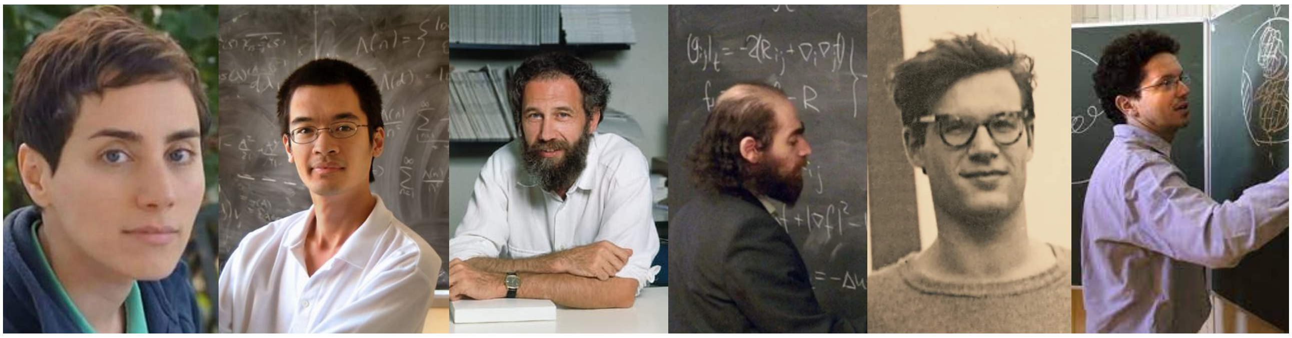
Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Fonctions usuelles

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : `a.gere@istom.fr`.

Résumé

Vous connaissez déjà des fonctions classiques : exponentielle, logarithme, cosinus, sinus et tangente. Nous allons ici ajouter de nouvelles fonctions à notre catalogue : cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique, et les fonctions inverses de l'ensemble de ses fonctions circulaires et hyperboliques

Table des matières

1 Logarithme et exponentielle **2**
- 1.1 Logarithme . . . 2
- 1.2 Exponentielle . . . 3
- 1.3 Fonctions puissances . . . 4

2 Fonctions circulaires et circulaires inverses **4**
- 2.1 Cosinus et Arccosinus . . . 4
- 2.2 Sinus et Arcsinus . . . 5
- 2.3 Tangente et Arctangente . . . 6
- 2.4 Trigonométrie circulaire . . . 7
  - 2.4.1 Le cercle trigonométrique . . . 7
  - 2.4.2 Les fonctions sinus, cosinus, tangente . . . 7
  - 2.4.3 Formulaire . . . 9

3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses **10**
- 3.1 Cosinus hyperbolique et son inverse . . . 10
- 3.2 Sinus hyperbolique et son inverse . . . 12
- 3.3 Tangente hyperbolique et son inverse . . . 13
- 3.4 Trigonométrie hyperbolique . . . 15

[1] version du 28 janvier 2025

1 Logarithme et exponentielle

1.1 Logarithme

Proposition 1.
Il existe une unique fonction, notée

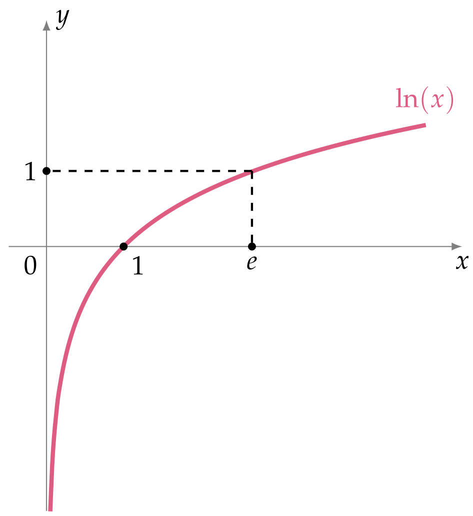
$$\ln \ : \ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{pour tout } x > 0 \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie, pour tout $a, b > 0$:

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$,
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$,
3. $\ln(a^n) = n \ \ln(a)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$
4. $\ln$ *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
6. *la fonction* $\ln$ *est concave et* $\ln(x) \leq x - 1$ *pour tout* $x > 0$.



Remarque.

- La fonction $\ln x$ s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme néperien. Il est caractérisé par $\ln(e) = 1$. On définit le logarithme en base a par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

De sorte que $\log_a(a) = 1$. Pour $a = 10$ on obtient le logarithme décimal $\log_{10}$ qui vérifie

$$\log_{10}(10) = 1 \quad \text{et donc} \quad \log_{10}(10^n) = n.$$

Dans la pratique on utilise l'équivalence

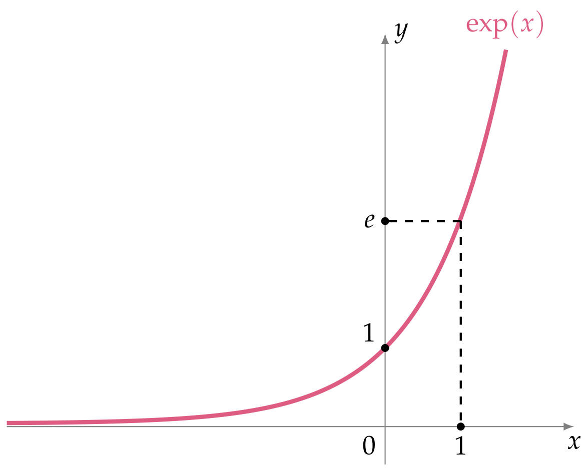
$$x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)$$

- Nous avons les deux limites usuelles suivantes

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x \ \ln(x) = 0$$

1.2 Exponentielle

Définition 1.
La bijection réciproque de $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp : \ \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.



Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition 2.
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- $\exp(\ln(x)) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp(x)) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
- $\exp : \ \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant*

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

- *La fonction exponentielle est dérivable et*

$$\exp'(x) = \exp(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$*. Elle est convexe et* $\exp(x) \geq 1 + x$*.*

- *Nous avons les deux limites usuelles suivantes*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to -\infty} x \ \exp(x) = 0$$

Remarque.
La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ la relation $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(1) = e$, où $e \simeq 2,718\ldots$ est le nombre qui vérifie $\ln e = 1$.

1.3 Fonctions puissances

Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a
$$a^b = \exp\left(b\ \ln(a)\right).$$

Remarque.

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\ \ln(a)\right)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ \ln(a)\right)$, la racine n-ème de a
- On note aussi $\exp(x)$ par e^x ce qui se justifie par le calcul : $e^x = \exp\left(x \ln(e)\right) = \exp(x)$.
- Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité
$$a^x = \exp\left(x \ln(a)\right).$$
Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances
$$x \mapsto x^a.$$

Proposition 3.
Soit $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $\ln(x^a) = a \ln(x)$

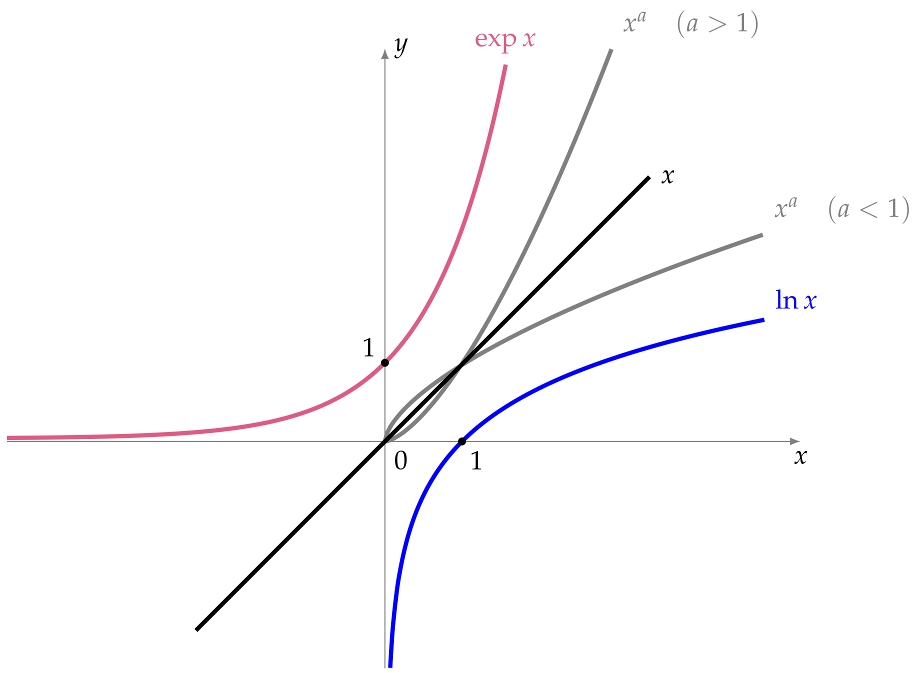
Comparons les fonctions $\ln(x)$, $\exp(x)$ avec x :

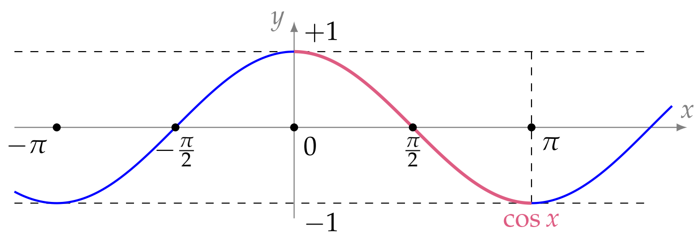
Proposition 4.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty.$$

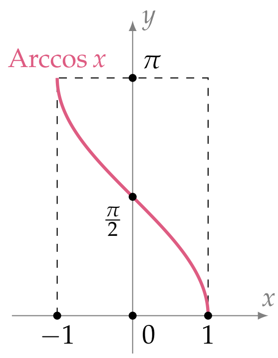
2 Fonctions circulaires et circulaires inverses

2.1 Cosinus et Arccosinus

Considérons la fonction cosinus
$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{cases}$$
Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction
$$\cos :\ [0,\pi] \to [-1,1]$$
est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus** :
$$\text{Arccos} :\ [-1,1] \to [0,\pi]$$







