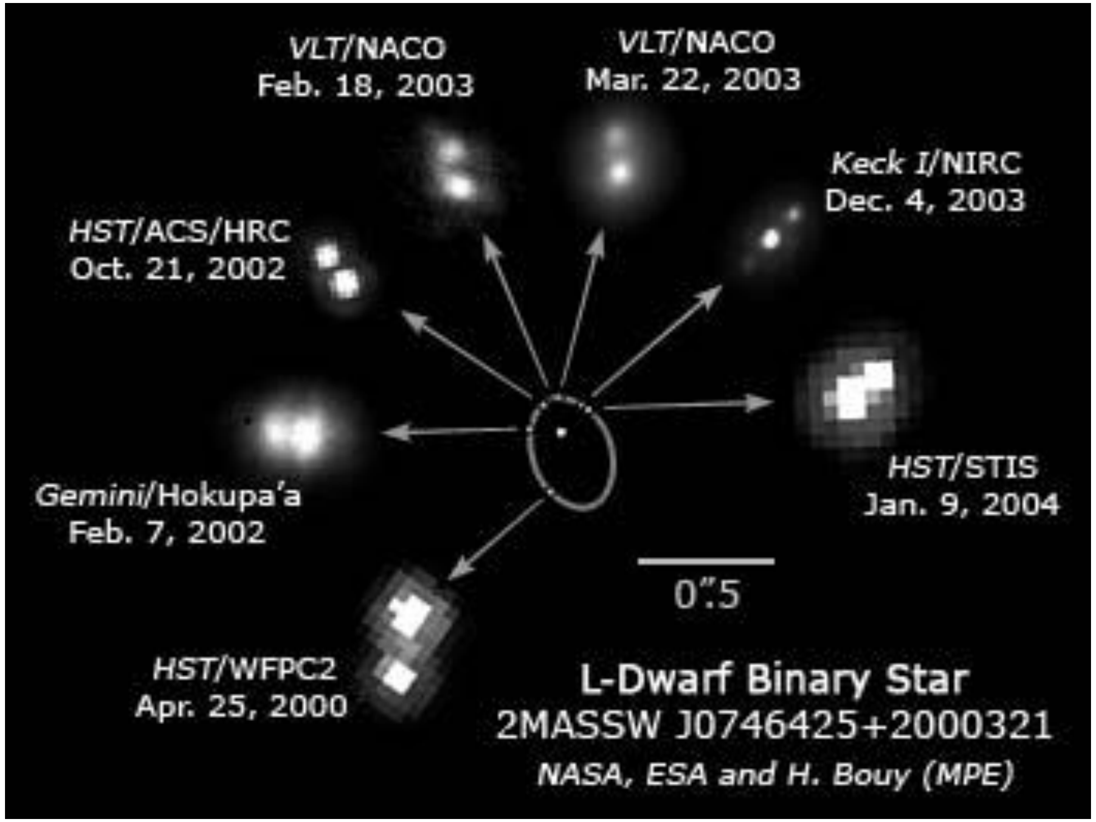
где здесь $\boldsymbol{p} = \mu\boldsymbol{v}$ (не путайте с фокальным параметром!)

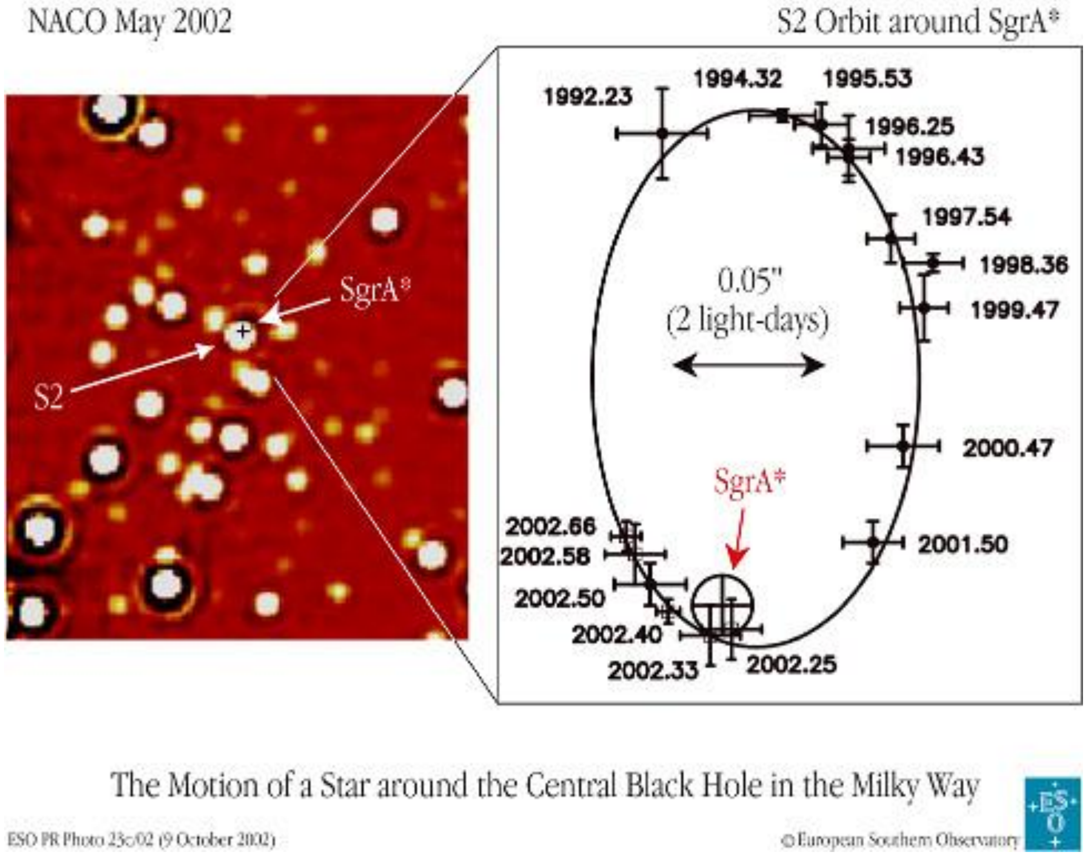


- Через вектор ЛРЛ можно ввести «вектор эксцентриситета: $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}/GM\mu$

- То есть в задаче двух тел сохраняется пространственная ориентация большей полуоси орбиты.

