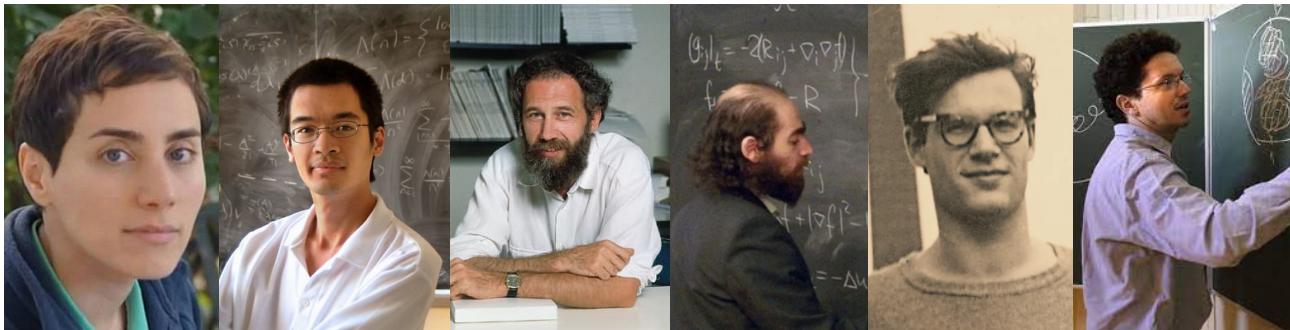


Intégrales multiples

Antoine Géré

Année 2024 - 2025¹



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Résumé

Vous connaissez les intégrales de fonctions d'une variable (parfois appelée intégrales simples). Le but de ce chapitre est de définir une notion d'intégrale pour les fonctions de plusieurs variables. L'une des nouveautés est la richesse des domaines sur lesquelles on peut intégrer. En effet, le domaine d'intégration d'une intégrale simple est toujours un intervalle (ou une union d'intervalles). Par contre, on peut intégrer une fonction de deux variables sur un rectangle, un disque, un domaine entouré par une courbe compliquée (on parle d'intégrales doubles). On peut intégrer une fonction de trois variables sur une sphère, un cylindre, un cône, un ellipsoïde, etc. (on parle d'intégrales triples). Des intégrales de fonctions de plusieurs variables interviennent dans toutes sortes de problèmes en physique.

Table des matières

1 Intégrales doubles	2
1.1 Domaines d'intégration	2
1.2 Calculs d'une intégrale double avec les deux types de balayage	3
1.3 Théorèmes de Fubini	4
1.4 Propriétés	6
1.5 Changement de variables	7
1.6 Application au calcul du volume d'une boule	10
2 Intégrales triples	12
2.1 Calculs d'une intégrale triple sur un compact élémentaire	12
2.2 Théorème de Fubini	13
2.3 Changement de variables	15
3 Applications	18

¹version du 28 janvier 2025

1 Intégrales doubles

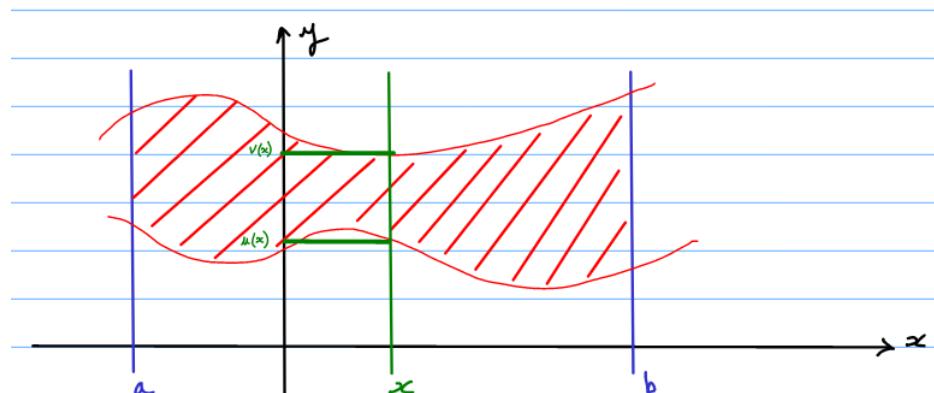
1.1 Domaines d'intégration

Dans le cas des intégrales double les domaines d'intégration sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 . La première chose à faire est donc de décrire ces domaines de \mathbb{R}^2 de façon judicieuse. De multiples possibilités s'offrent à nous. Nous allons dans un premier temps nous intéresser à deux types spécifiques de description, ou autrement dit de balayage du domaine : le balayage vertical puis le balayage horizontal.

Définition 1 (Balayage vertical).

$$\Delta_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\},$$

où u et v sont continues et derivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

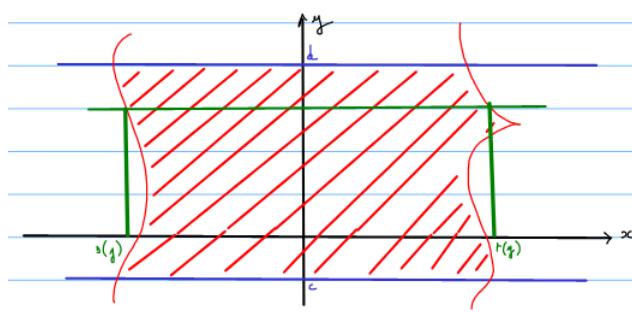


Ici dans le balayage vertical l'abscisse varie entre deux valeurs fixes a et b , tandis que l'ordonnée y varie entre deux valeurs variables $u(x)$ et $v(x)$.

