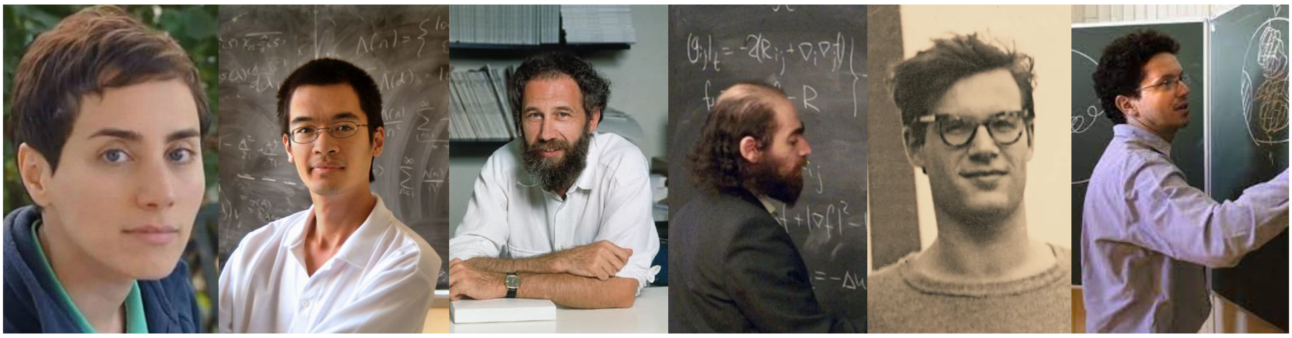
istom Ecole supérieure d'agro-développement international

Calcul matriciel

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : a.gere@istom.fr.

Résumé

Le concept mathématique de matrice est un outil fondamental dans de tres nombreux domaines, tant en mathématiques qu'en physique. Les matrices sont simplement des tableaux d'éléments.

Table des matières

[1] version du 28 novembre 2024

1 Notions sur les matrices

1.1 Definition

Définition 1.
Soit n et p deux entiers non nuls. On appelle **matrice** de dimension $n \times p$ (ou d'ordre $n \times p$) un tableau de n lignes et p colonnes de nombres. On note a_{ij} l'élément de la matrice situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Par la suite nous travaillerons avec des matrices représentéee entre deux parenthèses.

Remarque.
Pour une matrice A qui compte n lignes, p colonnes et a tout ses coefficients $a_{ij} \in \mathbb{R}$ on écrit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.

Regardons ensemble un exemple simple de matrice.

Exemple 1.
La matrice B definie comme suit

$$B = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

est une matrice d'ordre 2×3. Le coefficient b_{23} de la matrice B est $b_{23} = 120$.

Définition 2 (Egalité de deux matrices)**.**
Deux matrices A et B sont égales si, et seulement si, elles ont même dimension et que tous leurs éléments situés à la même place sont égaux.

Exemple 2.
Dire que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2-a & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & b+2 \end{pmatrix}$$

sont égales signifie que

$$\begin{cases} 2-a=1 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

1.2 Cas particuliers

Une matrice bien particulière est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 3 (Matrice nulle)**.**
Soit n et p deux entiers non nuls. La matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux a zéro est appelée la *matrice nulle* de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et est notée O_{np}. On a ainsi

$$O_{np} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ possède donc une unique matrice nulle.

Définition 4 (Matrice carrée)**.**
Soit n un entier non nul. Une matrice ayant le même nombre n de lignes et de colonnes est une *matrice carrée* d'ordre n.

Une matrice carrée s'écrit donc de la façon suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque.
Soit n et p deux entiers non nuls et une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Si $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Illustrons par un exemple cette définition.

Exemple 3.
La matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} -12 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée d'ordre ou dimension 3.

Définition 5 (Vecteur ligne)**.**
Une matrice formée d'une seule ligne et de n colonnes est une *matrice ligne* ou vecteur ligne.

Exemple 4.
La matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice ligne de dimension 1×3.

Définition 6 (Vecteur colonne)**.**
Une matrice formée de m lignes et d'une seule colonne est une *matrice colonne* ou vecteur colonne.