On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \cos\big(\mathrm{Arccos}(x)\big) = x$$

et

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad \mathrm{Arccos}\big(\cos(x)\big) = x$$

Autrement dit, si $x \in [0,\pi]$ on a alors

$$\cos(x) = y \iff x = \mathrm{Arccos}\, y$$

Terminons avec la dérivée de Arccos :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.2 Sinus et Arcsinus

Considérons la fonction sinus

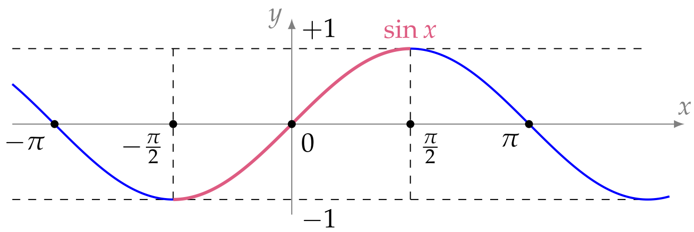
$$\sin : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

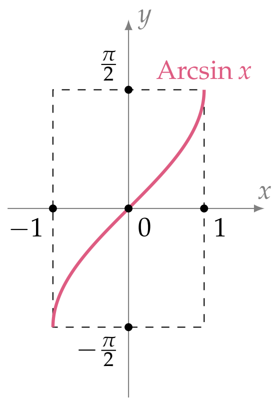
Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
Sur cet intervalle la fonction sinus est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** :

$$\text{Arcsin}: \ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \sin\left(\text{Arcsin}(x)\right) = x$$

et

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}], \qquad \text{Arcsin}\left(\sin(x)\right) = x$$

Autrement dit, si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a alors

$$\sin(x) = y \iff x = \text{Arcsin}(y)$$

Terminons avec la dérivée de Arcsin :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.3 Tangente et Arctangente

Considérons la fonction tangente

$$\tan: \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle la fonction tangente est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\tan: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arctangente** :

$$\text{Arctan}: \ \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan\left(\text{Arctan}(x)\right) = x$$

et

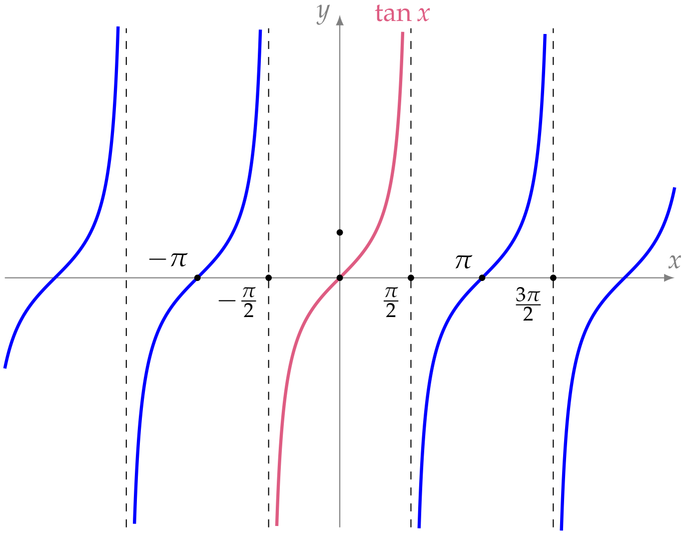
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[, \quad \text{Arctan}\left(\tan(x)\right) = x$$

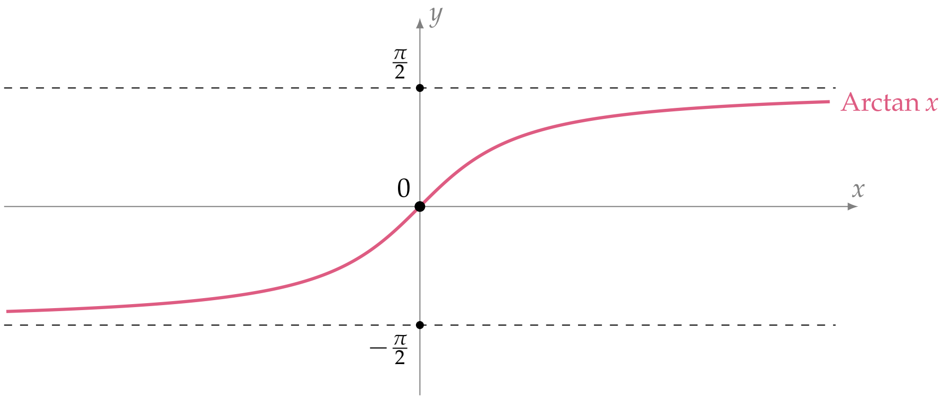
Autrement dit, si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a alors

$$\tan(x) = y \iff x = \text{Arctan}(y)$$

Terminons avec la dérivée de Arctan :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$





