

Travaux dirigés - Etudes de fonctions

Promotion 116

Table des matières

1 Domaines de définitions	1
2 Calculs de dérivées	2
3 Limites	3
4 Tableaux de variations	5
5 Théorème des valeurs intermédiaires	5
6 Théorème de Rolle	6
7 Théorème des accroissements finis	6
8 Branches infinies	6
9 Etudes de fonctions	7
10 Exercices Bonus	10

1 Domaines de définitions

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$ | 10. $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{5x-1}}$ |
| 2. $\sqrt{x^2 + 3x - 10}$ | 11. $\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{2x - 1}}$ |
| 3. $\frac{x + 6}{x^3 + 5x}$ | 12. $\frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}$ |
| 4. $\sqrt{4x - x^3}$ | 13. $\sqrt{x + 7} + \sqrt{2x^2 - 3x - 9}$ |
| 5. $\sqrt{3x - 2}$ | 14. $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x^2 - 3x - 10}$ |
| 6. $\frac{8x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6}$ | 15. $\frac{\sqrt{2x^2 - 5x - 3}}{x^2 - 2x - 3}$ |
| 7. $\sqrt{x^2 - 3x - 18}$ | 16. $\frac{x^2 + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$ |
| 8. $\frac{4x^2 - 5x + 15}{x^3 + 6x}$ | 17. $\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4x-1}}$ |
| 9. $\frac{1}{\sqrt{2x - x^3}}$ | |

18. $\frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x + 1}$

20. $\sqrt{\frac{2 - 5x}{x^2 - 6x + 5}}$

19. $\sqrt{x + 1} + \frac{1}{8 - x^3}$

[11.0092]

2 Calculs de dérivées

Exercice 2 Fonctions polynôme

Calculer la dérivée des fonctions polynômes suivantes.

1. $f(x) = x^2 + 2$

8. $f(x) = 12x^{13} + 3x^2 - 5x + \pi$

2. $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

9. $f(x) = -5x^2 + 2x + \sqrt{2}$

3. $f(x) = x^2 + 3x - 1$

10. $f(x) = \frac{-5x^2}{3} + 3$

5. $f(x) = \frac{3}{2} - x$

11. $f(x) = 3x - 2x^2 - \frac{2}{3}$

6. $f(x) = \frac{x}{5}$

12. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

7. $f(x) = -2x^4 + \frac{5}{3}x^3$

[11.0093]

Exercice 3 Puissances négatives

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \frac{1}{x^3}$

4. $f(x) = 3x^{-5}$

2. $f(x) = \frac{-2}{x^5}$

5. $f(x) = \frac{x^{-4}}{8}$

3. $f(x) = \frac{1}{2x^4}$

6. $f(x) = -10x^{-1}$

[11.0094]

Exercice 4 Fonctions quelconques

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

4. $f(x) = \frac{3}{4x} - \frac{5}{2}x^2$

2. $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 1$

5. $f(x) = -\frac{1}{2x} - x + \sqrt{3}$

3. $f(x) = x^4 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

6. $f(x) = \frac{5}{x} - \pi x + 1$

[11.0095]

Exercice 5 Fonctions produit

Calculer la dérivée des fonctions produit suivantes

1. $f(x) = x^2\sqrt{x}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}(x+1)$
3. $f(x) = (2x+1)(x-3)$
4. $f(x) = (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$
5. $f(x) = (1-2x)\left(\frac{x^2}{3}+x\right)$
6. $f(x) = (2+x+3x^2)(1-x)$
7. $f(x) = (x^3-3)(x^2-3x+1)$
8. $f(x) = (x-1)(x+1)(2x-3)$
9. $f(x) = (1+x)^2$
10. $f(x) = (x-3)^2$
11. $f(x) = (2x-4)^2$
12. $f(x) = (1-x)^3$

[11.0096]

Exercice 6 Fonctions quotient

Calculer la dérivée des fonctions quotient suivantes.

