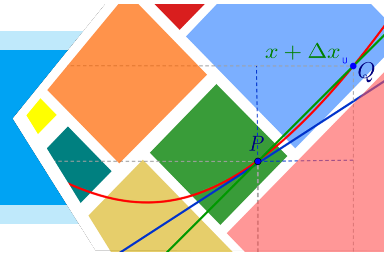
CAPÍTULO

# 1 Conjuntos numéricos




## Contenido Del Capítulo



## 1.1 Introducción

En la antigüedad, el concepto de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos. Para ello, al principio el hombre se valió de los elementos de que disponía a su alrededor: dedos, piedras... Basta recordar, por ejemplo, que la palabra cálculo deriva de la palabra latina `calculus`, que significa «`contar con piedras`». La serie de números naturales era, obviamente, limitada; pero la conciencia sobre la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales, representaba ya una importante etapa en el camino hacia la matemática moderna. Paralelamente a la ampliación de los conjuntos numéricos, se desarrollaron su simbología y los sistemas de numeración diferentes para cada civilización.

La operación de contar exige la adición sucesiva del número 1 consigo mismo, una y otra vez. Los números obtenidos de esta manera son llamados números naturales o números enteros positivos. Con el progreso de la técnica aparecen problemas de medición más complicados que requieren la división de números naturales por que se construyen así los números racionales positivos, después es necesario introducir un número 0 llamado cero, con la propiedad de que todo número $a$, $a + 0 = a$. Más tarde, cuando aparece el problema de distinguir entre lo que se tiene y lo que no, se hace necesario introducir que para todo número $a$ existe un número $-a$ llamado opuesto o negativo que cumple que: $a + (-a) = 0$. Esto nos lleva a construir un nuevo conjunto, el conjunto de los números negativos, o enteros negativos, de esta manera se llega al concepto de número que conocemos, con los cuales se pueden realizarlas operaciones de adición, multiplicación, substracción y división. Este concepto comprende a los números racionales y a otros números llamados irracionales.

Otras operaciones pueden ser definidas a partir de las anteriores, como son, la potenciación, la radicación y otras más, además que la substracción y la división pueden definirse a partir de la adición y la multiplicación y que la mayoría de las leyes que rigen a los números pueden ser demostradas a partir de un pequeño número de leyes básicas o fundamentales. Por lo tanto vamos a establecer un conjunto de leyes a partir de las cuales demostraremos el resto.

## 1.2 Números naturales

### 1.2.1. Introducción

**El cero ¿es o no un número natural?**

Este es uno de los temas de más frecuente discusión entre quienes se dedican a las matemáticas.

Cuando `Peano` introdujo los axiomas para definir el conjunto de los números naturales, inició este conjunto por el número uno. Pero cuando Cantor estudió la teoría de conjuntos, encontró que debía empezar por el cero, dada la necesidad de asignarle un cardinal al conjunto vacío. Quizá fue esto lo que hizo que, diez años más tarde, `Peano` empezara los números naturales con el cero.

En las últimas décadas ha sido muy popular la teoría de conjuntos, lo cual justifica que muchos profesores prefieran comenzar el conjunto de los números naturales por el cero. En este capítulo se elige iniciar el conjunto de los números naturales por el uno, aunque el cero es necesario para el cardinal del conjunto vacío, para el neutro de la suma y para tantas otras aplicaciones. Pero en algunos temas, como el de las sucesiones, es mejor iniciar los números naturales sin el cero, pues es normal que se relacione el primer término con el número uno, el segundo término con el número dos y así sucesivamente, recordando que no hay un ordinal para el cardinal cero.

**Axiomas de Peano**

La más conocida axiomatización de los números naturales, contenida en el escrito ***Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*** del italiano ***Giuseppe Peano***, se presenta en esta sección en forma detallada, al igual que la forma mas moderna de la axiomatización, la definición de las operaciones y sus propiedades debidamente demostradas.

Durante el siglo XlX, sin duda con el impulso de la aparición de las geometrías no euclidianas, se multiplicaron los esfuerzos por axiomatizar la geometría empeño culminado finalmente en 1899 con la publicación de Fundamentos de la Geometría, de `David Hilbert`, también se presentaron varias axiomatizaciones de la aritmética o, con más precisión, de los números naturales.

