

Review of Gauge Theories

Antoine Géré ^{†,*♣,1,2}

[†]Aix-Marseille University, Master of Mathematics and Theoretical Physics

^{*}Paris Sud 11 University, CNRS, Laboratory of Theoretical Physics, UMR 8627

[♣]University of Genoa, Department of Mathematics

¹`antoine.gere@etumel.univmed.fr`

²`gere@dima.unige.it`

March 14, 2013



Abstract

Du 13 mars au 11 juin 2012, j'ai effectué mon stage de master 2, au laboratoire de physique théorique d'Orsay, sous la direction de Jean-Christophe Wallet. Mon travail a été centré sur la renormalisation des théories de Yang-Mills, depuis la pratique du calcul de diagrammes de Feynman, jusqu'à la construction récursive des contre-terms via les identités de Slavnov liés à la symétrie BRST de l'action fixée de jauge. Je me suis également intéressé à la construction de théorie des champs sur des espaces non-commutatifs. Afin de manipuler ces objets "non commutatifs" j'ai réalisé quelques calculs de corrections radiatives dans des théories de jauge construites sur certains espaces non commutatifs, déformations de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^4 , ce afin de regarder des limites infrarouges intéressantes en 2-D. Si certains de ces calculs sont déjà disponibles dans la littérature, d'autres relatifs à des théories de jauge plus difficiles à manoeuvrer restaient à faire.

En plus de présenter mon travail de stage, j'ai voulu par ce rapport établir une synthèse de ce que j'avais compris en théories des champs. Certains développements sont donc issus de mon apprentissage des cours de cette année de master 2. Je n'ai malheureusement pas eu la place d'insérer l'étude de l'électrodynamique. J'ai par contre fait un rappel en annexe concernant l'obtention des règles de Feynman. J'ai écrit ce rapport avec la volonté qu'il soit accessible avec le moins de prérequis possible.

Contents

1	Introduction	5
2	Quelques considérations classiques	7
2.1	Analyse géométrique	7
2.2	Équation du mouvement, et autres	8
3	Quantification du champ de Yang Mills	10
3.1	Intoduction à l'intégrale de chemin	10
3.2	Quantification hamiltonienne	13
3.2.1	Mise en évidence de la dynamique hamiltonienne	13
3.2.2	Jauge de Coulomb	14
3.2.3	Méthode de Faddeev Popov	17
3.3	Quantification lagrangienne	21
3.4	Règles de Feynman	21
4	Symétrie BRST	22
4.1	Définition	22
4.2	Interprétation géométrique des transformations BRST	24
5	Identités de Slavnov	27
6	Renormalisation	29
6.1	Calcul d'un diagramme de Feynman	29
6.2	Comptage en puissance	29
6.2.1	Définition	29
6.2.2	Identification des diagrammes divergents	30
6.3	Régularisation dimensionnelle	31
6.3.1	Définition	31
6.3.2	Régularisation à 1 boucle	32
6.4	Preuve de la renormalisabilité à tout les ordres	38
7	Apparté Non Commutative	42
7.1	Algèbre de Moyal et théorie de jauge	42
7.2	Theorie de yang Mills Non Commutative sur le plan de Moyal	43
7.2.1	Diagramme 1 boucle avec deux lignes externe en fantôme	45
8	IR div. (D=2)	49
8.1	Feynman Rules	49
8.1.1	Propagator	49
8.1.2	Vertex	49
8.2	Formulary	50
8.2.1	Formulary	50
8.2.2	Proof	51

8.2.3	Diagramm $\bar{c}^0 - c^0$	51
8.2.4	Diagramm $\bar{c}^0 - c^b$	52
8.2.5	Diagramm $\bar{c}^a - c^0$	53
8.2.6	Diagramm $\bar{c}^a - c^b$	53
8.3	Diagramm with 2 exterior Fields legs	53
9	Discussion	53
A	Notations et Conventions utilisées	54
B	Règles de Feynman	55
B.0.1	Motivation	55
B.0.2	Calculs des propagateurs	57
B.0.3	Calculs des vertex	58
B.1	Notions utiles de théorie des distributions	58
C	Acknowledgments	60
D	References	60

1 Introduction

Avant 1970, la compréhension de la physique des particules élémentaires comportait de nombreuses zones d'ombres. Bien que de nombreux succès de la théorie des champs aient été observés et reconnus, l'opinion majoritaire était que la théorie des champs n'était pas la bonne voie pour aboutir un jour à une bonne compréhension de ces phénomènes physiques. En effet la présence de ces fameux "infini" dans la théorie laissait présager qu'elle ne pourrait pas donner entière satisfaction. Le développement perturbatif n'était pas encore accepté, et selon beaucoup de physiciens était la source de ces problèmes. Il semblait nécessaire de reformuler la théorie, de sorte que ces "infinis" disparaissent. Une étape importante a été franchie lorsqu'en 1947 H. Bethe trouva une expression satisfaisante pour le décalage de Lamb. Par la suite J. Schwinger parvint à calculer la première correction quantique de manière systématique. S.I. Tomonaga et R. Feynman, à la vue de ces travaux, établirent les premières bases du mécanisme de renormalisation. De nombreux autres physiciens apportèrent des contributions essentielles au développement de cette théorie de la renormalisation. Mentionnons quelques uns de ces physiciens, F. Dyson, J. Ward, A. Salam, et S. Weinberg, pour ne citer qu'eux.

En 1954 C.N. Yang et R.L. Mills publièrent un article dans lequel ils généralisèrent le concept de théorie de jauge, jusque là connu pour l'électrodynamique, théorie de jauge abélienne, à une théorie non abélienne. L'objectif de cette généralisation était d'expliquer l'interaction forte. Cette idée a été critiquée par W. Pauli, car pour conserver l'invariance de jauge, la théorie est sans masse. Il s'avéra plus tard que l'idée de C.N. Yang et R.L. Mills était correcte, les termes de masses étant obtenus par brisure de symétrie. Cette notion de brisure de symétrie ne sera pas étudiée dans ce rapport.

Ces théories de jauge sont à la base de nombreuses théories physiques. L'électrodynamique, l'électrofaible, la QCD sont des théories de jauge. Il est intéressant de noter que même la théorie de la gravitation, c'est à dire la relativité générale d'Einstein, est une théorie de jauge. Les quatre interactions fondamentales peuvent donc être comprises dans le cadre des théories de jauge.

Mentionnons quelques dates marquantes dans l'histoire de la construction de la théorie de Yang-Mills.

- 1954** Yang et Mills proposent une théorie de jauge non abélienne. Ils généralisent, l'invariance de jauge connue pour QED, à l'interaction faible et l'invariance de l'isospin.
- 1967** Faddeev, Popov, et de Witt proposent une méthode de quantification du champ de Yang Mills sans termes de masse. La même année Weinberg et Salam proposent une théorie de jauge qui unifie QED et l'interaction faible.
- 1971** G. 't Hooft montre que la méthode de quantification des théories de Yang et Mills sans masses peut être étendue au cas d'une brisure spontanée de symétrie.

De nombreuses contributions ont permis de construire une théorie quantique des champs de jauge dans le cadre de la théorie des perturbations. La preuve de la renormalisabilité de cette théorie a été faite via les identités de Slavnov, qui sont les identités de Ward généralisées, issues de la symétrie "cachée" de Becchi, Rouet, Stora, et Tyupkin (BRST).

2 Quelques considérations classiques

Nous allons nous intéresser ici aux théories de jauge. Une théorie de jauge est une théorie des champs pour laquelle le lagrangien est invariant sous des transformations dites de jauge.

Nous travaillerons avec un groupe de Lie compact semi simple de dimension n , noté G , et avec une algèbre de Lie dénoté \mathcal{G} . G et \mathcal{G} seront représentés via la représentation adjointe, noté adj . Une matrice A de $adj(\mathcal{G})$ pourra s'écrire comme une combinaison linéaire de n générateurs.

$$A = T^a \alpha^a, \text{ avec } a = (1, \dots, n).$$

On choisit une normalisation des générateurs de $adj(\mathcal{G})$ de façon à avoir :

$$\begin{aligned} tr(T^a T^b) &= -2\delta^{ab}, \\ [T^a, T^b] &= f^{abc} T^c, \end{aligned}$$

où f^{abc} est la constante de structure de \mathcal{G} , complètement antisymétrique.

2.1 Analyse géométrique

On se donne un fibré principal $P(M, G)$, où M est la variété considérée et G le groupe de structure.

On note V_p l'ensemble des vecteurs tangents à p en un point p du fibré.

$$V_p = \left\{ \frac{d}{dt} (p e^{tX})|_{t=0} / X \in \mathcal{G} \right\}$$

Ils forment l'ensemble des vecteurs verticaux. Il n'y a pas de notion naturelle de vecteurs horizontaux. Ces "vecteurs horizontaux" sont les vecteurs tangents à la variété M , que l'on remonte dans le fibré. On note cet ensemble H_p . On dira qu'une forme différentielle $\omega|_p$ est horizontale si, évalué sur un vecteur vertical, elle s'annule : $\omega|_p(x|_p^v) = 0$. De même $\omega|_p$ sera dite verticale si elle s'annule lorsqu'on l'évalue sur un vecteur horizontal.

Nous pouvons à présent définir ce qu'est une 1-forme de connexion. On définit une 1-forme de connexion $\omega|_p$ sur P à valeur dans \mathcal{G} , en posant, pour tout $p \in P$,

- $\omega|_p(X|_p) = 0$ pour tout $X|_p \in H_p$
- $\omega|_p(X|_p) = A$ pour tout $X|_p \in V_p$.

On peut associer à cette 1-forme de connexion, une 2-forme de courbure sur P , en posant $\Omega = D\omega$, où D est la différentielle covariante. Cette 2-forme Ω vérifie l'équation de structure de Cartan :

$$\Omega(X, Y) = d_p \omega(X, Y) + \frac{1}{2} [\omega(X), \omega(Y)].$$

avec d_p la différentielle extérieure sur P .

On peut montrer que Ω vérifie l'équation de Bianchi :

$$D\Omega = 0 = d_p \Omega(X, Y) + [\omega, \Omega].$$

Une notion importante est celle de groupe de jauge. On appelle groupe de jauge du fibré P , l'ensemble de ses automorphismes verticaux. Un automorphisme Φ est vertical sur le fibré P , si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- 1. Φ est un difféomorphisme de P .
- 2. La fibre $\pi^{-1}(x)$ au dessus de x est stable par ϕ .
- 3. $\forall p \in P, \forall g \in G, \Phi(pg) = \Phi(p)g$

On montre qu'il est équivalent de caractériser un groupe de jauge des trois façons suivantes :

- 1. L'ensemble des automorphismes verticaux $f : P \rightarrow P$.
- 2. L'ensemble des applications $(\psi : P \rightarrow G)$ différentiable G -equivariante pour l'application de G dans G , défini comme $a \rightarrow gag^{-1}$.
- 3. L'ensemble des sections différentiable $S : M \rightarrow P \times G$.

Maintenant ce que l'on souhaiterait, c'est "ramener" ω et Ω sur la variété M . Pour cela, il faut définir ce qu'on appelle une trivialisation locale (U_i, Φ) , de section trivialisante $s : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, où $s(x) = \Phi(x, e)$.

On peut descendre localement la 1-forme de connexion sur P , sur l'ouvert U_i , en posant :

$$A_i = s_i^* \omega$$

qui est une 1-forme sur U_i à valeur dans \mathcal{G} . De la même façon on a :

$$F_i = s_i^* \Omega$$

où F est une 2-forme sur u à valeur dans \mathcal{G} .

Sur $U_i \cap U_j$ A et F , précédemment défini, se recollent de la façon suivante (U_i à un ouvert U_j ($U_i \cap U_j \neq \emptyset$) :

$$\begin{aligned} A_j &= g_{ij}^{-1} A_i g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij} \\ F_j &= g_{ij}^{-1} F_i g_{ij} \end{aligned}$$

où $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$.

Si l'on revient à la physique, A représente le champ de jauge. Les formules de recollement sont en fait les transformations de jauge. De plus l'équation de structure de Cartan nous donne :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + [A_\mu, A_\nu]$$

2.2 Équation du mouvement, et autres

On considère des champs A_μ à valeurs dans \mathcal{G} . Par analogie avec l'électrodynamique, on parvient à écrire le lagrangien de la théorie de Yang Mills. Nous rappelons que le lagrangien de l'électrodynamique s'écrit comme : $\mathcal{L}_{EL} = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ où, $F_{EL \mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. On écrit donc dans le cas des théories de Yang Mills,

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{8} \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

où,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + g[A_\mu, A_\nu].$$

La densité lagrangienne s'écrit alors comme :

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a,$$

où

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + g f^{abd} A_\mu^b A_\nu^d.$$

En appliquant le principe variationnel de la théorie des champs classique, on parvient à écrire les équations du mouvement.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{YM} &= \frac{1}{8} \int Tr (\delta(F_{\mu\nu}) F_{\mu\nu}) dx \\ &= \frac{1}{8} \int Tr (\delta A_\nu (D_\mu F_{\mu\nu})) dx \end{aligned}$$

où D_μ est la dérivée covariante, $D_\mu \bullet = \partial_\mu \bullet + g[A_\mu, \bullet]$. Les équations du mouvement sont donc :

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0.$$

Il est possible de réécrire le lagrangien, en distinguant partie temporelle et partie spatiale sur les indice, tel que : $\mu = (0, k)$, $\nu = (0, l)$, où $(k, l) = (1, 2, 3)$. Une première astuce est d'écrire \mathcal{L}_{YM} comme :

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} tr [(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + g[A_\mu, A_\nu] + F_{\mu\nu}) F_{\mu\nu}].$$

Ensuite si l'on considère A_μ et $F_{\mu\nu}$ comme des variables indépendantes, c'est à dire sans développer $F_{\mu\nu}$, et en effectuant une intégration par partie, on arrive à écrire :

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{-1}{2} tr \left(E_k (\partial_0 A_k) - \frac{1}{2} (E_k^2 + B_k^2) + A_0 C \right)$$

où,

$$\begin{aligned} E_k &= F_{k0} \\ B_k &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{ij} \\ C &= \partial_k E_k - g[A_k, E_k] \end{aligned}$$

On peut identifier E_k et B_k comme respectivement le champ électrique et le champ magnétique de la théorie de Yang Mills. Il est intéressant de remarquer qu'à partir des

équations du mouvement, on peut écrire deux équations qui sont en fait des équations de Maxwell pour la théorie de Yang Mills.

$$\begin{aligned} D_k F_{k0}^a &= 0 \\ D_\mu F_{\mu k}^a &= 0. \end{aligned}$$

En deloppant ces deux relations on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_k E_k^a + g f^{abd} A_k^b E_k^d &= 0, \\ \partial_0 E_k^a + 2\epsilon_{lik} \partial_i B_l^a + g f^{abd} A_0^b E_k^d + 2g f^{abd} A_i^b \epsilon_{lik} B_l^d &= 0, \end{aligned}$$

qui sont deux "pseudos équations de Maxwell" pour la théorie de Yang Mills. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente la transformation de jauge, s'écrit de la façon suivante :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^\omega(x) = \omega(x) A_\mu(x) \omega^{-1}(x) + (\partial_\mu \omega(x)) \omega^{-1}(x)$$

Il est facile de montrer que $F_{\mu\nu}$ se transforme comme $g F_{\mu\nu} g^{-1}$. On en déduit de suite que le lagrangien de Yang Mills est invariant sous cette transformation.

3 Quantification du champ de Yang Mills

3.1 Introduction à l'intégrale de chemin

Nous savons qu'un système à un degré de liberté est régit par l'équation de Shrödinger,

$$i\hbar \partial_{t'} \psi(x, t') = \mathbf{H} \psi(x, t')$$

où \mathbf{H} est l'hamiltonien du système. L'évolution temporelle de $\psi(x, t)$, entre les instants t' et t'' , est représenté par l'opérateur d'évolution $\mathbf{U}(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$,

$$\psi(x, t') = \mathbf{U}(t', t'') \psi(x, t'')$$

où $\mathbf{U}(t', t'')$ vérifie :

$$i\hbar \partial_{t'} \mathbf{U}(t', t'') = \mathbf{H} \mathbf{U}(t', t'')$$

La solution de cette équation est :

$$\mathbf{U}(t', t'') = \exp\left(\frac{t' - t''}{i\hbar} \mathbf{H}\right).$$

En se plaçant dans le système d'unité naturel, où $\hbar = 1$, on a :

$$\mathbf{U}(t', t'') = \exp(i(t' - t'') \mathbf{H}).$$

Notre but va être d'écrire la matrice \mathcal{S} par la méthode de l'intégrale de chemin pour l'oscillateur harmonique. La matrice \mathcal{S} est en fait l'opérateur d'évolution $\mathbf{U}(t', t'')$ entre

les temps $t'' \rightarrow -\infty$ et $t' \rightarrow -\infty$.

