Suites

Exercice 1 :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]0,1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]1,2]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$.
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soient u_0, a et b trois réels. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définie par u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsque $a = 1$? Lorsque que $b = 0$ et $a \neq 1$?
2. Exprimer u_n dans les deux cas particulier de la question 1.
3. Dans le cas général, calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de u_0, a et b.
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par :

$$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}, n \in \mathbb{N}^*$$

5. On suppose que $a \neq 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

6. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}$$

7. On suppose dans cette question que $a > 1$ et que $au_0 + b > u_0$. Montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
8. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$, montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et que sa limite ne dépend pas de u_0.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Et la donnée de u_0

1.
   1.1. Montrer que si $u_0 \leq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$ et que la suite est monotone.
   1.2. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
2.
   2.1. Montrer que si $u_0 \geq 2$ alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$ et que la suite est monotone.
   2.2. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
3.
   3.1. On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   3.2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0. Retrouver le résultat des deux premières questions.
   3.3. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par

$$u_n = \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général v_n défini par

$$v_n = \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}$$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

1. On pose que $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2. On pose que $v_n = \frac{\left(E(\sqrt{n})\right)^2}{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Calculer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure ?

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

On considère la suite de nombre réel définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + \frac{1}{8}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par :

$$u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \ldots \times (3n+3)}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$
A l'aide de la question 1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs réelles définie par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suite à valeurs réelles définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire une expression de v_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
2. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. En déduire une expression de w_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
3. Calculer $v_n + w_n$ de deux façons différentes et en déduire u_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
4. Selon les valeurs de u_0 et de u_1 déterminer si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et le cas échéant déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

On considère la suite de nombres réels définie par son premier terme $u_0 = \frac{11}{4}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

1. Calculer, si cette limite existe.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2}$$

2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par la donnée de :

$$0 < u_0 < 1 \quad \text{et} \quad u_n = u_{n-1} - (u_{n-1})^2$$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Calculer, si elle existe, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'expression

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Calculer

1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n$$

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Soient a_0 et b_0 deux réels tels que $a_0 < b_0$. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et l'exprimer en fonction de n, a_0 et b_0.
2. Montrer que ces suites sont adjacentes.
3. En calculant $a_n + b_n$, montrer qu'elles convergent vers $\frac{a_0+b_0}{2}$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels dont le terme général est défini par récurrence en posant :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E\left(\sqrt{n}\right)$$

Montrer qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

1. Montrer que la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right)$ et la donnée initiale $u_0 = \frac{1}{5}$ permet de définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels appartement à l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que la suite est décroissante.
3. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

Soit $a \in]0,1[$ un réel. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n + 1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{n + 1}$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1 + \frac{a - 1}{n!}$$

On rappelle que $0! = 1$

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Pour tout entier $n > 0$, on considère la fonction $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - (1 - x)^2$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
   a) La fonction f_n est-elle strictement monotone ?
   b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   c) Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?
2. On considère la suite de terme général $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.
   a) Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   b) En déduire que la suite est convergente, on notera α sa limite.
   c) supposons que $\alpha < 1$.
      i) Montrer qu'alors

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n = 0$$

ii) A l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$, en déduire que $1 - \alpha = 0$, conclure.

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de nombres réels définie par

$$u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est $\frac{1}{2}$.

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite l vérifie

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1$$

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \frac{1}{3+|\sin(1)|\sqrt{1}} + \frac{1}{3+|\sin(2)|\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{3+|\sin(n)|\sqrt{n}}$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{16} + 4u_n^2$$

Montrer qu'elle est croissante, convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right)^n$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| < \frac{3}{4}$$

2. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2+2} e^{-u_n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n - 3 + e^{u_n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
3. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 1$ un réel et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$
2. Etudier la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$ et en déduire son signe sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
4. En déduire qu'elle converge, et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

Pour chacune des assertions ci-dessus :

- Si vous estimez qu'elle est vraie, donner en justification.
- Si vous estimez qu'elle est fausse, justifiez-le en exhibant un contre-exemple.

1. Si une partie B de $\mathbb{R}$ est non vide et minorée, sa borne inférieure est un élément de B
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la limite de u_n en $+\infty$ est $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres réels, alors est bornée.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ne vérifiant pas

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$$

Alors elle est bornée.

Allez à : Correction exercice 32 :

Exercice 33 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

On pourra montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite divergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$$

   a) Montrer que,
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

   c) Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et précisez sa limite.

Allez à : Correction exercice 34 :

Exercice 35 :

1. Soit (H_p) la proposition suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

   Montrer (H_p) par récurrence sur p.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite. On pourra montrer que cette suite une suite de Cauchy.

Allez à : Correction exercice 35 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in]0,1]$ donc $u_0 > 0$. Montrons que $u_n > 0$ entraine que $u_{n+1} > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} > 0$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0 \in [0,1]$ donc $u_0 \leq 1$. Montrons que $u_n \leq 1$ entraine que $u_{n+1} \leq 1$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{(1)^2}{4} = \frac{3}{4} \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

3. Calculons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4} = \frac{u_n}{4}(-2 + u_n)$$

   Comme $0 < u_n \leq 1$, on a $-2 \leq -2 + u_n \leq -1 < 0$, par conséquent

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{4}(-2+u_n)<0$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante.

Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{u_n}{2}+\frac{(u_n)^2}{4}}{u_n}=\frac{1}{2}+\frac{u_n}{4}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}<1$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante.

4. La suite est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite notée l, cette limite appartient à $[0,1]$ et cette valeur vérifie

$$l=\frac{l}{2}+\frac{l^2}{4}\Leftrightarrow 0=-\frac{l}{2}+\frac{l^2}{4}\Leftrightarrow -2l+l^2=0\Leftrightarrow l(-2+l)=0\Leftrightarrow\begin{cases}l=0\\ \text{ou}\\ l=2\end{cases}$$

Par conséquent $l=0$.

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

1. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0\in]1,2]$ donc $u_0\geq 1$. Montrons que $u_n>1$ entraine que $u_{n+1}>1$.

$$u_{n+1}=\frac{(u_n)^2}{4}+\frac{3}{4}>\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>1$.

