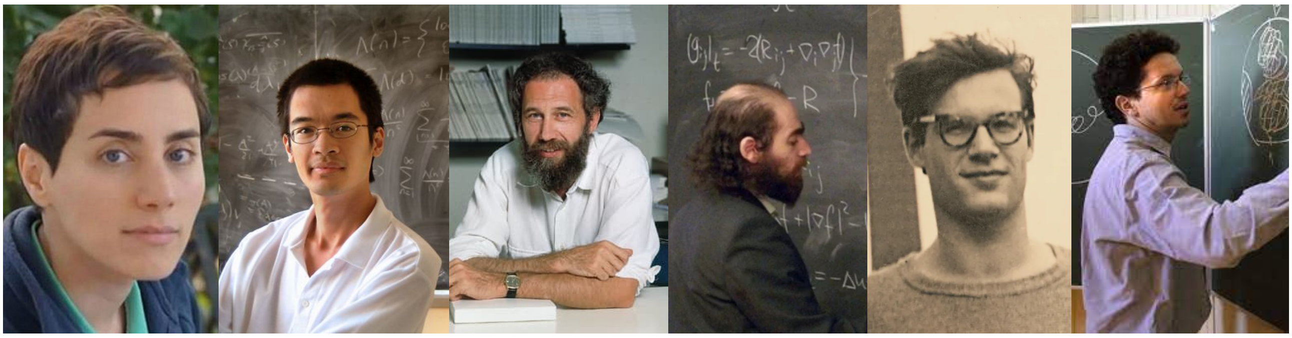
Intégrales multiples

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Résumé

Vous connaissez les intégrales de fonctions d'une variable (parfois appelée intrégrales simples). Le but de ce chapitre est de définir une notion d'intégrale pour les fonctions de plusieurs variables. L'une des nouveautés est la richesse des domaines sur lesquelles on peut intégrer. En effet, le domaine d'intégration d'une intégrale simple est toujours un intervalle (ou une union d'intervalles). Par contre, on peut intégrer une fonction de deux variables sur un rectangle, un disque, un domaine entouré par une courbe compliquée (on parle d'intégrales doubles). On peut intégrer une fonction de trois variables sur une sphère, un cylindre, un cône, un ellipsoïde, etc. (on parle d'intégrales triples). Des intégrales de fonctions de plusieurs variables interviennent dans toutes sortes de problèmes en physique.

Table des matières

[1] version du 5 février 2025

1 Intégrales doubles

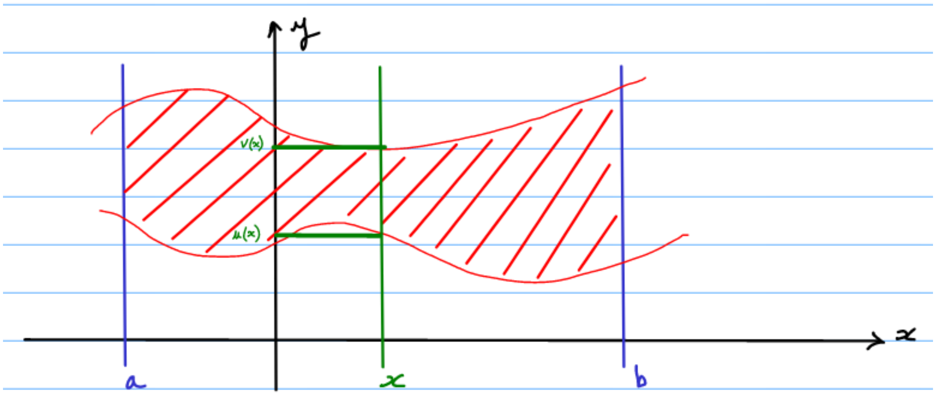
1.1 Domaines d'intégration

Dans le cas des intégrales double les domaines d'intégration sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. La première chose à faire est donc de décrire ces domaine de $\mathbb{R}^2$ de façon judicieuse. De multiples possibilités s'offrent à nous. Nous allons dans un premier temps nous intéresser à deux types spécifique de description, ou autrement dit de balayage du domaine : le balayage vertical puis le balayage horizontal.

Définition 1 (Balayage vertical).

$$\Delta_V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq v(x)\right\},$$

où u et v sont continues et derivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

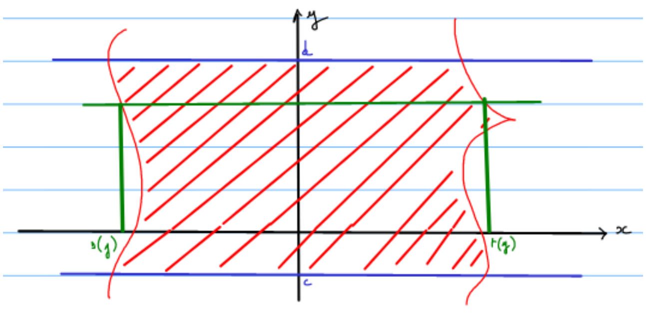


Ici dans le balayage vertical l'abscisse varie entre deux valeurs fixes a et b, tant dis que l'ordonnée y varie entre deux valeurs variables $u(x)$ et $v(x)$.

Définition 2 (Balayage horizontal).

$$\Delta_H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ s(y) \leq x \leq t(y)\right\},$$

où s et t sont continues et derivables de $[c,d]$ dans $\mathbb{R}$.