Exemple 5.
La matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix}$$

est une matrice colonne de dimension 3×1.

1.3 Opérations

Nous allons à présent présenter les différentes opérations possibles avec des matrices.

1.3.1 Addition de matrices

Définition 7.
La somme de deux matrices A et B de *même dimension* est la matrice notée $A + B$ obtenue en ajoutant les éléments de A et ceux de B situés à la même place.

Soit n et p deux entiers non nuls. Si on a deux matrices d'ordre $n \times p$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{et} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

autrement dit

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

alors

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

ou encore

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{ip}+b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 6.
Soient les matrices

$$P=\begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q=\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix},$$

alors

$$P+Q=\begin{pmatrix} 50+60 & 40+50 & 0+0 \\ 70+70 & 90+90 & 120+120 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 110 & 90 & 0 \\ 140 & 180 & 240 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.
Si A, B et C sont des matrices de même dimension alors :

- $A+B=B+A$.
- $A+(B+C)=(A+B)+C$

1.3.2 Multiplication par un réel

Définition 8.
Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice kA obtenue en multipliant chaque élément de A par le réel k.

Soit n et p deux entiers non nuls. Si

$$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

est une matrice d'ordre $n\times p$ alors pour tout réel k

$$kA=\left(k\ a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}=\begin{pmatrix} k\ a_{11} & \cdots & k\ a_{1j} & \cdots & k\ a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\ a_{i1} & \cdots & k\ a_{ij} & \cdots & k\ a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\ a_{n1} & \cdots & k\ a_{nj} & \cdots & k\ a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 7.
Si on considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 18 & -1 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

alors

$$3 \times P = \begin{pmatrix} 3 \times 18 & 3 \times -1 & 3 \times 8 \\ 3 \times 7 & 3 \times 0 & 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & -3 & 24 \\ 21 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.
Soient A et B deux matrices de même dimension et k un réel on a :

$$k(A + B) = kA + kB$$

1.3.3 Produit de deux matrices

Définition 9 (Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne)**.**
Soient A une matrice ligne de dimension $1 \times n$ et B une matrice colonne de dimension $n \times 1$, où $n \in \mathbb{R}$. Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \times b_1 + \cdots + a_i \times b_i + \cdots + a_n \times b_n)$$

Le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice de dimension 1×1 qui n'a qu'un seul élément.

Exemple 8.
On considere la matrice ligne

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} = (60 \times 25 + 50 \times 28 + 0 \times 30) = (2900)$$

Définition 10 (Produit de deux matrices)**.**
Soient n, p et q des entiers non nuls. Si on considere une matrice A de dimension $n \times p$ et une matrice B de dimension $p \times q$ tel que

