










1 Teoría de conjuntos y sistemas numéricos

Contenido	Capítulo 1	Página
1.1	Introducción	2
1.1.1	Un poco de historia	2
1.1.2	Teoría intuitiva de conjuntos	3
1.2	Relaciones y axiomas en la teoría de conjuntos	9
1.3	Operaciones entre conjuntos	16
1.4	Propiedades de los conjuntos	20
1.5	Representación de conjuntos	21
1.5.1	Diagrama de Venn	21
1.6	Problemas	23

Objetivos

-  Interpreta correctamente los conceptos de conjunto y elemento.
-  Argumenta los procedimientos para realizar operaciones entre conjuntos .
-  Maneja con criterio las operaciones y sus propiedades en los diferentes sistemas numéricos.

Indicadores de Logros

-  Identifica conjuntos.
-  Clasifica conjuntos.
-  Realiza operaciones entre conjuntos.
-  Deduce las propiedades de los conjuntos a partir de los axiomas, definiciones y otras propiedades.
-  Aplica bien las propiedades de los conjuntos.
-  Utiliza los diagramas de Venn para representar operaciones y relaciones entre conjuntos.

Introducción 1.1

La **teoría de conjuntos**, es la rama de las matemáticas a la que el matemático alemán Georg Cantor dio su primer tratamiento formal en el siglo XIX. El concepto de conjunto es uno de los más fundamentales en matemáticas, incluso más que la operación de contar, pues se puede encontrar, implícita o explícitamente, en todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas. En su forma explícita, los principios y terminología de los conjuntos se utilizan para construir proposiciones matemáticas más claras y precisas y para explicar conceptos abstractos como el de infinito.

1.1.1. Un poco de historia

En el último cuarto del siglo XIX se vivió un episodio apasionante de la historia de las matemáticas que las ligaría desde entonces a la historia de la lógica.

Primero, Georg Boole (1815-1864) en su *Mathematical Analysis of Logic* trató de presentar la lógica como parte de las matemáticas.

Poco después Gottlob Frege (1848-1925) intentó mostrar que la aritmética era parte de la lógica en su *Die Grundlagen der Arithmetik*. Pero, dando un gran paso tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de la lógica, G. Cantor se había adelantado a Frege con una fundamentación lógica de la aritmética.

Cantor había demostrado que la totalidad de los números naturales comprendidos en el intervalo de extremos 0 y 1 no es numerable, en el sentido de que su infinitud no es la de los números naturales. Como una consecuencia de esa situación, Cantor creó una nueva disciplina matemática entre 1874 y 1897: la teoría de conjuntos.

Su obra fue admirada y condenada simultáneamente por sus contemporáneos.

Desde entonces los debates en el seno de la teoría de conjuntos han sido siempre apasionados, sin duda por hallarse estrechamente conectados con importantes cuestiones lógicas.

Según la definición de conjunto de Cantor, éste es “una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto”.

Frege fue uno de los admiradores de la nueva teoría de Cantor, y dio una definición de conjunto similar.

En 1903 B. Russell demostraría que la teoría de conjuntos de Cantor era inconsistente y cuestionaría la definición de conjunto en la teoría de Cantor.

Pero pronto la teoría axiomática de Zermelo (1908) y refinamientos de ésta debidos a Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Newman (1925) y otros sentaron las bases para la teoría de conjuntos actual.

Es indiscutible el hecho de que la teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas, es además, la teoría matemática dónde fundamentar la aritmética y el resto de teorías matemáticas.

Es también indiscutible que es una parte de la lógica y en particular una parte de la lógica de predicados.

En esta historia cruzada de las matemáticas, la lógica y los fundamentos de ambas, la teoría de conjuntos permitiría por un lado una fundación logicista de las matemáticas; pero por otro lado la teoría de conjuntos mirada como parte de las matemáticas proporciona el metalenguaje, el contexto o sustrato de las teorías lógicas. Finalmente, puede ser completamente expresada en un lenguaje de primer orden y sus axiomas y teoremas constituyen una teoría de primer orden a la que pueden aplicarse los resultados generales que se aplican a cualquier teoría de primer orden.

