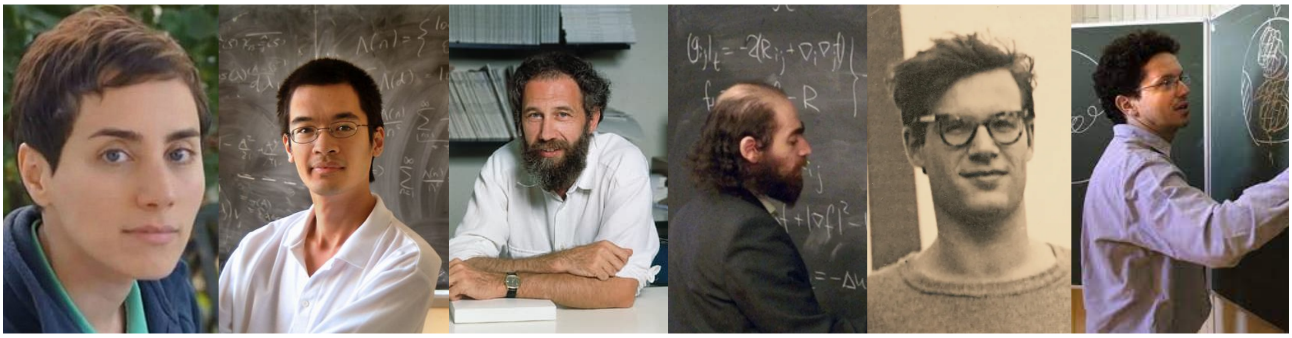
istom Ecole supérieure d'agro-développement international

Calcul matriciel

Antoine Géré

Année 2025 - 2026[1]



CAUTION

Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Table des matières

Le déterminant est un nombre que l'on associe à n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Il correspond au volume du parallélépipède engendré par ces n vecteurs. On peut aussi définir le déterminant d'une matrice A. Le déterminant permet de savoir si une matrice est inversible ou pas, et de façon plus générale, joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires.

[1] version du 10 novembre 2025

Dans tout ce qui suit, nous considérons des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, où les principaux exemples étant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

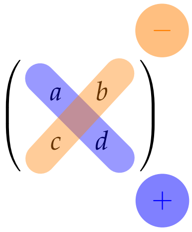
1 Déterminant en dimension 2 et 3

1.1 Matrice 2×2

En dimension 2, le déterminant est très simple à calculer

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Cette relation est fondamentale. Le déterminant d'une matrice 2×2 est donc le produit des éléments sur la diagonale principale (en bleu) moins le produit des éléments sur l'autre diagonale (en orange).



Exemple 1.
Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times 8 = -10.$$

1.2 Matrice 3×3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

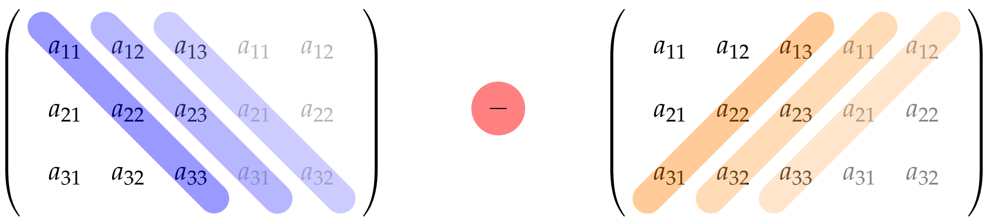
1.2.1 Règle de Sarrus

La formule pour le déterminant de A est la suivante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Il existe un moyen facile de retenir cette formule, c'est **la règle de Sarrus**. Elle s'utilise de cette façon :

1. On recopie les deux premières colonnes à droite de la matrice (colonnes grisées) ;
2. on additionne les produits des trois termes des diagonales descendante (à gauche) ;
3. on additionne les produits des trois termes des diagonales ascendante (à droite).
4. on soustrait le termes obtenu avec les diagonales ascendante au terme trouvé avec les diagonales descendante.

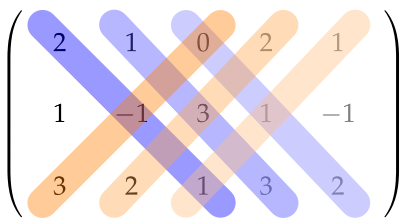


Attention, cette méthode s'applique uniquement pour les matrices de taille 3. Elle ne peut pas être utilisée pour les matrices de taille supérieure à 3.