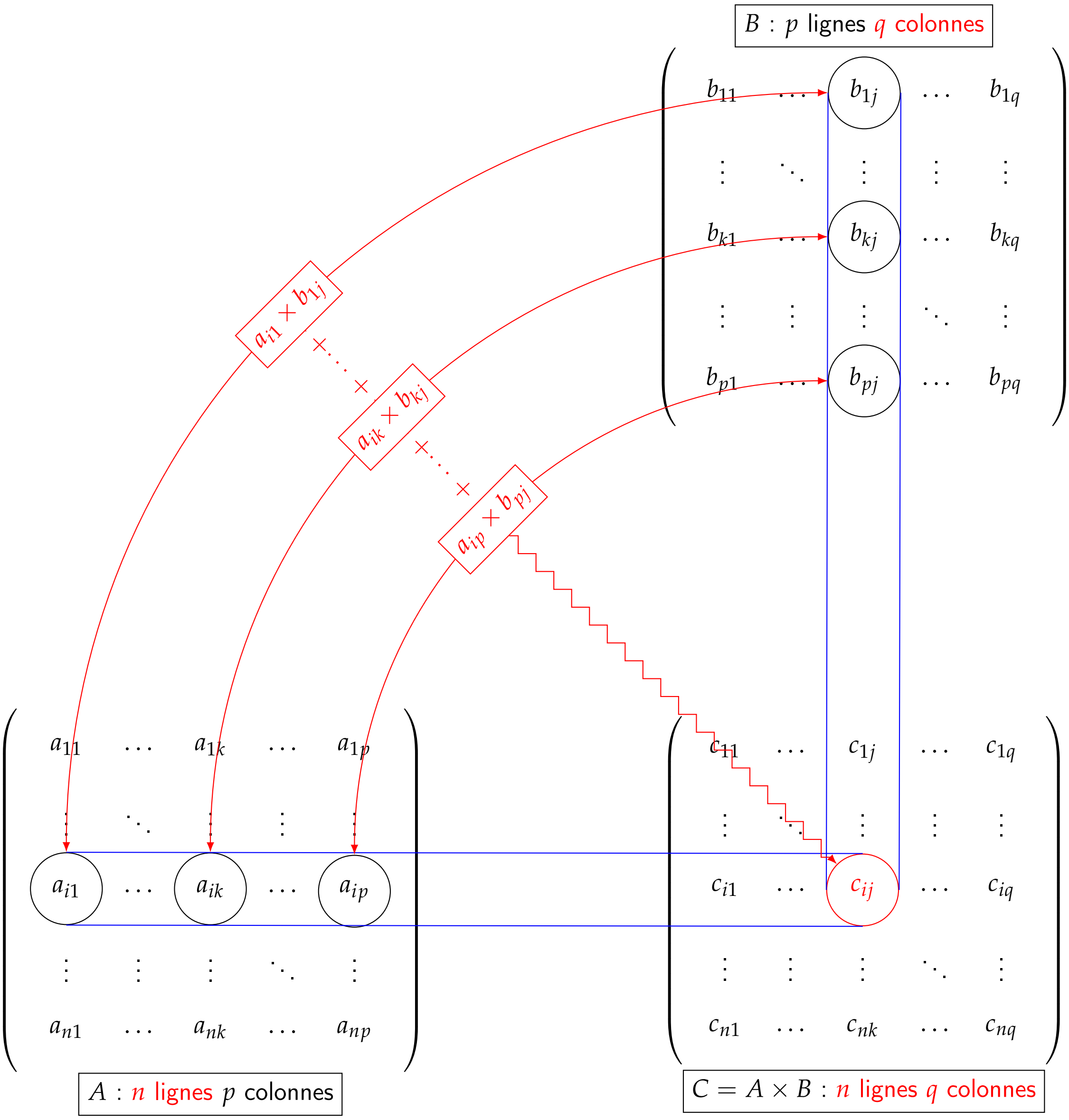
$$A = (a_{i,k})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \quad \text{et} \quad B = \left(b_{k,j}\right)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$$

est une matrice de dimension $n \times q$, le produit

$$C = A \times B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$$

est une matrice de dimension $n \times q$.

En pratique, il est commode de disposer les deux matrices de la façon suivante pour effectuer le produit :



Exemple 9.
Soient les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est d'ordre 2×2 et la matrice B est d'ordre 2×3. Le produit $C = A \times B$ est une matrice d'ordre 2×3.

- L'élément c_{11} de la matrice C s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 60 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 60 + 0,4 \times 70 \end{bmatrix}.$$

- L'élément c_{12} de la matrice C s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 50 + 0,4 \times 90 \end{bmatrix}.$$

- L'élément c_{13} de la matrice C s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \times 0 + 0,4 \times 120 \end{bmatrix}.$$

- L'élément c_{21} de la matrice C s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix}0,8 & 0,6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}60\\70\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,8\times 60 + 0,6\times 70\end{bmatrix}.$$

- L'élément c_{22} de la matrice C s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix}0,8 & 0,6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}50\\90\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,8\times 50 + 0,6\times 90\end{bmatrix}.$$

- L'élément c_{23} de la matrice C s'obtient en effectuant le produit

$$\begin{bmatrix}0,8 & 0,6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\120\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,8\times 0 + 0,6\times 120\end{bmatrix}.$$

Soit en définitive :

$$C = \begin{pmatrix}0,2 & 0,4\\0,8 & 0,6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}60 & 50 & 0\\70 & 90 & 120\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40 & 46 & 48\\90 & 94 & 72\end{pmatrix}$$

Remarque.
Si le nombre de colonnes de la matrice B est différent du nombre de lignes de la matrice A, le produit $B\times A$ n'est pas défini !

