1 Introducción a la Lógica

Contenido	Capítulo 1	Página

Objetivos

- Interpreta correctamente las proposiciones.
- Clasifica correctamente las condiciones.
- Argumenta los diferentes métodos de demostración.

Indicadores de Logros

- Identifica proposiciones.
- Diferencia entre demostraciones directas e indirectas.
- Argumenta los distintos tipos de demostración indirectas.

Introducción 1.1

Este primer capítulo es una breve introducción a la lógica, que es la herramienta que usan las matemáticas para desarrollarse.

El objetivo del mismo es describir en que consiste una teoría matemática. Para lograrlo, primero hay que exponer sucintamente las reglas de la lógica de proposiciones, definir con precisión que es un razonamiento lógico y, por ultimo, explicar en que consiste una teoría matemática (brevemente, una serie de axiomas, definiciones y teoremas relacionados entre sí mediante argumentos lógicos, como veremos mas adelante).

La lógica es un esquema de reglas que permite deducir verdades a partir de o otras verdades. El medio que lleva de las primeras verdades a las otras deducidas se llama razonamiento lógico. La lógica estudia, precisamente, los razonamientos lógicos, estableciendo cuándo un razonamiento es valido, independientemente del contenido de las verdades que se enuncien. Sólo le interesan las manipulaciones que se hacen con los enunciados, no su contenido.

Todos los resultados mostrados en este capítulo se prueban rigurosamente. Sin embargo, no se usa para ello el razonamiento lógico, que que se utiliza en un curso de lógica matemática sino el simple y eficaz camino de las tablas introducidas en la sección 1.4.4 . Por supuesto, algunos resultados si se podrán demostrar a partir de otros anteriores mediante las leyes del álgebra de proposiciones, que se exponen en la a sección 1.4.3. Pero hemos preferido dejar todo el capítulo en manos de las tablas.

Por otra parte Uno de los aspectos fundamentales en cualquier interpretación rigurosa de la realidad es la coherencia interna de la explicación. Es conveniente atender a este aspecto con toda la claridad que sea posible. y a aquí es donde echamos mano de la lógica que es la que se ocupa del estudio de las formas correctas de pensar y sirve, por tanto, no sólo para comprobar la validez formal de los argumentos, sino que permite también la elaboración formalmente rigurosa de las explicaciones teóricas.

En la medida en que las ciencias procuran interpretar la realidad física sin depender excesivamente de implícitos no controlables, y en que la realidad que estudian es compleja y difícil de comprender intelectualmente; necesitan aumentar el control sobre las propias formulaciones teóricas. Este dominio debe ejercerse en dos campos principales:

El significado estricto de las nociones que emplea.

La validez formal de las teorías y leyes en que las ordena.

El método que permite dar cumplimiento a estas necesidades es el de la axiomatización.

El cual es aplicable en toda su pureza en las llamadas ciencias formales como, lógica y las matemáticas, pero proporciona grandes ventajas en la ciencias, y sigue siendo el ideal en otras ramas del saber.

No es posible alcanzar un control objetivo absoluto acerca del saber. es decir tenerlo todo explicitado sin presupuestos. No cabe alcanzar un dominio total de la objetividad.

Pero sí merece la pena que lo objetivable se exprese del modo más claro y formalmente riguroso que pueda alcanzarse, conscientes de las limitaciones inherentes al intento y de la necesidad de presupuestos no sistematizables para que el conocimiento pueda cumplirse.

El conocimiento humano puede dividirse en inmediato y mediato.

Todo posible conocimiento debe alcanzarse desde aquel que ya se posee, y el modo de poseer con claridad objetiva lo que se sabe se apoya en la posibilidad de expresarlo mediante enunciados con sentido.

Así pues, lo que se desconoce directamente habrá de poderse concluir desde los enunciados conocidos, con la ayuda de una regla que nos permita comprender su validez.

El proceso avanza desde las premisas hacia la conclusión, según las reglas válidas de la demostración y de la lógica .

Sistema axiomático 1.2

Toda teoría matemática tiene una estructura que la diferencia de las teorías presentadas en las otras disciplinas.

A ésta estructura se le llama sistema axiomático.

Un sistema axiomático formal consta de los siguientes elementos:

☛ Un alfabeto S para construir expresiones formales que incluye:

* Un conjunto mínimo de elementos o términos propios de la teoría que no se pueden construir a partir de otros. (“Es decir no se pueden definir”).
* Un conjunto de términos construidos a partir de los elementos del conjunto anterior. (Definiciones)

* Un conjunto de símbolos para conectivas lógicas y cuantificadores. (operaciones)
* Un conjunto de símbolos para designar variables.
* Un conjunto de símbolos para constantes (que tendrán en un modelo una interpretación fija).
* Un conjunto de símbolos que serán interpretados como funciones.
* Un conjunto de símbolos que serán interpretados como relaciones.

☛ Una gramática formal que incluirá:

* Reglas de buena formación, que reproducen la "morfología" del lenguaje formal.
* Reglas de inferencia que permitirán deducir unas proposiciones de otras, estas reglas reproducen la "sintaxis" del lengua formal.

☛ Un conjunto de axiomas inicial, o expresiones bien formadas, que son el punto de partida de cualquier deducción.

Para el conjunto de expresiones bien formadas expresadas en el lenguaje formal anterior puede definirse una $S-estructura$ en la que a cada variable constante o cada ocurrencia libre de una variable reciba un valor dentro del modelo (es decir, las constantes y variables libres serán conjuntos preasignados de la $S-estructura$). Las funciones y relaciones serán definidas como funciones y relaciones matemáticas dentro de la $S-estructura$. Una vez definidas las constantes, variables libres, funciones y relaciones resulta trivial atribuir un significado concreto a las expresiones del lenguaje formal en la $S-estructura$.

1.2.1. Modelos para un sistema axiomático formal

Si un conjunto de proposiciones (fórmulas bien formadas) de un sistema axiomático formal admiten una $S-estructura$ donde se satisfacen, entonces se dice que dicha estructura es un modelo para el conjunto de proposiciones.

Un sistema de axiomas que admite un modelo es un sistema de axiomas consistente. Un sistema formal bien construido satisface "teorema de validez" que viene a afirmar que cualquier proposición deducible de los axiomas o teorema del sistema axiomático, se satisface también, en todos los modelo que sean un modelo en el que se satisfacen los axiomas. La propiedad recíproca no siempre se cumple, una proposición que se satisface en todos los modelos de una teoría no tiene porqué ser deducible del sistema de axiomas. Este último punto es ilustrado por los teoremas de incompletitud de Gödel, que viene a afirmar que una sistema formal de ciertos sistemas matemáticos con un conjunto de axiomas que satisface determinada propiedad formal (ser un recursivamente enumerables) admitirá un modelo en el que algunas proposiciones serán ciertas pero no serán deducibles. Es decir, la teoría asociada al sistema axiomático formal será esencialmente incompleta.

1.2.2. Concepto de lógica matemática

La lógica matemática estudia los sistemas formales en relación con el modo en el que codifican conceptos intuitivos de objetos matemáticos como conjuntos, números, demostraciones y computación.

La lógica estudia las reglas de deducción formales, las capacidades expresivas de los diferentes lenguajes formales y las propiedades metalógicas de los mismos.

En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado dentro de un determinado sistema formal.

En un nivel avanzado, la lógica matemática se ocupa de la posibilidad de axiomatizar las teorías matemáticas, de clasificar su capacidad expresiva, y desarrollar métodos computacionales útiles en sistemas formales.

La teoría de la demostración y la matemática inversa son dos de los razonamientos más recientes de la lógica matemática abstracta.

Debe señalarse que la lógica matemática se ocupa de sistemas formales que pueden no ser equivalentes en todos sus aspectos, por lo que la lógica matemática no es método de descubrir verdades del mundo físico real, sino sólo una fuente posible de modelos lógicos aplicables a teorías científicas, muy especialmente a la matemática convencional.

La lógica matemática no se encarga por otra parte del concepto de razonamiento humano general o del proceso creativo de construcción de demostraciones matemáticas mediante argumentos rigurosos pero hechas usando lenguaje informal con algunos signos o diagramas, sino sólo de demostraciones y razonamientos que pueden ser completamente formalizados en todos sus aspectos.

Enunciados y proposiciones 1.3

Empezaremos el estudio de la lógica construyéndola como expondremos a continuación:

- Lo primero es establecer un conjunto mínimo de términos, los cuales no se pueden definir, pero que de forma natural se pueden conocer sus características o propiedades.
- A partir de los elementos anteriores se construyen otros usando proposiciones en forma de equivalencia. estas proposiciones se llaman definiciones.
- Un conjunto de operaciones y relaciones.
- Luego se establecen un conjunto de propiedades independientes, los cuales son ciertos por si solos , es decir su validez es evidente. A este conjunto de propiedades se llaman axiomas y/o postulados.
- Para terminar se construyen a partir de todo lo anterior un conjunto ilimitado de propiedades, las cuales no son evidentes por si solas y por lo tanto es necesario demostrarlas a partir de proposiciones verdaderas usando los métodos de demostración establecidos por la lógica.

Antes de empezar la construcción de la lógica estableceremos alguna ideas generales.

Por ejemplo:

Término. 1.3. 1

Término Es una palabra o propiedad que representa a un objeto o la relación entre varios objetos.

En el lenguaje común existen conceptos como son los enunciados, oraciones y proposiciones que ayudan construir la sintaxis del un idioma en particular, pero estos conceptos son muy amplios y permiten que una expresión o termino pueda tener varios significados, lo cual es un problema para utilizarlo en la ciencia donde cada termino debe tener una y solo una interpretación. A continuación expondremos estos conceptos de acuerdo con el idioma Español.

1.3.1. Enunciados

Los enunciados están constituidos de manera diversa, según las palabras que lo forman y las relaciones que se establecen entre ellas.

Llamamos enunciado a cada secuencia delimitada entre dos silencios, marcada por una determinada curva entonativa, y que constituye un mensaje que ofrece sentido completo en una situación dada. El enunciado es, por tanto, una unidad mínima de comunicación. Existen varios tipos de enunciados

- Enunciativos: este tipo de enunciados informan acciones que han ocurrido en el pasado, están ocurriendo en ese preciso momento o pasarán en el futuro. Algunos ejemplos son:

Ejemplos. 1.3. 1

1. Ayer estuve de visita en la casa de José.
2. Me estoy comiendo un helado de chocolate y vainilla.
3. Mañana mi tía entra al trabajo más tarde.
4. Miguel está enfermo desde la semana pasada. El viernes voy al cine con mis primas.

- Dubitativos: en este caso las ideas expresadas tienen un carácter dudoso o solo existe la posibilidad de que se hagan realidad. Algunos ejemplos de estos enunciados son:

Ejemplos. 1.3. 2

1. Quizá llueva esta noche.
2. Es probable que mañana me levante muy temprano para hacer compras Posiblemente Romina llegue tarde.

Ejemplos. 1.3. 2 (Continuación)

3. Tal vez el viernes vamos a comer a la casa de Agustín.
4. Puede ser que salgamos en veinte minutos.

☛ Interrogativos: estos enunciados son utilizados para formular preguntas. Algunos ejemplos son:

Ejemplos. 1.3. 3

1. ¿Qué hora es? ¿Cómo estás?
2. ¿Falta mucho para llegar?
3. ¿Has hablado con Esteban en los últimos días?
4. ¿Entendiste la última pregunta del examen de matemática?

