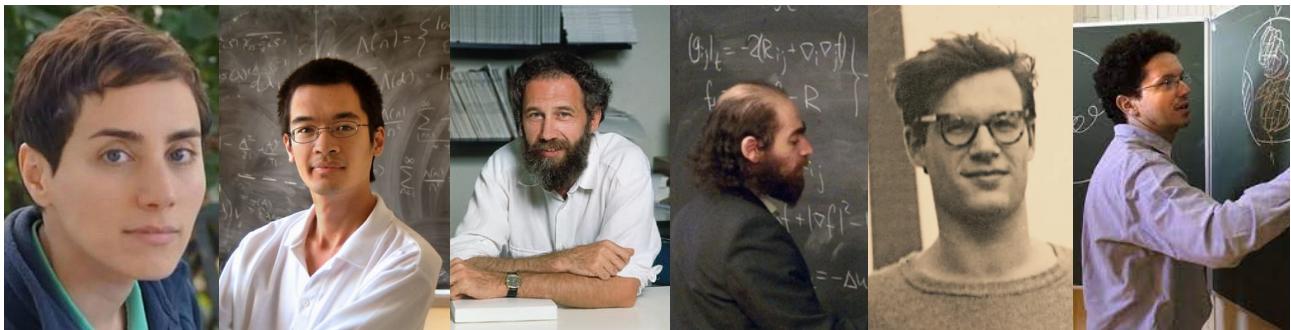


# Fonctions usuelles

Antoine Géré

Année 2024 - 2025<sup>1</sup>



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : [a.gere@istom.fr](mailto:a.gere@istom.fr).

## Résumé

Vous connaissez déjà des fonctions classiques : exponentielle, logarithme, cosinus, sinus et tangente. Nous allons ici ajouter de nouvelles fonctions à notre catalogue : cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique, et les fonctions inverses de l'ensemble de ses fonctions circulaires et hyperboliques

## Table des matières

<b>1 Logarithme et exponentielle</b>	<b>2</b>
1.1 Logarithme . . . . .	2
1.2 Exponentielle . . . . .	3
1.3 Fonctions puissances . . . . .	4
<b>2 Fonctions circulaires et circulaires inverses</b>	<b>4</b>
2.1 Cosinus et Arccosinus . . . . .	4
2.2 Sinus et Arcsinus . . . . .	5
2.3 Tangente et Arctangente . . . . .	6
2.4 Trigonométrie circulaire . . . . .	7
2.4.1 Le cercle trigonométrique . . . . .	7
2.4.2 Les fonctions sinus, cosinus, tangente . . . . .	7
2.4.3 Formulaire . . . . .	9
<b>3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses</b>	<b>10</b>
3.1 Cosinus hyperbolique et son inverse . . . . .	10
3.2 Sinus hyperbolique et son inverse . . . . .	12
3.3 Tangente hyperbolique et son inverse . . . . .	13
3.4 Trigonométrie hyperbolique . . . . .	15

<sup>1</sup>version du 2 février 2025

# 1 Logarithme et exponentielle

## 1.1 Logarithme

### Proposition 1.

*Il existe une unique fonction, notée*

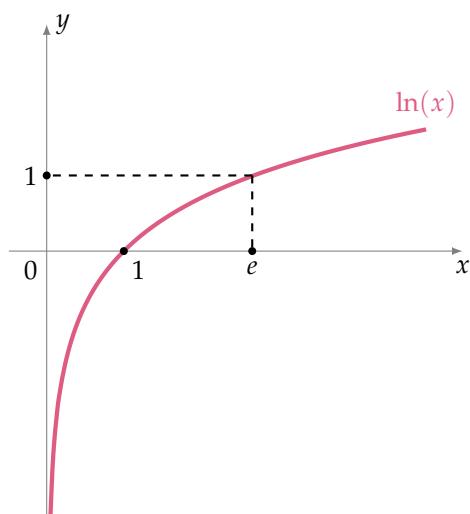
$$\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

*telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0 \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

*De plus cette fonction vérifie, pour tout  $a, b > 0$  :*

1.  $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ ,
2.  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ ,
3.  $\ln(a^n) = n \ln(a)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$
4.  $\ln$  est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ ,
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ,
6. la fonction  $\ln$  est concave et  $\ln(x) \leq x - 1$  pour tout  $x > 0$ .



**Remarque.**

- La fonction  $\ln x$  s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme népérien. Il est caractérisé par  $\ln(e) = 1$ . On définit le logarithme en base  $a$  par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

De sorte que  $\log_a(a) = 1$ . Pour  $a = 10$  on obtient le logarithme décimal  $\log_{10}$  qui vérifie

$$\log_{10}(10) = 1 \quad \text{et donc} \quad \log_{10}(10^n) = n.$$

Dans la pratique on utilise l'équivalence

$$x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)$$

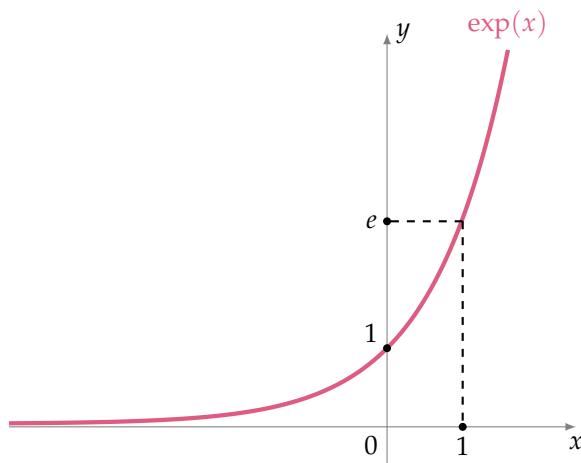
- Nous avons les deux limites usuelles suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

## 1.2 Exponentielle

### Définition 1.

La bijection réciproque de  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  s'appelle la fonction exponentielle, notée  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$ .



Pour  $x \in \mathbb{R}$  on note aussi  $e^x$  pour  $\exp x$ .

