







1 Conjuntos Numéricos.

Contenido	Capítulo 1	Página
1.1	Introducción	1
1.2	Números Naturales	2
1.2.1	Introducción	2
1.2.2	Axiomas de los números naturales	4
1.2.3	Propiedades de la adición entre números naturales	9
1.3	Números Enteros	13
1.4	Números Racionales	13
1.5	Números Reales	13
1.6	Números Complejos.	13
1.7	Problemas	13

Objetivos

-  Interpreta correctamente las propiedades de las operaciones definidas en los conjuntos numéricos.
-  Clasifica correctamente los diferentes conjuntos numéricos.
-  Argumenta sobre las diferencias entre las propiedades de los conjuntos numéricos.

Indicadores de Logros

-  Identifica los diferentes números.
-  Diferencia las propiedades válidas en cada conjunto numérico.
-  Argumenta sobre las diferencias entre los conjuntos numéricos y sus construcciones..

Introducción 1.1

En este capítulo realizaremos la construcción de los conjuntos numéricos empezando con una construcción axiomática de los números Naturales según los axiomas de Peano, luego a partir de los números Naturales haremos una construcción de los números Enteros construyendo primero un conjunto equiparable con los Naturales bajo una aplicación, llamado el conjunto de los Enteros números, también haremos una construcción alternativa donde a partir de la definición de la diferencia entre dos números Naturales construiremos conjuntos que representaran cada uno un número, esa misma idea la utilizaremos para construir los números racionales a partir de la definición de división de números Enteros, luego demostraremos que existen números que no se pueden representar como el cociente de dos Enteros a ese conjunto lo llamaremos Irracionales. Y para terminar construiremos de manera axiomática los números Reales. Para terminar veremos que existen números que al elevarlos al cuadrado nos da un número negativo, ese conjunto es el de los números Complejos.

Números Naturales 1.2

1.2.1. Introducción

En la antigüedad, el concepto de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos. Para ello, al principio el hombre se valió de los elementos de que disponía a su alrededor: dedos, piedras... Basta recordar, por ejemplo, que la palabra cálculo deriva de la palabra latina calculus, que significa 'contar con piedras'. La serie de números naturales era, obviamente, limitada; pero la conciencia sobre la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales, representaba ya una importante etapa en el camino hacia la matemática moderna. Paralelamente a la ampliación de los conjuntos numéricos, se desarrollaron su simbología y los sistemas de numeración diferentes para cada civilización.

Fue en la India entre los siglos V y XII d.C. donde se empezaron a usar correctamente los números negativos, se introdujo el cero e incluso se llegó a aceptar como válidos los números irracionales. Es indiscutible la procedencia hindú del sistema de numeración decimal y de las reglas de cálculo.

El cero ¿es o no un número natural?

Este es uno de los temas de más frecuente discusión entre quienes se dedican a las matemáticas.

Cuando Peano introdujo los axiomas para definir el conjunto de los números naturales, inició este conjunto por el número uno. Pero cuando Cantor estudió la teoría de conjuntos, encontró que debía empezar por el cero, dada la necesidad de asignarle un cardinal al conjunto vacío. Quizá fue esto lo que hizo que, diez años más tarde, Peano empezara los números naturales con el cero.

En las últimas décadas ha sido muy popular la teoría de conjuntos, lo cual justifica que muchos profesores prefieran comenzar el conjunto de los números naturales por el cero. En este capítulo se elige iniciar el conjunto de los números naturales por el uno, aunque el cero es necesario para el cardinal del conjunto vacío, para el neutro de la suma y para tantas otras aplicaciones. Pero en algunos temas, como el de las sucesiones, es mejor iniciar los números naturales sin el cero, pues es normal que se relacione el primer término con el número uno, el segundo término con el número dos y así sucesivamente, recordando que no hay un ordinal para el cardinal cero.

Axiomas de Peano

La más conocida axiomatización de los números naturales, contenida en el escrito ***Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*** del italiano **Giuseppe Peano**, se presenta en esta sección en forma detallada, al igual que la forma mas moderna de la axiomatización, la definición de las operaciones y sus propiedades debidamente demostradas.