☛ Exhortativos: en este caso los enunciados son utilizados para dar órdenes, peticiones, consejos o ruegos. Algunos ejemplos son:

Ejemplos. 1.3. 4

1. ¿Podrías traerme un vaso de agua?
2. ¡No vayas por allá! Trata de no llegar tarde esta noche.
3. Me alcanzarías los papeles que están sobre la mesa por favor.
4. Cierra las ventanas de tu cuarto.

☛ Exclamativos: estos enunciados son utilizados para expresar emociones, como alegría, dolor, nostalgia, ira, etc. Por ejemplo:

Ejemplos. 1.3. 5

1. ¡Cuánto me alegra que hayas podido venir!
2. ¡Estoy muy enojada con tu primo!
3. ¡Es un día precioso!
4. ¡Estoy muy feliz! ¡Siento mucho la muerte de tu gato!

1.3.1.1. Oración

Llamamos oración a un tipo particular de enunciados caracterizado por la presencia de una forma verbal:

Si el verbo establece con el sujeto una relación predicativa basada en la concordancia de persona y número, se trata de una oración personal. Si la relación predicativa no es posible, la oración es impersonal.

En la escritura, una oración se reconoce porque comienza con grafía inicial mayúscula y termina con un punto.

La oración es una unidad:

semántica, con sentido completo en sí misma;

fonética, con pausas orales delimitadas y marcadas; y

sintácticamente independiente.

Cuando una oración incluye uno o más enunciados pasa a ser compuesta. Si no es así, se trata de una oración simple.

Es decir la oración es la unidad lingüística más pequeña que tiene sentido propio (sujeto y predicado), sintácticamente independiente, donde :

Sujeto : Es la persona, animal o cosa de la que se dice algo. Para localizarlo se pregunta ¿Quién?, ¿Quiénes? o ¿Qué cosa?, ¿Qué cosas? al verbo. El sujeto concuerda siempre en persona y número con el verbo: A Luis le gustan las canciones de Bisbal. “Las canciones de Bisbal” es el Sujeto porque responde a la pregunta ¿qué cosas le gustan a Luis? Y porque concuerda en persona y número (ellos/ellas) con el verbo.

Predicado : Es lo que se dice del sujeto. Para localizarlo es fácil: "Lo que no es sujeto".

Clases de sujetos.

Sujeto expreso . Es el que aparece en la oración y lo llamaremos Sujeto

Sujeto omitido o elíptico . Es el sujeto que no aparece pero que nos descubre el verbo.

Ejemplos. 1.3. 6

1.

Alfonso	corre mucho.
Sujeto	Predicado

2.

Corren mucho.	(Ellos/as)
Predicado	Sujeto omitido

1.3.1.2. Frase

Los enunciados que carecen de una forma verbal personal son las denominadas frases . Los constituyentes de las frases son siempre palabras de índole nominal, esto es, sustantivos, adjetivos o adverbios. Al no existir un núcleo verbal del que dependan sus demás componentes, las relaciones internas no son idénticas a las que se establecen en la oración. Por ello, las frases no deben clasificarse por analogía con las oraciones a las que pudieran ser semánticamente equivalentes.

Las frases pueden ser constituidas por una sola palabra (¡Lástima!, ¡gracias!, ¡vaya!), (¡Mi alma!, ¡buenas tardes!, ¡a estudiar mucho!, ¡gajes del oficio!). Por ejemplo:

Ejemplos. 1.3. 7

1. Perro ladrador, poco mordedor.
2. Prohibida la entrada.
3. ¡Qué tiempos aquellos!
4. A mal tiempo, buena cara.
5. ¡A mi edad, hacer estas cosas!
6. De tal palo, tal astilla.
7. En casa del herrero, cuchillo de palo.
8. Vivir para ver.

1.3.1.3. Proposición:

Es parecida a la oración, pero carece de un elemento y se puede interpretar como la unidad de lenguaje que tiene sujeto y predicado, verbo en modo personal, pero cuyo sentido es incompleto.

Esta unidad de lenguaje depende de otra con sentido completo. También recibe el nombre de oración subordinada, es decir.

La proposición es un sintagma más reducido que la oración. Y por lo tanto, cualquiera que sea su estructura, estará siempre incluida en la oración.

Tanto la oración como la proposición son unidades semánticas, sintácticas y fonéticas. La diferencia estriba en que la proposición es una unidad menor y formante de la oración compuesta, ya sea por coordinación o por subordinación.

Por lo tanto, la proposición es también una unidad:

- semántica, sin sentido completo en sí misma o si lo tiene, por ser un miembro de la oración a que pertenece, será un sentido más restringido;
- fonética, sin pausas tan delimitadas, marcadas gráficamente por la coma o el punto y coma; y
- sintáctica, con enlaces gramaticales que la hacen dependiente de una oración principal o la relacionan con otra u otras proposiciones.

Podemos clasificar las proposiciones de la siguiente forma:

- Proposición Sustantiva: Equivale a un sustantivo y funciona como tal en la oración compuesta. Funciona sintácticamente como:

Ejemplos. 1.3. 8

Sujeto:

1. Es necesario que te levantes temprano.
2. Lo racional es que continúes trabajando.
3. Parecía injusto que se olvidara de mí.

Ejemplos. 1.3. 9

Complemento directo:

1. Veo lo que dices.
2. Pide lo que quieras.
3. Olvidé decirle a Carlos lo que me habías encargado.
4. Dijeron que vendrían hoy.

Ejemplos. 1.3. 10

Complemento de un adjetivo:

1. Pedro está arrepentido de lo que hizo.
2. El jurado está convencido de que el reo es inocente.
3. El niño está cansado de que no lo tomen en serio.

Ejemplos. 1.3. 11

Complemento de un adverbio:

1. Ella está muy lejos de que la inviten.
2. El pueblo está más cerca de lo que imaginan.

☛ Proposición Adjetiva: Equivale a un adjetivo. Cumple sus mismas funciones. Nada más que en lugar de ser una sola palabra constituyen una oración subordinada. Hay proposiciones adjetivas de sujeto y en el complemento indirecto. Cabe mencionar que el subordinante "Que" es el más empleado en las proposiciones adjetivas.

☛ Proposición Adjetiva de sujeto: Modifican directamente al núcleo del sujeto. Fíjate en las siguientes oraciones:

Ejemplos. 1.3. 12

1. El marido que respeta a su mujer cumple con su deber.
2. El cuadro que adquirieron ayer no vale lo que pagaron.
3. Ese club, al cual se adhirieron ayer, cumple bien sus funciones.
4. El periódico cuyo director renunció, subirá de prestigio.
5. La silla donde te sentaste está rota.

Está muy clara la función desempeñada por las proposiciones resaltadas: modifican al sustantivo, núcleo del sujeto, que es su antecedente.

☛ Proposición Adjetiva en el complemento directo: Modifican directamente al núcleo del complemento directo (El complemento directo es el nombre del objeto que se ve afectado por la acción del verbo). Nota que inmediatamente después del sustantivo viene la proposición que se convierte en el complemento directo.

Ejemplos. 1.3. 13

1. Te escribí una carta en la que te informaba sobre el nuevo carro.
2. Deberías apreciar el regalo que te hizo Bertha.
3. Algún día visitarás la casa que tengo en El Valle.

Ejemplos. 1.3. 13 (Continuación)

4. Todavía estoy esperando la cena que me prometiste.
5. Me sacaron la muela que me dolía mucho.

☛ Proposición Adjetiva en el complemento indirecto: Modifican directamente al núcleo del complemento indirecto (El complemento indirecto siempre va precedido de las preposiciones a y para). Analiza las siguientes oraciones compuestas:

Ejemplos. 1.3. 14

1. Regalé ropa y cobijas a la Cruz Roja, que necesita de todos nosotros.
2. Escogieron una bellísima canastilla para la joven que va a cumplir quince años.
3. Los distintos clubes sociales de la ciudad dieron su aportación para los niños que sufren poliomielitis.
4. Trajeron la tarjeta de crédito para el señor que vive al lado.
5. Llegó un telegrama para el hombre cuyo padre vive en Europa.

Las proposiciones están modificando al sustantivo que es núcleo del complemento indirecto.

☛ Proposición Adjetivas en el complemento circunstancial: Modifican directamente al núcleo del complemento circunstancial.

Ejemplos. 1.3. 15

1. Juan está en la casa donde encontraron oro.
2. Te espero en el café que está en la calle Morelos.
3. Escuché la conferencia de Raiza en Pedasí, cuyas playas son formidables.
4. Me quedo con la carretilla que tiene más espacio.
5. No voy al cine que exhibe películas de guerra.

☛ Proposiciones Adjetivas en el predicado nominal: Modifican al núcleo del predicado nominal, cuando es un sustantivo o equivalente. Como en las siguientes oraciones:

Ejemplos. 1.3. 16

1. Hortensia es la persona a quien he estado buscando.
2. Los niños son los seres que tienen mayor inocencia.
3. Apreciar esta pintura es la forma como se concilia uno con el mundo.
4. Estos son los poemas cuyos autores no los hubieran escrito sin sentirse realmente desolados en el universo.

En estos casos las proposiciones adjetivas están modificando directamente a los sustantivos que están funcionando como núcleos del predicado nominal.

1. persona;
2. seres;
3. forma;
4. poemas.

Los subordinantes son respectivamente: quien, que, como, cuyos.

☛ Proposiciones Adjetivas explicativas: Añaden una cualidad al sustantivo que están modificando directamente, van entre comas. De hecho las comas son la principal forma de diferenciarlas de las especificativas. La proposición en sí no es indispensable para dar sentido cabal a la oración.

Ejemplos. 1.3. 17

1. Socorrimos a la madre, que estaba gritando.
2. Escoge la corbata roja, que es la más fina de todas.
3. Los niños, que iniciaron el juego, llegaron primero.

☛ Proposiciones Adjetivas especificativas: Limitan al sustantivo al cual están determinando; restringen el sentido de lo enunciado. La proposición en si es indispensable para dar sentido cabal a la oración. Ejemplos:

Ejemplos. 1.3. 18

1. Los niños que iniciaron el juego llegaron primero.

Ejemplos. 1.3. 18 (Continuación)

2. Adquirimos los libros que estaban en oferta.
3. La alberca que estaba recién pintada fue inaugurada.

Ejemplo. 1.3. 1 Oración compuesta (por una proposición subordinada)

La madre creyó que el niño dormía en su cuna.

Oración compuesta en donde encontramos una frase subordinada: que el niño dormía en su cuna. El sujeto de la oración es La madre y el predicado es creyó que el niño dormía en su cuna. El niño es el sujeto de la proposición y dormía en su cuna es el predicado de la proposición.

1.3.2. Proposición lógica

De acuerdo con lo expuesto anteriormente vemos la necesidad de establecer un concepto menos amplio de enunciado y de proposición por lo que estableceremos un nuevo concepto determinado como

Término no defnido. 1.3. 1 Enunciado lógico

Un enunciado lógico es una oración o conjunto de oraciones con sentido completo.

En este concepto usaremos el concepto de oración en toda su dimensión, pero no así el de enunciado.

Presentaremos dos ejemplos de Enunciados lógicos

- ☛ Escuché la conferencia de Raiza en Pedasí, cuyas playas son formidables.
- ☛ Estos son los poemas cuyos autores no los hubieran escrito sin sentirse realmente desolados en el universo.

