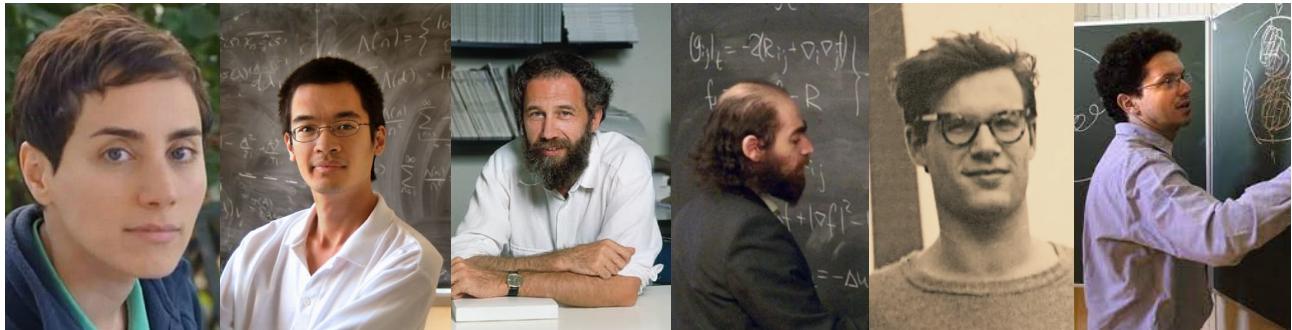


Intégrations

Antoine Géré

Année 2024 - 2025¹



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

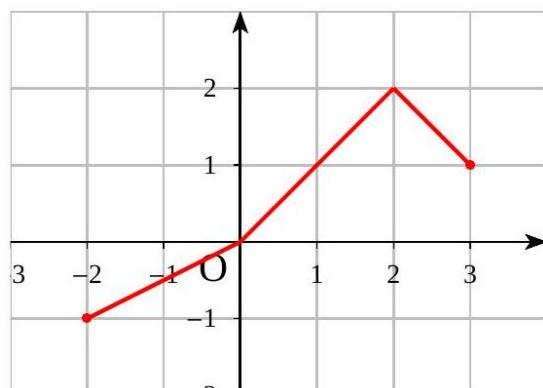
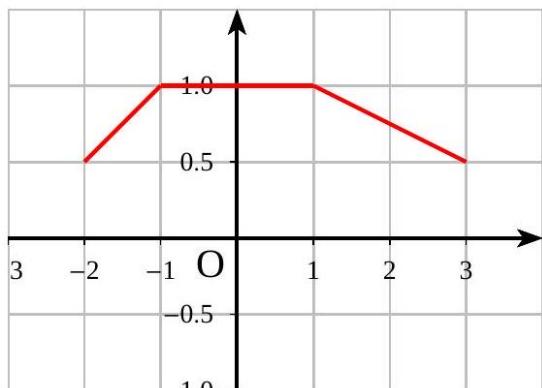
Table des matières

1 Exercices	1
--------------------	----------

1 Exercices

Exercice 1 Notion d'intégrale

- Pour chaque fonction affine par morceaux f , représentée ci-dessous, calculer, en utilisant les aires, l'intégrale $I(f)$ sur l'intervalle de définition de f .

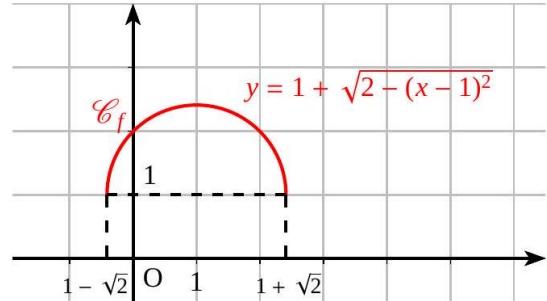
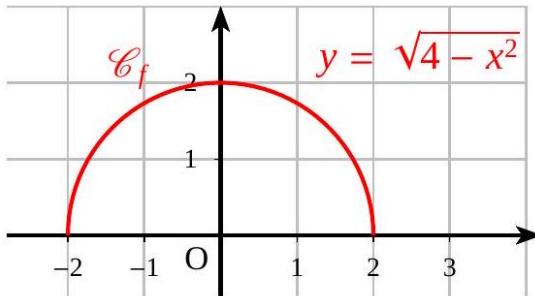


- Dans chaque cas, la fonction f est représentée par sa courbe \mathcal{C}_f , dont une équation est indiquée.