МАССЫ ЗВЁЗД

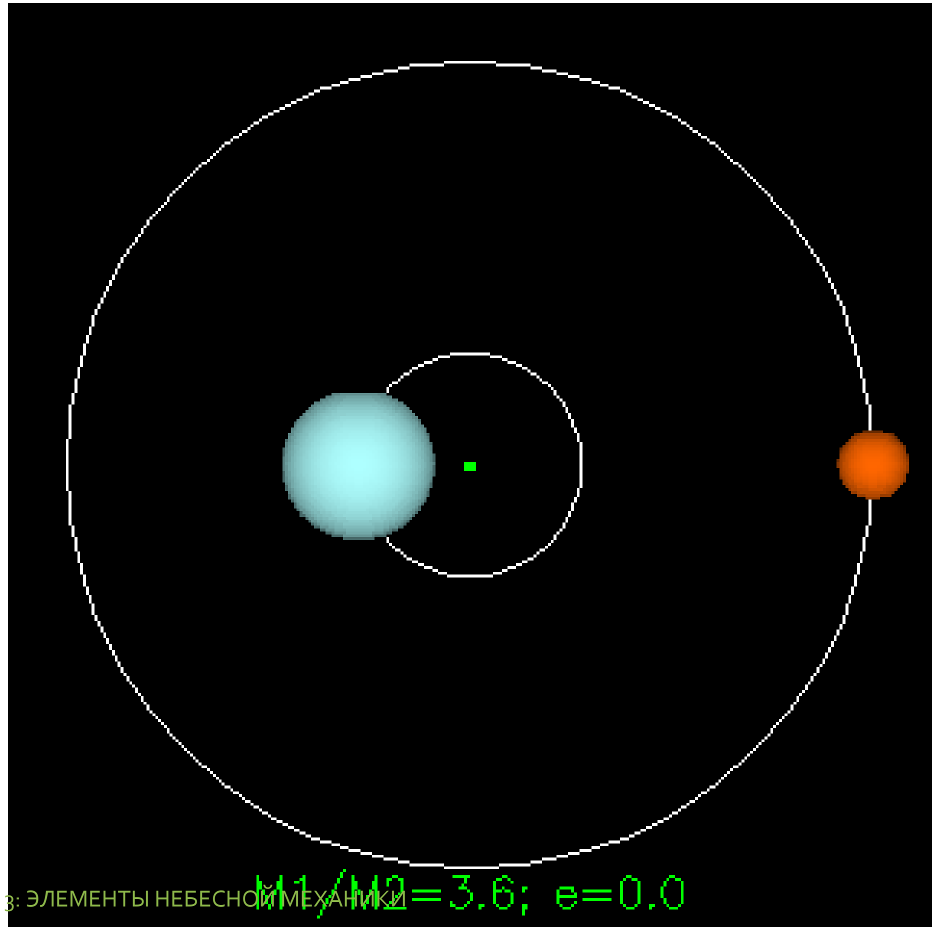


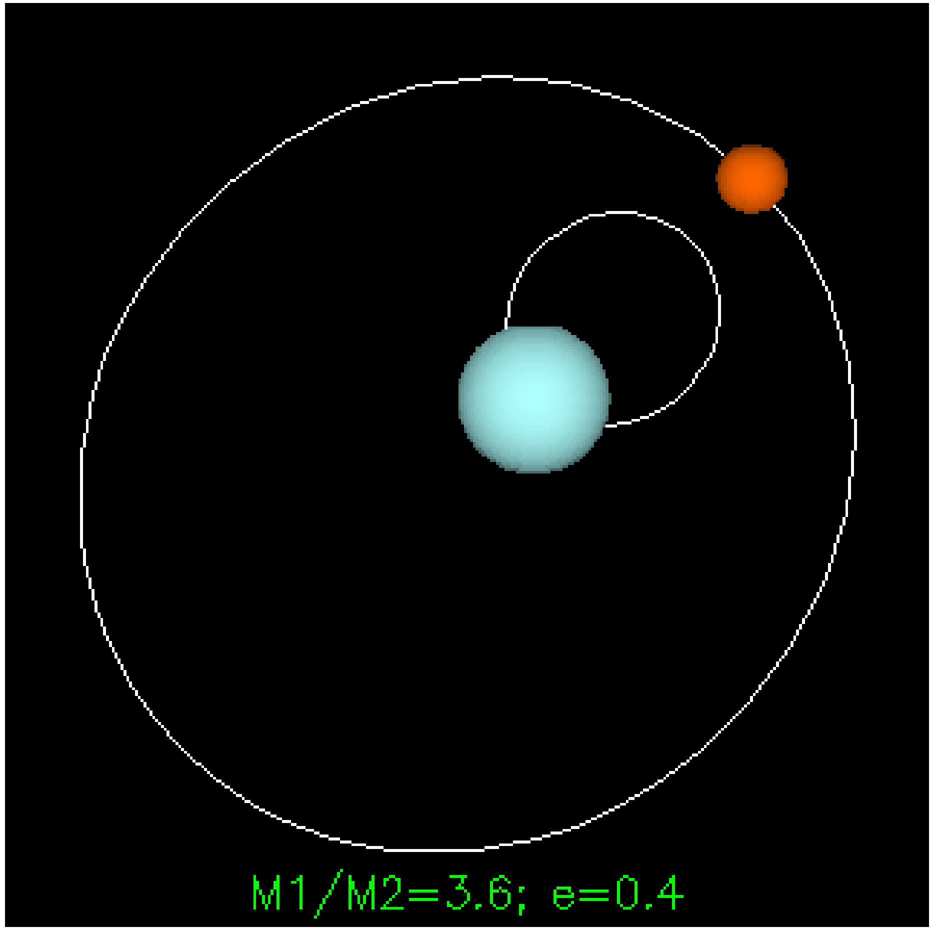


$$\left(\frac{a}{\text{а. е.}}\right)^3 = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{P}{\text{лет}}\right)^2$$

$$M_{\text{bh}} = \frac{a^3_{\text{а.е.}}}{P^2_{\text{лет}}} \approx \frac{\left(10^3\right)^3}{(15.2)^2} \approx 4 \times 10^6 M_\odot$$

ОРБИТЫ В ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ





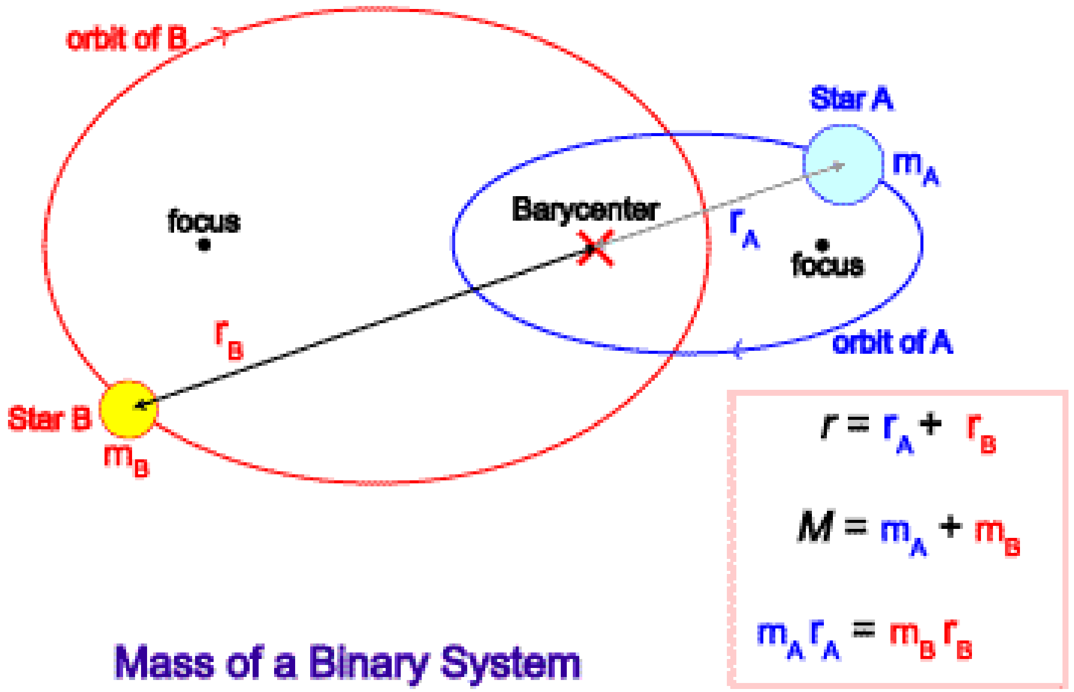
ОРБИТЫ В ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ

- Большая полуось взаимной орбиты равна сумме полуосей орбит относительно барицентра:

$$a = a_1 + a_2$$

- Поэтому, в частности, если два тела равной массы m находятся на **общей** круговой орбите, радиуса R то орбитальный период будет равен:

$$P = \left(\frac{4\pi^2}{G(m+m)}(R+R)^3\right)^{1/2} = 4\pi\left(\frac{R^3}{Gm}\right)^{\frac{1}{2}}$$



ФУНКЦИЯ МАСС ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ

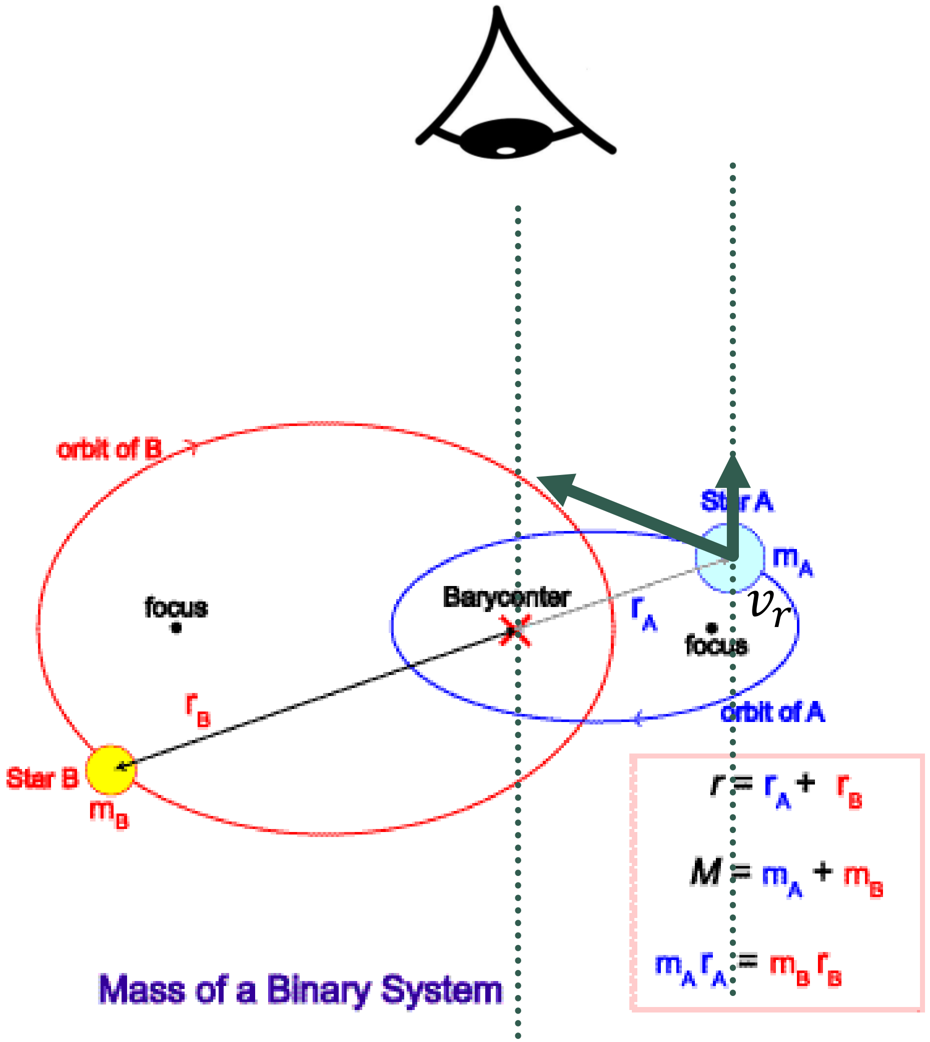
- Часто наблюдается только один из двух компонентов системы. Его лучевая скорость будет испытывать вариации с амплитудой K из-за эффекта Доплера.