Proposition 3.
Soient A, B et C trois matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous sont définis :

- $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$.
- $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$.
- $(A+B)\times C = A\times C + B\times C$.

Remarque.
En général $A\times B \neq B\times A$ il faut faire attention à l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

Exemple 10.

$$\begin{pmatrix}-3 & -2\\1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\1 & 3 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\1 & 3 & -3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3 & -2\\1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

Remarque.
$A\times C = B\times C$ ne signifie pas que $A = B$.

Exemple 11.

$$\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\2 & 4 & -7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 3\\2 & -5\\1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\1 & 3 & -6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 3\\2 & -5\\1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

Remarque.
$A \times B = 0$ ne signifie pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple 12.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.4 Transposée d'une matrice

Définition 11 (Transposée d'une matrice)**.**
La transposée A^T (aussi notée ${}^\mathsf{T}\!A$) d'une matrice A de dimension $n \times p$ est la matrice de dimension $p \times n$ par permutation du rôle des lignes et des colonnes de A.

Exemple 13.
La transposée de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 70 & 90 & 120 \end{pmatrix}$$

de dimension 2×3 est la matrice

$$P^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 60 & 70 \\ 50 & 90 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$$

de dimension 3×2.

Théorème 1.
Soient trois entiers non nuls n, p et q, et trois matrices

$$A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}), \quad C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R}),$$

et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

1. $(A+B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$
2. $\left(A^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = A$
3. $(\lambda \cdot A)^\mathsf{T} = \lambda \cdot A^\mathsf{T}$
4. $(AC)^\mathsf{T} = C^\mathsf{T}\ A^\mathsf{T}$

La notion de transposition permet de définir deux types de matrices bien spécifiques qui jouent un rôle important en algèbre linéaire.

Définition 12.
Soit n un entier non nul et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A^\mathsf{T} = A$, on dit que A est symétrique.
- Si $A^\mathsf{T} = -A$, on dit que A est antisymétrique.

Le terme symétrique fait donc référence à une symétrie des coefficients par rapport à la diagonale de la matrice. Cette définition ne concerne bien sûr que des matricces carrées.

Exemple 14.
La matrice suivante est symétrique

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -12 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

La suivante est antisymétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & 0 & -6 \\ -4 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

La diagonale de la matrice antisymétrique est nulle.

Proposition 4.
Soit n un entier non nul et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est antisymétrique, alors ses coefficients diagonaux sont nuls.

2 Matrices carrées

Les matrices que nous étudierons le plus en détail seront celles possédant un même nombre de lignes et de colonnes. Nous avons déjà caractériser ces matrices, ce sont les matrices carrées.

2.1 Trace d'une matrice

Nous avons vu que l'ensemble des matrices *carrées* d'ordre n se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 13 (Trace d'une matrice)**.**
On appelle trace d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $\mathrm{Tr}(A)$, le nombre de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple 15.
Soit la matrice A définie tel que

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

La trace de la matrice A est égale à

$$\mathrm{Tr}(A) = 5 + 3 + 8 = 16.$$

2.2 Matrice Diagonale

Définition 14 (Diagonale d'une matrice)**.**
Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls, sauf éventuellement les coefficients de la diagonale, est appelée matrice diagonale.

Exemple 16.
La matrice A definie comme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. La matrice B definie comme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice diagonale.

Nous allons à present voir se que l'on designe par coefficients diagonaux d'une matrice carrée. Certains coefficients des matrices carrées vont jouer un rôle important dans la suite de ce cours, ce sont ceux situés sur la diagonale allant du coin en haut à gauche vers celui en bas à droite.

Définition 15.
Soit n un entier non nul et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les coefficients $(a_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ de la matrice A s'appellent les coefficients diagonaux de A. Ce sont donc les coefficients de A ayant un numéro de ligne égal à leur numéro de colonne. Les voici mis en évidence en bleu

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de tous les coefficients diagonaux d'une matrice A s'appelle la diagonale de A.