- Prouver que \mathcal{C}_f est un demi-cercle. Préciser son centre et son rayon.

¹version du 11 mai 2025

(b) En déduire l'intégrale de f sur son intervalle de définition.



3. Les fonctions affines par morceaux f et g sont définies sur l'intervalle $[-1; 5]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x-5 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & \text{si } 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

- (a) Calculer les intégrales sur $[-1; 5]$ de f et g .
 (b) En déduire les intégrales sur $[-1; 5]$ des fonctions $f + 4g$ et $5f - 2g$

[10.0000]

Exercice 2 Primitive

1. Prouver dans les cas suivants que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I .

- (a) $f(x) = \tan^2 x; F(x) = \tan x - x; I =] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$.
 (b) $f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}; F(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2; I =] 0; +\infty [$
 (c) $f(x) = \cos x - x \sin x; F(x) = x \cos x; I = \mathbb{R}$
 (d) $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}; F(x) = x - \ln(1 + e^x); I = \mathbb{R}$
 (e) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}; F(x) = \ln(\ln x); I =] 1; +\infty [$

2. Montrer que les fonctions F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I .

$$F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}; \quad G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}; \quad I =] 1; +\infty [$$

[10.0002]

Exercice 3 Calcul de primitive

Pour cet exercice donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

- Linéarité de la primitive

- $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3, \quad I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3}, \quad I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}, \quad I =]0; +\infty[$
4. $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 1, \quad I =$
5. $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1, \quad I = [0; \frac{\pi}{2}[$

- Forme $u'u^n$

1. $f(x) = (x+2)^3, \quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{(x-1)^5}{3}, \quad I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 2(3x-1)^5, \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 2x(1+x^2)^5, \quad I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \sin x \cos x, \quad I = \mathbb{R}$

- Forme $\frac{u'}{u}$

1. $f(x) = \frac{1}{x-4}, \quad I =]4; +\infty[$
2. $f(x) = \frac{1}{x-4}, \quad I =]-\infty; 4[$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}, \quad I =]0; 1[$

- Forme $\frac{u'}{u^n}$, avec $n \geq 2$

1. $f(x) = \frac{2}{(x+4)^3}, \quad I =]-4; +\infty[$
2. $f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}, \quad I =]-\infty; \frac{1}{3}[$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}, \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}, \quad I =]-1; 3[$
5. $f(x) = \frac{4x^2}{(x^3+8)^3}, \quad I =]-2; +\infty[$

- Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

1. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}, \quad I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$
2. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad I =]1; +\infty[$

- Forme $u'e^u$

1. $f(x) = e^{-x+1}, \quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 2e^{3x-2}, \quad I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}, \quad I = \mathbb{R}$

- Forme $u(ax + b)$

1. $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \quad I = \mathbf{R}$
2. $f(x) = 3 \cos x - 2 \sin(2x) + 1, \quad I = \mathbf{R}$
3. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right), \quad I = \mathbf{R}$

[10.0003]

Exercice 4 Primitive et condition initiale

Pour les exercices suivants, trouver la primitive F , de la fonction f , qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1, F(2) = 0$
2. $f(x) = \frac{2}{x^2} + x, F(1) = 0$
3. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}, F(0) = 0$
4. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
5. $f(x) = \cos x \sin^2 x, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
6. $f(x) = 2 \cos \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2}, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
7. $f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}, \quad F(-1) = 0$
8. $f(x) = -\frac{1}{3-x}, F(1) = 1$
9. $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}, F(0) = 0$
10. $f(x) = e^{3x+1}, \quad F(-1) = 0$
11. $f(x) = xe^{-x^2}, F(\sqrt{\ln 2}) = 1$
12. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}, F(2) = 0$

[10.0004]

Exercice 5 Calcul d'intégrales

Pour les exercices suivantes, calculer les intégrales indiquées à l'aide d'une primitive.