La densité hamiltonienne pour l'oscillateur hamiltonienne s'écrit comme :

$$h(p, q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}$$

On introduit les amplitudes complexes suivantes :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q + ip) & q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^*) \\ a^* &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q - ip) & q &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a^* - a) \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow$$

où a^* désigne le conjugué de a . La densité se réécrit donc comme suit :

$$h = \omega a^* a$$

On a dans cette représentation le produit scalaire suivant :

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int (f_1(a^*))^* f_2(a^*) e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2i\pi}$$

Une fonction analytique arbitraire $f(a^*)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes (développement en série de Laurent),

$$\psi_n = \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}$$

On montre facilement que :

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Soit \mathbf{A} un opérateur arbitraire. On peut écrire :

$$(\mathbf{A}f)(a^*) = \int A(a^*, \alpha) f(\alpha^*) e^{-\alpha^* a} \frac{d\alpha^* d\alpha}{2i\pi}$$

avec $A(a^*, a)$ le noyau de \mathbf{A} . Le noyau s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A(a^*, a) &= \sum_{n,m} A_{n,m} \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{a^m}{\sqrt{m!}} \\ &= \sum_{n,m} A_{n,m} \psi_n \psi_m \end{aligned}$$

où,

$$A_{n,m} = \langle \psi_n | \mathbf{A} | \psi_m \rangle$$

Les opérateurs qui vont nous préoccuper ici sont l'opérateur hamiltonien \mathbf{H} , et l'opérateur d'évolution \mathbf{U} . On note \mathbf{U} , l'opérateur d'évolution pour l'intervalle de temps Δt supposé petit. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\Delta t) &= \exp(-i\mathbf{H}\Delta t) \\ &= 1 - i\mathbf{H}\Delta t\end{aligned}$$

le noyau de $\mathbf{U}(\Delta t)$ est :

$$U(a^*, a, \Delta t) = \sum_{n,m} \langle \psi_n | \mathbf{U}(\Delta t) | \psi_m \rangle \psi_n \psi_m^*$$

où,

$$\begin{aligned}\langle \psi_n | U(\Delta t) | \psi_m \rangle &= \langle \psi_n | 1 - i\mathbf{H}\Delta t | \psi_m \rangle \\ &= \langle \psi_n | \psi_m \rangle (1 - ih(a^*, a)\Delta t) \\ &= \delta_{nm} (1 - ih(a^*, a)\Delta t) \\ &= \delta_{nm} e^{-ih(a^*, a)\Delta t}\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}U(a^*, a, \Delta t) &= \sum_{n,m} \delta_{nm} e^{-ih(a^*, a)\Delta t} \psi_n \psi_m^* \\ &= \sum_n e^{-ih(a^*, a)\Delta t} \frac{(aa^*)^n}{n!} \\ U(a^*, a, \Delta t) &= \exp(aa^* - ih(a, a^*)\Delta t)\end{aligned}$$

Dans le cas général on a un intervalle de temps $(t'' - t')$, qui n'est pas forcé d'être petit, bien au contraire. Pour pouvoir utiliser la même méthode que dans le cas d'un intervalle Δt petit, c'est à dire pour pouvoir développer l'exponentielle, on écrit $(t'' - t') = N \frac{(t'' - t')}{N} = N\Delta t$, avec $N \rightarrow \infty$, c'est à dire $\Delta t \rightarrow 0$. On a alors :

$$U(a^*, a, t'' - t') = \int \exp \left(a(t'') a^*(t'') + \int_{t'}^{t''} dt [-a^* \dot{a} - ih(a^*, a)] \right) \frac{da^* da}{2i\pi}$$

ce que l'on peut réécrire, en effectuant une intégration par partie, comme :

$$\begin{aligned}U(a^*, a, t'' - t') &= \int \exp \left(\frac{1}{2} (a(t'') a^*(t'') + a(t') a^*(t')) \right. \\ &\quad \left. + i \int_{t'}^{t''} dt \left(\frac{1}{2i} (\dot{a}^* a - a^* \dot{a}) - ih(a^*, a) \right) \right) \frac{da^* da}{2i\pi}\end{aligned}$$

À présent que nous avons déterminé $U(a^*, a, t'' - t')$, nous sommes en mesure d'obtenir l'expression de la matrice \mathcal{S} . Afin d'obtenir son expression on écrit :

$$\mathcal{S} = \lim_{\substack{t'' \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} U(a^*, a, t'' - t')$$

Pour finaliser notre description de \mathcal{S} étudions comportement asymptotique des deux amplitudes complexes. Les équations d'Euler-Lagrange nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\dot{a}^*(t) - i\omega a^*(t) &= 0 \\ \dot{a}(t) - i\omega a(t) &= 0\end{aligned}$$

On a comme condition limite, $a^*(t'') = a^*$, et $a(t') = a$.
On a alors :

$$\begin{aligned}a^*(t) &= a^* e^{i\omega(t-t')} \\ a(t) &= a e^{i\omega(t''-t)}\end{aligned}$$

L'expression finale de la matrice \mathcal{S} est donc :

$$\mathcal{S} = \int \exp \left(\frac{1}{2} (aa^* + aa^*) + i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2i} (\dot{a}^* a - a^* \dot{a}) - i\hbar(a^*, a) \right] \right) \frac{da^* da}{2i\pi}$$

3.2 Quantification hamiltonienne

3.2.1 Mise en évidence de la dynamique hamiltonienne

Soit $\omega(x)$ une matrice à valeur dans \mathcal{G} .

Nous définissons la transformation de jauge comme suit :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^\omega(x) = \omega(x) A_\mu(x) \omega^{-1}(x) + (\partial_\mu \omega(x)) \omega^{-1}(x)$$

Le lagrangien de Yang-Mills, invariant sous cette transformation de Jauge, s'écrit de cette manière :

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{8} \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}),$$

$$\text{où } F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + g[A_\mu, A_\nu].$$

Ce que l'on peut réécrire comme l'on sait de cette façon :

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{-1}{2g} \text{tr} \left(E_k (\partial_0 A_k) - \frac{1}{2} (E_k^2 + B_k^2) + A_0 C \right)$$

où,

$$\begin{aligned}E_k &= F_{k0} \\ B_k &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{ij} \\ C &= \partial_k E_k - g[A_k, E_k]\end{aligned}$$

On a alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{YM} &= E_k^a(\partial_0 A_k^a) - h(E_k^a, A_k^a) + A_0^a C \\ \text{où,} \quad h(E_k^a, A_k^a) &= \frac{1}{2} [(E_k^a)^2 + (B_k^a)^2]\end{aligned}$$

On peut noter que le lagrangien correspondant au système libre est le suivant :

$$\mathcal{L}_0 = E_k^a(\partial_0 A_k^a) - h(E_k^a, A_k^a).$$

Si on regarde la théorie de yang Mills comme un système mécanique classique, en appliquant le formalisme lagrangien, on voit que E_k et A_k sont les coordonnées canoniquement conjuguées l'une de l'autre, avec le crochet de poisson suivant :

$$\{E_k^a(x), A_l^b(y)\} = \delta^{ab} \delta_{kl} \delta(x - y).$$

On dit que le lagrangien est écrit en fonction des variables canoniques $A_k^a = q$ et $E_k^a = p$. La composante temporelle A_0 n'a pas de variable conjuguée, elle sert de multiplicateur de lagrange afin d'imposer la contrainte $C = 0$. On calcule assez facilement le crochet de poisson de la contrainte :

$$\{c^a(x), c^b(y)\} = g c^d(x) f^{abd} \delta(x - y).$$

On note que l'hamiltonien du système s'écrit comme :

$$h(E_k^a, A_k^a) = \frac{1}{2} [(E_k^a)^2 + (B_k^a)^2],$$

qui est invariant de jauge, et dont le crochet de poisson avec la contrainte est nul.

$$\{H, c^b\} = 0$$

Ceci nous donne une information intéressante, en effet la contrainte sera une constante de la dynamique de notre système.

3.2.2 Jauge de Coulomb

Les coordonnées canoniques q et p précédemment identifiées définissent un espace des phases. Mais les trajectoires dans cet espace des phases dépendent du multiplicateur de lagrange A_0^a . Or on souhaiterait que celle-ci n'en dépende pas. Pour ce faire on doit imposer autant de contraintes supplémentaires que le système n'en possède déjà. Or il n'y a qu'une seule contrainte. Il nous faut donc imposer une seule condition supplémentaire afin de définir l'espace des phases réduit, où les trajectoires ne dépendraient plus du multiplicateur de Lagrange A_0^a . On choisit donc comme contraintes supplémentaires, la jauge de Coulomb.

$$\partial_k A_k := 0.$$

qui vérifie bien :

$$\{\partial_k A_k, \partial_k A_k\} = 0$$

Il est nécessaire d'avoir,

$$\det \{C, \partial_k A_k\} \neq 0$$

Or on a,

$$\begin{aligned} \{C^a(x), \partial_k A_k^b(y)\} &= \partial_k \left[\partial_k \delta^{ab} - g f^{abd} A_k^d \right] \delta(x-y) \\ &= M_c \delta(x-y). \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que M_c s'exprime sous forme d'une série en g . Par analogie avec l'électrodynamique on écrit :

$$\begin{aligned} A_k &= A_k^L + A_k^T \\ E_k &= E_k^L + E_k^T \end{aligned}$$

où

$$\partial_k A_k^T = 0 = \partial_k E_k^T$$

et,

$$\begin{aligned} A_k^L &= \partial_k B(x) & B(x) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|x-y|} \partial_k A_k(y) dy \\ E_k^L &= \partial_k Q \end{aligned}$$

L'équation des contraintes s'écrit comme :

$$\begin{aligned} CE_k = 0 &\Leftrightarrow \Delta Q - g[A_k, \partial_k Q] - g[A_k, E_k^T] = 0 \\ &\Leftrightarrow M_c Q = g[A_k, E_k^T] \\ &\Leftrightarrow Q = g M_c^{-1}[A_k, E_k^T] \end{aligned}$$

On obtient Q comme une série en g , fonction de A_k^T et E_k^T . En injectant ceci dans l'expression de l'hamiltonien de départ h , on arrive à exprimer h^* , hamiltonien de l'espace des phases réduit, comme une série en g . On a en plus comme coordonnées canonique de notre nouvel espace des phase,

$$\begin{aligned} p^* &= E_k^T \\ q^* &= A_k^T. \end{aligned}$$

Il faut noter que E_k^T et A_k^T ont deux états de polarisations. Les variables canoniques de notre nouvel espace des phase s'expriment en fonction des amplitudes complexes suivantes, introduites dans la représentations holomorphes :

$$\begin{aligned} a_i^*(k, t) \\ a_i(k, t) \end{aligned}$$

Par analogie avec le cas simple de l'oscillateur harmonique, on écrit :

$$\begin{aligned} A_l^{T,b}(x,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \sum_{i=1,2} \left(a_i^{\star b}(k,t) u_l^i(-k) e^{-ikx} + a_i^b(k,t) u_l^i(k) e^{-ikx} \right) \\ E_l^{T,b}(x,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int d^3k \sum_{i=1,2} \left(a_i^{\star b}(k,t) u_l^i(-k) e^{-ikx} - a_i^b(k,t) u_l^i(k) e^{-ikx} \right) \left(i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \right) \end{aligned}$$

Par commodité pour la suite nous posons,

$$\begin{aligned} \alpha &= a_i^{\star b}(k,t) u_l^i(-k) e^{-ikx} + a_i^b(k,t) u_l^i(k) e^{-ikx} \\ \epsilon &= a_i^{\star b}(k,t) u_l^i(-k) e^{-ikx} - a_i^b(k,t) u_l^i(k) e^{-ikx} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \lim_{\substack{t'' \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left(i \int d^3k \sum_{i=1,2} \left[a_i^{\star b}(k,t'') a_i^b(k,t') + a_i^{\star b}(k,t') a_i^b(k,t'') \right] \right. \\ &\quad \left. + i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3k \sum_{i=1,2} \left[\dot{a}_i^{\star b}(k,t) a_i^b(k,t) + a_i^{\star b}(k,t) \dot{a}_i^b(k,t) - h^{\star} \right] \right) \frac{da^{\star} da}{2i\pi}. \end{aligned}$$

Si on fait le petit calcul suivant :

$$\epsilon \dot{\alpha} - \dot{\epsilon} \alpha = 2 \left(\dot{a}_i^{\star b}(k,t) a_i^b(k,t) + a_i^{\star b}(k,t) \dot{a}_i^b(k,t) \right),$$

on voit de suite que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \lim_{\substack{t'' \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left(i \int d^3k \sum_{i=1,2} \left[a_i^{\star b}(k,t'') a_i^b(k,t') + a_i^{\star b}(k,t') a_i^b(k,t'') \right] \right. \\ &\quad \left. + i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3k \sum_{i=1,2} \left[\frac{-1}{4} \text{tr} \left(E_l^T \dot{A}_l^T - \dot{E}_l^T A_l^T \right) - h^{\star} \right] \right) \frac{da^{\star} da}{2i\pi} \end{aligned}$$

On a la matrice \mathcal{S} donc normalement on a tout ! Mais h^{\star} , qui est notre nouvel hamiltonien (fonction de E_k^T et A_k^T) sur l'espace des phases réduit, n'est connu que sous la forme d'une série en g ! De plus on intègre sur tout les x , ceci pose un problème car on a considéré au départ une jauge locale !

Solutions à nos problèmes :

- On va intégrer sur tout les A_μ et E_k de sorte à "récupérer" le lagrangien de départ.

- Pour se restreindre quand même à notre espace des phases réduit, on insère $\delta(\partial_k A_k)$ qui va permettre de sélectionner seulement les champs d'une seule classe de jauge, c'est à dire un ensemble de A_μ indépendant.
- On introduira $\det(M_c)$ qui jouera le rôle du jacobien pour la condition de jauge (ceci est expliqué plus en détail dans la partie concernant la méthode de Faddeev Popov).

La matrice \mathcal{S} peut donc s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \lim_{\substack{t'' \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left(i \int d^3 k \sum_{i=1,2} \left[a_i^{\star b}(k, t'') a_i^b(k, t'') + a_i^{\star b}(k, t') a_i^b(k, t') \right] \right. \\ & \left. + i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3 k \left[\frac{-1}{4} \text{tr} \left(E_l \dot{A}_l - \dot{E}_l A_l \right) E_l^2 - B_l^2 + 2(\partial_l E_l - g[A_l, E_l]) \right] \right) \\ & \delta(\partial_l A_l) \det(M_c) dA_l dE_l dA_0 \end{aligned}$$

Que l'on peut encore écrire comme :

$$\mathcal{S} = N^{-1} \int \exp \left(i \int dx \frac{1}{8} \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \right) \delta(\partial_l A_l) \det(M_c) dA_\mu$$

On a malgré tout toujours un problème très gênant, on a une matrice \mathcal{S} qui n'est manifestement pas covariante. On est tenté de prolonger ce que l'on vient de faire pour la jauge de Lorentz $\partial_\mu A_\mu = 0$, qui est covariante par définition. Pour faire ceci on va utiliser la méthode de Faddeev Popov.

3.2.3 Méthode de Faddeev Popov

L'idée très astucieuse de Faddeev et Popov est de bien réécrire 1, en terme d'une fonctionnelle invariante de jauge et d'une intégrale sur le paramètre de jauge. Débutons par un exemple simple afin de se familiariser avec cette méthode.

Un exemple à deux dimensions

On considère une action \mathcal{I}_{2D} invariante par rotation dans un espace à deux dimensions. La matrice \mathcal{S}_{2D} s'écrit comme :

$$\mathcal{S}_{2D} = \int \mathcal{D}(r, \theta) \exp(i\mathcal{I}_{2D}(r, \theta))$$

L'idée est d'écrire 1 de la bonne façon ! Faddeev et Popov ont réécrit 1 de cette façon :

$$1 = \left| \frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta} \right| \int \delta(g(r, \theta + \phi)) d\phi$$

On pose généralement :

$$\Delta(\theta) = \left| \frac{\partial g(r, \theta)}{\partial \theta} \right|.$$

Montrons que $\Delta(\theta)$ est invariant par rotation.

$$\begin{aligned}
1 &= \Delta(\theta) \int \delta(g(r, \theta + \phi)) d\phi \\
&= \Delta(\theta + \phi_2) \int \delta(g(r, \theta + \phi_2 + \phi_1)) d\phi_1 \\
1 &= \Delta(\alpha) \int \delta(g(r, \alpha + \phi_1)) d\phi_1
\end{aligned}$$

Il est donc assez immédiat de montrer ici que $\Delta(\theta)$ est invariant par rotation. Si on insère cette réécriture de 1 dans \mathcal{S}_{2D} on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{2D} &= \int \mathcal{D}(r, \theta, \phi) \exp(i\mathcal{I}_{2D}(r, \theta)) \Delta(\theta) \delta(g(r, \theta + \phi)) \\
&= \int \mathcal{D}(r, \theta + \phi, \phi) \exp(i\mathcal{I}_{2D}(r, \theta + \phi)) \Delta(\theta + \phi) \delta(g(r, \theta + \phi)) \\
&= \int \mathcal{D}(\phi) \int \mathcal{D}(r, \alpha) \exp(i\mathcal{I}_{2D}(r, \alpha)) \Delta(\alpha) \delta(g(r, \alpha))
\end{aligned}$$

On a pu mettre en facteur un "volume", $\mathcal{D}(\phi)$, indépendant des paramètres du système (les champs). Ce facteur est une simple constante multiplicative, on peut donc l'ignorer dans la suite des calculs.

Méthode de Faddeev-Popov pour la matrice \mathcal{S} de Yang Mills

Revenons à ce qui nous interesse, c'est à dire à la matrice \mathcal{S} . Ce que nous voulons c'est prolonger l'expression de la matrice \mathcal{S} obtenue par le biais de la jauge de coulomb, à un résultat covariant.