Exemple 2.
Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la règle de Sarrus on a



ce qui nous permet d'écrire

$$\det(A) = 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2 - 3 \times (-1) \times 0 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 = -6.$$

1.2.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Nous verrons cette méthode en détails par la suite pour des matrices de taille n. Ici nous ne présentons que la méthode. Une justification de cette démarche sera donné plus loin.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

L'idée est de sélectionner une colonne ou une ligne de la matrice A, et ensuite de s'appuyer sur ce choix pour effectuer le calcul de déterminant de A. Nous verrons plus loin que notre choix d'une ligne ou d'une colonne n'a pas d'incidence sur le résultat final.

Pour présenter la méthode choisissons la deuxième colonne de la matrice A. On peut alors écrire

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1\,2}\ \ C_{1\,2} + a_{2\,2}\ \ C_{2\,2} + a_{3\,2}\ \ C_{3\,2}$$

où

$$C_{1\,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\Big(a_{21} \times a_{33} - a_{23} \times a_{31}\Big)$$

$$C_{2\,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\Big(a_{11} \times a_{33} - a_{13} \times a_{31}\Big)$$

$$C_{3\,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\Big(a_{11} \times a_{23} - a_{13} \times a_{21}\Big)$$

CAUTION

Cette méthode fonctionne quelque soit la taille de la matrice. On priviligera cette méthode qui s'averera très éfficace lorsque la matrice comporte des zéros comme coefficients.

Exemple 3.
Calculons le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la règle de Sarrus nous avons trouvé $\det(A) = -6$. Nous allons essayer de retrouver ce résultat par la méthode juste présentée.

Nous choisissons la premiere ligne car elle comporte un zéro, choisir la troisième colonne était également un choix judicieux.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times C_{1\,1} + 1 \times C_{1\,2} + 0 \times C_{1\,3} = 2 \times C_{1\,1} + C_{1\,2}$$

où

$$C_{1\,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\Big((-1) \times 1 - 3 \times 2\Big) = -7$$

$$C_{1\,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \Big(1 \times 1 - 3 \times 3 \Big) = 8$$

donc

$$\det(A) = 2 \times (-7) + 8 = -14 + 8 = -6.$$

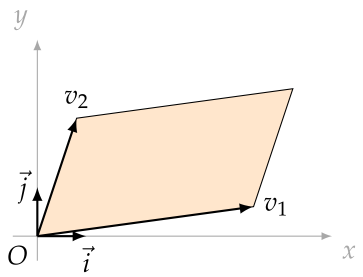
1.3 Interprétation géométrique

En dimension 2 les déterminants correspondent à des aires et en dimension 3 à des volumes.

Nous considérons deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs v_1, v_2 déterminent un parallélogramme.



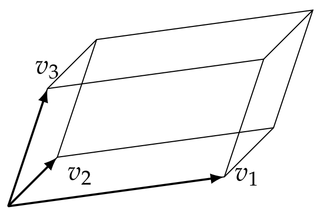
Proposition 1.
L'aire du parallélogramme est donnée par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathcal{A} = |\det(v_1, v_2)| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|.$$

De manière similaire, trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

définissent un parallélépipède.



À partir de ces trois vecteurs on définit, en juxtaposant les colonnes, une matrice et un déterminant :

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.
Le volume du parallélépipède est donné par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathcal{V} = |\det(v_1, v_2, v_3)|.$$

2 Définition et propriétés du déterminant

2.1 Premières caractérisations

Nous allons caractériser le déterminant comme une application, qui à une matrice carrée associe un scalaire

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Théorème 1 (Existence et d'unicité du déterminant)**.**
Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que

(i) le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés ;

(ii) si une matrice A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul ;

(iii) le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Exemple 4.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Car la seconde colonne est un multiple de 5.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Par linéarité sur la troisième colonne.

Remarque.

1. Une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait la propriété (i) est appelée forme multilinéaire.
2. Si elle satisfait (ii), on dit qu'elle est alternée.

Le déterminant est donc la seule forme multilinéaire alternée qui prend comme valeur 1 sur la matrice I_n. Les autres formes multilinéaires alternées sont les multiples scalaires du déterminant. On verra plus loin comment on peut calculer en pratique les déterminants.

Donnons maintenant quelques propriétés importantes du déterminant : comment se comporte le déterminant face aux opérations élémentaires sur les colonnes ?

