

# Examen de mathématiques

Mercredi 26 novembre 2025

Promotion 116

Antoine Géré

Document(s) autorisé(s) : ☐ Oui ☒ Non

Calculatrice autorisée : ☒ Oui ☐ Non

Remarques :

- Les exercices sont indépendants.
- Il sera tenu compte de la propreté de votre copie, ainsi que de la clarté et de la qualité de la rédaction et du raisonnement.
- **Ne pas écrire avec un crayon papier**, sauf pour dessiner et/ou annoter des croquis, le cas échéant.
- Utiliser les **notations** indiquées dans le texte et **justifier toutes vos réponses**.
- Le sujet est à conserver par l'étudiant-e.

## Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  ?
2. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
3. Déterminer le signe de  $f'$  sur  $D$ , puis en déduire le sens des variations de  $f$ . On présentera les résultats sous la forme d'un tableau de variation.
4. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D$ .
5. Déterminer les éventuelles asymptotes (branches infinies).
6. Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $C$  en son point d'abscisse  $x = 2$ .
7. **(BONUS)** Étudier la position relative de  $C$  et de  $T$ .
8. Construire, sur le même dessin, la courbe  $C$ , la tangente  $T$  et les asymptotes éventuelles.
9. **(BONUS)** Pourrait-il y avoir un axe de symétrie ? Lequel ? Qu'en est-il vraiment ?

[11.0106]

## Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x - 1)^2}$$

1. Quel est l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  ?
2. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in D$  on peut écrire

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad (1)$$

3. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  à l'aide de l'expression (1). Que pouvons nous en déduire sur le comportement de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  ?
4. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et étudier son signe.
5. En déduire les variations de  $f$ . On présentera les résultats sous forme d'un tableau de variation.
6. Déterminer les limites inconnues de  $f$  aux bornes de  $D$ .
7. Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $C$ , la courbe de  $f$ , en son point d'abscisse  $x = 2$ .
8. Construire, sur le même dessin, la courbe  $C$  et la tangente  $T$ .

[11.0107]

---

### Exercice 3 BONUS

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer  $f'(x)$  en tout point  $x$  où  $f$  est dérivable.
3. Étudier les variations de  $f$ . On pourra écrire la dérivée de  $f$  sous la forme

$$f'(x) = \frac{u(x)f(x)}{x^2}$$

et étudier la fonction  $u$  pour trouver son signe.

4. Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

[11.0108]

---