Durante el siglo XIX, sin duda con el impulso de la aparición de las geometrías no euclidianas, se multiplicaron los esfuerzos por axiomatizar la geometría empeño culminado finalmente en 1899 con la publicación de Fundamentos de la Geometría, de David Hilbert , también se presentaron varias axiomatizaciones de la aritmética o, con más precisión, de los números naturales.

Sin lugar a dudas, la más conocida es la que presentó el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) por primera vez en 1889 en un pequeño libro publicado en Turín titulado ***Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita***. Este texto incluye sus famosos axiomas, pero más que un texto a de aritmética, este documento contiene una introducción a la lógica en la cual se presentan por primera vez los símbolos actuales para representar la pertenencia, la existencia, la contención (en la actualidad es invertido, acorde con el de los números) y para la unión y la intersección.

Peano reconoce hacer uso de estudios de otros autores: en 1888 después de estudiar a G. Boole, E. Schröder, C. S. Peirce y otros, estableció una o o analogía entre operaciones geométricas y algebraicas con las operaciones de la lógica; en aritmética menciona el trabajo de Dedekind publicado el año anterior reconocido de manera generalizada como la primera axiomatización de la aritmética, aunque salió a la luz 7 años después del artículo de Peirce y un texto de Grassmann de 1861. Este ultimo libro posiblemente fué fuente de inspiración tanto para Peano y Dedekind como para Peirce.

Arithmetices Principia, escrito en latín es el primer intento de Peano , para lograr una axiomatización de las matemáticas en un lenguaje simbólico.

Consiste en un prefacio y 10 secciones:

1. Números y Adición.
2. Sustracción.
3. Máximos y Mínimos.

4. Multiplicación.
5. Potenciación.
6. División.
7. Teoremas varios.
8. Razones de Números.
9. Sistemas de Racionales e Irracionales.
10. Sistemas de Cantidades.

En libro establece los siguientes axiomas:

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a = a$.
3. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a = b$ si y sólo si $b = a$.
4. Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ entonces $a = b, b = c$ implica $a = c$.
5. Si $a = b$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces $a \in \mathbb{N}$.
6. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a + 1 \in \mathbb{N}$.
7. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a = b$ si y sólo si $a + 1 = b + 1$.
8. Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a + 1 \neq 1$.
9. Si k es una clase, $1 \in k$, y si para $x \in \mathbb{N} : x \in k$ implica $x + 1 \in k$.

1.2.2. Axiomas de los números naturales

Empezaremos ahora la construcción de los números naturales siguiendo la idea de Peano.

Axioma. 1.2.1

Existencia de los números naturales

Existe un conjunto $\mathbb{N} \neq \emptyset$ llamado conjunto de los números Naturales.

Podríamos decir que este axioma establece uno de los términos no definidos de la teoría el cual es el número natural.

Axioma. 1.2.2

Existencia del número mínimo

Existe un número llamado $1 \in \mathbb{N}$.

Del axioma 1.2.1 tenemos que como $\mathbb{N} \neq \emptyset$ entonces debe tener por lo menos un elemento, el axioma 1.2.2 lo define como el número 1.

Axioma. 1.2.3

Relación de igualdad

Existe una relación " $=$ " tal que $a = b$ significa que a y b representan el mismo número natural, que cumpla las siguientes propiedades

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ se tiene que:

- i) Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a = a$.
- ii) Si $a \in \mathbb{N}$ entonces $a = b$ si y sólo si $b = a$.
- iii) Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ entonces $a = b, b = c$ implica $a = c$.
- iv) Si $a = b$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces $a \in \mathbb{N}$.

En el capítulo ?? página ?? presentamos el concepto de igualdad como un término no definido, pero Peano lo presentó como un axioma y además establece que es una relación, algo que no planteamos en la teoría de conjuntos al presentar el término, pero si cuando se estableció el axioma de extensión.