Cette définition n'a bien sûr de sens que pour des matrices carrées.

2.3 Matrice identité

Définition 16 (Matrice identité)**.**
La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n, on la note I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 17.
Différents exemples de matrices identités

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.
Soit A une matrice carrée d'ordre n alors

$$A \times I_n = I_n \times A = A,$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Exemple 18.
Verifions que l'on a bien $A \times I_n = I_n \times A = A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.4 Matrice triangulaire

On peut à présent définir le concept de matrice triangulaire en imposant la nullité des coefficients situés d'un côté de la diagonale.

Définition 17.
Soit n un entier non nul et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si pour tout i, j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, et $i > j$ on a
$$a_{i,j} = 0,$$
alors la matrice A est dite triangulaire supérieure. Il s'agit donc de matrices de la forme
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Il faut bien comprendre que la condition $i > j$ concerne les coefficients dont le numéro de ligne est strictement supérieur au numéro de colonne, c'est-à-dire les coefficients situés en dessous de la diagonale.

Exemple 19.
Voici un exemple de matrice triangulaire supérieure.
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La notion de matrice triangulaire inférieure est similaire à la précédente, avec cette fois-ci des coefficients nuls au-dessus de la diagonale.

Définition 18.
Soit n un entier non nul et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si pour tout i, j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, et $i < j$ on a $a_{i,j} = 0$, alors la matrice A est dite triangulaire inférieure. Il s'agit donc de matrices de la forme
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

La condition $i < j$ va cette fois concerner les coefficients dont le numéro de ligne est inférieur au numéro de colonne, c'est-à-dire les coefficients situés au-dessus de la diagonale.

Exemple 20.
Voici un exemple de matrice triangulaire inférieure.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2.5 Matrices inversibles

Nous allons maintenant présenter la notion de matrice inversible.

Définition 19.
Une matrice carrée A d'ordre n est inversible, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que

$$A \times B = B \times A = I_n,$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Proposition 6.
La matrice inverse de A si elle existe, est unique et est notée A^{-1}.

Exemple 21.
La matrice A defnie comme

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

est elle inversible ?
Calculons a, b, c et d tel que

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les parametres a, b, c et d sont les solutions éventuelles du système

$$\begin{cases} 4a - 2c = 1 \\ 4b - 2d = 0 \\ -3a + c = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - c = \frac{1}{2} \\ -3a + c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ -3b + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = -\frac{3}{2} \\ d = -2 \end{cases}$$

L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

Présentons quelques propriétés vérifiées par les matrices inversibles. En particulier, dans une égalité entre matrices, si un facteur commun aux deux termes est inversible, on pourra simplifier par celui-ci. C'est ce que stipulent les deux derniers points des propriétés suivantes.

Théorème 2.
Soit n un entier non nul et trois matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

- *Si A et B sont inversibles alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
- *Si $AC = BC$ et C est inversible alors $A = B$.*
- *Si $CA = CB$ et C est inversible alors $A = B$.*

Les propriétés de simplifications sont fausses avec une matrice non inversible. On peut facilement le constater avec la matrice nulle, ou encore en considérant les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $AC = BC$ mais $A \neq B$ car la matrice C n'est pas inversible.

2.5.1 Méthode du pivot de Gauss

Une méthode pour déterminer l'éventuel inverse d'une matrice donné est la **méthode dite du pivot de Gauss**. Cette méthode consiste à transformer la matrice de départ en la matrice identité par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice. Cette même suite d'opération appliquée à la matrice identitée permet d'obtenir la matrice inverse recherchée. Nous allons voir un exemple pour illustrer cette méthode.

Exemple 22.