On réécrit 1 une première fois dans la jauge de Coulomb.

$$\Delta^{-1}(A_k) := \int \delta(\partial_k A_k^\omega) d\omega$$

Nous allons montrer que $\Delta^{-1}(A_k)$ est invariant sous la transformation de jauge.

Nous pouvons écrire :

$$\Delta^{-1}(A_k^{\omega_2}) = \int \delta(\partial_k (A_k^{\omega_1})^{\omega_2}) d\omega_1,$$

or on remarque que :

$$\begin{aligned}
(A_k^{\omega_1})^{\omega_2} &= \omega_2 A_k^{\omega_1} \omega_2^{-1} + (\partial_k \omega_2) \omega_2^{-1} \\
&= \omega_2 \omega_1 A_k \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} + \omega_2 (\partial_k \omega_1) \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} + (\partial_k \omega_2) \omega_2^{-1} \\
&= (\omega_2 \omega_1) A_k (\omega_2 \omega_1)^{-1} + \partial_k (\omega_2 \omega_1) (\omega_2 \omega_1)^{-1} \\
&= A_k^{\omega_2 \omega_1}.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(A_k^{\omega_2}) &= \int \delta(\partial_k A_k^{\omega_1 \omega_2}) d\omega_1 \\
&= \int \delta(\partial_k A_k^{\omega_1 \omega_2}) d(\omega_1 \omega_1) \\
&= \int \delta(\partial_k A_k^\omega) d\omega \\
\Delta^{-1}(A_k^{\omega_2}) &= \Delta^{-1}(A_k).
\end{aligned}$$

On a donc bien $\Delta^{-1}(A_k)$ invariant sous la transformation de jauge.
Par analogie avec l'exemple 2-dimentionnel, on écrit :

$$\Delta(A_k) = \left| \det \left(\frac{\delta(\partial_k A_k^\omega)}{\partial_k \omega} \right) \right|$$

Grâce à la fonction δ de Dirac il suffit de considérer des configurations A_k voisine d'une configuration $\partial_k A_k = 0$. Ce qui nous amène à écrire :

$$\omega = 1 + u + \mathcal{O}(u^2)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
A_k^\omega &= (1 + u)A_k(1 - u) + \partial_k u(1 - u) + \mathcal{O}(u^2) \\
&= A_k - [A_k, u] + \partial_k u.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\partial_k A_k^\omega &= \partial_k A_k - \partial_k [A_k, u] + \Delta u \\
&= \Delta u - [A_k, \partial_k u] := M_c,
\end{aligned}$$

ce qui nous permet donc d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(\partial_k u A_k^\omega)}{\partial_k \omega} &= \frac{\delta(\partial_k A_k^\omega)}{\partial_k u} \\
&= \Delta - \partial_k [A_k,] := M_c,
\end{aligned}$$

d'où,

$$\Delta(A_k) = |\det(M_c)|.$$

On montre de même que pour la jauge de Lorentz ($\partial_\mu A_\mu = 0$), on a :

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(A_\mu) &:= \int \delta(\partial_\mu A_\mu^\omega) d\omega \\
\text{avec : } \Delta(A_\mu) &= |\det(M_L)| \\
\text{où : } M_L &:= \square - \partial_k [A_\mu,]
\end{aligned}$$

On va pouvoir réécrire l'expression de la matrice \mathcal{S} en tenant compte de la jauge de Lorentz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= N^{-1} \int \exp(i\mathcal{I}(A_k)) \delta(\partial_k A_k) \det(M_c) dA_k \\
&= N^{-1} \int \exp(i\mathcal{I}(A_k)) \left(\Delta(A_\mu) \int \delta(\partial_\mu A_\mu^\omega) d\omega \right) \delta(\partial_k A_k) \Delta(A_k) dA_k \\
&= N^{-1} \int \exp(i\mathcal{I}(A_k)) \Delta(A_\mu) \delta(\partial_\mu A_\mu^\omega) dA_\mu \int d\omega \delta(\partial_k A_k) \Delta(A_k) \\
&= N^{-1} \int \exp(i\mathcal{I}(A_k^{\omega^{-1}})) \Delta(A_\mu^{\omega^{-1}}) \delta(\partial_\mu A_\mu^{\omega\omega^{-1}}) dA_\mu \\
&\quad \int d\omega \delta(\partial_k A_k^{\omega^{-1}}) \Delta(A_k^{\omega^{-1}}) \\
&= N^{-1} \int \exp(i\mathcal{I}(A_k)) \Delta(A_\mu) \delta(\partial_\mu A_\mu) dA_\mu \int d\omega \delta(\partial_k A_k^{\omega^{-1}}) \Delta(A_k) \\
\mathcal{S} &= N^{-1} \int \exp(i\mathcal{I}(A_k)) \Delta(A_\mu) \delta(\partial_\mu A_\mu) dA_\mu
\end{aligned}$$

Il est commode de généraliser légèrement cette relation obtenue pour la matrice \mathcal{S} , en prenant comme condition de jauge :

$$\partial_\mu A_\mu - b(x) = 0$$

Ce qui donne pour la matrice \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} = N^{-1} \int \exp(i\mathcal{I}(A_k)) \Delta(A_\mu) \delta(\partial_\mu A_\mu - b(x)) dA_\mu$$

On peut faire une moyenne sur $b(x)$ avec un poids gaussien dépendant d'un paramètre arbitraire α :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= N^{-1} \int \exp\left(i\mathcal{I}(A_k) - \int \frac{i}{2\alpha} b^2 dx\right) \Delta(A_\mu) \delta(\partial_\mu A_\mu - b(x)) dA_\mu db \\
&= N^{-1} \int \exp\left(i\mathcal{I}(A_k) - \int \frac{i}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 dx\right) \Delta(A_\mu) \delta(\partial_\mu A_\mu - b(x)) dA_\mu
\end{aligned}$$

On peut écrire $\det(M_l)$ à l'aide des variables de grassmann de la façon suivante :

$$\det(M_l) := \Delta(A_\mu) = \int \exp\left(i \int \bar{c}^a(x) M_l^{ab} c^b(x) dx\right) d\bar{c} dc$$

On a donc finalement :

$$\mathcal{S} = \int \exp\left(i \int \left[\frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \bar{c}^a(x) M^{ab} c^b(x) - \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right] dx\right) dA_\mu d\bar{c} dc$$

Cette fois l'expression obtenu pour la matrice \mathcal{S} est manifestement covariante, on va donc pouvoir à partir de cette relation obtenir les règles de Feynman.

3.3 Quantification lagrangienne

On a précédemment quantifier le champ de Yang Mills dans la jauge de Coulomb, ce afin de suivre le cheminement historique. Cependant nous avons pu remarquer que ce n'était pas la jauge la plus "naturelle" pour cette procédure de quantification. Ici on va se palcer directement dans la jauge de Lorentz.

On a précédemment défini l'action invariante de jauge du champ de Yang Mills comme suit :

$$\mathcal{I} = \frac{1}{8} \int dx \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}),$$

avec,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + g [A_\mu, A_\nu].$$

Si on écrit directement :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int \exp(i\mathcal{I}) dA_\mu \\ &= \int \exp\left(\frac{-i}{4} \int F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) dx\right) dA_\mu, \end{aligned}$$

on intègre sur toutes les configurations des A_μ , et comme $\exp(i\mathcal{I})$ prend la même valeur pour tout les A_μ qui se déduisent l'un de l'autre par une transformation de jauge, \mathcal{S} est infini. Pour palier à ce problème nous allons suivre la méthode de Faddeev et Popov. On peut réécrire la matrice \mathcal{S} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d\omega \int \exp(i\mathcal{I}(A_\mu)) \Delta(A_\mu) \delta(\partial_\mu A_\mu) dA_\mu \\ &= N^{-1} \int \exp\left(\frac{-i}{4g} \int F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) dx\right) |\det(M)| \delta(\partial_\mu A_\mu) dA_\mu \\ &= N^{-1} \int \exp\left(i \int \left[\frac{-1}{4g} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \bar{c}^a(x) M^{ab} c^b(x) - \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right] dx\right) dA_\mu dcd\bar{c} \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression de la matrice \mathcal{S} précédemment obtenue.

3.4 Règles de Feynman

On rappelle l'expression de la matrice S ,

$$S = N^{-1} \int \exp\left(i \int dx \left(\frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a \left(\square c^a - g f^{abd} \partial_\mu (A_\mu^b c^d) \right) \right)\right) dA_\mu dcd\bar{c}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{YM} &= \frac{1}{8} \text{tr} [F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = \frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a & \rightarrow & \text{lagrangien de Yang Mills} \\
\mathcal{L}_{fix.} &= -\frac{1}{4\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 & \rightarrow & \text{lagrangien fixé de jauge} \\
\mathcal{L}_{FP} &= \bar{c}^a \left(\square c^a - g f^{abd} \partial_\mu (A_\mu^b c^d) \right) & \rightarrow & \text{lagrangien des fantômes}
\end{aligned}$$

On est à présent en mesure de déterminer les règles de Feynman.

4 Symétrie BRST

4.1 Définition

Lorsque nous avons établi l'expression de la matrice \mathcal{S} , le fixage de jauge s'est révélé nécessaire. En effet, sans cela l'intégrale mise en jeu diverge. Après différentes manipulation, nous sommes parvenu à une expression que nous rappelons ici,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{fix.} + \mathcal{L}_{FP}$$

où,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{YM} &= \frac{1}{8} \text{tr} [F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = \frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a & \rightarrow & \text{lagrangien de Yang Mills} \\
\mathcal{L}_{fix.} &= -\frac{1}{4\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 & \rightarrow & \text{lagrangien fixé de jauge} \\
\mathcal{L}_{FP} &= \bar{c}^a \left(\square c^a - g f^{abd} \partial_\mu (A_\mu^b c^d) \right) & \rightarrow & \text{lagrangien des fantômes}
\end{aligned}$$

Nous avons précédemment montré que \mathcal{L}_{YM} est invariant sous la transformation de jauge de la théorie. Cependant en ayant rajouté les termes $\mathcal{L}_{fix.}$ et \mathcal{L}_{FP} , la théorie fixée de jauge n'est plus invariante de jauge. Dans ces nouveaux termes, on a insérer de nouveaux champs, les fantomes. C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, et I. V. Tyupkin ont découvert que le lagrangien possédait encore une symétrie. Cette symétrie est en quelque sorte une symétrie de jauge particulière, notée aujourd'hui transformation BRST.

Afin de spécifier cette symétrie, il est nécessaire de redéfinir le paramètre de jauge. Nous rappelons que la transformation de jauge peut s'écrire comme suit :

$$A_\mu^\omega \simeq A_\mu - [A_\mu, u] + \partial_\mu u + \mathcal{O}(u)$$

On va poser $u = c$. Même si cette découverte a nécessité un long travail, nous pouvons à posteriori voir la pertinence de cette transformation. Faire cette transformation ne va en rien annuler l'invariance de \mathcal{L}_{YM} . Mais on peut remarquer que la partie $\mathcal{L}_{fix.}$ va insérer des termes proportionnelles aux fantômes, et si nous définissons suffisamment astucieusement des transformation pour ces fantômes, nous avons des chances d'obtenir

que le lagrangien (4.1.1) soit globalement invariant sous ces nouvelles transformations.

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} A_\mu^{\omega a} &\simeq A_\mu^a - f^{abd} A_\mu^a c^a + \partial_\mu c^a + \mathcal{O}(c^a) \\ &\simeq A_\mu^a + D_\mu c^a + \mathcal{O}(c^a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_k^{\omega a} &\simeq \partial_\mu A_k^a - f^{abd} \partial_\mu (A_k^a c^a) + \square c^a + \mathcal{O}(c^a) \\ &\simeq \partial_\mu A_k^a + \partial_\mu D_\mu c^a + \mathcal{O}(c^a) \end{aligned}$$

$$(\partial_\mu A_k^{\omega a})^2 \simeq (\partial_\mu A_k^a)^2 + 2 (\partial_\mu D_\mu c^a) (\partial_\mu A_k^a) + \mathcal{O}(c^a)$$

On a donc $\mathcal{L}_{fix.}$ qui se transforme de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_{fix.} \rightarrow \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_k^a)^2 + \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu D_\mu c^a) (\partial_\mu A_k^a) + \mathcal{O}(c^a)$$

Or on sait que \mathcal{L}_{FP} peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP} &= \bar{c}^a \left(\square c^a - g f^{abd} \partial_\mu (A_\mu^b c^d) \right) \\ &= \bar{c}^a M c^a \end{aligned}$$

Si on pose que \bar{c} se transforme comme :

$$\bar{c}^a \rightarrow \bar{c}^a - \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a),$$

on s'aperçoit que l'on va pouvoir compenser le terme $\delta \mathcal{L}_{fix.}$. Afin de déterminer δc^a , nous allons regarder comment se transforme $D_\mu c^a$.

$$D_\mu c^a \rightarrow D_\mu c^a + f^{abd} f^{ben} A_\mu^e c^n c^d + f^{abd} (\partial_\mu c^b) c^d$$

Il n'est pas tout à fait évident de voir que la bonne transformation pour c^a est $c^a \rightarrow c^a - \frac{1}{2} f^{abd} c^b c^d$, mais nous allons vérifier que cette transformation laisse bien invariant $D_\mu c^a$.

$$\begin{aligned} D_\mu c^a \rightarrow D_\mu c^a &+ f^{abd} f^{ben} A_\mu^e c^n c^d + \frac{1}{2} f^{abd} f^{den} A_\mu^b c^e c^n \\ &+ f^{abd} (\partial_\mu c^b) c^d - \frac{1}{2} f^{abd} (\partial_\mu c^b c^d) \end{aligned}$$

Or il existe une propriété sur les constantes de structure de \mathcal{G} , facilement démontrable, qui nous permet d'écrire :

$$f^{abd} f^{ben} c^n c^d = \frac{1}{2} f^{abd} f^{den} c^e c^n$$

De cette remarque nous pouvons en conclure directement ces nouvelles transformations, établies pour A_μ , c , et \bar{c} , laissent invariant le lagrangien final (4.1.1).

Résumons ce que l'on va nommer à présent les **transformations BRST** :

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a - f^{abd} A_\mu^a c^b + \partial_\mu c^a \\ \bar{c}^a &\rightarrow \bar{c}^a - \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a) \\ c^a &\rightarrow c^a - \frac{1}{2} f^{abd} c^b c^d \end{aligned}$$

Il est intéressant de calculer le jacobien de cette transformation, de façon à savoir si la mesure de la matrice \mathcal{S} est invariante ou non. La matrice jacobienne des transformations BRST est la suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} & D_\mu \delta^{ab} & 0 \\ 0 & \delta^{ab} - f^{adb} c^d & 0 \\ \delta^{ab} \frac{1}{\alpha} \partial_\mu & 0 & \delta^{ab} \end{pmatrix}.$$

Le jacobien vaut donc :

$$\det(J) = 1.$$

On en déduit que la matrice \mathcal{S} est invariante sous les transformations BRST.

4.2 Interprétation géométrique des transformations BRST

Il est souvent pratique d'introduire un opérateur différentiel des transformations BRST, couramment noté "s", tel que :

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= s A_\mu^a \\ &:= D_\mu c^a \\ \delta \bar{c}^a &= s \bar{c}^a \\ &:= -\frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a) \\ \delta c^a &= s c^a \\ &:= -\frac{1}{2} f^{abd} c^b c^d \end{aligned}$$

L'opérateur BRST est nilpotent, c'est à dire $s^2 = 0$.

Pour le champ de jauge on a :

$$\begin{aligned}
s^2 A_\mu^a &= s(D_\mu c^a) \\
&= \partial_\mu s(c^a) + s(f^{abd} A_\mu^a c^b) \\
&= \partial_\mu s(c^a) + f^{abd} (s A_\mu^a) c^b + f^{abd} A_\mu^a (s c^b) \\
&= D_\mu (s c^a) + f^{abd} D_\mu (c^b) c^d \\
&= D_\mu (s c^a) + \frac{1}{2} D_\mu (f^{abd} c^b c^d) \\
&= D_\mu (s c^a) - D_\mu (s c^a) \\
s^2 A_\mu^a &= 0.
\end{aligned}$$

Pour le champ des fantômes c on a :

$$\begin{aligned}
s^2 c^a &= -\frac{1}{2} f^{abd} s(c^b c^d) \\
&= -\frac{1}{2} f^{abd} [(s c^b) c^d - c^b (s c^d)] \\
&= -\frac{1}{2} f^{abd} \left[-\frac{1}{2} f^{ben} c^e c^n c^d + \frac{1}{2} f^{den} c^b c^e c^n \right] \\
&= \frac{1}{4} [-f^{abd} f^{den} c^b c^e c^n + f^{abd} f^{ben} c^e c^n c^d] \\
&= \frac{1}{2} f^{abd} f^{den} c^e c^n c^b \\
&= \frac{1}{2} f^{abd} f^{end} c^e c^n c^b \\
&= \frac{1}{2} (\delta^{ae} \delta^{bn} - \delta^{an} \delta^{be}) c^e c^n c^b \\
&= \frac{1}{2} (c^a c^b c^b - c^b c^a c^b) \\
&= c^a (c^b)^2 \\
s^2 c^a &= 0.
\end{aligned}$$

On a utilisé l'antisymétrie des constantes de structure de \mathcal{G} , et également le fait que c soit une variable de grassmann.