Ici dans le balayage horizontal l'ordonnée y varie entre deux valeurs fixes c et d, tandis que l'abscisse x varie entre deux valeurs variables $s(y)$ et $t(y)$

1.2 Calculs d'une integrale double avec les deux types de balayage

Définition 3 (Balayage vertical)**.**
Pour $(x, y) \in \Delta_V$, c'est à dire $a \leq x \leq b$ et $u(x) \leq y \leq v(x)$, on écrit

$$\iint_{\Delta_V} f = \iint_{\Delta_V} f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

On sait que **si** f est continue, positive, et derivable sur $[a, b]$, **alors**

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\ dx$$

est l'aire de la region du plan

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Or on a

$$f(x) = \int_0^{f(x)} 1\ dy$$

donc l'aire considerée est egale a

$$\mathcal{A} = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx = \iint_\Delta dxdy.$$

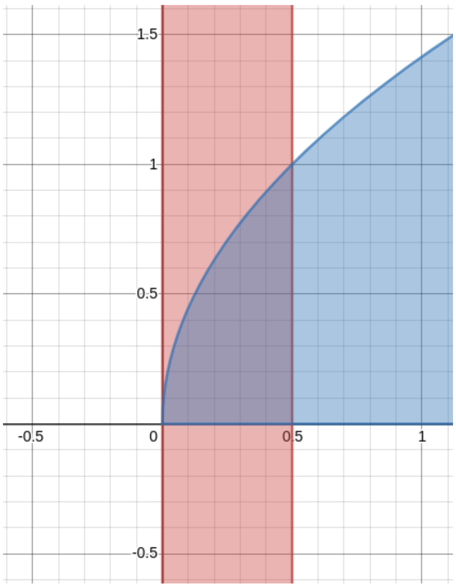
On definie l'aire d'un d'un domaine Δ de $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathcal{A}(\Delta) = \iint_\Delta 1.$$

Exemple 1.
Soit $p > 0$. On considere le domaine Δ definie comme

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq \frac{p}{2},\ 0 \leq y \leq \sqrt{2px} \right\},$$

Calculons l'aire de ce domaine par balayage vertical. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine Δ.



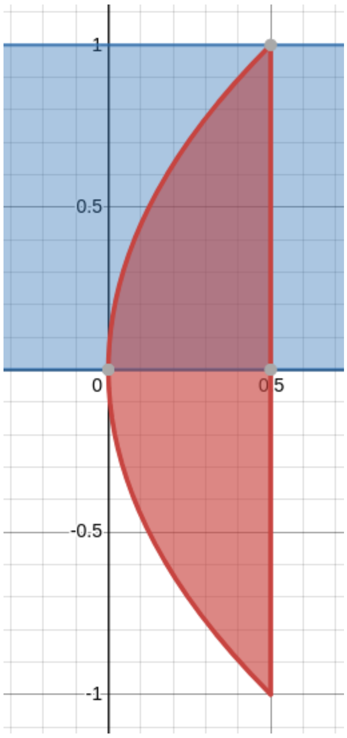
$$\mathcal{A} = \iint_\Delta 1\ dxdy = \int_0^{\frac{p}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2px}} 1\ dy \right) dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px}\ dx = \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{p}{2}} = \sqrt{2p} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{p^2}{3}.$$

Définition 4 (Balayage horizontal).
Pour $(x, y) \in \Delta_H$, c'est à dire $c \leq y \leq d$ et $s(y) \leq x \leq t(y)$, on écrit

$$\iint_{\Delta_H} f = \iint_{\Delta_H} f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left(\int_{s(y)}^{t(y)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

Exemple 2.
Soit $p > 0$. On recalcule l'aire du domaine Δ de l'exemple précedent avec cette fois un balayage horizontal. On note de nouveau $\mathcal{A}$ l'aire du domaine Δ.

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq p,\ \frac{y^2}{2p} \leq x \leq \frac{p}{2} \right\}.$$



On a alors

$$\mathcal{A} = \iint_\Delta 1\ dxdy = \int_0^p \left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} dx \right) dy = \int_0^p \left(\frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p} \right)\ dy = \left[\frac{p}{2} y - \frac{y^3}{6p} \right]_0^p = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{6} = \frac{p^2}{3}$$

1.3 Théoremes de Fubini

Formalisons ce que nous venons de voir.

Théorème 1 (Fubini, 1er cas).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue definie sur* $\Delta = [a,b] \times [c,d]$*. On alors*

$$\iint_\Delta f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

Si f peut s'ecrire comme le produit de deux fonctions tels que

$$f(x,y) = g(x) \times h(y),$$

alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)\ h(y)\ dx\ dy = \int_a^b g(x)\ dx\ \times \int_c^d h(y)\ dy.$$

Exemple 3.
Soit $f(x,y) = x\cos(y)$, avec

$$\Delta = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

On a alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos(y)\ dx\ dy = \int_0^1 x\ dx\ \times \int_0^{\pi/2} \cos(y)\ dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \times [\sin(y)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 4.
Soit $f(x,y) = x^2y - 1$, avec

$$\Delta = [-1,1] \times [0,1].$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta} f(x,y)\ dx\ dy &= \iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\ dx\ dy \\
&= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x^2y-1)\ dy\right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(\left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1}\right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\ dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 \\
\iint_{\Delta} f(x,y)\ dx\ dy &= -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Théorème 2 (Fubini, 2ème cas).
Soit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continue et definie sur un ensemble borné Δ quelconque.

- *Pour tout $(x,y) \in \Delta$, il existe des valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x \leq b$*
- *Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c(x)$ et $d(x)$ tels que $c(x) \leq y \leq d(x)$,*

de telle sorte que

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)] \right\}.$$

On peut egalement decrire Δ de la facon suivante.

- *Pour tout $(x,y) \in \Delta$, il existe des valeurs $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c \leq y \leq d$*
- *Pour tout $y \in [c,d]$, il existe $a(y)$ et $b(y)$ tels que $a(y) \leq x \leq b(y)$*

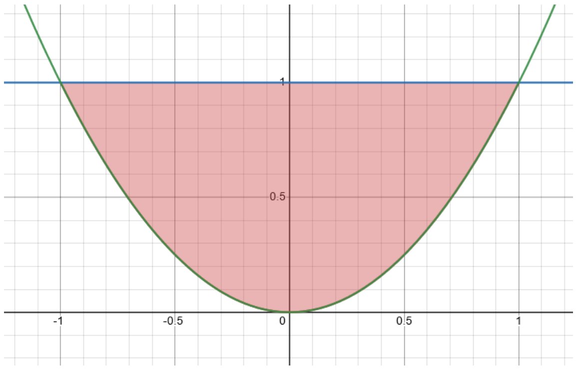
de telle sorte que

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x \in [a(y), b(y)] \right\}.$$

On a alors

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\ dy\right)\ dx = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

Exemple 5.
Soient $f(x,y) = x^2 y$, et Δ la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$, et la droite $y = 1$.