2. Faisons un raisonnement par récurrence, $u_0\in]1,2]$ donc $u_0\leq 2$. Montrons que $u_n\leq 2$ entraine que $u_{n+1}\leq 2$.

$$u_{n+1}=\frac{(u_n)^2}{4}+\frac{3}{4}\leq\frac{(2)^2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}\leq 2$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq 2$.

3. Calculons

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n)^2}{4}+\frac{3}{4}-u_n=\frac{1}{4}(u_n^2-4u_n+3)=\frac{1}{4}(u_n-1)(u_n-3)$$

Comme $1<u_n\leq 2$, on a $u_n-1>0$ et $u_n-2\leq -1<0$, par conséquent

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}(u_n-1)(u_n-3)<0$$

Ce qui montre que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.

Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(u_n)^2}{4}+\frac{3}{4}}{u_n}=\frac{u_n}{4}+\frac{3}{4u_n}$$

Il faut alors étudier la fonction $f:]1,2]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{3}{4x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4x^2}=\frac{x^2-3}{4}$$

x	1	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 $\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\nearrow$	$\frac{7}{8}$

Cela montre que

$$\forall u_n \in]1,2], f(u_n) < 1$$

Et que donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.

4. On note l cette limite, elle appartient à $[1,2]$ et cette valeur vérifie

$$l = \frac{l^2}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 = \frac{l^2}{4} - l + \frac{3}{4} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 1 \\ \text{ou} \\ l = 2 \end{cases}$$

Par conséquent $l = 1$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1. Lorsque $a = 1$ alors $u_{n+1} = u_n + b$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b.
   Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_{n+1} = au_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a,
2. Lorsque $a = 1$ alors $u_n = u_0 + nb$
   Lorsque $b = 0$ et $a \neq 1$ alors $u_n = a^n u_0$(remarque, si $a = 1$ cela ne change rien).
3.

$$u_1 = au_0 + b$$
$$u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2 u_0 + (a+1)b$$
$$u_3 = au_2 + b = a(a^2 u_0 + (a+1)b + b = a^3 u_0 + (a^2 + a + 1)b$$

4. Pour $n = 1$ l'égalité est vérifiée (c'est même la définition de u_1), on peut aussi remarqué que la relation est aussi vérifiée pour $n = 2$ et $n = 3$ d'après 3.
   Montrer que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n = 1$

$$u_{n+1} = au_n + b = a\left(a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\right) + b = a\big(a^n u_0 + b(a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1)\big) + b$$
$$= a^{n+1}u_0 + b(a^{n+1} + a^n + \cdots + a^2 + a) + b$$
$$= a^{n+1}u_0 + b(a^{n+1} + a^n + \cdots + a^2 + a + 1) = a^{n+1}u_0 + b\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}$$

5.

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a + 1 = 1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n - 1}{a-1}$$

   Autre méthode, on pose $k' = n - k$, si $k = 1$ alors $k' = n - 1$ et si $k = n$ alors $k' = 0$

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} = \sum_{k'=0}^{n-1} a^{k'} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n - 1}{a-1}$$

6. D'après 4. Pour tout $n \geq 1$

$$u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a-1} = \frac{a^n u_0(a-1) + b(a^n - 1)}{a-1}$$
$$= \frac{a^n(u_0 a - u_0 + b) - b}{a-1} = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a-1}$$

7. Comme $a > 1$, $a^n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et $au_0 + b > u_0$ équivaut à $u_1 - u_0 > 0$, on reprend l'expression du 7. Il est clair que $u_n \to +\infty$

8. Comme $0 < a < 1$, $a^n \to 0$ donc $a^n(u_1 - u_0) - b \to -b$ lorsque $n \to +\infty$ par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{b}{a-1}$$

Et effectivement cette limite ne dépend pas de u_0.

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1.

1.1. Par récurrence $u_0 \leq 2$ et montrons que $u_n \leq 2$ entraine $u_{n+1} \leq 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2 - u_n}{2} \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

1.2. La suite est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{2}l + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}l = 1 \Leftrightarrow l = 2$$

2.

2.1 Par récurrence $u_0 \geq 2$ et montrons que $u_n \geq 2$ entraine $u_{n+1} \geq 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \geq \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{2 - u_n}{2} \leq 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

2.2 La suite est décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{2}l + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}l = 1 \Leftrightarrow l = 2$$

3.

3.1

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.2

On déduit de 3.1. que pour tout $n \geq 0$:

$$v_n = \frac{1}{2^n}v_0 = \frac{1}{2^n}(u_0 - 2)$$

Alors pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = v_n + 2 = \frac{u_0}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + 2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_0}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

3.3

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_k+2) = (v_0+2)+(v_1+2)+\cdots+(v_n+2) = v_0+v_1+\cdots+v_n+2(n+1)$$
$$= v_0 + \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2^2}v_0 + \cdots + \frac{1}{2^n}v_0 + 2(n+1)$$
$$= v_0\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) + 2(n+1) = v_0\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} + 2(n+1)$$
$$= 2v_0\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) + 2(n+1) = 2v_0 - \frac{v_0}{2^n} + 2(n+1)$$

Ce qui entraine que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n} = \frac{2v_0 - \frac{v_0}{2^n} + 2(n+1)}{n} = \frac{2v_0 - \frac{v_0}{2^n}}{n} + \frac{2(n+1)}{n} \to 0+2=2$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

1. Le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers $+\infty$, il s'agit donc d'une forme indéterminée.

   Première méthode

   On va multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée

$$u_n = \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)}$$
$$= \frac{\left(4n^2-(4n^2+1)\right)\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n^2-(n^2+1)\right)\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)} = \frac{-\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)}{-\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)} = \frac{-n+\sqrt{n^2+1}}{-2n+\sqrt{4n^2+1}}$$

   Il s'agit d'une forme encore plus indéterminée que la précédente, il s'agit donc d'une mauvaise idée.

   Deuxième méthode

$$u_n = \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{2n+\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)}}{n+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{2n+2n\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{n+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}\right)}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}$$
$$= 2\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2$$

2. Le numérateur est une forme indéterminée $+\infty-\infty$ et le dénominateur est une forme indéterminée $+\infty-\infty$, donc v_n est une forme indéterminée.