1. $I = \int_0^4 (x - 3) dx$
2. $I = \int_2^{-1} (t^2 - 4t + 3) dt$
3. $I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right) dt$
4. $I = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx$

5. $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \, dx$

6. $I = \int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$

7. $I = \int_0^4 \frac{2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} \, dx$

8. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} \, dx$

9. $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - 4} \, dx$

10. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x^2 - 4} \, dx$

11. $I = \int_0^1 5e^{3x} \, dx$

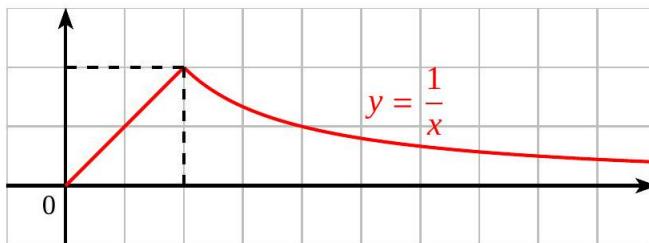
12. $I = \int_0^1 te^{t^2-1} \, dt$

[10.0005]

Exercice 6 Calcul d'aire

La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous. Utiliser la relation de Chasles pour calculer les intégrales :

$$I = \int_0^3 f(t) \, dt \quad \text{et} \quad J = \int_2^1 f(t) \, dt$$



[10.0006]

Exercice 7 Encadrement et valeur moyenne

1. Comparer, sans les calculer les réels I et J .

(a) $I = \int_1^2 xe^x \, dx$

(b) $J = \int_1^2 x^2 e^x \, dx$

2. Démontrer les encadrements suivants :

(a) $\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}} \, dt \leq 9$

(b) $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} \, dx \leq 3$

- (c) $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \leq 1$
- (d) $2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \leq 2$
- (e) $2\ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2\ln 3 + 2\ln 5$

3. La suite (I_n) est définie sur \mathbb{N} par :

$$I_n = \int_0^1 (1+t^n) dt$$

- (a) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
 (b) Est-elle convergente ?

4. Calculer la valeur moyenne μ sur l'intervalle $[-1; 1]$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

5. Dans chacun des cas suivants, μ désigne la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle I .
 Calculer l'intégrale indiquée :

- (a) $\mu = 2; I = [1; 4]; \int_1^4 f(x) dx$
- (b) $\mu = \ln 2; I = [1; 3]; \int_3^1 f(x) dx$
- (c) $\mu = \frac{2}{\pi}; I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]; f \text{ paire} ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

6. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

- (a) Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$
 (b) La suite (I_n) est-elle convergente ?

7. f est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par :

$$u_n = \int_0^n f(t) dt$$

- (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 (b) Prouver que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

[10.0001]

Exercice 8 Calcul d'intégrale par une décomposition

1. (a) Trouver les réels a et b tels que, pour tout réels x de $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$, on a :

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$

- (b) En déduire :

$$I = \int_4^5 \frac{1}{x^2 - 9} dx$$

2. (a) Trouver trois réel a, b et c tels que pour tout réel de $\mathbb{R} - \{-3\}$, on a :

$$\frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3} = ax + b + \frac{c}{x + 3}$$

(b) En déduire :

$$I = \int_2^0 \frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3} dx$$

3. (a) Prouver que pour tout réel x :

$$\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

(b) En déduire :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx$$

[10.0007]

Exercice 9 Calcul de primitives

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiquée.

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1} \quad I = \left] -\infty; 1 \right[$

2. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad I = \left] -\pi; 0 \right[$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} \quad I = \left] 0; +\infty \right[$

4. $f(x) = \sin x \cos x \quad I = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \quad I = \left] 0; +\infty \right[$

6. $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} \quad I = \left] 0; +\infty \right[$

7. $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad I = \left] 0; +\text{infty} \right[$

8. $f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad I = \left] 1; +\infty \right[$

9. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad I = \mathbb{R}$

[10.0008]

Exercice 10 Primitive d'une fonction rationnelle par décomposition

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I . Déterminer une primitive de f à l'aide de la décomposition proposée

1. $f(x) = \frac{4x + 5}{2x + 1} \quad I = \left] 1; +\infty \right[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{2x + 1}$

2. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x - 2} \quad I = \left] 2; +\infty \right[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$

3. $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}$

- (a) $I =]3; +\infty[$
- (b) $I =]-3; 3[$
- (c) $I =]-\infty; -3[$

4. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2} \quad I = \left[1; +\infty \right[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}$

[10.0009]

Exercice 11 Intégration par partie

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1. $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