On peut alors écrire

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in [x^2,1]\}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta f(x,y)\ dx\ dy &= \iint_\Delta x^2 y\ dx\ dy \\
&= \int_{-1}^{1} x^2\ dx\ \int_{x^2}^{1} y\ dy \\
&= \int_{-1}^{1} x^2\ \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} \\
\iint_\Delta f(x,y)\ dx\ dy &= \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

1.4 Proprietés

Pour calculer les intégrales doubles, on utilise les proprietés suivantes.

Proposition 1.
1) *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a*

$$\iint_D (\lambda\ f(x,y) + \mu\ g(x,y))\ dx\ dy = \lambda \iint_D f(x,y)\ dx\ dy + \mu \iint_D g(x,y)\ dx\ dy.$$

2) *Si $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ou courbe, alors*

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{D_1} f(x,y)\ dx\ dy + \iint_{D_2} f(x,y)\ dx\ dy.$$

3) *Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$, alors*

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy \leq \iint_D g(x,y)\ dx\ dy.$$

4) *Nous avons l'inegalite suivante*

$$\left|\iint_D f(x,y)\ dx\ dy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\ dx\ dy.$$

5) *Si D est symetrique par rapport à l'axe des abscisses, c'est a dire pour tout $(x,y) \in D$ $f(x,-y) = f(x,y)$, alors em posant*

$$\Delta_1 = \{(x,y) \in \Delta, y \geq 0\}$$

on a

$$\iint_\Delta f = 2\iint_{\Delta_1} f.$$

1.5 Changement de variables

Théorème 3 (Changement de variables)**.**
Considerons l'intégrale

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$$

et un changement de variables

$$(x,y) = \big(a(u,v), b(u,v)\big).$$

Pour exprimer l'integrale en termes de la fonction

$$g(u,v) = f\big(a(u,v), b(u,v)\big)$$

, il faut exprimer D et le produit $dx\ dy$ en termes de (u,v).

- *Le domaine D se transforme en le domaine*

$$\Delta = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = (a(u,v), b(u,v)) \in D\big\}.$$

- *Les elements dx et dy se transforment comme*

$$dxdy = |\det(J(u,v))|\ dudv$$

où $\det(J(u,v))$ est le déterminant de la matrice Jacobienne

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

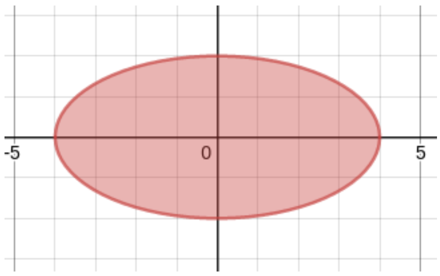
Donc on a

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \iint_\Delta g(u,v)\ \ |\det(J(u,v))|\ du\ dv.$$

Exemple 6.
On considere le domaine Δ definie comme

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

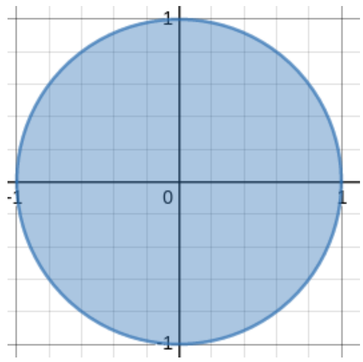


On pose $u = \dfrac{x}{a}$ et $v = \dfrac{y}{b}$, donc $x = au$ et $y = bv$. On a alors

$$|\det(J(u,v))| = \left|\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right| = |a \times b - 0 \times 0| = |a \times b| = ab$$

car a et b sont positifs. De plus Δ se transforme en le domaine D definie comme suit

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ u^2 + v^2 \leq 1\right\}.$$



On se retrouve a calculer l'aire du disque centre en l'origine et de rayon 1. On alors d'apres le theoreme precedent

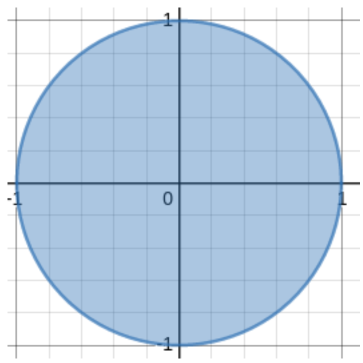
$$\iint_\Delta dx\ dy = \iint_D J(u,v)\ du\ dv = ab \iint_D du\ dv = \pi ab$$

Exemple 7.
Considerons l'integrale

$$I = \iint_\Delta x^2\ dx\ dy$$

avec

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$



On a une symetrie par rapport au axes des abscisses et ordonnées.

$$\begin{aligned}\iint_\Delta x^2\ dx\ dy &= 2\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy\right)\ dx \\ &= 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\ dx\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $x = \cos(t)$. On a alors $dx = -\sin(t)\ dt$.

- pour $x = 0$ on a $t = \frac{\pi}{2}$.
- pour $x = 1$ on a $t = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sqrt{1-\cos^2(t)}\ \sin(t)\ dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^2(t)\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)\ dt \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Cas des coordonnées polaires

Considerons l'integrale

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$$

et lw changement de variables en coordonnées polaires

$$(x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big).$$

Pour exprimer l'integrale en termes de la fonction $g(r,\theta) = f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$, il faut exprimer D et le produit $dx\ dy$ en termes de (r,θ).