   Première méthode

   On va multiplier en haut et en bas par la quantité conjuguée

$$v_n = \frac{2n-\sqrt{4n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}} = \frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)}$$
$$= \frac{\left(4n^2-(4n^2+1)\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n^2-(n^2+1)\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)} = \frac{-\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{-\left(2n+\sqrt{4n^2+1}\right)} = \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2n+\sqrt{4n^2+1}} = \frac{1}{u_n}$$

   Donc la limite de v_n est $\frac{1}{2}$

Deuxième méthode

$$u_n=\frac{2n-\sqrt{4n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}}=\frac{2n-\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)}}{n-\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\frac{2n-2n\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{n-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}\right)}{n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$=2\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 donc il s'agit d'une forme indéterminée, c'est une mauvaise idée.

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un unique $p=E(\sqrt{n})$ tel que
$$p\le\sqrt{n}<p+1$$
Donc
$$p^2\le n<(p+1)^2$$
D'où l'on déduit que
$$\frac{1}{(p+1)^2}<\frac{1}{n}\le\frac{1}{p^2}$$
On multiplie ces dernières inégalités par $p=E(\sqrt{n})>0$, car $n\ge 1$
$$\frac{p}{(p+1)^2}<\frac{p}{n}\le\frac{p}{p^2}\Leftrightarrow\frac{E(\sqrt{n})}{\left(E(\sqrt{n})+1\right)^2}<\frac{E(\sqrt{n})}{n}\le\frac{1}{E(\sqrt{n})^2}$$
Lorsque $n\to+\infty$, $E(\sqrt{n})\to+\infty$ donc
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\sqrt{n})}{n}=0$$
Puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 0.
2. Avec les mêmes notations on multiplie les inégalités
$$\frac{1}{(p+1)^2}<\frac{1}{n}\le\frac{1}{p^2}$$
Par $p^2=E(\sqrt{n})^2\ge 0$
$$\frac{p^2}{(p+1)^2}<\frac{p^2}{n}\le\frac{p^2}{p^2}\Leftrightarrow\frac{E(\sqrt{n})^2}{\left(E(\sqrt{n})+1\right)^2}<\frac{E(\sqrt{n})^2}{n}\le 1$$
Lorsque $n\to+\infty$, $E(\sqrt{n})\to+\infty$ donc
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\sqrt{n})^2}{n}=1$$
Puisque les limites des expressions de gauche et de droite tendent vers 1.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. $u_1=\frac{1}{6}u_0^2+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$
On va montrer que pour tout $n\ge 1$, $u_n>0$ entraine que $u_{n+1}>0$.
$$u_{n+1}=\frac{1}{6}u_n^2+\frac{3}{2}>\frac{3}{2}>0$$
C'est bien le cas. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$

2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l alors
$$l=\frac{1}{6}l^2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow l^2-6l+9=0\Leftrightarrow (l-3)^2=0\Leftrightarrow l=3$$
3. Encore une fois, faisons un raisonnement par récurrence, $u_0=0<3$, montrons que $u_n<3$ entraine que $u_{n+1}<3$.
$$u_{n+1}=\frac{1}{6}u_n^2+\frac{3}{2}<\frac{1}{6}\times 9+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$
Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<3$.
4. Calculons $u_{n+1}-u_n$
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{6}u_n^2+\frac{3}{2}-u_n=\frac{1}{6}(u_n^2-6u_n+9)=\frac{1}{6}(u_n-3)^2>0$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, comme elle est bornée par 3, elle convergente vers la seule valeur qui vérifie $l=\frac{1}{6}l^2+\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $l=3$.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

On va d'abord voir si la suite est monotone :
$$u_{n+1}-u_n=2u_n^2-u_n+\frac{1}{8}$$
L'équation $2X^2-X+\frac{1}{8}$ a pour discriminant $\Delta=1-4\times 2\times\frac{1}{8}=0$, il s'agit donc, à un coefficient près d'une identité remarquable
$$2X^2-X+\frac{1}{8}=2\left(X^2-\frac{1}{2}X+\frac{1}{16}\right)=2\left(X-\frac{1}{4}\right)^2$$
Donc
$$u_{n+1}-u_n=2u_n^2-u_n+\frac{1}{8}=2\left(u_n-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0$$
La suite est croissante, montrons par récurrence, qu'elle est majorée par $\frac{1}{4}$
$$u_0=0<\frac{1}{4}$$
Montrons que $u_n<\frac{1}{4}$ entraine que $u_{n+1}<\frac{1}{4}$
$$u_{n+1}=2u_n^2+\frac{1}{8}<2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$
La suite est croissante et majorée, elle converge vers une limite l qui vérifie
$$l=2l^2+\frac{1}{8}\Leftrightarrow 2l^2-l+\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow 2\left(l-\frac{1}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow l=\frac{1}{4}$$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

Il suffit d'imaginer la tête de u_{n+1} pour être décourager à l'avance de calculer $u_{n+1}-u_n$ pour essayer de montrer la monotonie de cette suite. On va faire autrement, pour tout $k\in\{1,2,\dots,n\}$
$$\frac{1}{3n^2+n}\leq\frac{1}{3n^2+k}\leq\frac{1}{3n^2+1}$$
Donc
$$\frac{2n+1}{3n^2+n}+\frac{2n+1}{3n^2+n}+\cdots+\frac{2n+1}{3n^2+n}\leq\frac{2n+1}{3n^2+1}+\frac{2n+1}{3n^2+2}+\cdots+\frac{2n+1}{3n^2+n}$$
$$\leq\frac{2n+1}{3n^2+1}+\frac{2n+1}{3n^2+1}+\cdots+\frac{2n+1}{3n^2+1}$$

Les n termes dans le premier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+n}$. Les n termes dans le dernier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+1}$, on en déduit que

$$n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+n} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+1} = \frac{2}{3}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

Ce genre d'exercice ce traite toujours de la même façon, il faut « sentir » que l'on peut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1) \times (2n+3)}{3 \times 6 \times \ldots \times (3n+3)(3n+6)} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \ldots \times (3n+3)} \times \frac{2n+3}{3n+6} = u_n \times \frac{2n+3}{3n+6}$$

S'il y a une limite l elle vérifie

$$l = l \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{3}\right) l = 0 \Leftrightarrow l = 0$$

Il reste à montrer que la suite de terme général u_n converge.