### Proposition 2.

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- $\exp(\ln(x)) = x$  pour tout  $x > 0$  et  $\ln(\exp(x)) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  est une fonction continue, strictement croissante vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

- La fonction exponentielle est dérivable et

$$\exp'(x) = \exp(x),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Elle est convexe et  $\exp(x) \geq 1 + x$ .

- Nous avons les deux limites usuelles suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0$$

**Remarque.**

La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  la relation  $\exp'(x) = \exp(x)$  et  $\exp(1) = e$ , où  $e \approx 2,718\dots$  est le nombre qui vérifie  $\ln e = 1$ .

### 1.3 Fonctions puissances

Par définition, pour  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ , on a

$$a^b = \exp(b \ln(a)).$$

**Remarque.**

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(a)\right)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(a)\right)$ , la racine  $n$ -ème de  $a$
- On note aussi  $\exp(x)$  par  $e^x$  ce qui se justifie par le calcul :  $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$ .
- Les fonctions  $x \mapsto a^x$  s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances

$$x \mapsto x^a.$$

**Proposition 3.**

Soit  $x, y > 0$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x^{a+b} = x^a x^b</math></li> <li>• <math>x^{-a} = \frac{1}{x^a}</math></li> <li>• <math>(xy)^a = x^a y^a</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(x^a)^b = x^{ab}</math></li> <li>• <math>\ln(x^a) = a \ln(x)</math></li> </ul> |
|--|---|

Comparons les fonctions  $\ln(x)$ ,  $\exp(x)$  avec  $x$  :

**Proposition 4.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty.$$

## 2 Fonctions circulaires et circulaires inverses

### 2.1 Cosinus et Arccosinus

Considérons la fonction cosinus

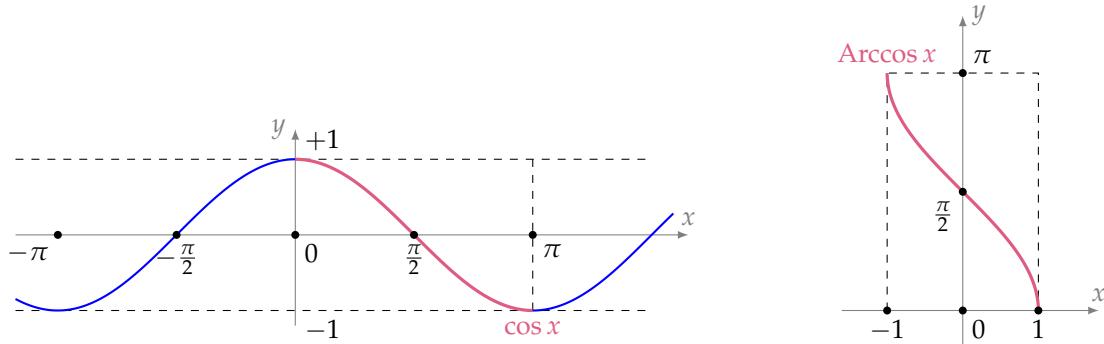
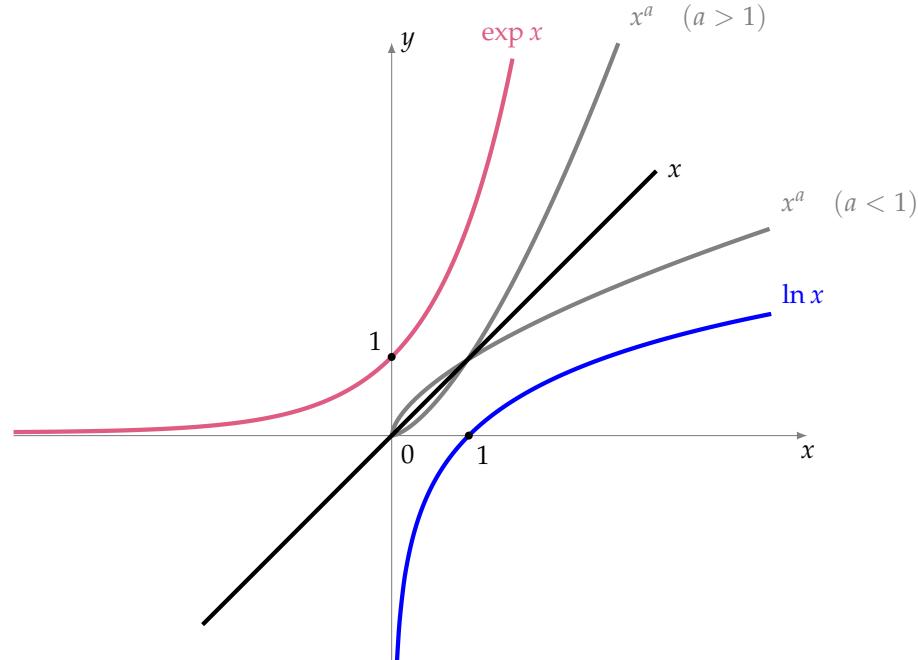
$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow [-1, 1] \\ x & \mapsto \cos(x) \end{cases}$$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle  $[0, \pi]$ . Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus** :

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos}(x)) = x$$

et

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x$$

Autrement dit, si  $x \in [0, \pi]$  on a alors

$$\cos(x) = y \iff x = \text{Arccos } y$$

Terminons avec la dérivée de  $\text{Arccos}$  :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

## 2.2 Sinus et Arcsinus

Considérons la fonction sinus

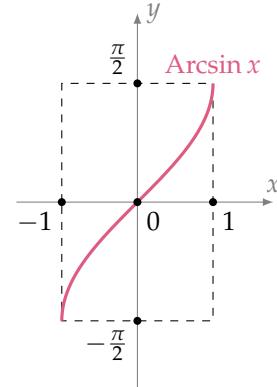
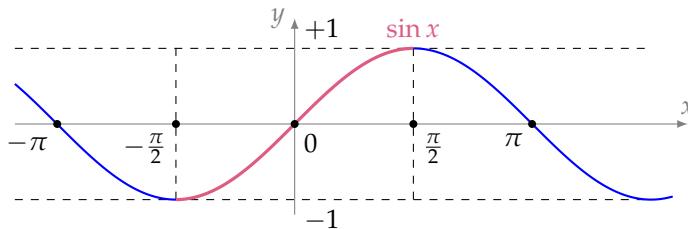
$$\sin : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow [-1, 1] \\ x & \mapsto \sin(x) \end{cases}$$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de sinus à l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Sur cet intervalle la fonction sinus est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** :