Observamos también que el axioma ?? establece las tres primeras propiedades, por tanto este axioma establece sólo la propiedad iv), la cual nos asegura que un número natural sólo puede ser representado por un número natural. Es decir que si existen otros números estos no pueden representar a un número natural.

Axioma. 1.2.4

Sucesor

Existe una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades

- i) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \neq 1$
- ii) $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = \varphi(m) \Rightarrow n = m$.

La propiedad i) que establece el axioma 1.2.4 nos dice que el número uno no tiene preimagen, es decir no es sucesor de ningún natural, es el primero.

La segunda propiedad del axioma 1.2.4 establece la relación de igualdad, en función de la función sucesor, pero también nos aclara que el sucesor de un número natural es único.

Axioma. 1.2.5

Adición entre naturales

Existe una operación $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que cumple las siguientes condiciones .
 $(a, b) \mapsto c = +(a, b) = a + b$

$\forall n, n \in \mathbb{N}$ se tiene que

i) $+(n, 1) = \varphi(n)$

ii) $+(\varphi(n), m) = +(n, \varphi(m)) = \varphi(+(n, m))$

Hubiéramos podido establecer los axiomas 1.2.1 y 1.2.5 como definiciones, pero decidimos establecerlos como axiomas, porque no conocemos todavía la estructura de \mathbb{N} .

Definición. 1.2.1

Sucesor

La aplicación que garantiza el axioma 1.2.4 la definiremos $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de acuerdo
 $n \mapsto \varphi(n) = n + 1$
 con la propiedad i) del axioma 1.2.5

Esta definición la podemos expresar de la siguiente manera:

$$\text{Si } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}.$$

Y con el podemos construir los números naturales de la siguiente forma

i) $1 \in \mathbb{N}$ entonces existe $\varphi(1) = 1 + 1 \in \mathbb{N}$. Al número $1 + 1$ lo llamaremos dos, es decir $1 + 1 := 2$.

ii) $2 \in \mathbb{N}$ entonces existe $\varphi(2) = 2 + 1 \in \mathbb{N}$. al números $2 + 1$ lo llamaremos tres, es decir $2 + 1 := 3$.

iii) $3 \in \mathbb{N}$ entonces existe $\varphi(3) = 3 + 1 \in \mathbb{N}$. al números $3 + 1$ lo llamaremos cuatro, es decir $3 + 1 := 4$.

Podemos seguir construyendo los números naturales de manera indefinida, es decir el conjunto de los números naturales es infinito y de acuerdo con el axioma del conjunto infinito (axioma ?? en la página ??) este conjunto es posible ya que sigue la misma construcción que determina este axioma.

En estos momentos como ya conocemos la estructura del conjunto de los números naturales podemos definir la adición entre naturales de acuerdo con la definición 1.2.1.

Sean m y n números naturales entonces $m + n = (\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_m \text{ veces}) + (\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n \text{ veces})$ es decir:

Tabla 1.1: Tabla de la adición entre números naturales.

+	1	2	3	4	...
1	2	3	4	5	...
2	3	4	5	6	...
3	4	5	6	7	...
4	5	6	7	8	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Observemos en ta tabla que $1 + 1 = 2$ o que $3 + 1 = 4$, que es lo que conocemos desde la básica primaria.

Axioma. 1.2.6

Inducción

Si $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, tal que

- i) $1 \in A$.
- ii) Si $(n \in A \Rightarrow n + 1 \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

El axioma de inducción se puede presentar también de la siguiente forma :

Sea P una propiedad cualesquiera. entonces todo número satisface la propiedad P si se tiene que:

- i) 1 satisface la propiedad P , es decir $P(1)$ es cierto.
- ii) Si n satisface la propiedad P , entonces $n + 1$ también satisface la propiedad P , es decir

$$\text{Si } P(n) \Rightarrow P(n + 1).$$

- iii) Se concluye P se satisface para cualquier natural, es decir $P(m)$ es cierta $\forall m \in \mathbb{N}$.

Nota: Cuando el axioma se presenta de esta forma se le llama Principio de Inducción. Queda da tarea su demostración.