1. $f(x) = \frac{x}{x-3}$
2. $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$
3. $f(x) = \frac{5}{2x}$
4. $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$
6. $f(x) = \frac{2x+1}{2-3x}$
7. $f(x) = \frac{2x+5}{2x}$
8. $f(x) = \frac{1}{2x^2+3}$
9. $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$
10. $f(x) = \frac{-x^2-x+1}{2x^2-4}$
11. $f(x) = \frac{3-x}{1-x}$
12. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

[11.0092]

3 Limites

Exercice 7

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 3$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 2x + 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

[11.0098]

Exercice 8

Calculer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+12} - 3}{x^2 - 9}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - x}{(x - 3)^2}$$

[11.0099]

Exercice 9

Calculer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x\sqrt{x+1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - 2x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 1} + 2x - 1$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} + 3x - 4$$

[11.0100]

Exercice 10 Prolongement par continuité et limites usuelles

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité à \mathbb{R} tout entier ?

$$1. f(x) = \exp(-1/x^2) \text{ si } x \neq 0$$

$$2. g(x) = \exp(-1/x) \text{ si } x \neq 0$$

$$3. h(x) = \sin(x+1) \ln|1+x| \text{ si } x \neq -1.$$

[11.0013]

Exercice 11 Prolongement par continuité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}$$

Démontrer qu'on peut prolonger f par continuité en -1 . Préciser la valeur prise en -1 par ce prolongement.

4 Tableaux de variations

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

1. Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$.

[11.0101]

Exercice 13

Etudier les variations sur \mathbb{R} de la fonction f définie par

$$f(x) = 3x - 4x^3$$

[11.0102]

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{-4x - 4}{x^2 + 2x + 5}$.

1. Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer les coordonnées du point A , intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A .

[11.0103]

Exercice 15

Etudier les variations sur $] -2; 1[$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 2}$$

[11.0104]

5 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 16 Combien de solutions ?

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

[11.0014]

6 Théorème de Rolle

Exercice 17

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, montrer que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

[11.0015]

7 Théorème des accroissements finis

Exercice 18

1. Montrer que pour tout x, y réels on a :

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

[11.0045]

8 Branches infinies

Exercice 19

Etudier l'existence et la nature des branches infinies des graphes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
2. $f(x) = 2x\sqrt{x-3}$
3. $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x+1}$
4. $f(x) = \sqrt{x-1} - 2x + 1$
5. $f(x) = \frac{x^2 - x\sqrt{x} - 1}{x+1}$

[11.0105]

Exercice 20

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes, et tracer une allure de leur courbe représentative (on essaiera d'étudier les variations également quand c'est possible) :

1. $f_1(x) = \frac{x^2 + x \ln x}{x+1}$
2. $f_2(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$
3. $f_3(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
4. $f_4(x) = \sqrt{x} + \ln x$

$$5. f_5(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$$

$$6. f_6(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

[11.0077]

9 Etudes de fonctions

Exercice 21

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$. On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la parité de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Tracer la courbe représentative de f .

[11.0001]

Exercice 22

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, par

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

On note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que (\mathcal{C}_f) admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Que peut-on en déduire pour (\mathcal{C}_f) ?
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

4. En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour (\mathcal{C}_f) en $+\infty$.
5. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
6. Dresser le tableau de variation de f .
7. Tracer (\mathcal{C}_f) .

[11.0001]

Exercice 23

On donne la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 3}$$

, et on note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de (\mathcal{C}_f) . Dans la suite de l'exercice, la fonction f sera étudiée sur $[-1; 1[\cup]1; +\infty[$.
3. Déterminer les limites en 1 et la limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour (\mathcal{C}_f) ?
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f .
6. Tracer (\mathcal{C}_f) .

[11.0001]

Exercice 24

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$, et on note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine, en déduire l'existence d'une asymptote horizontale (Δ) pour (\mathcal{C}_f) .
3. Étudier les positions relatives de (\mathcal{C}_f) et de (Δ) .
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f .
6. Tracer (\mathcal{C}_f) .