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$$

et

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

Autrement dit, si  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  on a alors

$$\sin(x) = y \iff x = \text{Arcsin}(y)$$

Terminons avec la dérivée de Arcsin :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## 2.3 Tangente et Arctangente

Considérons la fonction tangente

$$\tan : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan(x) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de  $\tan$  à l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ . Sur cet intervalle la fonction tangente est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\tan : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arctangente** :

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(x)) = x$$

et

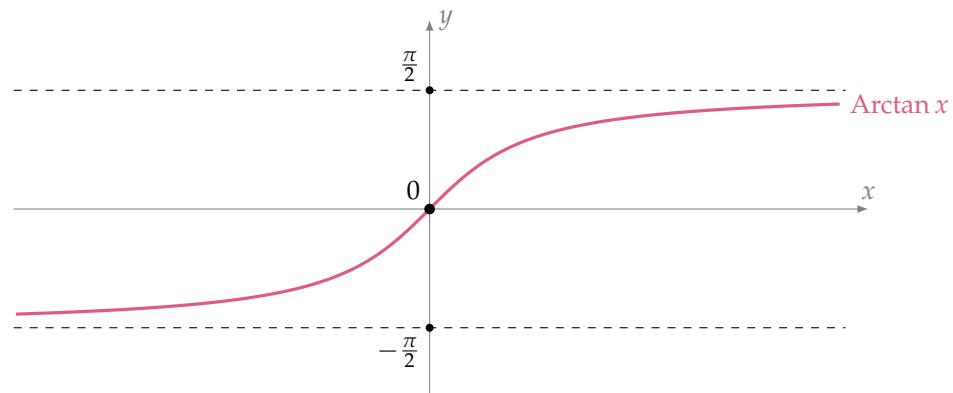
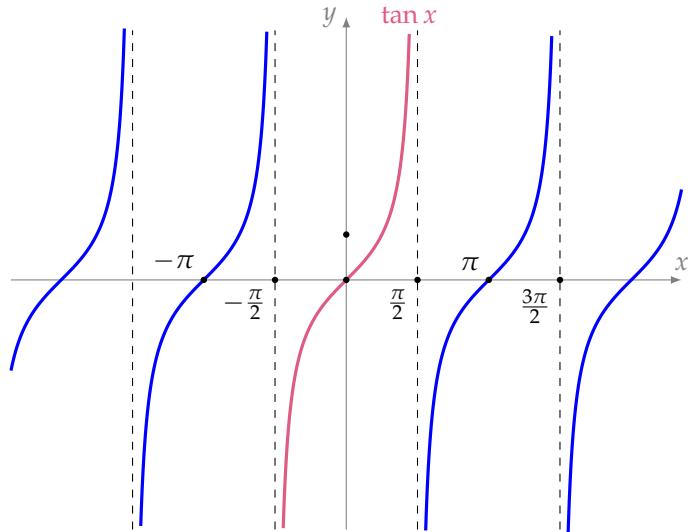
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

Autrement dit, si  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  on a alors

$$\tan(x) = y \iff x = \text{Arctan}(y)$$

Terminons avec la dérivée de Arctan :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



