

Examen de mathématiques

Lundi 27 janvier 2025

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non

Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.

Exercice 1 Étude d'une fonction grâce à une fonction auxiliaire

1. On définit la fonction g par :

$$g(x) = 2x - (x - 1) \ln(x - 1)$$

(a) Déterminer le domaine de définition D_g de f .

(b) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

(c) Calculer la dérivée de g sur $]1, +\infty[$.

(d) Étudier les variations de g .

(e) Étudier la limite de g en $+\infty$.

(f) Étudier les asymptotes et branches infinies éventuelles de g .

(g) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]1, +\infty[$. On la note α .

Bonus : Montrer alors que

$$\alpha \in [e + 1, e^3 + 1]$$

(h) Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x \in]1, +\infty[$, selon la position de x par rapport à α .

2. On note f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

(a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

(b) Étudier les limites de f aux bornes de D_f .

Indication : On pourra utiliser les limites usuelles suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

(c) Étudier les asymptotes et branches infinies éventuelles de g .

(d) Montrer que

$$f'(x) = \frac{g(x^2)}{(x^2 - 1)x^2}$$

(e) Étudier le signe de $f'(x)$ (la réponse fait intervenir le nombre α introduit précédemment). En déduire le tableau de variation de f .

3. *Bonus : Tracer les courbes représentatives de g et f .*

[11.0081]

Exercice 2 Une fonction pas vraiment périodique

On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \sin^2(x). \end{cases}$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition D de f .

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x \leq f(x) \leq 1 + x$$

(c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

(b) Établir le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

(c) *Bonus : Comment obtient-on la courbe représentative C_f de f sur \mathbb{R} à partir de la portion de la courbe située entre 0 et π ?*

3. *Bonus : En quels points C_f possède-t-elle des tangentes horizontales ? (on déterminera les abscisses de ces points)*

4. *Bonus : Tracer C_f .*

[11.0082]