- Для системы справедливы:

  a. $G(M_0 + m_x) = \frac{4\pi^2}{P^2}(a_0 + a_x)^3$ **-- 3-й** закон Кеплера;

  b. $M_0 a_0 = m_x a_x$ -- условие центра масс;

  c. $K = \frac{2\pi}{P} a_0 \sin i$ -- амплитуда лучевой скорости за счёт проекции орбиты на картинную плоскость.



ФУНКЦИЯ МАСС ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ

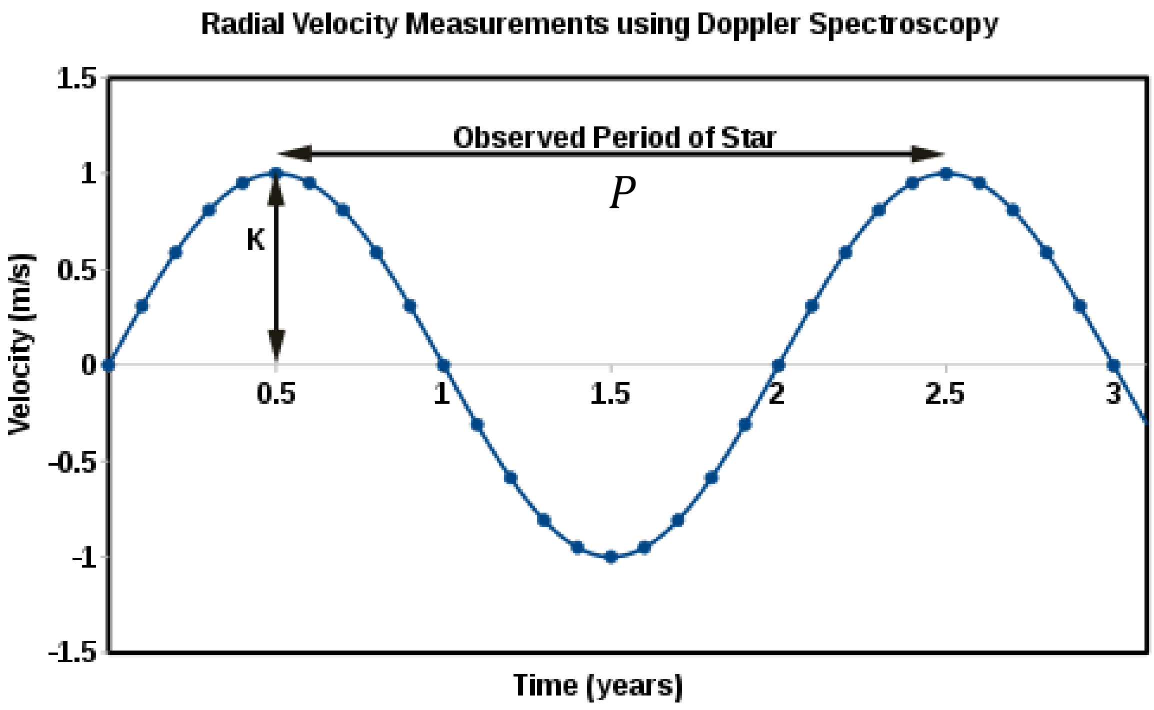
- В итоге **3-**й закон Кеплера переходит в выражение:

$$f(m_x) = \frac{m_x^3 \sin^3 i}{(M_0 + m_x)^2} = \frac{PK^3}{2\pi G}$$

-- это **функция масс двойной системы.** Она позволяет получить нижнюю оценку на массу невидимого компонента из условия $\sin i = 1$.

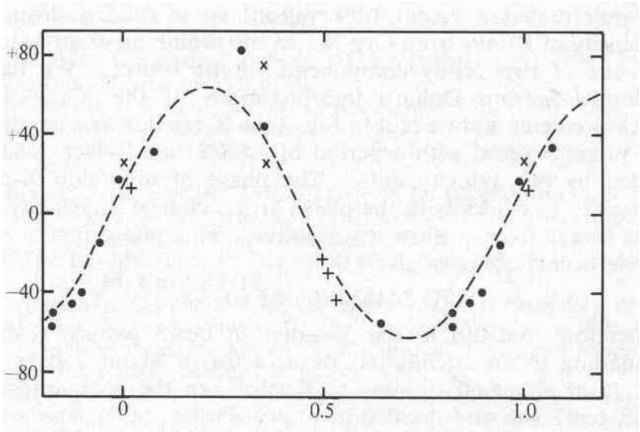
- В частном случае:

$$m_x > \begin{cases} f(m_x), \text{если } m_x \gg M_0 \text{ (чёрная дыра)} \\ M_0^{2/3} f^{1/3}, \text{если } m_x \ll M_0 \text{ (планета)} \end{cases}$$



ЛЕБЕДЬ X-1 (CYGNUS X-1)

$$\begin{cases} K \approx 75 \text{ км с}^{-1} \\ M_{\text{opt}} \sim 30 - 40 M_\odot \text{ (O9.7Iab)} \\ P_{\text{orb}} = 5.6^d \\ d = 2.2 \text{ kpc} \end{cases}$$

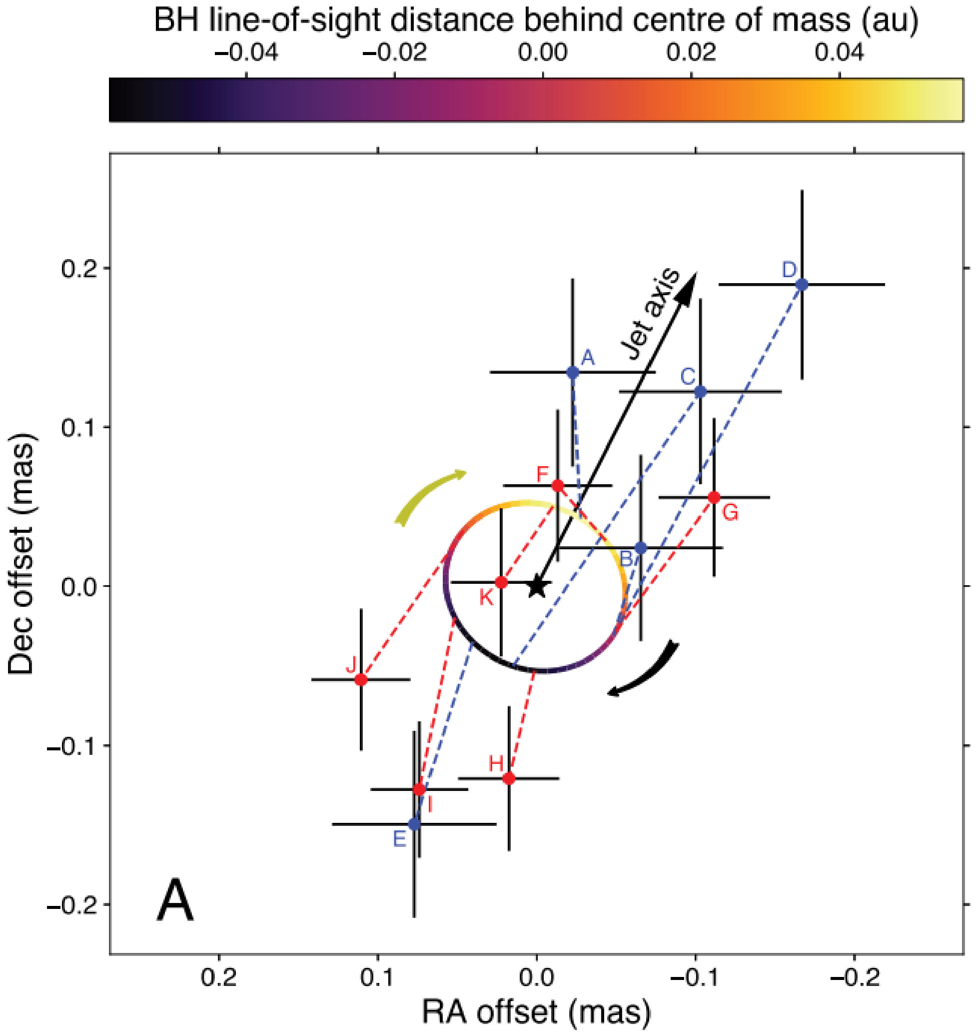


Webster & Murdin 1972

$$f(m_x) = \frac{K^3 P_{\text{orb}}}{2\pi G} \approx 0.25 M_\odot$$

Более аккуратная оценка: $i \approx 27^\circ \Rightarrow m_x = 14.8 \pm 1.0 M_\odot$