Sin lugar a dudas, la más conocida es la que presentó el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) por primera vez en 1889 en un pequeño libro publicado en Turín titulado ***Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita***. Este texto incluye sus famosos axiomas, pero más que un texto de aritmética, este documento contiene una introducción a la lógica en la cual se presentan por primera vez los símbolos actuales para representar la pertenencia, la existencia, la contenencia (en la actualidad es invertido, acorde con el de los números) y para la unión y la intersección.

`Peano` reconoce hacer uso de estudios de otros autores: en 1888 después de estudiar a `G. Boole`, `E. Schröder`, `C. S. Peirce` y otros, estableció una analogía entre operaciones geométricas y algebraicas con las operaciones de la lógica; en aritmética menciona el trabajo de `Dedekind` publicado el año anterior reconocido de manera generalizada como la primera axiomatización de la aritmética, aunque salió a la luz 7 años después del artículo de `Peirce` y un texto de Grassmann de 1861. Este ultimo libro posiblemente fue fuente de inspiración tanto para Peano y Dedekind como para Peirce.

Arithmetices Principia, escrito en latín es el primer intento de Peano, para lograr una axiomatización de las matemáticas en un lenguaje simbólico.

Consiste en un prefacio y 10 secciones:

1. Números y Adición.

2. Sustracción.

3. Máximos y Mínimos.

4. Multiplicación.

5. Potenciación.

6. División.

7. Teoremas varios.

8. Razones de Números.

9. Sistemas de Racionales e Irracionales.

10. Sistemas de Cantidades.

En libro establece los siguientes axiomas:

1. $1 \in I\!N$.
2. Si $a \in I\!N$entonces $a = a$.
3. Si $a \in I\!N$ entonces $a = b$ si y sólo si $b = a$.
4. Si $a, b, c \in I\!N$ entonces $a = b$, $b = c$ implica $a = c$.
5. Si $a = b$ y $b \in I\!N$ entonces $a \in I\!N$.
6. Si $a \in I\!N$ entonces $a + 1 \in I\!N$.
7. Si $a \in I\!N$ entonces $a = b$ si y sólo si $a + 1 = b + 1$.
8. Si $a \in I\!N$ entonces $a + 1 \neq 1$.
9. Si $k$ es una clase, $1 \in k$, y si para $x \in I\!N : x \in k$ implica $(x + 1) \in k$.

### 1.2.2. Axiomas de los números naturales

Empezaremos ahora la construcción de los números naturales siguiendo la idea de Peano.

**Axioma 1.2.1 Existencia de los números naturales**

Existe un conjunto $I\!N \neq \emptyset$ llamado conjunto de los números Naturales.

A los elementos de $I\!N$ se les llama números naturales, este axioma no establece sus características ni sus propiedades, por lo que hay que establecer otros axiomas para entender el concepto de número.

**Axioma 1.2.2 Existencia del número mínimo**

Existe un número llamado $1 \in I\!N$.

Del axioma 1.2.1 tenemos que como $I\!N \neq \emptyset$ entonces debe tener por lo menos un elemento, el axioma 1.2.2 lo define como el número 1.

**Axioma 1.2.3 Relación de igualdad**

Existe una relación " $=$ " tal que $a = b$ significa que $a$ y $b$ representan el mismo número natural, que cumpla las siguientes propiedades
$\forall a, b, c \in I\!N$ se tiene que:
**i)** Si $a \in I\!N$entonces $a = a$.
**ii)** Si $a \in I\!N$ entonces $a = b$ si y sólo si $b = a$.
**iii)** Si $a, b, c \in I\!N$ entonces $a = b$, $b = c$ implica $a = c$.
**iv)** Si $a = b$ y $b \in I\!N$ entonces $a \in I\!N$.

El concepto de igualdad `Peano` lo presentó como un axioma y además establece que es una relación.

Observamos también que generalmente cuando se define la igualdad solo se establecen las tres primeras propiedades, y la propiedad iv) es nueva, la cual nos asegura que un número natural sólo puede ser representado por un número natural. Es decir que si existen otros números estos no pueden representar a un número natural.

**Axioma 1.2.4 Sucesor**

Existe una aplicación $\varphi : \quad I\!N \quad \rightarrow \quad I\!N$ que cumple las siguientes propiedades
**i)** $\forall n \in I\!N,\ \varphi(n) \neq 1$
**ii)** $\forall n, m \in I\!N \quad \varphi(n) = \varphi(m) \Rightarrow n = m$.

La propiedad i) que establece el axioma 1.2.4 nos dice que el número uno no tiene preimagen, es decir no es sucesor de ningún natural, es el primero.

