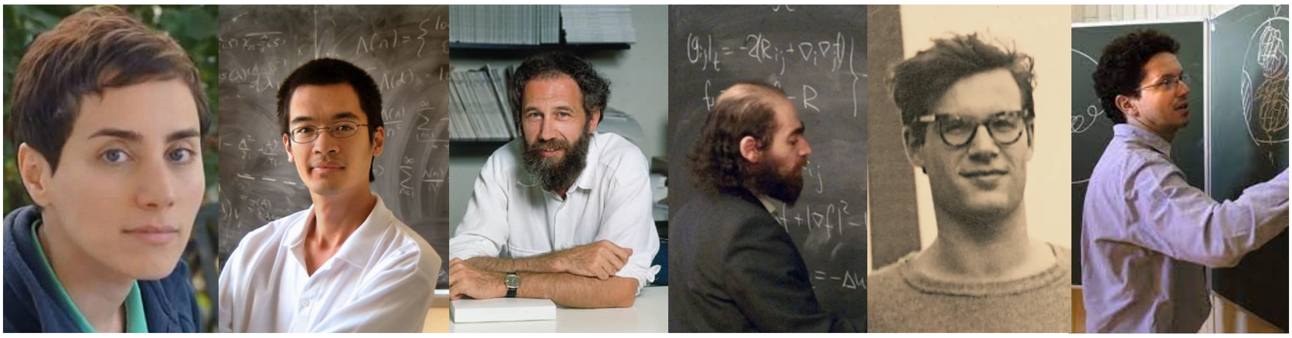
Fonctions à une variable réelle

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Table des matières

[1] version du 20 janvier 2025

1 Rappels

On rappelle les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les formules générales de dérivation. Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathcal{D}, f(x)$ est l'image de x par f, c'est un réel. On note

$$\begin{aligned} f: \quad \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ existe } \}$$

On dit que $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f. Pour déterminer $\mathcal{D}$ il suffit de savoir répondre à la question suivante :
Pour quelles valeurs de x, ai-je le droit de calculer $f(x)$? Ai-je le droit tout le temps (pas de contrainte), dans ces conditions $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ou existe-t-il des valeurs interdites et dans ces conditions le domaine de définition de f est une partie de $\mathbb{R}$ simplement.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout x de $I, f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout x de $I, f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
- Si , pour tout x de $I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Méthode : Détermination des variations d'une fonction

1. Calculer la dérivée de la fonction
2. Déterminer le signe de la dérivée
3. Dans un tableau de variations, regrouper le signe de la dérivée, les variations de la fonction et les valeurs d'images importantes.
4. Tracer la courbe de la fonction.

Une fonction f est :

- une fonction *paire* si $f(-x) = f(x)$,
- une fonction *impaire* si $f(-x) = -f(x)$,

pour tout x de son ensemble de définition.

Opération	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\exp(u)$	$u' \exp(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$

Voir les exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

2 Prolongement par continuité

Il arrive qu'une fonction soit définie partout sauf en un point, mais qu'on extrapole par passage à la limite la valeur plausible en ce point. On réalise alors un prolongement par continuité. Prenons un exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par

$$f(x) = \sin(x)/x$$

Alors la fonction f n'est pas définie en 0 , mais d'après une limite classique, la limite de f en 0 est 1 . Posons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \sin x / x & \text{si } \ x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

Alors g prolonge f (ces deux fonctions sont égales sur l'ensemble de définition de f) et est continue en 0. On appelle g le prolongement par continuité de f en 0 .

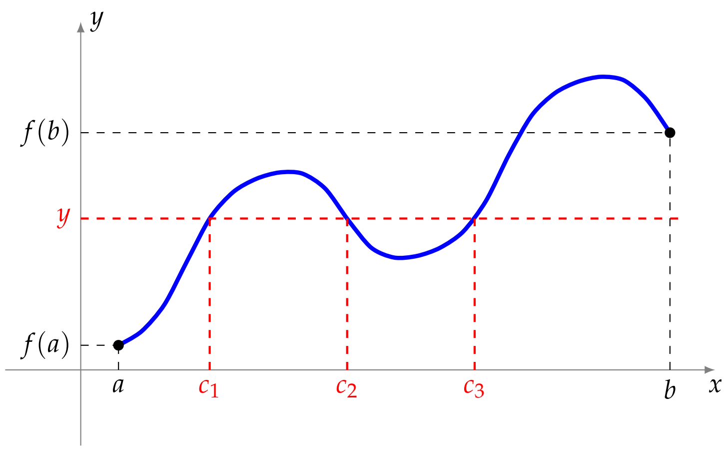
Voir les exercices 9 et 10.

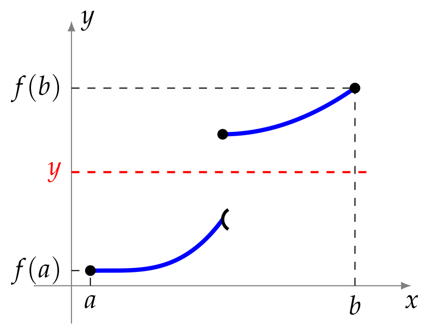
3 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas nécessairement unique. De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).





Voir exercice 11

4 Théorème de Rolle

Théorème 2 (Théorème de Rolle)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

- *f est continue sur $[a,b]$,*
- *f est dérivable sur $]a,b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = 0$$

Voir exercice 12

5 Théorème des accroissements finis

Théorème 3 (Théorème des accroissements finis).
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

- *f est continue sur $[a,b]$,*
- *f est dérivable sur $]a,b[$.*

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Voir exercice 13

6 Branches infinies

Étant donnée une fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'étude de ses branches infinies a pour objectif de comprendre en détails le comportement de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

6.1 Premier cas

Cette limite est finie :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

On conclue alors que la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ et l'étude est terminée.

Exemples :

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = xe^{-x}, \quad h(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+3}$$

6.2 Second cas

Cette limite est infinie :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

La fonction f n'admet alors pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ et l'on doit poursuivre l'étude pour étudier de plus près le comportement de $f(x)$ autour de $+\infty$. Intuitivement, le calcul de

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

nous dit dans ce cas là que $f(x)$ grandit quand x grandit. Les questions qui se pose à ce moment là sont : A quelle vitesse grandit $f(x)$? Grandit-elle plus vite ou moins vite que x ?

Là encore, un calcul de limite va pouvoir nous aider à répondre : pour comparer la croissance de $f(x)$ et celle de x, on calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Le comportement de la fonction f autour de $+\infty$ dépendra alors du type de réponse obtenu mais contrairement à tout à l'heure, on distingue ici trois types de réponses possibles (et non plus deux).

1. Soit
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$
Dans ce cas, $f(x)$ grandit moins vite que x. On dit que la courbe de f admet une branche parabolique d'axe (Ox).

   Exemples :
$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}-3}.$$

2. Soit
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$
Dans ce cas, $f(x)$ grandit plus vite que x. On dit que la courbe de f admet une branche parabolique d'axe (Oy).