Nous considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le but ici est de trouver, si elle existe, la matrice inverse de A, c'est à dire la matrice notée A^{-1}. On a

$$AX = I$$

où I est la matrice identité, et X la matrice inconnue, qui si elle existe, sera égale à A^{-1}. En effet, si A^{-1} existe nous avons

$$A^{-1}AX = A^{-1}I \iff X = A^{-1}.$$

Nous allons donc effectuer des opérations sur les lignes de la matrice A de sorte à la transformer en une matrice triangulaire supérieure avec des un sur la diagonale (ce choix est arbitraire, nous pouvons également travailler avec une matrice triangulaire inférieure). Nous continuerons ensuite ces opérations pour construire la matrice identité.

$$\begin{aligned}
AX = I \iff & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a a donc

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

On peut verifier que l'on a bien

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

2.6 Matrices semblables

Définition 20.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ces matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

Il est intéressant dans ce paragraphe des matrices semblables de s'intéresser aux puissances des matrices.
Nous allons tout d'abord définir ce qu'est la puissance d'une matrice.

Définition 21.
Soit A une matrice carré d'ordre n et p un entier supérieur ou égal à 1. La puissance p-ième de la matrice A est

la matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant le produit de p matrices égales à A.

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$$

Par convention $A^0 = I_n$.

Regardons à présent un exemple.

Exemple 23.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 14 & -8 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Revenons à présent aux matrices semblables.

Proposition 7.
Si A et B sont deux matrices semblables alors

$$A = PBP^{-1}.$$

On a alors la propriete suivante

$$A^p = \underbrace{(PBP^{-1}) \times (PBP^{-1}) \times \cdots \times (PBP^{-1})}_{p \textit{ fois}} = P\ B^p\ P^{-1}$$

Cette propriété sera très importante lorsque nous étudierons la diagonalisation des matrices. Une méthode qui lui permettra de relier une matrice quelconque à une matrice diagonale sous certaines conditions.

Ecole supérieure d'agro-développement international

3 Exercices

j'ai 20 en maths

Vous pouvez continuer à vous exercer sur votre espace jai20enmaths, où vous y retrouverez des notions de cours ainsi que des exercices corrigés. Si vous remarquez une erreur ou avez une suggestion pour que cet espace de travail soit plus agréable à utiliser, ne surtout pas hésiter à me le signaler par mail à `a.gere@istom.fr`.

Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $3A + 4B - 2C$.

Correction ▼ [13.0001]

Exercice 2

Calculer, si possible, les produits AB et BA dans chacun des cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [13.0002]

Exercice 3

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^{\mathsf{T}}A$ et AA^{T}.

Correction ▼ [13.0003]

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, A^3, A^4, puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$. La matrice A est-elle inversible ?

Correction ▼ [13.0004]

Exercice 5

Soient

$$A=\begin{pmatrix}-5&2&3\\2&-3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\0&2&2&2\\3&0&-1&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&3\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\\3&-2\end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits AB, AD, BC, CB et CD.
2. Existe-t-il d'autres produits possibles entre ces matrices ? Si oui, les calculer.

Correction ▼ [13.0005]

Exercice 6

Soit

$$A=\begin{pmatrix}0&4&2\\0&2&0\\2&-8&-4\end{pmatrix}.$$

Vérifier que $A^3+2A^2-12A=-8I_3$.

Correction ▼ [13.0006]

Exercice 7

Soit

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Déterminer $M\in\mathcal{M}_2$ tel que

$$AM=MA.$$

Correction ▼ [13.0007]

Exercice 8

Les formules suivantes sont-elles valides pour A et B deux matrices carrées quelconques de taille n ?

1. $A^3+A^2B+A=A\left(A^2+AB+I_n\right)$
2. $A^2B-2B^2A+AB=\left(A^2-2BA+A\right)B$
3. $AB^2+A^3B^2+AB=AB\left(B+A^2B+I_n\right)$
4. $A^3B-2AB^2+AB=A\left(A^2-2B+I_n\right)B$

Correction ▼ [13.0008]

Exercice 9

Soient

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

1. Calculer AB puis ${}^t(AB)$.
2. Calculer ${}^tB\,{}^tA$ et vérifier que ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

Correction ▼ [13.0009]

Exercice 10

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifiez que $AB = 0$ bien que $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
2. Calculer BA et vérifier que $AB \neq BA$.