Pour le champ des fantôme \bar{c} on a :

$$\begin{aligned}
s^2 \bar{c}^a &= -\frac{1}{\alpha} \partial_\mu (s A_\mu^a c^a) \\
&= -\frac{1}{\alpha} \partial_\mu D_\mu c^a
\end{aligned}$$

Or si on applique les équations d'Euler Lagrange en les variables \bar{c}^a , on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$\partial_\mu D_\mu c^a = 0$$

Ce qui implique donc que $s^2 \bar{c}^a = 0$.

On a donc bien montré que $s^2 = 0$.

On va assigner au champ un degré de forme noté p , et un degré en fantôme noté q . On a en particulier :

Champs	Degré des formes p	Degré en fantôme q
A	+1	0
c	0	+1
\bar{c}	0	-1

Le tenseur $F_{\mu\nu}$ est une forme de degré 2, on peut l'interpréter comme une courbure. Le champ A_μ quand à lui est une forme de degré 1, que l'on peut voir comme une connection.

On connaît les deux formes différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} d & : \Omega^{p,g} \rightarrow \Omega^{p+1,g} \\ s & : \Omega^{p,g} \rightarrow \Omega^{p,g+1}, \end{aligned}$$

pù d est la différentielle extérieure, et s la forme différentielle BRST.

Avec ces formes différentielles, on écrit F de la façon suivante :

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A],$$

où F vérifie l'équation de Bianchi :

$$DF = dF + [A, F] = 0,$$

qui est en fait l'équation du mouvement de la théorie non fixée de jauge. On construit une nouvelle connection \tilde{A} et une nouvelle courbure \tilde{F} tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &:= A^{1,0} + c^{0,1} \\ \tilde{F} &:= \tilde{d}\tilde{A}^{1,1} + \frac{1}{2}[\tilde{A}^{1,1}, \tilde{A}^{1,1}] \\ &= dA^{1,0} + dc^{0,1} + sA^{1,0} + sc^{0,1} \\ &\quad + \frac{1}{2}([A^{1,0}, A^{1,0}] + [c^{0,1}, c^{0,1}] + [c^{0,1}, A^{1,0}] + [A^{1,0}, c^{0,1}]) \\ &= dA^{1,0} + dc^{0,1} + sA^{1,0} + sc^{0,1} \\ &\quad + \frac{1}{2}([A^{1,0}, A^{1,0}] + [c^{0,1}, c^{0,1}]) + [A^{1,0}, c^{0,1}] \\ \tilde{F} &= \left(dA^{1,0} + \frac{1}{2}[A^{1,0}, A^{1,0}]\right)^{2,0} + \left(sc^{0,1} + \frac{1}{2}[c^{0,1}, c^{0,1}]\right)^{0,2} \\ &\quad + (dc^{0,1} + sA^{1,0} + [A^{1,0}, c^{0,1}])^{1,1} \end{aligned}$$

Considérer \tilde{F} illustre en quelque sorte le fixage de jauge. On a utilisé le fait que le crochet $[,]$ est gradué, et donc lorsque nous avons $[c^{0,1}, A^{1,0}]$, le degré total étant égale à deux, ce crochet est dans ce cas un anticommutateur. On a $[c^{0,1}, A^{1,0}] = [c^{0,1}, A^{1,0}]$. En imposant $\tilde{F} := F$ on obtient les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} sc &= -\frac{1}{2} [c, c] \\ sA &= -(dc + [A, c]) = Dc, \end{aligned}$$

qui sont deux des transformations BRST.

5 Identités de Slavnov

Les identités de Slavnov sont les identités de Ward de l'électrodynamique, généralisée au champ de Yang Mills. Il est important de noter que ces identités sont des relations entre les fonctions de corrélations qui découlent des symétries de la théorie. Ces identités sont toujours valables après renormalisation. Elles sont une version quantique du théorème de Noether.

Pour la théorie de Yang Mills fixée de jauge, on a l'action :

$$\mathcal{I} = \int \left[\frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \bar{c}^a(x) M^{ab} c^b(x) + \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right] dx$$

Comme nous l'avons vu dans la partie (4), cette action est invariante sous les transformations BRST (4.19-21), que l'on réécrit comme :

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \delta A_\mu^a & \text{avec} & & \delta A_\mu^a &:= sA_\mu^a \\ c^a &\rightarrow c^a + \delta c^a & \text{avec} & & \delta c^a &:= sc^a \\ \bar{c}^a &\rightarrow \bar{c}^a + \delta \bar{c}^a & \text{avec} & & \delta \bar{c}^a &:= s\bar{c}^a. \end{aligned}$$

Nous allons écrire la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green Z , avec J_μ^a source des champs de jauge A_μ^a , $\bar{\xi}^a$ source des champs de jauge de c^a , ξ^a source des champs de jauge de \bar{c}^a , k_a^μ source de sA_μ^a , et l^a source de sc^a .

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \exp \left(i \int \left[\frac{-1}{4g} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \bar{c}^a(x) M^{ab} c^b(x) + \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\xi}^a c^a + \bar{c}^a \xi^a + k_a^\mu sA_\mu^a + l^a sc^a \right] dx \right) dA_\mu dcd\bar{c} \end{aligned}$$

À présent nous allons regarder comment se comporte cette fonctionnelle génératrice des fonctions de Green sous les transformations BRST. Sachant que \mathcal{I} est invariante, et que $s^2 = 0$, les seules termes additionnels sont issus des termes de source A_μ^a , c^a , et \bar{c}^a .

$$\mathcal{Z} \rightarrow \exp \left(i \int \left[J_\mu^a sA_\mu^a + \bar{\xi}^a sc^a + s\bar{c}^a \xi^a \right] dx \right) \mathcal{Z}$$

En imposant que \mathcal{Z} soit invariante sous les transformations BRST, il vient :

$$\int \left[J_\mu^a s A_\mu^a + \bar{\xi}^a s c^a + s \bar{c}^a \xi^a \right] dx \quad \mathcal{Z} = 0.$$

En utilisant la notion de dérivée fonctionnelle, on peut réécrire cette relation comme suit :

$$\begin{aligned} \int \left[J_\mu^a \frac{\delta}{i \delta k_\mu^a} - \bar{\xi}^a \frac{\delta}{i \delta l^a} - \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a) \xi^a \right] dx \quad \mathcal{Z} &= 0 \\ \int \left[J_\mu^a \frac{\delta}{i \delta k_\mu^a} - \bar{\xi}^a \frac{\delta}{i \delta l^a} - \frac{1}{\alpha} \xi^a \partial_\mu \frac{\delta}{i \delta J_\mu^a} \right] dx \quad \mathcal{Z} &= 0 \end{aligned}$$

Cette relation est ce que l'on appelle l'identité de Slavnov obtenue à partir de la symétrie BRST. On pose,

$$W = i \int \mathcal{L} dx$$

c'est à dire $W = \ln(\mathcal{Z})$

On a alors :

$$\int dx \left[J_\mu^a \frac{\delta}{i \delta k_\mu^a} - \bar{\xi}^a \frac{\delta}{i \delta l^a} - \frac{1}{\alpha} \xi^a \partial_\mu \frac{\delta}{i \delta J_\mu^a} \right] W = 0$$

On écrit Γ , fonction de corrélation, à l'aide de W , de la façon suivante :

$$\Gamma = -iW - \int dx \left(J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\xi}^a s c^a + s \bar{c}^a \xi^a \right),$$

ce qui nous permet encore d'écrire :

$$\begin{aligned} \int dx \left[-\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta G}{i \delta k_\mu^a} - \frac{\delta \Gamma}{\delta c^a} \frac{\delta G}{i \delta l^a} + \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}^a} \right] &= 0, \\ \int dx \left[-\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta \Gamma}{i \delta k_\mu^a} - \frac{\delta \Gamma}{\delta c^a} \frac{\delta \Gamma}{i \delta l^a} + \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}^a} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est l'équation de Zinn-Justin. Afin de prouver la renormalisabilité de la théorie de Yang Mills à tous les ordres, on s'apercevra de l'utilité d'avoir écrit l'identité de Slavnov en fonction de Γ . En posant :

$$\Gamma = \Gamma + \frac{1}{2\alpha} \int dx (\partial_\mu A_\mu^a)^2,$$

on peut réécrire l'équation de Zinn-Justin de façon plus commode pour la suite,

$$\int dx \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta G}{i \delta k_\mu^a} + \frac{\delta \Gamma}{\delta c^a} \frac{\delta G}{i \delta l^a} \right] = 0.$$

6 Renormalisation

6.1 Calcul d'un diagramme de Feynman

Maintenant que l'on a déterminé les règles de Feynman, on va pouvoir calculer l'amplitude d'un diagramme. On considère le diagramme suivant :

En appliquant les règles de Feynman, on obtient :

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = & -ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f^{ad_1c_1} [(-p-k)_{\beta_1} g_{\mu\alpha_1} + (k+k-p)_{\mu} g_{\alpha_1\beta_1} + (-k+p+p)_{\alpha_1} g_{\beta_1\mu}] \cdot \\ & f^{d_2bc_2} [(-k-p)_{\beta_2} g_{\alpha_2\nu} + (p-k+p)_{\alpha_2} g_{\nu\beta_2} + (k-p+k)_{\nu} g_{\beta_1\alpha_1}] \cdot \\ & \frac{-i\delta^{d_1d_2} g_{\alpha_1\alpha_2}}{k^2 + i0} \cdot \frac{-i\delta^{c_1c_2} g_{\beta_1\beta_2}}{(k-p)^2 + i0}.\end{aligned}$$

Ce que l'on peut encore écrire comme :

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = & -ig^2 \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [g_{\mu\nu} ((p+k)^2 + (k-2p)^2) + p_{\mu}p_{\nu} (n-6) + k_{\mu}k_{\nu} (4n-6) \\ & + (3-2n)(p_{\nu}k_{\mu} + p_{\mu}k_{\nu})] \frac{1}{k^2 + i0} \frac{1}{(k-p)^2 + i0}\end{aligned}$$

Lorsque $k \rightarrow 0$, on s'aperçoit que cette intégrale diverge. Ce qui est sérieux problème pour notre théorie. On ne peut attribuer un sens physique à cette intégrale, pour l'instant du moins.

Pour remédier à ce problème nous allons devoir renormaliser notre théorie. On va pour cela procéder en plusieurs étapes. On va tout d'abord identifier les diagrammes divergents, en utilisant la méthode du comptage en puissance. Ensuite nous régulariserons les intégrales divergentes, en ajoutant un paramètre qui va "absorber" les divergences. Et pour finir nous pourrons construire des termes de compensations pour ces divergences dans le lagrangien de départ, c'est ce qu'on nomme habituellement les contres termes.

6.2 Comptage en puissance

6.2.1 Définition

On établit tout d'abord quelques notations :

- q : nombre de vertex considéré
- n : nombre total de vertex
- l : nombre de ligne interne considéré
- L : nombre total de vertex
- m : nombre de dérivée à chaque vertex
- d : dimension

L'amplitude s'écrit typiquement comme :

$$J(k) = \int \prod_{1 \leq q \leq n} \delta \left(\sum p - k_q \right) \prod_{1 \leq l \leq L} D_l(p_l) d_{p_l}$$

avec $D_l(p_l)$ la fonction de Green qui à la forme suivante :

$$D_l(p_l) = \frac{Z(p_l)}{m_l^2 - p_l^2}$$

où Z est un polynôme en p_l de degré r_l .

L'amplitude doit rester fini pour n'importe quel valeur de k et p . De ce fait on modifie les paramètres par un facteur d'échelle a afin de voir comment va se comporter l'amplitude sous cette modification.

$$p_i, k_i \rightarrow ap_i, ak_i$$

Si J converge, J sera multiplié par a^ω , où ω est appelé l'index.

- $\omega > 0$, le comptage en puissance prévoit une divergence.
- $\omega = 0$, le comptage en puissance prévoit une divergence logarithmique.
- $\omega < 0$, c'est sûr ça converge !

Ça caractérise la situation la plus défavorable, il peut y avoir des cas où le comptage en puissance prédit une divergence mais où en réalité l'amplitude converge !

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq l \leq L} (r_l - 2) + d(L - (n - 1)) + n.m \\ &= \sum_{1 \leq l \leq L} (r_l - 2 + d) - d(n - 1) + n.m \end{aligned}$$

6.2.2 Identification des diagrammes divergents

On est à présent dans le cas de Yang-Mills, on considère alors :

- L_{in}^A : nombre de ligne interne de A .
- L_{in}^c : nombre de ligne interne de c .
- L_{ex}^A : nombre de ligne externe de A .
- L_{ex}^c : nombre de ligne externe de c .
- n_4 : nombre total de vertex $AAAA$.
- m_4 : nombre de dérivée à chaque vertex $AAAA$, ici $m_4 = 0$.
- n_3 : nombre total de vertex AAA .
- m_3 : nombre de dérivée à chaque vertex AAA , ici $m_3 = 1$.
- n_c : nombre total de vertex c .
- m_c : nombre de dérivée à chaque vertex c , ici $m_c = 1$.
- $r_l = 0$: degré de Z .

$$\begin{aligned} \omega &= 2L_{in}^A + 2L_{in}^c - d(n_4 + n_3 + n_c - 1) + n_4m_4 + n_3m_3 + n_cm_c \\ &= 2L_{in}^A + 2L_{in}^c + d - n_4d - n_3(d - 1) - n_c(d - 1) \end{aligned}$$

de plus on a :

$$\begin{aligned} 2L_{in}^A + L_{ex}^A &= 4n_4 + 3n_3 + n_c \\ 2L_{in}^c + L_{ex}^c &= 2n_c \end{aligned}$$

et donc :

$$\omega = d - L_{ex}^A - L_{ex}^c - n_4(d-4) - n_3(d-4) - n_c(d-4)$$

On remarque que dans le cas particulier $d = 4$, ω depend uniquement du nombre de ligne externe. On a donc montré dans ce cas la relation suivante :

$$\omega = 4 - L_{ex}^A - L_{ex}^c$$

Les seules diagrammes divergents dans la théorie de Yang Mills sont donc les suivants :
On a réduit sensiblement le nombre de possibilité de divergence.

6.3 Régularisation dimensionnelle

6.3.1 Définition

Plusieurs méthodes de régularisation existent, celle que nous privilégions ici est la régularisation dimensionnelle. Dans la majorité des cas, la technique de régularisation consiste à insérer un paramètre de régularisation, de façon à ce que les intégrales à calculer soit des fonctions analytiques de ce paramètre dans un certain domaine. L'idée est un peu la même pour la régularisation dimensionnelle, sauf que dans ce cas le paramètre de régularisation est la dimension elle même. Il s'avère qu'en prolongeant l'intégration dans le plan complexe, l'intégrale correspondante devient convergente.

Dans le paragraphe **6.1** on a pu remarqué que l'on a des intégrales divergentes de la forme :

$$J(d, k) = \int d^4p f(p, k).$$

L'idée de la régularisation dimensionnelle est d'utiliser la dimension du domaine d'intégration comme paramètre de régularisation, afin de rendre J convergente. En particulier on ne va plus intégrer sur l'espace réel, mais on va prolonger analytiquement le domaine d'intégration sur le plan complexe. Pour rendre ces intégrales convergentes on va procéder de la manière suivante :

- Il nous faudra trouver le domaine de convergence pour $Re(d) < 4$.
- On va construire une fonction égale à notre intégrale de départ (J) pour $d = 4$, mais définie dans un domaine plus grand qui inclu le domaine $d = 4$.
- Et pour finir on prendra $d \rightarrow 4$ pour isoler la singularité. Et ainsi on pourra construire le contre terme à ajouter dans le lagangien pour rendre la théorie finie.

Pour définir la régularisation dimensionnelle nous nous donnons ces trois conditions :

1. translation

$$\int d^d p F(p+q) = \int d^d p F(p)$$

2. expansion

$$\int d^d p F(a.p) = |a^{-d}| \int d^d p F(p)$$

3. factorisation

$$\int d^{d_1} p d^{d_2} q f(p) g(q) = \int d^{d_1} p f(p) \int d^{d_2} p g(q)$$

Nous remarquons en particulier que la propriété **2** implique :

$$\int d^d p = 0 \ ; \ \int \frac{d^d p}{p^2} = 0 \ ; \ \dots$$

6.3.2 Régularisation à 1 boucle

On va travailler avec des intégrales de la formes :

$$J(n) = \int d^n k f(k^2)$$

Afin de simplifier le calcul on passe en coordonnée polaires :

$$(k_1, \dots, k_n) \rightarrow (k, \Phi, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$$

avec :

$$0 \leq k \leq +\infty$$

$$0 \leq \Phi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta_i \leq \pi$$

On a alors :

$$J(n) = 2\pi \prod_{l=1}^{n-2} \int_0^\pi \sin^l(\theta_l) d\theta_l \int_0^{+\infty} dk k^{n-1} f(k^2)$$

or on sait que :

$$\int_0^\pi \sin^l(\theta_l) d\theta_l = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{l+1}{2})}{\Gamma(1 + \frac{l}{2})}$$

donc,

$$J(n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} dk k^{n-1} f(k^2)$$

Dans la suite on sera amené à utiliser la formule suivante :

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 dz z^{x-1} (1-z)^{y-1} \\ &= \int_0^{+\infty} dt t^{x-1} (1+t)^{-x-y} \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}$$

Diagramme à une Boucle en les champs de jage A_μ

Grâce aux règles de feynman précédemment établies, on a réussi à écrire la fonction deux points correspondantes. On se place maintenant dans le cas n-dimenssionnel. Pour conserver la bonne dimension de la fonction de corrélation on a introduit la constante de couplage $\tilde{g}^2 = g^2 \mu^{4-n}$.