Il est plus que clair que $u_n > 0$, la suite est minorée, de plus il suffit de regarder le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour savoir si la suite est monotone (décroissante nous arrangerait bien)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{3n+6} < \frac{2n+4}{3n+6} = \frac{2(n+2)}{3(n+2)} = \frac{2}{3} < 1$$

Donc la suite de terme général u_n est décroissante et minorée donc elle converge, comme on l'a vu plus haut la seule limite possible est 0.

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1.

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

2. Première méthode

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Dans la seconde somme on pose $k' = k+1$, alors $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}$$

Ensuite on change k' en k

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est 1.

Deuxième méthode

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est 1.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1.

$$v_{n+1} = 3u_{n+1} - \frac{3}{2}u_{n+2} = 3u_{n+1} - \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}u_{n+1} - u_n\right) = \left(3 - \frac{15}{4}\right)u_{n+1} + \frac{3}{2}u_n = -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Donc

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right)$$

2.

$$w_{n+1} = -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}u_{n+2} = -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}u_{n+1} - u_n\right) = \left(\frac{15}{4} - \frac{3}{4}\right)u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n$$
$$= 3u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n = 2\left(\frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n\right) = 2w_n$$

Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2

Donc

$$w_n = 2^n w_0 = 2^n\left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right)$$

3. D'une part

$$v_n + w_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1} = \frac{9}{4}u_n$$

D'autre part

$$v_n + w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right) + 2^n\left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right)$$

Donc

$$u_n = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right) + 2^n\left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{4}{3}u_0 - \frac{1}{3}u_1\right) + 2^n\left(-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1\right)$$

4. Comme 2^n tend vers l'infini si $-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 \neq 0$ alors u_n tend vers l'infini donc ne converge pas.

Supposons que $-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 = 0$, comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0, alors pour toutes valeurs de $\frac{4}{3}u_0 - \frac{1}{3}u_1$ u_n tend vers 0.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

Si la suite de terme général u_n converge vers une limite l alors

$$l = \frac{5}{2} + \sqrt{l - \frac{7}{4}}$$

Il est clair qu'il va falloir élever au carré quelque chose, mais si on élève au carré ces deux expressions on va avoir un double produit où il y aura encore une racine alors il faut modifier légèrement cette égalité

$$l-\frac{5}{2}=\sqrt{l-\frac{7}{4}}$$

On y va

$$\left(l-\frac{5}{2}\right)^2=l-\frac{7}{4}$$

Mais attention, il faudra faire une réciproque des fois que $l-\frac{5}{2}$ soit négatif.

$$l^2-5l+\frac{25}{4}=l-\frac{7}{4}\Leftrightarrow l^2-6l+8=0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant

$$\Delta=36-4\times 8=4$$

Et donc comme racines

$$l_1=\frac{6-2}{2}=2\quad \text{et}\quad l_2=\frac{6+2}{2}=4$$

La solution $l=2$ ne convient pas car

$$2-\frac{5}{2}\neq\sqrt{2-\frac{7}{4}}$$

La solution $l=4$ est la seule possible.

Comme $u_0<4$, ce qui nous arrangerait maintenant c'est que la suite de terme général u_n soit croissante et majorée par 4, on pourrait alors conclure que la suite de terme général u_n est convergente et de limite 4. Montrons ce résultat par récurrence.

Pour $u_0=\frac{11}{4}$ c'est clair $\frac{11}{4}<4$.

Montrons que $u_n<4$ entraine que $u_{n+1}<4$

$$u_{n+1}=\frac{5}{2}+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}<\frac{5}{2}+\sqrt{4-\frac{7}{4}}=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.

Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante on aura besoin de montrer, au préalable que pour tout $\in$ $\mathbb{N}$ $u_n>\frac{5}{2}$, pour ce genre de récurrence on peut dire que c'est trivial, on vérifie au passage que la suite de terme général u_n est définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $u_n>\frac{5}{2}\Rightarrow u_n-\frac{7}{4}>0$

Regardons maintenant si la suite est monotone :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5}{2}+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}-u_n=\frac{5}{2}-u_n+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}=\frac{\left(\frac{5}{2}-u_n+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}\right)\left(\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}\right)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{2}-u_n\right)^2-\left(u_n-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}=\frac{u_n^2-6u_n+8}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}=\frac{(u_n-2)(u_n-4)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}$$

$$\frac{5}{2}<u_n\Rightarrow u_n-2>0$$

$$u_n<4\Rightarrow u_n-4<0$$

$$\frac{5}{2} < u_n \Rightarrow \frac{5}{2} - u_n < 0 \Rightarrow \frac{5}{2} - u_n - \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} < 0$$

Par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite est croissante

C'est fait, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers la seule limite possible $l = 4$.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. Il s'agit d'une forme indéterminée, on mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur les termes qui tendent le plus vite vers l'infini

$$\frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2} = \frac{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 + \frac{1}{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{2}{n}} = -\frac{1}{1} = -1$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, celle-ci vérifie

$$l = l - l^2 \Leftrightarrow l = 0$$

Regardons si la suite est monotone, pour tout $n \geq 1$

$$u_n - u_{n-1} = -(u_{n-1})^2 \leq 0$$

Donc la suite est décroissante.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$. $0 < u_0 < 1$, puis montrons que pour tout $n \geq 1$ $0 < u_{n-1} < 1$ entraine que $0 < u_n < 1$.

$$u_n = u_{n-1} - (u_{n-1})^2 = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$$

$0 < u_{n-1} < 1$ entraine que $0 < 1 - u_{n-1} < 1$ et le produit de deux nombres compris entre 0 et 1 est compris entre 0 et 1, donc $0 < u_n < 1$. En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, comme elle est décroissante, elle converge vers la seule limite possible $l = 0$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} = \frac{n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}}$$

$$= \frac{2n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

Donc cette expression admet une limite et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1.