Proposition 3.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant les colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. On note A' la matrice obtenue par une des opérations élémentaires sur les colonnes, qui sont

1. *$C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$.*
   A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors
   $$\det(A') = \lambda \det(A).$$
2. *$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$).*

A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A. Alors

$$\det(A') = \det(A).$$

3. *$C_i \leftrightarrow C_j$.*

   A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors

$$\det(A') = -\det(A).$$

Plus généralement pour (2), l'opération

$$C_i \leftarrow C_i + \sum_{j=1 j\neq i}^{n} \lambda_j C_j$$

d'ajouter une combinaison linéaire des autres colonnes conserve le déterminant.
Échanger deux colonnes change le signe du déterminant.

Proposition 4.
Si une colonne C_i de la matrice A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det(A) = 0$.

2.2 Déterminant de matrices particulières

Nous connaissons déjà le déterminant de deux matrices :

- le déterminant de la matrice nulle 0_n vaut 0 ;
- le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1 .

Calculer des déterminants n'est pas toujours facile. Cependant il est facile de calculer le déterminant de matrices triangulaires.

Proposition 5.
Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.

Autrement dit, pour une matrice triangulaire A on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Comme cas particulièrement important on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.
Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.

2.3 Opérations et déterminant

Nous allons voir trois propriétés importantes du déterminant : le déterminant d'un produit de matrices, le déterminant de l'inverse d'une matrice et le déterminant de la transposée d'une matrice. Pour prouver ces propriétés, nous aurons besoin des matrices élémentaires.

Pour chacune des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A, on associe une matrice élémentaire E, telle que la matrice obtenue par l'opération élémentaire sur A soit $A' = A \times E$.

$C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$

$E_{C_i \leftarrow \lambda C_i}$ est la matrice diagonale ne comportant que des 1, sauf en position (i, i).

$$E_{C_i \leftarrow \lambda C_i} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{colonne } i & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$

$E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}$ est comme la matrice identité, sauf en position (j, i) où son coefficient vaut λ

$$E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j} = \begin{array}{c} \text{colonne } i \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ 0 & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{colonne } j \end{array}$$

$C_i \leftrightarrow C_j$

$E_{C_i \leftrightarrow C_j}$ est comme la matrice identité, sauf que ses coefficients (i, i) et (j, j) s'annulent, tandis que les coefficients (i, j) et (j, i) valent 1

$$E_{C_i \leftrightarrow C_j} = \begin{array}{c} \text{colonne } i \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{colonne } j \end{array}$$

Nous allons détailler le cas de chaque opération et son effet sur le déterminant.

Proposition 7.
1. $\det(E_{C_i \leftarrow \lambda C_i}) = \lambda$
2. $\det(E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}) = +1$

3. $\det(E_{C_i \leftrightarrow C_j}) = -1$

4. *Si* E *est une des matrices élémentaires ci-dessus,* $\det(A \times E) = \det A \times \det E$

Cette proposition nous permet de calculer le déterminant d'une matrice A de façon relativement simple, en utilisant l'algorithme de Gauss. En effet, si en multipliant successivement A par des matrices élémentaires $E_1, \ldots, E_r$ on obtient une matrice T échelonnée, donc triangulaire

$$T = A \cdot E_1 \cdots E_r$$

alors, en appliquant r-fois la proposition précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\det(T) &= \det(A \cdot E_1 \cdots E_r) \\
&= \det(A \cdot E_1 \cdots E_{r-1}) \cdot \det(E_r) \\
&= \cdots \\
&= \det A \cdot \det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdots \det(E_r)
\end{aligned}$$

Comme on sait calculer le déterminant de la matrice triangulaire T et les déterminants des matrices élémentaires E_i, on en déduit le déterminant de A.

En pratique cela ce passe comme sur l'exemple suivant.

Exemple 5.
Calculons le déterminant de la matrice A où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{opération } C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ pour avoir un pivot en haut à gauche} \\
&= (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow \frac{1}{3} C_1, \text{ linéarité par rapport à la première colonne} \\
&= (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\
&= (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 10C_2 \\
&= (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times 3 \times 1 \times 1 \times (-55) \\
\det(A) &= 165.
\end{aligned}$$

Théorème 2. Déterminant du produit de 2 matrices :

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Déterminant de l'inverse d'une matrice :

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Déterminant de la transposée d'une matrice :

$$\det\left(A^T\right) = \det(A)$$

Une première conséquence de ce théorème, et en particulier du second point, est que l'on peut établir un critère pour savoir si une matrice est inversible. Il suffit de calculer son déterminant !

Proposition 8.
Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

L'exemple qui suit permet d'introduire une notion utile pour le chapitre suivant.