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= -\tilde{g}^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} f^{ad_1 c_1} [(-p-k)_{\beta_1} g_{\mu\alpha_1} + (k+k-p)_\mu g_{\alpha_1\beta_1} + (-k+p+p)_{\alpha_1} g_{\beta_1\mu}] \cdot \\ &\quad f^{d_2 b c_2} [(-k-p)_{\beta_2} g_{\alpha_2\nu} + (p-k+p)_{\alpha_2} g_{\nu\beta_2} + (k-p+k)_\nu g_{\beta_1\alpha_1}] \cdot \\ &\quad \frac{-i\delta^{d_1 d_2} g_{\alpha_1\alpha_2}}{k^2 + i0} \cdot \frac{-i\delta^{c_1 c_2} g_{\beta_1\beta_2}}{(k-p)^2 + i0} \end{aligned}$$

Ce que l'on peut encore écrire comme :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= -\tilde{g}^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} f^{adc} f^{bdc} [(p+k)_\beta g_{\mu\alpha} + (p-2k)_\mu g_{\alpha\beta} + (k-2p)_\alpha g_{\beta\mu}] \cdot \\ &\quad [(k+p)_\beta g_{\alpha\nu} + (k-2p)_\alpha g_{\nu\beta} + (p-2k)_\nu g_{\beta\alpha}] \frac{1}{k^2 + i0} \cdot \frac{1}{(k-p)^2 + i0} \\ &= -\tilde{g}^2 \delta^{ab} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [(p+k)^2 g_{\mu\nu} + (p+k)_\nu (k-2p)_\mu + (p+k)_\mu (p-2k)_\nu \\ &\quad + (p-2k)_\mu (k+p)_\nu + (p-2k)_\mu (k-2p)_\nu + (p-2k)_\mu (p-2k)_\nu g_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha} \\ &\quad + (k-2p)_\nu (k+p)_\mu + (k-2p)^2 g_{\nu\mu} + (k-2p)_\mu (p-2k)_\nu] \\ &\quad \frac{1}{k^2 + i0} \cdot \frac{1}{(k-p)^2 + i0} \end{aligned}$$

On a alors finalement :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= -\tilde{g}^2 \delta^{ab} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [g_{\mu\nu} ((p+k)^2 + (k-2p)^2) + p_\mu p_\nu (n-6) + k_\mu k_\nu (4n-6) \\ &\quad + (3-2n)(p_\nu k_\mu + p_\mu k_\nu)] \frac{1}{k^2 + i0} \frac{1}{(k-p)^2 + i0} \end{aligned}$$

On remarque que l'intégrale converge pour $n < 0$, et diverge pour $n > 0$.

Pour écrire le dénominateur sous un seul facteur, on utilise une des formules de feynman,

$$\frac{1}{k^2 + (p-k)^2} = \int_0^1 dz \frac{1}{[k^2(1-z) + (p-k)^2 z]^2}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= -\tilde{g}^2 \delta^{ab} \int_0^1 dz \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (g_{\mu\nu} ((p+k)^2 + (k-2p)^2) + p_\mu p_\nu (n-6) + k_\mu k_\nu (4n-6) \\ &+ (3-2n)(p_\nu k_\mu + p_\mu k_\nu)) \frac{1}{[k^2(1-z) + (p-k)^2 z]^2} \end{aligned}$$

Afin d'éliminer les termes linéaires en k , on effectue le changement de variable suivant :

$$k \rightarrow k + pz$$

d'où,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= -\tilde{g}^2 \delta^{ab} \int_0^1 dz \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (g_{\mu\nu} (5-2z+2z^2)p^2 + 2g_{\mu\nu} k^2 + (4n-6)k_\mu k_\nu \\ &- (4n-6)z(1-z)p_\mu p_\nu + (n-6)p_\mu p_\nu) \frac{1}{[k^2 + p^2 z(1-z)]^2} \end{aligned}$$

Comme nous l'avons fait pour le cas générique de l'intégrale J nous allons passer en coordonnée polaire, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= -\tilde{g}^2 \delta^{ab} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 dz \int \frac{dk}{(2\pi)^n} k^{n-1} (g_{\mu\nu} (5-2z+2z^2)p^2 + 2g_{\mu\nu} k^2 + (4n-6)k_\mu k_\nu \\ &- (4n-6)z(1-z)p_\mu p_\nu + (n-6)p_\mu p_\nu) \frac{1}{[k^2 + p^2 z(1-z)]^2} \end{aligned}$$

En utilisant la formule **(6.3.15-17)** pour les intégration sur k et z , on parvient au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= \frac{-ig^2 \delta^{ab}}{(4\pi)^{n/2}} \left[g_{\mu\nu} p^2 \left(5 \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(n-2)} - 2 \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(n-1)} + 2 \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(n)} \right. \right. \\ &+ \left. \frac{6(n-1)}{2-n} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} \right) - p_\mu p_\nu \left((4n-6) \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} - (n-6) \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(n-2)} \right) \\ &\left. (-p^2)^{\frac{n}{2}-2} \Gamma(2-\frac{n}{2}) \right] \end{aligned}$$

On a donc réussi à régularisé dimensionnellement cette fonction de corrélation. Les divergences des intégrales de départ ont été absorbés dans le parametre de régularisation

n, qui on le rappelle désignait la diemension de notre domaine d'intégration. Ces "anciennes" divergences sont devenues des singularités dans le paramètres n . Or on s'aperçoit que n intervient à chaque fois dans une une fonction Γ d'Euler, donc on va pouvoir utiliser le developpement asymptotique de la fonction d'Euler, pour exprimer le résultat final. Pour $n \rightarrow 4$, $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) \rightarrow \infty$ car $\Gamma(2 - n/2)$ diverge en $n = 2$. On pose $\epsilon = \frac{4-n}{2}$.

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} \psi(n+1) + 1/2\epsilon(n/3 + \psi(n+1)^2 - \psi'(n+1)) + O(\psi^2) \right)$$

de plus,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{p^2}{\mu} \right)^\epsilon &= \exp(\epsilon \ln(\frac{p^2}{\mu})) \\ &= 1 + \epsilon \ln(\frac{p^2}{\mu}) + o(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Donc pour $n = 4$ on a :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= \frac{-ig^2\delta^{ab}}{16\pi^2} \left[(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu) \left(\frac{19}{6}\epsilon^{-1} + C_1 \right) - \frac{1}{2}p_\mu p_\nu (C_2 + \frac{1}{\epsilon}) \right. \\ &\quad \left. + (g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{19}{6} \ln(\frac{\mu^2}{-p^2}) - \frac{1}{2}p_\mu p_\nu \ln(\frac{\mu^2}{-p^2}) \right] \end{aligned}$$

Diagramme à une boucle en les fantômes

En utilisant la même méthode, on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) &= \frac{-ig^2\delta^{ab}}{16\pi^2} \left[(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu) \left(\frac{1}{6}\epsilon^{-1} + C_3 \right) + \frac{1}{2}p_\mu p_\nu (C_4 + \frac{1}{\epsilon}) \right. \\ &\quad \left. + (g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{1}{6} \ln(\frac{\mu^2}{-p^2}) + \frac{1}{2}p_\mu p_\nu \ln(\frac{\mu^2}{-p^2}) \right] \end{aligned}$$

Tad pôle

D'une part, par définition de la régularisation dimensionnelle, ce diagramme n'a pas de contribution, et d'autre part le calcul direct de l'amplitude de ce diagramme donne zéro. En effet ce diagramme fait intervenir le vertex V_{A^4} (vertex à quatres lignes de champ de jauge), or pour ce diagramme ce vertex est nul.

$$\begin{aligned} V_{A^4} &= g^2 \left[f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\rho} g_{\nu\rho} - g_{\mu\sigma} g_{\mu\rho}) \right. \\ &\quad \left. + f^{ace} f^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) \right. \\ &\quad \left. + f^{ade} f^{cbe} (g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho}) \right]. \end{aligned}$$

Or dans ce diagramme deux des lignes de ce vertex sont reliées. Prenons $\rho = \sigma$ et $c = d$.

$$\begin{aligned}
V_{A^4} &= g^2 \left[f^{abe} f^{dde} (g_{\mu\rho} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\mu\rho}) \right. \\
&\quad + f^{ade} f^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\rho\rho} - g_{\mu\rho} g_{\rho\nu}) \\
&\quad \left. + f^{ade} f^{dbe} (g_{\mu\rho} g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu} g_{\rho\rho}) \right] \\
&= 2g^2 f^{ade} f^{bde} [g_{\mu\nu} g_{\rho\rho} - g_{\mu\rho} g_{\rho\nu}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Diagramme à une boucle

On a donc au final :

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{-ig^2 \delta^{ab}}{16\pi^2} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left[\frac{10}{3} \epsilon^{-1} + C_5 + \frac{10}{3} \ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right) \right]$$

On a réussi par cette méthode à isoler la divergence. Le contre terme correspondant est donc :

$$(z_2 - 1) = \frac{5g^2}{24\pi^2} \epsilon^{-1}$$

Ensemble des contres-termes

• Fonctions deux points

$$\begin{aligned}
(z_2 - 1) &= \frac{5g^2}{24\pi^2} \epsilon^{-1} \\
\delta\mathcal{L}_{A^2} &= (z_2 - 1) \frac{1}{2} \text{tr}[(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2]
\end{aligned}$$

• Fonctions trois points

$$\begin{aligned}
(z_3 - 1) &= \frac{g^3}{12\pi^2} \epsilon^{-1} \\
\delta\mathcal{L}_{A^3} &= (z_3 - 1)(-g) \text{tr}[(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)[A_\mu, A_\nu]]
\end{aligned}$$

• Fonctions quatres points

$$\begin{aligned}
(z_4 - 1) &= \frac{-g^2}{24\pi^2} \epsilon^{-1} \\
\delta\mathcal{L}_{A^4} &= (z_4 - 1) \frac{g^2}{2} \text{tr}[[A_\mu, A_\nu]^2]
\end{aligned}$$

• Self énergie des fantômes

$$(\tilde{z}_2 - 1) = \frac{g^2}{24\pi^2} \epsilon^{-1}$$

$$\delta\mathcal{L}_{\bar{c}c} = (\tilde{z}_2 - 1) \frac{1}{2} tr[\bar{c}\square c]$$

• Correction du troisième ordre en le vertex CCA

$$(\tilde{z}_3 - 1) = \frac{-g^2}{16\pi^2} \epsilon^{-1}$$

$$\delta\mathcal{L}_{\bar{c}Ac} = (\tilde{z}_3 - 1) \left(\frac{-1}{2}\right) tr[\bar{c}\partial_\mu[A_\mu, c]]$$

Lagrangien renormalisé à une boucle

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R &= \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_{A^2} + \delta\mathcal{L}_{A^3} + \delta\mathcal{L}_{A^4} + \delta\mathcal{L}_{\bar{c}c} + \delta\mathcal{L}_{\bar{c}Ac} \\ &= \frac{1}{2} tr \left[\frac{1}{4} [(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) + g[A_\mu, A_\nu]]^2 - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 - \bar{c}(\square c - g\partial_\mu c - g\partial_\mu[A_\mu, c]) \right] \\ &+ \frac{1}{8} (z_2 - 1) \frac{1}{2} tr[(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2] \\ &+ \frac{1}{4} g(z_3 - 1)(-g) tr[(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)[A_\mu, A_\nu]] \\ &+ \frac{1}{8} g^2(z_4 - 1) \frac{g^2}{2} tr[[A_\mu, A_\nu]^2] \\ &- \frac{1}{2} (\tilde{z}_2 - 1) \frac{g^2}{2} \epsilon^{-1} tr[\bar{c}\square c] \\ &+ \frac{1}{2} (\tilde{z}_3 - 1) \left(\frac{-1}{2}\right) tr[\bar{c}\partial_\mu[A_\mu, c]].\end{aligned}$$

Ce que l'on peut encore écrire comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R &= \frac{1}{2} tr \left[\frac{1}{4} z_2 \left((\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2 + \frac{g}{2} z_3 (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)[A_\mu, A_\nu] - \frac{g^2}{4} z_2^{-1} z_4 [A_\mu, A_\nu]^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 - \tilde{z}_2 (\bar{c}\square c - \tilde{z}_2^{-1} \tilde{z}_3 g \bar{c}\partial_\mu[A_\mu, c]) \right].\end{aligned}$$

On définit les champs et les paramètres renormalisés comme suit :

$$\begin{aligned} A_0 &= z_2^{\frac{1}{2}} A \\ c_0 &= \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} c \\ \bar{c}_0 &= \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} \bar{c} \\ g_0 &= z_3 z_2^{\frac{3}{2}} g \\ \alpha_0 &= z_2 \alpha \end{aligned}$$

On s'aperçoit qu'en renormalisant on a modifié les coefficients mais on a pas touché aux opérateurs, qui eux restent les mêmes. En fait ce que l'on mesure ce sont ces coefficients renormalisés, ceci traduit l'action des interactions mise en jeu entre les particules.

6.4 Preuve de la renormalisabilité à tout les ordres

On peut développer les fonctions de corrélations Γ en série de puissance de \hbar . On écrit :

$$\Gamma = \Gamma^0 + \Gamma^1 + \Gamma^2 + \dots$$

En particulier :

$$\Gamma = \Gamma_R^n + \Gamma_{div}^n$$

On pose :

$$\Gamma_1 * \Gamma_2 = \int dx \left(\frac{\delta \Gamma_1}{\delta A} \frac{\delta \Gamma_2}{\delta k} + \frac{\delta \Gamma_1}{\delta c} \frac{\delta \Gamma_2}{\delta l} \right)$$

Les Identité de Slavnov s'écrivent avec cette notation de la façon suivante :

$$\sum_{p=0}^n \Gamma^{(p)} * \Gamma^{(n-p)} = 0$$

- *Commençons par le cas $n = 0$:*

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= \int dx [\mathcal{L}_{eff} + k_a^\mu s A_\mu^a - l^a s c^a] := I \\ I * I &= 0 \end{aligned}$$

Démontrer cette relation est évident.

- *Étudions à présent le cas $n = 1$:*

$$\sum_{p=0}^1 \Gamma^{(p)} * \Gamma^{(n-p)} = 0 = \Gamma^0 \Gamma^1 + \Gamma^1 * \Gamma^0$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} I * \Gamma_R^1 + \Gamma_R^1 * I &= 0 \rightarrow \text{Cette relation est bien vérifiée !} \\ I * \Gamma_{div}^1 + \Gamma_{div}^1 * I &= 0 \rightarrow \text{On veut que cette relation soit vérifiée.} \end{aligned}$$

On a envie d'écrire une action I_1 tel que :

$$I_1 = I - \Gamma_{div}^1$$

On deva avoir :

$$I_1 * I_1 = 0.$$

Or I_1 est l'action renormalisée à l'ordre 1, et on a déjà calculé les contres termes à cet ordre. On a donc :

$$I_1(A, c, \bar{c}, k, l) = I(A_0, c_0, \bar{c}_0, k_0, l_0)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_0 &= z_2^{\frac{1}{2}} A \\ c_0 &= \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} c \\ \bar{c}_0 &= \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} \bar{c} \\ k_0 &= \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} k \\ l_0 &= z_4 l \end{aligned}$$

on a alors :

$$I_1 * I_1 = \int dx \left[z_2^{\frac{1}{2}} \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} \frac{\delta I_1}{\delta A_0} \frac{\delta I_1}{\delta k_0} + \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} z_4 \frac{\delta I_1}{\delta c_0} \frac{\delta I_1}{\delta l_0} \right]$$

Le fait d'avoir $I_1 * I_1 = 0$ nous donne une relation entre les coefficient de renormalisation z_i .

$$I_1 * I_1 = 0 \Leftrightarrow z_2^{\frac{1}{2}} \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} = \tilde{z}_2^{\frac{1}{2}} z_4$$

• *Plaçons nous à présent dans le cas n quelconque :*

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \Gamma^{(p)} * \Gamma^{(n-p)} &= 0 = \Gamma^{(0)} * \Gamma^{(n)} + \sum_{p=1}^{n-1} \Gamma^{(p)} * \Gamma^{(n-p)} + \Gamma^{(n)} * \Gamma^{(0)} \\ \Gamma^{(0)} * \Gamma^{(n)} + \Gamma^{(n)} * \Gamma^{(0)} &= - \sum_{p=1}^{n-1} \Gamma^{(p)} * \Gamma^{(n-p)} \end{aligned}$$

or le terme $\sum_{p=1}^{n-1} \Gamma^{(p)} * \Gamma^{(n-p)}$ est fini par hypothèse de recurrence.

