Ecole supérieure d'agro-développement international
istom

Examen de mathématiques

Jeudi 9 janvier 2025

Promotion 114

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.

Exercice 1 Suite de Fibonacci

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

On veut trouver une formule donnant le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on construit une suite de vecteurs $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0 \quad V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer V_0, V_1, V_2.
2. Grâce à la relation de récurrence sur $(u_n)_{n\geq 0}$, trouver une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $n \geq 0$ on peut écire $V_{n+1} = AV_n$.
3. En déduire V_n en fonction de V_0, A et n.
4. Diagonaliser A.
5. En déduire V_n, puis u_n.

[04.0037]

Exercice 2

On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et on considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, et montrer que $P(1) = 0$.

2. Déterminer les valeurs propres de A.

3. On note e_1 un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ_1, e_2 un vecteur propre associé à la deuxième plus grande valeur propre λ_2, et e_3 un vecteur propre associé à la troisième valeur propre λ_3. Déterminer e_1, e_2 et e_3.

4. Ecrire la matrice de passage P telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

5. Déterminer la solution $X(t)$ du système différentiel $X'(t) = AX(t)$. On pourra poser $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On donnera $X(t)$ en fonction de constantes, du paramète t, de λ_1, λ_2 et λ_3.

6. On pose $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Exprimer, si c'est possible, $X(t)$ en fonction uniquement de t.

[04.0038]