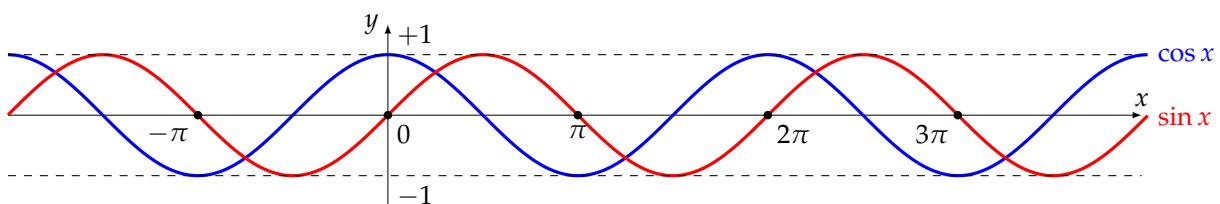
## 2.4 Trigonométrie circulaire

### 2.4.1 Le cercle trigonométrique

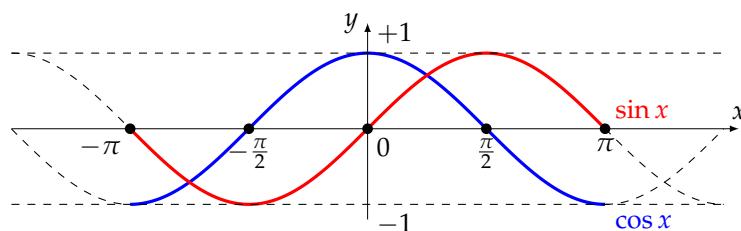
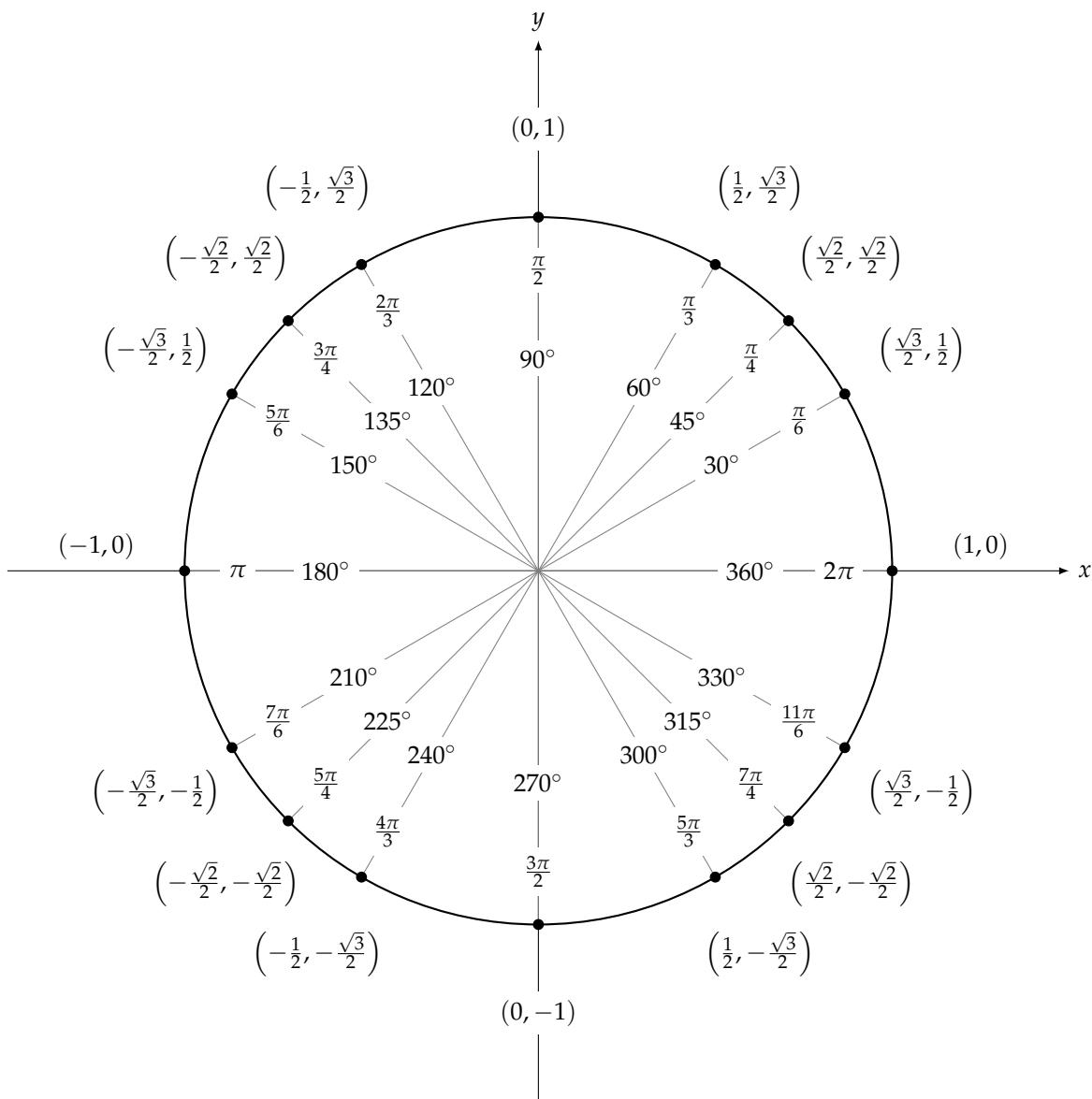
Voici le cercle trigonométrique (de rayon 1), le sens de lecture est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre. Les angles remarquables sont marqués de  $0$  à  $2\pi$  (en radian) et de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ . Les coordonnées des points correspondant à ces angles sont aussi indiquées.

### 2.4.2 Les fonctions sinus, cosinus, tangente

La fonction cosinus est périodique de période  $2\pi$  et elle paire (donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). La fonction sinus est aussi périodique de période de  $2\pi$  mais elle impaire (donc symétrique par rapport à l'origine).



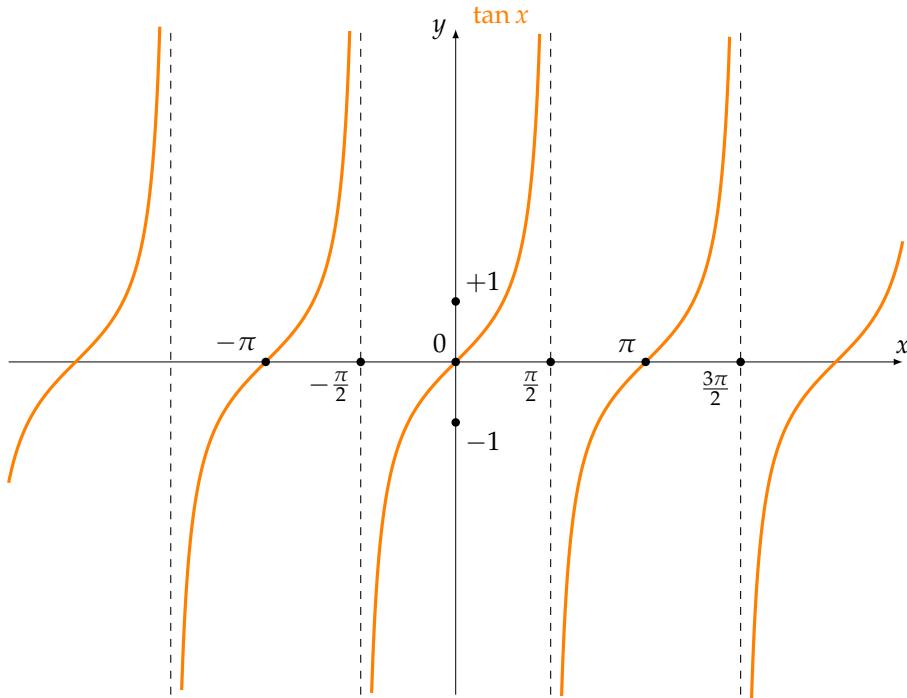
Voici un zoom sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .



Pour tout  $x$  n'appartenant pas à  $\{\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\}$  la fonction tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction  $x \mapsto \tan x$  est périodique de période  $\pi$ ; c'est une fonction impaire.



Voici les dérivées :

$$\cos(x)' = -\sin(x) \quad \sin(x)' = \cos(x) \quad \tan(x)' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

### 2.4.3 Formulaire

Voici un [lien](#) d'une vidéo présentant un moyen simple de retenir l'intégralité du formulaire de trigonométrie.