Exemple 6.
Deux matrices semblables ont même déterminant. En effet deux matrices semblables A et B vérifient une relation du type

$$B = P^{-1}AP$$

où P est une matrice inversible. Par multiplicativité du déterminant, on en déduit que

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A).$$

Une deuxième conséquence du théorème précédent, du au troisième point, est que par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes. Ainsi, le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes, si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul, on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, etc.

On a donc

Proposition 9.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant les colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. On note A' la matrice obtenue par une des opérations élémentaires sur les colonnes, qui sont

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *avec* $\lambda \neq 0$
   A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors
   $$\det(A') = \lambda \det(A).$$
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$ *(et $j \neq i$)*
   A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A. Alors
   $$\det(A') = \det(A).$$
3. $L_i \leftrightarrow L_j$
   A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors
   $$\det(A') = -\det(A).$$

On a de même :

Proposition 10.
Si une ligne L_i de la matrice A est combinaison linéaire des ligne colonnes, alors $\det(A) = 0$.

Illustrons notre propos avec un exemple.

Exemple 7.
Calculons le déterminant de la matrice A où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 6 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 6 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} && \text{opération } L_1 \leftrightarrow L_2 \text{ pour avoir un pivot en haut à gauche} \\
&= (-1) \times \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{3}L_1, \\
&= (-1) \times \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & \frac{5}{3} \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\
&= (-1) \times \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{130}{3} \end{vmatrix} \\
&= (-1) \times 6 \times 1 \times \left(-\frac{130}{3}\right) \\
\det(A) &= 260.
\end{aligned}$$

3 Calculs de déterminants

Une des techniques les plus utiles pour calculer un déterminant est, comme nous l'avons déjà dit, le développement par rapport à une ligne (ou une colonne).

3.1 Cofacteur

Définition 1.
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.
- Le nombre $\det(A_{ij})$ est un mineur d'ordre $n-1$ de la matrice A.
- Le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est le cofacteur de A relatif au coefficient a_{ij}.

Une matrice A peut s'écrire comme

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

Sa matrice extraite A_{ij} peut s'écrire comme

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 8.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$.

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{32} = (-1) \times (-11) = 11.$$

Pour déterminer si $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$, on peut se remarquer que l'on associe des signes en suivant le schéma suivant

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Donc $C_{11} = +\det A_{11}$, $C_{12} = -\det A_{12}$, $C_{21} = -\det A_{21} \dots$

3.2 Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème 3 (Développement suivant une ligne ou une colonne)**.**
Formule de développement par rapport à la ligne i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Exemple 9.
Retrouvons la formule des déterminants 3×3, déjà présentée par la règle de Sarrus, en développement par rapport à la première ligne.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\ C_{11} + a_{12}\ C_{12} + a_{13}\ C_{13} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.
\end{aligned}$$

Exemple 10.
Considerons la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On choisit de développer par rapport à la seconde colonne (car c'est là qu'il y a le plus de zéros) :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 0C_{12} + 2C_{22} + 3C_{32} + 0C_{42} \\
&\qquad \text{(développement par rapport à la deuxième colonne)} \\
&= +2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&\qquad \text{on n'oublie pas les signes des cofacteurs et on recommence} \\
&\quad \text{en développant chacun de ces deux déterminants } 3 \times 3 \\
&= +2 \left(+4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \\
&\qquad \text{(par rapport à la première colonne)} \\
&\quad -3 \left(-4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
&\qquad \text{(par rapport à la deuxième ligne)} \\
&= +2\big(+4 \times 5 - 0 + 1 \times (-4) \big) - 3\big(-4 \times 7 + 1 \times 11 - 0 \big) \\
\det(A) &= 83
\end{aligned}$$

Remarque.
Le développement par rapport à une ligne permet de ramener le calcul d'un déterminant $n \times n$ à celui de n déterminants $(n-1) \times (n-1)$. Par récurrence descendante, on se ramène ainsi au calcul de $n!$ sous-déterminants, ce qui devient vite fastidieux. C'est pourquoi le développement par rapport à une ligne ou une colonne n'est utile pour calculer explicitement un déterminant que si la matrice de départ a beaucoup de zéros. On commence donc souvent par faire apparaître un maximum de zéros par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes qui ne modifient pas le déterminant, avant de développer le déterminant suivant la ligne ou la colonne qui a le plus de zéros.