   Exemples :
$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}$$

3. Soit
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$
. Dans ce cas, la vitesse de croissance de $f(x)$ est comparable à celle de ax quand x grandit. Pour effectuer cette comparaison, on étudie une dernière limite : celle de la différence $f(x) - ax$ et on distingue deux cas :

   (a) Soit
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$$
et la courbe de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique.

   Exemples :
$$f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+4}, \quad g(x) = x\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1}\right), \quad h(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

   (b) Soit
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$$
et la courbe de f admet une branche parabolique de direction $y = ax$.

   Exemples :
$$f(x) = x + \sqrt{x}, \quad g(x) = x\left(\frac{2\ln x + 1}{\ln x}\right).$$

Voir exercice 14

7 Exercices

Exercice 1

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$. On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe représentative de f.

Correction ▼ [11.0001]

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, par

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

On note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1 .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Que peut-on en déduire pour $\left(\mathcal{C}_f\right)$?
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{x}{x - 1}$$
.
4. En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour $\left(\mathcal{C}_f\right)$ en $+\infty$.
5. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Correction ▼ [11.0001]

Exercice 3

On donne la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 3}$$

, et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de $\left(\mathcal{C}_f\right)$. Dans la suite de l'exercice, la fonction f sera étudiée sur $[-1;1[\cup]1;+\infty[$.
3. Déterminer les limites en 1 et la limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\left(\mathcal{C}_f\right)$?
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Correction ▼ [11.0001]

Exercice 4

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$, et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine, en déduire l'existence d'une asymptote horizontale (Δ) pour $\left(\mathcal{C}_f\right)$.
3. Étudier les positions relatives de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et de (Δ).
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Correction ▼ [11.0004]

Exercice 5

On donne la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$$

et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) Justifier l'équivalence : $x \geqslant 3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 27$.
   (b) Calculer la fonction dérivée de f.
   (c) Étudier le signe de f'.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer la courbe représentative de f.

Correction ▼ [11.0005]

Exercice 6

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x$$
et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que f est 2π-périodique.
   (b) Montrer que f est paire.
2. (a) Montrer que la fonction dérivée de f s'écrit : $f'(x) = 2\sin x(1-2\cos x)$.
   (b) Étudier le signe de f' sur $[0;\pi]$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
4. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sur un intervalle de longueur 4π.

Correction ▼ [11.0006]

Exercice 7

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{\sin x}{1-\sin x}$$
et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est définie ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est 2π-périodique.

Pour la suite de l'exercice, on étudiera la fonction sur l'intervalle $]-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

3. Déterminer les limites de f en :
   (a) $-\frac{3\pi}{2}$ par valeurs supérieures,
   (b) $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures,
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f
6. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sur $]-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}[$.

Correction ▼ [11.0007]

Exercice 8

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x - \sqrt{|x-1|}$ et on note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de f sans valeur absolue sur $[1;\infty[$ et sur $]-\infty;1]$.
2. Étudier la dérivabilité de f en 1 .
3. Étudier la fonction sur $]-\infty;1]$.
4. Étudier la fonction sur $[1;+\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

Correction ▼ [11.0009]

Exercice 9 Prolongement par continuité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par

$$f(x)=\frac{1+x}{x^3+1}$$

Démontrer qu'on peut prolonger f par continuité en $-\mathbf{1}$. Préciser la valeur prise en $-\mathbf{1}$ par ce prolongement.

Correction ▼ [11.0012]

Exercice 10 Prolongement par continuité et limites usuelles

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier ?

1. $f(x)=\exp\left(-1/x^2\right)$ si $x\neq 0$
2. $g(x)=\exp(-1/x)$ si $x\neq 0$
3. $h(x)=\sin(x+1)\ln|1+x|$ si $x\neq -1$.

Correction ▼ [11.0013]

Exercice 11 Combien de solutions ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2-1$. Discuter, suivant la valeur de $a\in\mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=a$.

Correction ▼ [11.0014]

Exercice 12

Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$, montrer que

$$4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$$

Indication ▼ [11.0015]

Exercice 13

1. Montrer que pour tout x,y réels on a :

$$|\sin(x)-\sin(y)|\leq|x-y|$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Correction ▼ [11.0045]

Exercice 14

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes, et tracer une allure de leur courbe représentative (on essaiera d'étudier les variations également quand c'est possible) :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$
3. $f_3(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$
4. $f_4(x) = \sqrt{x} + \ln x$
5. $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$
6. $f_6(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$

Correction ▼ [11.0077]

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x+1}$$

1. Étude de la parité.

   Déterminez si la fonction f est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

2. Étude des asymptotes.

   Déterminez les asymptotes éventuelles de la fonction f.

3. Prolongement par continuité.

   (a) Déterminez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .

   (b) Proposez un prolongement par continuité de f en $x = -1$ et définissez une fonction g continue sur $\mathbb{R}$.

4. Dérivée et tableau de variations

   (a) Calculez la dérivée $g'(x)$ de la fonction prolongée g.

   (b) Déterminez les points critiques de g et établissez le tableau de variations de g.

5. Théorème des valeurs intermédiaires.

   Montrez que l'équation $g(x) = 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 8]$.

6. Théorème de Rolle.

   Vérifiez si les conditions du théorème de Rolle sont satisfaites sur l'intervalle $[0, 8]$ pour la fonction g et, si c'est le cas, trouvez une valeur de c dans $[0, 8]$ telle que $g'(c) = 0$.

7. Théorème des accroissements finis.

   Appliquez le théorème des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[1, 3]$ et trouvez une valeur de $c \in [1, 3]$ telle que :

   $$g'(c) = \frac{g(3) - g(1)}{3 - 1}$$

Correction ▼ [11.0000]

Exercice 16

On considère la fonction f définie comme
$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 3}{2x^3 - x - 1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de la fonction f.
3. Parité de la fonction.
   Déterminer si la fonction f est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre.
4. Étude des asymptotes.
   (a) Déterminer les asymptotes verticales de la fonction f.
   (b) Déterminer les branches infinies de f.
5. Dérivée et étude des variations.
   (a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de f.
   (b) Étudier les variations de f.
6. Application du théorème des valeurs intermédiaires.
   Vérifier si la fonction f satisfait les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires de sorte à pouvoir prouver l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle Vous déterminerez le nombre de solutions à cette équation.
7. Théorème de Rolle.
   (a) Déterminer les intervalles $[a, b]$ où les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées pour f.
   (b) Trouver les valeurs de $c \in]a, b[$ telles que $f'(c) = 0$.
8. Théorème des accroissements finis.
   (a) Vérifier les hypothèses du théorème des accroissements finis sur un intervalle $[a, b]$.
   (b) Trouver une valeur de $c \in [a, b]$ telle que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Correction ▼ [11.0079]

Exercice 17

On considère la fonction f définie comme
$$f(x) = \cos(x)\, e^{-x^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de la fonction f.
3. Parité de la fonction.
   Déterminer si la fonction f est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre.
4. Étude des asymptotes.
   (a) Déterminer les asymptotes verticales de la fonction f.