Ahora presentaremos un nuevo concepto como un término que se construye a partir de uno ya conocido.

Definición. 1.3. 1 Proposición lógica

Una proposición lógica es un enunciado lógico al cual se le puede asignar un valor de verdad, es decir puede ser falso o verdadero, pero no ambas.

Nota: De aquí en adelante a las proposiciones lógicas y a los enunciodos lógicos los llamaremos simplemente proposiciones y enunciados, a no ser que no estemos en el contexto de la lógica matemática, por que en ese caso debemos hacer la aclaración

Por ejemplo:

- $3+2=5$. De acuerdo con la definición de adición entre naturales, este enunciado es verdadero, por lo tanto es una proposición.

- Mañana llueve. esto es algo que no se puede saber antes de termine el día, por lo tanto no se le puede asignar un valor de verdad, es decir este enunciado no es una proposición.

Notación: Las proposiciones lógicas serán denotadas generalmente con letras minúsculas p, q, r , t, etc. A la veracidad o falsedad de una proposición se denomina valor de verdad.

Definición. 1.3. 2 — **Valor de verdad**

Se llama valores de verdad de una proposición a sus dos valores posibles; verdadero o falso.

Estos posibles valores se puede esquematizar en una tabla, llamada tabla de verdad, en la forma.

Cuadro 1.1: Tabla de verdad

p
f
v

1.3.2.1. Tipos de proposiciones

Término. 1.3. 2 — **Tautología**

Una **tautología** es una proposición que siempre es verdadera.

A las tautologías a veces en matemáticas se les llama verdades o afirmaciones. Las verdades generales de las matemáticas se deducen a partir del razonamiento lógico, siendo las premisas o afirmaciones, las definiciones, postulados o principios previamente establecidos. El razonamiento utilizado para establecer cualquier verdad o principio es llamado una demostración.

Término. 1.3. 3 — **Falacia**

Una **falacia o contradicción** es una proposición que siempre es falsa.

Término. 1.3. 4 — Contingencia

Las contingencia son proporciones compuestas que no son ni tautología ni contradicciones, es decir, son proposiciones que en algunos casos es f, y en otros es v.

1.3.2.2. Tipos de tautologías

Los siguientes términos son siempre tautologías

Término. 1.3. 5 — Definición

Una **definición** es una afirmación que explica el significado de un término o una palabra, en función de palabras o términos conocidos.

En caso de que un término no se pueda expresar en función de otros términos ya establecidos, se dice que es un término no definido.

Término. 1.3. 6 — Teorema

Un **teorema** es una verdad que requiere demostración.

Término. 1.3. 7 — Axioma

Un **axioma** es una verdad auto-evidente.

Un **PROBLEMA** es una situación o proposición que requiere solución.

Término. 1.3. 8 — Postulado

Un **Postulado** es un problema auto-evidente.

Término. 1.3. 9 — Hipótesis

Una **hipótesis** es una suposición hecha, bien en el texto de una proposición, o en el curso de una demostración.

1.3.2.3. Tipos de proposiciones

Cuando las proposiciones costan de una única oración es fácil especificar su valor de verdad, pero cuando consta de varias oraciones, no lo es tanto; además debemos establecer la forma de conectar las oraciones para que tengan sentido, completo, por lo que se hace necesario establecer una serie de términos para este fin, estos términos son los llamados conectivos lógicos.

Conectivos lógicos

Son expresiones que sirven para unir dos o más proposiciones, entre los más importantes conectivos lógicos tenemos. La conjunción, disyunción, condicional, bicondicional, negación, esto mostraremos en la siguiente tabla:

Cuadro 1.2: Tabla de los conectivos lógicos

Símbolo lógico	Expresión
$\wedge$	p y q
$\vee$	o p o q
$\veebar$	p ó q
$\rightarrow$	Si p, entonces q
$\longleftrightarrow$	p si y sólo si q
$\sim$o $\neg$	ni p, no p

Nota: Generalmente usamos el conectivo $\vee$ de la siguiente forma 2 es par o 3 es impar, en vez de o 2 es par o 3 es impar. también se puede usar: 2 es par o/y 3es impar.

☛ Las proposiciones atómicas ó simples, son las proposiciones que no utiliza conectivos lógicos.

Ejemplos. 1.3. 19

1. 6 es par.
2. 2+5=7.
3. $\sqrt{2}$ es un número real.

☛ Las proposiciones compuestas ó moleculares, son aquellas que utilizan al menos un conectivo lógico.

Ejemplos. 1.3. 20

1. 6 es par y 5 es primo.
2. Si 3+5=8, entonces la suma de primos no es primo.
3. o $\sqrt{-2}$ no es un número real o $\sqrt{2}$ es real.

Conjunto y operaciones con proposiciones 1.4

Antes de seguir con la construcción de la lógica matemática debemos conocer los conceptos de conjunto, producto cruz, relación y función.

Término no defnido. 1.4. 1 — **Conjunto**

Un conjunto es o la existencia o agrupación de objetos que poseen varias características en común, ó la ausencia de objetos.

Realmente un conjunto es una estructura mental con alguna de las siguientes características :

- No posee objetos.
- Posee sólo un objeto.
- Posee muchos objetos.
- Posee infinitos objetos

Nota: Los objetos que se encuentran en un conjunto se les llama elementos

Hasta ahora no hemos explicado como se representan los conjuntos , ya que recordemos que los conjuntos son estructuras abstractas.

Los conjuntos se pueden representar de dos maneras por extensión y por comprensión.

Término. 1.4. 1 — **Conjuntos por extensión**

Un conjunto esta representado por extensión cuando los elementos del conjunto se listan entre llaves.

Por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$

Término. 1.4. 2 — **Conjuntos por compresión**

Un conjunto esta representado por comprensión cuando los elementos del conjunto se clasifican especificando una o varias propiedades que los identifica.

Ejemplo. 1.4. 1 — representación de conjuntos

* Los números pares.
* Los carros marca Ford.

Notación: A los conjuntos se les representa con letras mayúsculas A, $B\,C, \ldots$, etc. Y a los elementos se les representa con lestras minúsculas a, b, $c\,\ldots$ etc. Cuando un elemento a se encuentra en un conjunto B se denota $a \in B$. " Se lee a pertenece a B."

Ejemplo. 1.4. 2 — Notación de conjuntos

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5{,}6\}$ tenemos.

* $3 \in A$, se lee 3 pertenece al conjunto A.
* $5 \notin A$, se lee 2 no pertenece al conjunto A.

Nota: Se dice que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos

1.4.1. Proposiciones abiertas

Regresando al concepto de proposición lógica, donde las expresiones solo pueden ser falsas o verdaderas, nos encontramos regularmente en matemáticas con expresiones como

☛ $x^2 - 5x + 6 = 0$.

☛ $x + 1 = 3$.

☛ $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

☛ $x^2 = 25 \wedge x + 1 = 6$.

En estos enunciados no es posible deducir el valor de verdad, porque no conocemos el valor de x, pero si por ejemplo en la expresión $x + 1 = 3$ decimos que $x = 3$ entonces el enunciado es verdadero y es falso si $x \neq 3$, por lo tanto la expresión es una proposición.

Para poder trabajar con este tipo de expresiones es necesario especificar que es x, lo que estudiaremos a continuación.

Definición. 1.4. 1 — Variable

Una variable es un termino que representa cualquier elemento de un conjunto en particular y puede ser sustituido por cualquier elemento del conjunto.

Ejemplo. 1.4. 3 — Variable

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. x es par, para algún$x \in A$.

En este caso la variable es x y la proposición es cierta si $x = 2$, ya que $2 \in A$.

Definición. 1.4. 2 — Constante

Una constante es un termino que representa a un elemento fijo de un conjunto.

Notación: Las variables se representan generalmenta con las letras minúsculas $l, \cdots, u$, v, $w\,x$, y, z y las constantes generalmente con las letras minúsculas a, $b\,c$, $\cdots, k$.

Nota: Las letras i, j, k, n y m, como variables, generalmente representan números naturales.

Definición. 1.4. 3 — Proposiciones abiertas

Una proposición abierta es aquella donde el sujeto o los sujetos son representados por variables

Ejemplos. 1.4. 1 — Proposiciones abiertas

- ☛ $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x \in I\!R$.
- ☛ $x + 1 = 3$, $x \in I\!R$.
- ☛ $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, $x \in I\!R$.
- ☛ $x^2 = 25 \wedge x + 1 = 6$, $x \in I\!R$.

Definición. 1.4. 4 — Dominio de una proposición abierta

El dominio de una proposición abierta o una variable, es el conjunto de valores que puede tomar una variable.

En los ejemplos 1 el dominio de las proposiciones o de la variable es el conjunto de los números reales.

Definición. 1.4. 5 — **Conjunto solución**

El conjunto solución de una proposición abierta el el conjunto de valores del dominio de una variable que hacen que la proposición sea verdadera.

Ejemplo. 1.4. 4 — **Conjuto solución**

Dada la proposición $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x \in I\!R$ encuentre el conjunto solución.

Solución: Tenemos que el conjunto solución es $\{-3, 2\}$ ya que

*$(-3)^2 - 5\,(-3) + 6 = 0$ y,

* $(2)^2 - 5\,(2) + 6 = 0$.

Además $-3, 2 \in I\!R$.

Notación: Las proposiciones abiertas se denotan $p\,(x)$ó $p(x, y, \cdots, z)$ para indicar cuales son las variables.

Esta notación nos ayuda a representar mejor los conjuntos por extensión usando la estructura: $A = \{x : p(x),\ x \in A\}$

Como por ejemplo $A = \{x :\ x\,\text{es impar},\ x \in I\!N\}$

1.4.2. Conjuntos especiales

1.4.2.1. Conjunto vacío

Definición. 1.4. 6 — **Conjunto vacío**

El conjunto vacío es aquel que no tiene elementos

Notación: El conjunto vacío es único y se representa con los símbolos $\varnothing$ ó $\{\}$.

1.4.2.2. Conjunto unitario

Definición. 1.4. 7 — **Conjunto unitario**

Un conjunto unitario es aquel que posee un solo elemento.

Ejemplos. 1.4. 2 — **Conjuntos unitarios**

* $\{1\}$
* $\{a\}$
* $\{\varnothing\}$

1.4.2.3. Conjunto universal

Definición. 1.4. 8 — **Conjunto universal**

Un conjunto es universal cuando es el conjunto referencia, es decir es el conjunto que contiene a todos los elementos con las mismas propiedades.

Notación: Al conjunto universal se le representa con la letra U.

Ejemplos. 1.4. 3 — **Conjuntos universales**

* El conjunto de los números naturales.
* El conjunto de las letras del alfabeto.
* El conjunto de todos los alumnos de la Universidad Del Atlántico.

1.4.2.4. Subconjunto

Definición. 1.4. 9 — **Subconjunto**

Se dice que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B no vacío. Si A contiene sólo elementos de B ó ningún elemento.

Esta definición nos asegura que el vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Notación: Si A es subconjunto de B se denota $A \subseteq B$ ó $B \supseteq A$.

Ejemplo. 1.4. 5 — Subconjunto

Sea $A = \{x : x$ es una letra del alfabeto español$\}$ ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subconjunto de A

1. $B = \{a, b, c, d\}$.
2. $C = \{\varnothing\}$.
3. $D = \varnothing$.
4. $E = \{\alpha, a, b\}$.

Solución: B y D ya que $C \not\subset A$ porque $\varnothing$ no es un elemento de A sino un subconjunto y $D \not\subset A$ porque α no es una letra del alfabeto español.