Resumiendo lo que afirman estos postulados o axiomas, podemos entender que se trata de un conjunto que tiene un elemento mínimo, el uno (Axioma 1.2.2), es decir no es siguiente de ningún otro (Axioma 1.2.4.i)), es decir, se trata del primer elemento del conjunto, y todos los demás elementos tienen cada uno un elemento siguiente (Axioma 1.2.2.ii)), de modo que dos elementos distintos tienen siguientes distintos. El 1.2.6 postulado es de suma importancia por dotarnos de un método de demostración de propiedades, ya que nos indica que todo conjunto A al que pertenezca el uno, y tal que todo elemento de A tiene siguiente en A , necesariamente ha de coincidir con el conjunto \mathbb{N} de los números naturales. Es lo que se acostumbra a denominar método simple de inducción completa.

A partir de estos cinco axiomas, y usando sistemáticamente el 1.2.6 axioma, de la inducción completa, podemos probar todas las propiedades del conjunto \mathbb{N} .

Teorema. 1.2.1

Ningún número natural coincide con su sucesor, es decir $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq \varphi(n)$.

Demostración:

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \neq \varphi(n)\}$, ahora apliquemos el axioma de inducción (1.2.6)

1. $1 \in A$, por el axioma del mínimo (1.2.2) y el axioma del sucesor (1.2.4.i)) $\varphi(1) \neq 1$.
2. $\forall n \in A, n \neq \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n) \neq \varphi(\varphi(n))$ por el recíproco del axioma 1.2.4.ii), de lo que se deduce que $\varphi(n) \in A$.
3. Por tanto vemos que de 1) $1 \in A$ y de 2) si $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(n) \in A$ se deduce que $A = \mathbb{N}$ por el axioma de inducción (1.2.6), luego $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq \varphi(n)$.

□

Teorema. 1.2.2

Si dos aplicaciones definidas en $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ conmutan con la aplicación sucesor ($\varphi(n)$) y tiene la misma imagen para el 1, entonces ambas coinciden.

En el lenguaje L_{\in} lo podemos expresar :

Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ son aplicaciones tal que

$$f \circ \varphi = \varphi \circ f \wedge g \circ \varphi = \varphi \circ g \wedge f(1) = g(1), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = g(n).$$

Demostración:

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\}$, ahora apliquemos el axioma de inducción.

- i) $1 \in A$, pues por hipótesis $f(1) = g(1)$.
- ii) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f(n) = g(n) &\Rightarrow \varphi(f(n)) = \varphi(g(n)) \\ &\Rightarrow (\varphi \circ f)(n) = (g \circ \varphi)(n) \\ &\Rightarrow (f \circ \varphi)(n) = (g \circ \varphi)(n) \\ &\Rightarrow f[\varphi(n)] = g[\varphi(n)] \\ &\Rightarrow \varphi(n) \in A. \end{aligned}$$

iii) En definitiva, vemos de i) $1 \in A$, de ii) si $n \in A \Rightarrow \varphi(n) \in A$, de lo que se deduce por el axioma 1.2.6 que $A = \mathbb{N}$.

□

Teorema. 1.2.3

Dadas dos aplicaciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ si existe alguna tercera aplicación $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que,

$$f \circ \varphi = \psi \circ f \wedge g \circ \varphi = \psi \circ g \wedge f(1) = g(1), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = g(n).$$

Demostración:

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\}$, ahora apliquemos el axioma de inducción.

i) $1 \in A$, pues por hipótesis $f(1) = g(1)$.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)(n) &= (\psi \circ f)(n) \Rightarrow f(\varphi(n)) = \psi(f(n)) = \psi(g(n)) = g(\varphi(n)) \\ &\Rightarrow \varphi(n) \in A. \end{aligned}$$

iii) En definitiva, vemos de i) $1 \in A$, de ii) si $n \in A \Rightarrow \varphi(n) \in A$, de lo que se deduce por el axioma 1.2.6 que $A = \mathbb{N}$.

□

1.2.3. Propiedades de la adición entre números naturales

Teorema. 1.2.4

unicidad de la suma

La aplicación $+$ es única, es decir si $+_1$ y $+_2$ son sumas entonces $+_1 = +_2$.