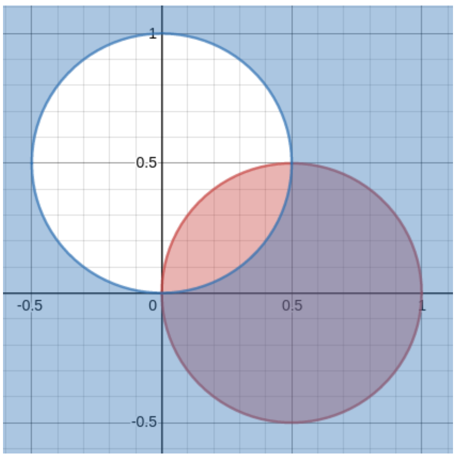
- Le domaine D se transforme en le domaine
$$\Delta = \big\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \in D\big\}.$$
- Les elements dx et dy se transforment comme
$$dx\ dy = r\ dr\ d\theta.$$

Exemple 8.
Calculons

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\ dx\ dy$$

avec

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \ x^2+y^2-x \leq 0\ ,\ \ x^2+y^2-y \geq 0\ ,\ y \geq 0\Big\}.$$



On effectue un changement de variable en coordonnées polaires donc

$$x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta) \quad \text{et} \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta.$$

Le domaine D devient

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-x \le 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 - r\cos(\theta) \le 0 \;\Leftrightarrow\; r-\cos(\theta) \le 0\\
&x^2+y^2-y \ge 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 - r\sin(\theta) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; r-\sin(\theta) \ge 0\\
&y \ge 0 \;\Leftrightarrow\; r\sin(\theta) \ge 0
\end{aligned}$$

Avec les deux premieres inegalite nous pouvons ecrire

$$\sin(\theta) - \cos(\theta) \le 0 \Leftrightarrow \sin(\theta) \le \cos(\theta).$$

On a alors

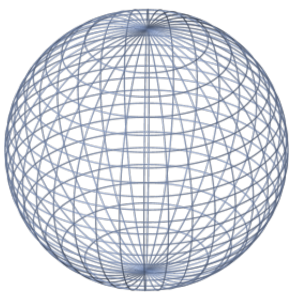
$$\sin(\theta) \le r \le \cos(\theta) \quad \text{et} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} r^2\,r\,dr\right) d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} r^3\,dr\right) d\theta\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)\right) d\theta\\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,d\theta\\
I &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

1.6 Application au calcul du volume d'une boule

Volume de la boule en coordonnées cartesiennes
Le volume de la boule $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$

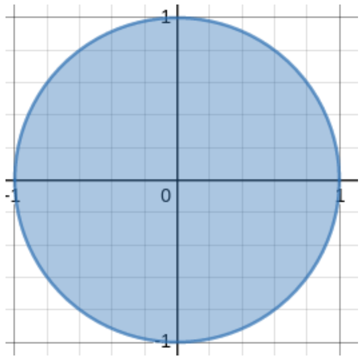


est deux fois le volume de la demi boule

$$B^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\; y \ge 0\right\},$$

comprise entre le plan xOy et le graphe de la fonction $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. On a alors

$$\text{Vol}(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy, \quad \text{où} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\right\}.$$



On peut décrire D comme l'ensemble

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in \big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2} \big] \Big\},$$

donc on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\ dy \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\ dy. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$, on a

$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad\Longrightarrow\quad -1 \le \sin t \le 1 \quad\Longrightarrow\quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2},$$

et

$$\frac{y^2}{1-x^2} = \sin^2 t \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a egalement

$$y = \sqrt{1-x^2}\ \sin t \quad\Longrightarrow\quad dy = \sqrt{1-x^2}\ \cos t\ dt.$$

En sachant que $\displaystyle 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = \pi$, on a alors

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\ dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\ dx \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} \\ \text{Vol}(B) &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Volume de la boule en coordonnées polaires.
Pour $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, calculons

$$\text{Vol}(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\ dy, \qquad \text{où} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}.$$

avec le changement de variables en coordonnées polaires,

$$(x,y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

Puisque
$$x^2+y^2=\rho^2$$
on a
$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-\rho^2}$$
et
$$(\rho,\varphi)\in[0,1]\times[0,2\pi[.$$
En sachant que
$$dx\ dy=\rho\,d\rho\ d\varphi$$
et en utilisant le theoreme de Fubini pour separer les variables, on a
$$\mathrm{Vol}(B)=2\iint_{[0,1]\times[0,2\pi[}\sqrt{1-\rho^2}\ \rho\,d\rho\ d\varphi=2\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\ \rho\,d\rho\ \int_0^{2\pi}d\varphi.$$
L'intégrale en φ est simple
$$\int_0^{2\pi}d\varphi=[\varphi]_0^{2\pi}=2\pi.$$
Pour l'autre, si on pose $t=1-\rho^2$ on a
$$\begin{aligned}&\rho=0\quad\Longrightarrow\quad t=1\qquad\text{et}\qquad\rho=1\quad\Longrightarrow\quad t=0,\\&\sqrt{1-\rho^2}=\sqrt{t}=t^{1/2},\\&dt=-2\rho\,d\rho\quad\Longrightarrow\quad\rho\,d\rho=-\frac{1}{2}\,dt,\end{aligned}$$
et on obtient enfin
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B)&=-\frac{2}{2}\,2\pi\int_1^0 t^{1/2}\,dt\\&=2\pi\int_0^1 t^{1/2}\,dt\\&=2\pi\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\ t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1\\&=2\pi\,\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\\\mathrm{Vol}(B)&=\frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

2 Intégrales triples

2.1 Calculs d'une integrale triple sur un compact elementaire

Sommation par pile

On appelle compact de $\mathbb{R}^3$ toute partie fermee et bornee de $\mathbb{R}^3$. On appelle compact elementaire de $\mathbb{R}^3$ toute partie Δ de $\mathbb{R}^3$ pouvant etre definie par :

Définition 5 (Sommation par pile)**.**
Pour $(x,y,z)\in\Delta_1$, avec ce domaine defnie comme
$$\Delta_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid(x,y)\in D\quad\text{et}\quad u(x,y)\le z\le v(x,y)\right\}$$
on a
$$\iiint_{\Delta_1}f=\int\int_{\Delta_1}f(x,y,z)\ dxdydz=\iint_D\left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)}f(x,y,z)\ dz\right)dxdy.$$