$$\frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)} = \frac{e^{\ln(n)\times\ln(n)}}{e^{n\times\ln(ln(n))}} = e^{\ln(n)\times\ln(n) - n\times\ln(ln(n))} = e^{n\left(\frac{(\ln(n))^2}{n} - \ln(ln(n))\right)}$$

$$\frac{(\ln(n))^2}{n} \to 0 \quad \text{et} \quad \ln(ln(n)) \to +\infty$$

Donc

$$n\left(\frac{(\ln(n))^2}{n} - \ln(ln(n))\right) \to -\infty$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)} = 0$$

2.

$$\sqrt{n^2+n+1} - n = \frac{(n^2+n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n}$$

$$= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} \to \frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

Nous allons utiliser le théorème sur les suites adjacentes

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} - \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - u_n - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 + n^2(n+1) - (n+1)^3}{(n+1)^3 n^2}$$

$$= \frac{n^2 + n^3 + n^2 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^3 n^2} = -\frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)^3 n^2} < 0$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

$$v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \to 0$$

Donc les deux suites convergent vers une même limite.

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1.

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} - \frac{a_n + 2b_n}{3} = \frac{a_n - b_n}{3} = \frac{1}{3}(a_n - b_n)$$

Donc la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, par conséquent

$$a_n - b_n = \frac{1}{3^n}(a_0 - b_0)$$

2.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{2a_n + b_n - 3a_n}{3} = -\frac{a_n - b_n}{3} = -\frac{1}{3^{n+1}}(a_0 - b_0) > 0$$

Car $a_0 < b_0$

Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 2b_n}{3} - b_n = \frac{a_n - b_n}{3} = \frac{1}{3^{n+1}}(a_0 - b_0) < 0$$

Car $a_0 < b_0$

Donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}(a_0-b_0)=0$$

En appliquant le théorème des suites adjacentes on en conclut que ces deux suites convergent vers une même limite noté l.

3.

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3}+\frac{a_n+2b_n}{3}=\frac{3a_n+3b_n}{3}=a_n+b_n$$

La suite $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$a_n+b_n=a_0+b_0$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette expression, on trouve que

$$l+l=a_0+b_0$$

Ce qui implique que

$$l=\frac{a_0+b_0}{2}$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1. $1<u_0$, montrons que $1<u_n$ entraine que $1<u_{n+1}$
$$u_{n+1}=\sqrt{2u_n-1}>\sqrt{2\times 1-1}=1$$
Cela montre que la suite est bien définie car si $u_n<\frac{1}{2}$ alors u_{n+1} n'est pas défini.
2.
$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n-1}-u_n=\frac{2u_n-1-u_n^2}{\sqrt{2u_n-1}+u_n}=-\frac{u_n^2+2u_n+1}{\sqrt{2u_n-1}+u_n}-\frac{(u_n+1)^2}{\sqrt{2u_n-1}+u_n}<0$$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. La suite est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite l qui vérifie
$$l=\sqrt{2l-1}$$
$l>0$ et $\sqrt{2l-1}>0$ donc
$$l=\sqrt{2l-1}\Leftrightarrow l^2=2l-1\Leftrightarrow l^2-2l+1=0\Leftrightarrow (l-1)^2=0\Leftrightarrow l=1$$

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

On a

$$E(\sqrt{n})\le\sqrt{n}<E(\sqrt{n})+1$$

Donc

$$\sqrt{n}-1<E(\sqrt{n})\le\sqrt{n}$$

On divise par $\sqrt{n}>0$

$$\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}<\frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\le\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\le 1$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}=1$$

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1. Montrons par récurrence que $\forall n\ge 0$, $0<u_n<1$, cela montrer au passage que la suite u_n est bien définie pour tout n (en effet si $u_n\notin[0,1]$ u_{n+1} n'est pas défini.
$u_0\in]0,1[$, montrons maintenant que $u_n\in]0,1[$ entraine que $u_{n+1}\in]0,1[$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - u_n < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{1 - u_n} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \sqrt{1 - u_n} < 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right) < \frac{1}{5} \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.

2. Nous allons employer la méthode « normale »

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right) - u_n = \frac{1}{5} - u_n - \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{5} - u_n - \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}\right)\left(\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}\right)}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}} = \frac{\left(\frac{1}{5} - u_n\right)^2 - \frac{1}{25}(1 - u_n)}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}}$$
$$= \frac{\frac{1}{25} - \frac{2}{5}u_n + u_n^2 - \frac{1}{25} + \frac{1}{25}u_n}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}} = \frac{u_n^2 - \frac{9}{25}u_n}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}} = \frac{u_n\left(u_n - \frac{9}{25}\right)}{\frac{1}{5} - u_n + \frac{1}{5}\sqrt{1 - u_n}}$$

Et là cela coince, au numérateur, on connait bien le signe de u_n mais pas celui de $u_n - \frac{9}{25}$ et au dénominateur, rien ne nous permet d'affirmer que $\frac{1}{5} - u_n \geq 0$ (cela nous aurait arranger parce que dans ce cas on aurait pu conclure que le dénominateur est positif). Bref il doit y avoir un « truc ».

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right) = \frac{1}{5}\frac{\left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right)\left(1 + \sqrt{1 - u_n}\right)}{1 + \sqrt{1 - u_n}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - (1 - u_n)}{1 + \sqrt{1 - u_n}}$$
$$= \frac{1}{5} \times \frac{u_n}{1 + \sqrt{1 - u_n}} < \frac{1}{5} \times \frac{u_n}{1 + 0} < u_n$$

Et voilà le travail, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{1 - l}\right) \Leftrightarrow 5l = 1 - \sqrt{1 - l} \Leftrightarrow 5l - 1 = -\sqrt{1 - l}$$

Maintenant on peut élever au carré mais on n'aura qu'une implication parce que rien ne garantit que $5l - 1$ soit du même signe que $-\sqrt{1 - l}$, c'est-à-dire négatif (en fait si parce que $u_0 = \frac{1}{5}$ et la suite est décroissante donc $l < \frac{1}{5}$, mettons que l'on ait rien vu).

$$(5l - 1)^2 = 1 - l \Leftrightarrow 25l^2 - 10l + 1 = 1 - l \Leftrightarrow 25l^2 - 9l = 0 \Leftrightarrow 25l\left(l - \frac{9}{25}\right) = 0$$

Il y a deux limites possibles, $l = 0$ convient car $5 \times 0 - 1 = -\sqrt{1 - 0}$, par contre $l = \frac{9}{25}$ ne convient pas car $5 \times \frac{9}{25} - 1 = \frac{4}{5}$ et $-\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$

Finalement la suite est décroissante, minorée par 0, elle converge vers la seule limite possible $l = 0$.