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

et

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

#### Les formules d'additions

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} \end{aligned}$$

Il est bon de connaître par cœur les **formules de duplications** suivantes (faire  $a = b$  dans les formules d'additions) :

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin(2a) &= 2\sin(a) \cdot \cos(a) \\ \tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \end{aligned}$$

#### Les formules de linéarisation :

$$\begin{aligned} \cos(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a) \cdot \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin(a) \cdot \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \end{aligned}$$

Les **formules de factorisation** :

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\end{aligned}$$

Enfin les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de  $\tan \frac{x}{2}$ . On pose

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

on a alors

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan(x) &= \frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}$$

Ces formules sont utiles pour le calcul de certaines intégrales par changement de variable, en utilisant en plus la relation

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

### 3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

#### 3.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , le cosinus hyperbolique est définie par la relation

$$\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow [1, +\infty[ \\ x & \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus hyperbolique à l'intervalle  $[0, +\infty[$ . Sur cet intervalle la fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante, donc la restriction

$$\text{ch} : [0, +\infty[ \rightarrow [1, +\infty[$$

est une bijection.

Sa bijection réciproque est la fonction **argument cosinus hyperbolique** :

$$\text{Argch} : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[.$$

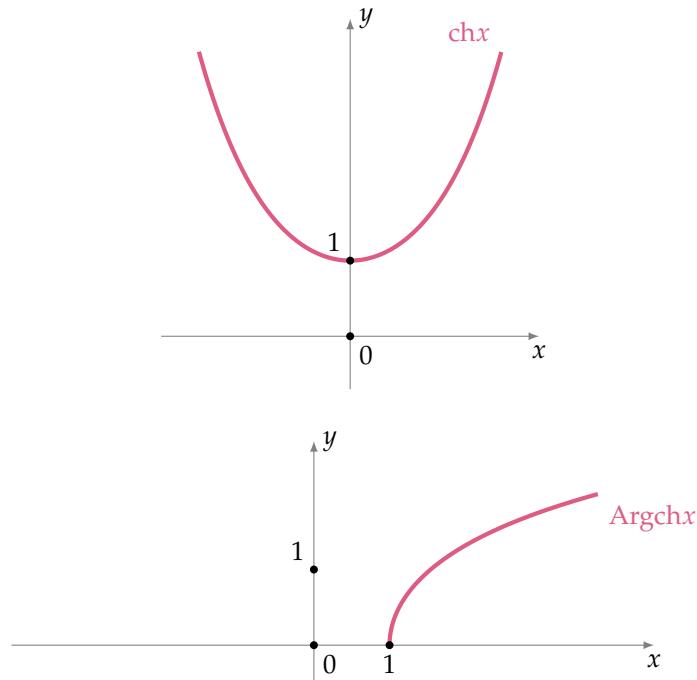
#### Proposition 5.

- Pour tout  $x \in [0, +\infty[$  et  $y \in [1, +\infty[$  on a

$$y = \text{ch}(x) \iff \text{Argch}(y) = x$$

- Pour tout  $x \in [0, +\infty[$  on a

$$\text{Argch}(\text{ch}(x)) = x$$



- Pour tout  $y \in [1, +\infty[$  on a

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Argch}(y)) = y$$

La fonction  $\operatorname{Argch} \circ \operatorname{ch}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  mais ce n'est pas l'identité sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $x < 0$  on a

$$\operatorname{Argch}(\operatorname{ch}(x)) = -x.$$

Terminons avec la dérivée de  $\operatorname{Argch}$  :

$$\forall y > 1, \quad \operatorname{Argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

**Définition de  $\operatorname{Argch}(y)$  pour  $y \geq 1$ .**

Pour tout  $x \geq 0$  et  $y \geq 1$  on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Argch}(y) = x &\iff y = \operatorname{ch}(x) \\ &\iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\iff 2y = e^x + e^{-x} \\ &\iff e^x + \frac{1}{e^x} = 2y \\ &\iff \frac{e^{2x} + 1}{e^x} = 2y \\ &\iff e^{2x} + 1 = 2y e^x \\ &\iff e^{2x} - 2y e^x + 1 = 0 \\ \operatorname{Argch}(y) = x &\iff (e^x)^2 - 2y e^x + 1 = 0 \end{aligned}$$

On étudie alors le trinôme du second degré :

$$X^2 - 2yX + 1 = 0$$

Or

$$\begin{aligned} X^2 - 2yX + 1 &= (X - y)^2 - y^2 + 1 \\ &= (X - y)^2 - (y^2 - 1) \\ &= \left( X - y - \sqrt{y^2 - 1} \right) \left( X - y + \sqrt{y^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

Le trinôme a deux racines réelles strictement positive,

$$y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2 - 1}$$

Or on souhaite  $x \geq 0$  on conserve donc uniquement la solution supérieure à 1. On a alors

$$\operatorname{Argch}(y) = x \iff e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

Donc pour  $y \geq 1$  on a

$$\operatorname{Argch}(y) = \ln \left( y + \sqrt{y^2 - 1} \right).$$

### 3.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , le sinus hyperbolique est définie par la relation

$$\operatorname{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow [1, +\infty[ \\ x & \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc elle forme une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **argument sinus hyperbolique** :

$$\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

#### Proposition 6.

- $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$
- $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x$ , et  $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$
- $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante et continue.
- $\operatorname{Argsh}$  est dérivable et

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  on a

$$y = \operatorname{sh}(x) \iff \operatorname{Argsh}(y) = x$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