Cas particulier.
Soit f une fonction positive et continue sur D. L'integrale

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

est le volume de

$$\Delta_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \quad \text{et} \quad u(x,y) \leq z \leq v(x,y)\right\}$$

or

$$f(x,y) = \int_0^{f(x,y)} 1\ dz$$

donc le volume de Δ_1 est

$$\iiint_{\Delta_1} 1\ dxdydz.$$

Sommation par tranche

On appelle compact de $\mathbb{R}^3$ toute partie fermee et bornee de $\mathbb{R}^3$. On appelle compact elementaire de $\mathbb{R}^3$ toute partie Δ de $\mathbb{R}^3$ pouvant etre definie par :

Définition 6 (Sommation par tranche)**.**
$(x,y,z) \in \Delta_1$, avec ce domaine defnie comme

$$\Delta_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b,\ (x,y) \in D_z\right\},$$

on a

$$\iiint_{\Delta_2} f = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\ dxdy\right) dz.$$

2.2 Theoreme de Fubini

Théorème 4 (Theoreme de Fubini (1))**.**
Si

$$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$$

est un parallélepipède, alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\ f(x,y,z)$$

dans l'ordre qu'on veut.

Exemple 9.

$$
\begin{aligned}
\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2-2yz)\;dx\;dy\;dz &= \int_2^3 dz\;\int_1^2 dy\int_0^1 dx\;(x^2-2yz)\\
&= \int_2^3 dz\;\int_1^2 dy\;\Big[\;\frac{1}{3}x^3-2xyz\;\Big]_{x=0}^{x=1}\\
&= \int_2^3 dz\;\int_1^2 dy\;\Big(\frac{1}{3}-2yz\Big)\\
&= \int_2^3 \Big[\frac{1}{3}y-y^2z\Big]_{y=1}^{y=2}\;dz\\
&= \int_2^3 \Big(\frac{2}{3}-4z-\frac{1}{3}+z\Big)\;dz\\
&= \int_2^3 \Big(\frac{1}{3}-3z\Big)\;dz\\
&= \Big[\frac{1}{3}z-\frac{3}{2}z^2\Big]_2^3\\
&= \frac{3}{3}-\frac{27}{2}-\frac{2}{3}+\frac{12}{2}\\
&= \frac{1}{3}-\frac{15}{2}\\
&= -\frac{43}{6}
\end{aligned}
$$

Théorème 5 (Theoreme de Fubini (2)).
Si

$$\Omega = \Big\{\;(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\big|\;x\in[a,b],\;y\in[c(x),d(x)],\;z\in[e(x,y),g(x,y)]\;\Big\}$$

est un ensemble borné quelconque, alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\;dx\;dy\;dz = \int_a^b dx\int_{c(x)}^{d(x)} dy\int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\;f(x,y,z)$$

(ordre forcé).

Exemple 10.
Si Ω est le cylindre plein, de base le disque

$$D=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;|\;x^2+y^2\leq 1,\;z=0\big\}$$

et de hauteur 3, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \Big\{\;(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;|\;x^2+y^2\leq 1,\;0\leq z\leq 3\Big\}\\
&= \Big\{\;(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;|\;x\in[-1,1],\;y\in\big[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\big],\;z\in[0,3]\Big\}
\end{aligned}
$$

et donc

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (1-2yz)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\ dx\ dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\ dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \left[y - y^2 z\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\ dx \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z\right)\ dx \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\ dx \\
&= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\ dt \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

2.3 Changement de variables

Considerons l'intégrale

$$\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$$

et un changement de variables

$$(x,y,z) = \big(a(u,v,w), b(u,v,w), c(u,v,w)\big).$$

Pour exprimer l'integrale en termes de la fonction

$$g(u,v,w) = f\big(a(u,v,w), b(u,v,w), c(u,v,w)\big)$$

, il faut exprimer D et le produit $dx\ dy\ dz$ en termes de (u,v,w).

- Le domaine D se transforme en le domaine

$$\Delta = \big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) = (a(u,v,w), b(u,v,w), c(u,v,w)) \in D\big\}.$$

- Les elements dx, dy et dz se transforment comme

$$dxdydz = |\det(J(u,v,w))|\ dudvdw$$

  où $\det(J(u,v,w))$ est le déterminant de la matrice Jacobienne

$$J(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

On arrive finalement au théorème suivant.

Théorème 6 (Changement de variables).

$$\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \iiint_\Delta g(u,v,w)\ \ |\det(J(u,v,w))|\ du\ dv\ dw.$$

Théorème 7 (Changement de variables en coordonnées cylindriques).
Si

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right.$$

alors $dx\ dy\ dz$ devient $r\ dr\ d\theta\ dz$

Exemple 11.
Calculons

$$I = \iint_D \int f(x,y,z)dxdydz$$

où

$$D = \left\{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2\right\}$$

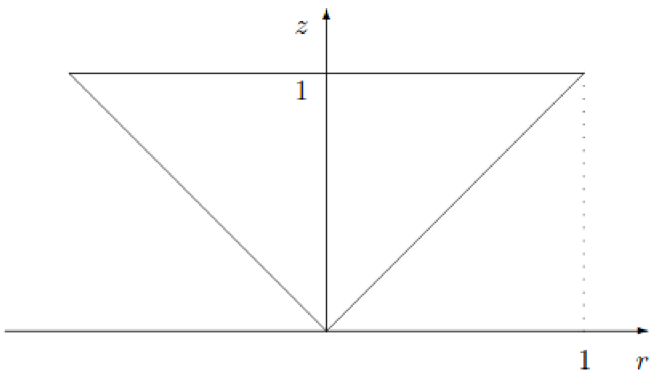
et

$$f(x,y,z) = |xyz|$$

Le domaine D est invariant par rotation d'axe Oz. On utilise les coordonnées cylindriques.

