Université de Liège

Programmation fonctionnelle

Projet : Suite de Sturm et racines d'un polynôme

3ème bachelier en ingénieur civil

Auteur :
Antoine Louis
20152140

Professeur :
P. Gribomont

Assistant :
J-M. Begon

Année académique 2017-2018

Extension de la méthode au cas des polynômes à coefficients réels

Pour rappel, l'objectif du projet était de compter le nombre de racines, sur un intervalle donné, d'un polynôme à coefficients rationnels en utilisant le théorème de Sturm. Nous nous posons à présent la question de savoir si ce théorème reste d'application pour des polynômes à coefficients réels.

Théoriquement parlant, c'est en fait bien le cas. Pour s'en convaincre, nous pourrions reprendre dans les grandes lignes les principes sur lesquels sont fondés le théorème et montrer que ce dernier n'impose aucune hypothèse de rationalité sur les coefficients du polynôme. Une telle démonstration est présente en annexe.

Pratiquement parlant, il n'est pas possible pour un ordinateur de représenter un nombre réel, celui étant toujours arrondi à un nombre fini de décimales, et donc à un nombre rationnel. Comme dans tout programme informatique, il peut alors exister des erreurs d'arrondis, même si ces dernières restent relativement rares puisqu'un arrondi à 10^{-16} (64-bit IEEE754) conduit rarement à une erreur.

En conclusion, il est donc possible d'utiliser le théorème de Sturm pour calculer le nombre de racines d'un polynôme à coefficients réels en assumant qu'il est très rare que l'arrondi de ces coefficients réels en nombre rationnels mènent à une erreur.

Annexe

Supposons $P_0, P_1, ..., P_n$ la suite de Sturm d'un certain polynôme P_x et $\sigma(z)$ le nombre de changements de signe dans la séquence $P_0(z), P_1(z), ..., P_n(z)$. Nous savons qu'un changement de signe dans la suite se produit lorsque le produit de deux éléments consécutifs est négatif. Par conséquent, si l'on considère un intervalle $[a, b]$, nous verrons apparaître un changement de signe dans la séquence décrite ci-dessus si l'un des polynômes P_i $(0 <= i <= n)$ s'annule entre a et b. Nous prouverons alors deux choses :

— Si l'élément qui s'annule est le polynôme de départ P_0, on peut conclure que le nombre de changements de signe diminue d'une unité.

— Si l'élément qui s'annule est un des polynômes $P_i(x)$ $(0 < i <= n)$, le nombre de changements de signe restera constant.

Dans le premier cas, nous savons que, lorsqu'un polynôme rencontre une de ses racines, ce dernier change de signe et prend celui de sa dérivée, et ce indépendamment du fait que les coefficients soient rationnels ou réels. Cela a alors a pour effet de diminuer d'une unité le nombre de changements de signe de la séquence.

Dans le second cas, lorsqu'on traverse une racine de P_i $(0 < i <= n)$, celui-ci prendra soit le signe de P_{i-1}, soit le signe de P_{i+1}. En effet, par définition de la suite de Sturm, on a : $P_{i-1} = P_i Q_i - P_{i+1}$. On constate donc bien qu'au voisinage de la racine de P_i, P_{i-1} et P_{i+1} sont de signes contraires et qu'il n'y aura par conséquent qu'un seul changement de signe dans la séquence, et ce, encore une fois, indépendamment de la rationalité ou non des coefficient du polynôme de départ.

Ainsi, nous montrons bien que la différence du nombre de changements de signes entre a et b est égal au nombre de racines du polynôme P_0, et ce que les coefficients de ce polynôme soient rationnels ou non.