1.1.2. Teoría intuitiva de conjuntos

La definición inicial de Cantor es totalmente intuitiva:

Definición. 1.1. 1

Conjunto según Cantor

un conjunto es cualquier colección C de objetos determinados y bien distintos de nuestra percepción o nuestro pensamiento (objetos x que se denominan elementos de C), reunidos en un todo.

Igual que en Frege su idea de lo que es un conjunto coincide con la extensión de un predicado (la colección de objetos que satisface el predicado). Esta idea sencilla y tan intuitiva resulta ser también ingenua porque produce enormes contradicciones de inmediato, como por ejemplo la paradoja de Russell.

Para poder mostrarlo es necesario empezar por formalizar esta teoría intuitiva que, aparte de los símbolos para los conjuntos y sus elementos (x , C , etc.), tendrá los símbolos de pertenencia, \in e igualdad $=$ (de los objetos del lenguaje formal).

Que x es un elemento del conjunto C se expresa “ x pertenece a C ” o bien $x \in C$.


Que x no es un elemento de C se expresa “ x no pertenece a C ” o bien $x \notin C$.

Tendremos en cuenta que no es necesario denotar siempre con mayúsculas a los conjuntos y con minúsculas a sus elementos, ya que un conjunto puede ser a su vez un elemento de otro conjunto e incluso podemos considerar que en nuestra teoría no hay objetos que no sean conjuntos.

El problema ahora es el siguiente:

¿Cómo se determina una colección?

De acuerdo con la definición intuitiva de Cantor un conjunto queda definido si es posible describir completamente sus elementos.

 El procedimiento mas sencillo de descripción es nombrar cada uno de sus elementos, esta descripción se llama definición por extensión; es conocida la notación de encerrar entre llaves los elementos del conjunto.


Ejemplos. 1.1. 1

Listar un conjunto

1. $A = a, b, c$. Donde A es el conjunto formado por la colección de objetos a, b y c .
2. $B = \{\oplus, \ominus, \otimes, \oslash, \odot\}$ Donde B es el conjunto formado exactamente por esos cinco círculos. Entonces es cierto que $b \in A$ y que $\oplus \in B$.

El inconveniente para este método de listado o enumeración de los elementos del conjunto es que éstos deben poseer un número finito de elementos y, en la práctica, un número muy pequeño.

¿Entonces qué hacer cuando la colección es infinita, o cuando es finita pero numerosa?

 Cuando el número de elementos del conjunto es infinito (como el de los número impares) o demasiado numeroso (como el de todas las palabras que pueden formarse con el alfabeto latino) se utiliza el método de definición por extensión, que consiste en la descripción de un conjunto como la extensión de un predicado, esto es, mediante una o varias propiedades (el predicado) que caracterizan a los elementos de ese conjunto.

En principio podría tomarse cualquier lengua natural para describir los objetos (español, inglés, italiano, vasco, catalán, etc), sin embargo es preferible utilizar un lenguaje formal que ofrezca rigor y precisión.

Dicho lenguaje debe ser suficientemente rico; esto es, lo suficientemente expresivo como para poder describir todas las colecciones matemáticas. Pero también lo suficientemente restrictivo como para limitarse a sólo las colecciones de objetos matemáticos.

Para expresar predicados utilizaremos el lenguaje formal de la lógica de predicados de primer orden (el lenguaje de la lógica de proposiciones con los símbolos lógicos de las conectivas $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ más los cuantificadores universal \forall y existencial \exists) al que se añade variables, igualdad y el relator binario de pertenencia.

Este lenguaje puede ser ampliado con los símbolos propios de las operaciones, relaciones o funciones del lenguaje específico de teoría de conjuntos.

En la primera parte, al presentar la Teoría básica de conjuntos, utilizaremos con frecuencia el lenguaje natural para describir propiedades.

Estas propiedades pueden ser aritméticas ($>$, $<$, $/$, etc.) o matemáticas en general, pero también pueden ser propiedades expresadas en lenguaje natural (nombres, verbos,...) que describan colecciones no estrictamente matemáticas.