Définition 2 (Balayage horizontal).

$$\Delta_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, s(y) \leq x \leq t(y)\},$$

où s et t sont continues et derivables de $[c, d]$ dans \mathbb{R} .



Ici dans le balayage horizontal l'ordonnée y varie entre deux valeurs fixes c et d , tandis que l'abscisse x varie entre deux valeurs variables $s(y)$ et $t(y)$.

1.2 Calculs d'une intégrale double avec les deux types de balayage

Définition 3 (Balayage vertical).

Pour $(x, y) \in \Delta_V$, c'est à dire $a \leq x \leq b$ et $u(x) \leq y \leq v(x)$, on écrit

$$\iint_{\Delta_V} f = \iint_{\Delta_V} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

On sait que si f est continue, positive, et dérivable sur $[a, b]$, alors

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \, dx$$

est l'aire de la région du plan

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Or on a

$$f(x) = \int_0^{f(x)} 1 \, dy$$

donc l'aire considérée est égale à

$$\mathcal{A} = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx = \iint_{\Delta} dx \, dy.$$

On définit l'aire d'un d'un domaine Δ de \mathbb{R}^2 par

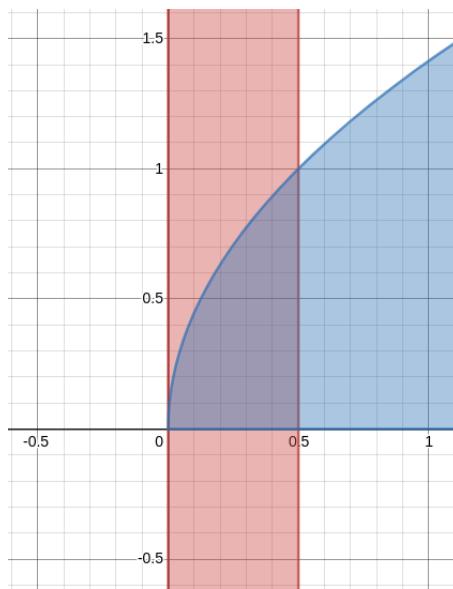
$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_{\Delta} 1.$$

Exemple 1.

Soit $p > 0$. On considère le domaine Δ défini comme

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{p}{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2px} \right\},$$

Calculons l'aire de ce domaine par balayage vertical. On note \mathcal{A} l'aire du domaine Δ .



$$\mathcal{A} = \iint_{\Delta} 1 \, dx \, dy = \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2px}} 1 \, dy \right) dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px} \, dx = \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{p}{2}} = \sqrt{2p} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{p^2}{3}.$$

Définition 4 (Balayage horizontal).

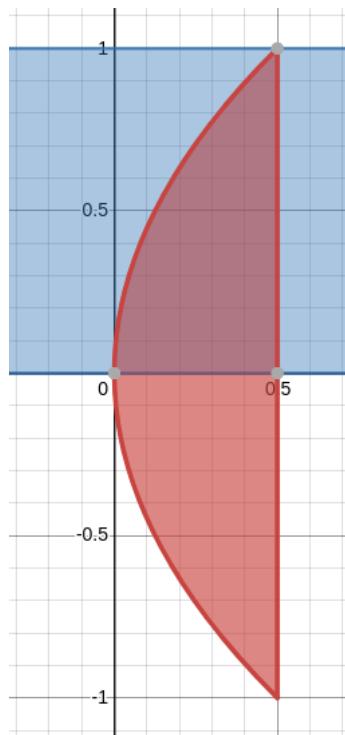
Pour $(x, y) \in \Delta_H$, c'est à dire $c \leq y \leq d$ et $s(y) \leq x \leq t(y)$, on écrit

$$\iint_{\Delta_H} f = \iint_{\Delta_H} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{s(y)}^{t(y)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Exemple 2.

Soit $p > 0$. On recalcule l'aire du domaine Δ de l'exemple précédent avec cette fois un balayage horizontal. On note de nouveau \mathcal{A} l'aire du domaine Δ .

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq p, \frac{y^2}{2p} \leq x \leq \frac{p}{2} \right\}.$$



On a alors

$$\mathcal{A} = \iint_{\Delta} 1 \, dx \, dy = \int_0^p \left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} dx \right) dy = \int_0^p \left(\frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p} \right) dy = \left[\frac{p}{2}y - \frac{y^3}{6p} \right]_0^p = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{6} = \frac{p^2}{3}$$

1.3 Théorèmes de Fubini

Formalisons ce que nous venons de voir.

Théorème 1 (Fubini, 1er cas).

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur $\Delta = [a, b] \times [c, d]$. On alors

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) \, dy.$$

Si f peut s'écrire comme le produit de deux fonctions tels que

$$f(x, y) = g(x) \times h(y),$$

alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x) \, h(y) \, dx \, dy = \int_a^b g(x) \, dx \times \int_c^d h(y) \, dy.$$

Exemple 3.

