[rdm - 0022]

① $h = 2 + 1 - 3 \times 1 = 0 \Rightarrow$ Isostatique

② PFS :
$$\begin{cases} X_B = 0 \\ -2F + Y_B + Y_C = 0 \\ (\text{en } B) : +FL + Y_C 2L - F3L = 0 \end{cases}$$

Donc :
$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_C = F \\ Y_B = F \end{cases}$$

3.a 3 coupes

3.b 1ère coupe : $x \in [0 ; L]$

$$\begin{cases} T - F = 0 \\ M + xF = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = F \\ M = -xF \end{cases}$$

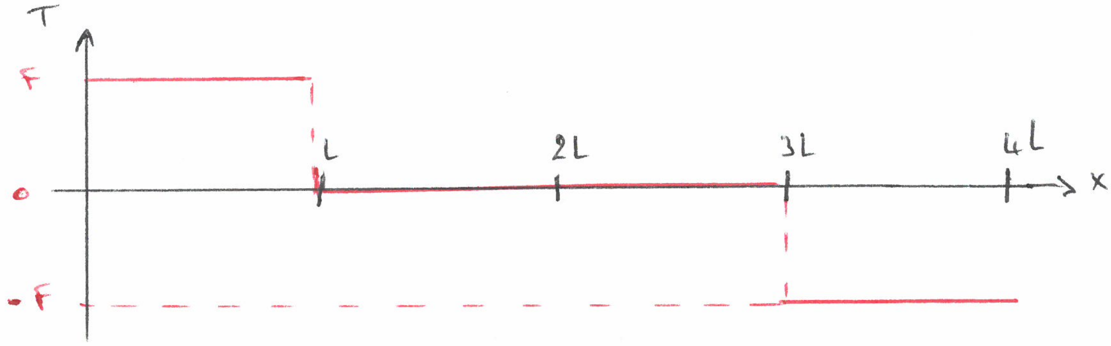
2ème coupe : $x \in [L ; 3L]$

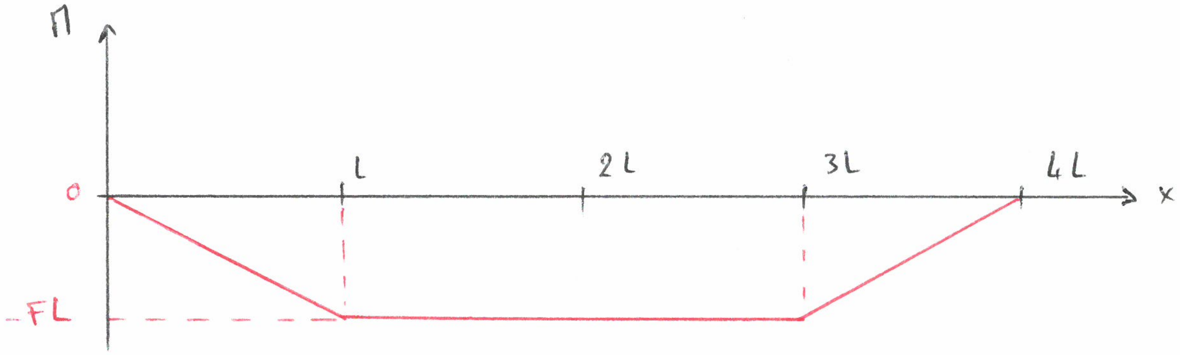
$$\begin{cases} T - F + Y_B = 0 \\ M + xF - Y_B(x - L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 0 \\ M = -FL \end{cases}$$

3ème coupe : $x \in [3L ; 4L]$

$$\begin{cases} T - F + Y_B + Y_C = 0 \\ M + xF - Y_B(x - L) - Y_C(x - 3L) = 0 \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} T = -F \\ M = -F(4L - x) \end{cases}$$