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1. On appelle (H_n) $0 < u_n < 1$

   (H_0) est vraie, il reste à montrer que (H_n) entraine (H_{n+1})

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < u_n + n < n + 1 \Rightarrow 0 < \frac{n + u_n}{n + 1} < 1$$

   Ce qui montre que $0 < u_{n+1} < 1$

2.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n + u_n}{n + 1} - u_n = \frac{n + u_n - (n + 1)u_n}{n + 1} = \frac{n + u_n - nu_n - u_n}{n + 1} = \frac{n - nu_n}{n + 1} = \frac{n(1 - u_n)}{n + 1} > 0$$

Car $1 - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

3.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{n + u_n}{n + 1} - 1 = \frac{n + u_n - n - 1}{n + 1} = \frac{u_n - 1}{n + 1}$$

4. On appelle (H_n) : $u_n = 1 + \frac{a-1}{n!}$

$$1 + \frac{a - 1}{0!} = 1 + a - 1 = a = u_0$$

Donc (H_0) est vraie. Il reste à montrer que (H_n) entraine (H_{n+1})

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{n + 1} \Leftrightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{u_n - 1}{n + 1} = 1 + \frac{1 + \frac{a-1}{n!} - 1}{n + 1} = 1 + \frac{\frac{a-1}{n!}}{n + 1} = 1 + \frac{a - 1}{(n + 1)n!}$$
$$= 1 + \frac{a - 1}{(n + 1)!}$$

Ce qui montre (H_{n+1})

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1. a) f_n est définie, continue et dérivable à dérivée continue sur $[0,1]$.

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2(1 - x)(-1) = nx^{n-1} + 2(1 - x)$$

Pour $x \in]0,1[$, $x^{n-1} > 0$ et $1 - x > 0$ donc f_n est strictement croissante. On pourrait vérifier que $f_n'(0) > 0$ et que $f_n'(1) > 0$ mais même si ces dérivées avaient été nulle cela n'aura pas changer la conclusion.

b) $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, d'après 1.a) f_n est une bijection croissante de $]0,1[$ sur $]-1,1[$, donc $0 \in]-1,1[$ admet un unique antécédent $\alpha_n \in]0,1[$, c'est-à-dire tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

c)

$$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n^n - (1 - \alpha_n)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_n^n = (1 - \alpha_n)^2$$
$$f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - (1 - \alpha_n)^2 = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n = \alpha_n^n(\alpha_n - 1) < 0$$

Car $\alpha_n^n > 0$ et $1 - \alpha_n < 0$.

2. a) La fonction f_{n+1} est une bijection croissante donc

$$0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n) \Leftrightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$$

Par conséquent la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) la suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

c) i) La suite est croissante alors

$$0 < \alpha_n \leq \alpha$$

Cela entraine que

$$0 < \alpha_n^n \leq \alpha^n$$

Or, si $0 \leq \alpha < 1$ alors la limite de α^n est nulle, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$$

ii) On a vu au 1. c) que

$$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n^n = (1 - \alpha_n)^2$$

Ce qui entraine, d'après 2. c) i) que

$$\lim_{n\to+\infty} (1 - \alpha_n)^2 = 0$$

Autrement dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$$

Ce qui signifie que $\alpha = 1$, (comme $0 < \alpha_n < 1$ et que $(\alpha_n)_{n\to+\infty}$ admet une limite α entraine que $0 \leq \alpha \leq 1$), il y a une contradiction avec l'hypothèse $\alpha < 1$, par conséquent $\alpha = 1$.

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

$$u_n = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Avec

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Si f admet une limite lorsque $x \to 0$, avec $x \neq 0$ alors cette limite est la même que celle de u_n.
Il s'agit d'une forme indéterminée.
Première méthode
Règle de L'Hospital, on pose

$$g(x) = \sqrt{1+x} - 1 \quad \text{et} \quad h(x) = x$$

Alors

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad h'(x) = 1$$

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{1}{2}$$

Et alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Deuxième méthode
On pose

$$g(x) = \sqrt{1+x}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

Il s'agit du taux de variation, en 0, de la fonction g, sa limite est $g'(0)$. Comme $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = g'(0) = \frac{1}{2}$$

Et alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Troisième méthode

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = n\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = n\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = n\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

1.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1) + 2n + 1 - 2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. $\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\times n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{\times n}$$

Autrement dit

$$\frac{n}{2n} \leq u_n < \frac{n}{n+1}$$

Ce qui entraine que

$$\frac{1}{2} \leq u_n < 1$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et croissante donc elle converge vers une limite l.

Et on a $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$.

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

On va minorer u_n par une suite qui tend vers $+\infty$

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, 3 + |\sin(k)|\sqrt{k} < 3 + \sqrt{k} \leq 3 + \sqrt{n}$$

Ce qui entraine que

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \frac{1}{3 + |\sin(k)|\sqrt{k}} \geq \frac{1}{3 + \sqrt{n}}$$

Donc

$$u_n \geq \underbrace{\frac{1}{3+\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{3+\sqrt{n}}}_{\times n} = \frac{n}{3+\sqrt{n}} \to +\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

$$u_{n+1} - u_n = 4u_n^2 - u_n + \frac{1}{16}$$

Transformons le polynôme $4X^2 - X + \frac{1}{16}$

Son discriminant est

$$\Delta = 1 - 4 \times 4 \times \frac{1}{16} = 0$$

Donc, à un coefficient près, il s'agit d'une identité remarquable

$$4X^2 - X + \frac{1}{16} = 4\left(X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{64}\right) = 4\left(X - \frac{1}{8}\right)^2$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = 4u_n^2 - u_n + \frac{1}{16} = 4\left(u_n - \frac{1}{8}\right)^2 \geq 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence qu'elle est majorée par $\frac{1}{8}$.

