Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Travaux dirirgés - Fonctions usuelles

Promotion 116

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
2. $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0.$

[07.0000]

Exercice 2

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

1. $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$
2. $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$

[07.0001]

Exercice 3 Limites et exponentielle

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}$

[07.0002]

Exercice 4 Les principales formes indéterminées

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\exp(x) - x^3\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x) - x - \sqrt{x})$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x+1}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})}$
6. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \exp\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}$

[07.0003]

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions suivantes. C'est un exercice d'entraînement au calcul, on ne demande pas de déterminer les ensembles sur lesquels les fonctions sont dérivables.

1. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 7$.
2. $f(x) = \dfrac{4x-1}{7x+2}$.
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$.
4. $f(x) = 6\sqrt{x}$.
5. $f(x) = 4\sin x + \cos(2x)$.
6. $f(x) = \cos(-2x+5)$.
7. $f(x) = \sin x^2$.
8. $f(x) = \sin^2 x$. (On peut aussi noter $(\sin x)^2$)
9. $f(x) = \tan x$.
10. $f(x) = (2x-5)^4$. (Développement déconseillé)
11. $f(x) = \frac{7}{x^2-9}$.
12. $f(x) = \sqrt{4x^2-3}$.
13. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$.
14. $f(x) = \left(\dfrac{4x-1}{x+2}\right)^3$.
15. $f(x) = x\ln x - x$;
16. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
17. $f(x) = \ln\sqrt{x}$;
18. $f(x) = (\ln x)^2$;
19. $f(x) = \ln\left(x^2\right)$
20. $f(x) = \exp\left(x^2+3x-1\right)$;
21. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;
22. $f(x) = e^{e^x}$;
23. $f(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}$

[07.0004]

Exercice 6

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ? En déduire qu'ill suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$ pour construire toute la courbe représentative de f.
3. Montrer que, pour tout réel $\boldsymbol{x}$, on a
$$f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$$
4. Étudier le signe de $1+2\cos x$ sur $[0,\pi]$.
5. Établir le tableau de variations de f sur $[\mathbf{0},\pi]$.
6. Tracer la courbe représentative de f.

[07.0005]

Exercice 7

Soit
$$f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Etudier la parité et la périodicité de f
3. Calculer la dérivée de f
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer la courbe de f.

[07.0006]

Exercice 8

Soit
$$f(x) = Arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Calculer la dérivée de f
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Tracer la courbe de f.

[07.0007]

Exercice 9

Soit
$$f(x) = Argch\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Simplifier f, si c'est possible.
3. Calculer la dérivée de f
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer la courbe de f.

[07.0008]

Exercice 10

Soit
$$f(x) = Argsh\left(2x+8e^{-x}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Calculer la dérivée de f
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Tracer la courbe de f.

[07.0009]

Exercice 11

Soit $a \neq 0$ un réel.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \mathrm{Arctan}(ax)$$
2. En déduire une primitive de $\dfrac{1}{4+x^2}$.

[07.0010]

Exercice 12

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x)\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la periodicité et la parité de f. En déduire l'intervalle d'étude I le plus petit possible.
3. Calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer son graphe sur trois périodes

[07.0011]

Exercice 13

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \text{Arctan}(x)$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour tout x réel, calculer la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f au point x.
3. Que dire de f.

[07.0012]

Exercice 14

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$$

Et g la fonction définie par

$$g(x) = \text{Arctan}\left(e^x\right)$$

1. Déterminer sur quel ensemble f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$ et déterminer sur quel ensemble f est dérivable.
3. Calculer $g'(x)$
4. Pour tout $x > 0$ trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

[07.0013]

Exercice 15

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

[07.0016]

Exercice 16

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude I le plus petit possible. On justifiera ce choix.
3. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle
$$J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
4. Calculer les limites de f aux bornes de J.
5. Calculer la dérivée de f.
6. Etablir le tableau de variation de la fonction f.
7. Tracer la courbe représentative de f.

[07.0015]

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

[07.0017]

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x)$$

1. Déterminer la période de f, sa parité et en déduire un intervalle d'étude I.
2. Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Etudier les variation de f sur I.
4. Calculer $f(0), f(x_0)$ et $f(\pi)$ sous forme rationnelle. Où x_0 est l'unique valeur dans $]0, \pi[$ annulant $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de variation. Tracer sommairement le graphe de f sur trois périodes.

[07.0018]

Exercice 19

Soit $f : [-\pi, \pi] \to R$ définie par $f(x) = 4x - 5\sin(x)$

1. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
2. Montrer que f' dans l'intervalle $[0, \pi]$ s'annule pour une valeur comprise entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
4. Tracer la courbe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

[07.001]

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos(x) + \frac{2}{3}x$

1. Montrer que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, en déduire un encadrement de $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)$.
2. Etudier les variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
3. On donnera un encadrement de $f\left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.
4. Tracer le graphe de f.

[07.0020]

Exercice 21

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ?
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tous les réels pour lesquels cela ne posent pas de problème.
3. Calculer les limites de $f'(x)$ en $-1^+, 1^-$, ainsi qu'en 0^-et 0^+. Préciser la nature des demi-tangentes en ces points.
4. Déterminer les variations de f.
5. Tracer le graphe de f.

[07.0021]

Exercice 22

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(1 - 2\cos^4(x)\right)$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I.
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.

4. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ? Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π.

5. Dresser le tableau de variation de f

6. Tracer son graphe sur trois périodes

[07.0022]