4 Inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
Nous lui associons la matrice C des cofacteurs, appelée comatrice,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 4.
Soient A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, C^T$$

Exemple 11.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne que $\det A = 2$. La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+/-$). On trouve :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Méthode de Cramer

Le théorème suivant, appelé **règle de Cramer**, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det A \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème 5 (Règle de Cramer)**.**
Soit

$$AX = B$$

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det(A) \neq 0$*. Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *du système est donnée par*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \dots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Exemple 12.
Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8. \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = 44 \qquad \det A_1 = -40 \qquad \det A_2 = 72 \qquad \det A_3 = 152.$$

La solution est alors

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}, \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

La méthode de Cramer n'est pas la méthode la plus efficace pour résoudre un système, mais elle est utile si le système contient des paramètres.

6 Exercices

Vous pouvez continuer à vous exercer sur votre espace jai20enmaths, où vous y retrouverez des notions de cours ainsi que des exercices corrigés. Si vous remarquez une erreur ou avez une suggestion pour que cet espace de travail soit plus agréable à utiliser, ne surtout pas hésiter à me le signaler par mail à `a.gere@istom.fr`.

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants.

1. $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$
2. $B = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$
3. $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$
4. $D = \begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix}$

Correction ▼ [02.0000]

Exercice 2

Calculer les déterminants suivants.

1. $A = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$
2. $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 11 & 35 \end{vmatrix}$
3. $C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
4. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix}$

Correction ▼ [02.0001]

Exercice 3

Calculer les déterminants suivants, en fonction des paramètres réels a, b, et c. Nous donnerons les expressions factorisées.

1. $D_1 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$
2. $D_2 = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$
3. $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$
4. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

5. $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \sin(a) \\ 1 & \cos(b) & \sin(b) \\ 1 & \cos(c) & \sin(c) \end{vmatrix}$

6. $D_6 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

7. $D_7 = \begin{vmatrix} 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$

8. $D_8 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{vmatrix}$

Correction ▼ [02.0002]

Exercice 4

Calculer l'inverse des matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ [02.0003]

Exercice 5

Résoudre le système suivant par la formule de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$

Correction ▼ [02.0004]

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Correction ▼ [02.0005]

Exercice 7

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ [02.0006]

Exercice 8

Etudier le système de trois équations à trois inconnues suivant en fonction des valeurs du paramètre m.

$$\begin{cases} x - y + mz = 1 \\ mx + y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = m \end{cases}$$

Correction ▼ [02.0011]

Exercice 9

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

Correction ▼ [02.0012]

Exercice 10

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ [02.0013]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 195$

2. $B = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -114$

3. $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

4. $D = \begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix} = 12$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $A = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 0$

2. $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 11 & 35 \end{vmatrix} = 1$

3. $C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

4. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0$

Correction de l'exercice 3 ▲

pour des détails de correction cf. notes manuscrites.

1. $D_1 = 4(a-b)(a-c)(b-c)$
2. $D_2 = 2abc(a+b+c)^3$
3. $D_3 = 2abc$
4. $D_4 = -(a-b)(a-c)(b-c)$
5. $D_5 = 4\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) + \sin\left(\frac{c-a}{2}\right) + \sin\left(\frac{c-b}{2}\right)$
6. $D_6 = (a+b+c)^3$
7. $D_7 = b(a+2)(a-1)^2$
8. $D_8 = 0$

Correction de l'exercice 4 ▲

$$A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -7 & 39 & 19 \\ 4 & 4 & -1 \\ 5 & -18 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

$$x = \frac{9}{11} \qquad y = \frac{-7}{11}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Remarquons que comme le système est homogène (c'est-à-dire les coefficients du second membre sont nuls) alors $(0,0,0)$ est une solution du système. Voyons s'il y en a d'autres. Nous faisons semblant de ne pas voir que la seconde ligne implique $x=y$ et que le système est en fait très simple à résoudre. Nous allons appliquer le pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait maintenant $L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

En partant de la dernière ligne on trouve $z=0$, puis en remontant $y=0$, puis $x=0$. Conclusion l'unique solution de ce système est $(0,0,0)$.