Soit $f(x,y) = x \cos(y)$, avec

$$\Delta = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

On a alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{[0,1] \times [0,\pi/2]} x \cos(y) \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \times \int_0^{\pi/2} \cos(y) \, dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \times [\sin(y)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 4.

Soit $f(x,y) = x^2y - 1$, avec

$$\Delta = [-1,1] \times [0,1].$$

On a alors

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy &= \iint_{[-1,1] \times [0,1]} (x^2y - 1) \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x^2y - 1) \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y \right]_{y=0}^{y=1} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - x \right]_{-1}^1 \\ \iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Théorème 2 (Fubini, 2ème cas).

Soit une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , continue et définie sur un ensemble borné Δ quelconque.

- Pour tout $(x,y) \in \Delta$, il existe des valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x \leq b$
- Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c(x)$ et $d(x)$ tels que $c(x) \leq y \leq d(x)$,

de telle sorte que

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], y \in [c(x),d(x)] \right\}.$$

On peut également décrire Δ de la façon suivante.

- Pour tout $(x,y) \in \Delta$, il existe des valeurs $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c \leq y \leq d$
- Pour tout $y \in [c,d]$, il existe $a(y)$ et $b(y)$ tels que $a(y) \leq x \leq b(y)$

de telle sorte que

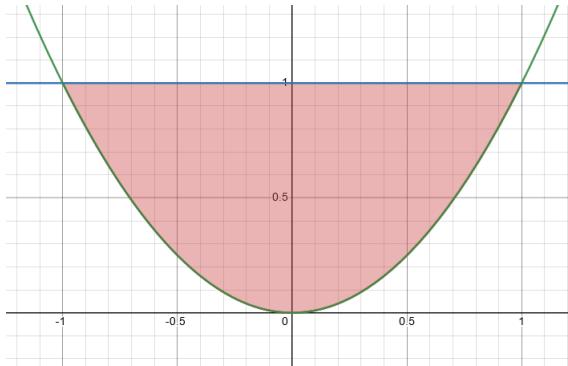
$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d], x \in [a(y),b(y)] \right\}.$$

On a alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) \, dx \right) dy.$$

Exemple 5.

Soient $f(x, y) = x^2y$, et Δ la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$, et la droite $y = 1$.



On peut alors écrire

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y \in [x^2, 1]\}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_{\Delta} x^2y \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 x^2 \, dx \int_{x^2}^1 y \, dy \\ &= \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2}^1 \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x^2 - x^4) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_{x=-1}^{x=1} \\ \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy &= \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

1.4 Propriétés

Pour calculer les intégrales doubles, on utilise les propriétés suivantes.

Proposition 1.

1) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$\iint_D (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) \, dx \, dy = \lambda \iint_D f(x, y) \, dx \, dy + \mu \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$$

2) Si $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ou courbe, alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

3) Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$, alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$$

4) Nous avons l'inégalité suivante

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

- 5) Si D est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, c'est à dire pour tout $(x, y) \in D$ $f(x, -y) = f(x, y)$, alors en posant

$$\Delta_1 = \{(x, y) \in \Delta, y \geq 0\}$$

on a

$$\iint_D f = 2 \iint_{\Delta_1} f.$$

1.5 Changement de variables

Théorème 3 (Changement de variables).

Considérons l'intégrale

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

et un changement de variables

$$(x, y) = (a(u, v), b(u, v)).$$

Pour exprimer l'intégrale en termes de la fonction

$$g(u, v) = f(a(u, v), b(u, v))$$

, il faut exprimer D et le produit $dx dy$ en termes de (u, v) .

- Le domaine D se transforme en le domaine

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (a(u, v), b(u, v)) \in D\}.$$

- Les éléments dx et dy se transforment comme

$$dxdy = |\det(J(u, v))| du dv$$

où $\det(J(u, v))$ est le déterminant de la matrice Jacobienne

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Donc on a

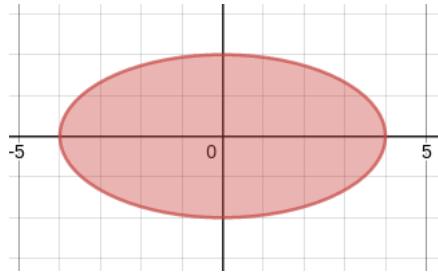
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} g(u, v) |\det(J(u, v))| du dv.$$

Exemple 6.

On considère le domaine Δ défini comme

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

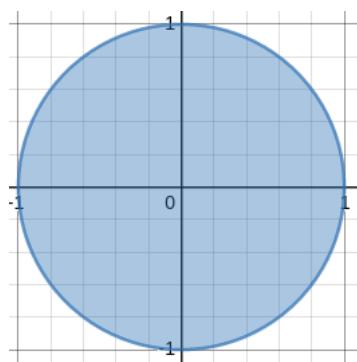


On pose $u = \frac{x}{a}$ et $v = \frac{y}{b}$, donc $x = au$ et $y = bv$. On a alors

$$|\det(J(u,v))| = \left| \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right| = |a \times b - 0 \times 0| = |a \times b| = ab$$

car a et b sont positifs. De plus Δ se transforme en le domaine D definie comme suit

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u^2 + v^2 \leq 1\}.$$



On se retrouve a calculer l'aire du disque centre en l'origine et de rayon 1. On alors d'apres le theoreme precedent

$$\iint_{\Delta} dx dy = \iint_D J(u,v) du dv = ab \iint_D du dv = \pi ab$$

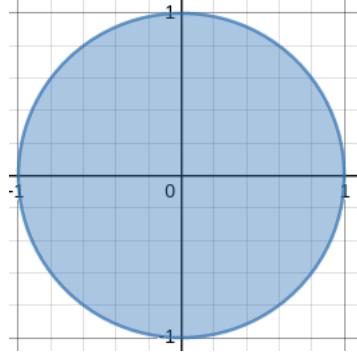
Exemple 7.