(b) Déterminer les branches infinies de f.

5. Dérivée et étude des variations.

   (a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de f.

   (b) Étudier les variations de f.

6. Application du théorème des valeurs intermédiaires.

   (a) Vérifier si la fonction f satisfait les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires de sorte à pouvoir prouver l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle Vous déterminerez le nombre de solutions à cette équation.

7. Théorème de Rolle.

   (a) Déterminer les intervalles $[a, b]$ où les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées pour f.

   (b) Trouver les valeurs de $c \in]a, b[$ telles que $f'(c) = 0$.

8. Théorème des accroissements finis.

   (a) Vérifier les hypothèses du théorème des accroissements finis sur un intervalle $[a, b]$.

   (b) Trouver une valeur de $c \in [a, b]$ telle que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

[11.0080]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$. (On peut aussi dire que le domaine de définition est centré en 0 .)
   soit $x \in \mathbb{R}, f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -x^4 + 2x^2 + 1 = f(x)$, donc f est paire

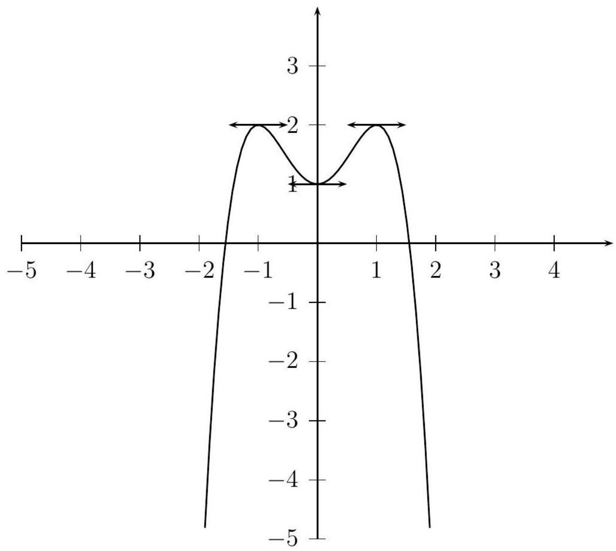
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$ et par symétrie : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x\left(1 - x^2\right)$. D'une part $4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$, d'autre part $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1;1]$ (règle du signe du trinôme), ce qui donne :

4.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

5.



Dans un graphique doivent apparaître toutes les droites dont il a été question dans le sujet, auquel s'ajoutent les tangentes horizontales.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Le domaine de définition est centré en 1 , de plus pour tout $h \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[f(1+h)+f(1-h)] &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+h)^2+(1+h)+1}{1+h-1} + \frac{(1-h)^2+(1-h)+1}{1-h-1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3+3h+h^2}{h} + \frac{3-3h+h^2}{-h}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3+3h+h^2-3+2h-h^2}{h}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{6h}{h} = 3\end{aligned}$$

Donc le point Ω de coordonnées $(1;3)$ est centre de symétrie de $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

2. • $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et par symétrie, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

- $\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$ et $\lim_{x\to 1} x-1=0^+$, donc $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$, et par symétrie : $\lim_{x\leq 1} f(x)=-\infty$.

3. Pour tout $x\neq 1$,

$$ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}=\frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$$

, en identifiant le numérateur de cette fraction avec celui de $f(x)$, on obtient : $\begin{cases} a=1 \\ b-a=1 \\ c-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$,

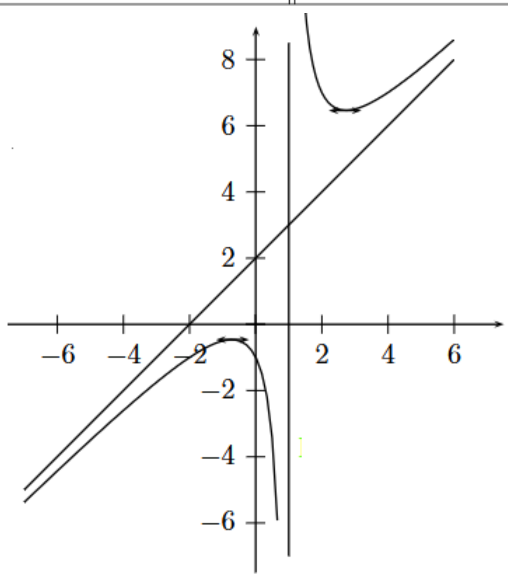
donc $f(x)=x+2+\frac{3}{x-1}$.

4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-1}=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2))=0$ et la droite $(\ d\ )$ d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
Puisque $\Omega\in(d)$, nous pouvons déduire que (d) est aussi asymptote à $\left(\mathcal{C}_f\right)$ en $-\infty$.

5. Pour $x\neq 1, f$ est dérivable comme quotient de deux polynômes, et :
$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.
Pour tout $x\neq 1, (x-1)^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe de x^2-2x-2, polynôme ayant pour racines $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$ qui, d'après la règle du signe du trinôme est positif ssi $x\in]-\infty;1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3};+\infty[$.

6.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$3+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$



Correction de l'exercice 3 ▲

1. f est définie ssi $x^2+2x-3\neq 0$ ssi $x\neq 1$ et $x\neq -3$, donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$.

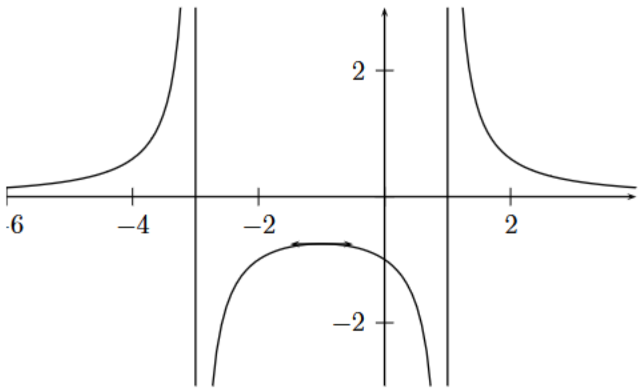
2. $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 1 , et pour tout $h\neq\pm 2$, on a :
$f(-1+h)=\frac{3}{(-1+h)^2+2(-1+h)-3}=\frac{3}{h^2-4}$,
et $f(1+h)=\frac{3}{(1+h)^2+2(1+h)-3}=\frac{3}{h^2-4}$.
Donc $f(-1+h)=f(-1-h)$ et la droite d'équation $x=-1$ est axe de symétrie de $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

3. - $\lim_{x \leq 1} x^2+2x-3 = 0^-$, donc $\lim_{x \leq 1} f(x) = -\infty$, d'autre part : $\lim_{x \to 1} x^2+2x-3 = 0^+$, donc $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
   $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
   Remarque : Le signe (0^+ou 0^-) est facile à déterminer ici, cela serait plus compliqué avec par exemple : $x^2 - 2x$.
   - $\lim_{x \to +\infty} x^2+2x-3 = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

4. f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $f'(x) = \frac{-3(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$. Le dénominateur étant strictement positif, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -3(2x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$. 5.

