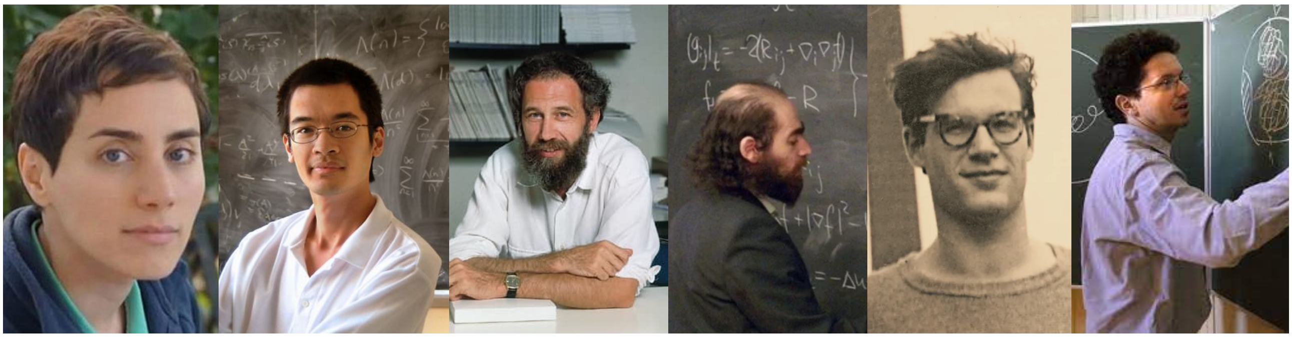
Ecole supérieure d'agro-développement international

istom

Intégrations

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



CAUTION

Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Table des matières

1 Exercices

Exercice 1 Calcul de primitive

Pour cet exercice donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

- Linéarité de la primitive
  1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3, \quad I = \mathbf{R}$
  2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3}, \quad I = \mathbf{R}$
  3. $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}, \quad I = \left]0; +\infty\right[$
  4. $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1, \quad I =$
  5. $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1, \quad I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$
- Forme $u'u^n$
  1. $f(x) = (x+2)^3, \quad I = \mathbf{R}$
  2. $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}, I = \mathbb{R}$

[1] version du 23 avril 2025

3. $f(x) = 2(3x-1)^5, \quad I = \mathbf{R}$
4. $f(x) = 2x\left(1+x^2\right)^5, \quad I = \mathbf{R}$
5. $f(x) = \sin x \cos x, \quad I = \mathbf{R}$

- Forme $\dfrac{u'}{u}$

1. $f(x) = \frac{1}{x-4}, \quad I = \left]4; +\infty\right[$
2. $f(x) = \frac{1}{x-4}, \quad I = \left]-\infty; 4\right[$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}, \quad I = \left]0; 1\right[$

- Forme $\dfrac{u'}{u^n}$, avec $n \geqslant 2$

1. $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}, \quad I = \left]-4; +\infty\right[$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}, \quad I = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$
3. $f(x) = \dfrac{2x-1}{\left(x^2-x+3\right)^2}, \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{x-1}{\left(x^2-2x-3\right)^2}, \quad I = \left]-1; 3\right[$
5. $f(x) = \dfrac{4x^2}{\left(x^3+8\right)^3}, \quad I = \left]-2; +\infty\right[$

- Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}, \quad I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad I = \left]1; +\infty\right[$

- Forme $u'e^u$

1. $f(x) = e^{-x+1}, \quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 2e^{3x-2}, \quad I = \mathbf{R}$
3. $f(x) = xe^{-\frac{F^2}{2}}, \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}, \quad I = \mathbf{R}$

- Forme $u(ax+b)$

1. $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \quad I = \mathbf{R}$
2. $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1, \quad I = \mathbf{R}$
3. $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right), \quad I = \mathbf{R}$

[10.0000]

Exercice 2 Calcul d'intégrales

Pour les exercices suivants, calculer les intégrales indiquées à l'aide d'une primitive.

1. $I = \int_0^4 (x-3)\mathrm{d}x$
2. $I = \int_2^{-1} \left(t^2 - 4t + 3\right) \mathrm{d}t$
3. $I = \int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$
4. $I = \int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx$
5. $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \, \mathrm{d}x$
6. $I = \int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2}$
7. $I = \int_0^4 \, \mathrm{d}x$
8. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} \, \mathrm{d}x$
9. $I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-4} \, \mathrm{d}x$
10. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x^2-4} \, \mathrm{d}x$
11. $I = \int_0^1 5e^{3x} \, \mathrm{d}x$
12. $I = \int_0^1 te^{t^2-1} \, \mathrm{d}t$

[10.0001]

Exercice 3 Calcul d'intégrale par une décomposition

1. (a) Trouver les réel a et b tels que, pour tout réels x de $\mathbb{R} - \{-3\,;\,3\}$, on a :

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$

   (b) En déduire :

$$I = \int_4^5 \frac{1}{x^2-9} \, \mathrm{d}x$$

2. (a) Trouver trois réel a, b et c tels que pour tout réel de $\mathbb{R} - \{-3\}$, on a :

$$\frac{4x^2-5x+1}{x+3} = ax + b + \frac{c}{x+3}$$

   (b) En déduire :

$$I = \int_2^0 \frac{4x^2-5x+1}{x+3} \, \mathrm{d}x$$

3. (a) Prouver que pour tout réel x :

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

(b) En déduire :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, \mathrm{d}x$$

[10.0002]

Exercice 4 Suite

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, \mathrm{d}t$$

1. (a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   (b) Étudier les variations de la suite (x_n).
   (c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite, (x_n) ?
2. (a) Démontrer que, pour tour entier naturel n non nul :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   (b) En déduire la limite de la suite (x_n).
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

   (b) En déduire que : $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$

[10.0003]

Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur Google Play et l'App Store.

Etudiez en musique !

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

D'après un cours de Arnaud Bodin.
Revu et augmenté par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).