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



Le cône d'équation cartésienne

$$x^2+y^2 = z^2$$

a pour équation cylindrique $r = z$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t,z) \ \mid 0 \leq r \leq z \leq 1, -\pi \leq t \leq \pi\}$$

et

$$f(r\cos t, r\sin t, z) = r^2\ |\cos t \sin t|z = \frac{r^2}{2}|\sin 2t|z.$$

Donc

$$I = \iiint_\Delta f(r\cos t, r\sin t, z)rdrdtdz = \iiint_\Delta \frac{r^3}{2}|\sin 2t|zdrdtdz.$$

Lorsque (z,t) est fixé dans $\Delta_1 = [0,1]\times[-\pi,\pi]$, la variable r est comprise entre 0 et z. On calcule tout d'abord

$$I_r(z,t) = \int_0^z \frac{r^3}{2}|\sin 2t|zdr = \left[\frac{r^4}{8}|\sin 2t|z\right]_{r=0}^{r=z} = \frac{z^5}{8}|\sin 2t|.$$

Alors

$$I = \iint_{\Delta_1} I_r(z,t)dzdt.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\sin 2t|dt\right)\left(\int_0^1\frac{z^5}{8},dz\right)$$

Comme la fonction qui à t associe $|\sin 2t|$ est de période $\pi/2$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sin 2t|dt=4\int_0^{\pi/2}\sin 2tdt=[-2\cos 2t]_0^{\pi/2}=4$$

Par ailleurs,

$$\int_0^1 z^5dz=\frac{1}{6}$$

d'où

$$I=\frac{1}{12}$$

Théorème 8 (Changement de variables en coordonnées spheriques).
Si

$$\begin{cases} x=r\ \sin\varphi\ \cos\theta \\ y=r\ \sin\varphi\ \sin\theta \\ z=r\ \cos\varphi \end{cases}$$

$dx\ dy\ dz$ *devient* $r^2\ \sin\varphi\ dr\ d\theta\ d\varphi$

Exemple 12.
Calculons

$$I=\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

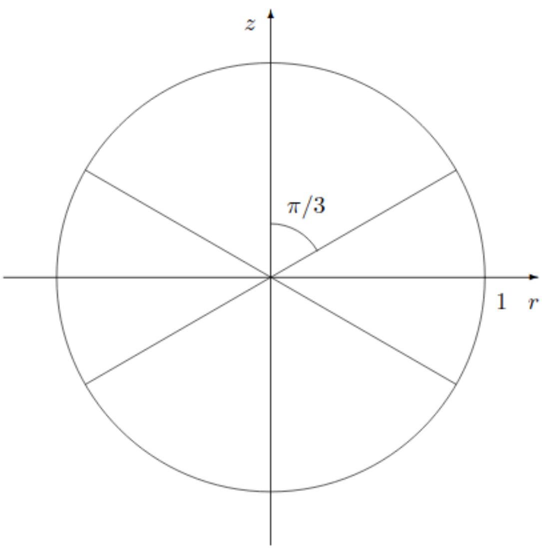
où D est le domaine intérieur à la sphère de centre O et de rayon 1 , et extérieur au cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle au sommet $\pi/3$, et

$$f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\varphi$$

Le dessin suivant représente une coupe suivant (Oz) de D



On intègre sur le domaine
$$\Delta =]0,1] \times [0,2\pi] \times \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$
et
$$f(\rho \sin\varphi \cos\theta,\ \rho \sin\varphi \sin\theta,\ \rho\cos\varphi) = \sin^2\varphi$$
Alors
$$I = \iiint_\Delta f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi \qquad = \iiint_\Delta \rho^2 \sin^3\varphi d\rho d\theta d\varphi$$
Comme les variables se séprent, on a immédiatement
$$\begin{aligned} I &= \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^3\varphi\, d\varphi\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{12}\cos(3\varphi) - \frac{3}{4}\cos(\varphi)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{2}{12} + \frac{3}{4}\right) \\ I &= \frac{11\pi}{18} \end{aligned}$$

3 Applications

Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale
$$\iint_D dx\, dy$$
represente le volume de la portion d'espace comprise entre le graphe de la fonction constante $f(x,y) = 1$ et le plan xOy. Ce solide est un cylindre de hauteur 1 et de base D, son volume est donc égal à l'aire de D multipliée par la hauteur, qui vaut 1.

Proposition 2 (Aire)**.**
Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

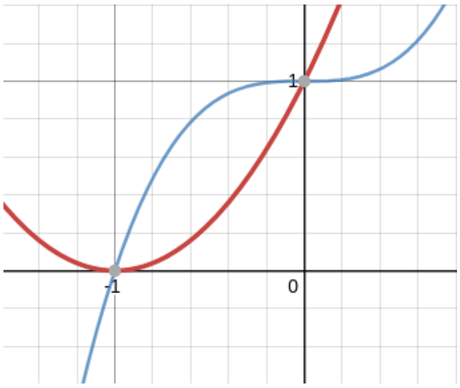
- *En général, on a*
$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy.$$
- *Si D est la portion du plan comprise entre l'axe Ox et le graphe d'une fonction positive*
$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$
c'est-à-dire si
$$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\ \},$$
alors on a :
$$\text{Aire}(D) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

En effet, si
$$D = \{\ (x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\ \},$$
on a
$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy\, dx = \int_a^b \left(\Big[y\Big]_0^{f(x)}\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exemple 13.
Calculons l'aire du domaine D de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation

$$y = x^2 + 2x + 1 \quad \text{et} \quad y = x^3 + 1.$$

D'abord on dessine le domaine D : la courbe $y = x^3 + 1$ n'est rien d'autre que $y = x^3$ translaté vers le haut de 1, et la courbe $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ est une parabole orientée vers le haut et centrée au point $x + 1 = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire au point $(-1, 0)$. Les deux courbes se rencontrent aux points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.



On a donc

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0,\ x^2 + 2x + 1 \leq y \leq x^3 + 1 \right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \iint_D dx\, dy = \int_{-1}^{0} \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy\, dx = \int_{-1}^{0} \left(\Big[y \Big]_{x^2+2x+1}^{x^3+1} \right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1)\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^{0} \\
&= 0 - \frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 \\
\text{Aire}(D) &= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Exemple 14.
Calculons l'intégrale

$$\iint_D (x^2 - 2y)\, dx\, dy,$$

où D est le domaine de l'exercice précédent.