5.

x	-1			1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$		‖	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{4}$	↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	0



Correction de l'exercice 4 ▲

1. Le polynôme $x^2 - 2x + 2$ a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$, donc ce polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

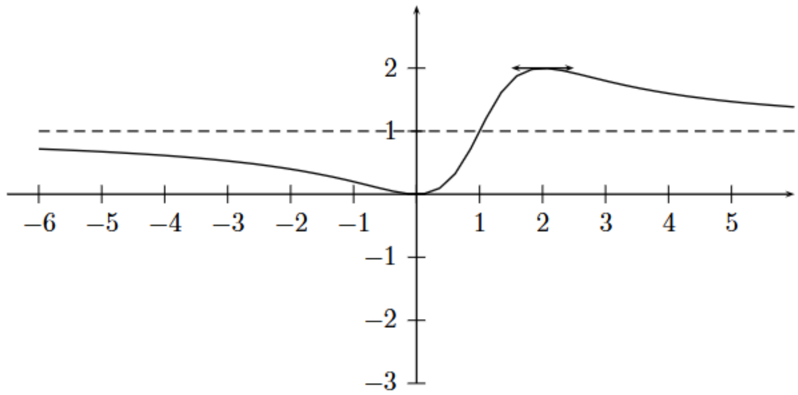
2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, de même $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, donc $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Pour étudier les positions relatives de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et de (Δ), j' 'étudie le signe de $f(x) - 1$. $f(x) - 1 = \frac{x^2}{x^2-2x+2} - 1 = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$, donc $f(x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. Donc $\left(\mathcal{C}_f\right)$ est au dessus de son asymptote sur $[1, +\infty[$ et elle est en dessous sur $]-\infty; 1]$.

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x\left(x^2-2x+2\right)-x^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2} = \frac{2x(2-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$. $\left(x^2-2x+2\right)^2$ étant strictement positif sur $\mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x(2-x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2]$.

5.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	2	↘	1



Correction de l'exercice 5 ▲

1. f est définie ssi $2x^2 \neq 0$ ssi $x \neq 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.

2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, de même $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0}\left(2x^3+27\right) = 27 \\ \lim_{x\to 0} 2x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty. \text{ (à gauche et à droite)}$$

3. Pour tout $x \neq 0, f(x) - x = \frac{2x^3+27}{2x^2} - x = \frac{27}{2x^2}$, or $\lim_{x\to+\infty} \frac{27}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{27}{2x^2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

4.

(a) La fonction $x \mapsto x^3$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $x \geqslant 3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 3^3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 27$.

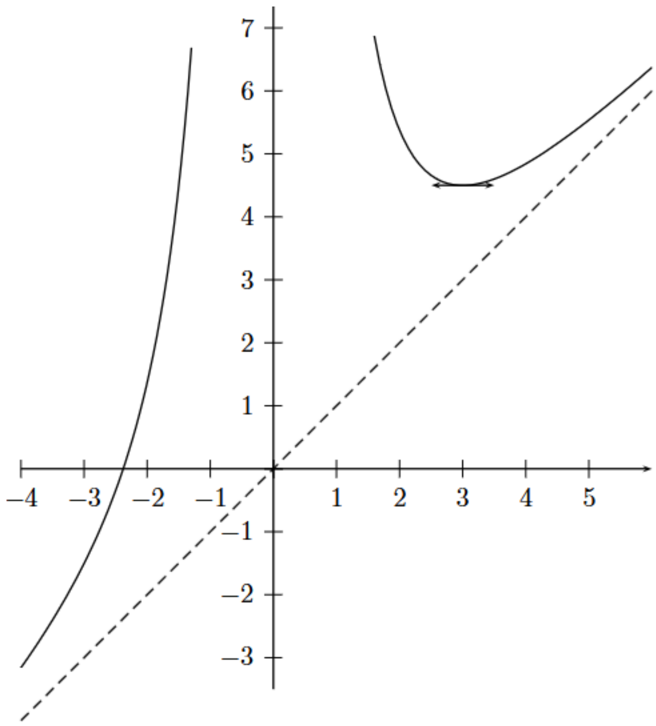
(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{6x^2 \times 2x^2 - \left(2x^3+27\right) \times 4x}{4x^4} = \frac{x\left(x^3-27\right) \times 4x}{x^4}$$

(c)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
x^3-27		$-$		$-$	0	$+$	
x^4		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

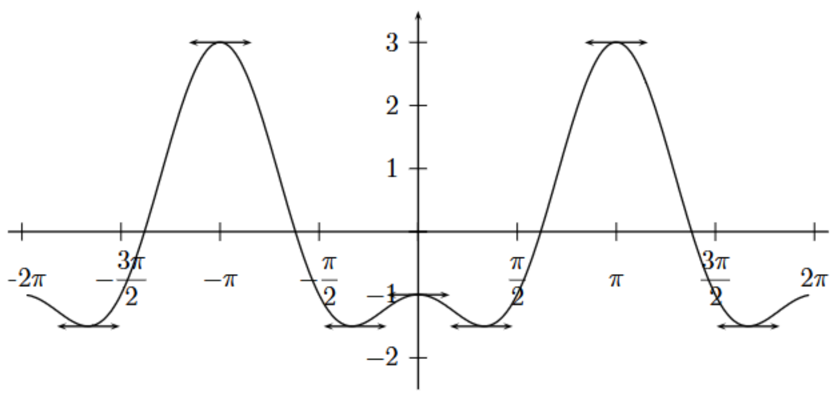
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	0



Correction de l'exercice 6 ▲

1. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, x+2\pi \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos 2x - 2\cos x = f(x)$, donc f est périodique, de période 2π.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \cos(-2x) - 2\cos(-x) = \cos(2x) - 2\cos x = f(x)$, donc f est paire.
2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x = -4\sin x\cos x + 2\sin x = 2\sin x(-2\cos x + 1)$.
   (b) Pour tout $x \in]0;\pi[, \sin x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-2\cos x$.
   Remarque : on a $f'(0) = f'(\pi) = 0$.
   Or, pour $x \in [0,\pi], 1-2\cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	3



Correction de l'exercice 7 ▲

1. f est définie ssi $1-\sin x \neq 0$ ssi $\sin x \neq 1$ ssi $x \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi, f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{1-\sin(x+2\pi)} = \frac{\sin x}{1-\sin x} = f(x)$, donc f est 2π-périodique.