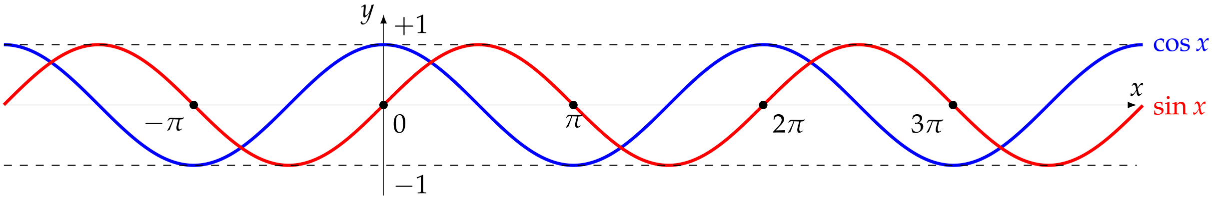
2.4 Trigonométrie circulaire

2.4.1 Le cercle trigonométrique

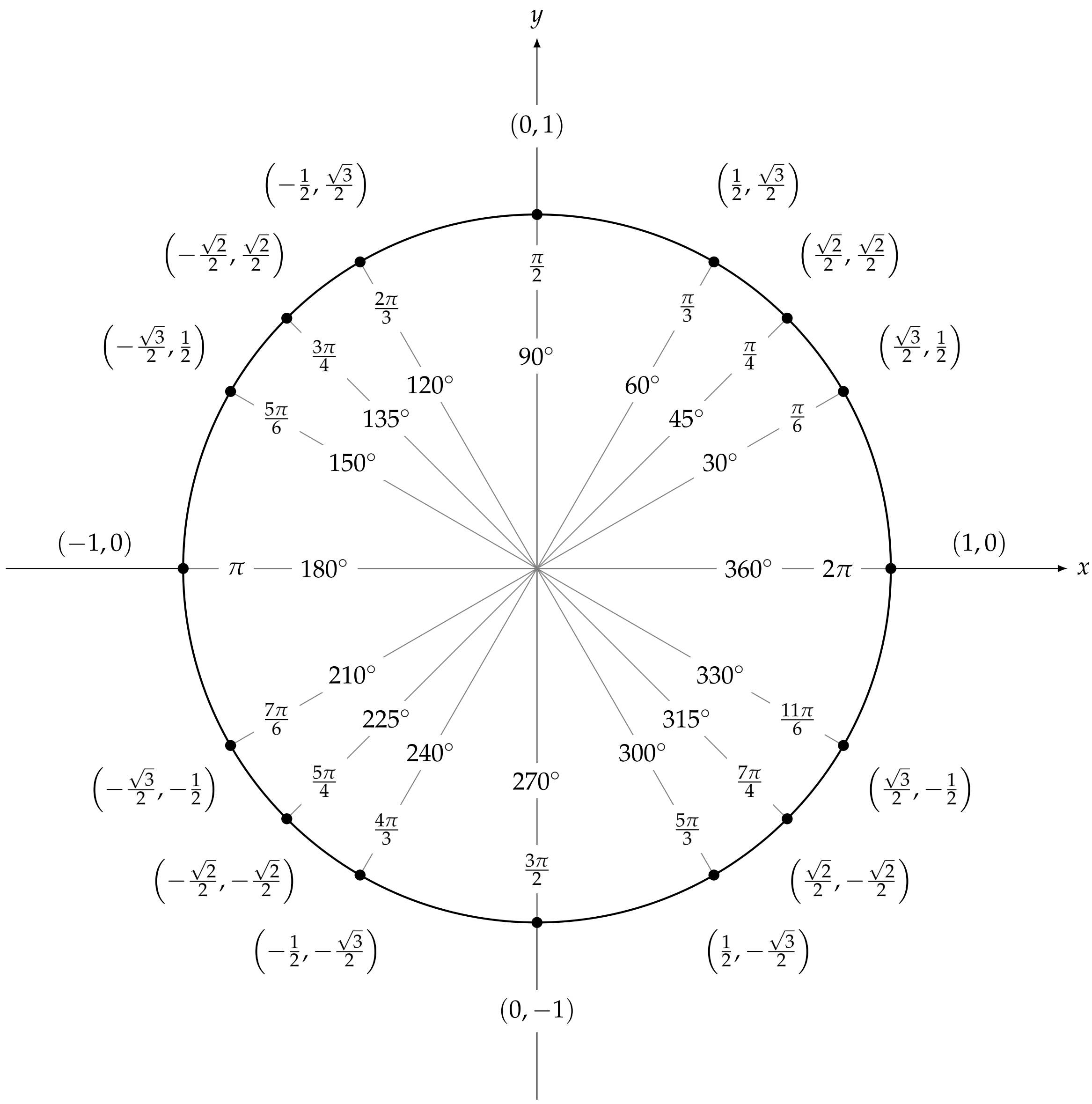
Voici le cercle trigonométrique (de rayon 1), le sens de lecture est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre. Les angles remarquables sont marqués de 0 à 2π (en radian) et de $0°$ à $360°$. Les coordonnées des points correspondant à ces angles sont aussi indiquées.

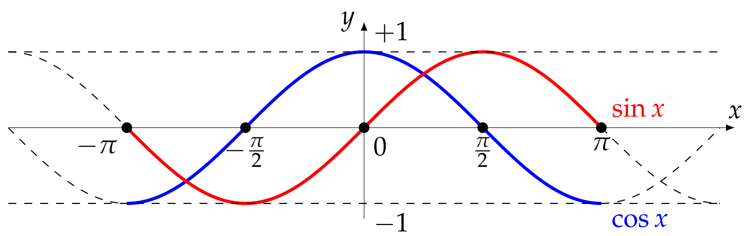
2.4.2 Les fonctions sinus, cosinus, tangente

La fonction cosinus est périodique de période 2π et elle paire (donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). La fonction sinus est aussi périodique de période de 2π mais elle impaire (donc symétrique par rapport à l'origine).