Последняя оценка: $m_x = 21.2 \pm 2.2 M_\odot$ (arXiv:2102.09091)



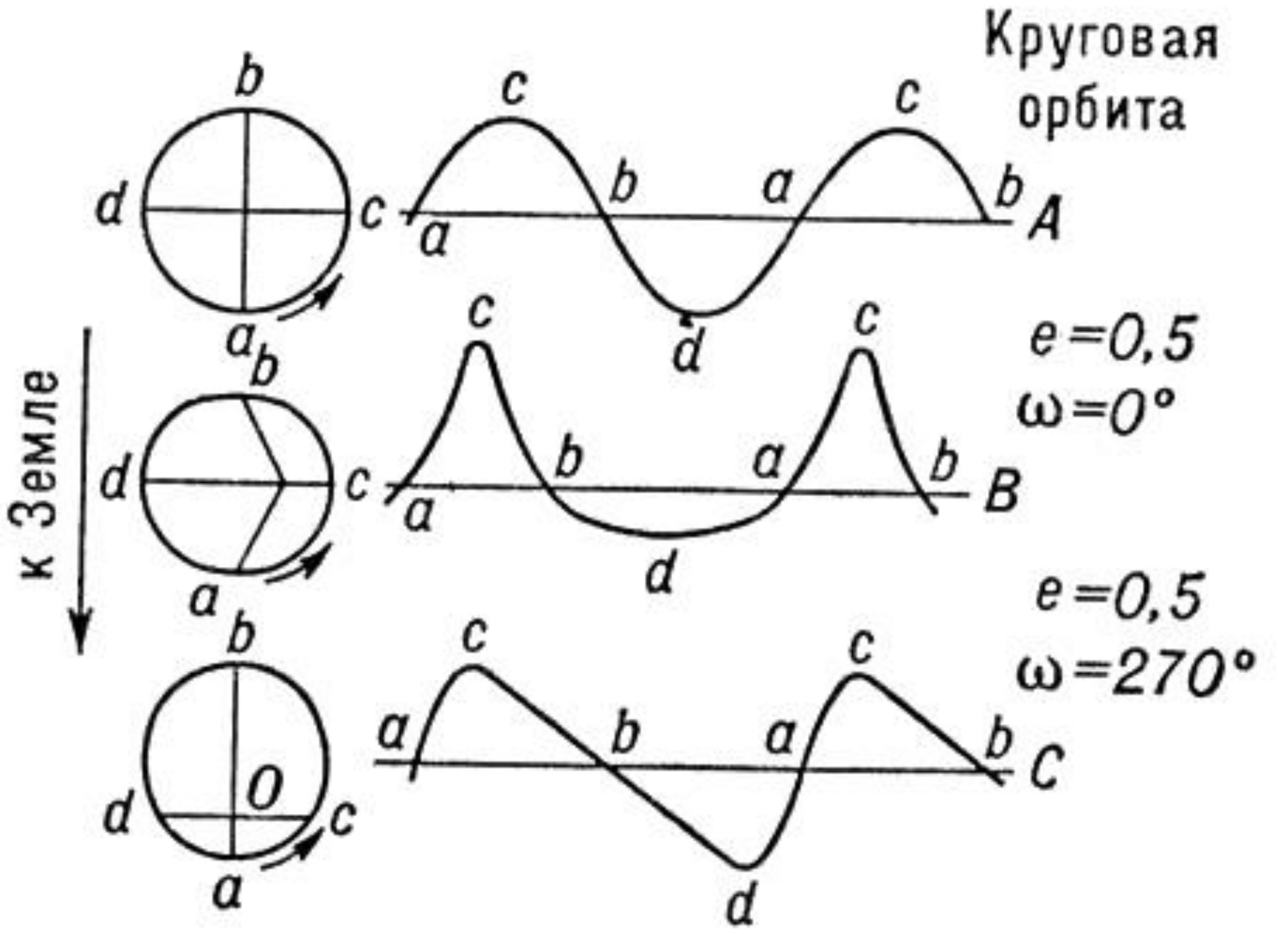
arXiv:2102.09091

ЛУЧЕВЫЕ СКОРОСТИ В ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ

Скорость по лучу зрения определяется из эффекта Доплера и очень информативна с точки зрения параметров системы:

$$V_r = \frac{2\pi}{P}\frac{a_0 \sin i}{\sqrt{1-e^2}}\left[\cos(\nu+\omega) + e\cos\omega\right] + \gamma$$

γ – это так называемая «гамма-скорость». Так называют скорость всей системы как целого относительно наблюдателя.



ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ

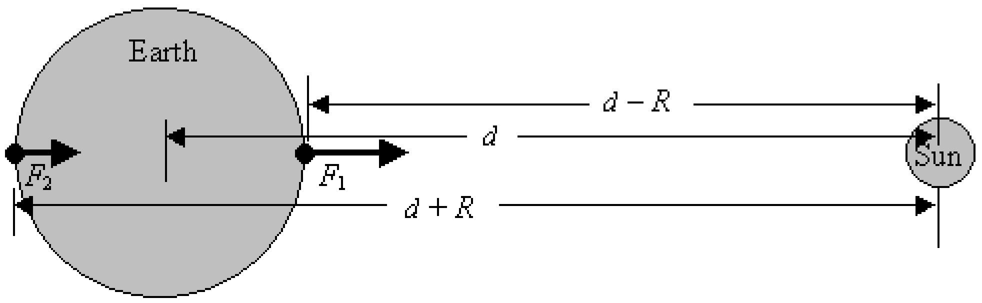
➢ Приливные силы возникают из-за неоднородности поля тяготения.

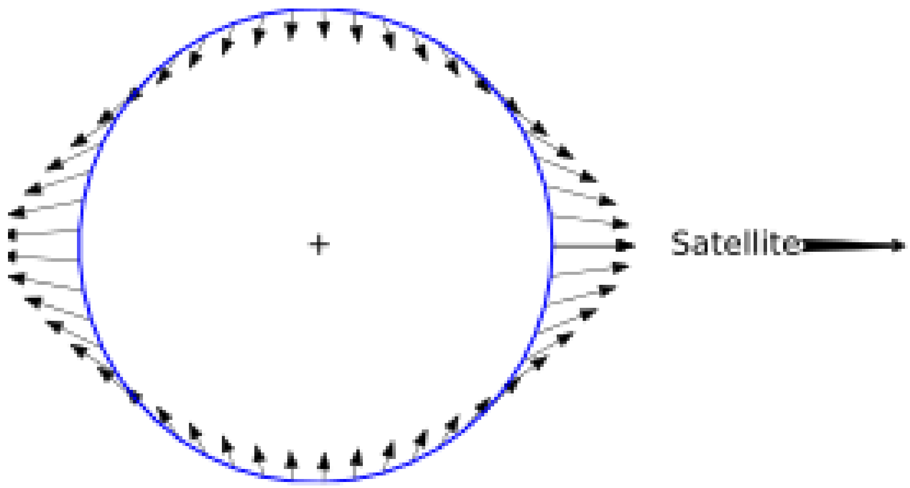
$$\frac{Gm}{R^2} = GM\left(\frac{1}{(d-R)^2} - \frac{1}{(d+R)^2}\right) \sim \frac{GMR}{d^3}$$