Considerons l'integrale

$$I = \iint_{\Delta} x^2 dx dy$$

avec

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



On a une symetrie par rapport au axes des abscisses et ordonnees.

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} x^2 dx dy &= 2 \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $x = \cos(t)$. On a alors $dx = -\sin(t) dt$.

- pour $x = 0$ on a $t = \frac{\pi}{2}$.
- pour $x = 1$ on a $t = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sqrt{1 - \cos^2(t)} \sin(t) dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t) dt \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Cas des coordonnées polaires

Considerons l'intégrale

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

et le changement de variables en coordonnées polaires

$$(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Pour exprimer l'intégrale en termes de la fonction $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, il faut exprimer D et le produit $dx dy$ en termes de (r, θ) .

- Le domaine D se transforme en le domaine

$$\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in D\}.$$

- Les éléments dx et dy se transforment comme

$$dx dy = r dr d\theta.$$

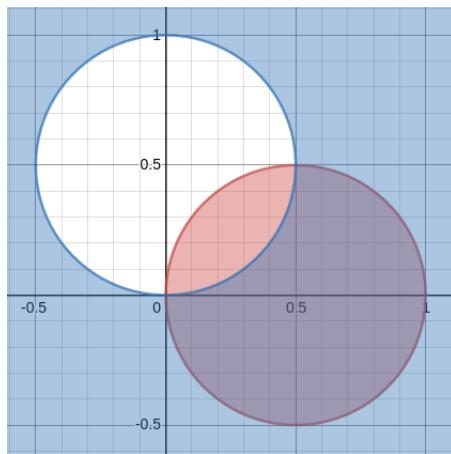
Exemple 8.

Calculons

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

avec

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - x \leq 0, x^2 + y^2 - y \geq 0, y \geq 0\}.$$



On effectue un changement de variable en coordonnées polaires donc

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad \text{et} \quad dx \ dy = r \ dr \ d\theta.$$

Le domaine D devient

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x &\leq 0 \Leftrightarrow r^2 - r \cos(\theta) \leq 0 \Leftrightarrow r - \cos(\theta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 - y &\geq 0 \Leftrightarrow r^2 - r \sin(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow r - \sin(\theta) \geq 0 \\ y &\geq 0 \Leftrightarrow r \sin(\theta) \geq 0 \end{aligned}$$

Avec les deux premières inégalités nous pouvons écrire

$$\sin(\theta) - \cos(\theta) \leq 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) \leq \cos(\theta).$$

On a alors

$$\sin(\theta) \leq r \leq \cos(\theta) \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

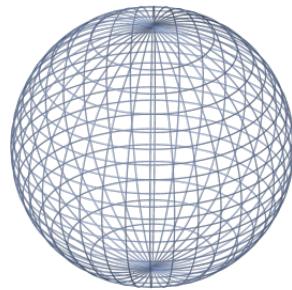
Donc

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2) \ dx \ dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} r^2 \ r \ dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} r^3 \ dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta \\ I &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

1.6 Application au calcul du volume d'une boule

Volume de la boule en coordonnées cartesiennes

Le volume de la boule $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

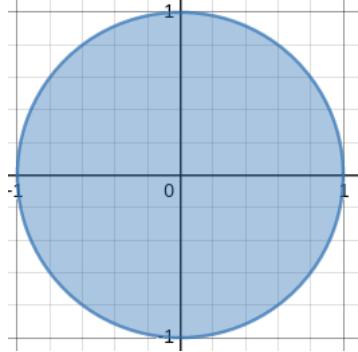


est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\},$$

comprise entre le plan xOy et le graphe de la fonction $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. On a alors

$$\text{Vol}(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ dx \ dy, \quad \text{où} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



On peut décrire D comme l'ensemble

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \right\},$$

donc on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy \\ &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} dy. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$, on a

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \implies -1 \leq \sin t \leq 1 \implies -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

et

$$\frac{y^2}{1-x^2} = \sin^2 t \implies \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a également

$$y = \sqrt{1-x^2} \sin t \implies dy = \sqrt{1-x^2} \cos t dt.$$

En sachant que $2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \pi$, on a alors

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= 2 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \\ \text{Vol}(B) &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Volume de la boule en coordonnées polaires.