On a alors :

$$I * \Gamma^{(n)} + \Gamma^{(n)} * I = 0$$

ce qui nous permet d'écrire une nouvelle fois :

$$\begin{aligned} I * \Gamma_R^{(n)} + \Gamma_R^{(n)} * I &= 0 \\ I * \Gamma_{div}^{(n)} + \Gamma_{div}^{(n)} * I &= 0 \end{aligned}$$

Pour la suite on définit un opérateur σ tel que :

$$\sigma \Gamma_{div}^n := I * \Gamma_{div}^n + \Gamma_{div}^n * I = 0$$

En posant :

$$(x_i) = (A, c) \quad \text{et} \quad (\theta_i) = (k, l)$$

on peut définir σ comme suit :

$$\sigma := \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Remarque :

Il est intéressant de noter que l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial \theta_i} &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i} &= 0 \end{aligned}$$

L'opérateur σ ainsi définie vérifie $\sigma^2 = 0$. En effet à partir de la définition de σ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left(\frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial I}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial I}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\frac{\partial I}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) + \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\frac{\partial I}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial I}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) + \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial I}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) + \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) + \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &\quad + \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial I}{\partial \theta_i} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Les termes de la première ligne sont nuls un à un, car chacun des termes est le produit d'une entité symétrique avec une entité antisymétrique. Les termes de la dernière ligne sont nuls à cause du fait que l'on ait :

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_i \partial x_i} = 0$$

On a donc bien $\sigma^2 = 0$

On se rappelle que l'on a :

$$\mathcal{I} = \int \left[\frac{-1}{4g} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a(x) M^{ab} c^b(x) + k_\mu^a D_\mu c^a + \frac{1}{2} f^{abd} l^a c^b c^d \right]$$

On va vouloir écrire $\mathcal{I}_\backslash = \mathcal{I}_{\backslash -\infty} - \mathcal{I}_{\backslash \square}$. Par une analyse dimensionnelle et avec les identités de Slavnov, matérialisé avec l'opérateur σ , on va pouvoir écrire Γ_{div}^n .

Analyse dimensionnelle

degré en fantômes :

$$g(c) := 1 \quad \text{et} \quad g(\bar{c}) := -1$$

$$\text{donc,} \quad g(k) = -1 \quad \text{et} \quad g(l) = -2$$

degré en champs :

$$d(A) := 1 \quad \text{et} \quad d(\partial A) := 2$$

$$\text{donc,} \quad d(FF) = 4$$

$$d((\partial A)^2) = 4$$

$$d(M) = 2 \quad \text{et} \quad d(\bar{c}) + d(c) = 2 \quad \rightarrow d(\bar{c}) := d(c) = 1$$

$$d(D) = 1 \quad \text{et} \quad d(k) = 2$$

$$d(l) = 2$$

On peut alors écrire :

$$\Gamma_{div}^n = \int dx \left[L(A) + \left(\bar{c}^a \partial_\mu + k_\mu^b \right) \Delta_{mu} c^b + \frac{\gamma}{2} f^{abd} l^a c^b c^d \right]$$

Par analyse dimensionnelle on peut déjà en déduire :

$$d(\Delta) = 1 \quad \text{et} \quad g(\Delta) = 0$$

$$\text{donc,} \quad \Delta_\mu = \alpha \partial_\mu + \beta f^{abd} A_\mu^d$$

on peut alors calculer :

$$\sigma \Gamma_{div}^n = 0 \Leftrightarrow D_\mu \frac{\partial L}{\partial A_\mu} + (\beta - \alpha) f^{abd} A_\mu^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$$

dont la solution est :

$$L = a\mathcal{L} + (\beta - \alpha) A \frac{\mathcal{L}}{A}$$

On a onc au final :

$$\begin{aligned} \Gamma_{div}^n &= \int dx \left[\lambda \mathcal{L} + (\beta - \alpha) A \frac{\mathcal{L}}{A} + \alpha (\bar{c} \partial + k) \Delta c + (\beta - \alpha) (\bar{c} \partial + k) f^{abd} A^d c^b + \frac{\beta}{2} f^{abd} l^a c^b c^d \right] \\ &= \left[\int dx \left((\beta - \alpha + \frac{a}{2}) \left[A \frac{\delta}{\delta A} + l \frac{\delta}{\delta l} \right] + \frac{\alpha}{2} \left[k \frac{\delta}{\delta k} + c \frac{\delta}{\delta c} + \bar{c} \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \right] \right) - \frac{\lambda}{2} g \frac{\delta}{\delta g} \right] \mathcal{I} \end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence on a :

$$\mathcal{I}_{n-1} = \mathcal{I} \left(z_{2,n-1}^{\frac{1}{2}} A, \tilde{z}_{2,n-1}^{\frac{1}{2}} c, \tilde{\bar{z}}_{2,n-1}^{\frac{1}{2}} \bar{c}, \tilde{z}_{2,n-1}^{\frac{1}{2}} k, z_{4,n-1} l, z_{g,n-1} g \right),$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} z_{2,n}^{\frac{1}{2}} &= z_{2,n-1}^{\frac{1}{2}} - \left(\beta - \alpha + \frac{a}{2} \right) \\ \tilde{z}_{2,n}^{\frac{1}{2}} &= \tilde{z}_{2,n-1}^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ z_{g,n}^{\frac{1}{2}} &= z_{g,n-1}^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\lambda}{2} \right) \end{aligned}$$

On a donc montré qu'à chaque ordre on a un nombre fini de contre termes. Ce qui achève la démonstration de la renormalisabilité de la théorie à tout les ordres.

7 Apparté Non Commutative

7.1 Algèbre de Moyal et théorie de jauge

Nous allons dans cette partie introduire les notions d'espace de Moyal, et de théorie de jauge sur ce même espace. Nous renvoyons le lecteur en annexe, pour des compléments en mathématique.

L'espace de Moyal est une déformation de l'espace euclidien. Sans rentrer dans des détails mathématique, nous pouvons dire que le produit habituel est remplacé par le produit de Moyal, qui agit entre des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^D)$, espace des fonctions Schwartz de \mathbb{R}^D .

$$\forall a, b \in \mathcal{S}, \quad (a \star b)(x) = \frac{1}{(\pi\theta)^D} \int d^D y d^D z a(x+y) b(x+z) e^{-iy\tilde{z}}$$

où,

- $\tilde{z}_\nu = 2\Theta_{\mu\nu}^{-1} z_\nu$
- $y\tilde{z} = y_\mu \tilde{z}_\mu$
- $\Theta_{\mu\nu} = \theta \text{diag} (J, \dots, J)$, une matrice $D \times D$
- $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nous définissons l'algèbre de Moyal, noté \mathcal{M} , comme suit :

$$\mathcal{M} = \{ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^D), \forall a \in \mathcal{S} / (T \star a) \in \mathcal{S} \text{ et } (a \star T) \in \mathcal{S} \}$$

où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^D)$ est l'espace des distributions tempérées de \mathbb{R}^D .

Nous donnons quelques propriétés importantes, $\forall a, b \in \mathcal{M}$,

- $(a \star b)^\dagger b^\dagger \star a^\dagger$
- $\partial_\mu(a \star b) = (\partial_\mu a) \star b + a \star (\partial_\mu b)$
- $\int d^D x (a \star b) = \int d^D x a.b$
- $[\tilde{x}_\mu, a]_\star = 2i(\partial_\mu a)$

Comme nous le savons, dans la théorie de Yang Mills, les champs sont des potentiels de jauge, associé à des connexions. Il est possible de définir la notion de connexion sur l'espace de Moyal.

$$\forall \Phi, \quad \nabla_\mu \Phi := \nabla_{\partial_\mu} \Phi = \partial_\mu \Phi - iA_\mu \star \Phi$$

où $A_\mu := i\nabla_\mu(1)$.

La courbure de ∇ est donnée par l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &:= [\nabla_{\partial_\mu}, \nabla_{\partial_\nu}] - \nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \\ &= -i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]_\star) \end{aligned}$$

Nous notons $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ les éléments unitaires de \mathcal{M} . Il est alors possible de montrer que l'on a, $\forall g \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} A_\mu^g &= g \star A_\mu \star g^\dagger + ig \star (\partial_\mu g^\dagger) \\ F_{\mu\nu}^g &= g \star F_{\mu\nu} \star g^\dagger \end{aligned}$$

Lorsque l'on calcule A_μ^g , en écrivant $\partial_\mu g^\dagger = [i\tilde{x}_\mu, g^\dagger]_\star$, on s'aperçoit que l'on construit un autre champ, dont sa trace est invariante de jauge.

$$\begin{aligned} A_\mu^g &= g \star A_\mu \star g^\dagger + ig \star [i\tilde{x}_\mu, g]_\star \\ &= g \star A_\mu \star g^\dagger - g \star \tilde{x}_\mu \star g + g \star g^\dagger \\ &= g \star (A_\mu - \tilde{x}_\mu) \star g \end{aligned}$$

Et si on pose $\mathcal{A}_\mu = A_\mu - \tilde{x}_\mu$, on montre facilement que $g \star \mathcal{A}_\mu \star g^\dagger$

7.2 Theorie de yang Mills Non Commutative sur le plan de Moyal

On va se placer sur le plan de Moyal ($D = 2$). Et nous considererons comme groupes de structure $U(1)$ et $SU(N)$. Nous allons calculer la fonction deux points en les fantômes. On notera par des lettres majuscule (A, B, C, \dots) les indices de $U(N)$, et par des lettres minuscule (a, b, c, \dots) les indices de $SU(N)$. Nous travaillerons en dimension $D = 2$.

J'ai admis l'expression de l'action de jauge noncommutative $U(N)$.

$$\mathcal{I} = \int d^2x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} + s \left(\bar{c} \star \partial_\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2} \bar{c} \star b \right) \right)$$

avec les notations BRST suivante :

$$\begin{aligned} sA_\mu &= D_\mu c, \\ s\bar{c} &= b, \\ sc &= igc \star c, \\ sb &= 0, \\ s^2 &= 0. \end{aligned}$$

De la même façon que sur Minkowski, on arrive à obtenir les règles de Feynman.

Règles de feynman

- Propagateur en les champs de jauge A_μ

$$G^{A^A B^B}(k) = \frac{\delta^{AB}}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

Pour la suite du calcul, nous considererons la jauge de Feynman $\alpha = 1$.

- Propagateur en les fantomes

$$G^{\bar{c}^A c^B}(k) = -\frac{\delta^{AB}}{k^2}$$

- Vertex 2 branches fantomes et une champ de jauge

$$V_\mu^{\bar{c}^0 A^A c^B}(q_1, k_2, q_3) = -2ig(2\pi)^2 \delta^2(q_1 + k_2 + q_3) q_{3\mu} \frac{d^{AB0}}{2} \sin\left(\frac{\epsilon}{2} q_1 \tilde{q}_3\right)$$

$$V_\mu^{\bar{c}^a A^b c^c}(q_1, k_2, q_3) = -2ig(2\pi)^2 \delta^2(q_1 + k_2 + q_3) q_{3\mu} \mathcal{F}^{acb}(q_1, q_3)$$

- Vertex 3 branches en champ de jauge

$$\begin{aligned} V_{\rho\sigma\tau}^{A^A A^B c^0}(k_1, k_2, k_3) &= 2ig(2\pi)^2 \delta^2(k_1 + k_2 + k_3) \mathcal{F}^{AB0}(k_1, k_2) \\ &\quad [(k_3 - k_2)_\rho \delta_{\sigma\tau} + (k_1 - k_3)_\sigma \delta_{\rho\tau} + (k_2 - k_1)_\tau \delta_{\rho\sigma}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\rho\sigma\tau}^{A^a A^b c^d}(k_1, k_2, k_3) &= 2ig(2\pi)^2 \delta^2(k_1 + k_2 + k_3) \mathcal{F}^{abc}(k_1, k_2) \\ &\quad [(k_3 - k_2)_\rho \delta_{\sigma\tau} + (k_1 - k_3)_\sigma \delta_{\rho\tau} + (k_2 - k_1)_\tau \delta_{\rho\sigma}] \end{aligned}$$

avec,

$$\mathcal{F}^{abc}(q_1, q_3) = \frac{d^{abc}}{2} \sin\left(\frac{\epsilon}{2} q_1 \tilde{q}_3\right) + \frac{f^{abc}}{2} \cos\left(\frac{\epsilon}{2} q_1 \tilde{q}_3\right)$$

$$\mathcal{F}^{abc}(q_1, q_3) = \frac{d^{AB0}}{2} \sin\left(\frac{\epsilon}{2} q_1 \tilde{q}_3\right)$$

$$\mathcal{F}^{a00}(q_1, q_3) = 0$$

Formulaire

1. $\frac{1}{k^2(k+p)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k+p(1-x))^2 + p^2x(1-x)]^2}$
2. $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2 - \frac{D}{2})$
3. $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik\epsilon\tilde{p}}}{[k^2 + M^2]^2} = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{\frac{D}{2}-2} (\epsilon|\tilde{p}|)^{2-\frac{D}{2}} \mathbf{K}_{2-\frac{D}{2}}(M\epsilon|\tilde{p}|)$
4. $f^{ade} f^{bde} = N \delta^{ab}$
5. $d^{ade} d^{bde} = \left(N - \frac{4}{N}\right) \delta^{ab}$
6. $d^{AB0} = \sqrt{\frac{2}{N}} \delta^{ab}$

7.2.1 Diagramme 1 boucle avec deux lignes externe en fantôme

On s'intéresse aux diagrammes $\bar{c}^A - c^B$. Étant donné que A et B sont égaux respectivement à $(0, a)$ et $(0, b)$, quatre possibilités s'offrent à nous.

- $\bar{c}^0 - c^0$, les deux vertex sont de type $V_\mu^{\bar{c}^0 A^A c^B}$.

Le facteur algébrique est ici :

$$d^{B00} d^{A00} \delta^{AB} = \delta^{B0} \delta^{A0} \delta^{AB} = \delta^{00} = 1$$

- $\bar{c}^0 - c^b$, les deux vertex sont soit les deux de type $V_\mu^{\bar{c}^0 A^A c^B}$, soit un $V_\mu^{\bar{c}^0 A^A c^B}$ et l'autre $V_\mu^{\bar{c}^a A^b c^c}$.

Dans chacun des cas le facteur algébrique est respectivement :

1. $d^{EB0} d^{A00} \delta^{AE} \approx \delta^{0b} = 0$
2. $d^{ae0} \mathcal{F}^{fbd} \delta^{ad} \delta^{ef} = d^{ae0} \mathcal{F}^{eba} \approx d^{ae0} d^{eba} = \delta^{b0} = 0$

- $\bar{c}^a - c^0$.

Avec les vertex précédemment établie, ce diagramme est impossible.

- et $\bar{c}^a - c^b$, les deux vertex sont de type $V_\mu^{\bar{c}^a A^b c^c}$.

Le facteur algébrique est ici :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{ebd} \mathcal{F}^{aed} &\approx d^{ebd} d^{aed} + f^{ebd} f^{aed} \\ &\approx \delta^{ab} \end{aligned}$$

• **Diagramme 0-0**

$$\begin{aligned}
\omega_{00}(p) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_{\nu}^{\bar{c}^0 A^B c^0}(p-k, k, -p) V_{\mu}^{\bar{c}^0 A^A c^0}(p, -k, k-p) G^{\bar{c}^0 c^0}(k-p) G_{\mu\nu}^{A^A A^B}(k) \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-2ig)(2\pi)^2 (-p_{\nu}) \frac{d^{B00}}{2} \sin \left[\frac{\epsilon}{2} (p-k)(-\tilde{p}) \right] \\
&\quad (-2ig)(2\pi)^2 (k-p)_{\mu} \frac{d^{A00}}{2} \sin \left[\frac{\epsilon}{2} p(\tilde{k}-\tilde{p}) \right] \\
&\quad \frac{-1}{(k-p)^2} \frac{\delta^{AB} \delta^{\mu\nu}}{k^2}
\end{aligned}$$

Le produit $p\tilde{p}$ est nul car $p\tilde{p} = p_{\mu} \theta_{\mu\nu} p_{\nu}$, et $\theta_{\mu\nu}$ est antisymétrique en μ et ν . On va effectuer le changement de variable $k \rightarrow -k$. Nos utiliserons les relations 4, 5, et 6 du formulaire afin de déterminer complètement le facteur algébrique, et également la relation 1 de sorte à éliminer les termes linéaire en k ce afin de simplifier l'intégrales comme nous allons le voir.

$$\begin{aligned}
\omega_{00}(p) &= -g^2 (2\pi)^4 2N^{-1} \delta^{00} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{pk + p^2}{k^2 (k+p)^2} \sin^2 \left[\frac{\epsilon}{2} k\tilde{p} \right] \\
&= -g^2 (2\pi)^4 2N^{-1} \delta^{00} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(pk + p^2) \sin^2 \left[\frac{\epsilon}{2} k\tilde{p} \right]}{[(k+p(1-x))^2 + p^2 x(1-x)]^2} \\
&= -g^2 (2\pi)^4 2N^{-1} \delta^{00} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(pk + p^2 x) \sin^2 \left[\frac{\epsilon}{2} k\tilde{p} \right]}{[k^2 + M^2]^2} \\
&= -g^2 (2\pi)^4 2N^{-1} \delta^{00} p^2 \int_0^1 dx x \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sin^2 \left[\frac{\epsilon}{2} k\tilde{p} \right]}{[k^2 + M^2]^2}
\end{aligned}$$

On pose,

$$\begin{aligned}
I_s &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sin^2 \left[\frac{\epsilon}{2} k\tilde{p} \right]}{[k^2 + M^2]^2} \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} (1 - \cos(\epsilon k\tilde{p})) \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} \left[1 - \frac{e^{i\epsilon k\tilde{p}} + e^{-i\epsilon k\tilde{p}}}{2} \right]
\end{aligned}$$

En utilisant les relations 2 et 3 du formulaire on parvient à écrire :

$$I_s = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) - \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{\frac{D}{2}-2} (\epsilon |\tilde{p}|)^{2-\frac{D}{2}} \mathbf{K}_{2-\frac{D}{2}}(M\epsilon |\tilde{p}|)$$

Nous pouvons insérer ce résultat dans l'expression de $\omega_{00}(p)$.

$$\begin{aligned}\omega_{00}(p) &= -g^2(2\pi)^4 N^{-1} \delta^{00} p^2 \int_0^1 dx x. \\ &\quad \cdot \left(\frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) - \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{\frac{D}{2}-2} (\epsilon |\tilde{p}|)^{2-\frac{D}{2}} \mathbf{K}_{2-\frac{D}{2}}(M \epsilon |\tilde{p}|) \right)\end{aligned}$$

La fonction $\mathbf{K}_Q(\alpha z)$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre Q . Ces fonctions sont très bien connues dans la littérature, nous admettrons donc les résultats la concernant qui nous seront utiles.