Ejemplos. 1.1. 2

Descripción de un conjunto por extensión

1. $C = x \in \mathbb{N} / 0 < x < 230000 \wedge 2/x$, donde \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales con la ordenación habitual, $<$ significa “menor que” y $2/x$ significa que “2 divide a x ”.
2. $D = \{x/x \text{ es una palabra de 2 letras del alfabeto griego (pueden estar repetidas)}\}$
3. $E = x / P_2(x) \vee P_3(x) \vee \dots \vee P_{10}(x)$. Donde $P_i(x)$ significa “ x es una palabra de i letras del alfabeto griego (pueden estar repetidas).”.

1.1.2.1. Problemas en la teoría intuitiva de conjuntos: la paradoja de Russell ¹

Pero la definición intuitiva de conjunto como el de una colección de objetos ‘describible’ por un predicado conduce inevitablemente a ciertas contradicciones que se llaman paradojas, la más célebre es la conocida como paradoja de Russell:

Consideremos el conjunto $A = x : x \notin x$, descrito mediante el predicado del lenguaje formal $x \notin x$.

Obviamente, para cualquier b , $b \in A$ si y sólo si $b \notin b$. Es decir, está en A cuando verifica las condiciones que definen a A . Pero, ¿qué sucede con el propio A ?

Evidentemente, $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$. Pero este resultado es contradictorio. En vano se debe intentar descubrir un error en el razonamiento, más bien parece que el problema proviene de admitir expresiones como $A \in A$ (o conjuntos como el conjunto de todos los conjuntos que produce también paradojas). Se ha visto claramente que el concepto de conjunto no es tan sencillo y que identificarlo sin mayor investigación con el de colección resulta problemático. Para evitar la paradoja de Russell, y otras de esta naturaleza, es necesario tener más cuidado en la definición de conjunto, lo veremos en lo que sigue. Otras paradojas, de hecho las primeras en descubrirse, afectaban a colecciones grandes, como por ejemplo la de los ordinales, o la de todos los conjuntos. entonces estas colecciones no podrían ser conjuntos.

1.1.2.2. Solución de las paradojas

Una solución radical al problema de las paradojas es la propuesta en 1903 por Russell, su Teoría de Tipos.

Observa que en todas las paradojas conocidas hay una componente de reflexividad, de circularidad. Técnicamente se evitan las paradojas al eliminar del lenguaje las formaciones circulares.

Se reconoce que nuestro universo matemático no es plano, sino jerarquizado, por niveles, y que el lenguaje más adecuado para hablar de un universo debe tener diversos tipos de variables que correspondan a cada

¹La paradoja original era sobre el barbero de un pueblo que afeitaba a todos los del pueblo que no se afeitaban a sí mismos: ¿Se afeita entonces el barbero a sí mismo?

nivel; en particular, la relación de pertenencia se da entre objetos de distinto nivel.

En 1908 Zermelo da como solución la definición axiomática de la Teoría de Conjuntos, refinada más tarde por Fraenkel, Skolem, von Neumann y otros. En esta teoría se evita que las colecciones que llevaban a las paradojas puedan ser conjuntos. De hecho, en la solución de Zermelo-Fraenkel, una colección de objetos será un conjunto si los axiomas la respaldan. Dichos axiomas permiten formar conjuntos a partir de conjuntos previamente contruídos y postulan la existencia del \emptyset y de al menos un conjunto infinito. Sin embargo, en la solución de von Neumann se admiten colecciones que no son conjuntos, las denominadas clases últimas.

Se definen clases mediante propiedades, sin restricción, pero habrá que mostrar que se trata de conjuntos viendo que pertenecen a alguna clase. Las clases últimas, como la clase universal o la de los ordinales, no pertenecen a ninguna otra clase.

1.1.2.3. El Universo matemático

La idea intuitivamente más fructífera y también la más extendida es nuestro universo matemático, esto es, el que contiene todas las colecciones de objetos matemáticos, pero solamente los objetos matemáticos constituyen una jerarquía de conjuntos, la denominada Jerarquía de Zermelo.

En la construcción de los conjuntos que formarán la jerarquía se parte de una colección inicial M_0 de objetos dados y a continuación se construye una colección M_1 de conjuntos de elementos de M_0 , después una colección M_2 de conjuntos de objetos de M_0 y M_1 , etc. ??, el universo de conjuntos contruídos es una jerarquía.