Voici un zoom sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

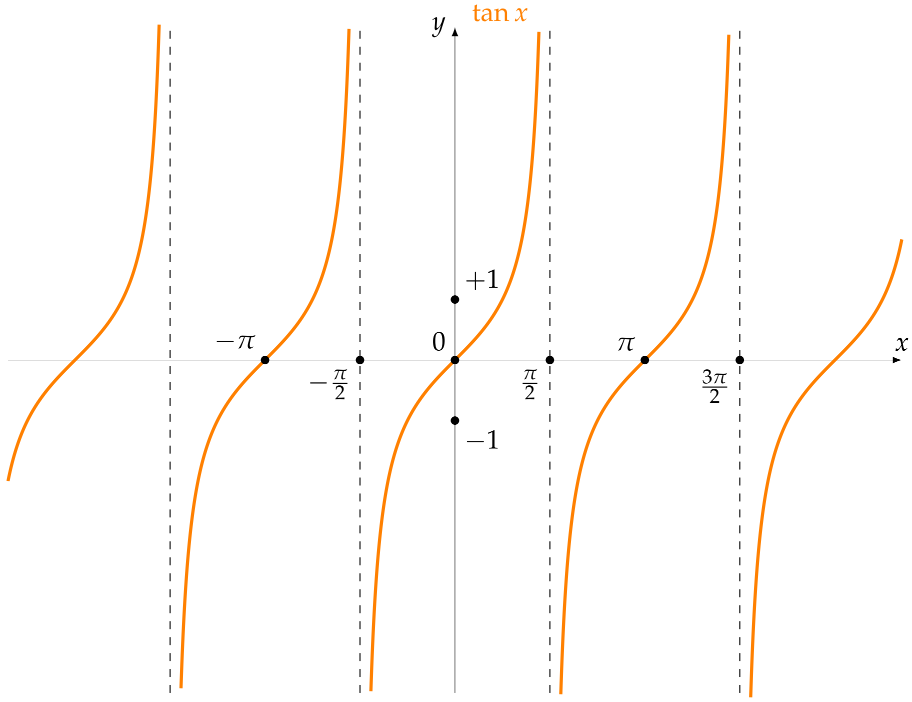




Pour tout x n'appartenant pas à $\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\}$ la fonction tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π ; c'est une fonction impaire.



Voici les dérivées :

$$\cos(x)' = -\sin(x) \qquad \sin(x)' = \cos(x) \qquad \tan(x)' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

2.4.3 Formulaire

Voici un lien d'une vidéo présentant un moyen simple de retenir l'intégralité du formulaire de trigonométrie.

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Les **formules d'additions**

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cdot\cos(b) + \sin(b)\cdot\cos(a)\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\cdot\tan(b)}
\end{aligned}$$

Il est bon de connaître par cœur les **formules de duplications** suivantes (faire $a = b$ dans les formules d'additions) :

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= 2\cos^2(a) - 1 \ = \ 1 - 2\sin^2 a \ = \ \cos^2 a - \sin^2 a\\
\sin(2a) &= 2\sin(a)\cdot\cos(a)\\
\tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}
\end{aligned}$$

Les **formules de linéarisation** :

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cdot\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)\\
\sin(a)\cdot\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)\\
\sin(a)\cdot\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)
\end{aligned}$$

Les **formules de factorisation** :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Enfin les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\frac{x}{2}$. On pose

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

on a alors

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ces formules sont utiles pour le calcul de certaines intégrales par changement de variable, en utilisant en plus la relation

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

3.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est définie par la relation

$$\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus hyperbolique à l'intervalle $[0, +\infty[$. Sur cet intervalle la fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante, donc la restriction

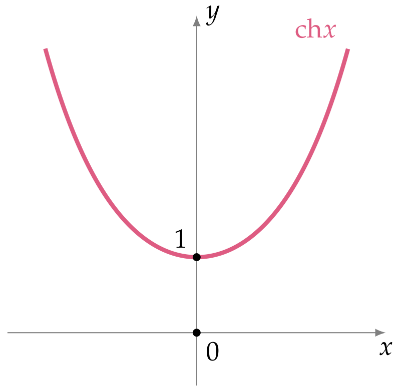
$$\text{ch} :\ [0, +\infty[\ \to [1, +\infty[$$

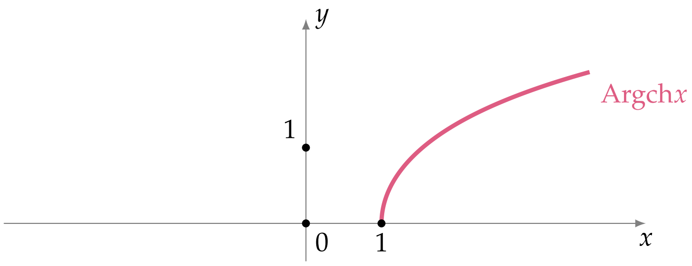
est une bijection.
Sa bijection réciproque est la fonction **arrgument cosinus hyperbolique** :

$$\text{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[.$$

Proposition 5.

