Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Examen de mathématiques

Lundi 27 janvier 2025

Promotion 115

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.

Exercice 1 Étude d'une fonction grâce à une fonction auxiliaire

1. On définit la fonction g par :
$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$$
   (a) Déterminer le domaine de définition D_g de f.
   (b) Calculer
$$\lim_{x \longrightarrow 1} g(x)$$
   (c) Calculer la dérivée de g sur $]1, +\infty[$.
   (d) Étudier les variations de g.
   (e) Étudier la limite de g en $+\infty$.
   (f) Étudier les asymptotes et branches infinies éventuelles de g.
   (g) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]1, +\infty[$. On la note α.
   Bonus : Montrer alors que
$$\alpha \in \left[e+1, e^3+1\right]$$
   (h) Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x \in]1, +\infty[$, selon la position de x par rapport à α.

2. On note f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$$
   (a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   (b) Étudier les limites de f aux bornes de D_f.
   Indication : On pourra utiliser les limites usuelles suivantes
$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

(c) Étudier les asymptotes et branches infinies éventuelles de f.

(d) Montrer que

$$f'(x) = \frac{g\left(x^2\right)}{\left(x^2-1\right)x^2}$$

(e) Étudier le signe de $f'(x)$ (la réponse fait intervenir le nombre α introduit précédemment). En déduire le tableau de variation de f.

3. *Bonus : Tracer les courbes représentatives de g et f.*

[11.0081]

Exercice 2 Une fonction pas vraiment périodique

On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\sin^2(x). \end{array} \right.$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition D de f.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$x \leqslant f(x) \leqslant 1+x$$

   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)+\pi$.

   (b) Établir le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

   (c) *Bonus : Comment obtient-on la courbe représentative C_f de f sur $\mathbb{R}$ à partir de la portion de la courbe située entre 0 et π ?*

3. *Bonus : En quels points C_f possède-t-elle des tangentes horizontales ? (on déterminera les abscisses de ces points)*

4. *Bonus : Tracer C_f.*

[11.0082]
