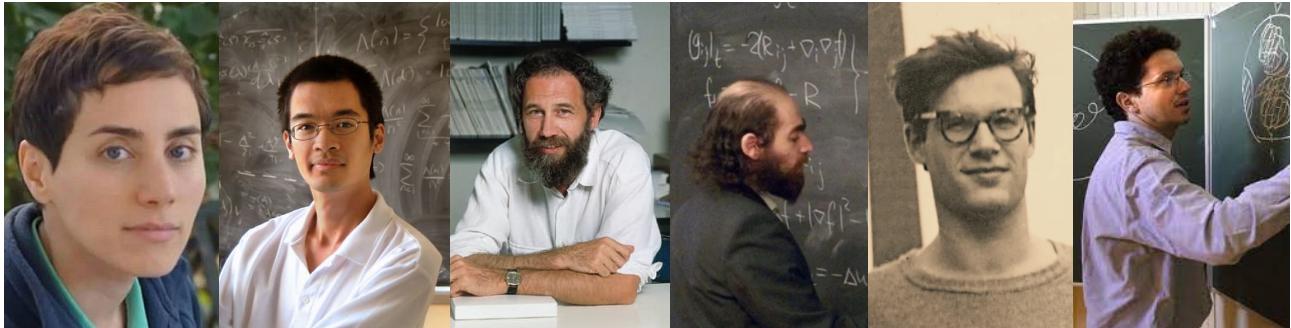


Déterminant

Antoine Géré

Année 2025 - 2026¹



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Table des matières

1 Déterminant en dimension 2 et 3	2
1.1 Matrice 2×2	2
1.2 Matrice 3×3	2
1.2.1 Règle de Sarrus	2
1.2.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne	3
1.3 Interprétation géométrique	5
2 Définition et propriétés du déterminant	6
2.1 Premières caractérisations	6
2.2 Déterminant de matrices particulières	7
2.3 Opérations et déterminant	7
3 Calculs de déterminants	11
3.1 Cofacteur	11
3.2 Développement suivant une ligne ou une colonne	12
4 Inverse d'une matrice	13
5 Méthode de Cramer	14
6 Exercices	16

Le déterminant est un nombre que l'on associe à n vecteurs (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n . Il correspond au volume du parallélépipède engendré par ces n vecteurs. On peut aussi définir le déterminant d'une matrice A . Le déterminant permet de savoir si une matrice est inversible ou pas, et de façon plus générale, joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires.

Dans tout ce qui suit, nous considérons des matrices à coefficients dans \mathbb{K} , où les principaux exemples étant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

¹version du 3 octobre 2025

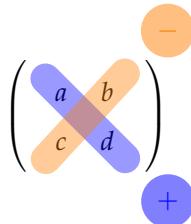
1 Déterminant en dimension 2 et 3

1.1 Matrice 2×2

En dimension 2, le déterminant est très simple à calculer

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = ad - bc.$$

Cette relation est fondamentale. Le déterminant d'une matrice 2×2 est donc le produit des éléments sur la diagonale principale (en bleu) moins le produit des éléments sur l'autre diagonale (en orange).



Exemple 1.

Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times 8 = -10.$$

1.2 Matrice 3×3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1.2.1 Règle de Sarrus

La formule pour le déterminant de A est la suivante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Il existe un moyen facile de retenir cette formule, c'est **la règle de Sarrus**. Elle s'utilise de cette façon :

1. On recopie les deux premières colonnes à droite de la matrice (colonnes grisées) ;
2. on additionne les produits des trois termes des diagonales descendante (à gauche) ;
3. on additionne les produits des trois termes des diagonales ascendante (à droite).
4. on soustrait le terme obtenu avec les diagonales ascendante au terme trouvé avec les diagonales descendante.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right)$$



Attention, cette méthode s'applique uniquement pour les matrices de taille 3. Elle ne peut pas être utilisée pour les matrices de taille supérieure à 3.

Exemple 2.

Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la règle de Sarrus on a

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\det(A) = 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2 - 3 \times (-1) \times 0 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 = -6.$$

1.2.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Nous verrons cette méthode en détails par la suite pour des matrices de taille n . Ici nous ne présentons que la méthode. Une justification de cette démarche sera donné plus loin.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

L'idée est de sélectionner une colonne ou une ligne de la matrice A , et ensuite de s'appuyer sur ce choix pour effectuer le calcul de déterminant de A . Nous verrons plus loin que notre choix d'une ligne ou d'une colonne n'a pas d'incidence sur le résultat final.

Pour présenter la méthode choisissons la deuxième colonne de la matrice A . On peut alors écrire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_1 \textcolor{red}{2} C_1 \textcolor{red}{2} + a_2 \textcolor{red}{2} C_2 \textcolor{red}{2} + a_3 \textcolor{red}{2} C_3 \textcolor{red}{2}$$

où

$$C_1 \textcolor{red}{2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} (a_{21} \times a_{33} - a_{23} \times a_{31})$$

$$C_2 \textcolor{red}{2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} (a_{11} \times a_{33} - a_{13} \times a_{31})$$

$$C_3 \textcolor{red}{2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} (a_{11} \times a_{23} - a_{13} \times a_{21})$$



Cette méthode fonctionne quelque soit la taille de la matrice. On priviliera cette méthode qui s'avérera très efficace lorsque la matrice comporte des zéros comme coefficients.

Exemple 3.

Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la règle de Sarrus nous avons trouvé $\det(A) = -6$. Nous allons essayer de retrouver ce résultat par la méthode juste présentée.

Nous choisissons la première ligne car elle comporte un zéro, choisir la troisième colonne était également un choix judicieux.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times C_1 \textcolor{red}{1} + 1 \times C_1 \textcolor{red}{2} + 0 \times C_1 \textcolor{red}{3} = 2 \times C_1 \textcolor{red}{1} + C_1 \textcolor{red}{2}$$

où

$$C_1 \textcolor{red}{1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} ((-1) \times 1 - 3 \times 2) = -7$$

$$C_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} (1 \times 1 - 3 \times 3) = 8$$

donc

$$\det(A) = 2 \times (-7) + 8 = -14 + 8 = -6.$$

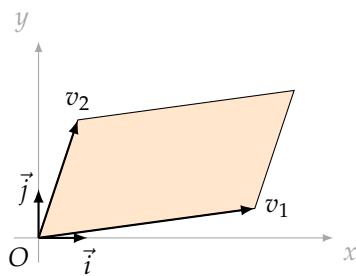
1.3 Interprétation géométrique

En dimension 2 les déterminants correspondent à des aires et en dimension 3 à des volumes.

Nous considérons deux vecteurs du plan \mathbb{R}^2

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs v_1, v_2 déterminent un parallélogramme.



Proposition 1.

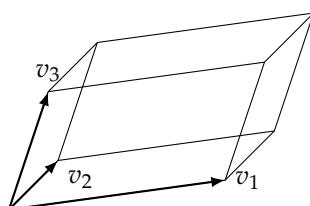
L'aire du parallélogramme est donnée par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathcal{A} = |\det(v_1, v_2)| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|.$$

De manière similaire, trois vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

définissent un parallélépipède.



À partir de ces trois vecteurs on définit, en juxtaposant les colonnes, une matrice et un déterminant :

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.

Le volume du parallélépipède est donné par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathcal{V} = |\det(v_1, v_2, v_3)|.$$

2 Définition et propriétés du déterminant

2.1 Premières caractérisations

Nous allons caractériser le déterminant comme une application, qui à une matrice carrée associe un scalaire

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Théorème 1 (Existence et d'unicité du déterminant).

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée déterminant, telle que

- (i) le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés ;
- (ii) si une matrice A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul ;
- (iii) le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Exemple 4.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Car la seconde colonne est un multiple de 5.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Par linéarité sur la troisième colonne.

Remarque.

1. Une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} qui satisfait la propriété (i) est appelée forme multilinéaire.
2. Si elle satisfait (ii), on dit qu'elle est alternée.

