

[11.0081]

$$g(x) = 2x - (x-1) \ln(x-1)$$

1a) \ln est défini pour $x > 0$, et $x-1 > 0$ pour $x > 1$

Donc $D_g =]1, +\infty[$.

1b) on pose $u = x-1$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow 1} u = 0$$

$$\text{de plus } g(x) = 2x - (x-1) \ln(x-1) = 2(u+1) - u \cdot \ln(u)$$

$$\text{et } \lim_{u \rightarrow 0} u \ln(u) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{u \rightarrow 0} 2(u+1) - u \cdot \ln(u) = 2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

$$\begin{aligned} 1c) \quad g'(x) &= 2 - \left(1 \cdot \ln(x-1) + (x-1) \cdot \frac{1}{x-1} \right) \\ &= 2 - \ln(x-1) - 1 \end{aligned}$$

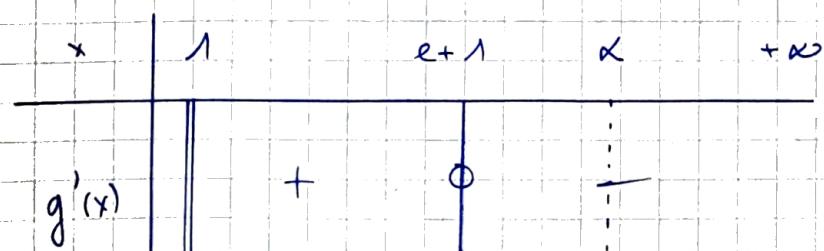
$$g'(x) = 1 - \ln(x-1)$$

$$1d) \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) > 0$$

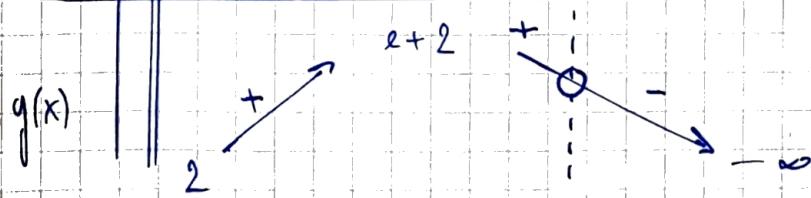
$$\Leftrightarrow \ln(x-1) < 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 < e^1 \quad \text{par la fonction exp. est strictement croissante.}$$

$$\Leftrightarrow x < e+1$$



$$\begin{aligned} g(e+1) &= 2(e+1) - (e+1-1) \cdot \ln(e+1-1) \\ &= 2(e+1) - e \ln(e) \\ &= e+2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 1e) \quad g(x) &= 2x - (x-1) \ln(x-1) \\
 &= x \left(2 - \frac{x-1}{x} \cdot \ln(x-1) \right) \\
 &= x \left(2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(x-1) \right)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x-1) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(x-1) \right) = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

$$1f) \quad \text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{donc on étudie } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$$

Δ De plus la courbe de g admet une asymptote verticale en $x=1$ et une asymptote horizontale en $y=-\infty$.

or d'après la question précédente on a directement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$$

la courbe de g admet donc une branche parabolique d'axe (Oy).

1g) . Sur $[1; e+1[$ l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution
(cf tableau de variation)

. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[e+1; +\infty[$
de plus l'intervalle image dans ce cas $(g([e+1; +\infty[))$ est
 $[g(e+1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)] = [e+2; -\infty[$.

$$e+2 > 0$$

Conclusion: $g(x)$ admet une unique solution sur $[1; +\infty]$, notée α , avec $\alpha \in [e+1; e^3+1]$.

Bonus! Il y a $\alpha \in [e+1, e^3+1]$.

- $g(e+1) = e+2 > 0$
- $g(1) = 0$
- $g(e^3+1) = 2(e^3+1) - (e^3+1-1) \ln(e^3+1-1)$
 $= 2(e^3+1) - 3e^3$
 $= 2 - e^3 < 0$

donc

$$g(e+1) > g(\alpha) > g(e^3+1)$$

or g est continue et strictement décroissante sur $[e+1, e^3+1]$
on en déduit donc :

$$e^3+1 < \alpha < e+1$$

$$\text{D'où } \alpha \in [e+1; e^3+1].$$

1h) cf tableau de variation

2a) $D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

2b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

2 c) La courbe de f admet :

- une asymptote horizontale dirigée $y=0$ en $-\infty$,
- " " verticale " " $x=-1$ en -1 ,
- " " " " " $x=1$ " 1 ,
- " " horizontale " " $y=0$ en $+\infty$.

$$2 d) f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x} \quad \left(= \frac{u}{v}\right) \quad \underline{\text{N.B.}} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x}{x^2-1} \cdot x - \ln(x^2-1)}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^2-1} - \frac{\ln(x^2-1)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{(x^2-1)x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x^2)}{(x^2-1)x^2}$$

2 e) • pour $x > 1$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x^2) > 0$

(\hookrightarrow donc cf question 1.

• pour $x < -1$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x^2) > 0$

(\hookrightarrow donc encore une fois cf question 1).

3) Bonus: cf calculatrice.