Diagramas de Venn

anteriormente dijimos que los conjuntos podíamos representarlos por extensión y por comprensión, pero en algunas ocasiones es mejor representarlos gráficamente, utilizando un rectángulo para el conjunto universal y los conjuntos con figuras geométricas en su interior.

por ejemplo sea Uel conjunto referencia de los conjuntos A, B y C entonces podemos representarlos así.

1.4.2.5. Producto cruz

Definición. 1.4. 10 — Producto cruz

Sean A y B conjuntos no vacíos, se llama producto cruz al conjunto de elementos que tienen la forma (x, y) de tal forma que $x \in A$ y $y \in B$. Es decir los elementos de A están en la primera posición y los elementos de B están en la segunda posición del elemento (x, y).

Notación: Sean A y B dos conjuntos diferentes del vacío, el producto cruz entre los conjuntos A y B se denota $A \times B$. Nota: Al elemento (x, y) se le llama pareja ordenada y a x se le llama primera componente y a y segunda componente.

Ejemplo. 1.4. 6

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$ hallar

a. $A \times B$.

b. $B \times A$.

c. $A \times A$

Solución:

a. $A \times B = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

b. $B \times A = \{(4,1), (5,1), (6,1), (4,2), (5,2), (6,2), (4,3), (5,3), (6,3)\}$.

c. $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

Observe que $A \times B \neq B \times A$.

1.4.2.6. Relación binaria

Definición. 1.4. 11 — Relación binaria

Una relación binaria es un subconjunto del producto cruz diferente del vacio .

Notación: Si una pareja (x, y)pertenece a una relación binaria R se denota xRy. Que se lee x está relacionada con y.

Ejemplo. 1.4. 7 — Relación binaria

Sean $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, indique cuales conjuntos son relaciones binarias,

1. $R_1 = \{(x, y) : x = y,\ x \in A, y \in B\}$.
2. $R_2 = \{(x, y) : x < y,\ x \in A, y \in B\}$.
3. $R_3 = \{(2,1), (4,1), (6,1), (8,1), (10,1)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (4,5)\ \}$.

Solución:

1. $R_1 = \{(2,2), (4,4)\} \subseteq A \times B$, entonces R_1 es relación binaria .
2. $R_2 = \{(2,3), (2,4), (2,5), (4,5)\} \subseteq A \times B$, entonces R_2es relación binaria.
3. $R_3 = \{(x, y) : y = 1,\ x \in A, y \in B\} \subseteq A \times B$, entonces R_3 es relación binaria.
4. R_4 no es relación binaria ya que $(1,2) \notin A \times B$.

Nota: De aquí en adelante a las relaciones binarias las nombraremos sólo relaciones.

1.4.2.7. Función

Se va a introducir el concepto de función, hablando libremente una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla (procedimiento o mecanismo) que nos transporta de un conjunto a otro de manera que asociamos cada elemento de A un único elemento en B.

Definición. 1.4. 12 — **Función**

Consideremos dos conjuntos cualquiera A y B no vacíos, a la relación binaria f de A en B le llamaremos función de A en B, si y sólo si, verifica:

i) $f \subseteq A \times B$

ii) Si $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$, entonces $y_1 = y_2$.

Nota: La segunda condición indica, que dos parejas ordenadas distintas no pueden tener la misma primera componente.

Observaciones

- A una función f de A en B la denotaremos por $\begin{array}{cccc} f: & A & \rightarrow & B \\ & x & \mapsto & y \end{array}$ ó $A \xrightarrow{f} B$ y se lee " f es una función de A en B", donde el conjunto A le llamamos conjunto de partida y el conjunto B le llamaremos conjunto de llegada.
- Si el par $(x, y) \in f$, escribimos $y = f(x)$ y se dice que y es imagen de x por f ó también, que $y = f(x)$ es el valor de f en x.
- También se puede decir que $y = f(x)$ si y sólo si $(x, y) \in f$.
- Otra forma de representar una función es $f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$
- Una consecuencia inmediata de la definición es que toda función es una relación pero no toda relación es una función.

Ejemplo. 1.4. 8 — **Función**

Dada la relación $R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (2,5)\}$ indicar si R es una función.

Solución: R no es una función, puesto que para la componente 2 existen dos componentes 3 y 5 tales que $(2,3)$ y $(2,5) \in R$, lo que contradice la segunda condición de la definición de función.

Nota: Sea $f : A \xrightarrow{f} B$ una función de A en B, llamaremos dominio de la función f, al conjunto de todas las primeras componentes, el cual denotaremos por D_f , es decir:

$$D_f = \{x \in A : \text{ tal que existe un } y \in B \wedge (x, y) \in f\} \subseteq A.$$

Llamaremos rango de la función f al conjunto de las imágenes de todos los elementos de A, mediante f al cual denotaremos por R_f es decir:

$$R_f = \{y \in B : \text{ tal que existe un } x \in A \wedge (x, y) \in f\} \subseteq B.$$

Ejemplo. 1.4. 9

Sea $f = (1, 2), (3, 4), (5, 6).(7, 8)$ su dominio y rango es: $D_f = 1, 3, 5, 7$; $R_f = 2, 4, 6, 8$.

Nota: A una función f, le llamaremos aplicación de A en B, si y sólo si: $D_f = A$.

Ejemplo. 1.4. 10

Sean $A = 1, 3, 5$, $B = 2, 4, 6$, calcule $A \times B$

a) El conjunto $f = (1, 4), (3, 2)$ es función donde $D_f = 1, 3$ y $R_f = 4, 2$ pero f no es una aplicación de A en B puesto que $D_f \neq A$.

b) El conjunto $f = (1, 2), (3, 4), (5, 6)$ es una función donde: $D_f = 1, 3, 5$ y $R_f = 2, 4, 6$, como $D_f = A$ entonces f es una aplicación de A en B.

1.4.3. Operaciones entre proposiciones

En en sistema axiomático son importantes las operaciones que se pueden realizar con sus elementos, pero en este punto es necesario definir lo que es una operación.

Definición. 1.4. 13 — Operación binaria

Dados tres conjuntos A, B y C no vacíos, una operación binaria es una aplicación de la forma :

$$\begin{array}{cccc} \otimes: & A \times B & \to & C \\ & (x, y) & \mapsto & z \end{array}$$

Notación: Si $((x, y), z) \in \otimes$ se denota $x \otimes y = z$.

Si convenimos en considerar el conjunto U de todas las posibles proposiciones del lenguaje como conjunto universo, y además el conjunto $V = \{v, f\}$ el conjunto de los valores de verdad de una proposición. Entonces podemos definir las siguientes aplicaciones :

$$P\colon \begin{array}{ccc} U & \to & V \\ p & \mapsto & x \end{array}, \quad \otimes : \begin{array}{ccc} V\times V & \to & V \\ (x,y) & \mapsto & z \end{array} \text{ y } \oplus : \begin{array}{ccc} U\times U & \to & U \\ (p,q) & \mapsto & r \end{array}$$

- La aplicación P establece que a cada proposición se le puede asignar un valor y sólo un valor de verdad, lo que está de acuerdo con la definición, y que cada proposición tiene asignado un valor de verdad.

- La operación $\otimes$ establece que dados dos valores de verdad estos se pueden operar y obtener un único valor de verdad

- La operación $\oplus$ establece que dadas dos proposiciones se pueden operar y obtener una única proposición.

Teniendo en cuenta las aplicaciones definidas podemos establecer la siguiente estructura

$$U \times U \overset{R}{\to} V \times V \overset{\otimes}{\to} V$$

de tal forma que dadas dos proposiciones se pueden operar sus valores de verdad bajo la operación $\otimes$.

Usando ésta estructura podemos definir las siguientes operaciones entre proposiciones.

Nota: En este curso no demostraremos que las operaciones están bien definidas, es decir que es una función y el conjunto de partida es igual al conjunto de llegada.

1.4.3.1. Conjunción

La conjunción es la operación de la forma $O_\wedge : \begin{array}{ccc} U\times U & \to & U \\ (p,q) & \mapsto & p\wedge q \end{array}$ de tal forma que se pueden operar sus valores de verdad usando la definición $\wedge : \begin{array}{ccc} V\times V & \to & V \\ (x,y) & \mapsto & z \end{array}$, obtenemos una estructura de la forma: $U \times U \overset{O_\wedge}{\to} V \times V \overset{\wedge}{\to} V$.

Definición. 1.4. 14 — **Conjunción**

La ley que establece la conjunción es la siguiente: la conjunción es verdadera, sólo si las dos proposiciones son verdaderas.

Cuadro 1.3: Tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p\wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Ejemplo. 1.4. 11 — Conjunción

Sí $p:\ 4<7$ y $q:\ 6$ es número par. Calcular el valor de verdad de $p\wedge q$.

Solución:

Cuadro 1.4: Tabla de verdad

p	q	$p\wedge q$
v	v	v

1.4.3.2. Disyunción

La disyunción es la operación de la forma $\begin{array}{cccc} O_\vee: & U\times U & \to & U \\ & (p,q) & \mapsto & p\vee q \end{array}$ de tal forma que se pueden operar sus valores de verdad usando la definición $\begin{array}{cccc} \vee: & V\times V & \to & V \\ & (x,y) & \mapsto & z \end{array}$, obtenemos una estructura de la forma: $U\times U \overset{O_\vee}{\to} V\times V \overset{\vee}{\to} V$.

Definición. 1.4. 15 — Conjunción

La ley que establece la disyunción es la siguiente: la disyunción es falsa, sólo si las dos proposiciones son falsas.

Cuadro 1.5: Tabla de verdad de la disyunción

p	q	$p\vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Ejemplo. 1.4. 12 — Disyunción

Sí $p:\ 7>9$ y $q:\ 4<5$. Calcular el valor de verdad de $p\vee q$.

Solución:

Cuadro 1.6: Tabla de verdad

p	q	$p\vee q$
f	v	v

1.4.3.3. Condicional

La condicional es la operación de la forma $\begin{array}{cccc} O_{\rightarrow}: & U\times U & \rightarrow & U \\ & (p,q) & \mapsto & p\rightarrow q \end{array}$ de tal forma que se pueden operar sus valores de verdad usando la definición $\begin{array}{cccc} \rightarrow: & V\times V & \rightarrow & V \\ & (x,y) & \mapsto & z \end{array}$, obtenemos una estructura de la forma: $U\times U \overset{O_{\rightarrow}}{\rightrightarrows} V\times V \overset{\rightarrow}{\rightrightarrows} V$.

Nota: En la condicional a la proposición p se le llama antecedente y a q consecuente.

Definición. 1.4. 16 — **Condicional**

La ley que establece la condicional es la siguiente: la bicondicional es verdadera cuando las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Cuadro 1.7: Tabla de verdad de la bicondicional

p	q	$p \longleftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Ejemplo. 1.4. 13 — **Condicional**

Sea p : Cristóbal Colón descubrió América. ; $q: \ 6+3=8$ Hallar el valor de verdad de $p\rightarrow q$

Solución:

Cuadro 1.8: Tabla de verdad

p	q	$p \leftrightarrow q$
v	f	f

1.4.3.4. Bicondicional

La bicondicional es la operación de la forma $\begin{array}{cccc} O_{\longleftrightarrow}: & U\times U & \rightarrow & U \\ & (p,q) & \mapsto & p\leftrightarrow q \end{array}$ de tal forma que se pueden operar sus valores de verdad usando la definición $\begin{array}{cccc} \leftrightarrow: & V\times V & \rightarrow & V \\ & (x,y) & \mapsto & z \end{array}$, obtenemos una estructura de la forma: $U\times U \overset{O_{\leftrightarrows}}{\rightrightarrows} V\times V \overset{\leftrightarrows}{\rightrightarrows} V$.