Correction ▼ [13.0010]

Exercice 11

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Indication ▼ Correction ▼ [13.0011]

Exercice 12

Calculer les inverses des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication ▼ Correction ▼ [13.0012]

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Indication ▼ Correction ▼ [13.0014]

Exercice 14

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I + M$ est inversible (si $(I+M)X = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Correction ▼ [13.0000]

Exercice 15 Annulateur

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, AC. Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Indication ▼ Correction ▼ [13.0015]

Exercice 16 Inverser une matrice à partir d'une égalité

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{A}$. En déduire que $\boldsymbol{A}$ est inversible puis déterminer $\boldsymbol{A}^{-1}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Indication ▼ Correction ▼ [13.0016]

Indication pour l'exercice 11 ▲

Prendre une matrice B, 2×2, quelconque, et calculer les produits AB et BA.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Utiliser la méthode du pivot de Gauss.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Une fois que l'on a calculé A^2 et A^3 on peut en déduire A^{-1} sans calculs.

Indication pour l'exercice 15 ▲

On doit trouver $AB = AC$. Supposer A inversible, et multiplier par A^{-1}.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Écrire $\dfrac{A^2 + A}{2} = I_3$, et factoriser.
2. Écrire $A \times \dfrac{1}{4}\left(A^2 - I_3\right) = I_3$ et factoriser

---

Correction de l'exercice 1 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 2 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 3 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 4 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 5 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 6 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 7 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 8 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 9 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 10 ▲

cf. correction manuscrite.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit $B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ une telle matrice. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ ae & af \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} ac & bc+ad \\ ae & be+af \end{pmatrix}$$

Puisque $AB = BA$, on obtient le système :

$$\begin{cases} ac+be = ac \\ ad+bf = bc+ad \\ af = be+af \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que $e = 0$ et $c = f$. Toutes les matrices B qui conviennent sont celles de la forme :

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

On utilise la méthode du pivot de Gauss. Commençons par A.

$$
\begin{aligned}
AX = I &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparait à gauche est triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On en déduit que A est inversible. On trouve son inverse en poursuivant la méthode.

$$
\begin{aligned}
AX = I &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{4} L_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice inverse recherchée est donc :

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}
$$

On suit la même méthode pour B. On forme

$$
\begin{aligned}
BX = I \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparait à gauche est triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On en déduit que B est inversible. On trouve son inverse en poursuivant la méthode.

$$
\begin{aligned}
BX = I \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice inverse recherchée est donc

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

Passons à C.

$$
\begin{aligned}
CX = I \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice C n'est donc pas inversible.
Étudions maintenant D.

$$\begin{aligned}
DX = I &\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\2&1&1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\\
&\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&-1&-3\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\
&\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&-4\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\
&\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&-4\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice I est donc inversible. Pour calculer son inverse, on poursuit la méthode.

$$\begin{aligned}
DX = I &\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\2&1&1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\\
&\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&-1&-3\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\
&\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&-4\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\
&\iff \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&-4\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2
\end{aligned}$$

L'inverse de I est donc la matrice.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix}0&1/4&-1/2\\-1&3i/4&i/2\\0&1/4&1/2\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix}3&-4&2\\1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = \begin{pmatrix}5&0&2\\0&3&1\\1&-2&4\end{pmatrix}.$$

Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. En factorisant par A on obtient $A \times (A^2 - I) = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi

A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Avant de commencer la résolution nous allons faire une remarque importante : pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur (considéré comme une matrice à une seule colonne) alors nous allons calculer ${}^tXX$:

$${}^tXX = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

On note $\|X\|^2 = {}^tXX$: $\|X\|$ est la *norme* ou la *longueur* du vecteur X. De ce calcul on déduit d'une part que ${}^tXX \geq 0$. Et aussi que ${}^tXX \geq 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.

1. Nous allons montrer que $I + M$ est inversible en montrant que si un vecteur X vérifie $(I + M)X = 0$ alors $X = 0$.

   Nous allons estimer ${}^t(MX)(MX)$ de deux façons. D'une part c'est un produit de la forme ${}^tYY = \|Y\|^2$ et donc ${}^t(MX)(MX) \geq 0$.