3.c





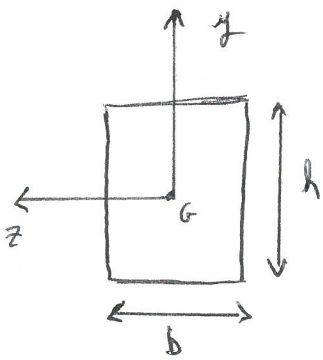
4.a

On sait que
$$\boxed{\sigma_{MAX} = \frac{|M_{fz}|}{I_{Gz}} \, y_{MAX}}$$

Ici M_{fz} est M de la question 3.b.

$$y_{MAX} = \frac{h}{2}$$

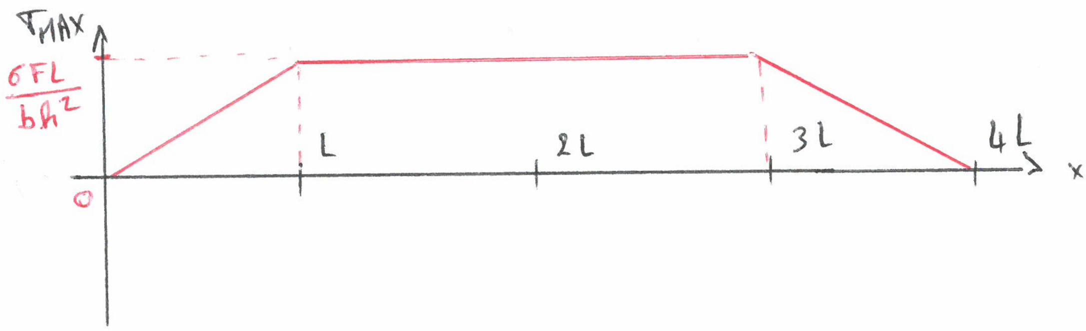
et
$$I_{Gz} = \frac{b h^3}{12}$$



donc

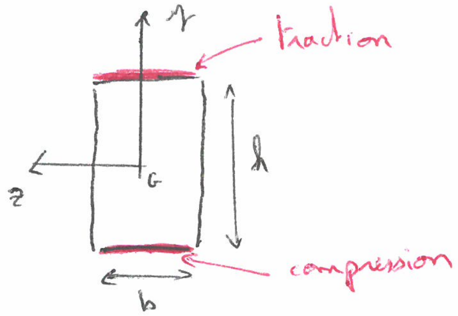
$$\sigma_{MAX} = \frac{12 \, . \, h}{2 \, . \, b h^3} \, . \, |M| = \frac{6}{b h^2} |M|$$

4.b



(4.c) Cette contrainte est en compression pour $y = -\frac{h}{2}$,

et en traction pour $y = +\frac{h}{2}$.



(4.d) (+) on sait que $\sigma_{MAX} \leq \frac{\sigma_e}{s}$

on ici $\sigma_e = 450$ MPa

et $\sigma_{MAX} = \frac{6 \cdot FL}{bh^2} = 160$ MPa

donc $s \leq \frac{450}{160} \simeq 2,81$

on peut prendre $\boxed{s = 2,81}$

(+) $\sigma_{MAX} = 160$ MPa $< \sigma_e$
Nous sommes toujours dans le domaine élastique.

(5.a) on sait que $M_{fz} = E\, I_{Gz} \cdot y''(x)$

on cherche $y(x)$ pour $x \in [0; 4L]$.

ici $M_{fz} = M$ de la question 3.b

on $I_{Gz} = I$.

1

1er cas : $x \in [0; L]$

$M = -xF$

donc $EI\, y'' = -xF$

on note $\boxed{\alpha = \frac{F}{EI}}$

On a donc $y_1(x) = \frac{-x^3}{6} \cdot \alpha + C_1 x + C_2$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

2ème cas : $x \in [L ; 3L]$

$M = -FL$

donc $EI\, y'' = -FL$

$y'' = -\alpha L$

donc $\boxed{y_2(x) = -\frac{\alpha L}{2} x^2 + C_3 x + C_4}$

où C_3 et C_4 sont des constantes.