La segunda propiedad del axioma 1.2.4 establece la relación de igualdad, en función de la función sucesor, pero también nos aclara que el sucesor de un número natural es único.

**Axioma 1.2.5 Adición entre naturales**

Existe una operación $\begin{array}{rccc} + : & I\!N \times I\!N & \rightarrow & I\!N \\ & (a, b) & \mapsto & c = +(a, b) = a + b \end{array}$ que cumple las siguientes condiciones .
$\forall n, n \in I\!N$ se tiene que
**i)** $n + 1 = \varphi(n)$
**ii)** $\varphi(n) + m = n + \varphi(m) = \varphi(n + m)$

Hubiéramos podido establecer los axiomas 1.2.1 y 1.2.5 como definiciones, pero decidimos establecerlos como axiomas, porque no conocemos todavía la estructura de $I\!N$.

**Definición 1.1 Sucesor**

La aplicación que garantiza el axioma 1.2.4 la definiremos $\begin{array}{cccc} \varphi: & I\!N & \to & I\!N \\ & n & \mapsto & \varphi(n) = n+1 \end{array}$ de acuerdo con la propiedad i) del axioma 1.2.5

Esta definición la podemos expresar de la siguiente manera:

$$\text{Si } n \in I\!N \Rightarrow n+1 \in I\!N.$$

Y con el podemos construir los números naturales de la siguiente forma

**i)** $1 \in I\!N$ entonces existe $\varphi(1) = 1+1 \in I\!N$. Al número $1+1$ lo llamaremos dos, es decir $1+1 := 2$.

**ii)** $2 \in I\!N$ entonces existe $\varphi(2) = 2+1 \in I\!N$. al números $2+1$ lo llamaremos tres, es decir $2+1 := 3$.

**iii)** $3 \in I\!N$ entonces existe $\varphi(3) = 3+1 \in I\!N$. al números $3+1$ lo llamaremos cuatro, es decir $3+1 := 4$.

Podemos seguir construyendo los números naturales de manera indefinida, es decir el conjunto de los números naturales es infinito.

En estos momentos como ya conocemos la estructura del conjunto de los números naturales podemos definir la adición entre naturales de acuerdo con la definición 1.1.

Sean $m$ y $n$ números naturales entonces $m+n = \underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{m \text{ veces}} + \underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{n \text{ veces}}$ es decir:

| $+$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\cdots$ |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\cdots$ |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Tabla 1.1: Tabla de la adición entre números naturales.

Observemos en ta tabla que $1+1=2$ o que $3+1=4$ , que es lo que conocemos desde la básica primaria.

**Axioma 1.2.6 Inducción**

Si $A \subseteq I\!N$, $A \neq \emptyset$, tal que
**i)** $1 \in A$.
**ii)** Si $(n \in A \Rightarrow n+1 \in A) \Rightarrow A = I\!N$.

El axioma de inducción se puede presentar también de la siguiente forma :

Sea $P$ una propiedad cualesquiera. entonces todo número satisface la propiedad $P$ si se tiene que:

**i)** 1 satisface la propiedad $P$, es decir $P\,(1)$es cierto.

**ii)** Si $n$ satisface la propiedad $P$, entonces $n+1$ también satisface la propiedad $P$, es decir

$$\text{Si } P\,(n) \Rightarrow P\,(n+1)\,.$$

**iii)** Se concluye $P$ se satisface para cualquier natural, es decir $P\,(m)$ es cierta $\forall m \in I\!N$.

Cuando el axioma se presenta de esta forma se le llama Principio de Inducción.

Resumiendo lo que afirman estos axiomas, podemos entender que se trata de un conjunto que tiene un elemento mínimo, el uno (Axioma 1.2.2), es decir no es siguiente de ningún otro (Axioma 1.2.4.i), es decir, se trata del primer elemento del conjunto, y todos los demás elementos tienen cada uno un elemento siguiente (Axioma 1.2.6.ii), de modo que dos elementos distintos tienen siguientes distintos. El postulado 1.2.6 es de suma importancia por dotarnos de un método de demostración de propiedades, ya que nos indica que todo conjunto $A$ al que pertenezca el uno, y tal que todo elemento de $A$ tiene siguiente en $A$, necesariamente ha de coincidir con el conjunto $I\!N$ de los números naturales. Es lo que se acostumbra a denominar método simple de inducción completa.

A partir de estos cinco axiomas, y usando sistemáticamente el 1.2.6 axioma, de la inducción completa, podemos probar todas las propiedades del conjunto $I\!N$.