Jusqu'à présent nous sommes placé en dimension D , or comme nous l'avons déjà dit nous souhaitons étudier le cas $D = 2$.

$$\lim_{D \rightarrow 2} \omega_{00}(p) = -\frac{1}{2} g^2 (2\pi)^3 N^{-1} \delta^{00} p^2 \int_0^1 dx x (M^{-2} - M^{-1} |\tilde{p}| \mathbf{K}_1(M |\tilde{p}|))$$

On veut étudier le problème des divergences infrarouge. On va donc considérer la limite $p \rightarrow 0$. On notera que $\lim_{z \rightarrow 0} z \mathbf{K}_1(\alpha z) = \frac{1}{\alpha}$.

$$\lim_{\substack{D \rightarrow 2 \\ p \rightarrow 0}} \omega_{00}(p) = -\frac{1}{2} g^2 (2\pi)^3 N^{-1} \delta^{00} \int_0^1 dx x \left(\frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{x(1-x)} \right)$$

On a donc :

$$\lim_{\substack{D \rightarrow 2 \\ p \rightarrow 0}} \omega_{00}(p) = 0$$

Dans ce cas les divergences infrarouge "s'auto-annulent."

• **Diagramme a-b**

$$\begin{aligned}\omega_{ab}(p) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_{\nu}^{\bar{c}f A^d c^b}(p-k, k, -p) V_{\mu}^{\bar{c}a A^c c^e}(p, -k, k-p) G^{\bar{c}f c^e}(k-p) G_{\mu\nu}^{A^c A^d}(k) \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-2ig)(2\pi)^2 (-p_{\nu}) \mathcal{F}^{fbd}(p-k, -p) \\ &\quad (-2ig)(2\pi)^2 (k-p)_{\mu} \mathcal{F}^{aec}(p, k-p) \\ &\quad \frac{-\delta^{fe} \delta^{cd} \delta^{\mu\nu}}{(k-p)^2 k^2} \\ &= 4g^2 (2\pi)^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{pk + p^2}{k^2 (k+p)^2} \mathcal{F}^{ebd}(p+k, -p) \mathcal{F}^{aed}(p, -k-p) \\ &= 4g^2 (2\pi)^4 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{pk + p^2 x}{[k^2 + M^2]^2} \mathcal{F}^{ebd}(k+px, -p) \mathcal{F}^{aed}(p, -k-px)\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{ebd}(k+px, -p)\mathcal{F}^{aed}(p, -k-px) &= \left(\frac{d^{ebd}}{2} \sin\left(-\frac{\epsilon}{2}(k+px)\tilde{p}\right) + \frac{f^{ebd}}{2} \cos\left(-\frac{\epsilon}{2}(k+px)\tilde{p}\right) \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{d^{aed}}{2} \sin\left(-\frac{\epsilon}{2}p(\tilde{k}+\tilde{p}x)\right) + \frac{f^{aed}}{2} \cos\left(-\frac{\epsilon}{2}p(\tilde{k}+\tilde{p}x)\right) \right) \\
&= -\frac{1}{4}d^{ebd}d^{aed}\sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}p\tilde{k}\right) + \frac{1}{4}f^{ebd}f^{aed}\cos^2\left(\frac{\epsilon}{2}p\tilde{k}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\delta^{ab}\left(N - \frac{4}{N}\right)\sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}p\tilde{k}\right) - \frac{1}{4}N\delta^{ab}\cos^2\left(\frac{\epsilon}{2}p\tilde{k}\right)
\end{aligned}$$

On peut donc écrire,

$$\omega_{ab}(p) = -g^2(2\pi)^4\delta^{ab}p^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} \left(\left(N - \frac{4}{N}\right) \sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}p\tilde{k}\right) + N \cos^2\left(\frac{\epsilon}{2}p\tilde{k}\right) \right)$$

Posons,

$$I_c = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\cos^2\left[\frac{\epsilon}{2}k\tilde{p}\right]}{[k^2 + M^2]^2}$$

De la même façon que nous avons calculé I_s , nous obtenons pour I_c l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
I_c &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} (1 + \cos(\epsilon k\tilde{p})) \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} \left[1 + \frac{e^{i\epsilon k\tilde{p}} + e^{-i\epsilon k\tilde{p}}}{2} \right] \\
&= \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) + \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{\frac{D}{2}-2} (\epsilon|\tilde{p}|)^{2-\frac{D}{2}} \mathbf{K}_{2-\frac{D}{2}}(M\epsilon|\tilde{p}|)
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne pour $\omega_{ab}(p)$, la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\omega_{ab}(p) &= g^2(2\pi)^4 \frac{\delta^{ab}}{2} p^2 \int_0^1 dx \left(\left(\frac{4}{N} - \frac{5N}{4} \right) \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3N}{4} - \frac{4}{N} \right) \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{\frac{D}{2}-2} (\epsilon|\tilde{p}|)^{2-\frac{D}{2}} \mathbf{K}_{2-\frac{D}{2}}(M\epsilon|\tilde{p}|) \right)
\end{aligned}$$

Nous procédons de la même façon que précédemment. nous allons à présent prendre la limite $D \rightarrow 2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{D \rightarrow 2} \omega_{ab}(p) &= 2g^2\delta^{ab}p^2 \int_0^1 dx \left(\left(\frac{4}{N} - \frac{5N}{4} \right) \frac{1}{M^2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3N}{4} - \frac{4}{N} \right) \frac{1}{M} \epsilon|\tilde{p}| \mathbf{K}_1(M\epsilon|\tilde{p}|) \right)
\end{aligned}$$

Etant donné que nous nous intéressons à la limite infrarouge, nous allons considérer la limite $p \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{D \rightarrow 2 \\ p \rightarrow 0}} \omega_{ab}(p) &= g^2 g^2 \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{x}{x(1-x)} \left(\left(\frac{4}{N} - \frac{5N}{4} \right) + \left(\frac{3N}{4} - \frac{4}{N} \right) \right) \\
&= -2g^2 \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{x}{x(1-x)} \frac{N}{2} \\
&= -Ng^2 \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{x}{x(1-x)}
\end{aligned}$$

Et contrairement au cas précédent, où l'on avait deux lignes externe $U(1)$, cette situation avec cette fois deux pête $SU(N)$ conserve une divergence infrarouge.

8 IR div. (D=2)

8.1 Feynman Rules

8.1.1 Propagator

Propagator of gauge field

$$G^{AA^{AB}}(k) = \frac{\delta^{AB}}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

Propagator of ghost field

$$G^{\bar{c}^A c^B}(k) = -\frac{\delta^{AB}}{k^2}$$

8.1.2 Vertex

Vertex with one gauge field and two ghost field

$$V_\mu^{\bar{c}^0 A^A c^B}(q_1, k_2, q_3) = -2ig(2\pi)^2 \delta^2(q_1 + k_2 + q_3) q_{3\mu} \frac{d^{AB0}}{2} \sin\left(\frac{\epsilon}{2} q_1 \tilde{q}_3\right)$$

$$V_\mu^{\bar{c}^a A^b c^c}(q_1, k_2, q_3) = -2ig(2\pi)^2 \delta^2(q_1 + k_2 + q_3) q_{3\mu} \mathcal{F}^{acb}(q_1, q_3)$$

with,

$$\mathcal{F}^{abc}(q_1, q_3) = \frac{d^{abc}}{2} \sin\left(\frac{\epsilon}{2} q_1 \tilde{q}_3\right) + \frac{f^{abc}}{2} \cos\left(\frac{\epsilon}{2} q_1 \tilde{q}_3\right)$$

Vertex with three gauge field

$$V_{\rho\sigma\tau}^{AA^Bc^0}(k_1, k_2, k_3) = 2ig(2\pi)^2\delta^2(k_1 + k_2 + k_3)\mathcal{F}^{AB0}(k_1, k_2) \\ [(k_3 - k_2)_\rho\delta_{\sigma\tau} + (k_1 - k_3)_\sigma\delta_{\rho\tau} + (k_2 - k_1)_\tau\delta_{\rho\sigma}]$$

$$V_{\rho\sigma\tau}^{A^aA^bc^d}(k_1, k_2, k_3) = 2ig(2\pi)^2\delta^2(k_1 + k_2 + k_3)\mathcal{F}^{abc}(k_1, k_2) \\ [(k_3 - k_2)_\rho\delta_{\sigma\tau} + (k_1 - k_3)_\sigma\delta_{\rho\tau} + (k_2 - k_1)_\tau\delta_{\rho\sigma}]$$

with,

$$\mathcal{F}^{AB0}(q_1, q_3) = \frac{d^{AB0}}{2} \sin\left(\frac{\epsilon}{2} q_1 \tilde{q}_3\right) \\ \mathcal{F}^{a00}(q_1, q_3) = 0$$

8.2 Formulary

8.2.1 Formulary

- $f^{ade}f^{bde} = N\delta^{ab}$
- $d^{ade}d^{bde} = \left(N - \frac{4}{N}\right)\delta^{ab}$
- $d^{AB0} = \sqrt{\frac{2}{N}}\delta^{AB}$
- $\frac{1}{k^2(k+p)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k+p(1-x))^2 + p^2x(1-x)]^2}$
- $I_1 := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2 - \frac{D}{2})$
- $I_2 := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik\epsilon\tilde{p}}}{[k^2 + M^2]^2} = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{\frac{D}{2}-2} (\epsilon|\tilde{p}|)^{2-\frac{D}{2}} \mathbf{K}_{2-\frac{D}{2}}(M\epsilon|\tilde{p}|)$
- $I_3 := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sin^2(k\epsilon\tilde{p})}{[k^2 + M^2]^2} =$
- $I_4 := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\cos^2(k\epsilon\tilde{p})}{[k^2 + M^2]^2} =$

8.2.2 Proof

8.2.3 Diagramm $\bar{c}^0 - c^0$

Algebraic Factor

The algebraic factor is equal to :

$$d^{B00}d^{A00}\delta^{AB} = \delta^{B0}\delta^{A0}\delta^{AB} = \delta^{00} = 1$$

Calcul

$$\begin{aligned}\omega_{00}(p) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_\nu^{\bar{c}^0 A^B c^0}(p-k, k, -p) V_\mu^{\bar{c}^0 A^A c^0}(p, -k, k-p) G^{\bar{c}^0 c^0}(k-p) G_{\mu\nu}^{A^A A^B}(k) \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-2ig)(2\pi)^2 (-p_\nu) \frac{d^{B00}}{2} \sin\left[\frac{\epsilon}{2}(p-k)(-\tilde{p})\right] \\ &\quad (-2ig)(2\pi)^2 (k-p)_\mu \frac{d^{A00}}{2} \sin\left[\frac{\epsilon}{2}p(\tilde{k}-\tilde{p})\right] \\ &\quad \frac{-1}{(k-p)^2} \frac{\delta^{AB}\delta^{\mu\nu}}{k^2}\end{aligned}$$

Le produit $p\tilde{p}$ est nul car $p\tilde{p} = p_\mu \theta_{\mu\nu} p_\nu$, et $\theta_{\mu\nu}$ est antisymétrique en μ et ν . On va effectuer le changement de variable $k \rightarrow -k$. Nos utiliserons les relations 4, 5, et 6 du formulaire afin de déterminer complètement le facteur algébrique, et également la relation 1 de sorte à éliminer les termes linéaire en k ce afin de simplifier l'intégrales comme nous allons le voir.

$$\begin{aligned}\omega_{00}(p) &= -g^2(2\pi)^4 2N^{-1} \delta^{00} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{pk + p^2}{k^2(k+p)^2} \sin^2\left[\frac{\epsilon}{2}k\tilde{p}\right] \\ &= -g^2(2\pi)^4 2N^{-1} \delta^{00} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(pk + p^2) \sin^2\left[\frac{\epsilon}{2}k\tilde{p}\right]}{[(k+p(1-x))^2 + p^2x(1-x)]^2} \\ &= -g^2(2\pi)^4 2N^{-1} \delta^{00} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(pk + p^2x) \sin^2\left[\frac{\epsilon}{2}k\tilde{p}\right]}{[k^2 + M^2]^2} \\ &= -g^2(2\pi)^4 2N^{-1} \delta^{00} p^2 \int_0^1 dx x \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sin^2\left[\frac{\epsilon}{2}k\tilde{p}\right]}{[k^2 + M^2]^2}\end{aligned}$$

On pose,

$$\begin{aligned}I_s &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\sin^2\left[\frac{\epsilon}{2}k\tilde{p}\right]}{[k^2 + M^2]^2} \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} (1 - \cos(\epsilon k\tilde{p})) \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + M^2]^2} \left[1 - \frac{e^{i\epsilon k\tilde{p}} + e^{-i\epsilon k\tilde{p}}}{2}\right]\end{aligned}$$

En utilisant les relations 2 et 3 du formulaire on parvient à écrire :

$$I_s = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) - \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{\frac{D}{2}-2} (\epsilon |\tilde{p}|)^{2-\frac{D}{2}} \mathbf{K}_{2-\frac{D}{2}}(M\epsilon |\tilde{p}|)$$

Nous pouvons insérer ce résultat dans l'expression de $\omega_{00}(p)$.

$$\begin{aligned} \omega_{00}(p) = & -g^2(2\pi)^4 N^{-1} \delta^{00} p^2 \int_0^1 dx x. \\ & \cdot \left(\frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) - \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{D}{2}}} M^{\frac{D}{2}-2} (\epsilon |\tilde{p}|)^{2-\frac{D}{2}} \mathbf{K}_{2-\frac{D}{2}}(M\epsilon |\tilde{p}|) \right) \end{aligned}$$

La fonction $\mathbf{K}_Q(\alpha z)$ est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre Q . Ces fonctions sont très bien connus dans la littérature, nous admettrons donc les résultats la concernant qui nous seront utiles.

Jusqu'à présent nous sommes placé en dimension D , or comme nous l'avons déjà dit nous souhaitons étudier le cas $D = 2$.

$$\lim_{D \rightarrow 2} \omega_{00}(p) = -\frac{1}{2} g^2 (2\pi)^3 N^{-1} \delta^{00} p^2 \int_0^1 dx x (M^{-2} - M^{-1} |\tilde{p}| \mathbf{K}_1(M |\tilde{p}|))$$

On veut étudier le problème des divergences infrarouge. On va donc considérer la limite $p \rightarrow 0$. On notera que $\lim_{z \rightarrow 0} z \mathbf{K}_1(\alpha z) = \frac{1}{\alpha}$.

$$\lim_{\substack{D \rightarrow 2 \\ p \rightarrow 0}} \omega_{00}(p) = -\frac{1}{2} g^2 (2\pi)^3 N^{-1} \delta^{00} \int_0^1 dx x \left(\frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{x(1-x)} \right)$$

On a donc :

$$\lim_{\substack{D \rightarrow 2 \\ p \rightarrow 0}} \omega_{00}(p) = 0$$

Dans ce cas les divergences infrarouge "s'auto-annulent."

8.2.4 Diagramm $\bar{c}^0 - c^b$

Algebraic Factor

1. $d^{EB0} d^{A00} \delta^{AE} \approx \delta^{0b} = 0$
2. $d^{ae0} \mathcal{F}^{bd} \delta^{ad} \delta^{ef} = d^{ae0} \mathcal{F}^{eba} \approx d^{ae0} d^{eba} = \delta^{b0} = 0$

8.2.5 Diagramm $\bar{c}^a - c^0$

We can't have this diagramm with our vertex.

8.2.6 Diagramm $\bar{c}^a - c^b$

Algebraic Factor

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{ebd}\mathcal{F}^{aed} &\approx d^{ebd}d^{aed} + f^{ebd}f^{aed} \\ &\approx \delta^{ab}\end{aligned}$$

8.3 Diagramm with 2 exterior Fields legs

9 Discussion

J'ai part ce stage consolider, compléter, ma compréhension de la théorie des champs. J'ai commencé à avoir un peu de recul sur des cas simple, ce qui m'a permis d'aborder des théories des champs construites sur des espaces non commutatifs.

Mon travail, comme vous avez pu le constater à travers les pages précédentes, c'est découpé en deux grandes parties. Une partie concernant la théorie de Yang Mills sur un espace commutatif, qui m'a occupé la majeure partie du temps. Et une seconde partie consacrée à des études de théories des champs sur des espaces non commutatifs.