3ème cas : $x \in [3L ; 4L]$

$M = -F(4L - x)$

donc $EI\, y'' = -F(4L - x)$

$y'' = -\alpha(4L - x)$

donc $\boxed{y_3(x) = -\alpha\left(2Lx^2 - \frac{x^3}{6}\right) + C_5 x + C_6}$

où C_5 et C_6 sont des constantes.

On sait que $y_1(L) = y_2(L) = 0$, donc :

$$\begin{cases} -\frac{L^3}{6} \cdot \alpha + C_1 L + C_2 = 0 & (a) \\ -\frac{L^3}{2} \cdot \alpha + C_3 L + C_4 = 0 & (b) \end{cases}$$

et $y_2(3L) = y_3(3L) = 0$, donc

$$\begin{cases} -\frac{9}{2} \alpha L^3 + 3L C_3 + C_4 = 0 & (c) \\ \underbrace{-18 \alpha L^3 + \frac{27}{6} \alpha L^3}_{= -\frac{27}{2}} + 3L C_5 + C_6 = 0 & (d) \end{cases}$$

de plus $y'(2L) = 0$

or $y_2'(x) = -\alpha L x + C_3$ donc $-2\alpha L^2 + C_3 = 0$

donc $C_3 = 2\alpha L^2$

or (b) nous donne : $C_4 = \frac{L^3}{2}\alpha - C_3 L$

donc $C_4 = -\frac{3}{2}\alpha L^3$

on a egalement $y_1'(L) = y_2'(L)$, donc

$$\begin{cases} y_1'(x) = -\frac{x^2}{2}\alpha + C_1 \\ y_2'(x) = -\alpha L x + C_3 \end{cases}$$

donc $-\frac{L^2}{2}\alpha + C_1 = -\alpha L^2 + C_3$

$C_1 = C_3 - \frac{\alpha}{2} L^2$

donc $C_1 = \frac{3}{2}\alpha L^2$

de plus avec (a) on a :

$$C_2 = \frac{L^3}{6}\alpha - C_1 L$$
$$= \frac{L^3}{6}\alpha - \frac{3}{2}\alpha L^3$$
$$C_2 = -\frac{4}{3}\alpha L^3$$

On a également $y_2'(3l) = y_2'(3l)$, donc

$$\begin{cases} y_2'(x) = -\alpha l x + C_3 \\ y_3'(x) = -\alpha\left(4lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_5 \end{cases}$$

donc,

$$-3\alpha l^2 + C_3 = -\alpha\underbrace{\left(12 l^2 - \frac{9}{2} l^2\right)}_{\frac{15}{2} l^2} + C_5$$

$$C_3 - 3\alpha l^2 + \frac{15}{2}\alpha l^2 = C_5$$

donc,

$$C_5 = C_3 + \frac{9}{2}\alpha l^2$$

$$C_5 = \frac{13}{2}\alpha l^2$$

de plus avec ① on a :

$$C_6 = +18\alpha l^3 - \frac{27}{6}\alpha l^3 - 3l\, C_5$$

$$= 18\alpha l^3 - \frac{27}{6}\alpha l^3 - \frac{39}{2}\alpha l^3$$

$$= \left(18 - \frac{27}{6} - \frac{39}{2}\right)\alpha l^3$$

$$C_6 = -6\alpha l^3$$

5.b $\int$ tracer de la courbe de $y(x)$ pour $x \in [0; 4l]$ avec Mathematica.