Pour $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, calculons

$$\text{Vol}(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy, \quad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

avec le changement de variables en coordonnées polaires,

$$(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Puisque

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

on a

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - \rho^2}$$

et

$$(\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[.$$

En sachant que

$$dx dy = \rho d\rho d\varphi$$

et en utilisant le théorème de Fubini pour séparer les variables, on a

$$\text{Vol}(B) = 2 \iint_{[0,1] \times [0,2\pi[} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\varphi = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

L'intégrale en φ est simple

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Pour l'autre, si on pose $t = 1 - \rho^2$ on a

$$\begin{aligned} \rho = 0 &\implies t = 1 \quad \text{et} \quad \rho = 1 \implies t = 0, \\ \sqrt{1 - \rho^2} &= \sqrt{t} = t^{1/2}, \\ dt = -2\rho d\rho &\implies \rho d\rho = -\frac{1}{2} dt, \end{aligned}$$

et on obtient enfin

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= -\frac{2}{2} 2\pi \int_1^0 t^{1/2} dt \\ &= 2\pi \int_0^1 t^{1/2} dt \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \frac{2}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ \text{Vol}(B) &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

2 Intégrales triples

2.1 Calculs d'une intégrale triple sur un compact élémentaire

Sommation par pile

On appelle compact de \mathbb{R}^3 toute partie fermée et bornée de \mathbb{R}^3 . On appelle compact élémentaire de \mathbb{R}^3 toute partie Δ de \mathbb{R}^3 pouvant être définie par :

Définition 5 (Sommation par pile).

Pour $(x, y, z) \in \Delta_1$, avec ce domaine défini comme

$$\Delta_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \quad \text{et} \quad u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$$

on a

$$\iiint_{\Delta_1} f = \int \int_{\Delta_1} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Cas particulier.

Soit f une fonction positive et continue sur D . L'intégrale

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

est le volume de

$$\Delta_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ et } u(x, y) \leq z \leq v(x, y) \right\}$$

or

$$f(x, y) = \int_0^{f(x, y)} 1 dz$$

donc le volume de Δ_1 est

$$\iiint_{\Delta_1} 1 dx dy dz.$$

Sommation par tranche

On appelle compact de \mathbb{R}^3 toute partie fermée et bornée de \mathbb{R}^3 . On appelle compact élémentaire de \mathbb{R}^3 toute partie Δ de \mathbb{R}^3 pouvant être définie par :

Définition 6 (Sommation par tranche).
 $(x, y, z) \in \Delta_1$, avec ce domaine défini comme

$$\Delta_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, (x, y) \in D_z \right\},$$

on a

$$\iiint_{\Delta_2} f = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

2.2 Théorème de Fubini

Théorème 4 (Théorème de Fubini (1)).
Si

$$\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$$

est un parallélépipède, alors

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz f(x, y, z)$$

dans l'ordre qu'on veut.

Exemple 9.

$$\begin{aligned}
 \iiint_{[0,1] \times [1,2] \times [2,3]} (x^2 - 2yz) \, dx \, dy \, dz &= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx (x^2 - 2yz) \\
 &= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz \right) \\
 &= \int_2^3 \left[\frac{1}{3}y - y^2 z \right]_{y=1}^{y=2} dz \\
 &= \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z \right) dz \\
 &= \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z \right) dz \\
 &= \left[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2 \right]_2^3 \\
 &= \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \\
 &= -\frac{43}{6}
 \end{aligned}$$

Théorème 5 (Theoreme de Fubini (2)).

Si

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)], z \in [e(x, y), g(x, y)] \right\}$$

est un ensemble borné quelconque, alors

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x, y)}^{g(x, y)} dz f(x, y, z)$$

(ordre forcé).

Exemple 10.

Si Ω est le cylindre plein, de base le disque

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0 \right\}$$

et de hauteur 3, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3 \right\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-1, 1], y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}], z \in [0, 3] \right\}
 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} (1 - 2yz) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1 - 2yz) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - 2yz) \, dy \\
 &= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 [y - y^2 z]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z) \, dx \\
 &= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} \, dx \\
 &= 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t \, dt \\
 &= 3\pi
 \end{aligned}$$

2.3 Changement de variables

Considerons l'intégrale

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

et un changement de variables

$$(x, y, z) = (a(u, v, w), b(u, v, w), c(u, v, w)).$$

Pour exprimer l'intégrale en termes de la fonction

$$g(u, v, w) = f(a(u, v, w), b(u, v, w), c(u, v, w))$$

, il faut exprimer D et le produit $dx \, dy \, dz$ en termes de (u, v, w) .

- Le domaine D se transforme en le domaine

$$\Delta = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) = (a(u, v, w), b(u, v, w), c(u, v, w)) \in D\}.$$

- Les éléments dx, dy et dz se transforment comme

$$dxdydz = |\det(J(u, v, w))| \, dudvdw$$

où $\det(J(u, v, w))$ est le déterminant de la matrice Jacobienne

$$J(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

On arrive finalement au théorème suivant.

Théorème 6 (Changement de variables).

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} g(u, v, w) \, |\det(J(u, v, w))| \, du \, dv \, dw.$$

Théorème 7 (Changement de variables en coordonnées cylindriques).

Si

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

alors $dx dy dz$ devient $r dr d\theta dz$

Exemple 11.