2. $I = \int_1^{e^2} \ln t \, dt$

3. $I = \int_0^\pi (x-1) \cos x \, dx$

4. $I = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

5. $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t} \, dt$

6. $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$

[10.0010]

Exercice 12 Primitive par intégration par partie

Trouver la primitive F , nulle en a , des fonctions f suivantes déterminées sur I

1. $f(t) = \ln(t^2) \quad I =]0; +\infty[\quad a = 1$

2. $f(t) = (2t+1) \sin t \quad I = \mathbb{R} \quad a = 0$

3. $f(t) = (t+1)^2 e^{2t} \quad I = \mathbb{R} \quad a = -1 \quad (\text{on fera deux intégrations par partie}).$

4. $f(t) = (\ln t)^2 \quad I =]0; +\infty[\quad a = 1 \quad (\text{on fera deux intégrations par partie}).$

5. $f(t) = e^{-2t} \cos t \quad I = \mathbb{R} \quad a = 0 \quad (\text{on fera deux intégrations par partie}).$

[10.0011]

Exercice 13 BAC Asie Juin 2005

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2 .
On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x \, dx$$

1. Calculer I_1 .

2. Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

(a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n) .

7. Justifier enfin que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} \right)$$

[10.0012]

Exercice 14 Suite

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

1. (a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

(b) Étudier les variations de la suite (x_n) .

(c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite, (x_n) ?

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_n \leq \frac{1}{n+1}$$

(b) En déduire la limite de la suite (x_n) .

3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

(b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$$

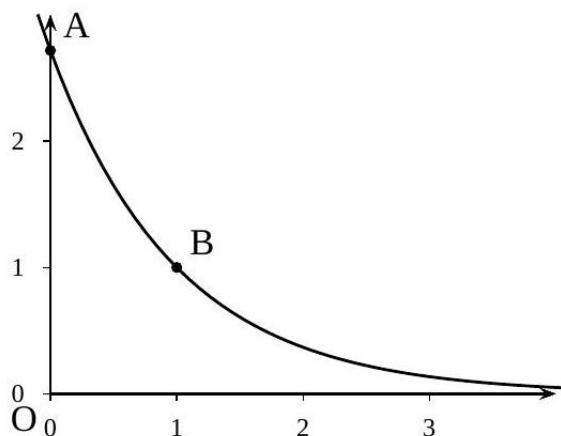
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n$

[10.0013]

Exercice 15 BAC Amérique du Sud novembre 2004

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative de la fonction f dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad f(0) = e$$



1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1; e]$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x .

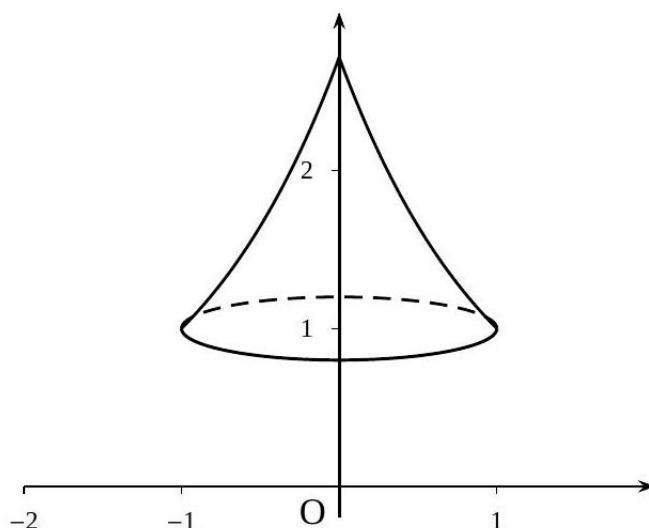
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.

On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe AB comme représenté ci-dessous. On note V son volume.

On admet que

$$V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$$

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



[10.0014]



istom

Ecole
supérieure
d'agro-
développement
international



Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur [Google Play](#) et l'[App Store](#).



Etudiez en musique !





Ecole
supérieure
d'agro-
développement
international



Étudiant(e) (Nom, Prénom) :

Promotion, groupe :

Email :

Auteurs de ces notes de cours

D'après un cours de [Arnaud Bodin](#).

Revu et augmenté par [Antoine Géré](#).

Relu par (**coming soon**).