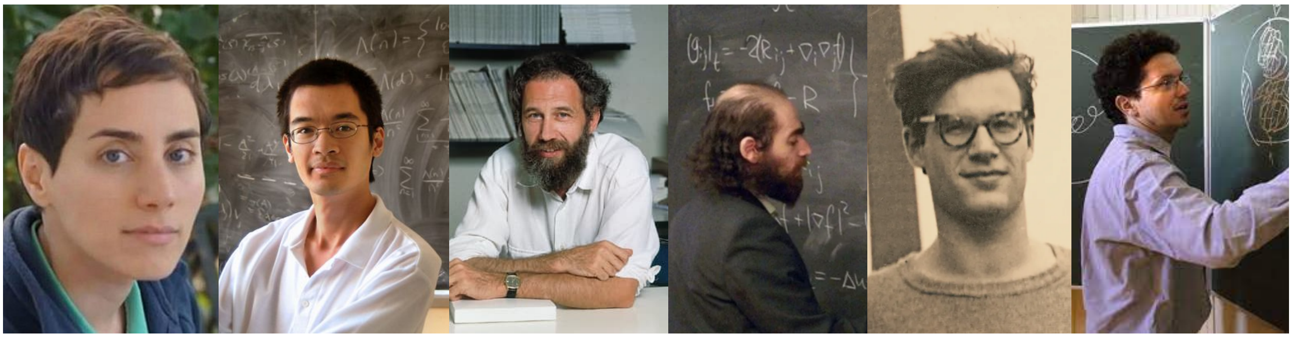
Intégrations

Antoine Géré

Année 2024 - 2025[1]



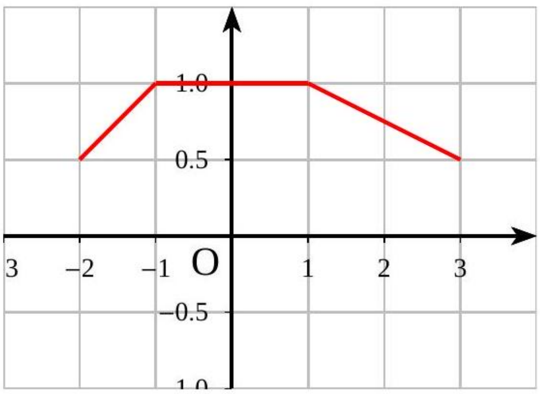
Ces notes sont en cours d'élaboration. Si vous avez la moindre question ou remarque ne pas hésiter à contacter par mail : `a.gere@istom.fr`.

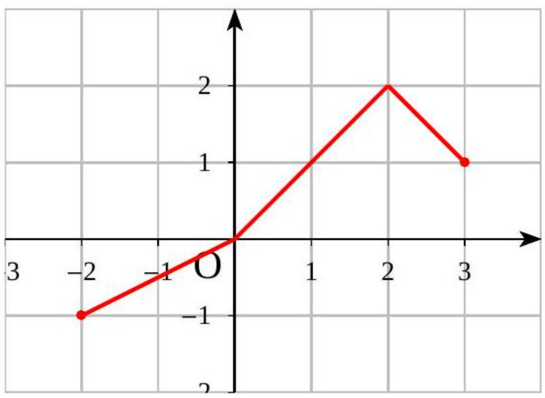
Table des matières

1 Exercices

Exercice 1 Notion d'intégrale

1. Pour chaque fonction affine par morceaux f, représentée ci-dessous, calculer, en utilisant les aires, l'intégrale $I(f)$ sur l'intervalle de définition de f.



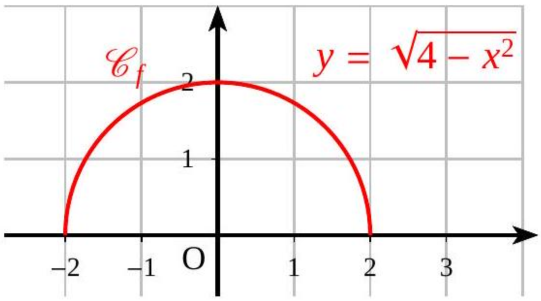


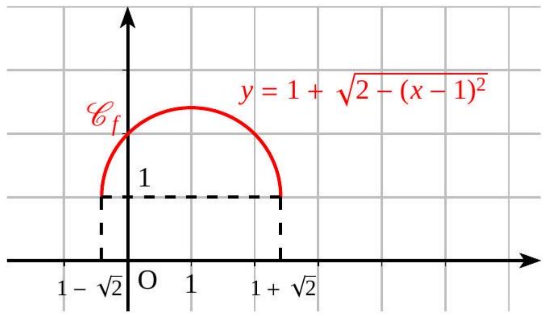
2. Dans chaque cas, la fonction f est représentée par sa courbe $\mathscr{C}_f$, dont une équation est indiquée.