Calculons

$$I = \iint_D \int f(x, y, z) dx dy dz$$

où

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

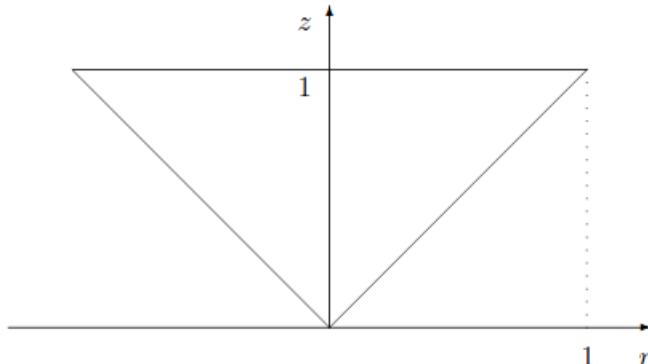
et

$$f(x, y, z) = |xyz|$$

Le domaine D est invariant par rotation d'axe Oz . On utilise les coordonnées cylindriques.

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz .



Le cône d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = z^2$$

a pour équation cylindrique $r = z$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \{(r, t, z) \mid 0 \leq r \leq z \leq 1, -\pi \leq t \leq \pi\}$$

et

$$f(r \cos t, r \sin t, z) = r^2 |\cos t \sin t| z = \frac{r^2}{2} |\sin 2t| z.$$

Donc

$$I = \iiint_{\Delta} f(r \cos t, r \sin t, z) r dr dt dz = \iiint_{\Delta} \frac{r^3}{2} |\sin 2t| z dr dt dz.$$

Lorsque (z, t) est fixé dans $\Delta_1 = [0, 1] \times [-\pi, \pi]$, la variable r est comprise entre 0 et z . On calcule tout d'abord

$$I_r(z, t) = \int_0^z \frac{r^3}{2} |\sin 2t| z dr = \left[\frac{r^4}{8} |\sin 2t| z \right]_{r=0}^{r=z} = \frac{z^5}{8} |\sin 2t|.$$

Alors

$$I = \iint_{\Delta_1} I_r(z, t) dz dt.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin 2t| dt \right) \left(\int_0^1 \frac{z^5}{8} dz \right)$$

Comme la fonction qui à t associe $|\sin 2t|$ est de période $\pi/2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin 2t| dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = [-2 \cos 2t]_0^{\pi/2} = 4$$

Par ailleurs,

$$\int_0^1 z^5 dz = \frac{1}{6}$$

d'où

$$I = \frac{1}{12}$$

Théorème 8 (Changement de variables en coordonnées sphériques).

Si

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

$dx dy dz$ devient $r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$

Exemple 12.

Calculons

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

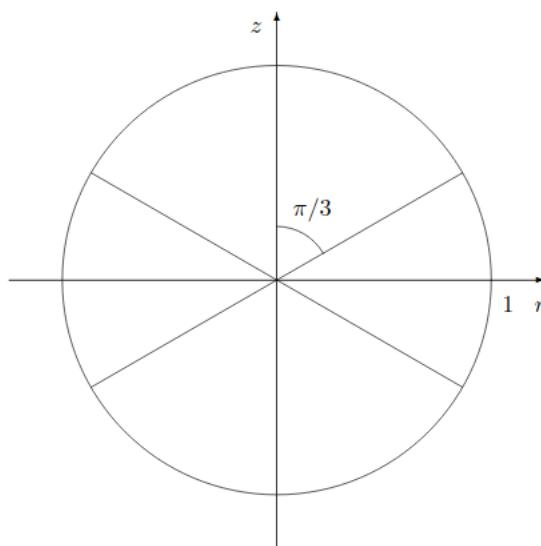
où D est le domaine intérieur à la sphère de centre O et de rayon 1 , et extérieur au cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle au sommet $\pi/3$, et

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

Le dessin suivant représente une coupe suivant (Oz) de D



On intègre sur le domaine

$$\Delta =]0, 1] \times [0, 2\pi] \times \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

et

$$f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) = \sin^2 \varphi$$

Alors

$$I = \iiint_{\Delta} f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \iiint_{\Delta} \rho^2 \sin^3 \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^3 \varphi d\varphi \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[\frac{1}{12} \cos(3\varphi) - \frac{3}{4} \cos(\varphi) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{2}{12} + \frac{3}{4} \right) \\ I &= \frac{11\pi}{18} \end{aligned}$$

3 Applications

Si D est un domaine borné de \mathbb{R}^2 , l'intégrale

$$\iint_D dx dy$$

représente le volume de la portion d'espace comprise entre le graphe de la fonction constante $f(x, y) = 1$ et le plan xOy . Ce solide est un cylindre de hauteur 1 et de base D , son volume est donc égal à l'aire de D multipliée par la hauteur, qui vaut 1.

Proposition 2 (Aire).

Soit D un domaine borné de \mathbb{R}^2 .

- En général, on a

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy.$$

- Si D est la portion du plan comprise entre l'axe Ox et le graphe d'une fonction positive

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

c'est-à-dire si

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)] \},$$

alors on a :

$$\text{Aire}(D) = \int_a^b f(x) dx.$$

En effet, si

$$D = \{ (x, y) \mid x \in [a, b], y \in [0, f(x)] \},$$

on a

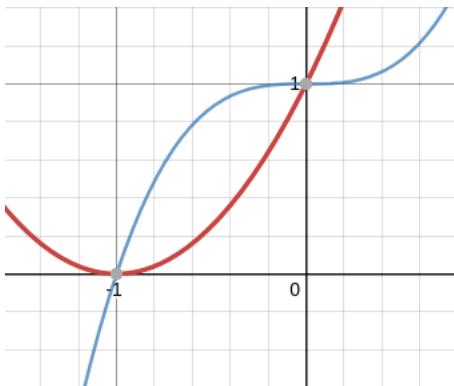
$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy dx = \int_a^b \left(\left[y \right]_0^{f(x)} \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Exemple 13.