- *Pour tout* $x \in [0, +\infty[$ *et* $y \in [1, +\infty[$ *on a*
$$y = \text{ch}(x) \iff \text{Argch}(y) = x$$
- *Pour tout* $x \in [0, +\infty[$ *on a*
$$\text{Argch}(\text{ch}(x)) = x$$





- *Pour tout $y \in [1, +\infty[$ on a*
$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{Argch}(y)\right) = y$$

La fonction $\mathrm{Argch} \circ \mathrm{ch}$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas l'identité sur $\mathbb{R}$. Pour $x < 0$ on a

$$\mathrm{Argch}\left(\mathrm{ch}(x)\right) = -x.$$

Terminons avec la dérivée de Argch :

$$\forall y > 1, \qquad \mathrm{Argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Définition de $\mathrm{Argch}(y)$ pour $y \geq 1$.

Pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Argch}(y) = x &\iff y = \mathrm{ch}(x) \\
&\iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&\iff 2y = e^x + e^{-x} \\
&\iff e^x + \frac{1}{e^x} = 2y \\
&\iff \frac{e^{2x} + 1}{e^x} = 2y \\
&\iff e^{2x} + 1 = 2y\, e^x \\
&\iff e^{2x} - 2y\, e^x + 1 = 0 \\
\mathrm{Argch}(y) = x &\iff (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0
\end{aligned}$$

On étudie alors le trinome du second degré :

$$X^2 - 2yX + 1 = 0$$

Or

$$\begin{aligned} X^2 - 2yX + 1 &= (X-y)^2 - y^2 + 1 \\ &= (X-y)^2 - (y^2 - 1) \\ &= \left(X - y - \sqrt{y^2-1}\right)\left(X - y + \sqrt{y^2-1}\right) \end{aligned}$$

Le trinome a deux racines réelles strictement positive,

$$y + \sqrt{y^2-1} \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2-1}$$

Or on souhaite $x \geq 0$ on conserve donc uniquement la solultion supérieure à 1. On a alors

$$\mathrm{Argch}(y) = x \iff e^x = y + \sqrt{y^2-1}$$

Donc pour $y \geq 1$ on a

$$\mathrm{Argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

3.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est définie par la relation

$$\mathrm{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle forme une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arrgument sinus hyperbolique** :

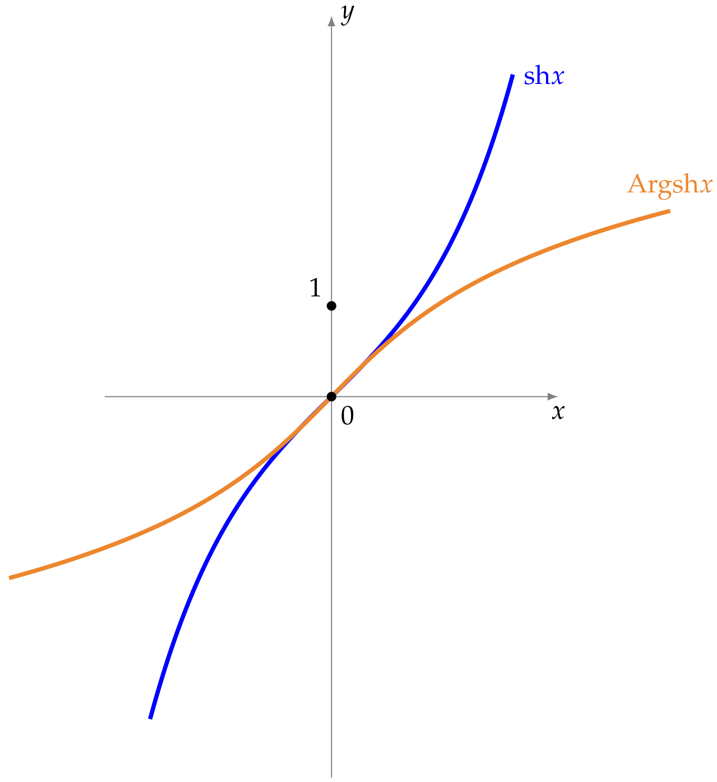
$$\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Proposition 6.