Pour $u_0 = 0$ c'est vrai. Montrons que $u_n < \frac{1}{8}$ entraine que $u_{n+1} < \frac{1}{8}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{16} + 4u_n^2 < \frac{1}{16} + 4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{4}{64} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{1}{8}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{8}$ donc elle converge vers une limite l qui vérifie

$$l = \frac{1}{16} + 4l^2 \Leftrightarrow 4l^2 - l + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow 4\left(l - \frac{1}{8}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1}{8}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la seule limite possible $\frac{1}{8}$.

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1.
$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{\sin(n^2)}{2}\right| = \frac{1}{n} + \left|\frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$$

La suite de terme général $\frac{1}{n}$ est décroissante et pour tout $n \geq 5$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

Donc pour tout $n \geq 5$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2}\right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2. Pour tout $n \geq 5$

$$0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

$$u_1 = \frac{1}{3}e^{-u_0} > 0$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ que $u_n > 0$

Pour $n = 1$ c'est vrai. Montrons que $u_n > 0$ entraine que $u_{n+1} > 0$

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2+2}e^{-u_n} > 0$$

C'est une grosse évidence.

On en déduit que pour tout $n \geq 1$

$$0 < u_{n+1} = \frac{n}{n^2+2}e^{-u_n} < \frac{n}{n^2+2}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+2}=0$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=0\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

1.

$$u_{n+1}-u_n=-3+e^{u_n}$$

Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante il va falloir montrer que

$$-3+e^{u_n}<0\Leftrightarrow e^{u_n}<3\Leftrightarrow u_n<\ln(3)$$

Montrons cela par récurrence que $u_n<\ln(3)$

$e<3\Rightarrow\ln(e)<\ln(3)\Rightarrow u_0=1<\ln(3)$ pour $n=0$ c'est vrai.

Montrons que $u_n<\ln(3)$ entraine que $u_{n+1}<\ln(3)$

$$u_{n+1}=u_n-3+e^{u_n}<\ln(3)-3+e^{\ln(3)}=\ln(3)-3+3=\ln(3)$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<\ln(3)$

Cela montre que $u_{n+1}-u_n<0$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite l alors

$$l=l-3+e^l\Leftrightarrow 0=-3+e^l\Leftrightarrow e^l=3\Leftrightarrow l=\ln(3)$$

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_0<\ln(3)$ donc elle ne peut pas converger vers $\ln(3)$.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, si cette suite est minorée, elle converge or ce n'est pas le cas, donc elle n'est pas minorée. Une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

1. On pose (H_n), $u_n>1$, (H_0) est vraie, il reste à montrer que (H_n) entraine (H_{n+1})

$$u_n>1\Rightarrow\ln(u_n)>0\Rightarrow u_{n+1}=1+\ln(u_n)>1$$

2.

$$\forall x\geq 1, f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\leq 0$$

Car $x\geq 1$

La fonction est strictement décroissante, de plus $f(1)=\ln(1)-1+1=0$ donc pour tout $x>1$, $f(x)<0$.

3.

$$u_{n+1}-u_n=1+\ln(u_n)-u_n=f(u_n)<0$$

Car pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>1$. Ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers $l\geq 1$ telle que

$$l=1+\ln(l)\Leftrightarrow f(l)=0$$

Or pour tout $x>1$ $f(x)<0$ et $f(1)=0$ donc la seule limite possible est $l=1$.

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

1. C'est faux, par exemple $B=]0,1]$ est minorée, sa borne inférieure est 0 et $0\notin]0,1]$.
2. C'est faux, par exemple la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définit par :

$$u_n=n+(-1)^n\sqrt{n}$$

En transformant u_n, pour $n>0$:

$$u_n=n\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} - \left(n + (-1)^n\sqrt{n}\right) = 1 + (-1)^{n+1}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)$$

Donc pour $n = 2p$, $u_{2p+1} < u_{2p}$, ce qui montre que la suite n'est pas croissante même à partir d'un certain rang. En fait la suite augmente entre u_{2p-1} et u_{2p} et elle diminue un peu moins entre u_{2p} et u_{2p+1}.

3. Une suite de Cauchy à valeurs réelle converge vers une limite l donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \epsilon$$

Prenons $\epsilon = 1$ (n'importe quelle valeur convient) alors $|u_n - l| < 1$ ce qui équivaut à

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, -1 < u_n - l < 1$$

Ou encore à

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, l - 1 < u_n < l + 1$$

Ensuite l'ensemble $\{u_0, u_1, \dots, u_N\}$ est un ensemble fini, il admet donc un minimum et un maximum, notons les respectivement u_{n_0} et u_{n_1}, ce qui signifie que

$$\forall n \in \{0,1, \dots, N\}, u_{n_0} \le u_n \le u_{n_1}$$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \min\left(l - 1, u_{n_0}\right) \le u_n \le \max\left(l + 1, u_{n_1}\right)$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque : cela signifie nullement que l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un maximum et un minimum, cela peut être le cas ou pas.

4. On fait comme si on n'avait rien vu.

Commençons par écrire ce que signifie :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n| > A$$

Puis écrivons la négation de cette proposition, attention, il y a un piège, la négation de « $n > N, |u_n| > A$ » est « $n \le N$ ou $|u_n| \le A$ »

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N \quad \text{et} \quad |u_n| \le A \quad (1)$$

Car la négation de $(P) \Rightarrow (Q)$ est : (P) et $\text{non}(Q)$

Là, il ne faut pas s'enthousiasmer en se disant que $|u_n| \le A$ veut bien dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Rappelons ce que signifie qu'une suite est bornée

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \le A \quad (2)$$

Ou strictement inférieure à A si on veut.