Demostración:

Definamos dos aplicaciones, f y g , mediante $+_1$ y $+_2$ de la siguiente manera

Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida $\forall n \in \mathbb{N} f(n) = +_1(n, m)$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida $\forall n, m \in \mathbb{N} g(n) = +_2(n, m)$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Entonces :

i) $1 \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = +_1(1, m) = 1 + m \\ g(1) = +_2(1, m) = 1 + m \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = g(1).$$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(f \circ \varphi)(n) = +_1(\varphi(n), m) = \varphi(+_1(n, m)) = \varphi[f(n)] = (\varphi \circ f)(n)$$

$$\text{entonces } \forall n \in \mathbb{N}, (f \circ \varphi)(n) = (\varphi \circ f)(n) \Rightarrow f \circ \varphi = \varphi \circ f.$$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(g \circ \varphi)(n) = +_2(\varphi(n), m) = \varphi(+_2(n, m)) = \varphi[g(n)] = (\varphi \circ g)(n)$$

$$\text{entonces } \forall n \in \mathbb{N}, (g \circ \varphi)(n) = (\varphi \circ g)(n) \Rightarrow g \circ \varphi = \varphi \circ g.$$

Es decir las aplicaciones f y g con la aplicación sucesor φ de acuerdo con el teorema 1.2.3 , entonces $f(n) = g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $p +_1(n, m) = +_2(n, m)$.

□

Notación: representaremos de aquí en adelante la adición entre dos números naturales n y m como $n + m$ en vez de $+(n, m)$ por tanto las condiciones que cumple la operación se denotará

i) $\varphi(n) = n + 1$

ii) $\varphi(n) + m = \varphi(n + m)$.

Definición. 1.2.2

Menor que

Se dice que $a \in \mathbb{N}$ es menor o igual que $b \in \mathbb{N}$ si existe un $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + c$.

Notación: Si un número a es menor o igual a un número b se denota $a \leq b$.

Definición. 1.2.3

Meyor que

Se dice que $a \in \mathbb{N}$ es mayor o igual que $b \in \mathbb{N}$ si existe un $c \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + c$.

Notación: Si un número a es mayor o igual a un número b se denota $a \geq b$.

Axioma. 1.2.7

Principio de la buena ordenación

Si $A \neq \emptyset$ y $A \subseteq \mathbb{N}$ existe un único número $m \in A$ tal que $m \leq a$, $\forall a \in A$, m recibe de mínimo elemento de A .

Definición. 1.2.4**Cero**

Existe un número llamado neutro aditivo o cero que representa con el símbolo "0", tal que si $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a$, además definimos la aplicación

$$\varphi^*(n) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Nota: Podemos ahora construir un nuevo conjunto $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ y podemos redefinir la adición

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ (a, b) &\mapsto c = a + b \end{aligned}$$

Si definimos la siguiente proposición $0 := 0 + 0$. Con esta definición acabamos con la discusión si el cero es o no un número natural, para nosotros no, pero cuando lo necesitemos trabajamos con el conjunto \mathbb{N}_0

El axioma de inducción matemática lo podemos extender a \mathbb{N}_0 cambiando la primera condición a $0 \in A$.

En general el axioma es válido para cualquier subconjunto de \mathbb{N} que le falten un número finito de los primeros números, es decir si $B_0 \subset \mathbb{N}$ tal que $B_0 = \{a_0, a_1, \dots\}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots$, entonces el axioma de inducción se cumple cambiando la primera condición por $a_0 \in A$.

Teorema. 1.2.5**Propiedades de la adición**

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0$ se cumplen las siguientes propiedades:

- i) Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$.
- ii) Propiedad asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- iii) Propiedad cancelativa: Si $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

Demostración:

i)

1 Veamos primero que $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $0 + b = b + 0$

$$\text{Sea } A = \{b \in \mathbb{N} : 0 + b = b + 0\}$$

$$0 \in A, \text{ ya que } 0 + 0 = 0 + 0.$$

$$\forall b \in A, \varphi^*(b) + 0 = \varphi^*(b + 0) = \varphi^*(b) = 0 + \varphi^*(b) \Rightarrow \varphi^*(b) \in A.$$

Luego por el axioma de inducción para \mathbb{N}_0 , tenemos que $A = \mathbb{N}_0$, y se verifica que $\forall b \in \mathbb{N}_0$, $0 + b = b + 0$.