Откуда:

$$d_{\min} \approx R\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

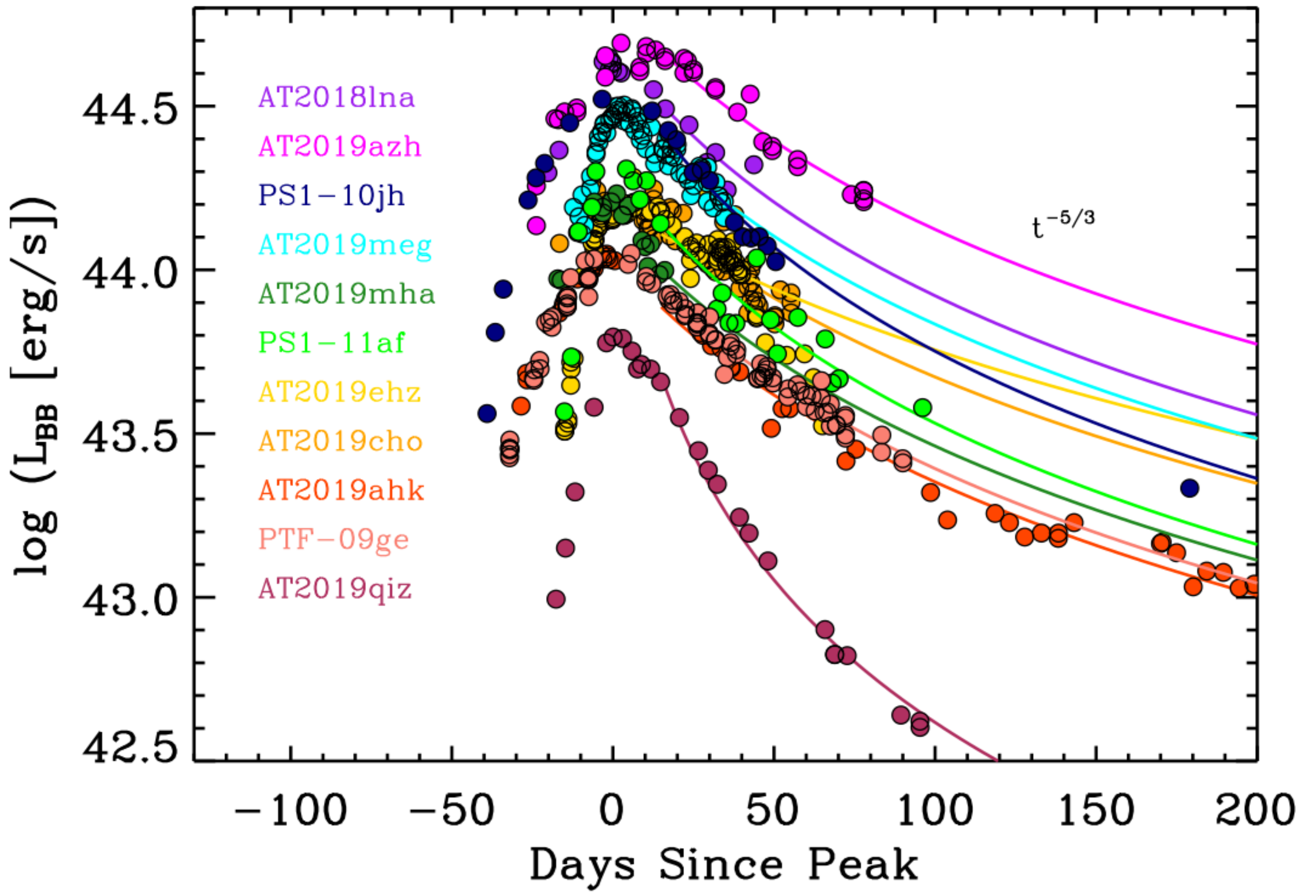
-- предел Роша, ближе которого тело разрывается приливными силами.

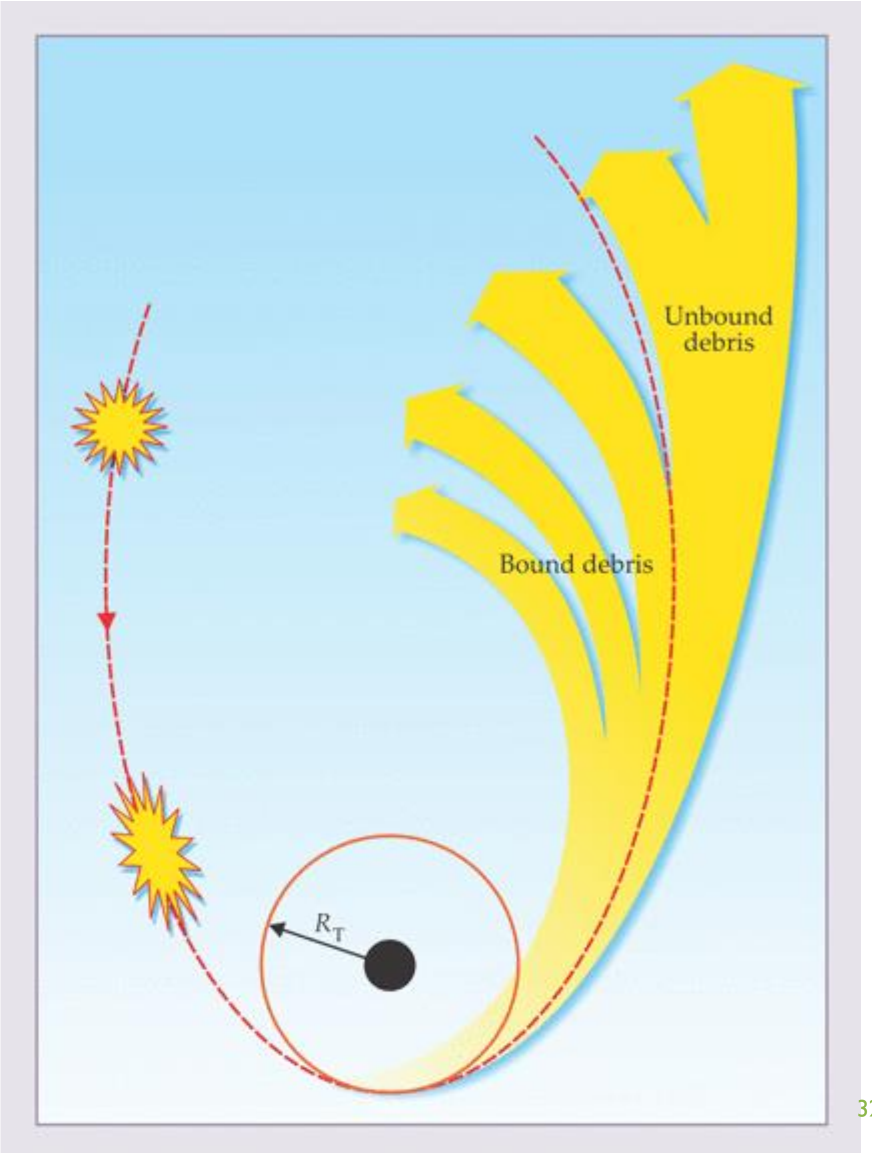




Поле остаточных приливных ускорений относительно центра масс тела.

TIDAL DISRUPTION EVENT (TDE)





arXiv:2104.14580

DEVELOPMENT EPHEMERIS (DE, NASA JPL)

- В астрономии *эфемерида* – это таблица предвычисленных координат небесных тел.
- NASA JPL DE – широко используемые эфемериды тел внутри Солнечной системы.
- По сути DE это набор коэффициентов полиномов Чебышева для координат и скоростей тел СС, полученные численно с учётом постньютоновских поправок.
- Текущий вариант: DE440/441 (Park et al. 2021, The Astronomical Journal, Volume 161, Issue 3, id.105, 15 pp.)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{i,\mathrm{pm-pm}} = \sum_{j\neq i} \frac{GM_j(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{r_{ij}^3}\Bigg\{ 1 - \frac{2(\beta+\gamma)}{c^2} \\
\times \sum_{k\neq i}\frac{GM_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta-1}{c^2}\sum_{k\neq j}\frac{GM_k}{r_{jk}} \\
+ \gamma\left(\frac{v_i}{c}\right)^2 + (1+\gamma)\left(\frac{v_j}{c}\right)^2 - \frac{2(1+\gamma)}{c^2}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j \\
- \frac{3}{2c^2}\left[\frac{(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\cdot\boldsymbol{v}_j}{r_{ij}}\right]^2 + \frac{1}{2c^2}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{a}_j\Bigg\} \\
+ \frac{1}{c^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j}{r_{ij}^3}\{[\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j]\cdot[(2+2\gamma)\boldsymbol{v}_i \\
- (1+2\gamma)\boldsymbol{v}_j]\}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j) \\
+ \frac{(3+4\gamma)}{2c^2}\sum_{j\neq i}\frac{GM_j\boldsymbol{a}_j}{r_{ij}},
\end{aligned}
\tag{27}
$$