Dans le commutatif, je me suis intéressé aux théories de Yang Mills sans masses. Je l'ai étudié d'un point de vue classique, géométrique notamment, mais également d'un point de vue quantique. Pour la procédure de quantification j'ai utilisé le formalisme de l'intégrale de chemin, que j'ai tenté d'introduire le plus simplement possible. Je me suis également confronté au dilemme du choix de jauge, dont la covariance, dans le cas de la jauge de Coulomb, est maintenu grâce à la méthode de Faddeev et Popov, qui prolonge la mesure de la matrice \mathcal{S} à la jauge de Lorentz qui elle est covariante par définition. Cette méthode, après l'avoir manipulé un peu dans tout sens, peut paraître "triviale", mais c'est bien grâce à cette idée de Faddeev et Popov que l'on a pu quantifier de tels théories de jauge. Lorsque l'on a fini d'écrire la matrice \mathcal{S} , on s'aperçoit que l'on a en plus du champ de jauge de départ, un autre champ, celui des fantômes. Ces nouveaux champs proviennent directement du fixage de jauge. On est en présence de deux types de champs, il y aura donc des interactions entre eux (termes de vertex supplémentaire dans les règles de Feynman). Ces termes supplémentaires brisent l'invariance de jauge de départ. Mais grâce à Becchi, Rouet, Stora, et Tyupkin, on sait qu'une symétrie persiste, la symétrie BRST. C'est celle-ci qui nous permet d'écrire des identités de Ward, appelée identités de Slavnov.

Comme dans le cas de l'électrodynamique, on constate que certains graphes sont divergents. Mais avec ces identités de Slavnov, il nous est possible de prouver la renormalisabilité de cette théorie à tout les ordres. Mon travail pour cette partie s'est terminé ici.

J'ai l'intention plus tard de comprendre les problèmes liés aux anomalies, et aux cas des brisures spontanée de symétrie, qui permet l'attribution d'un terme de masse.

Dans une seconde partie, comme je l'ai déjà dit, je me suis intéressé à des théories des champs construites sur des espaces non commutatifs. En l'occurrence j'ai travaillé sur des déformations de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^4 . J'ai calculé les règles de Feynman correspondantes à cette théorie, et outre le fait que d'approprier de nouveaux outils, on remarque que les termes de vertex ont des facteurs oscillants, typiquement un terme en cosinus ou sinus. Ces termes oscillants introduisent dans les amplitudes des termes non planaires. Je me suis par la suite placé dans le cas 2-dimensionnel, en considérant comme groupe de structure $U(1)$. La correction à une boucle, avec comme lignes externes des fantômes, et comme vertex, deux vertex champ de jauge - fantôme - fantôme, on s'aperçoit que les divergences infrarouges du secteurs planaires sont exactement compensées par celles du secteur non planaire. Je suis en ce moment en train de poursuivre ce calcul du compote-ment dans l'infrarouge, pour toutes les fonctions deux points.

Cette introduction à la théories des champs sur ces espaces non commutatifs, m'a donné envie de continuer dans cette voie, et notamment de voir si tout ce que j'ai fait pour le cas commutatif, je peux le reproduire d'une manière ou d'une autre au cas non commutatifs. Un travail que j'espère poursuivre en thèse dès la rentrée prochaine.

A Notations et Conventions utilisées

- G le groupe des symétries interne du système.
- \mathcal{G} l'algèbre de Lie de Ω
- T^a ($a = 1 \dots n$), les générateurs orthonormés de la représentation adjointe de G , formant une base de \mathcal{G} .
- $[T^a, T^b]$ le commutateur, qui vaut : $[T^a, T^b] = f^{abd} T^d$, où f^{abd} est la constante de structure de \mathcal{G} .
- La trace du produit de deux générateurs de G vaut : $\text{tr}(T^a T^b) = -2\delta^{ab}$.
- A_μ le champ de Yang Mills à valeur dans \mathcal{G} .
On a alors $A_\mu = A_\mu^a T^a$.
- \mathcal{I} désignera une action.
- \mathcal{S} désignera la matrice S .
- $\mathcal{Z}(j)$ désignera la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green, ayant pour terme de source j .
- On notera $W = \ln(\mathcal{Z})$.
- $\Gamma = \mathcal{W} - i \int (\text{termes des source}) dx$ désignera la fonction de corrélation.
- Les lettres grecques lorsqu'elles sont sommées designe les indices spatiaux-temporelles (0,1,2,3).
- Les lettres latines lorsqu'elles sont sommées designe les indices spatiaux (1,2,3).
- Les indices répétés sont sommés, nul besoin d'avoir un indice en haut et un autre en bas.

B Règles de Feynman

B.0.1 Motivation

Considérons l'intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} &= (-2)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \\
 &= (-2)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \right) \\
 &= \sqrt{2\pi} \frac{1.3.5.7....(2n-1)}{\alpha^{\frac{1}{2}+n}}
 \end{aligned}$$

On peut également évaluer cette intégrale en intriduisant une source j ,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2} + jx\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\alpha\left(x - \frac{j}{\alpha}\right)\right] \exp\left[\frac{j^2\alpha}{2}\right] \\
 &= \exp\left[\frac{j^2\alpha}{2}\right] \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

on a donc,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2} + jx\right) &= \frac{d^{2n}}{dj^{2n}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2} + jx\right) \Big|_{j=0} \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{d^{2n}}{dj^{2n}} \left(\exp\left[\frac{j^2\alpha}{2}\right] \right) \Big|_{j=0}
 \end{aligned}$$

On peut facilement developper sous forme de serie l'exponentielle, on obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2} + jx\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \frac{1.3.5.7....(2n-1)}{\alpha^{\frac{1}{2}+n}}$$

et on retrouve bien le résultat précédent.

À présent au lieu de prendre α , nous allons prendre une matrice M symétrique de taille $n \times n$, dont les valeurs propres sont dénotées λ_i , avec $i = 1, \dots, n$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 \int dx_1 \dots dx_n \exp\left(\frac{-1}{2} x^T M x\right) &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det M)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

On peut, comme precedement, introduire une Surce J . on a alors l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int dx_1 \dots dx_n \exp\left(\frac{-1}{2}x^T Mx + Jx\right) &= \int dx_1 \dots dx_n \exp\left(\frac{-1}{2}(x^T - J^T M^{-1})M(x - M^{-1}J)\right) \\ &\quad \exp\left(\frac{1}{2}J^T M^{-1}J\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det M)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{1}{2}J^T M^{-1}J\right). \end{aligned}$$

On peut donc à présent calculer l'intégrale qui nous interesse :

$$\begin{aligned} \int dx_1 \dots dx_n x_{k_1} \dots x_{k_{2n}} \exp\left(\frac{-1}{2}x^T Mx\right) &= \frac{\partial}{\partial J_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{k_{2n}}} \int dx_1 \dots dx_n \exp\left(\frac{-1}{2}x^T Mx + Jx\right) \Big|_{J=0} \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det M)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial J_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{k_{2n}}} \exp\left(\frac{1}{2}J^T M^{-1}J\right) \Big|_{J=0} \end{aligned}$$

En écrivant,

$$J^T M^{-1} J = \sum_{kl} J_k^T M_{kl}^{-1} J_l,$$

on parvient à écrire :

$$\int dx_1 \dots dx_n x_{k_1} \dots x_{k_{2n}} \exp\left(\frac{-1}{2}x^T Mx\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det M)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(M_{k_{2n}k_{2n-1}}^{-1} \dots M_{k_2k_1}^{-1}\right)^n$$

Une interprétation graphique de ce résultat est possible. Si on relie des points deux à deux, dénoté par $x_{i_{2n}}$ ($r = 1, \dots, 2n$), chaque ligne entre deux points x_i et x_j sera pondéré par le facteur M_{ij}^{-1} , que l'on appelle "propagateur".

B.0.2 Calculs des propagateurs

Nous allons considérer le cas du champ de Yang Mills. Le lagrangien de Yang-Mills s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{YM} &= \frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \\
&= \frac{-1}{4} \left(\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + f^{abd} A_\mu^b A_\nu^d \right) \left(\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + f^{abd} A_\mu^b A_\nu^d \right) \\
&= \frac{-1}{4} \left[(\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) + 2 f^{abd} A_\mu^b A_\nu^d (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) \right. \\
&\quad \left. + f^{abd} f^{aen} A_\mu^b A_\nu^d A_\mu^e A_\nu^n \right] \\
&= \frac{-1}{2} \left[(\partial_\mu A_\nu^a \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\mu A_\nu^a \partial_\nu A_\mu^a) + f^{abd} A_\mu^b A_\nu^d (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) \right. \\
&\quad \left. + 2 f^{abd} f^{aen} A_\mu^b A_\nu^d A_\mu^e A_\nu^n \right] \\
&= \frac{-1}{2} A_\nu^a [-\square g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu] A_\nu^a \\
&\quad + \frac{-1}{2} f^{abd} A_\mu^b A_\nu^d (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) + f^{abd} f^{aen} A_\mu^b A_\nu^d A_\mu^e A_\nu^n
\end{aligned}$$

Le terme $[-\square g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu]$ est appelé le propagateur, c'est l'équivalent de la matrice A de la partie précédente, on comprend donc pourquoi il est nécessaire de l'inverser. Les autres termes sont des termes d'interaction, ils vont nous donner deux type de vertex, un vertex à 3 champs de jauge et un autre à 4 champs de jauge. Le problème avec ce propagateur, c'est qu'il n'a pas d'inverse.

Proposition L'opérateur $[-\square g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu]$ n'a pas d'inverse.

Preuve On peut écrire $A_\mu = \partial_\nu \Lambda$, on a donc : $[-\square g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu] A_\mu = [-\square \partial_\mu + \partial_\mu \square] \Lambda = 0$. On voit donc que cet opérateur à zéro comme valeur propre, pour cette raison il n'est donc pas inversible.

Mais on sait que le lagrangien une fois fixé de jauge, s'écrit comme :

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{c}^a \left(\square c^a - g f^{abd} \partial_\mu (A_\mu^b c^d) \right).$$

Si on développe on obtient un terme de propagation pour les champs de jauge, un autre pour les fantômes, et trois types de vertex, un avec 4 champs de jauge, un autre avec 3 champs de jauge, et encore un autre avec un champ de jauge, et 2 fantômes.

On note p l'impulsion.

Le propagateur pour les champs de jauge s'écrit comme :

$$[-\square g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu],$$

et son inverse est :

$$\frac{-i\delta^{ab}}{p^2 + i0} \left[g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right]$$

Le propagateur pour les fantôme s'écrit comme :

$$c^a \square \overline{c^a},$$

et son inverse est :

$$\frac{-\delta^{ab}}{p^2 + i0}.$$

B.0.3 Calculs des vertex

Les termes d'interaction du lagrangien de Yang Mills fixé de jauge sont les suivant :

$$\begin{aligned} & -g f^{abd} c^a \partial_\mu \left(A_\mu^b c^d \right) \\ & \frac{-1}{2} f^{abd} A_\mu^b A_\nu^d (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) \\ & f^{abd} f^{aen} A_\mu^b A_\nu^d A_\mu^e A_\nu^n \end{aligned}$$

Pour obtenir les vertex correspondants à chacun de ces termes d'interaction, on passe dans l'espace de fourrier, et on "dérive" (au sens fonctionnelle) ces trois termes par rapport à leurs propre champ. Par exemple on "derivera" le premier terme successivement par c^a , $\overline{c^a}$, et A_μ^b .

B.1 Notions utiles de théorie des distributions

Cette partie est directement issue de l'ouvrage de J.-M. Bony (Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier). Je l'ai ajouté à mon rapport afin de simplifier la lecture de celui-ci pour le lecteur ne connaissant pas ces notions.

On pose $D=2n$.

Definition B.1. Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^D)$

On dit que $f \in \mathbb{R}^D$ si :

- $f \in C^\infty$
- f et toutes ses dérivées sont à "décroissance rapide", c'est à dire que leur produit par un polynôme quelconque est une fonction bornée. Il est équivalent de dire que les quantités suivantes :

$$N_p(f) = \sum_{|\alpha| \leq p} \sum_{|\beta| \leq p} \left\| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right\|_{L^\infty}$$

sont finies pour tout p .

On dit que $S(\mathbb{R}^D)$ est l'espace de Schwartz à valeur sur \mathbb{R}^D .

Definition B.2.

L'espace $L(\mathbb{R}^D)$ est l'espace des fonctions qui sont presque partout égale à une fonction bornée.

Definition B.3. On dit qu'une propriété $P(x)$ dépendant d'un point x est vérifié presque partout si l'ensemble $\{x/\text{non}P(x)\}$ est de mesure nulle.

Definition B.4.

Soit f une fonction à valeur réelles définies sur \mathbb{R}^D . On dit que $M \in \mathbb{R}^D$ est presque majorant de f si on a $f(x) \leq M$ presque partout.

Theorem B.1.

Si f est presque majoré, alors l'ensemble de ses presque majorants possède un plus petit élément, que l'on appelle la borne supérieure essentielle de f et que l'on note $\sup_{ess} f(x)$.

Definition B.5.

On appelle $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^D)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées, c'est à dire tel que la fonction $|f(x)|$ possède un presque majorant.

L'application $f \rightarrow \sup_{ess} |f(x)|$ possède toute les propriétés d'une norme, à l'exception du fait que la nullité de $\sup_{ess} |f(x)|$ implique seulement $f = 0$ presque partout.

Definition B.6.

L'espace $L^\infty(\mathbb{R}^D)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées pour la relation d'équivalence $f = g$ presque partout.

Muni de la norme (souvent noté $\|\cdot\|_\infty$),

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{ess_{x \in \mathbb{R}^D}} |f(x)|$$

L^∞ est un espace de Banach.

Definition B.7.

On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet (pour la distance associé à la norme).

Definition B.8.

Soit (e, d) un espace métrique,

- On dit qu'une suite x_j est une suite de cauchy si on a :

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} d(x_j, x_k) = 0$$

- On dit que l'espace est complet si toute suite de cauchy est convergente.

Proposition B.1.

Dans tout espace métrique, une suite convergente est toujours de Cauchy.

Proposition B.2.

Tout espace métrique compact est complet.

Definition B.9.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^D .

On appelle fonction test dans Ω les éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ des fonctions indéfiniment dérivable et à support compact dans Ω .

Pour K compact dans Ω , on note C_K^∞ l'espace des fonctions d'essai à support dans K (c'est à dire nulle dans K).

On dit que u est une distribution dans l'ouvert Ω si u est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$ qui vérifie la propriété de continuité suivante : pour tout compact K de Ω il existe un entier p et une constante C tel que,

$$\forall f \in C_K^\infty, \quad |\langle u, f \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq p} |\partial^\alpha f(x)|$$

On note $D'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions dans Ω .

Definition B.10.

Soit $u \in D'(\mathbb{R}^D)$.

On dit que u est une distribution tempérée, ce que l'on note $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^D)$, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \leq cN_p(f)$.

C Acknowledgments

I would like to thank This work was supported by the Laboratory of Theoretical Physics (Orsay).

Je tiens à remercier dans un premier temps, toute l'équipe pédagogique du master P3TMA Physique Theorique et Mathematique, Physique des Particules et Astrophysique de l'université d'Aix-Marseille.

Je remercie J.-C. Wallet pour m'avoir accepté en stage, pour le temps qu'il m'a accordé, ainsi que pour ses nombreux conseils.

Je souhaite témoigner toute ma reconnaissance, pour l'accueil particulièrement agréable qui m'a été accordé, à l'ensemble des membres du laboratoire, et en particulier à H. Hilhorst, M. Calvet, O. Heckenauer, et Patricia Dubois-Violette. Je suis également reconnaissant envers Zithuo Wang, Sylvain Carozza, et Xavier Blot, mes voisins de bureau.

Pour finir je tiens à vous remercier, vous lecteur, pour avoir pris la peine de vous intéresser à mon travail. J'espere simplement ne pas avoir laisser trop de fautes d'orthographes, et autres erreurs.

D References

- [1] S. Lazzarini, *Lecture on Geometry and gauge theory* (2012). no quotes

- [2] T. Masson, *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions*, (2010), available at <http://science.thilucmic.fr/spip.php/article12>. no quotes
- [3] C. Itzykson et J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Dover Publications, INC. Mineola, New York, (1980). no quotes
- [4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I Foundations*, Cambridge University Press (1995). no quotes
- [5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume II Modern Applications*, Cambridge University Press (1996). no quotes
- [6] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press Oxford, (1989). no quotes
- [7] M. Le Bellac, *Des Phénomènes critiques aux champs de jauge, Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, CNRS Editions, (2002). no quotes
- [8] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Clarendon Press Oxford, (1996). no quotes
- [9] N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity*, World Scientific, (1990). no quotes
- [10] L. Schwartz, *Méthode Mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, (1998). no quotes
- [11] J.-M. Bony, *Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les Éditions de l'Ecole Polytechnique, (2001). no quotes
- [12] J.-M. Bony, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Les Éditions de l'Ecole Polytechnique, (2000). no quotes
- [13] T. Masson, *Introduction aux (Co)Homologies, Cours et Exercices*, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, (2008). no quotes
- [14] Axel de Goursac, *Noncommutative geometry, gauge theory and renormalization*, arxiv : 0910.5158v2 [math-ph], (2010). no quotes
- [15] J.-C. Wallet, *Derivations of the Moyal Algebra and Noncommutative Gauge Theories*, arxiv : 0811.3850v2 [math-ph], (2009). no quotes