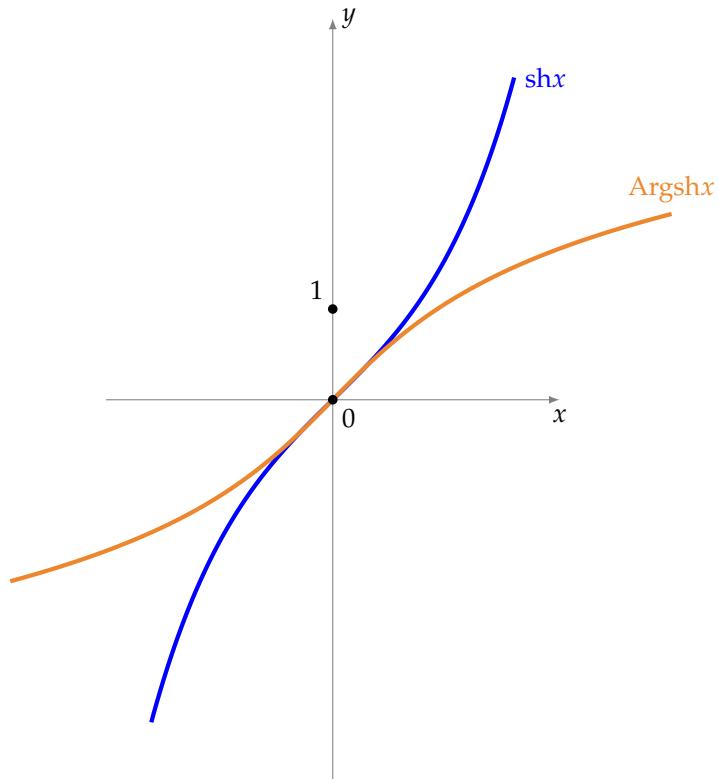
$$\operatorname{Argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x$$

- Pour tout  $y \in \mathbb{R}$  on a

$$\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(y)) = y$$

**Définition de  $\operatorname{Argsh}(y)$  pour  $y \geq 1$ .**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  on a



$$\begin{aligned}\operatorname{Argsh}(y) = x &\iff y = \operatorname{sh}(x) \\ &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{Argsh}(y) = x &\iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0\end{aligned}$$

On étudie alors le trinôme du second degré :

$$X^2 - 2yX - 1 = 0$$

Ses solutions sont  $\forall y \in \mathbb{R}$

$$y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \quad \text{et} \quad y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

On conserve donc uniquement la solution positive. On a alors

$$\operatorname{Argsh}(y) = x \iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

Donc pour  $y \in \mathbb{R}$  on a

$$\operatorname{Argsh}(y) = \ln \left( y + \sqrt{y^2 + 1} \right).$$

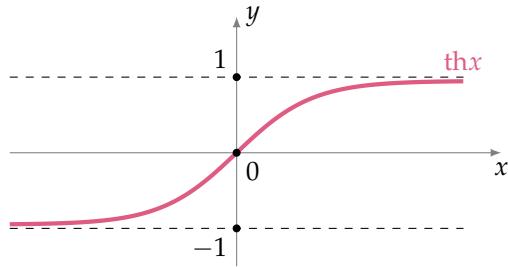
### 3.3 Tangente hyperbolique et son inverse

La fonction tangente hyperbolique est définie comme

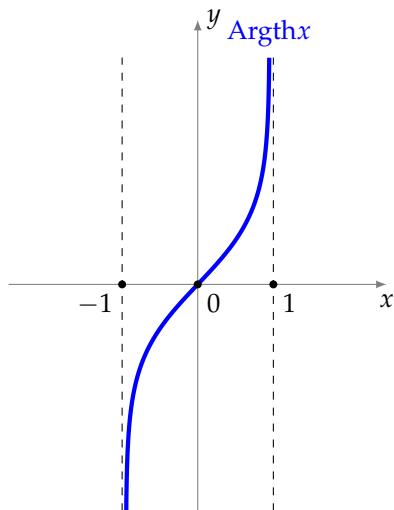
$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

La fonction  $\operatorname{th}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$$



la fonction tangente hyperbolique est donc une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1 [$ .  
 La bijection reciproque est appellée arrgument tangente hyperbolique et notée Argth.



#### Proposition 7.

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in ] -1, 1 [$  on a

$$y = \text{th}(x) \iff \text{Argth}(y) = x$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\text{Argth}(\text{th}(x)) = x$$

- Pour tout  $y \in ] -1, 1 [$  on a

$$\text{th}(\text{Argth}(y)) = y$$

La afonction tangente hyperbolique et sa bijection réciproque sont toutes les deux dérivable.

#### Proposition 8.

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\text{th}(x)' = 1 - \text{th}(x)^2.$$

- Pour tout  $y \in ] -1, 1 [$  on a

$$\text{Argth}(y)' = \frac{1}{1 - y^2}$$

**Définition de  $\text{Argth}(y)$  pour  $y \in ] -1, 1 [$ .**

$$\frac{1}{1 - y^2} = \frac{1}{(1 - y)(1 + y)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + y}$$

Les primitives de  $y \mapsto \frac{1}{1-y^2}$  sur  $] -1, 1[$  sont

$$y \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1-y) + \frac{1}{2} \ln(1+y) + K = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + K$$

avec  $K \in \mathbb{R}$ . Argth est la primitive de  $y \mapsto \frac{1}{1-y^2}$  qui s'annule en 0, donc pour  $y \in ] -1, 1[$  on a

$$\text{Argth}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

### 3.4 Trigonométrie hyperbolique

On a une première relation :

$$\ch^2 x - \sh^2 x = 1$$

#### Formules d'additions :

$$\begin{aligned}\ch(a+b) &= \ch a \cdot \ch b + \sh a \cdot \sh b \\ \sh(a+b) &= \sh a \cdot \ch b + \sh b \cdot \ch a \\ \th(a+b) &= \frac{\th a + \th b}{1 + \th a \cdot \th b}\end{aligned}$$

#### Formules de duplications :

$$\begin{aligned}\ch(2a) &= \ch^2 a + \sh^2 a = 2 \ch^2 a - 1 = 1 + 2 \sh^2 a \\ \sh(2a) &= 2 \sh a \cdot \ch a \\ \th(2a) &= \frac{2 \th(a)}{1 + \th(a)^2}\end{aligned}$$