2. On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

3. On fait les opérations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & 7y & + & z & = & 3c-a \end{array}\right.$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, ce qui donne un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & & & 54z & = & 5(3c-a)-7(3b+a) \end{array}\right.$$

En partant de la fin on en déduit : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ puis en remontant cela donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{18}(8a+5b-c) \\ y & = & \frac{1}{18}(-2a+b+7c) \\ z & = & \frac{1}{18}(-4a-7b+5c) \end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Par la règle de Sarrus :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

2. On développe par rapport à la seconde ligne qui ne contient qu'un coefficient non nul et on calcule le déterminant 3×3 par la règle de Sarrus :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

3. $$\Delta_3 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

   On développe par rapport à la première colonne :

$$\Delta_3 = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

4. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses lignes et aussi chacune de ses colonnes. Par exemple les coefficients de la première ligne sont tous des multiples de 5 donc

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

   On fait la même chose avec la troisième ligne :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

   Et enfin les coefficients la première colonne sont des multiples de 2 et ceux de la troisième colonne sont des multiples de 7 donc :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times 2 \times 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

   Les coefficients sont plus raisonnables ! On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ pour obtenir :

$$\Delta_4 = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times 56 = 7840$$

5. $$\Delta_5 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ c & 0 & a & a \\ -c & c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

   On fait ensuite les opérations suivantes sur les colonnes : $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_4$ pour obtenir une dernière ligne facile à développer :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b & b \\ c & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +c \times \begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ 0 & -2b & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = bc(bc - 4a^2)$$

6. On fait d'abord les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ et on développe par rapport à la première ligne :

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant à calculer se développe par rapport à la deuxième colonne et le second déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_6 = (-2) \times a \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times b \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = 4a^3 + 27b^2$$

7. Nous allons permuter des lignes et des colonnes pour se ramener à une matrice diagonale par blocs. Souvenons-nous que lorsque l'on échange deux lignes (ou deux colonnes) alors le déterminant change de signe. Nous allons rassembler les zéros. On commence par échanger les colonnes C_1 et C_3 : $C_1 \leftrightarrow C_3$:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis on échange les lignes L_1 et L_4 : $L_1 \leftrightarrow L_4$:

$$\Delta_7 = + \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Notre matrice est sous la forme d'une matrice diagonale par blocs et son déterminant est le produit des déterminants.

$$\Delta_7 = \left|\begin{array}{cc|ccc} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-31) \times (-6) = 186$$

Correction de l'exercice 8 ▲

cf correction manuscrite.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. L'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ est la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ donc $\mathcal{A} = |ad - bc|$. Ici on trouve $\mathcal{A} = \text{abs} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +5$ où abs désigne la fonction valeur absolue.

2. Le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice formée des trois vecteurs. Ici

$$\mathcal{V} = \text{abs} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \text{abs}\left(+1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = 4$$

où l'on a développé par rapport à la première ligne.

3. Si un parallélépipède est construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coefficients sont des entiers alors le volume correspond au déterminant d'une matrice à coefficients entiers. C'est donc un entier.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Donc $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - 11 \times (-8) = 116$.

2. Nous allons voir différentes méthodes pour calculer les déterminants.

   Première méthode. *Règle de Sarrus.* Pour le matrice 3×3 il existe une formule qui permet de calculer directement le déterminant.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

   Donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 21 + 0 \times 15 \times 5 + 3 \times 6 \times 6 - 5 \times 4 \times 6 - 6 \times 15 \times 1 - 3 \times 0 \times 21 = -18$$

   Attention ! La règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices 3×3.

3. **Deuxième méthode.** *Se ramener à une matrice diagonale ou triangulaire.*

   Si dans une matrice on change un ligne L_i en $L_i - \lambda L_j$ alors le déterminant reste le même. Même chose avec les colonnes.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times (-\tfrac{3}{2}) = -6$$

   On a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice diagonale (ou triangulaire) est le produit des coefficients sur la diagonale.

4. **Troisième méthode.** *Développement par rapport à une ligne ou une colonne.* Nous allons développer par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-0) \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (+3) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 3 \times 7 - 1 \times 7 = 14$$

   Bien souvent on commence par simplifier la matrice en faisant apparaître un maximum de 0 par les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Puis on développe en choisissant la ligne ou la colonne qui a le plus de 0.

5. On fait apparaître des 0 sur la première colonne puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

   Pour calculer le déterminant 3×3 on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on la développe.

$$-\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = -96$$

   Donc $\Delta = 96$.

6. La matrice a déjà beaucoup de 0 mais on peut en faire apparaître davantage sur la dernière colonne, puis on développe par rapport à la dernière colonne.

$$\Delta' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

7. Toujours la même méthode, on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\Delta'' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la deuxième colonne :

$$\Delta'' = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

Ecole supérieure d'agro-développement international

Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur Google Play et l'App Store.

Etudiez en musique !

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

Cours et exercices rédigés par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).