Definición. 1.4. 17 — **Bicondicional**

La ley que establece la bicondicional es la siguiente: la bicondicional es verdadera cuando las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Cuadro 1.9: Tabla de verdad de la bicondicional

p	q	$p \longleftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Ejemplo. 1.4. 14 — **Bicondicional**

Sea p : Cristóbal Colón descubrió América. ; $q:\ 6+3=8$ Hallar el valor de verdad de $p \to q$

Solución:

Cuadro 1.10: Tabla de verdad

p	q	$p \to q$
v	f	f

1.4.3.5. Disyunción exclusiva

La disyunción exclusiva es la operación de la forma $\begin{array}{cccc} O_{\veebar}: & U \times U & \to & U \\ & (p,q) & \mapsto & p \veebar q \end{array}$ de tal forma que se pueden operar sus valores de verdad usando la definición $\begin{array}{cccc} \veebar: & V \times V & \to & V \\ & (x,y) & \mapsto & z \end{array}$, obtenemos una estructura de la forma: $U \times U \overset{O_{\veebar}}{\to} V \times V \overset{\veebar}{\to} V$.

Definición. 1.4. 18 — **Disyunción exclusiva**

La ley que establece la disyunción exclusiva es la siguiente: la disyunción exclusiva es falsa cuando las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Cuadro 1.11: Tabla de verdad de la bicondicional

p	q	$p \veebar q$
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Ejemplo. 1.4. 15 — Disyunción exclusiva

Sea p : Cristóbal Colón descubrió América. ; $q:\ 6+3=8$ Hallar el valor de verdad de $p \veebar q$

Nota: Ésta operación se llama excluyente porque porque sólo se puede dar ambas pero no una sola.

Solución:

Cuadro 1.12: Tabla de verdad

p	q	$p \veebar q$
v	f	v

1.4.3.6. Negación

La negación es la operación de la forma $\begin{array}{cccc} O_{\sim}: & U & \rightarrow & U \\ & p & \mapsto & q \end{array}$ de tal forma que se pueden operar su valor de verdad usando la definición $\begin{array}{cccc} \sim: & V & \rightarrow & V \\ & x & \mapsto & z \end{array}$.

Definición. 1.4. 19 — Negación

La ley que establece la negación es la siguiente: La negación cambia el valor de verdad de una proposición.

Cuadro 1.13: Tabla de verdad de la negación.

p	$\sim p$
v	f
f	v

1.4.4. Relaciones entre proposiciones

En esta sección trabajaremos con tautologías y falacias por lo que presentaremos algunos ejemplos para aprender a determinar cuando una proposición es una tautología, contingencia ó falacia.

Ejemplos. 1.4. 4 — Tautológias

1. $p \vee \sim p$ (principio del tercio excluido)
2. $[(p \to q) \wedge p] \to q$
3. $\sim (p \wedge \sim p)$

Solución:

1. Vemos que en la última columna de la tabla de verdad (1.14) nos muestra que $p \vee \sim p$ es una tautología.

Cuadro 1.14: Tabla de verdad.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
v	f	v
f	v	v

2. Si observamos en la tabla de verdad (1.15) nos queda demostrado que $[(p \to q) \wedge p] \to q$ es una tautología.

Cuadro 1.15: Tabla de verdad.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to p) \wedge p] \to q$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	f	v

3. Este queda de ejercicio al lector.

Ejemplos. 1.4. 5 — Falacias

1. $p \wedge \sim p$ (principio de contradicción)
2. $(p \to q) \wedge (p \wedge \sim q)$
3. $\sim (p \vee \sim p)$

Solución:

1. Vemos que en la última columna de la tabla de verdad (1.16) nos muestra que $p \wedge \sim p$ es una falacia.

Cuadro 1.16: Tabla de verdad.

p	$\sim p$	$p\wedge \sim p$
v	f	f
f	v	f

2. Si observamos en la tabla de verdad (1.17) nos queda demostrado que $(p \to q) \wedge (p\wedge \sim q)$ es una falacia.

Cuadro 1.17: Tabla de verdad.

p	q	$p \to q$	$p\wedge \sim q$	$(p \to q) \wedge (p\wedge \sim q)$
v	v	v	f	f
v	f	f	v	f
f	v	v	f	f
f	f	v	f	f

3. Este queda de ejercicio al lector

1.4.4.1. Implicación

Definición. 1.4. 20 — Implicación

Se dice que una proposición q se deduce de p o que una proposición p implica una proposición q cuando $p \to q$ es una tautología.

Notación: Si una proposición p implica a una proposición q se denota $p \Rightarrow q$.

Ejemplo. 1.4. 16 — Implicación

Determinar si $[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

Solución:

Cuadro 1.18: Tabla de verdad.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim q$	$(\sim p \vee q) \wedge \sim q$	$[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \to \sim p$
v	v	f	f	v	v	v
v	f	f	f	v	f	v
f	v	v	f	v	v	v
f	f	v	f	v	v	v

Ejemplo. 1.4. 17 — Implicación

Determinar si $(p\wedge \sim p) \Rightarrow q$

Solución:

Cuadro 1.19: Tabla de verdad.

p	q	$\sim p$	$p\wedge \sim p$	$(p\wedge \sim p) \to q$
v	v	f	f	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	f	v

1.4.4.2. Equivalencia lógica

Definición. 1.4. 21 — Equivalencia lógica

Se dice que una proposición q es equivalente a p, cuando $p \leftrightarrow q$ es una tautología.

Notación: Si una proposición p es equivalente a una proposición q se denota $p \Leftrightarrow q$ ó $p \equiv q$.

Ejemplo. 1.4. 18 — Equivalencia lógica

Analice el valor de verdad de la proposición compuesta $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

Solución:

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Es decir las proposiciones: $p \to q$ y $\sim q \to \sim p$ son equivalentes.

Ejemplo. 1.4. 19 — Equivalencia lógica

Probar usando las tablas de verdad que las proposiciones $(p \to q)$ y $(\sim q \to \sim p)$, son lógicamente equivalentes.

Solución: Para probar que las proposiciones $(p \to q)$ y $(\sim q \to \sim p)$ son lógicamente equivalentes debemos probar que $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ es una tautología.

Cuadro 1.20: Tabla de verdad.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
v	v	f	f	v	v	v
v	f	f	v	f	f	v
f	v	v	f	v	v	v
f	f	v	v	v	v	v

Nota: Para verificar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes basta comprobar que las dos proposiciones tienen la misma tabla de verdad. Como se observa en la tabla (1.20) al comparar las columnas 5 y 6.

1.4.5. Cuantificadores y otras formas de expresar la implicación

En algunos casos las condicionales, vienen expresadas de tal forma que cada proposición simple se puede representar como un conjunto, por ejemplo

$$\text{Los polígonos de cuatro lados son cuadriláteros.} \tag{1.1}$$

En este caso llamaremos $P_x = \{x : x \text{ es un polígono}\}$ y $Q_x = \{x : x \text{ es un cuadrilátero}\}$ [1] y representamos la proposición (**??**) como $P_x \to Q_x$, pero a nosotros nos interesan son las implicaciones, por tanto veamos cuando está proposición es verdadera. Para ello tomaremos otro conjunto $U_x = \{x : x \text{ es una figura plana}\}$, a este conjunto lo llamaremos universal o de referencia. Ahora realizaremos un diagrama de Venn mostrado en la figura(1.1)

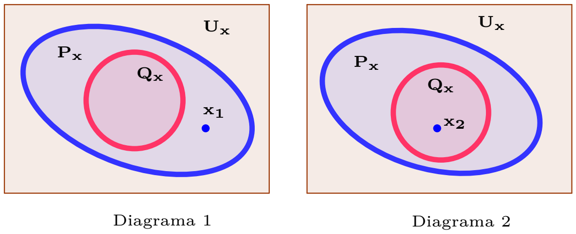


Figura 1.1: Proposiciones abiertas

Si tomamos un polígono, el cual representaremos con el símbolo x_1, observamos en el diagrama 1 que x_2 no está en el conjunto de los cuadriláteros, por tanto en este caso $P_x \to Q_x$ es falsa, mientras en el diagrama 2 tomaremos un polígono representado por x_2 el cual está en Q_x, por tanto $P_x \to Q_x$ es verdadera, de lo que podemos concluir que para que $P_x \to Q_x$ sea una tautología debe cumplirse la relación.

$$Q_x \subseteq P_x$$

Para indicar que $P_x \to Q_x$ es una tautología utilizamos unos operadores lógicos de existencia, los cuales son:

[1] A las proposiciones que dependen de una variable y de un conjunto referencia, como es el caso de P_x y Q_x se llaman proposiciones abiertas.

- Existe algún: Se representa $\exists x$ y se lee existe algún x.
- Para todo: se representa $\forall x$ y se lee para todo x.
- Existe un único: Se representa $\exists\,!x$ y se lee existe uno y sólo un x.
- Ningún: Se representa $\sim \exists x$ y se lee no existe ningún x.

En nuestro caso la proposición quedaría:

$$\forall x \in U, \ (p_x \Longrightarrow q_x)$$

De aquí en adelante el conjunto que representa a la proposición se representará con letras mayúsculas y las proposiciones con letras minúsculas con la variable como subíndice:

Analicemos nuevamente el diagrama 2 de la figura (1.1) Como, x_2 está en el conjunto, entonces podemos decir que P es condición suficiente para que x_2 esté en el conjunto Q. En este sentido, se dice que p_x es condición suficiente para q_x. Además es claro que para que un elemento x_2 esté en P se necesita que x_2 esté en en Q. De aquí que se diga que q_x es condición necesaria para p_x. También se observa que un elemento x_2 está en el conjunto Q si está en el conjunto P. Este análisis precedente sugiere otras maneras de expresar la implicación

$$p_x \Longrightarrow q_x$$

éstas son:

1. p_x implica a q_x
2. p_x es condición suficiente para q_x
3. q_x es condición necesaria para p_x
4. q_x, si p_x

1.4.5.1. Negación de los cuantificadores

La regla general para construir la negación de una proposición abierta es la siguiente: Los $\forall$ se cambian por o $\exists$ y los $\exists$ se cambian por $\forall$ y después se niega la proposición abierta.

La negación de la proposición se construye mecánicamente del mismo modo como se o a realiza la negación de una proposición .

Inferencia y esquemas de razonamiento 1.5

1.5.1. Principales leyes lógicas o tautológicas

Siguiendo las construcción axiomática de la lógica nos queda establecer los axiomas y los teoremas, cual estableceremos en ésta sección.

Término. 1.5. 1 — Leyes de inferencia lógica

Dadas dos proposiciones p y q al término $p \equiv q$ se le llama ley de inferencia.

En la lógica los teoremas son leyes de inferencia.

1.5.1.1. Axiomas

Estableceremos tres axiomas,

Axioma. 1.5. 1 — Toda proposición es idéntica a si misma, es decir $p \equiv p$

Identidad

Axioma. 1.5. 2 — una proposición no puede ser cierta y falsa a la vez, es decir $\sim (p \wedge \sim p) \equiv v$.