Para proporcionar mayor precisión debemos responder a las preguntas siguientes:

1. ¿Cual será nuestra colección de partida, M_0 ?
2. ¿Qué conjuntos de objetos de niveles inferiores se toman para formar nuevos niveles en la jerarquía?
3. ¿Hasta dónde se extiende esta jerarquía?

Para responder a la primera pregunta debemos considerar si nos interesa tomar objetos que no sean conjuntos o si nos basta con partir de un primer nivel que sea sencillamente el conjunto \emptyset .

Está claro que se toman sólo objetos matemáticos, pero habrá que ver que es suficiente y que podremos finalmente contar en la jerarquía con todos los objetos matemáticos.

Una respuesta a la segunda pregunta que parece razonable es, al ir tomando nuevos conjuntos, que éstos se puedan describir con nuestro lenguaje. Al tomar esta opción formamos la Jerarquía de conjuntos que se pueden construir. Otra posibilidad es tomar como objetos de un nuevo nivel a todos los posibles. Veremos que esta es la opción de Zermelo.

Finalmente, la tercera de las preguntas es hasta donde se extiende la jerarquía.

La respuesta es que la jerarquía de conjuntos no tiene fin, siempre se pueden construir nuevos niveles. Para precisar un poco más esta imagen intuitiva de nuestro Universo matemático es conveniente contar con algunas nociones de teoría de conjuntos básica y con el concepto de ordinal.

1.1.2.4. Teoría axiomática de conjuntos

Recordemos los componentes de una teoría axiomática:

1. El lenguaje o símbolos formales de la teoría.
2. Los axiomas, que son proposiciones acerca de los objetos de la teoría y que imponen el funcionamiento de dichos objetos.
3. Los teoremas, que son todas las proposiciones demostrables con herramientas lógicas a partir de los axiomas.

En la teoría de conjuntos axiomática de Zermelo Fraenkel se usará el lenguaje formal de la lógica de predicados de primer orden.

Las variables de dicho lenguaje formal se referirán a conjuntos; es decir, en la interpretación usual todos los objetos son conjuntos.

Es decir, existir será sinónimo de ser un conjunto.

El lenguaje básico sólo tiene el relator binario de pertenencia, pero se extiende, mediante definiciones pertinentes, para dar cabida a operaciones.

Los conceptos primitivos de esta teoría son el de conjunto y el de pertenencia.

En realidad la mayoría de los axiomas sirven para garantizar la existencia de los conjuntos que nos interesa tener.

Por ello la idea de construcción es esencial en la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel (que notaremos ZF). En la teoría axiomática de conjuntos se respeta la idea fundamental de aceptar que una colección de objetos pueda ser un conjunto, pero se impone la condición de que todos los objetos de una colección deben haberse formado antes de definir dicha colección, y de esta manera se evitarán los problemas que conducen a las paradojas.

Uno de los axiomas de la teoría (se verá más adelante) impondrá esta restricción: "Si X es un conjunto ya construido existe un conjunto Y formado por los elementos de X que satisfacen un predicado P que los describe (o lo que es lo mismo, una fórmula con al menos una variable libre)". Así un predicado describirá un conjunto sólo si los objetos han sido ya construidos (son de otro conjunto X) y además satisfacen el predicado. Con esta restricción a la definición de conjunto de Cantor desaparece la paradoja de Russell ya que para que $A = x : x \notin x$ sea un conjunto se debería tener un conjunto X a partir del cual construirse; es decir, $A = x \in X : x \notin x$. ¿Cómo se resuelve la paradoja?

Al construirse a partir de un conjunto ya construido desaparece el problema. Ahora, para cualquier b se verifica: $b \in A$ si y sólo si $b \in X$ y $b \notin b$. En realidad, puesto que la condición $b \notin b$ la cumplen todos, A será el propio X . Además, es imposible que exista el conjunto de todos los conjuntos.

Desgraciadamente, Bertrand Russell descubrió que la axiomática de Frege era contradictoria.