[11.0004]

Exercice 25

On donne la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$$

et on note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) Justifier l'équivalence : $x \geq 3 \Leftrightarrow x^3 \geq 27$.
(b) Calculer la fonction dérivée de f .
(c) Étudier le signe de f' .
5. Dresser le tableau de variations de f .
6. Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 26

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$$

et on note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que f est 2π -périodique.
(b) Montrer que f est paire.
2. (a) Montrer que la fonction dérivée de f s'écrit : $f'(x) = 2 \sin x(1 - 2 \cos x)$.
(b) Étudier le signe de f' sur $[0; \pi]$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
4. Tracer (\mathcal{C}_f) sur un intervalle de longueur 4π .

[11.0006]

Exercice 27

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$$

et on note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est définie ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est 2π -périodique.

Pour la suite de l'exercice, on étudiera la fonction sur l'intervalle $] -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

3. Déterminer les limites de f en :
(a) $-\frac{3\pi}{2}$ par valeurs supérieures,
(b) $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures,
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.

5. Dresser le tableau de variations de f

6. Tracer (\mathcal{C}_f) sur $] -\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}[$.

[11.0007]

Exercice 28

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par $x - \sqrt{|x-1|}$ et on note (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de f sans valeur absolue sur $[1; \infty[$ et sur $] -\infty; 1]$.

2. Étudier la dérivabilité de f en 1 .
3. Étudier la fonction sur $] - \infty; 1]$.
4. Étudier la fonction sur $[1; +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
6. Tracer la courbe (C_f) .

[11.0009]

10 Exercices Bonus

Exercice 29 Une dérivée ... troisième ?

On considère l'application $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, avec

$$\varphi : x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$$

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0, +\infty[$. Calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$$

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ' , et montrer : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'(x) \geq e$$

3. Étudier les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
4. Résumer les informations précédentes dans un tableau de variations.
5. On admet que $2 < e < 3$ et que $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer que : $\forall x \in [3, +\infty[$,

$$\varphi(x) \geq ex$$

[11.0087]

Exercice 30 Des solutions mystérieuses, mais uniques

On s'intéresse aux équations de la forme $x^3 + mx + 1 = 0$, où m est un réel positif fixé.

1. Cas $m = 1$.

- (a) Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .
Dans la suite de cet exercice, on note α l'unique solution réelle de $x^3 + x + 1 = 0$.
- (b) Montrer que $-1 < \alpha < 0$.

2. Cas $m = 3$.

Justifier que l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement négative. Vous pouvez vous contenter d'une justification assez brève, inutile de répéter tous les arguments que vous avez donnés pour répondre à la question 1.

Dans la suite de cet exercice, on note β l'unique solution réelle de $x^3 + 3x + 1 = 0$.

3. Il est difficile de trouver une expression explicite de α et β ; cependant, leur définition comme solutions d'équations nous donne indirectement des informations sur ces nombres. Dans cette question, on va chercher à exploiter ces informations pour comparer α et β .

(a) Montrer que $\alpha^3 + 3\alpha + 1 < 0$.

(b) En déduire que $\alpha < \beta$.

Indication : utiliser la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x + 1$.

4. Exprimer α^5 comme un polynôme de degré 2 en α (c'est-à-dire, trouver des coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha^5 = a\alpha^2 + b\alpha + c$).

[11.0088]

Exercice 31 Un peu de trigonométrie (mais pas trop)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(x)^2 + \cos(x)$.

- Quel est le domaine de définition de f ?
- Justifier que l'on peut limiter l'étude de f à $D = \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$.
- Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.
- Construire le tableau de variations de f sur D , en y faisant figurer les limites appropriées (justifiez brièvement comment vous les obtenez).
- Tracer la courbe de f entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

[11.0089]

Exercice 32 Prendre le problème à la racine

Soit

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{|x-1|}e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
- Sur quels intervalles peut-on conclure directement à la dérivabilité de f ? Sur chacun de ces intervalles, montrer que sa dérivée peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 + 1}{2x^2(x-1)} f(x)$$

- Vérifier que f est continue en 1, puis étudier sa dérivabilité en ce point.
- Étude en 0.

(a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$. Comment interpréter géométriquement ce résultat?

- Étude en l'infini.

(a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- Résumer les résultats obtenus dans un tableau de variations, et représenter graphiquement f .

[11.0090]