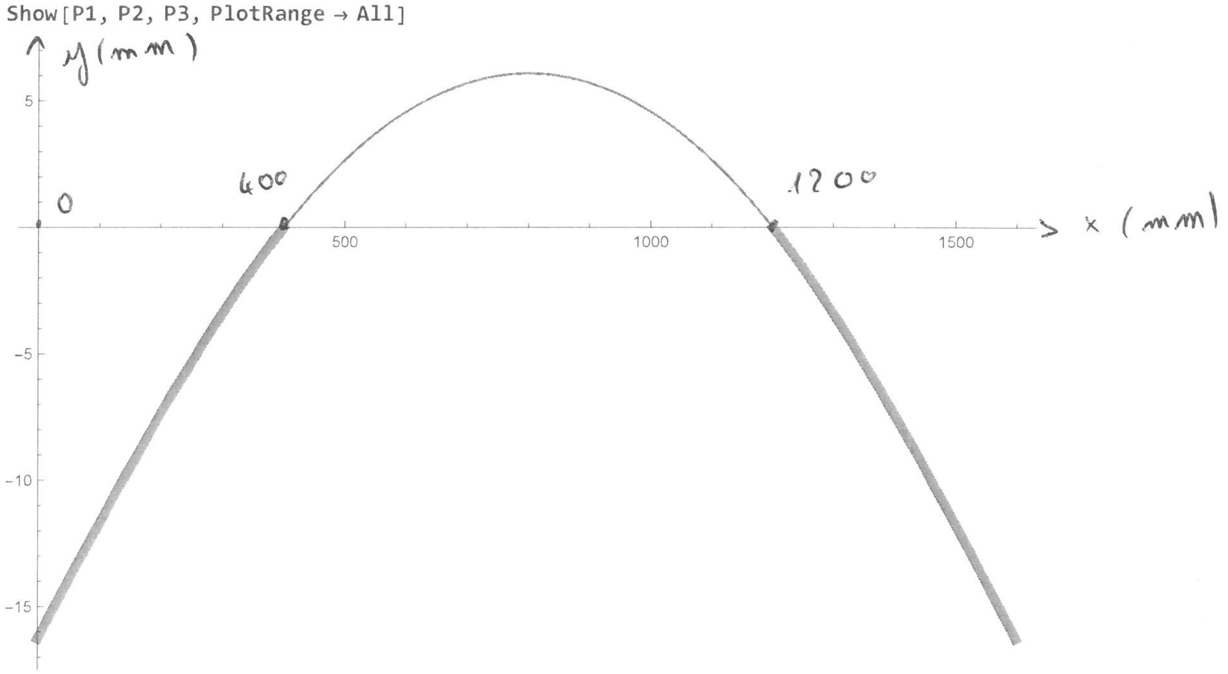
5.b

```
In[162]:= ClearAll["Global`*"]
L = 400;
F = 800;
b = 30;
h = 20;
EE = 210 * 10^3;
sigma = 450;

In[169]:= II = b * h^3 / 12;

In[170]:= alpha = F / (EE * II);

In[171]:= C1 = (3 / 2) * alpha * L^2;
C2 = (-4 / 3) * alpha * L^3
C3 = 2 * alpha * L^2;
C4 = (-3 / 2) * alpha * L^3;
C5 = (13 / 2) * alpha * L^2;
C6 = (-6) * alpha * L^3;
```

Out[172]= $-\frac{1024}{63}$

```
In[177]:= y1[x_] := -x^3 / 6 * alpha + C1 * x + C2
y2[x_] := -alpha * L * x^2 / 2 + C3 * x + C4
y3[x_] := -alpha * (2 * L * x^2 - x^3 / 6) + C5 * x + C6

In[216]:= P1 = Plot[y1[x], {x, 0, L}, PlotStyle → {Thickness[0.01]}];
P2 = Plot[y2[x], {x, L, 3 L}];
P3 = Plot[y3[x], {x, 3 L, 4 L}, PlotStyle → {Thickness[0.01]}];
Show[P1, P2, P3, PlotRange → All]
```

Out[219]=



5.c La flèche maximale est atteinte pour $x = 0$ et $x = 4L$.

On a :

$$|y_1(0)| = |y(4l)| \simeq 16,25 \text{ mm}$$