Dans (1) il y a un « $\exists n \in \mathbb{N}$ » et dans (2) il y a un « $\forall n \in \mathbb{N}$ », cela pose problème parce que l'on ne voit pas bien comment on pourrait faire pour transformer le « il existe » en « pour tout ». Il y a sans doute un truc que l'on a pas vu, et si la proposition 4 était fausse malgré les apparences trompeuses. Si par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettait une sous-suite tendant vers l'infini et que les autres termes restent bornés, on serait dans le cadre de la proposition 4 et pourtant la suite n'est pas bornée, donnons un exemple d'une telle suite : pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$u_{2p} = p \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = 0$$

La limite de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite n'est pas $+\infty$ car il existe une sous-suite constante (et égale à 0) et pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car il existe une sous-suite tendant vers l'infini. Et voilà !

Allez à : Exercice 32 :

Correction exercice 33 :

On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \ge n \ge N \Rightarrow |u_m - u_n| < \epsilon$$

Ou encore

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

Nions cette proposition

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \text{ et } |u_{n+p} - u_n| > \epsilon \quad (1)$$

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$$

$$|u_{n+p} - u_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \underbrace{\frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p}}_{\times p} = \frac{p}{n+p}$$

Ensuite on choisit p de façon à ce que $|u_{n+p} - u_n|$ ne tende pas vers 0, $p = n$ convient

Revenons à (1), prenons $\epsilon = \frac{1}{2}$, n quelconque (ici il n'y a pas besoin d'en prendre un en particulier, cela marche avec tous !) et $p = n$, cela montre que (1) est vrai, autrement dit que $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Malheureusement cela ne suffit pas pour montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ tend vers l'infini, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy et elle ne tend pas vers ∞.

Il faut rajouter que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante. Pour tout $n \geq 2$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

Ce qui entraine que

$$u_{n+1} > u_n$$

La suite est croissante et elle n'est pas de Cauchy donc elle tend vers $+\infty$.

Remarque :

Si ce résultat ne vous parait pas évident, démontrons-le, nous savons que si $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée alors elle converge, donc c'est une suite de Cauchy.

La contraposée de cette phrase mathématique est

Si $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas de Cauchy alors elle n'est pas croissante ou elle n'est pas majorée.

Comme elle est croissante, elle n'est pas majorée.

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. Nous allons montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
   Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy on va montrer

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \text{ et } |u_{n+p} - u_n| > \epsilon \quad (1)$$

$$|u_{n+p} - u_n| = \left|1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+p}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+p}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+p}}}_{\times p}$$

$$= \frac{p}{\sqrt{n+p}}$$

Ensuite on choisit p de façon à ce que $|u_{n+p} - u_n|$ ne tende pas vers 0, $p = n$ convient

$$|u_{n+p} - u_n| > \frac{n}{\sqrt{n+n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Revenons à (1), prenons $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, n quelconque (ici il n'y a pas besoin d'en prendre un en particulier, cela marche avec tous !) et $p = n$, cela montre que (1) est vrai, autrement dit que $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

2.

a)

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

D'autre part

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow 2\sqrt{n} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n} < 2\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ce qui entraine que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) On applique le 2.a pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$

Première méthode

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+1}} < 2\left(\sqrt{1+1}-\sqrt{1}\right) < \frac{1}{\sqrt{1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2+1}} < 2\left(\sqrt{2+1}-\sqrt{2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{\sqrt{(n-1)+1}} < 2\left(\sqrt{(n-1)+1}-\sqrt{n-1}\right) < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Puis on fait la somme de ces n lignes

$$u_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right) < u_n$$

En simplifiant tous les termes qui se simplifient

L'inégalité de droite donne l'inégalité de gauche demandée $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right) < u_n$

Et l'inégalité de gauche

$$u_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right) \Leftrightarrow u_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2$$
$$= \frac{-1+2(n+1)}{\sqrt{n+1}} - 1 = \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} - 1$$

Il faudrait montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} \Leftrightarrow 2n+1 < 2\sqrt{n(n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)^2 < 4n^2+4n$$

Seulement voilà, c'est faux !

Alors au lieu de faire la somme des n premières lignes on va faire la somme des $n-1$ premières lignes en ne gardant que l'inégalité de gauche.

$$u_n - 1 < 2\left(\sqrt{n}-1\right)$$

Ce qui entraine que

$$u_n < 2\sqrt{n} - 1$$

Et voilà. On a bien pour tout $n \geq 1$.

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

c) On divise ces inégalités par $\sqrt{n}$

$$\frac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}$$

Ce qui entraine que

$$2\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq 2-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$$

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

1. Pour $p=1$,

$$(H_1) \quad \forall n\in\mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Pour montrer cela on va calculer

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n(n+1)-n}{n(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2-n-n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} > 0$$

Ce qui montre que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Montrons que (H_p) entraine (H_{p+1})

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}+\frac{1}{(n+p+1)^2} < \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+p+1)^2}$$

Il faut montrer que cette expression est majorée par

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p+1}$$

Pour cela nous allons calculer la différence

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p+1}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+p+1)^2}\right) = -\frac{1}{n+p+1}+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{(n+p+1)^2}$$
$$= \frac{-(n+p+1)(n+p)+(n+p+1)^2-(n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2}$$
$$= \frac{(n+p+1)[-(n+p)+(n+p+1)]-(n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2} = \frac{(n+p+1)-(n+p)}{(n+p)(n+p+1)^2}$$
$$= \frac{1}{(n+p)(n+p+1)^2} > 0$$

Donc

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+p+1)^2} < \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p+1}$$

En fait on aurait pu utiliser (H_1) en changeant n en $(n+p)$

Par conséquent

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}+\frac{1}{(n+p+1)^2} < \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p+1}$$

Ce qui montre que (H_p) entraine (H_{p+1}),

Et finalement

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}$$

2.

On rappelle que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

On choisit un $\epsilon > 0$ quelconque, et N tel que $\frac{1}{N} < \epsilon$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^+$

$$|u_{n+p} - u_n| = \left|1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

Ce qui montre que cette est une suite de Cauchy, comme il s'agit d'une suite réelle elle converge.

On verra en L2 que sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$.

Allez à : Exercice 35 :