Le déterminant est donc la seule forme multilinéaire alternée qui prend comme valeur 1 sur la matrice I_n . Les autres formes multilinéaires alternées sont les multiples scalaires du déterminant. On verra plus loin comment on peut calculer en pratique les déterminants.

Donnons maintenant quelques propriétés importantes du déterminant : comment se comporte le déterminant face aux opérations élémentaires sur les colonnes ?

Proposition 3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant les colonnes C_1, C_2, \dots, C_n . On note A' la matrice obtenue par une des opérations élémentaires sur les colonnes, qui sont

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$.

A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors

$$\det(A') = \lambda \det(A).$$

2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$).

A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A . Alors

$$\det(A') = \det(A).$$

3. $C_i \leftrightarrow C_j$.

A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A . Alors

$$\det(A') = -\det(A).$$

Plus généralement pour (2), l'opération

$$C_i \leftarrow C_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j C_j$$

d'ajouter une combinaison linéaire des autres colonnes conserve le déterminant.

Échanger deux colonnes change le signe du déterminant.

Proposition 4.

Si une colonne C_i de la matrice A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det(A) = 0$.

2.2 Déterminant de matrices particulières

Nous connaissons déjà le déterminant de deux matrices :

- le déterminant de la matrice nulle 0_n vaut 0 ;
- le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1 .

Calculer des déterminants n'est pas toujours facile. Cependant il est facile de calculer le déterminant de matrices triangulaires.

Proposition 5.

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.

Autrement dit, pour une matrice triangulaire A on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Comme cas particulièrement important on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.

2.3 Opérations et déterminant

Nous allons voir trois propriétés importantes du déterminant : le déterminant d'un produit de matrices, le déterminant de l'inverse d'une matrice et le déterminant de la transposée d'une matrice. Pour prouver ces propriétés, nous aurons besoin des matrices élémentaires.

Pour chacune des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A , on associe une matrice élémentaire E , telle que la matrice obtenue par l'opération élémentaire sur A soit $A' = A \times E$.

$C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$

$E_{C_i \leftarrow \lambda C_i}$ est la matrice diagonale ne comportant que des 1, sauf en position (i,i) .

$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$)

$E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}$ est comme la matrice identité, sauf en position (j,i) où son coefficient vaut λ

$$E_{C_i \leftarrow \lambda C_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

colonne i

ligne i

$$E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

colonne i

colonne j

$C_i \leftrightarrow C_j$

$E_{C_i \leftrightarrow C_j}$ est comme la matrice identité, sauf que ses coefficients (i,i) et (j,j) s'annulent, tandis que les coefficients (i,j) et (j,i) valent 1

$$E_{C_i \leftrightarrow C_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

colonne i

colonne j

Nous allons détailler le cas de chaque opération et son effet sur le déterminant.

- Proposition 7.**
1. $\det(E_{C_i \leftarrow \lambda C_i}) = \lambda$
 2. $\det(E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}) = +1$

3. $\det(E_{C_i \leftrightarrow C_j}) = -1$

4. Si E est une des matrices élémentaires ci-dessus, $\det(A \times E) = \det A \times \det E$

Cette proposition nous permet de calculer le déterminant d'une matrice A de façon relativement simple, en utilisant l'algorithme de Gauss. En effet, si en multipliant successivement A par des matrices élémentaires E_1, \dots, E_r on obtient une matrice T échelonnée, donc triangulaire

$$T = A \cdot E_1 \cdots E_r$$

alors, en appliquant r -fois la proposition précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\det(T) &= \det(A \cdot E_1 \cdots E_r) \\ &= \det(A \cdot E_1 \cdots E_{r-1}) \cdot \det(E_r) \\ &= \cdots \\ &= \det A \cdot \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdots \det(E_r)\end{aligned}$$

Comme on sait calculer le déterminant de la matrice triangulaire T et les déterminants des matrices élémentaires E_i , on en déduit le déterminant de A .

En pratique cela se passe comme sur l'exemple suivant.

Exemple 5.