3. (a) $\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}} 1-\sin x = 0^+$donc $\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}} f(x) = +\infty$

   (b) $\lim_{x\leq \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim_{x\leq \frac{\pi}{2}} 1-\sin x = 0^+$donc $\lim_{x\leq \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$

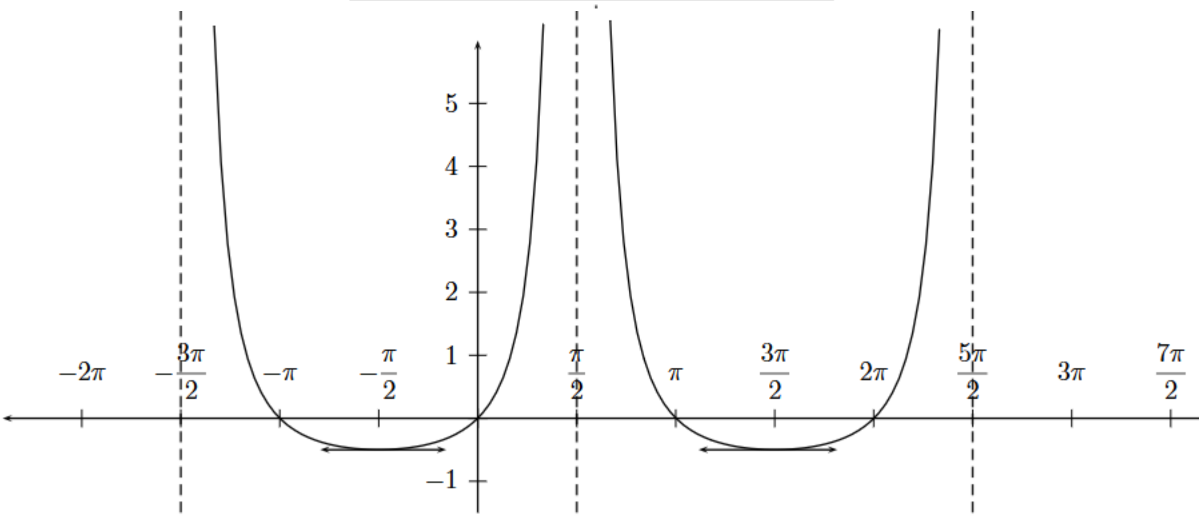
4. Pour tout $x \in]-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, f$ est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\cos x(1-\sin x)-\sin x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

$$(1-\sin x)^2 > 0, \text{ donc } f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right].$$

5.

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖



Correction de l'exercice 8 ▲

1. Sur $[1;\infty[, f(x) = x-\sqrt{x-1}$ et sur $]-\infty;1], f(x) = x-\sqrt{1-x}$.

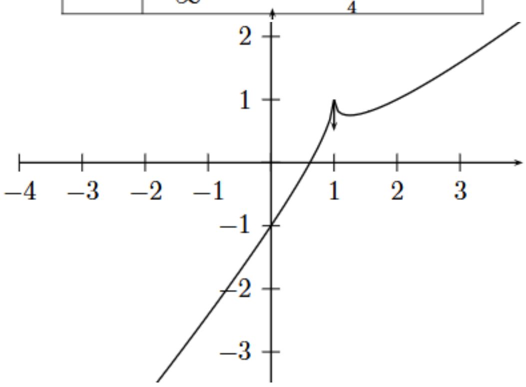
2. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} 1-\frac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty$.
   et $\lim_{x\leq 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\leq 1}\frac{x-\sqrt{1-x}-1}{x-1} = \lim_{x\leq 1} 1-\frac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x\leq 1} 1+\frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$.
   Donc f n'est pas dérivable en 1 .
   En fait, une seule de ces limites était suffisante, mais j'ai mis les deux pour que vous puissiez apprécier le changement de signe à la dernière étape de la deuxième limite.

3. Sur $]-\infty;1], f(x) = x-\sqrt{1-x}$. On a : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   Et $f'(x) = 1-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ qui est positif sur $]-\infty;1[$, donc f est croissante sur cet intervalle.

4. Sur $[1;+\infty[$, $f(x) = x - \sqrt{x-1}$. On a : $f(x) = x - \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = x\left(1 - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2} = x \text{ car } x > 0\right)$
   Or $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Et $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{1-x}}$.
   Pout tout $x \in]1;+\infty[$,
   $\sqrt{x-1} > 0$ et $2\sqrt{x-1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{5}{4}$.

5.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		1		$\frac{3}{4}$		$+\infty$



Correction de l'exercice 9 ▲

Le numérateur et le dénominateur s'annule tous les deux en -1, et donc on a une forme indéterminée lorsqu'on calcule la limite de f en -1. Pour lever cette indétermination, on factorise le dénominateur en

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$$

pour trouver cette forme, on peut procéder par identification en écrivant

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 + ax + b\right).$$

On en déduit alors que, pour tout $x \neq -1$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Ainsi, $\lim_{x\to-1} f(x) = 1/3$ et on en déduit que l'on peut prolonger f par continuité en -1 en posant $f(-1) = 1/3$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si $x \to 0$, alors $-1/x^2 \to -\infty$. Puisque $\lim_{X\to-\infty} \exp(X) = 0$, on en déduit par le théorème de composition des limites que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2. Si $x \to 0^+$, le même raisonnement s'appliquer et $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Mais si $x \to 0^-$, alors $-1/x \to +\infty$. Puisque $\lim_{X\to+\infty} \exp(X) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$. Ainsi, on ne peut pas prolonger g par continuité en 0.

3. Par les théorèmes généraux, h est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Par ailleurs, posant $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$, on a

$$\lim_{x\to -1} h(x)=\lim_{u\to 0}\sin(u)\ln|u|=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\times u\ln|u|=1\times 0=0$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité h en -1 en posant $h(-1)=0$.

Correction de l'exercice 11 ▲

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors amorcer la discussion suivant les valeurs de a :

- Si $a>-1$, puisque $f(x)\leq -1$ si $x\in]-\infty,2\ ]$, il n'y a pas de solutions à l'équation $f(x)=a$ dans cet intervalle. D'autre part, f est continue strictement croissante sur $]2,+\infty[$, et $a\in]f(2),\lim_{+\infty}f[=]-5,+\infty[$. Il y a donc une solution unique dans lintervalle $]2,+\infty[$ à l'équation $f(x)=\boldsymbol{a}$, et donc aussi une solution unique sur $\mathbb{R}$.
- Si $\boldsymbol{a}=-\mathbf{1}$, on fait le même raisonnement, en remarquant quill n'y a pas de solutions dans $]-\infty,0[$ni dans $]0,2$. En revanche, on a aussi $f(0)=-1$. L'équation $f(x)=-1$ admet donc 2 solutions.
- Si $a\in]-5,-1[$, alors par le même argument que précédemment (stricte monotonie et valeur ou limite aux bornes), on constate que l'équation $f(x)=\boldsymbol{a}$ admet une solution unique sur chacun des intervalles $]-\infty,0[]0,,2[$ et $]2,+\infty[$. Il y a donc trois solutions à l'équation $f(x)=a$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $\boldsymbol{a}<-\mathbf{5}$, alors il ne peut pas y avoir de solutions dans lintervalle $[0,+\infty[$ et puisque f est strictement croissante, continue sur $]-\infty,0[$ avec $\lim_{-\infty}f=-\infty$ et $f(0)-1$, l'équation $f(x)=a$ admet une solution unique dans $]-\infty,0[$.
- Enfin, si $\boldsymbol{a}=-\mathbf{5}$, on trouve deux solutions, l'une dans $]-\infty,0[$, et aussi 2 .