   (a) Prouver que $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle. Préciser son centre et son rayon.

[1] version du 28 avril 2025

(b) En déduire l'intégrale de f sur son intervalle de définition.





3. Les fonctions affines par morceaux f et g sont définies sur l'intervalle $[-1;5]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 3 \\ x-5 & \text{si} \quad 3 < x \leqslant 5 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

   (a) Calculer les intégrales sur $[-1;5]$ de f et g.

   (b) En déduire les intégrales sur $[-1;5]$ des fonction $f + 4g$ et $5f - 2g$

[10.0000]

Exercice 2 Primitive

1. Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

   (a) $f(x) = \tan^2 x; F(x) = \tan x - x; I =]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[.$

   (b) $f(x) = \dfrac{2\left(x^4 - 1\right.}{x^3}; F(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2; I = \Big] 0; +\infty[$

   (c) $f(x) = \cos x - x \sin x; F(x) = x \cos x; I = \mathbb{R}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}; F(x) = x - \ln(1 + e^x); I = \mathbb{R}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}; F(x) = \ln(\ln x); I = \Big] 1; +\infty[$

2. Montrer que les fonction F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I.

$$F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}; \quad G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}; \quad I = \Big] 1; +\infty[$$

[10.0002]

Exercice 3 Calcul de primitive

Pour cet exercice donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

- Linéarité de la primitive

  1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3, \quad I = \mathbf{R}$
  2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3}, \quad I = \mathbf{R}$

3. $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}, \quad I = \left]0; +\infty\right[$
4. $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1, \quad I =$
5. $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1, \quad I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

- Forme $u'u^n$

1. $f(x) = (x+2)^3, \quad I = \mathbf{R}$
2. $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}, I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 2(3x-1)^5, \quad I = \mathbf{R}$
4. $f(x) = 2x\left(1+x^2\right)^5, \quad I = \mathbf{R}$
5. $f(x) = \sin x \cos x, \quad I = \mathbf{R}$

- Forme $\dfrac{u'}{u}$

1. $f(x) = \frac{1}{x-4}, \quad I = \left]4; +\infty\right[$
2. $f(x) = \frac{1}{x-4}, \quad I = \left]-\infty; 4\right[$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}, \quad I = \left]0; 1\right[$

- Forme $\dfrac{u'}{u^n}$, avec $n \geqslant 2$

1. $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}, \quad I = \left]-4; +\infty\right[$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}, \quad I = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$
3. $f(x) = \dfrac{2x-1}{\left(x^2-x+3\right)^2}, \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{x-1}{\left(x^2-2x-3\right)^2}, \quad I = \left]-1; 3\right[$
5. $f(x) = \dfrac{4x^2}{\left(x^3+8\right)^3}, \quad I = \left]-2; +\infty\right[$

- Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}, \quad I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad I = \left]1; +\infty\right[$

- Forme $u'e^u$

1. $f(x) = e^{-x+1}, \quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 2e^{3x-2}, \quad I = \mathbf{R}$
3. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}, \quad I = \mathbf{R}$

- Forme $u(ax+b)$

  1. $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \quad I = \mathbf{R}$
  2. $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1, \quad I = \mathbf{R}$
  3. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right), \quad I = \mathbf{R}$

[10.0003]

Exercice 4 Primitive et condition initiale

Pour les exercices suivants, trouver la primitive F, de la fonction f, qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1, F(2) = 0$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x, F(1) = 0$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}, F(0) = 0$
4. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
5. $f(x) = \cos x \sin^2 x, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
6. $f(x) = 2\cos\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
7. $f(x) = \dfrac{2}{(2x+1)^2}, \quad F(-1) = 0$
8. $f(x) = -\dfrac{1}{3-x}, F(1) = 1$
9. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}, F(0) = 0$
10. $f(x) = e^{3x+1}, \quad F(-1) = 0$
11. $f(x) = xe^{-x^2}, F(\sqrt{\ln 2}) = 1$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}, F(2) = 0$

[10.0004]

Exercice 5 Calcul d'intégrales

Pour les exercices suivantes, calculer les intégrales indiquées à l'aide d'une primitive.