- $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
- $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\, x$, *et* $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*
- Argsh *est dérivable et*
$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$ *on a*
$$y = \mathrm{sh}(x) \iff \mathrm{Argsh}(y) = x$$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*
$$\mathrm{Argsh}\left(\mathrm{sh}(x)\right) = x$$
- *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *on a*
$$\mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}(y)\right) = y$$

Définition de $\mathrm{Argsh}(y)$ **pour** $y \geq 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a



$$\begin{aligned}
\mathrm{Argsh}(y) = x &\iff y = \mathrm{sh}(x) \\
&\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\mathrm{Argsh}(y) = x &\iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0
\end{aligned}$$

On étudie alors le trinome du second degré :

$$X^2 - 2yX - 1 = 0$$

Ses solutions sont $\forall y \in \mathbb{R}$

$$y - \sqrt{y^2+1} < 0 \quad \text{et} \quad y + \sqrt{y^2+1} > 0$$

On conserve donc uniquement la solultion positive. On a alors

$$\mathrm{Argsh}(y) = x \quad \iff \quad e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

Donc pour $y \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{Argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

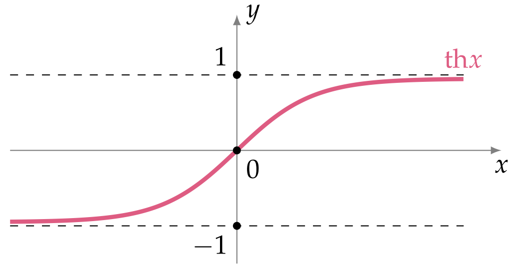
3.3 Tangente hyperbolique et son inverse

La fonction tangente hyperbolique est definie comme

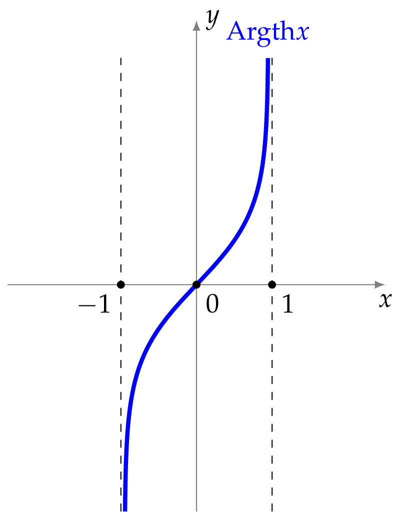
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$$



la fonction tangente hyperbolique est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
La bijection reciproque est appelée arrgument tangente hyperbolique et notée Argth.



Proposition 7.

- *Pour tour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$ on a*
$$y = \text{th}(x) \iff \text{Argth}(y) = x$$
- *Pour tour $x \in \mathbb{R}$ on a*
$$\text{Argth}\left(\text{th}(x)\right) = x$$
- *Pour tour $y \in]-1,1[$ on a*
$$\text{th}\left(\text{Argth}(y)\right) = y$$

La afonction tangente hyperbolique et sa bijection réciproque sont tputes les deux dérivable.

Proposition 8.

- *Pour tour $x \in \mathbb{R}$ on a*
$$\text{th}(x)' = 1 - \text{th}(x)^2.$$
- *Pour tour $y \in]-1,1[$ on a*
$$\text{Argth}(y)' = \frac{1}{1-y^2}$$

Définition de $\text{Argth}(y)$ **pour** $y \in]-1,1[$.

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-y} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+y}$$

Les primitives de $y \mapsto \dfrac{1}{1-y^2}$ sur $]-1,1[$ sont

$$y \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1-y) + \frac{1}{2}\ln(1+y) + K = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + K$$

avec $K \in \mathbb{R}$. Argth est la primitive de $y \mapsto \dfrac{1}{1-y^2}$ qui s'annule en 0, donc pour $y \in]-1,1[$ on a

$$\operatorname{Argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

3.4 Trigonométrie hyperbolique

On a une première relation :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Formules d'additions :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b \\
\operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a \\
\operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}
\end{aligned}$$

Formules de duplications :

$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a$$

$$\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th}(2a) = \frac{2\operatorname{th}(a)}{1+\operatorname{th}(a)^2}$$

Formules de factorisation :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(p) + \operatorname{ch}(q) &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\operatorname{sh}(p) - \operatorname{sh}(q) &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\operatorname{th}(p) + \operatorname{th}(q) &= \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch}(p)\operatorname{ch}(q)} \\
\operatorname{th}(p) - \operatorname{th}(q) &= \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch}(p)\operatorname{ch}(q)}
\end{aligned}$$

Dérivées :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh} x \\
\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x \\
\operatorname{th}'(x) &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\
\operatorname{Argch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1) \\
\operatorname{Argsh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
\operatorname{Argth}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

Expressions des fonctions hyperboliques réciproque :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geq 1) \\
\operatorname{Argsh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\operatorname{Argth}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

4 Exercices

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
2. $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0.$

Correction ▼ [07.0000]

Exercice 2

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

1. $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$
2. $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$

Correction ▼ [07.0001]

Exercice 3 Limites et exponentielle

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}$

Correction ▼ [07.0002]

Exercice 4 Les principales formes indéterminées

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\exp(x) - x^3\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x) - x - \sqrt{x})$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})}$
6. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \exp\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}$

Correction ▼ [07.0003]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Posons $X = e^x$. Alors l'équation devient
$$X^2 - X - 6 = 0$$
Les racines de cette équation sont $X = -2$ et $X = 3$. Mais seule la racine positive nous intéresse ici, car l'exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. On en déduit que l'équation admet une unique racine, qui est égale à $\ln 3$.