2 Veamos ahora que $\forall b \in \mathbb{N}_0$, $\varphi^*(0) + b = b + \varphi^*(0)$

$$\text{Sea } A = \{b \in \mathbb{N}_0 : \varphi^*(0) + b = b + \varphi^*(0)\}$$

$$0 \in A, \text{ pues } \varphi^*(0) + 0 = \varphi^*(0 + 0) = 0 + \varphi^*(0)$$

$$\begin{aligned} \forall b \in A, \varphi^*(b) + \varphi^*(0) &= \varphi^*(b + \varphi^*(0)) \\ &= \varphi^*(\varphi^*(0) + b) \\ &= \varphi^*(\varphi^*(0 + b)) \\ &= \varphi^*(b) \\ &= \varphi^*(0 + \varphi^*(b)) \\ &= \varphi^*(0) + \varphi^*(b) \Rightarrow \varphi^*(b) \in A. \end{aligned}$$

3 Veamos finalmente que $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $a + b = b + a$

$$\text{Sea } A = \{b \in \mathbb{N}_0 : a + b = b + a, \text{ para cada } a \in \mathbb{N}_0\}$$

$$0 \in A, \quad a + 0 = 0 + a, \forall a \in \mathbb{N}_0$$

$$\begin{aligned} \forall b \in A, a + \varphi^*(b) &= a + \varphi^*(0 + b) \\ &= a + \varphi(0) + b \\ &= \varphi^*(a) + 0 + b \\ &= 0 + \varphi^*(a) + b \\ &= \varphi^*(0) + a + b \\ &= \varphi^*[0 + (a + b)] \\ &= \varphi^*(a + b) \\ &= \varphi^*(b + a) \\ &= \varphi^*(b) + a \Rightarrow \varphi^*(b) \in A \end{aligned}$$

Luego, por el axioma de inducción para \mathbb{N}_0 , $A = \mathbb{N}_0$, y se verifica que $\forall a, b \in \mathbb{N}_0$, $a + b = b + a$.

□

Las demostraciones de las otras propiedades quedan como ejercicio para el lector.

1.2.3.1. Multiplicación entre números naturales

Definición. 1.2.5

Multiplicación entre números naturales

Definimos la multiplicación entre números naturales como una aplicación $\times: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, de modo que $\forall a, b \in \mathbb{N}$ se cumple

$$(n, m) \mapsto l = \times(n, m) = nm$$

i) $\times(1, m) = \times(m, 1) = m$

ii) $\times(\varphi(n), m) = \times(n, m) + m$.

Números Enteros 1.3

Números Racionales 1.4

Números Reales 1.5

Números Complejos. 1.6

Problemas 1.7

- En los incisos del **a)** al **e)**, escriba las proposiciones como implicaciones, luego decida si es falso o verdadero

(a) **Hipótesis** p : Un hombre vive en Barranquilla,
Conclusión q : Vive en Antioquía.

(b) **Hipótesis** p : Algunas manzanas son rojas,

Conclusión q : Los caballos tienen cuatro patas.

(c) **Hipótesis** p : Dos rectas se intersectan, **Conclusión** q : Las dos rectas no son paralelas.

(d) **Conclusión** q : Dos rectas son perpendiculares,
Hipótesis p : Las rectas se intersectan.

(e) **Hipótesis** p : Dos ángulos tienen la misma me-

dida, **Conclusión q** : Los ángulos son congruentes.

2. **Analice la siguiente conjetura:** Si un triángulo

tiene un ángulo recto, tiene dos lados congruentes.

Comentario: Para demostrar que la conjetura es falsa, debe presentar un contraejemplo, para explicar que es verdadera use las definiciones.