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 - 2y)\, dx\, dy &= \int_{-1}^{0} \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} (x^2 - 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} \Big[x^2 y - y^2 \Big]_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dx \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(x^2(x^3+1) - (x^3+1)^2 - x^2(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)^2 \Big)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(-x^6 + x^5 + 6x^2 + 4x \Big)\, dx \\
&= \left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + 2x^3 + 2x^2 \right]_{-1}^{0} \\
\iint_D (x^2 - 2y)\, dx\, dy &= \frac{13}{42}
\end{aligned}$$

Proposition 3 (Volume).
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$.

- *En général, on a*
- *Si Ω est la portion d'espace comprise entre le plan xOy et le graphe d'une fonction positive*

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

c'est-à-dire si

$$\Omega = \{ \, (x,y,z) \mid (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \; z \in [0, f(x,y)] \, \},$$

alors on a

$$\mathsf{Vol}(\Omega) = \iint_D f(x,y) \; dx \; dy$$

En effet, si

$$\Omega = \{ \, (x,y,z) \mid (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \; z \in [0, f(x,y)] \, \},$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vol}(\Omega) &= \iiint_\Omega dx \; dy \; dz \\
&= \iint_D \left(\int_0^{f(x,y)} dz \right) dx \; dy \\
&= \iint_D \left(\Big[\, z \, \Big]_0^{f(x,y)} \right) dx \; dy \\
\mathsf{Vol}(\Omega) &= \iint_D f(x,y) \; dx \; dy.
\end{aligned}$$

Exemple 15 (Volume de la boule en coordonnées sphériques).
En coordonnées sphériques, la boule

$$B = \{ \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \, \}$$

devient

$$B' = \{ \, (r, \varphi, \theta) \mid r \in [0,1], \; \varphi \in [0, 2\pi[, \; \theta \in [0, \pi] \, \},$$

et, puisque

$$dx \; dy \; dz = r^2 \sin\theta \; dr \; d\varphi \; d\theta,$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathsf{Vol}(B) &= \iiint_B dx \; dy \; dz \\
&= \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi[\times [0,\pi]} \quad r^2 \sin\theta \; dr \; d\varphi \; d\theta \\
&= \int_0^1 r^2 \; dr \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_0^\pi \sin\theta \; d\theta \\
&= \frac{1}{3} \; 2\pi \; \Big[\, -\cos\theta \, \Big]_0^\pi \\
\mathsf{Vol}(B) &= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Proposition 4 (Quantités totale et moyenne).
Si $f \geq 0$ denote la concentration d'une matière (densité volumique) dans un volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ou la densité d'un courant ou d'une énergie, alors

la quantité totale *de matière / courant présente en Ω est egale à*

$$\iiint_\Omega f(x,y,z) dx \; dy \; dz.$$

la quantité moyenne *de matière / courant présente en Ω est egale à*

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_\Omega f(x,y,z)dx\ dy\ dz.$$

Exemple 16.
Un matériau est distribué dans le cube $\Omega = [0,R]^3$ selon la densité volumique

$$f(x,y,z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}.$$

La quantité totale du matériau est alors

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^R \left(\int_0^R (x+y) \left(\int_0^R \frac{1}{(z+1)^2}\ dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^R \left(\int_0^R (x+y) \left(\left[-\frac{1}{z+1} \right]_0^R \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^R \left(\int_0^R (x+y) \left(\frac{-1}{R+1} + 1 \right) dy \right) dx \\
&= \frac{R}{R+1} \int_0^R \left(\left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^R \right) dx = \frac{R}{R+1} \int_0^R \left(Rx + \frac{1}{2}R^2 \right) dx \\
&= \frac{R}{R+1} \left[\frac{1}{2}Rx^2 + \frac{1}{2}R^2 x \right]_0^R = \frac{R}{R+1} \left(\frac{1}{2}R^3 + \frac{1}{2}R^3 \right) \\
\iiint_\Omega f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz &= \frac{R^4}{R+1}.
\end{aligned}$$

et puisque $\mathrm{Vol}(\Omega) = R^3$, le volume moyen du matériau dans le cube est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_\Omega f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \frac{1}{R^3} \frac{R^4}{R+1} = \frac{R}{R+1}.$$

Proposition 5 (Centre de masse).
Si $\mu \geq 0$ denote la densité de masse, et $r(x,y,z)$ denote la distance d'un point (x,y,z) depuis un point fixe P ou une droite fixe Δ, alors

La masse totale : présente en Ω est

$$M = \iiint_\Omega \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz.$$

Le centre de masse : (ou centre d'inértie, ou encore baricentre) est le point G de coordonnées (x_G, y_G, z_G) telles que

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M} \iiint_\Omega x\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz \\
y_G &= \frac{1}{M} \iiint_\Omega y\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz \\
z_G &= \frac{1}{M} \iiint_\Omega z\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz
\end{aligned}$$

Le moment d'inértie *par rapport à P ou à Δ est*

$$\frac{1}{M} \iiint_\Omega r^2(x,y,z)\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz.$$

Un matériau est **homogène** *si sa densité de masse est constante. Si cette constante n'est pas spécifiée, on peut supposer que $\mu(x,y,z) = 1$ pour tout (x,y,z).*

Exemple 17.
Trouvons le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$\Omega = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq R^2,\ z \in [0,H],\ y \geq 0 \,\}.$$

Il convient de travailler en coordonnées cylindriques

$$\Omega' = \{\, (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,\pi],\ z \in [0,H] \}.$$

La masse totale est alors

$$M = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega'} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^H dz = \frac{\pi\, R^2 H}{2}.$$