Contradicción

Axioma. 1.5. 3 — Toda proposición es cierta ó es falsa , es decir $p \vee \sim p \equiv v$.

Tercer excluido

1.5.1.2. Leyes de inferencia

Leyes de inferencia. 1.5. 1 — Involutiva

$\sim (\sim p) \equiv p$

Leyes de inferencia. 1.5. 2 — **Indempotencia**

1. $p \wedge p \equiv p$
2. $p \vee p \equiv p$

Leyes de inferencia. 1.5. 3 — **Comutativas**

1. $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
2. $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
3. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

Leyes de inferencia. 1.5. 4 — **Asociativas**

1. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
2. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
3. $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

Leyes de inferencia. 1.5. 5 — **Distributivas**

1. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
3. $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
4. $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

Leyes de inferencia. 1.5. 6 — **Morgan**

1. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Leyes de inferencia. 1.5. 7 — **Del condicional**

1. $p \to q \equiv \sim p \vee q$
2. $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

Leyes de inferencia. 1.5. 8 — **Del bicondicional**

1. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
2. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$

Leyes de inferencia. 1.5. 9 — **De la absorción**

1. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
2. $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$
3. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
4. $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

Leyes de inferencia. 1.5. 10 — **De transposición**

1. $(p \to q) \equiv \sim q \to \sim p$ contrareciproco
2. $p \leftrightarrow q \equiv \sim q \leftrightarrow \sim p$

Leyes de inferencia. 1.5. 11 — **De exportación**

1. $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow r \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_{n-1}) \rightarrow (p_n \rightarrow r)$

Leyes de inferencia. 1.5. 12 — **De los modulos**

1. $p \wedge v \equiv p$
2. $p \vee f \equiv p$

Leyes de inferencia. 1.5. 13 — **De la simplificación**

1. $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p$
2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$

Nota: Estas Leyes son muy útiles para simplificar los problemas, puesto que es válido reemplazar una proposición por su equivalente sin alterar el resultado.

Ejemplos. 1.5. 1

Simplificar las proposiciones siguientes aplicando las leyes lógicas

1. $[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$
2. $\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee q$
3. $[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

Solución:

1. Apliquemos las leyes de inferencia

$$
\begin{aligned}
[(p\vee \sim q)\wedge q]\rightarrow p &\equiv \sim[(p\vee \sim q)\wedge q]\vee p\\
&\equiv [\sim(p\vee \sim q)\vee \sim q]\vee p\\
&\equiv [\sim(p\vee \sim q)]\vee(p\vee \sim q)\\
&\equiv (\sim(p\vee \sim q)\vee p)\vee \sim q\\
&\equiv ([\sim p\wedge \sim q]\vee p)\vee \sim q\\
&\equiv [(\sim p\vee p)\wedge(\sim q\vee p)]\vee \sim q\\
&\equiv [v\wedge(\sim q\vee p)]\vee \sim q\\
&\equiv (\sim q\vee p)\vee \sim q\\
&\equiv (p\vee \sim q)\vee \sim q\\
&\equiv p\vee(\sim q\vee \sim q)\\
&\equiv p\vee \sim q
\end{aligned}
$$

2. Apliquemos las leyes de inferencia

$$
\begin{aligned}
\sim[\sim(p\wedge q)\rightarrow \sim q]\vee q &\equiv [\sim(p\wedge q)\wedge \sim(\sim q)]\vee q\\
&\equiv [(\sim p\vee \sim q)\wedge q]\vee q\\
&\equiv [(\sim p\wedge q)\vee(\sim q\wedge q)]\vee q\\
&\equiv [(\sim p\wedge \sim q)\vee f]\vee q\\
&\equiv (\sim p\wedge \sim q)\vee q\\
&\equiv ((\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee q))\\
&\equiv (\sim p\vee q)\wedge v\\
&\equiv \sim p\vee q
\end{aligned}
$$

3. Queda de tarea al lector.

1.5.2. Esquemas de razonamiento

1.5.2.1. Método inductivo

El razonamiento inductivo es el proceso mediante el cual se obtienen conclusiones a partir de nuestras propias observaciones o a partir de ejemplos particulares, es decir al observar que una acción o propiedad se repite se concluye en general que esa acción o propiedad siempre es cierta

Término. 1.5. 2 — Conjetura

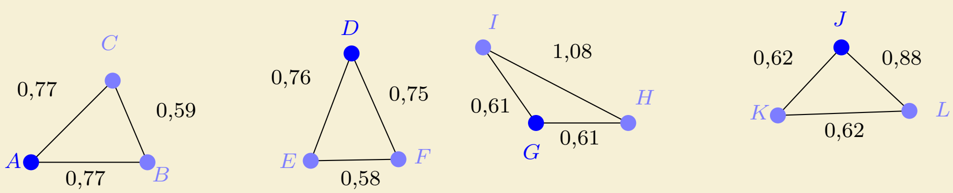
Es la conclusión que se obtiene a partir de un proceso inductivo

Nota: Al utilizar el razonamiento inductivo debemos tener cuidado de no construir conjeturas o generalizaciones falsas, por lo siempre hay que tratar de encontrar casos donde no se cumpla la conjetura, en caso de que no se consiga, no quiere decir que la conjetura es cierta, sólo nos indica que no hemos encontrado un caso donde no se cumple. A continuación mostraremos un ejemplo para explicar paso a paso como podemos obtener una conjetura a partir de una secuencia de casos o fenómenos. Aunque en ese ejemplo no trataremos de verificar si la conjetura es siempre cierta, el objetivo es de aprender a construir conjeturas.

Ejemplo. 1.5. 1

Suponga que una persona mide los lados de cuatro triángulos como muestra la figura(1.2). Establezca una conjetura sobre los lados de un triángulo

Figura 1.2: Desigualdad triangular



De acuerdo con la figura 1.2 tenemos que en $\triangle ABC$ se tiene:

$$AC + AB = 1{,}54 > BC = 0{,}31 \tag{1.2}$$

$$AB + BC = 1{,}36 > AC = 0{,}77 \tag{1.3}$$

En el $\triangle DEF$ se tiene que

$$DE + DF = 1{,}51 > EF = 0{,}58 \tag{1.4}$$

$$DE + EF = 1{,}48 > AC = 0{,}75 \tag{1.5}$$

En el $\triangle IGH$ se tiene que

$$IG + GH = 1{,}22 > HI = 1{,}08 \tag{1.6}$$

$$IG + IH = 1{,}69 > GH = 0{,}61 \tag{1.7}$$

En el $\triangle JKL$ se tiene que

$$JK + KL = 1{,}29 > JL = 0{,}88 \tag{1.8}$$

$$JK + JL = 1{,}50 > KL = 0{,}75 \tag{1.9}$$

De los anteriores resultados , a pesar que los triángulos ABC, HIG y JKL son isósceles, podemos concluir. " Que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre es menor que la longitud de su tercer lado"

1.5.2.2. Método del contraejemplo

Hay ocasiones donde después de un razonamiento inductivo obtenemos una conjetura que no se cumple para todos los casos, es decir obtenemos una generalización falsa, entonces para indicar que esa generalización es falsa buscamos un ejemplo donde no se cumpla la acción o la propiedad.

Término. 1.5. 3 — **Contraejemplo**

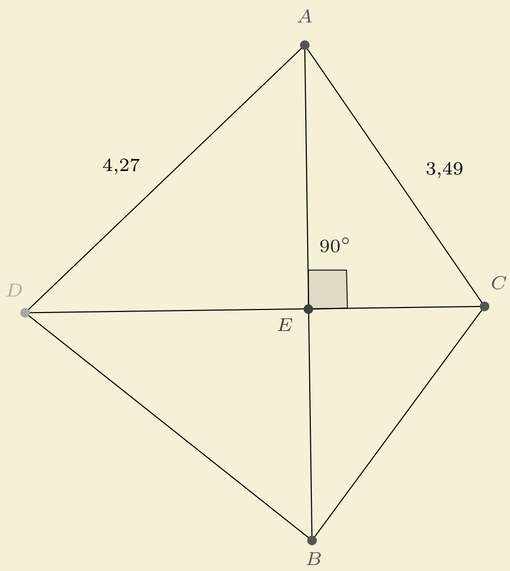
Es el método que se usa para demostrar que una generalización es falsa, utilizando un ejemplo que la contradiga.

Nota: Los ejemplos sólo son validos para demostrar que una proposición es falsa, nunca demuestra que una proposición es verdadera.

Ejemplo. 1.5. 2 — **Contraejemplo**

Si un cuadrilátero tiene sus diagonales perpendiculares, entonces es un rombo.

Figura 1.3: Cometa



En el cuadrilátero podemos observar que $AD = 6{,}29$ y $AC = 6$ y por definición de rombo el cuadrilátero $ABCD$ no puede ser un rombo porque no tiene sus lados congruentes.

1.5.2.3. Razonamiento deductivo

El método deductivo consiste en partir de un número reducido de información (hipótesis) y mediante un proceso lógico deducir otros conocimientos o proposiciones nuevas. Para profundizar y entender este método explicaremos a continuación cuales son los procesos lógicos.

1.5.2.4. Prueba indirecta (Tollendo-tollens)

Es un razonamiento de la forma:

$$p \longrightarrow q$$
$$\sim q$$
$$\overline{}$$
$$\sim p$$

Ejemplo. 1.5. 3

$p \to q$: Si dos rectas son paralelas, entonces no tienen puntos en común.

$\sim q$: Las rectas $\overleftrightarrow{l_1}$ y $\overleftrightarrow{l_2}$ tienen un punto en común.

$\sim p$: Las rectas $\overleftrightarrow{l_1}$ y $\overleftrightarrow{l_2}$ no son paralelas.

Ejemplo. 1.5. 3 (Continuación)

Como la condicional debe ser una implicación, entonces tenemos que para que ella sea una tautología, solo existen dos posibilidades, que las dos proposiciones p y q tengan el mismo valor de verdad. Por tanto si q es falsa se deduce que p también es falsa.

1.5.2.5. Modus ponendus ponens (Directa)

Este es un razonamiento de la forma:

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ \underline{\quad p \quad} \\ \\ p \end{array}$$

La argumentación es la misma de la prueba indirectas decir para que $p \longleftrightarrow q$ sea una implicación si p es verdadera, se tiene que q también lo es.

Ejemplo. 1.5. 4

$p \to q$:	Si un triángulo tiene tres ángulos congruentes, entonces es equilátero.
p :	El triángulo $\triangle ABC$tiene tres ángulos congruentes
q :	El triangulo $\triangle ABC$es equilátero.

1.5.2.6. Regla de la cadena

Este razonamiento es el más usado en matemáticas consiste en construir una cadena de implicaciones partiendo de la hipótesis hasta obtener la conclusión y es de la forma:

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow r \\ \underline{r \longrightarrow q} \\ \\ p \longrightarrow q. \end{array}$$

Ejemplo. 1.5. 5

$p \to q$: Si dos rectas son perpendiculares, entonces se intersecan.

$q \to r$: Si dos rectas se intersecan, entonces no son paralelas.

$p \to r$: Si dos rectas son perpendiculares, entonces no son paralelas.

