

Examen de mathématiques

Mercredi 26 novembre 2025

Promotion 116

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : Oui Non

Calculatrice autorisée : Oui Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f .
3. Déterminer le signe de f' sur D , puis en déduire le sens des variations de f . On présentera les résultats sous la forme d'un tableau de variation.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D .
5. Déterminer les éventuelles asymptotes (branches infinies).
6. Déterminer l'équation de la tangente T à C en son point d'abscisse $x = 2$.
7. **(BONUS)** Étudier la position relative de C et de T .
8. Construire, sur le même dessin, la courbe C , la tangente T et les asymptotes éventuelles.
9. **(BONUS)** Pourrait-il y avoir un axe de symétrie ? Lequel ? Qu'en est-il vraiment ?

[11.0106]

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x - 1)^2}$$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout $x \in D$ on peut écrire

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad (1)$$

3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ à l'aide de l'expression (1). Que pouvons nous en déduire sur le comportement de f en $+\infty$ et $-\infty$?
4. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
5. En déduire les variations de f . On présentera les résultats sous forme d'un tableau de variation.
6. Déterminer les limites inconnues de f aux bornes de D .
7. Déterminer l'équation de la tangente T à C , la courbe de f , en son point d'abscisse $x = 2$.
8. Construire, sur le même dessin, la courbe C et la tangente T .

[11.0107]

Exercice 3 BONUS

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.
3. Étudier les variations de f . On pourra écrire la dérivée de f sous la forme

$$f'(x) = \frac{u(x)f(x)}{x^2}$$

et étudier la fonction u pour trouver son signe.

4. Représenter graphiquement la fonction f .

[11.0108]