2. On pose de même $X = e^x$. L'équation devient
$$3X - \frac{7}{X} - 20 = 0$$
qui est encore équivalente à
$$3X^2 - 20X - 7 = 0$$
(on ne sintéresse qu'aux solutions strictement positives). Les solutions de cette dernière équation sont $X = -\frac{1}{3}$ et $X = 7$. Seule la seconde est strictement positive. On déduit donc que l'équation $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$ admet une unique solution donnée par $x = \ln(7)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La première équation est équivalente à $e^{x+y} = 10$ ou encore, en utilisant le logarithme, à $x + y = \ln(10) = \ln(2) + \ln(5)$. La seconde équation est équivalente, toujours en utilisant le logarithme, à $x - y = \ln(2/5) = \ln(2) - \ln(5)$. Ainsi, le système est équivalent à
$$\begin{cases} x + y = \ln(2) + \ln(5) \\ x - y = \ln(2) - \ln(5) \end{cases}$$
On trouve alors facilement que le seul couple solution est $x = \ln(2), y = \ln(5)$.

2. On résoud le système classiquement. On trouve qu'il est équivalent à
$$\begin{cases} e^x = 3 \\ e^y = 4 \end{cases}$$
Prenant le logarithme, on trouve un seul couple solution donné par $x = \ln(3)$ et $y = \ln(4)$.

3. Posons $a = e^x$ et $b = e^y$. Le système est alors équivalent à
$$\begin{cases} 5a - b & = 19 \\ ab & = 30 \end{cases} \iff \begin{cases} ba - 19 & \\ a(5a - 19) & = 30 \end{cases}$$
La seconde équation est une équation du second degré : $5a^2 - 19a - 30 = 0$. Ces solutions sont $a = -6/5$ et $a = 5$. Mais a doit être strictement positif, donc $-6/5$ ne convient pas. On a donc $\boldsymbol{a} = 5$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{6}$. La seule solution du système est doncle couple $x = \ln(5)$ et $y = \ln(6)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. La première limite donne une forme indéterminée ∞/∞. On lève lindétermination en factorisant par e^x au dénominateur :
$$\frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{e^x}{e^x\left(2 + e^{-3x}\right)} = \frac{1}{2 + e^{-3x}}$$
Comme
$$\lim_{x \to -\infty} e^{-3x} = 0$$
on en déduit que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{1}{2}$$

2. La deuxième limite n'est pas une forme indéterminée. En effet, on a

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} 2e^x + e^{-2x} = +\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = 0$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On factorise

$$\exp(x) - x^3 = \exp(x)\left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)}\right)$$

Par le théorème de croissance comparée,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\exp(x)} = 0$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)}\right) = 1$$

puis

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x)\left(1 - \frac{x^3}{\exp(x)}\right) = +\infty$$

2. On factorise

$$\ln(x) - x - \sqrt{x} = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Par le théorème de croissance comparée et les limites usuelles :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -1$$

puis

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

3. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}$$

Or, par les limites usuelles et les opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

puis

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}=+\infty$$

4. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{7x+\ln(x)}{7x+\exp(x)} = \frac{x\left(7+\frac{\ln(x)}{x}\right)}{\exp(x)\left(\frac{7x}{\exp(x)}+1\right)} = \frac{x}{\exp(x)} \times \frac{7+\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{7x}{\exp(x)}+1}$$

Par le théorème de croissance comparée et les opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7+\frac{\ln(x)}{x}\right)=7, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x}{\exp(x)}+1\right)=1$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{7x}{\exp(x)}+1}=7$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\exp(x)}=0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+\ln(x)}{7x+\exp(x)}=0$.

5. On pose $u=\sqrt{3x}$ de sorte que si $x\to+\infty$, alors $u\to+\infty$. De plus, $x=\frac{u^2}{3}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})} &= \frac{\ln\left(\frac{u^2}{3}\right)}{\exp(u)}\\ &= \frac{\ln\left(u^2\right)-\ln(3)}{\exp(u)}\\ &= \frac{2\ln(u)-\ln(3)}{\exp(u)}\\ &= 2\frac{\ln(u)}{\exp(u)}-\frac{\ln(3)}{\exp(u)}\end{aligned}$$

Finalement, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})}=\lim_{u\to+\infty}\left(2\frac{\ln(u)}{\exp(u)}-\frac{\ln(3)}{\exp(u)}\right)=0$

6. On écrit $x\exp\left(\frac{1}{x}-1\right) = x\exp\left(\frac{1}{x}\right)\exp(-1)$ puis on pose $u = 1/x$ de sorte que si $x \to 0^+$alors $u \to +\infty$. On a alors

$$\begin{aligned} x\exp\left(\frac{1}{x}-1\right) &= x\exp\left(\frac{1}{x}\right)\exp(-1) \\ &= \frac{1}{u}\exp(u)\exp(-1) \\ &= \exp(-1) \times \frac{\exp(u)}{u} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} x\exp\left(\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{u\to+\infty} \exp(-1) \times \frac{\exp(u)}{u} = +\infty$$

7. On écrit

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2}-\sqrt{x+7} &= \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}} \\ &= \frac{(x+2)-(x+7)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+2} = +\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7} = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}) = +\infty$. Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+7}) = 0$$

Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur Google Play et l'App Store.

Etudiez en musique !

Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

D'après un cours de Arnaud Bodin.
Revu et augmenté par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).