Otra forma de interpretar este razonamiento es:

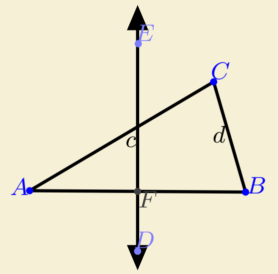
$$(p \longrightarrow r \wedge r \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow q),$$

mirándola de esta forma el razonamiento es equivalente si la conjunción es cierta entonces la conclusión también lo es decir $p \longrightarrow q$ es una tautología.

Ejemplo. 1.5. 6

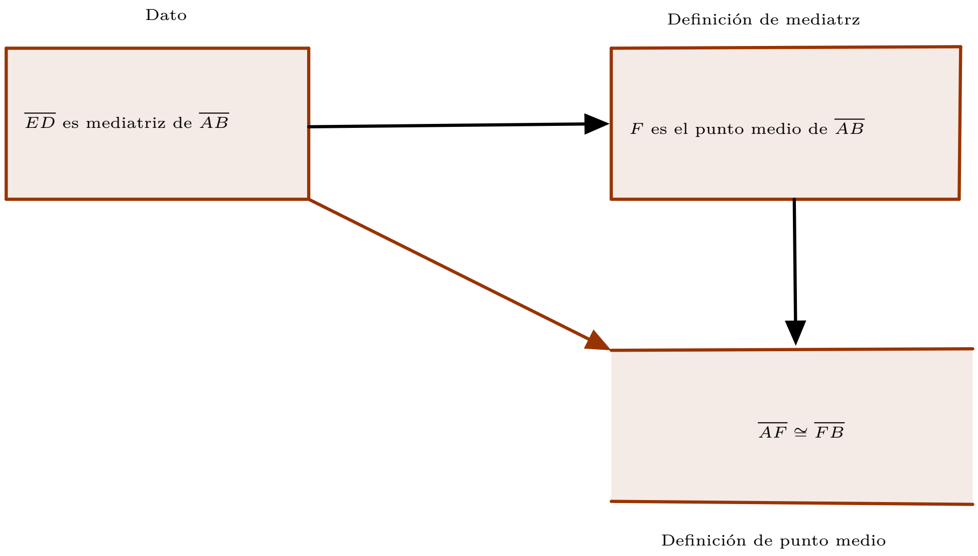
Sea $\overleftrightarrow{ED}$ una mediatriz del segmento $\overline{AB}$ en el $\triangle ABC$, si el punto F es la intersección de lado AB y la mediatriz, entonces $\overline{AF} \cong \overline{FB}$.

Figura 1.4: Regla de la cadena



Solución: Para demostrar que ésta proposición es una implicación vamos a utilizar el método de razonamiento deductivo, de la siguiente manera:

Figura 1.5: Solución



La estructura para redactar una demostración que usaremos es la siguiente.

Prueba:

Afirmaciones		Razones
1.	$\overline{ED}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$	Dado
2.	F es punto medio de $\overline{AB}$	Definición de punto mediatriz
3.	$AF \cong FB$	Definición de punto medio

■

Es decir en este ejemplo usamos la regla de la cadena.

1.5.2.7. Ley modus tollendo-ponens

Este razonamiento es de la forma:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \\ q. \end{array}$$

1.5.2.8. Ley del silogismo disyuntivo

Es un razonamiento con la siguiente estructura

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \longrightarrow r \\ q \longrightarrow s \\ \hline \\ r \vee s. \end{array}$$

Nota: Existen tres reglas básicas de validez que se aplican continuamente en una demostración.

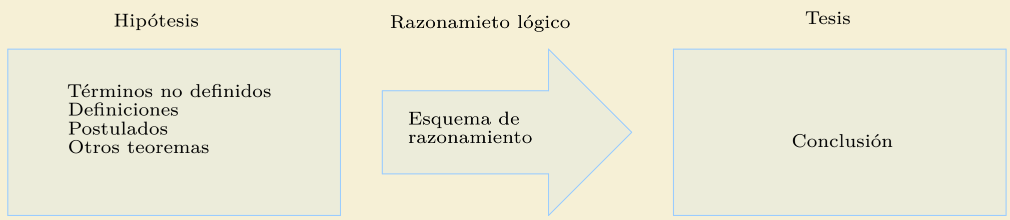
Regla 1: las definiciones, los postulados y los teoremas demostrados pueden aparecer en cualquier paso de la demostración.

Regla 2: las proposiciones equivalentes se pueden sustituir entre sí en cualquier parte de una demostración.

Regla 3: una proposición verdadera se puede introducir en cualquier punto de la demostración.

Nota: Antes de terminar la sección mostraremos, en la figura 1.6, como es el esquema que se debe emplear en una demostración sin importar como la redactemos.

Figura 1.6: Esquema de una demostración



Problemas 1.6

1. En los incisos del **a)** al **e)**, escriba las proposiciones como implicaciones, luego decida si es falso o verdadero

   a) **Hipótesis** p : Un hombre vive en Barranquilla, **Conclusión** q : Vive en Antioquía.

   b) **Hipótesis** p : Algunas manzanas son rojas, **Conclusión** q : Los caballos tienen cuatro patas.

   c) **Hipótesis** p : Dos rectas se intersecan, **Conclusión** q : Las dos rectas no son paralelas.

   d) **Conclusión** q : Dos rectas son perpendiculares, **Hipótesis** p : Las rectas se intersecan.

   e) **Hipótesis** p : Dos ángulos tienen la misma medida, **Conclusión** q : Los ángulos son congruentes.

2. **Analice la siguiente conjetura**: Si un triángulo tiene un ángulo recto, tiene dos lados congruentes. **Comentario:** Para demostrar que la conjetura es falsa, debe presentar un contraejemplo, para explicar que es verdadera use las definiciones.

3. Demuestre la siguiente conjetura: Si dos ángulos son congruentes sus complementos son congruentes.

4. En los incisos del a) al e) identifique la hipótesis y la conclusión y determine si es una implicación.

   a) un número es par si termina en 4.

b) Dos rectas son perpendiculares si forman un ángulo recto.

c) Un triángulo con dos lados congruentes, tiene los tres ángulos congruentes,

d) Si Un número es impar, termina en cinco.

e) Una recta que biseca un segmento contiene su punto medio.

5. Formule la recíproca, contraria y contra-reciproca , de las siguientes proposiciones.

   a) Si una persona camina se acalora.

   b) Si dos rectas se intersecan, son paralelas.

   c) Si una persona es adinerada, entonces puede viajar.

   d) si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $a.b = 0$, para todo a y b reales.

   e) Si un polinomio es un triángulo, entonces una región plana.

   f) Dos planos paralelos si intersecan.

6. Determine en cada inciso si la proposición representa una equivalencia, en caso de no ser lo encuentre un contra ejemplo.

   a) Un triángulo tiene sus lados congruentes si y sólo si tiene sus ángulos interiores congruentes.

   b) Un ángulo es recto si y sólo si es congruente a uno que tiene medida igual a 90°.

   c) Dos rectas son paralelas si y solo si no se intersecan.

   d) Un cuadrilátero tiene sus lados opuestos paralelos, si y sólo si un par de lados opuestos son congruentes.

   e) Dos ángulos son complementarios si y sólo si la suma de sus mediadas es igual a 90°

7. Incluya la información omitida para formular un esquema de razonamiento correcto, además indique que tipo de prueba se esta realizando.

   a)
   $p \Longrightarrow q$: Dos rectas perpendiculares se intersecan.
   $q \Longrightarrow r$: Las rectas no son paralelas ni se intersecan.

   ---

   b)
   $p \Longrightarrow q$: Si dos rectas son paralelas no se intersecan.
   $\sim q$: Las rectas no se intersecan.

   ---

   c)
   $p \Longrightarrow q$: Si un punto está en la mediatriz de un segmento, entonces equidista de sus extremos.
   El punto no está en la mediatriz.

   ---

   d)
   p : $\angle ABC$ mide más de 90°

   El $\angle ABC$ es un ángulo obtuso

   e)
   $\sim q$: La temperatura aumenta.

   No llovió.

8. Probar la veracidad de la implicación

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0 \ \vee \ b = 0,$$

es equivalente a probar la veracidad de la implicación

$$\text{Si } ab = 0 \ \wedge \ a \neq 0, \text{ entonces } b = 0.$$

9. Determine el valor de verdad de la siguiente afirmación. Si es falsa, dé un contraejemplo:

"Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces B es el punto medio de $\overline{AC}$".

10. ¿Será condición suficiente que $x^2 = 81$ par que $x = 9$?

11. Dada la proposición "Una condición necesaria para que B sea el punto medio de $\overline{AC}$ es que B está entre los punto A y C".

    a) Escríbala de la forma *si..., entonces...* sin alterar su significado y obtenga su valor de verdad.

    b) Escríba el condicional en términos de condición suficiente.

    c) Haga el recíproco del condicional y determine su valor de verdad. Si es falsa, dé un contraejemplo.

12. Dada la proposición “Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$”, escriba su recíproca, su contraria y su contrarecíproca. Además determine sus correspondientes valores de verdad.

13. ¿ Es posible que existan dos recta que no se intersecan y están en planos diferentes? Si la respuesta es afirmativa, dé un ejemplo.

14. Tomando como conjunto universal el conjunto de los números reales, determine si las proposiciones p_x : $x^2 - 4 = 0$ y $q_x : (x-2)(x+2) = 0$ son equivalentes. Argumente su respuesta.

15. Complete los siguientes esquemas de razonamiento:

    a)

    : Si un número entero termina en dos, entonceses par.

    : 32 es un entero que termina en dos.

    : ......

    b)

    : Si dos tectas son paralelas, entonces están en un mismo plano y no se intersecan.

    : ....

    : Las rectas $\overleftrightarrow{l_1}$ y $\overleftrightarrow{l_2}$ no son paralelas.

    c) : Dos rectas perpendiculares se intersecan.

    : Las rectas no son paralelas, si se intersecan.

    : ....

16. Demuestre que si x e y son enteros impares, entonces xy también es un entero impar.

17. Haga una demostración por reducción al absurdo del siguiente teorema: Si x^2 es un entero par, entonces x es par. *Sugerencia:* Utilice el ejercicio anterior.

18. Siendo p : los precios son bajos y q : los precios no suben, escribir en lenguaje corriente las siguientes expresiones simbólicas :

    a) $\sim q$
    b) $p \wedge q$
    c) $p \wedge \sim q$
    d) $\sim p \wedge \sim q$
    e) $\sim (p \wedge \sim q)$

19. Sean p : tengo un loro y q : tengo un gato, escribir en lenguaje corriente y luego simplificar,

$$\sim (\sim p \vee \sim q) \wedge \sim (\sim p)$$

20. Pruebe que:

    a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (p \rightarrow \sim q)$
    b) $[p \rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \rightarrow r]$

21. Pruebe que:

    a) $[(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)] \Rightarrow (a \rightarrow c)$
    b) $(a \rightarrow b) \Rightarrow [(c \vee a) \rightarrow (c \vee b)]$

22. Siendo p y q proposiciones cualesquiera, la proposición ,$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee q) \leftrightarrow q]$,

    a) ¿Es siempre verdadera?
    b) ¿Es verdadera si y sólo si p lo es?
    c) ¿Es verdadera si y sólo si q es falsa?
    d) ¿Es verdadera si y sólo si p y q lo son?