Indication pour l'exercice 12 ▲

Poser la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tel que $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$. Puis appliquer le théorème de Rolle.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Pour $x\neq y$. La fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$ si $x<y$ (ou sur $[y,x]$ si $y<x$). Il existe $c\in]x,y[$ (ou $]y,x[$) tel que

$$\sin(x)=\sin(y)+(x-y)\cos(c)$$

Donc

$$\sin(x)-\sin(y)=(x-y)\cos(c)$$

On prend la valeur absolue

$$|\sin(x) - \sin(y)| = |x - y| \times |\cos(c)|$$

Puis comme $|\cos(c)| \leq 1$ on a

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Pour $x = y$ l'inégalité est triviale.

2. La fonction $f : x \to \ln(1 + x)$ est continue est dérivable sur $\mathbb{R}^+$donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$$

Par conséquent il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\ln(1 + x) = \ln(1) + (x + 1 - 1) \times \frac{1}{1 + c} = \frac{x}{1 + c}$$
$$0 < c < x \Leftrightarrow 1 < 1 + c < 1 + x \Leftrightarrow \frac{1}{1 + x} < \frac{1}{1 + c} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1 + x} < \frac{x}{1 + c} < x$$

Car $x > 0$
On en déduit que

$$\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. La fonction f_1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0^+, la limite de f_1 est égale à 0 puisque le numérateur tend vers 0 (rappelons que $x\ln(x)$ a pour limite 0 en 0 par croissance comparée) et le dénominateur vers 1 , donc il n'y a pas d'asymptote verticale. Ensuite,

$$f_1(x) = \frac{x + \ln x}{1 + \frac{1}{x}}$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{f_1(x)}{x} = \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Il faut donc calculer

$$f(x) - x = \frac{x + \ln x - x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\ln x - 1}{1 + \frac{1}{x}}$$

On a donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = +\infty$$

la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y = x$. La dérivée de cette fonction vaut

$$f_1'(x) = \frac{(2x + \ln(x) + 1)(x + 1) - x^2 - x\ln(x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 3x + 1 + \ln(x)}{(x + 1)^2}$$

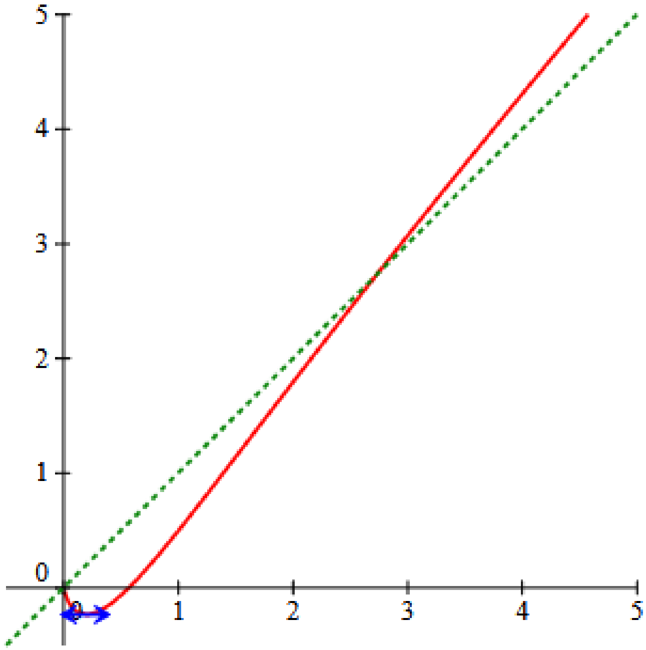
Pas vraiment évident à étudier, on peut toutefois noter g le numérateur et constater que

$$g'(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x}$$

Le discriminant du numérateur vaut $\Delta = 8 - 8 = 1$, il s'annule pour deux valeurs négatives :

$$x_1 = \frac{-3-1}{4} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$$

On en déduit que $g'(x)$ est positif sur $\mathcal{D}_f$, donc g y est croissante. Comme la limite de g en 0 vaut $-\infty$ et que $g(1) = 4$, la fonction g (et donc la fonction f') s'annule une seule fois, entre 0 et 1 . La fonction f_1 admettra à cet endroite un minimum. Voici l'allure de la courbe :



2. Un classique : $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. En -1 , le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 0, il y a donc des limites infinies et une asymptote verticale d'équation $x = -1$. Par contre, en 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0, on est obligés de factoriser de chaque côté. Pour le numérateur, remarquons que

$$x^3 - 2x^2 + x = x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2$$

donc pour $x \neq 1$,

$$f_2(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$$

, qui a pour limite 0 en 1. Pas de deuxième asymptote verticale donc. Pour les infinis, on peut utiliser le quotient des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty \quad \text{et de même} \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Reste à calculer

$$f_2(x) - x = \frac{x^3 - 2x^2 + x - x^3 + x}{x^2 - 1} = \frac{-2x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

qui a pour limite -2 en $+\infty$. Conclusion de tous ces calculs : la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ (où les calculs sont les mêmes). Pour le calcul de la dérivée il vaut évidemment mieux partir de

$$f_2(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$$

pour obtenir

$$f_2'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$

Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, la dérivée s'annule pour

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{et pour} \quad x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$$

On peut aller jusqu'à calculer

$$f_2\,(x_1) = \frac{(-1 - \sqrt{2})(-2 - \sqrt{2})}{-\sqrt{2}} = \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 3$$

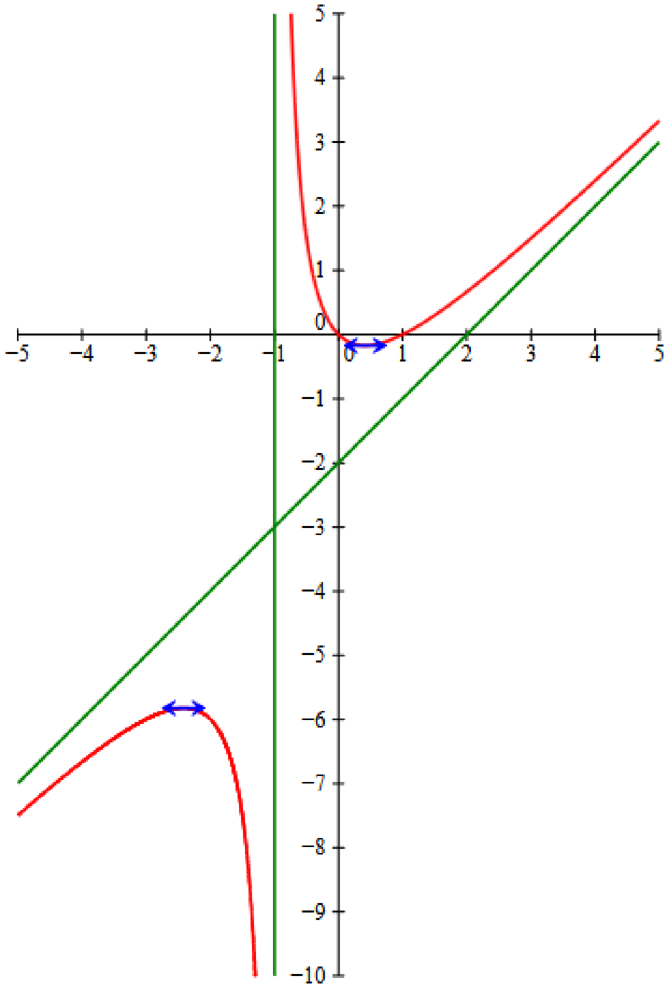
et

$$f_2\,(x_2) = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 2)}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 3$$