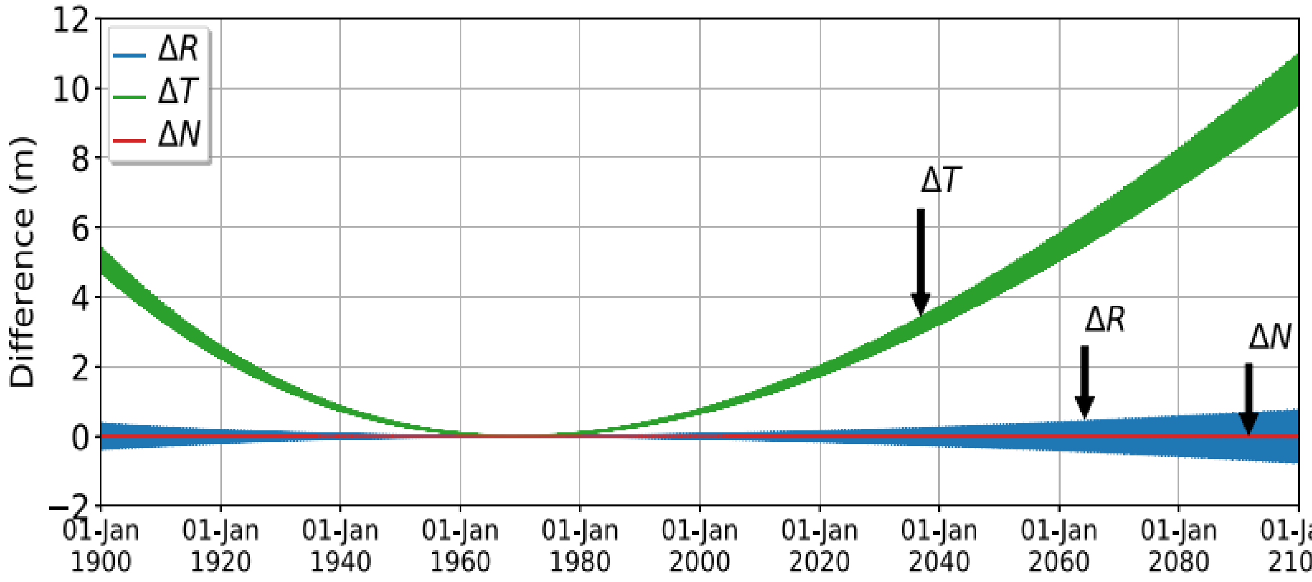
DEVELOPMENT EPHEMERIS (DE, NASA JPL)

- 8 больших планет, 343 малых, 30 объектов пояса Койпера.

- DE440 учитывает вязкое трение между жидким ядром Луны и её корой. Справедлива в интервале 1550-2650 гг. с точностью лучше метра. DE441 зато работает в интервале годов -13200…+17191.

Table 2
Planetary Masses Used in DE440 and DE441

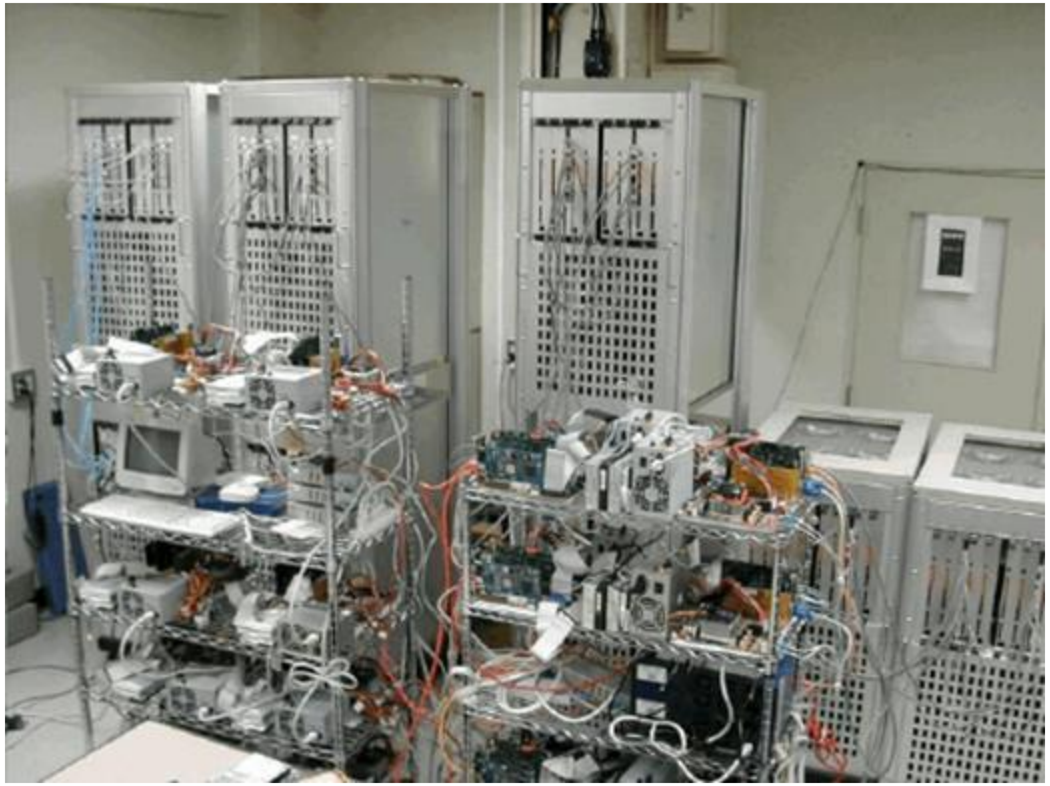
Parameter	Value
GM_{Sun}	132712440041.279419 $km^3\ s^{-2}$ (estimated from DE440)
$GM_{Mercury}$	22031.868551 $km^3\ s^{-2}$ (Konopliv et al. 2020)
GM_{Venus}	324858.592000 $km^3\ s^{-2}$ (Konopliv et al. 1999)
GM_{Earth}	398600.435507 $km^3\ s^{-2}$ (estimated from DE440)
$GM_{Mars\ System}$	42828.375816 $km^3\ s^{-2}$ (Konopliv et al. 2016)
$GM_{Jupiter\ System}$	126712764.100000 $km^3\ s^{-2}$ (SSD JPL 2020)
$GM_{Saturn\ System}$	37940584.841800 $km^3\ s^{-2}$ (SSD JPL 2020)
$GM_{Uranus\ System}$	5794556.400000 $km^3\ s^{-2}$ (Jacobson 2014)
$GM_{Neptune\ System}$	6836527.100580 $km^3\ s^{-2}$ (Jacobson 2009)
$GM_{Pluto\ System}$	975.500000 $km^3\ s^{-2}$ (Brozovic et al. 2015)
GM_{Moon}	4902.800118 $km^3\ s^{-2}$ (estimated from DE440)
GM_{Ceres}	62.62890 $km^3\ s^{-2}$ (Park et al. 2016; Konopliv et al. 2018; Park et al. 2019, 2020a)
GM_{Vesta}	17.288245 $km^3\ s^{-2}$ (Konopliv et al. 2014; Park et al. 2014)



Сравнение моделей DE440 и DE440 по положению Луны на орбите по радиусу (R), положению вдоль орбиты (T) и относительно плоскости орбиты (N)

N-BODY SIMULATIONS

- NEMO (https://github.com/teuben/nemo)
- AMUSE (https://github.com/amusecode/amuse)
- Gadget2 (https://github.com/amusecode/amuse/tree/main/src/amuse/community/gadget2)
- ASCL (https://www.ascl.net/2102.019)
- Задачи звёздной динамики, эволюции Солнечной системы, космологии, эволюции галактик и пр.



GRAPE-6 (GRAvity piPE)

ТЕОРЕМА ВИРИАЛА

Вириал системы N материальных точек $\boldsymbol{r}_k$, движущихся под действием сил $\boldsymbol{F}_k, k = 1..N$:

$$V = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{r}_k \,.$$

Для стабильной (финитной) системы, связанной только внутренними потенциальными силами:

$$2\langle T \rangle_t = -\sum_{k=1}^{N} \langle \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{r}_k \rangle_t \,.$$

В случае кулоновского потенциала, средняя по времени кинетическая и средняя потенциальная энергии системы связаны соотношением:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

-- это теорема вириала. Для случая самогравитирующих систем:

$$M\langle v^2 \rangle \sim \frac{GM^2}{R},$$

где v – характерная скорость частиц в системе, M – масса системы, а R – её характерный радиус.

ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

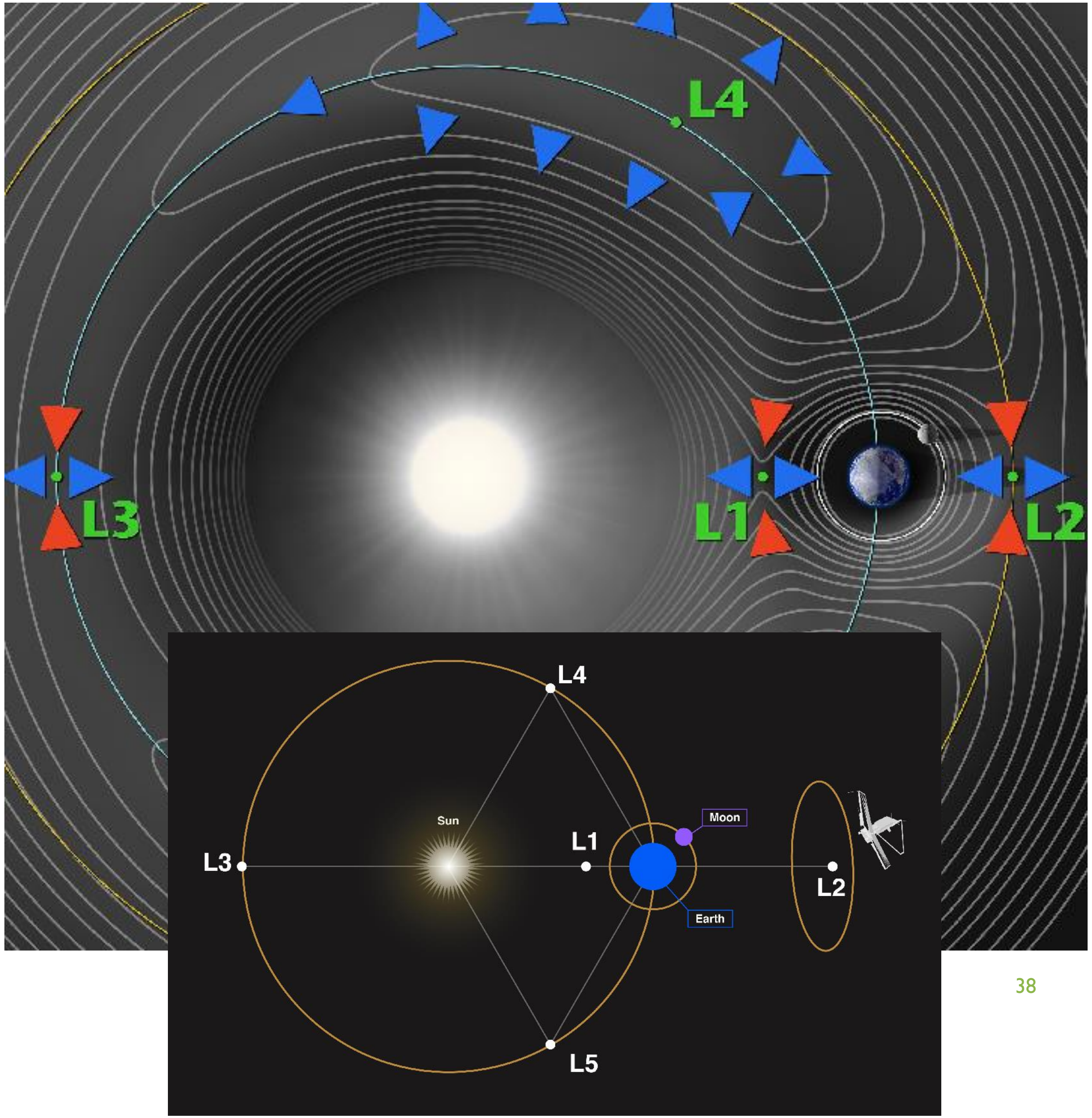
- Это равновесные точки во **вращающейся** системе отсчёта, связанной с двойной системой.

- Вращение добавляет центробежную и кориолисову компоненты в полный потенциал, в котором движется пробная частица массы m.

$$\boldsymbol{F}_m = -\frac{GM_1 m}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) - \frac{GM_2 m}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2) +$$

$$+m\omega^2\boldsymbol{r} - 2\cancel{m\omega\dot{\boldsymbol{r}}}$$

центробежная сила



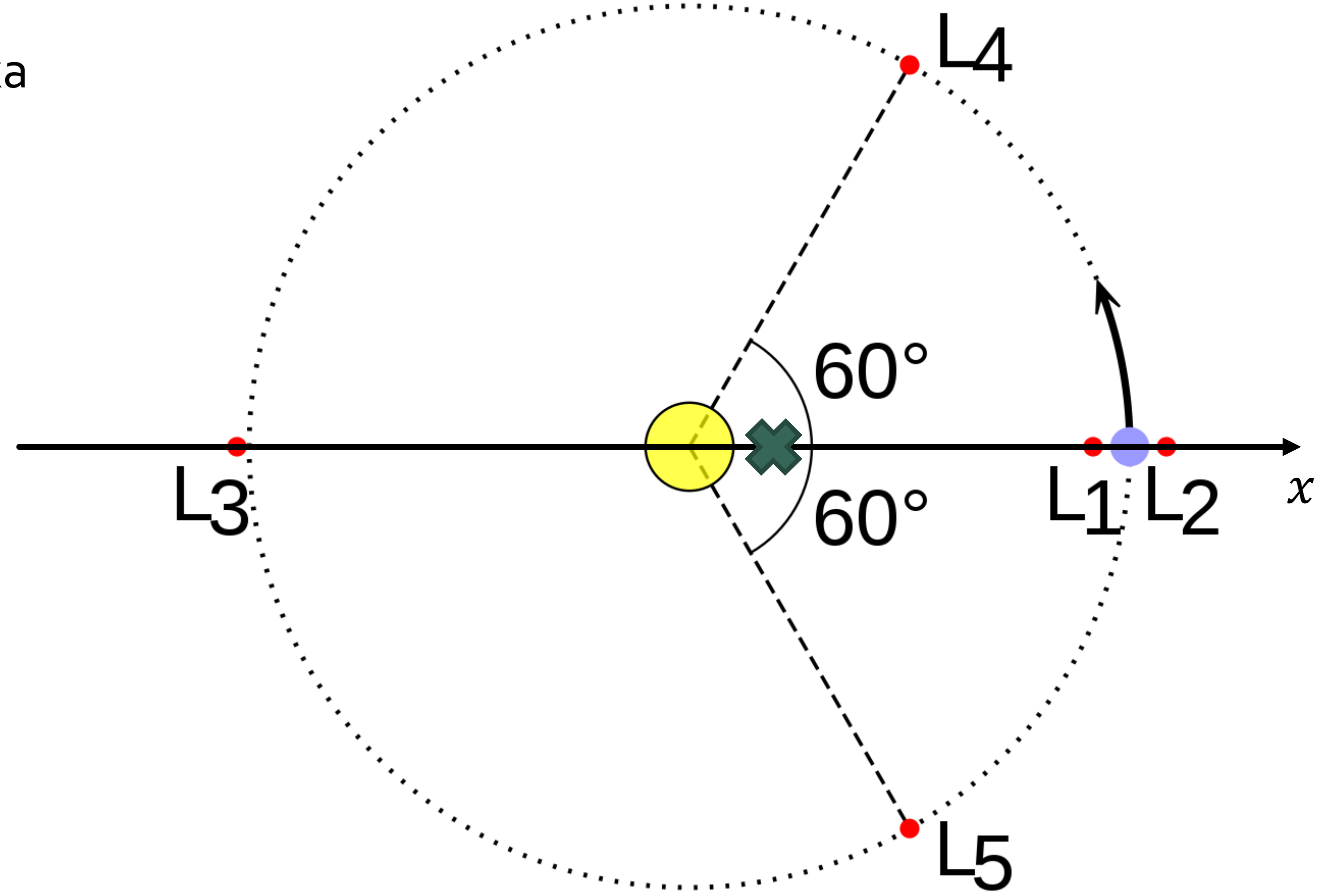
ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

- Координаты **неустойчивых** точек Лагранжа относительно барицентра системы:

$$x(L_1) = a\left(1 - \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}\right)$$

$$x(L_2) = r_2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}\right)$$

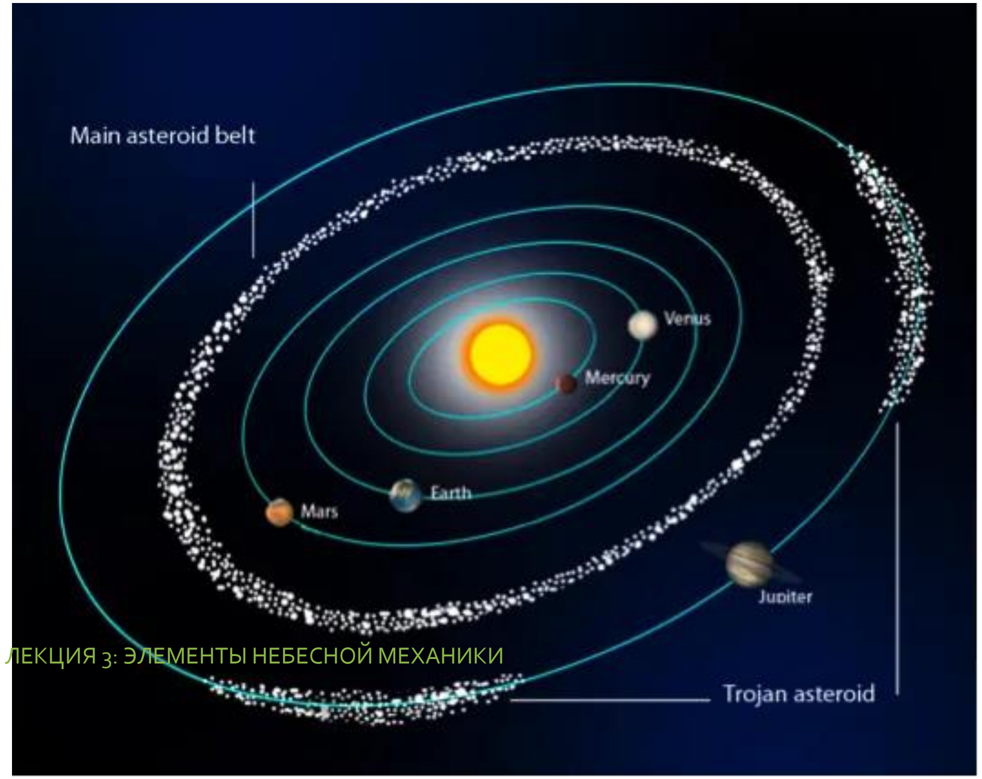
$$x(L_3) - r_1 = r_2\left(1 + \frac{5}{12}\frac{M_2}{M_1}\right)$$