   D'autre part :

$$\begin{aligned}
{}^t(MX)(MX) &= {}^t(MX)(-X) \quad \text{car } (I+M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\
&= {}^tX{}^tM(-X) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\
&= {}^tX(-M)(-X) \quad \text{car } {}^tM = -M \\
&= {}^tXMX \\
&= {}^tX(-X) \\
&= -{}^tXX \\
&= -\|X\|^2
\end{aligned}$$

   Qui est donc négatif.

   Seule possibilité $\|X\|^2 = 0$ donc $X = 0$ (= le vecteur nul) et donc $I + M$ inversible.

2. (a) Calculons A^{-1}.

$$A^{-1} = \left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right)^{-1} = \left((I+M)^{-1}\right)^{-1} \times (I-M)^{-1} = (I+M)\times(I-M)^{-1}$$

   (n'oubliez pas que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

   (b) Calculons ${}^tA$.

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t\left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right) \\
&= {}^t\left((I+M)^{-1}\right) \times {}^t(I-M) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\
&= \left({}^t(I+M)\right)^{-1} \times {}^t(I-M) \quad \text{car } {}^t(A^{-1}) = \left({}^tA\right)^{-1} \\
&= \left(I + {}^tM)\right)^{-1} \times (I - {}^tM) \quad \text{car } {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \\
&= (I-M)^{-1} \times (I+M) \quad \text{car ici } {}^tM = -M
\end{aligned}$$

(c) Montrons que $I+M$ et $(I-M)^{-1}$ commutent.
Tout d'abord $I+M$ et $I-M$ commutent car $(I+M)(I-M)=I-M^2=(I-M)(I+M)$. Maintenant nous avons le petit résultat suivant :
Lemme. Si $AB=BA$ alors $AB^{-1}=B^{-1}A$.
Pour la preuve on écrit :

$$AB=BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1}=B^{-1}(BA)B^{-1} \Rightarrow B^{-1}A=AB^{-1}.$$

En appliquant ceci à $I+M$ et $I-M$ on trouve $(I+M)\times(I-M)^{-1}=(I-M)^{-1}\times(I+M)$ et donc $A^{-1}={}^tA$.

Correction de l'exercice 15 ▲

On trouve :

$$AB=AC=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\4&4&3\end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas inversible : si tel était le cas, on multiplierait à gauche par A^{-1} dans l'égalité $AB=AC$, et on trouverait $B=C$. Ce n'est pas le cas ! Pour la seconde partie, on considère F une matrice vérifiant les propriétés précisées.

$$F=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$$

Le calcul de AF donne :

$$AF=\begin{pmatrix}a&b&c\\d+g&e+h&f+i\\3a+d+g&3b+e+h&3c+f+i\end{pmatrix}$$

Puisque $AF=0$, on a le système suivant :

$$\begin{cases}a=b=c=0\\d+g=e+h=f+i=0\\3a+d+g=3b+e+h=3c+f+i=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=b=c=0\\d=-g\\e=-h\\f=-i\end{cases}$$

Les matrices F recherchées sont donc les matrices de la forme :

$$F=\begin{pmatrix}0&0&0\\d&e&f\\-d&-e&-f\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Le calcul ne pose pas de problèmes. Il mène à :

$$\frac{A^2+A}{2}=I_3 \Longrightarrow A\frac{A+I_3}{2}=\frac{A+I_3}{2}A=I_3$$

   A est inversible, et son inverse est :

$$\frac{A+I_3}{2}$$

2. Un calcul donne $A^3 - A = 4I_3$. Donc $A \times \frac{1}{4}\left(A^2 - I_3\right) = I_3$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - I_3\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. On vérifie facilement que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. On réécrit ceci en :

$$A\left(A - 3I_3\right) = -2I_3 \Longleftrightarrow A\left(\frac{-1}{2}\left(A - 3I_3\right)\right) = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et son inverse est $\frac{-1}{2}\left(A - 3I_3\right)$.

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

Cours et exercices rédigés par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).