1. $I = \displaystyle\int_0^4 (x-3)\mathrm{d}x$
2. $I = \displaystyle\int_2^{-1} \left(t^2 - 4t + 3\right) \mathrm{d}t$
3. $I = \displaystyle\int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$
4. $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx$

5. $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \, \mathrm{d}x$

6. $I = \displaystyle\int_{0}^{3} \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2}$

7. $I = \displaystyle\int_{0}^{4} \, \mathrm{d}x$

8. $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} \, \mathrm{d}x$

9. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-4} \, \mathrm{d}x$

10. $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x}{x^2-4} \, \mathrm{d}x$

11. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} 5e^{3x} \, \mathrm{d}x$

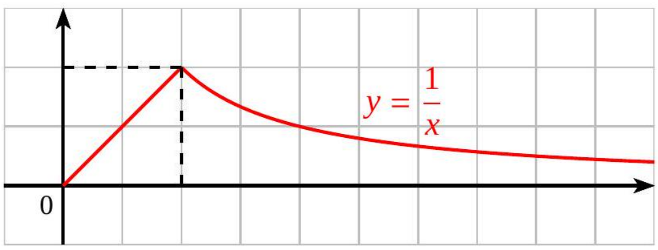
12. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} te^{t^2-1} \, \mathrm{d}t$

[10.0005]

Exercice 6 Calcul d'aire

La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous. Utiliser la relation de Chasles pour calculer les intégrales :

$$I = \int_0^3 f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_2^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t$$



[10.0006]

Exercice 7 Encadremment et valeur moyenne

1. Comparer, sans les calculer les réels I et J.

   (a) $I = \displaystyle\int_1^2 xe^x \, \mathrm{d}x$

   (b) $J = \displaystyle\int_1^2 x^2e^x \, \mathrm{d}x$

2. Démontrer les encadrements suivants :

   (a) $\dfrac{9}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \leqslant 9$

   (b) $\sqrt{2} \leqslant \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^3} \, \mathrm{d}x \leqslant 3$

(c) $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$

(d) $2e^{-4} \leqslant \displaystyle\int_0^2 \dfrac{1}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

(e) $2\ln 3 \leqslant \displaystyle\int_2^4 \ln\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x \leqslant 2\ln 3 + 2\ln 5$

3. La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 (1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

(a) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.

(b) Est-elle convergente ?

4. Calculer la valeur moyenne μ sur l'intevalle $[-1;1]$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

5. Dans chacun des cas suivants, μ désigne la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle I. Calculer l'intégrale indiquée :

(a) $\mu = 2; I = [1;4];$ $\quad \displaystyle\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$

(b) $\mu = \ln 2; I = [1;3];$ $\quad \displaystyle\int_3^1 f(x)\mathrm{d}x$

(c) $\mu = \dfrac{2}{\pi}; I = \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]; f$ paire ; $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$

6. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

(a) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

(b) La suite (I_n) est-elle convergente ?

7. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$$

(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

(b) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1, u_n \geqslant \dfrac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge t-elle ?

[10.0001]

Exercice 8 Calcul d'intégrale par une décomposition

1. (a) Trouver les réel a et b tels que, pour tout réels x de $\mathbb{R} - \{-3\,;\,3\}$, on a :

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$

(b) En déduire :

$$I = \int_4^5 \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$$

2. (a) Trouver trois réel a, b et c tels que pour tout réel de $\mathbb{R} - \{-3\}$, on a :

$$\frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3} = ax + b + \frac{c}{x + 3}$$

   (b) En déduire :

$$I = \int_2^0 \frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3}\, \mathrm{d}x$$

3. (a) Prouver que pour tout réel x :

$$\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

   (b) En déduire :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x}\, \mathrm{d}x$$

[10.0007]

Exercice 9 Calcul de primitives

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiquée.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1} \quad I = \left] -\infty; 1\right[$
2. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad I = \left] -\pi; 0\right]$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} \quad I = \left] 0; +\infty\right[$
4. $f(x) = \sin x \cos x \quad I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2} \quad I = \left] 0; +\infty\right[$
6. $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2} \quad I = \left] 0; +\infty\right[$
7. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \quad I = \left] 0; +\mathrm{infty}\right[$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x} \quad I = \left] 1; +\infty\right[$
9. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad I = \mathbb{R}$

[10.0008]

Exercice 10 Primitive d'une fonction rationnelle par décomposition

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Déterminer une primitive de f à l'aide de la décompostion proposée

1. $f(x) = \dfrac{4x + 5}{2x + 1} \quad I = \left] 1; +\infty\right[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{2x + 1}$
2. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{x - 2} I = \left] 2; +\infty\right[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 2}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$
   (a) $I =]3; +\infty[$
   (b) $I =]-3\,;\,3[$
   (c) $I =]-\infty\,;\,-3[$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2} \quad I = \left]1; +\infty\right[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$

[10.0009]