Calculons l'aire du domaine D de \mathbb{R}^2 délimité par les courbes d'équation

$$y = x^2 + 2x + 1 \quad \text{et} \quad y = x^3 + 1.$$

D'abord on dessine le domaine D : la courbe $y = x^3 + 1$ n'est rien d'autre que $y = x^3$ translaté vers le haut de 1, et la courbe $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ est une parabole orientée vers le haut et centrée au point $x + 1 = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire au point $(-1, 0)$. Les deux courbes se rencontrent aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.



On a donc

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, x^2 + 2x + 1 \leq y \leq x^3 + 1\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \iint_D dx dy = \int_{-1}^0 \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy dx = \int_{-1}^0 \left(\left[y \right]_{x^2+2x+1}^{x^3+1} \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 \\ \text{Aire}(D) &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Exemple 14.

Calculons l'intégrale

$$\iint_D (x^2 - 2y) dx dy,$$

où D est le domaine de l'exercice précédent.

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - 2y) dx dy &= \int_{-1}^0 \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} (x^2 - 2y) dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[x^2y - y^2 \right]_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(x^2(x^3 + 1) - (x^3 + 1)^2 - x^2(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1)^2 \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(-x^6 + x^5 + 6x^2 + 4x \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + 2x^3 + 2x^2 \right]_{-1}^0 \\ \iint_D (x^2 - 2y) dx dy &= \frac{13}{42} \end{aligned}$$

Proposition 3 (Volume).

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 .

- En général, on a
- Si Ω est la portion d'espace comprise entre le plan xOy et le graphe d'une fonction positive

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

c'est-à-dire si

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z \in [0, f(x, y)] \},$$

alors on a

$$\text{Vol}(\Omega) = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

En effet, si

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z \in [0, f(x, y)] \},$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz \\ &= \iint_D \left(\int_0^{f(x,y)} dz \right) dx \, dy \\ &= \iint_D \left(\left[z \right]_0^{f(x,y)} \right) dx \, dy \\ \text{Vol}(\Omega) &= \iint_D f(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Exemple 15 (Volume de la boule en coordonnées sphériques).

En coordonnées sphériques, la boule

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

devient

$$B' = \{ (r, \varphi, \theta) \mid r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi[, \theta \in [0, \pi] \},$$

et, puisque

$$dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta,$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= \iiint_B dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi[\times [0,\pi]} r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} 2\pi \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \\ \text{Vol}(B) &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Proposition 4 (Quantités totale et moyenne).

Si $f \geq 0$ denote la concentration d'une matière (densité volumique) dans un volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ou la densité d'un courant ou d'une énergie, alors

la quantité totale de matière / courant présente en Ω est égale à

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

la quantité moyenne de matière / courant présente en Ω est égale à

$$\frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Exemple 16.

Un matériau est distribué dans le cube $\Omega = [0, R]^3$ selon la densité volumique

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{(z + 1)^2}.$$

La quantité totale du matériau est alors

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^R \left(\int_0^R (x + y) \left(\int_0^R \frac{1}{(z+1)^2} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^R \left(\int_0^R (x + y) \left(\left[-\frac{1}{z+1} \right]_0^R \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^R \left(\int_0^R (x + y) \left(\frac{-1}{R+1} + 1 \right) dy \right) dx \\ &= \frac{R}{R+1} \int_0^R \left(\left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^R \right) dx = \frac{R}{R+1} \int_0^R \left(Rx + \frac{1}{2}R^2 \right) dx \\ &= \frac{R}{R+1} \left[\frac{1}{2}Rx^2 + \frac{1}{2}R^2x \right]_0^R = \frac{R}{R+1} \left(\frac{1}{2}R^3 + \frac{1}{2}R^3 \right) \\ \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \frac{R^4}{R+1}. \end{aligned}$$

et puisque $\text{Vol}(\Omega) = R^3$, le volume moyen du matériau dans le cube est

$$\frac{1}{\text{Vol}(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{R^3} \frac{R^4}{R+1} = \frac{R}{R+1}.$$

Proposition 5 (Centre de masse).

Si $\mu \geq 0$ denote la densité de masse, et $r(x, y, z)$ denote la distance d'un point (x, y, z) depuis un point fixe P ou une droite fixe Δ , alors

La masse totale : présente en Ω est

$$M = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Le centre de masse : (ou centre d'inertie, ou encore baricentre) est le point G de coordonnées (x_G, y_G, z_G) telles que

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dx dy dz \\ y_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \mu(x, y, z) dx dy dz \\ z_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \mu(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

Le moment d'inertie par rapport à P ou à Δ est

$$\frac{1}{M} \iiint_{\Omega} r^2(x, y, z) \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Un matériau est **homogène** si sa densité de masse est constante. Si cette constante n'est pas spécifiée, on peut supposer que $\mu(x, y, z) = 1$ pour tout (x, y, z) .