#### Formules de factorisation :

$$\begin{aligned}\ch(p) + \ch(q) &= 2 \ch\left(\frac{p+q}{2}\right) \ch\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \ch(p) - \ch(q) &= 2 \sh\left(\frac{p+q}{2}\right) \sh\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sh(p) + \sh(q) &= 2 \sh\left(\frac{p+q}{2}\right) \ch\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sh(p) - \sh(q) &= 2 \ch\left(\frac{p+q}{2}\right) \sh\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \th(p) + \th(q) &= \frac{\sh(p+q)}{\ch(p) \ch(q)} \\ \th(p) - \th(q) &= \frac{\sh(p-q)}{\ch(p) \ch(q)}\end{aligned}$$

#### Dérivées :

$$\begin{aligned}\ch' x &= \sh x \\ \sh' x &= \ch x \\ \th'(x) &= 1 - \th^2 x = \frac{1}{\ch^2 x} \\ \text{Argch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1) \\ \text{Argsh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ \text{Argth}'(x) &= \frac{1}{1 - x^2} \quad (|x| < 1)\end{aligned}$$

#### Expressions des fonctions hyperboliques réciproque :

$$\begin{aligned}\text{Argch}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1) \\ \text{Argsh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \text{Argth}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

## 4 Exercices

### Exercice 1

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

1.  $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
2.  $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0.$

[Correction ▼](#)

[07.0000]

## Exercice 2

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

1.  $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$
2.  $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$
3.  $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$

[Correction ▼](#)

[07.0001]

## Exercice 3 Limites et exponentielle

Déterminer les limites suivantes

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}}$

[Correction ▼](#)

[07.0002]

## Exercice 4 Les principales formes indéterminées

Déterminer les limites suivantes

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\exp(x) - x^3)$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - x - \sqrt{x})$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)}$
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right)$
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}$

[Correction ▼](#)

[07.0003]

### Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions suivantes. C'est un exercice d'entraînement au calcul, on ne demande pas de déterminer les ensembles sur lesquels les fonctions sont dérивables.

1.  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 7.$
2.  $f(x) = \frac{4x-1}{7x+2}.$
3.  $f(x) = \frac{x}{x^2-3}.$
4.  $f(x) = 6\sqrt{x}.$
5.  $f(x) = 4 \sin x + \cos(2x).$
6.  $f(x) = \cos(-2x + 5).$
7.  $f(x) = \sin x^2.$
8.  $f(x) = \sin^2 x.$  (Que l'on peut aussi noter  $(\sin x)^2$ )
9.  $f(x) = \tan x.$
10.  $f(x) = (2x - 5)^4.$  (Développement déconseillé)
11.  $f(x) = \frac{7}{x^2-9}.$
12.  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3}.$
13.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}.$
14.  $f(x) = \left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^3.$
15.  $f(x) = x \ln x - x;$
16.  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right);$
17.  $f(x) = \ln \sqrt{x};$
18.  $f(x) = (\ln x)^2;$
19.  $f(x) = \ln(x^2)$
20.  $f(x) = \exp(x^2 + 3x - 1);$
21.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}};$
22.  $f(x) = e^{e^x};$
23.  $f(x) = e^{\sqrt{x} \ln x}$

[Correction ▼](#)

[07.0004]

### Correction de l'exercice 1 ▲

1. Posons  $X = e^x$ . Alors l'équation devient

$$X^2 - X - 6 = 0$$

Les racines de cette équation sont  $X = -2$  et  $X = 3$ . Mais seule la racine positive nous intéresse ici, car l'exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. On en déduit que l'équation admet une unique racine, qui est égale à  $\ln 3$ .

2. On pose de même  $X = e^x$ . L'équation devient

$$3X - \frac{7}{X} - 20 = 0$$

qui est encore équivalente à

$$3X^2 - 20X - 7 = 0$$

(on ne s'intéresse qu'aux solutions strictement positives). Les solutions de cette dernière équation sont  $X = -\frac{1}{3}$  et  $X = 7$ . Seule la seconde est strictement positive. On déduit donc que l'équation  $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$  admet une unique solution donnée par  $x = \ln(7)$ .

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

1. La première équation est équivalente à  $e^{x+y} = 10$  ou encore, en utilisant le logarithme, à  $x + y = \ln(10) = \ln(2) + \ln(5)$ . La seconde équation est équivalente, toujours en utilisant le logarithme, à  $x - y = \ln(2/5) = \ln(2) - \ln(5)$ . Ainsi, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y = \ln(2) + \ln(5) \\ x - y = \ln(2) - \ln(5) \end{cases}$$

On trouve alors facilement que le seul couple solution est  $x = \ln(2), y = \ln(5)$ .

2. On résoud le système classiquement. On trouve qu'il est équivalent à

$$\begin{cases} e^x = 3 \\ e^y = 4 \end{cases}$$

Prenant le logarithme, on trouve un seul couple solution donné par  $x = \ln(3)$  et  $y = \ln(4)$ .

3. Posons  $a = e^x$  et  $b = e^y$ . Le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} 5a - b = 19 \\ ab = 30 \end{cases} \iff \begin{cases} ba - 19 \\ a(5a - 19) = 30 \end{cases}$$

La seconde équation est une équation du second degré :  $5a^2 - 19a - 30 = 0$ . Ces solutions sont  $a = -6/5$  et  $a = 5$ . Mais  $a$  doit être strictement positif, donc  $-6/5$  ne convient pas. On a donc  $a = 5$  et  $b = 6$ . La seule solution du système est donc couple  $x = \ln(5)$  et  $y = \ln(6)$ .