Ce qui permet de dresser le magnifique tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		-1		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}-3$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}-3$	$\nearrow$	$+\infty$

Et la courbe qui va avec :



3. La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle est strictement positive. Il suffit donc de regarder ce qui se passe aux infinis, et on peut commencer par constater que f_3 est paire. La limite en $+\infty$ de f_3 est $+\infty$ et de plus

$$f_3(x) = \ln\left(e^x\left(1+e^{-2x}\right)\right) = x + \ln\left(1+e^{-2x}\right)$$

donc

$$\frac{f_3(x)}{x} = 1 + \frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{x}$$

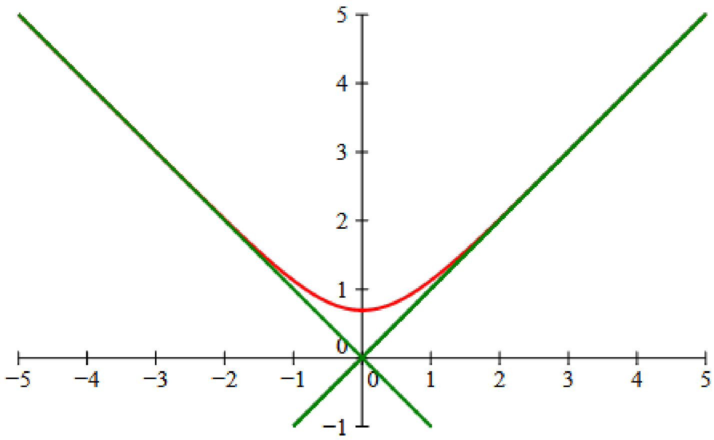
qui a pour limite 1 quand x tend vers $+\infty$. Enfin,

$$f(x) - x = \ln\left(1+e^{-2x}\right)$$

qui tend vers 0 , donc la droite d'équation $y = x$ est aymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$. On calcule

$$f_3'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

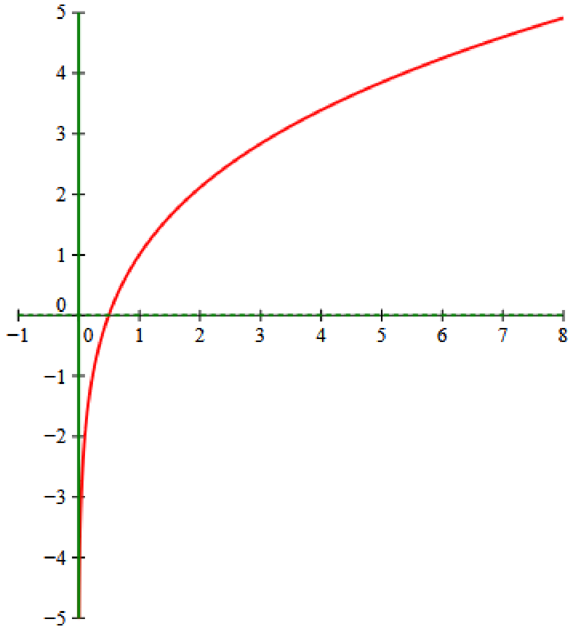
qui est positive sur $[0;+\infty[$ (et négative sur $]-\infty;0]$, ce qui est cohérent avec la parité). Il y a donc un minimum en 0 de valeur $f_3(0) = \ln(2)$.



4. Le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$ et il y a une asymptote verticale en 0 (limite $-\infty$). De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \frac{f_4(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_4(x)}{x} = 0$$

Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox). L'étude des variations ne pose ici aucun problème et ne nécessite même absolument aucun calcul : la fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, elle est donc strictement croissante.



5. La fonction f_5 est définie quand $\frac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, donc (petit tableau de signe) sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$. En $-\frac{1}{2}$, il n'y a rien à faire, la fonction est définie (et prend pour valeur 0), il ne peut pas y avoir d'asymptote verticale. Par contre, en 1 , il y a bien une limite infinie, donc une asymptote verticale. Enfin, quand $x \to \pm\infty$, on a

$$\frac{2x+1}{x-1} \to 2$$

donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_5(x) = \sqrt{2}$$

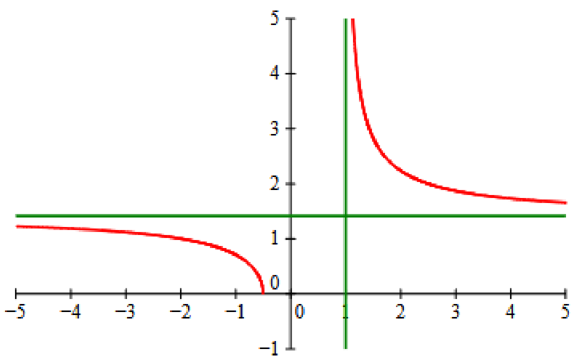
il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$. Par ailleurs, les variations de f_5 sont les mêmes que celles de

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

(puisque la racine carrée est strictement croissante), qui a pour dérivée

$$\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

La fonction f_5 est donc décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition.

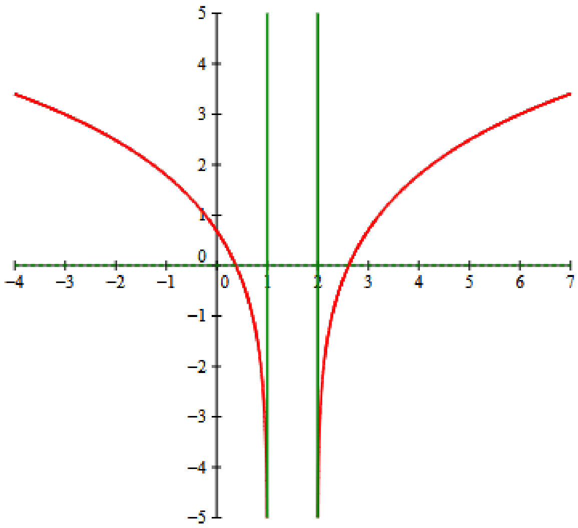


6. Enfin, f_6 est définie quand $x^2 - 3x + 2 > 0$, c'est-à-dire en-dehors de ses racines évidentes qui sont 1 et 2 , donc $\mathcal{D}_{f_6} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$. En 1 et 2 , la parenthèse tend vers 0 donc la fonction vers $-\infty$, il y a donc

deux asymptotes verticales. En $\pm\infty$, la fonction tend vers $+\infty$, et

$$\frac{f_6(x)}{x} = \frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

Tout ceci tendant vers 0, il y a une branche parabolique de direction (Ox) de chaque côté. La fonction ln étant strictement croissante, les variations de f_6 sont les mêmes que celles de $x \mapsto x^2-3x+2$, qui a pour dérivée $2x-3$. La fonction f_6 est donc décroissante sur $]-\infty;-1[$ et croissante sur $]2;+\infty[$.