Exemple 17.

Trouvons le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, z \in [0, H], y \geq 0 \}.$$

Il convient de travailler en coordonnées cylindriques

$$\Omega' = \{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R], \varphi \in [0, \pi], z \in [0, H] \}.$$

La masse totale est alors

$$M = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H dz = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

Puisque

$$\int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = [\sin \varphi]_0^\pi = 0,$$

et

$$\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = [-\cos \varphi]_0^\pi = 2,$$

le centre de masse G a coordonnées cartesiennes

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega'} \rho \cos \varphi \rho d\rho d\varphi dz \\ &= \frac{1}{M} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^H dz = 0 \\ y_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \frac{1}{M} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \frac{R^3}{3} 2 H = \frac{4R}{3\pi} \\ z_G &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \frac{1}{M} \int_0^R \rho d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H z dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \frac{R^2}{2} \pi \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2} \end{aligned}$$

donc

$$G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2} \right).$$

Exemple 18.

Un sac de farine tombe par terre et la farine s'éparpille au sol avec une concentration non homogène

$$f(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2} + 1)^2}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculons les quantités totale et moyenne de farine éparpillée dans le disque de rayon $R > 0$ autour du sac. La fonction f se simplifie en coordonnées polaires, car on a

$$f(\rho, \varphi) = \frac{1}{(\rho + 1)^2}$$

et le disque en coordonnées polaires est

$$D_R = \{ (\rho, \varphi) \mid \rho \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi[\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \text{Quantité totale} &= \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2} \rho \, d\rho \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) d\rho \\
 &= 2\pi \left[\ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1} \right]_0^R \\
 &= 2\pi \left(\ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - \ln(1) - 1 \right) \\
 \text{Quantité totale} &= 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Aire}(D_R) = \iint_{D_R} \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{Quantité moyenne} &= \frac{1}{\text{Aire}(D_R)} \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2} \rho \, d\rho \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{\pi R^2} 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right) \\
 \text{Quantité moyenne} &= \frac{2}{R^2} \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right)
 \end{aligned}$$

Exemple 19.

Calculons le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B et du cylindre C suivants

$$\begin{aligned}
 B &= \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [\pi/2, \pi] \right\} \\
 C &= \left\{ (\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, R] \right\},
 \end{aligned}$$

ayant densité de masse $\mu(x, y, z) = z^2$. La masse totale de Ω est

$$M_\Omega = M_B + M_C$$

avec $\mu(x, y, z) = r^2 \cos^2 \theta$ sur B . On a donc

$$\begin{aligned}
 M_B &= \iiint_B r^2 \cos^2 \theta \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \int_0^R r^4 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \\
 &= \frac{R^5}{5} 2\pi \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_{\pi/2}^\pi = \frac{2\pi R^5}{15} \\
 M_C &= \iiint_{C_R} z^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^2 \, dz = \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{\pi R^5}{3} \\
 M_\Omega &= M_B + M_C = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3} \right) \pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}.
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 0,$$

les coordonnées cartesiennes du baricentre G de Ω sont

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dx dy dz \\&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^R z^2 dz \\x_G &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 dr \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R z^2 dz \\y_G &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_{\Omega} z^3 dx dy dz \\&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \\&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^3 dz \\&= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6} 2\pi \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \theta \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{R^4}{4} \right) \\&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\&= \frac{15R^3}{7} \frac{-1+3}{12} \\z_G &= \frac{5R^3}{14}.\end{aligned}$$

En conclusion, le baricentre

$$G = \left(0, 0, \frac{5R^3}{14} \right)$$

se trouve dans la partie cylindrique, car

$$\frac{5R^3}{14} > 0.$$

À noter que le baricentre se trouve à l'intérieur de Ω seulement si

$$\frac{5R^3}{14} \leq R,$$

ce qui se vérifie si

$$R \leq \sqrt{14/5}.$$

4 Exercices

Exercice 1

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le rectangle de sommets $O, A(\pi, 0), B(0, 1), C(\pi, 1)$ et

$$f(x, y) = 2y \sin x.$$

[09.0002]

Exercice 2

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le triangle de sommets $O, A(1, 0), B(1, 1)$ et

$$f(x, y) = x - y$$

[09.0003]

Exercice 3

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le triangle de sommets $O, A(1, 0), B(0, 1)$ et

$$f(x, y) = x^2 y$$

[09.0005]

Exercice 4

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le triangle de sommets $O, A(2, 0), B(0, 2)$ et

$$f(x, y) = x e^x \sin y$$

[09.0006]

Exercice 5

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le triangle de sommets $A(1, 0), B(0, 1), C(0, -1)$ et

$$f(x, y) = x + 2y.$$

[09.0001]



istom

Ecole
supérieure
d'agro-
développement
international



Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur [Google Play](#) et l'[App Store](#).



Etudiez en musique !





Ecole
supérieure
d'agro-
développement
international



Étudiant(e) (Nom, Prénom) :

Promotion, groupe :

Email :

Auteurs de ces notes de cours

Cours et exercices rédigés par [Antoine Géré](#).

Relu par (**coming soon**).