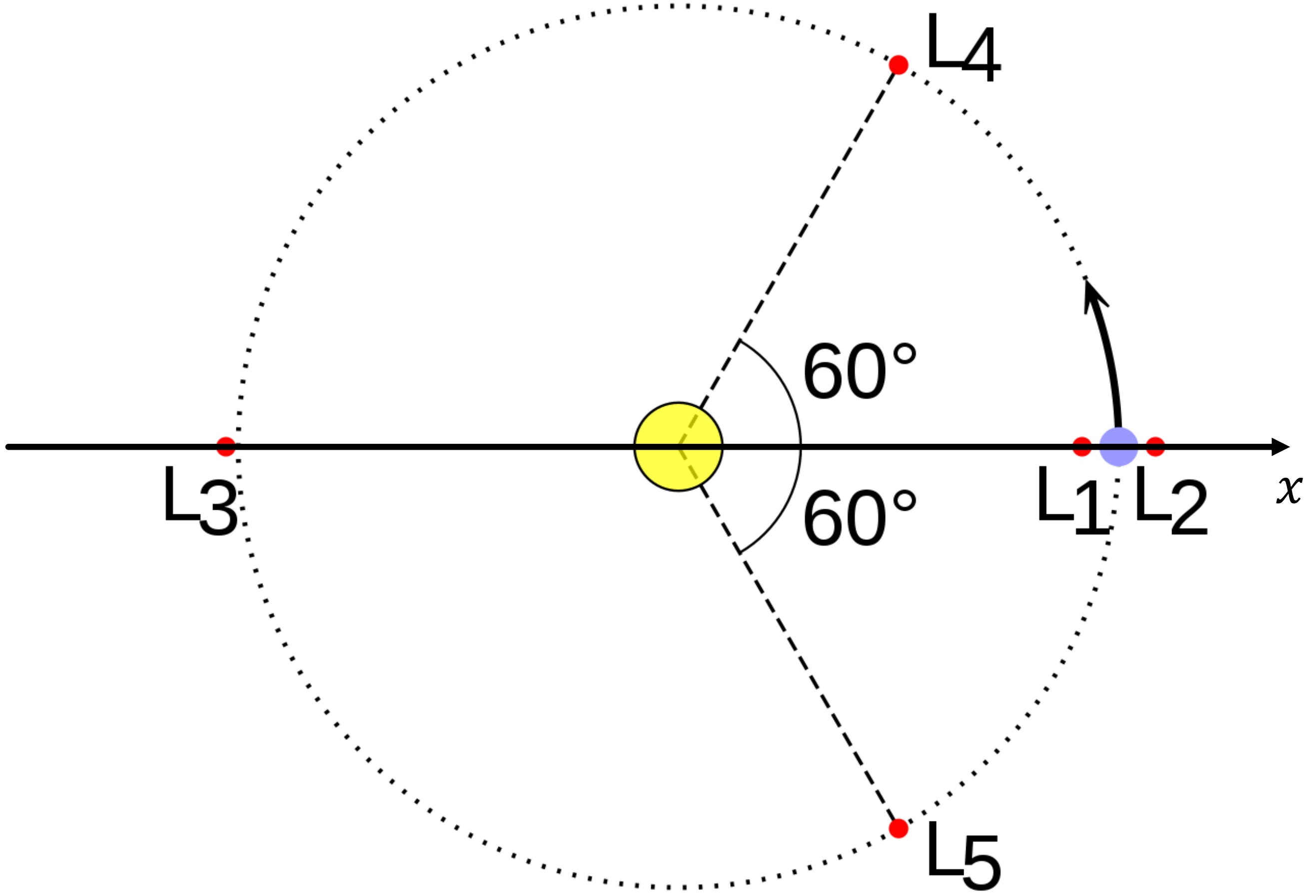


ТОЧКИ ЛАГРАНЖА

- Точки L_4 и L_5 являются устойчивыми, при условии:

$$\frac{M_1}{M_2} > \frac{25}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{625}}\right) \approx 24.96$$





В точках Лагранжа $L_{4,5}$ системы Солнце-Юпитер концентрируются астероиды. Их называют «троянцы».

ЛИТЕРАТУРА

- Кононович, Мороз. «Общий курс астрономии». §§ 2.7-2.19
- Холшевников, Титов. «Задача двух тел», Гл. 1

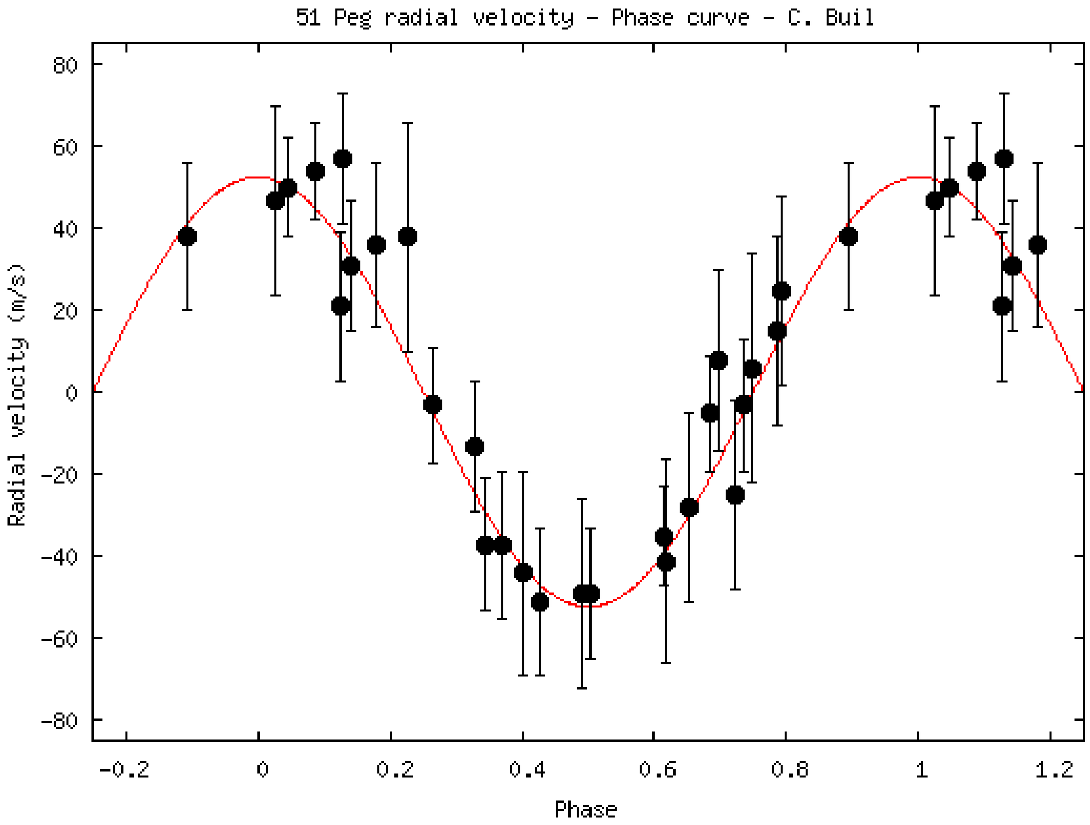
Дополнительно:

- В. С. Бескин. «Гравитация и астрофизика». Учебное пособие (ФИАН-МФТИ, 2007)

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Первые внесолнечные планеты были открыты по своему гравитационному воздействию на звезду-компаньона. Лучевая скорость звезды относительно центра масс системы измеряется на основании эффекта Доплера и из амплитуды этой скорости рассчитывается масса невидимой планеты.

Планета у звезды типа Солнца 51 Пегаса b (51 Pegasi b = Dimidium) была открыта в 1995 году Мишелем Майором и Дидье Кело в 1995 году в рамках такого же метода лучевых скоростей (1995, Nature, 378, 355; нобелевская премия по физике 2019 г.).



Рассчитайте массу 51 Peg b (в массах Юпитера), если известно, что орбитальный период системы равен $P_{\mathrm{orb}} = 4.2^d$, амплитуда лучевой скорости $K = 112$ м/с, масса самой звезды 51 Peg b равна $1.2 M_\odot$, а орбита планеты – круговая.