23. Pruebe, sin hacer uso de tablas de verdad, que:

    a) $p \wedge \sim q \rightarrow r \equiv \sim p \vee (q \vee r)$
    b) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge \sim q \equiv (r \wedge \sim q)$

24. ¿ Cuál es la relación que existe entre las proposiciones siguientes?

$$p \rightarrow [p \wedge \sim (q \vee r)] \text{ y } \sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$$

25. Se define $\triangle$ como la conjunción negativa, es decir, $p \triangle q$ se lee ni p ni o q.

    a) Construya la tabla de verdad de $p \triangle q$.
    b) Pruebe que:
        1) $\sim p \equiv p \triangle p$
        2) $p \vee q \equiv (p \triangle q) \triangle (p \triangle q)$
        3) $p \wedge q \equiv (p \triangle p) \triangle (q \triangle q)$
        4) $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim (p \wedge q) \equiv p \triangle q$

26. Simplifique la expresión:

$$[\sim q \vee (\sim q \leftrightarrow p)] \rightarrow q$$

27. Simplifique las siguientes expresiones
    a) $\sim (p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
    b) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge \sim p$
    c) $[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow (p \vee q)$
28. Sea $A = 1, 2, 3, 4$ el conjunto universal. Determinar el valor de verdad de cada enunciado:
    a) $\forall x : x + 3 < 6$
    b) $\forall x : x^2 - 10 \leq 8$
    c) $\exists x : 2x^2 + x = 15$
    d) $\exists x : x^2 > 1 \rightarrow x + 2 = 0$
29. Negar los siguientes enunciados
    a) $[\exists y \in U : p(y)] \rightarrow [\forall x \in U : (\sim q(x))]$
    b) $[\exists x \in U : (\sim p(x))] \vee [\forall x \in U : q(x)]$
    c) $\exists x \forall y \in U$:$[(p(x, y) \rightarrow q(x, y))]$
30. Se sabe que: Si Pedro no es alumno de la U.A. o Juan es alumno de la U.A., entonces Juan es alumno de la U. Costa. Si Pedro es alumno de la U.A. y Juan no es alumno de la U. A., entonces Juan es alumno de la U.Costa. Se desea saber en que universidad estudia Juan.
31. Negar la siguiente expresión:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - x_0| < \delta \vee |f(x) - l| < \epsilon)$$

32. A partir del álgebra proposicional, demostrar la validez del siguiente a argumento: Si 2 es par, entonces 5 no es divisor de 9 por otra parte 11 no es primo o 5 es divisor de 9. Además, 11 es primo. Por tanto, 2 es impar.
33. Demuestre:
    a) $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$
    b) $\sim [p \rightarrow \sim (q \veebar \sim p)] \leftrightarrow (p \wedge q)$
34. Siendo p : José es estudioso y q : Juan es estudioso, escribir en forma e simbólica:
    a) José es estudioso y Juan no es estudioso.
    b) José no es estudioso y Juan es estudioso.
    c) José y Juan, no son estudiosos.
    d) No es cierto que Juan o José sean estudiosos.
35. En cual de sus significados está “o”(no excluyente) en las siguientes a proposiciones:
    a) a) Si ganase mucho dinero o ganara la lotería, haría un viaje.
    b) El lunes iré a la estación de trenes o al terminal de buses.
    c) $x = 3$ ó $x = 2$
36. Verificar, utilizando tablas de verdad, cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes:
    a) $p \veebar \sim q$;
    b) $\sim p \vee q$;
    c) $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$;
    d) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$;
37. Encuentre el valor de verdad de

$$[\sim (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge q)] \vee (r \rightarrow \sim p)$$

si p : el número e es par, $q \equiv f$ y r : los gatos tienen 5 patas
38. Construya las tablas de verdad de las siguientes proposiciones:
    a) $[(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
    b) $p \veebar (q \vee r)$
    c) $\sim (\sim p \leftrightarrow q)$
    d) $\sim (\sim q \leftrightarrow p)$
    e) $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
    f) $[p \wedge (\sim q \rightarrow p)] \wedge [(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \vee \sim p)]$
39. Pruebe que son tautologías:
    a) $[p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p]$
    b) $(p \wedge q) \rightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$
    c) $q \rightarrow (p \rightarrow q)$
    d) $(p \wedge q) \rightarrow r \leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
    e) $p \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$
    f) $((p \rightarrow (q \wedge r))) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$
    g) $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow p$
40. Probar las siguientes equivalencias:
    a) $p \veebar (q \veebar r) \equiv (p \veebar q) \veebar r$
    b) $p \wedge (q \veebar r) \equiv (p \wedge v) \veebar (p \wedge r)$
    c) $p \vee q \equiv (p \veebar q) \veebar (p \wedge q)$
    d) $p \wedge q \equiv p \veebar (p \wedge \sim q)$
    e) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
    f) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
    g) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
41. Averiguar si son equivalentes las proposiciones: $(p \wedge q) \rightarrow r$ y $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

42. Encuentre el valor de verdad de: $[(p \to q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge (r \to q)$si

    a) p es v, q es v, r es f
    b) p, r son f, q es v
    c) p es f, q es f y r es f
    d) si todas son verdaderas

43. Simplificar las siguientes proposiciones:

    a) $p \wedge (q \wedge \sim p)$
    b) $(p \wedge q) \vee p$
    c) $(p \to q) \vee \sim p$
    d) $(p \to q) \vee q$
    e) $(p \to q) \wedge p$
    f) $(p \to q) \to p$
    g) $(p \to \sim q) \vee q$
    h) $p \wedge \sim (q \to p)$
    i) $[p \vee (q \leftrightarrow \sim p)] \to \sim q$
    j) $[\sim (p \to q) \wedge (\sim p \wedge q)] \vee [r \to (p \vee r)]$
    k) $\sim p \wedge (q \wedge p)$
    l) $\{p \to (\sim p \vee r)\} \wedge \{r \to \sim p\}$
    m) $\{\sim (p \to q) \to \sim (q \to p)\} \wedge (p \vee q)$

44. Derive a partir de las equivalencias básicas, las siguientes equivalencias:

    a) $((p \wedge q) \to r) \equiv ((p \to r) \vee (q \to r))$
    b) $((p \to q) \wedge q) \to \sim p \equiv q \to \sim p$

45. Demostrar sin el uso de tablas de verdad:

    a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
    b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
    c) $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$
    d) $\sim (p \to \sim q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
    e) $(p \wedge \sim q) \to r \equiv \sim p \vee (q \vee r)$
    f) $[\{(p \to q) \wedge (p \to t)\} \vee \{(r \to q) \wedge (r \to t)\}] \equiv [(p \wedge r) \to (q \wedge t)]$

46. Exprese en símbolos lógicos y después niegue las siguientes oraciones:

    a) Todo múltiplo de 4 es número primo.
    b) Si 2 es par entonces todos los números son pares.
    c) Todo número mayor que 2 es la suma de dos números primos.

47. Sea $A = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Escribir en símbolos y averiguar el valor de verdad de:

    a) Hay un elemento que es mayor que todos.
    b) Existe un único elemento cuyocuadrado es 4.
    c) Para todos los elementos de A, sea x el elemento que sumado 1 unidad, siempre es mayor que cero entonces su cuadrado es menor que 35.
    d) Para cada elemento existe otro que es menor o igual qué él

48. Si las proposiciones a y b son tales que la proposición $\sim (a \wedge b) \to (a \vee b)$ o es verdadera, determinar el valor de verdad de $(a \wedge b) \vee (a \vee b)$.

49. Sea $A = 1, 2, 3, 4, 5$. Negar hallar el valor de verdad de los siguientes enunciados

    a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$
    b) $\forall x \in A)(x + 3 < 10)$
    c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$
    d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$
    e) $(\exists! x \in A)(x2 - 3x + 2 = 0)$

50. Si el conjunto universal es conjunto de los números naturales. Escribir en símbolos las siguientes expresiones.

    a)) Todo número es mayor o igual que sí mismo.
    b) Si el número x es menor que y, entonces no es mayor que 9.
    c) Cualquier x sumado con algún número resulta x.
    d) El producto de x con y es mayor que x, y mayor que y.

51. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

    a) Si $p \vee q \equiv F$ entonces $[\sim (\sim q \to p) \wedge \sim p]$ es una tautología.
    b) Es suficiente que $p \veebar q$ sea falsa para que p y q sean equivalentes.
    c) No es necesario que p sea verdadera y q sea falsa para que $[p \vee (q \wedge \sim p)] \wedge \sim q$ sea verdadero.

52. Demuestre las siguientes equivalencias sin uso de tablas de verdad.

    a) $(p \to q) \equiv (p \wedge \sim q) \to q$
    b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \leftrightarrow \sim q)$
    c) $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$
    d) $(p \wedge q) \to r \equiv (p \wedge \sim \sim r) \to \sim q$
    e) $p \to (p \wedge \sim (q \vee r)) \equiv \sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$
    f) $[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)] \equiv (q \vee \sim p)$

53. Indique en cuáles de los siguientes casos p es condición suficiente para q; y en cuáles p es condición necesaria y suficiente para q.

a) p : A es múltiplo de 4, q : Aes número par

b) p: A y B son pares, q: $A + B$ es par.

54. Si las proposiciones compuestas

a) $p \leftrightarrow (\sim q \vee \sim r)$ y

b) $\sim p \vee q$ son siempre verdaderas. Demuestre que la proposición $[\sim r \wedge (p \vee s)] \rightarrow s \vee q$ es también verdadera.

55. Negar las siguientes afirmaciones:

a) $(\forall x \exists y \in I\!R)\,(x + y = 5 \rightarrow y = -x)$

b) $(\forall x \forall y \in I\!R)\,[(x + y$ es impar$) \rightarrow (x$ es impar $\vee$ y es impar$)]$

c) $(\exists x \forall y \in I\!R)\,(x < y \wedge x^2 \geq y)$

d) $(\exists z \forall y \forall x \in I\!R)\,(x < y \rightarrow x + z = y)$

56. Averiguar el valor de verdad siendo $U = I\!R$.

a) $(x \in I\!R)\,(x < 0 \rightarrow x < 3)$

b) $(\exists x \in IR)(x2 \geq 0 \rightarrow x4 = x3)$

c) $(\forall x \in I\!R, \exists y \in I\!R)\,(x2 + y2 = 1)$

d) $(\forall x \in I\!R, \forall y \in I\!R)\,(y < x \rightarrow 2y < 10)$

57. Dada la proposición, 8 no es impar divisible por 2, porque 9 no es o múltiplo de 3.Niegue la proposición y Determine su valor de verdad .

58. Dadas las proposiciones abiertas $p(x) : x^2 \geq x$ y $q(x) : x \geq 0$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $[p(\frac{11}{2}) \rightarrow q(1)] \rightarrow [p(x) \wedge q(x)]$

b) $\forall x \in I\!R : \sim p(x) \rightarrow \sim q(x)$

59. Si la proposición $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim t)$ es falsa, determine el valor o de verdad de la proposición $(p \wedge t) \rightarrow (r \vee q) \rightarrow (u \leftrightarrow v)$.

60. Demostrar:

a) Si n es par y m es impar, entonces $(n + m)$ es impar, $n, m \in I\!N)$.

b) Si $xy = 0$ entonces $x = 0 \vee y = 0$.

c) Si ab es impar, entonces a es par y b es impar.

61. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \in I\!R : x2 \geq x$

b) $\exists x \in I\!R : 2x = x$

c) $\forall x \in I\!R : \frac{2x-1}{4x-2} = 12$

d) $\exists x \in I\!R : x^2 + 2x + 1 \leq 0$

e) $\forall x \in I\!R : -x^2 + 4x - 5 > 0$