Exercice 11 Intégration par partie

Calculer les intégales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1. $I = \displaystyle\int_1^e x \ln x \, \mathrm{d}x$
2. $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \ln t \, \mathrm{d}t$
3. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (x-1)\cos x \, \mathrm{d}x$
4. $I = \displaystyle\int_0^1 (x+2)e^x \, \mathrm{d}x$
5. $I = \displaystyle\int_1^2 (t-2)e^{2t} \, \mathrm{d}t$
6. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x$

[10.0010]

Exercice 12 Primitive par intégration par partie

Trouver la prmitive F, nulle en a, des fonction f suivantes déterminées sur I

1. $f(t) = \ln\left(t^2\right) \quad I = \left]0; +\infty\right[\quad a = 1$
2. $f(t) = (2t+1)\sin t \quad I = \mathbb{R} \quad a = 0$
3. $f(t) = (t+1)^2 e^{2t} \quad I = \mathbb{R} \quad a = -1$ (on fera deux intégrations par partie).
4. $f(t) = (\ln t)^2 \quad I = \left]0; +\infty\right[\quad a = 1$ (on fera deux intégrations par partie).
5. $f(t) = e^{-2t}\cos t \quad I = \mathbb{R} \quad a = 0$ (on fera deux intégrations par partie).

[10.0011]

Exercice 13 BAC Asie Juin 2005

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

1. Calculer I_1.

2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$$
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$,
$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$
4. Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1, u_n = \frac{2^n}{n!}$.
   (a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3, u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3, 0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que :
$$e^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right)$$

[10.0012]

Exercice 14 Suite

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :
$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \qquad \text{et} \qquad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

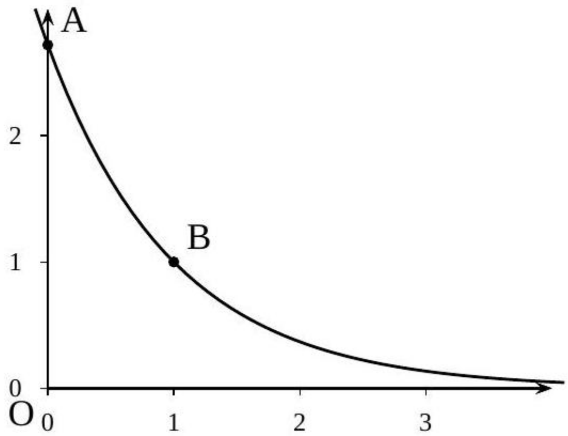
1. (a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.
   (b) Étudier les variations de la suite (x_n).
   (c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite, (x_n) ?
2. (a) Démontrer que, pour tour entier naturel n non nul :
$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   (b) En déduire la limite de la suite (x_n).
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$
   (b) En déduire que : $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul :
$$y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$$
   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n y_n$

[10.0013]

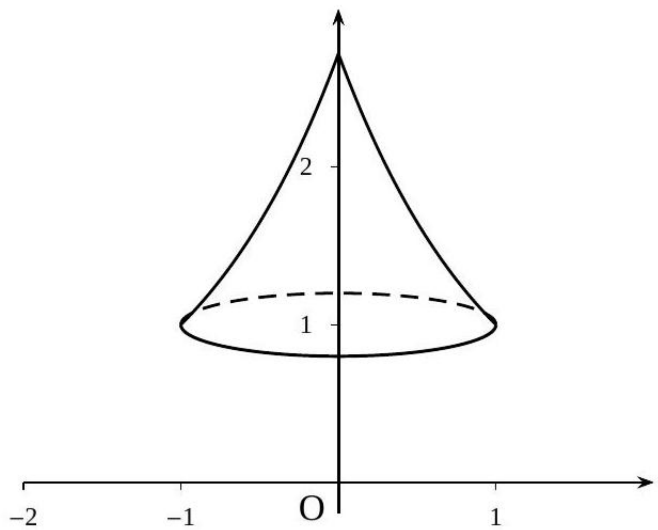
Exercice 15 BAC Amérique du Sud novembre 2004

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

(E) : $\quad y' + y = 0 \quad$ et telle que $\quad f(0) = e$



1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1;e]$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x.
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
   On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe AB comme représenté ci-dessous. On note V son volume.
   On admet que
   $$\mathrm{V} = \pi \int_1^{\mathrm{e}} (1 - \ln t)^2 \, \mathrm{d}t$$
   Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



[10.0014]

Étudiant(e) (Nom, Prénom) : ....

Promotion, groupe : ....

Email : ....

Auteurs de ces notes de cours

D'après un cours de Arnaud Bodin.
Revu et augmenté par Antoine Géré.
Relu par (**coming soon**).