Calculons le déterminant de la matrice A où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{opération } C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ pour avoir un pivot en haut à gauche} \\ &= (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow \frac{1}{3}C_1, \text{ linéarité par rapport à la première colonne} \\ &= (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\ &= (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - 10C_2 \\ &= (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times 3 \times 1 \times 1 \times (-55) \\ \det(A) &= 165.\end{aligned}$$

Théorème 2. Déterminant du produit de 2 matrices :

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Déterminant de l'inverse d'une matrice :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Déterminant de la transposée d'une matrice :

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Une première conséquence de ce théorème, et en particulier du second point, est que l'on peut établir un critère pour savoir si une matrice est inversible. Il suffit de calculer son déterminant !

Proposition 8.

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

L'exemple qui suit permet d'introduire une notion utile pour le chapitre suivant.

Exemple 6.

Deux matrices semblables ont même déterminant. En effet deux matrices semblables A et B vérifient une relation du type

$$B = P^{-1}AP$$

où P est une matrice inversible. Par multiplicativité du déterminant, on en déduit que

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \det(A) \det(P) = \det(A).$$

Une deuxième conséquence du théorème précédent, du au troisième point, est que par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes. Ainsi, le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes, si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul, on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, etc.

On a donc

Proposition 9.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant les colonnes C_1, C_2, \dots, C_n . On note A' la matrice obtenue par une des opérations élémentaires sur les colonnes, qui sont

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$

A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors

$$\det(A') = \lambda \det(A).$$

2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$)

A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A . Alors

$$\det(A') = \det(A).$$

3. $L_i \leftrightarrow L_j$

A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A . Alors

$$\det(A') = -\det(A).$$

On a de même :

Proposition 10.

Si une ligne L_i de la matrice A est combinaison linéaire des lignes colonnes, alors $\det(A) = 0$.

Illustrons notre propos avec un exemple.

Exemple 7.

Calculons le déterminant de la matrice A où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 6 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 6 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{opération } L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ pour avoir un pivot en haut à gauche} \\ &= (-1) \times \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_1, \\ &= (-1) \times \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & \frac{5}{3} \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ &= (-1) \times \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{130}{3} \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times 6 \times 1 \times \left(-\frac{130}{3} \right) \\ \det(A) &= 260. \end{aligned}$$

3 Calculs de déterminants

Une des techniques les plus utiles pour calculer un déterminant est, comme nous l'avons déjà dit, le développement par rapport à une ligne (ou une colonne).

3.1 Cofacteur

Définition 1.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A .
- Le nombre $\det(A_{ij})$ est un mineur d'ordre $n - 1$ de la matrice A .
- Le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est le cofacteur de A relatif au coefficient a_{ij} .

Une matrice A peut s'écrire comme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \boxed{a_{1,j}} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \boxed{a_{i,1}} & \cdots & \boxed{a_{i,j-1}} & \boxed{a_{i,j}} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ddots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sa matrice extraite A_{ij} peut s'écrire comme

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 8.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$.

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{32} = (-1) \times (-11) = 11.$$

Pour déterminer si $C_{ij} = + \det A_{ij}$ ou $C_{ij} = - \det A_{ij}$, on peut se remarquer que l'on associe des signes en suivant le schéma suivant

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Donc $C_{11} = + \det A_{11}$, $C_{12} = - \det A_{12}$, $C_{21} = - \det A_{21}$...

3.2 Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème 3 (Développement suivant une ligne ou une colonne).

Formule de développement par rapport à la ligne i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

Exemple 9.

Retrouvons la formule des déterminants 3×3 , déjà présentée par la règle de Sarrus, en développement par rapport à la première ligne.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\
 &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
 &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.
 \end{aligned}$$

Exemple 10.