Correction de l'exercice 15 ▲

1. Étude de la parité.

   Calcul de $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x+1} = \frac{x^2-1}{-x+1}$$

   Comparaison de $f(-x)$ et $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

   $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, donc f n'est ni paire ni impaire.

2. Étude des asymptotes.

   - Asymptote verticale : La fonction n'est pas définie en $x=-1$.

   Calculons les limites lorsque x tend vers -1 :

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^+} (x-1) = -2$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} (x-1) = -2$$

   Il n'y a donc pas d'asymptote verticale en $x=-1$.

   - Branches infinies :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$$

   Nous allons donc à présent étudier

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

On a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2-1}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

Nous allons donc à présent étudier

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 1.x$$

On a

$$f(x) - 1.x = \frac{x^2-1}{x+1} - x = x - 1 - x = -1$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 1.x = -1$$

donc la courbe f admet une droite d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique ! Un peu prévisible tout de même ! :)

On a la même chose en $-\infty$.

3. Prolongement par continuité.

   - Calcul de la limite en $x = -1$:

   $$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$$

   - Prolongement : Définissons une nouvelle fonction g par :

   $$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1 & \text{si } x \neq -1 \\ -2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

   La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Dérivée et tableau de variations

   - Calcul de $g'(x)$:

   $$g'(x) = \frac{(x+1)(2x) - (x^2-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = 1$$

   Pour $x \neq -1, g'(x) = 1$.

   - Tableau de variations :

   La dérivée est toujours positive, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Théorème des valeurs intermédiaires

   - Application : g est continue sur $[0, 8]$. Calculons $g(0)$ et $g(8)$:

   $$g(0) = -1, \quad g(2) = 7$$

   Comme 2 est entre -1 et 7 , par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 8]$ tel que $g(c) = 2$.

6. Théorème de Rolle

   - Application : g est continue sur $[0,8]$, dérivable sur $]0,8[$, et $g(0) = -1$ et $g(2) = 7$. Le théorème de Rolle ne s'applique donc pas ici.

7. Théorème des accroissements finis

   g est continue sur $[1,3]$, dérivable sur $]1,3[$, donc il existe $c \in]1,3[$ tel que

$$g(3) - g(1) = g'(c)(3-1)$$

   - Application :

$$g(1) = 0, \quad g(3) = 2$$

   donc

$$\frac{g(3)-g(1)}{3-1} = \frac{2-0}{2} = 1$$

   donc $g'(c) = 1$. Or, $g'(x) = 1$ partout, donc cette condition est toujours satisfaite. Toute valeure de c convient.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Le domaine de définition de f est l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on enlève les réels qui oeuvent annuler le dénominateur. Or le polynome $2x^3 - x - 1$ n'a qu'une seule racine réelle qui est $x = 1$. En effet

$$2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2 + 2x + 1)$$

   or le polynome $2x^2 + 2x + 1$ n'a pas de racine réelle (le discriminant est négatif).

   On peut donc conclure et dire que le domaine de définition de f est

$$D = \mathbb{R} \backslash \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

2. La fonction f est continue sur $D = \mathbb{R} \backslash \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

   Etude en 1 :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x-1) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x-1) = 0^+$$

   de plus

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 + 2x + 1) = 5$$

   et

$$\lim_{x \to 1} (x^4 - 8x^2 + 3) = -4$$

   donc

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$$

   La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en $x = 1$.

3. On peut vérifier que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$. On peut donc affirmer que f est ni paire ni impaire.

4. La valeur $x = 1$ est une valeure interdite. La courbe de f admet donc une asymptote verticale en ce point.

   Etude en $-\infty$:

   On a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

de plus

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0$$

donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction

$$y = \frac{1}{2}x$$

L'etude en $+\infty$ donne exactement la même chose.

5. On a

$$f'(x) = \frac{3+16x-10x^2-4x^3+13x^4+2x^6}{(-1-x+2x^3)^2}$$

On trouve avec la calculatrice les valeurs de x réelles tel que $f(x) = 0$:

$$x \simeq -1.08 \qquad \text{et} \qquad x \simeq -0.17$$

On peut donc conclure sur les variations de f. Elle est croissante pour $x < -1.08$, décroissante pour $-1.08 < x < -0.17$, et croissante pour $x > -0.17$ avec une valure interdite en $x = 1$.

6.
   - f est continue pour $x < -1.08$, de plus
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad f(-1.08) > 0$$
   donc il existe au moins un réel $a < -1.08$ tel que $f(a) = 0$
   - f est continue pour $-1.08 < x < -0.17$, de plus
   $$f(-1.08) > 0 \qquad \text{et} \qquad f(-0.17) < 0$$
   donc il existe au moins un réel b sur cet intervalle tel que $f(b) = 0$
   - f est continue pour $-0.17 < x < 1$, de plus
   $$f(-0.17) < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$$
   donc il existe au moins un réel c sur cet intervalle tel que $f(c) = 0$
   - f est continue pour $x > 1$, de plus
   $$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
   donc il existe au moins un réel d sur cet intervalle tel que $f(d) = 0$

7. On cherche à résoudre $f(x) = 0$. On a
$$x^4 - 8x^2 + 3 = 0$$
on pose $t = x^2$, on peut alors écrire
$$t^2 - 8t + 3 = 0$$
les solutions sont alors
$$t = 4 - \sqrt{13} > 0 \quad \text{et} \quad t = 4 + \sqrt{13} > 0$$
donc
$$x_1 = \sqrt{4-\sqrt{13}} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{4-\sqrt{13}} \quad , \quad x_3 = \sqrt{4+\sqrt{13}} \quad , \quad x_4 = -\sqrt{4+\sqrt{13}}$$
On pose $\alpha \in [x_1, x_2]$, $\beta \in [x_2, x_3]$ (avec $\alpha \leq \beta$) et $\gamma \in [x_3, x_4]$. Sur $[\alpha, \beta]$ les hypothèses du théorème de rolle sont vérifiées, ainsi que sur $[\beta, \gamma]$.

8. Sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$les hypothèses du theoèrme des accroissements finis sont vérifiées.