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. La première limite donne une forme indéterminée  $\infty/\infty$ . On lève l'indétermination en factorisant par  $e^x$  au dénominateur :

$$\frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{e^x}{e^x(2 + e^{-3x})} = \frac{1}{2 + e^{-3x}}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = 0$$

on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{1}{2}$$

2. La deuxième limite n'est pas une forme indéterminée. En effet, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x + e^{-2x} = +\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2e^x + e^{-2x}} = 0$$


---

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. On factorise

$$\exp(x) - x^3 = \exp(x) \left( 1 - \frac{x^3}{\exp(x)} \right)$$

Par le théorème de croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\exp(x)} = 0$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{x^3}{\exp(x)} \right) = 1$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) \left( 1 - \frac{x^3}{\exp(x)} \right) = +\infty$$

2. On factorise

$$\ln(x) - x - \sqrt{x} = x \left( \frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Par le théorème de croissance comparée et les limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -1$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln(x)}{x} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty$$

3. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{1}{x}}$$

Or, par les limites usuelles et les opérations sur les limites,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) &= 1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) &= +\infty\end{aligned}$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

4. On factorise le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)} = \frac{x \left(7 + \frac{\ln(x)}{x}\right)}{\exp(x) \left(\frac{7x}{\exp(x)} + 1\right)} = \frac{x}{\exp(x)} \times \frac{7 + \frac{\ln(x)}{x}}{\frac{7x}{\exp(x)} + 1}$$

Par le théorème de croissance comparée et les opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 + \frac{\ln(x)}{x}\right) = 7, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x}{\exp(x)} + 1\right) = 1$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + \frac{\ln(x)}{x}}{\frac{7x}{\exp(x)} + 1} = 7$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \ln(x)}{7x + \exp(x)} = 0$ .

5. On pose  $u = \sqrt{3x}$  de sorte que si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $u \rightarrow +\infty$ . De plus,  $x = \frac{u^2}{3}$ . On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})} &= \frac{\ln\left(\frac{u^2}{3}\right)}{\exp(u)} \\ &= \frac{\ln(u^2) - \ln(3)}{\exp(u)} \\ &= \frac{2\ln(u) - \ln(3)}{\exp(u)} \\ &= 2\frac{\ln(u)}{\exp(u)} - \frac{\ln(3)}{\exp(u)}\end{aligned}$$

Finalement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\exp(\sqrt{3x})} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(2\frac{\ln(u)}{\exp(u)} - \frac{\ln(3)}{\exp(u)}\right) = 0$

6. On écrit  $x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \exp(-1)$  puis on pose  $u = 1/x$  de sorte que si  $x \rightarrow 0^+$  alors  $u \rightarrow +\infty$ .  
On a alors

$$\begin{aligned} x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right) &= x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \exp(-1) \\ &= \frac{1}{u} \exp(u) \exp(-1) \\ &= \exp(-1) \times \frac{\exp(u)}{u} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \exp(-1) \times \frac{\exp(u)}{u} = +\infty$$

7. On écrit

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} &= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}} \\ &= \frac{(x+2) - (x+7)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}} \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7} = +\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}) = +\infty$ .  
Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7}) = 0$$


---

### Correction de l'exercice 5 ▲

1.  $f'(x) = 12x^2 - 6x + 1$ .
2. Je pose  $u(x) = 4x - 1$  et  $v(x) = 7x + 2$ , ce qui donne  $u'(x) = 4$  et  $v'(x) = 7$ , j'applique la formule  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , et j'obtiens :

$$f'(x) = \frac{4(7x+2) - (4x-1) \times 7}{(7x+2)^2} = \frac{15}{(7x+2)^2}$$

Remarque : vous avez le droit d'écrire directement la deuxième ligne.

3. Je pose  $u(x) = x$  et  $v(x) = x^2 - 3$ , ce qui donne  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = 2x$  et j'obtiens :
4.  $f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$ .
5. La dérivée de  $x \mapsto \cos(2x)$  est  $x \mapsto -2 \sin(2x)$ , donc  $f'(x) = 4 \cos x - 2 \sin(2x)$ .
6. Je pose  $u(x) = -2x + 5$ , donc  $u'(x) = -2$  et j'applique  $(\cos u)' = -u' \sin u$ , donc  $f'(x) = 2 \sin(-2x + 5)$ .
7. Je pose  $u(x) = x^2$ , donc  $u'(x) = 2x$  et j'applique  $(\sin u)' = u' \cos u$ , donc  $f'(x) = 2x \cos(x^2)$ .

8. Je pose  $u(x) = \sin x$ , donc  $u'(x) = \cos x$  et j'applique  $(u^n)' = nu'u^{n-1}$  avec  $n = 2$ , donc  $f'(x) = 2\cos x \sin x$ . Et puisque je connais quelques formules de trigo :  $f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$ .

9.  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , on a donc :

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Remarque : on peut aussi l'écrire sous la forme :  $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ .

10. J'applique  $(u^n)' = nu'u^{n-1}$  :  $f'(x) = 4 \times 2 \times (2x-5)^3 = 8(2x-5)^3$ .

11. J'applique :  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ , donc  $f'(x) = 7 \times \left(-\frac{2x}{(x^2-9)^2}\right) = -\frac{14x}{(x^2-9)^2}$ .

12. J'applique  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ , donc  $f'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$ .

13. J'applique les deux formules précédentes et :  $f'(x) = -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{(\sqrt{x^2+2})^2} = -\frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$ .

14. Je pose  $u(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ , que je dérive :  $u'(x) = \frac{4(x+2)-(4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}$ , puis j'applique  $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ , donc  $f'(x) = 3 \times \frac{9}{(x+2)^2} \times \left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2 = \frac{27(4x-1)^2}{(x+2)^4}$ .

15.  $f'(x) = \ln(x)$

16.  $f'(x) = \frac{-1}{x}$

17.  $f'(x) = \frac{1}{2x}$

18.  $f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$

19.  $f'(x) = \frac{2}{x}$

20.  $f'(x) = (2x+3) \exp(x^2+3x-1)$

21.  $f'(x) = \frac{-e^{x/2}}{x^2}$

22.  $f'(x) = e^{x+e^x}$

23.  $f'(x) = e^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln(x)+2)$



istom

Ecole  
supérieure  
d'agro-  
développement  
international



Wolfram|Alpha est un moteur de recherche scientifique, une superbe calculatrice à tout faire. Disponible sur le navigateur mais également sur mobile avec une application téléchargeable sur [Google Play](#) et l'[App Store](#).



Etudiez en musique !





Étudiant(e) (Nom, Prénom) : .....

Promotion, groupe : .....

Email : .....

### Auteurs de ces notes de cours

D'après un cours de [Arnaud Bodin](#).

Revu et augmenté par [Antoine Géré](#).

Relu par (**coming soon**).