Considérons la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On choisit de développer par rapport à la seconde colonne (car c'est là qu'il y a le plus de zéros) :

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= 0C_{12} + 2C_{22} + 3C_{32} + 0C_{42} \\
 &\quad (\text{développement par rapport à la deuxième colonne}) \\
 &= +2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &\quad \text{on n'oublie pas les signes des cofacteurs et on recommence} \\
 &\quad \text{en développant chacun de ces deux déterminants } 3 \times 3 \\
 &= +2 \left(+4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\
 &\quad (\text{par rapport à la première colonne}) \\
 &\quad - 3 \left(-4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
 &\quad (\text{par rapport à la deuxième ligne}) \\
 &= +2(+4 \times 5 - 0 + 1 \times (-4)) - 3(-4 \times 7 + 1 \times 11 - 0) \\
 \det(A) &= 83
 \end{aligned}$$

Remarque.

Le développement par rapport à une ligne permet de ramener le calcul d'un déterminant $n \times n$ à celui de n déterminants $(n-1) \times (n-1)$. Par récurrence descendante, on se ramène ainsi au calcul de $n!$ sous-déterminants, ce qui devient vite fastidieux. C'est pourquoi le développement par rapport à une ligne ou une colonne n'est utile pour calculer explicitement un déterminant que si la matrice de départ a beaucoup de zéros. On commence donc souvent par faire apparaître un maximum de zéros par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes qui ne modifient pas le déterminant, avant de développer le déterminant suivant la ligne ou la colonne qui a le plus de zéros.

4 Inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Nous lui associons la matrice C des cofacteurs, appelée comatrice,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 4.

Soient A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

Exemple 11.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne que $\det A = 2$. La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+/-$). On trouve :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Méthode de Cramer

Le théorème suivant, appelé **règle de Cramer**, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \color{red}{b_1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & \color{red}{b_2} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \color{red}{b_n} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j -ème colonne de A par le second membre B . La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det A \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j .

Théorème 5 (Règle de Cramer).

Soit

$$AX = B$$

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det(A) \neq 0$. Alors l'unique solution (x_1, x_2, \dots, x_n) du système est donnée par

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \quad \dots \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Exemple 12.

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = 44 \quad \det A_1 = -40 \quad \det A_2 = 72 \quad \det A_3 = 152.$$

La solution est alors

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

La méthode de Cramer n'est pas la méthode la plus efficace pour résoudre un système, mais elle est utile si le système contient des paramètres.

6 Exercices



Vous pouvez continuer à vous exercer sur votre espace [jai20enmaths](#), où vous y retrouverez des notions de cours ainsi que des exercices corrigés. Si vous remarquez une erreur ou avez une suggestion pour que cet espace de travail soit plus agréable à utiliser, ne surtout pas hésiter à me le signaler par mail à a.gere@istom.fr.



Exercice 1

Calculer les déterminants suivants.

$$1. A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$2. B = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$3. C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4. D = \begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix}$$

[02.0000]

Exercice 2

Calculer les déterminants suivants.

$$1. A = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

$$2. B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 11 & 35 \end{vmatrix}$$

$$3. C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$4. D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

[02.0001]

Exercice 3

Calculer les déterminants suivants, en fonction des paramètres réels a , b , et c . Nous donnerons les expressions factorisées.

$$1. D_1 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$$

$$4. D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$2. D_2 = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$5. D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix}$$

$$3. D_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$6. D_6 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$7. D_7 = \begin{vmatrix} 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$8. D_8 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{vmatrix}$$

[02.0002]

Exercice 4

Calculer l'inverse des matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[02.0003]

Exercice 5

Résoudre le système suivant par la formule de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$

[02.0004]

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

[02.0005]

Exercice 7

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

[02.0006]

Exercice 8

Etudier le système de trois équations à trois inconnues suivant en fonction des valeurs du paramètre m .

$$\begin{cases} x - y + mz = 1 \\ mx + y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = m \end{cases}$$

Exercice 9

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs
 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de \mathbb{R}^3 à coefficients entiers est un nombre entier.

Exercice 10

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$



istom

Ecole
supérieure
d'agro-
développement
international



Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur [Google Play](#) et l'[App Store](#).



Etudiez en musique !





Ecole
supérieure
d'agro-
développement
international



Étudiant(e) (Nom, Prénom) :

Promotion, groupe :

Email :

Auteurs de ces notes de cours

Cours et exercices rédigés par [Antoine Géré](#).

Relu par (**coming soon**).