Puisque

$$\int_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \Big[\, \sin\varphi \Big]_0^{\pi} = 0,$$

et

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \Big[-\cos\varphi \Big]_0^{\pi} = 2,$$

le centre de masse G a coordonnées cartesiennes

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} x\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega'} \rho\cos\varphi\ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\, d\rho \int_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^H dz = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} y\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\, d\rho \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^H dz = \frac{2}{\pi\, R^2 H}\ \frac{R^3}{3}\ 2\ H = \frac{4R}{3\pi} \\
z_G &= \frac{1}{M}\iiint_{D} z\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{M}\int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^H z\, dz = \frac{2}{\pi\ R^2 H}\ \frac{R^2}{2}\ \pi\ \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$G = \Big(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2}\Big).$$

Exemple 18.
Un sac de farine tombe par terre et la farine s'éparpille au sol avec une concentration non homogène

$$f(x,y) = \frac{1}{\Big(\sqrt{x^2+y^2}+1\Big)^2}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculons les quantités totale et moyenne de farine éparpillée dans le disque de rayon $R > 0$ autour du sac. La fonction f se simplifie en coordonnées polaires, car on a

$$f(\rho,\varphi) = \frac{1}{(\rho+1)^2}$$

et le disque en coordonnées polaires est

$$D_R = \{\, (\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi[\, \}.$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\text{Quantité totale} &= \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\ d\rho\ d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right)\ d\rho \\
&= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right)\ d\rho \\
&= 2\pi \left[\ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1}\right]_0^R \\
&= 2\pi\ \left(\ \ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - \ln(1) - 1\right) \\
\text{Quantité totale} &= 2\pi\ \left(\ \ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\text{Aire}(D_R) = \iint_{D_R} \rho\ d\rho\ d\varphi = \int_0^R \rho\ d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\ 2\pi = \pi R^2
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Quantité moyenne} &= \frac{1}{\text{Aire}(D_R)}\ \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\ d\rho\ d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi R^2}\ 2\pi\ \left(\ \ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right) \\
\text{Quantité moyenne} &= \frac{2}{R^2}\ \left(\ \ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right)
\end{aligned}
$$

Exemple 19.
Calculons le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B et du cylindre C suivants

$$
\begin{aligned}
B &= \Big\{(r,\varphi,\theta)\ |\ r \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [\pi/2,\pi]\Big\} \\
C &= \Big\{(\rho,\varphi,z)\ |\ \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,R]\Big\},
\end{aligned}
$$

ayant densité de masse $\mu(x,y,z) = z^2$. La masse totale de Ω est

$$
M_\Omega = M_B + M_C
$$

avec $\mu(x,y,z) = r^2 \cos^2\theta$ sur B. On a donc

$$
\begin{aligned}
M_B &= \iiint_B r^2 \cos^2\theta\ r^2 \sin\theta\ dr\ d\varphi\ d\theta = \int_0^R r^4\ dr\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\ d\theta \\
&= \frac{R^5}{5}\ 2\pi\ \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2\pi R^5}{15} \\
M_C &= \iiint_{C_R} z^2\ \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz = \int_0^R \rho\ d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_0^R z^2\ dz = \frac{R^2}{2}\ 2\pi\ \frac{R^3}{3} = \frac{\pi R^5}{3} \\
M_\Omega &= M_B + M_C = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right)\ \pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}.
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi\ d\varphi = 0,
$$

les coordonnées cartesiennes du baricentre G de Ω sont

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\ dr\ \int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\ d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\ d\rho\ \int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi\ \int_0^R z^2\ dz \\
x_G &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\ dr\ \int_0^{2\pi} \sin\varphi\ d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\ d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\ d\rho\ \int_0^{2\pi} \sin\varphi\ d\varphi\ \int_0^R z^2\ dz \\
y_G &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z^3\ dx\ dy\ dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\ dr\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta \sin\theta\ d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho\ d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_0^R z^3\ dz \\
&= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6}\ 2\pi\ \left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2}\ 2\pi\ \frac{R^4}{4} \right) \\
&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{3}\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{15R^3}{7}\ \frac{-1+3}{12} \\
z_G &= \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}$$

En conclusion, le baricentre

$$G = \left(0, 0, \frac{5R^3}{14}\right)$$

se trouve dans la partie cylindrique, car

$$\frac{5R^3}{14} > 0.$$

À noter que le baricentre se trouve à l'intérieur de Ω seulement si

$$\frac{5R^3}{14} \leq R,$$

ce qui se vérifie si

$$R \leq \sqrt{14/5}.$$

4 Exercices

Exercice 1

Calculer

$$I = \iint_D f(x,y) dxdy$$

où D est le rectangle de sommets $O, A(\pi, 0), B(0, 1), C(\pi, 1)$ et

$$f(x, y) = 2y \sin x.$$

[09.0002]

Exercice 2

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le triangle de sommets $O, A(1, 0), B(1, 1)$ et

$$f(x, y) = x - y$$

[09.0003]

Exercice 3

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le triangle de sommets $O, A(1, 0), B(0, 1)$ et

$$f(x, y) = x^2 y$$

[09.0005]

Exercice 4

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le triangle de sommets $O, A(2, 0), B(0, 2)$ et

$$f(x, y) = xe^x \sin y$$

[09.0006]

Exercice 5

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où D est le triangle de sommets $A(1, 0), B(0, 1), C(0, -1)$ et

$$f(x, y) = x + 2y.$$

[09.0001]

Exercice 6

Calculer

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

où

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x| \leq a, \ |y| \leq b \right\}$$

et

$$f(x,y) = (x+y)e^{x-y}$$

[09.0007]

Exercice 7

Calculer

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

où D est le trapèze dont la base est le segment de l'axe des x dont les abscisses sont comprises entre -1 et 1 et dont les trois autres côtés sont situés dans le demi-plan des y positifs et de longueur 1 , et

$$f(x,y) = y$$

[09.0008]

Exercice 8

Calculer

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

où D est l'ensemble des points du plan qui vérifient les inégalités

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1$$

et

$$f(x,y) = (x-y)^2$$

[09.0009]

Exercice 9

Calculer

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

où

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1 - \frac{y^2}{4} \right\}$$

et

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

[09.0010]

Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur Google Play et l'App Store.

Etudiez en musique !

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

Cours et exercices rédigés par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).