En efecto, uno de los axiomas básicos de Frege afirmaba lo siguiente:

Para toda propiedad $\phi(X)$ definida en la teoría, existe un conjunto Y cuyos elementos son exactamente los conjuntos X que cumplen $\phi(X)$. En otros términos, Frege postulaba la existencia del conjunto $Y = X | \phi(X)$.

Lo que Russell observó fue que esto podía aplicarse a $\phi(X) \equiv X \notin X$, que era una propiedad trivialmente definida en la teoría de Frege, de modo que debía existir un conjunto $R = X : X \notin X$, que claramente nos lleva a la contradicción $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.

A partir de aquí la minuciosa lógica de Frege permitía probar con el mismo rigor que $2 + 2 = 4$ y que $2 + 2 = 5$, por lo que su teoría se volvía inservible. El mismo Russell, junto con A. N. Whitehead, presentó un tiempo después otra teoría axiomática que, al menos en apariencia, estaba exenta de contradicciones, si bien era tan inútil como la de Frege, esta vez no por contradictoria sino por complicada. Se trata de los Principia Mathematica.

La primera teoría axiomática construida por un matemático a gusto de los matemáticos fue la de Zermelo. La forma en que Zermelo evitó la paradoja de Russell fue debilitar el axioma de formación de conjuntos de Frege, reduciéndolo a:

Axioma. 1.1. 1

Zermelo

Para toda propiedad $\phi(X)$ definible en la teoría y todo conjunto U , existe un conjunto Y cuyos elementos son exactamente los elementos $X \in U$ que cumplen $\phi(X)$.

Así, lo que Zermelo postulaba era la existencia de

$$Y = \{X \in U : \phi(X)\}.$$

Ahora bien, este axioma sólo permite definir conjuntos a partir de otros conjuntos, por lo que Zermelo tuvo que añadir otros axiomas que garantizaran la existencia de aquellos conjuntos necesarios que no podían obtenerse como subconjuntos de otros conjuntos dados. Enseguida describiremos con detalle la axiomática de Zermelo, pero antes daremos algunas indicaciones sobre la lógica matemática que subyace a toda teoría de conjuntos moderna.

1.1.2.5. El lenguaje de la Teoría de Conjuntos

Un lenguaje formalizado está constituido por un conjunto de símbolos básicos y por reglas que nos permiten formar expresiones más complicadas a partir de esos símbolos originales.

A continuación presentamos el lenguaje formalizado L_{\in} con el cual escribiremos la Teoría de Conjuntos.

Este lenguaje puede entenderse de dos maneras distintas: como lenguaje formal y como abreviaturas de expresiones en español. Esta segunda interpretación será posiblemente la conveniente en un curso introductorio como este.

Los símbolos del lenguaje formal de la teoría de conjuntos serán:

1. Los símbolos de conjuntos serán las letras del alfabeto, mayúsculas y minúsculas, es decir: Variables: $x, y, z, X, Y, Z, x_1, x_2, \dots$, en general, las últimas letras del alfabeto latino, minúsculas o mayúsculas con o sin subíndices. Su significado es el habitual en matemáticas y su rango son los conjuntos.
2. Constantes: a, b, c, A, B, C, \dots , en general, las primeras letras del alfabeto latino. Sirven para referirnos a conjuntos específicos.
3. El símbolo de la relación de pertenencia entre conjuntos es \in .
4. Los símbolos lógicos de la lógica de predicados: (\sim) (negación), (\wedge) (conjunción), (\vee) (disyunción), (\rightarrow) (condicional), (\leftrightarrow) (bicondicional), (\Rightarrow) (implicación), (\Leftrightarrow) (equivalencia), (\forall) (cuantificador universal) y (\exists) (cuantificador existencial). Con estos signos básicos se generan todas las fórmulas de la teoría de conjuntos. Cualquier cadena finita formada por estos símbolos es una expresión o del lenguaje, pero no toda expresión es aceptable o significativa. Sólo aceptaremos aquellas a las que llamaremos Fórmulas de L_{\in} .
5. $(,)$ (paréntesis). Usados como signos de puntuación.
6. Las reglas de formación de fórmulas son las habituales en la lógica de primer orden. A saber:
 - (a) $x \in y$ y $x = y$ son fórmulas. Para cualesquiera variables x, y .
 - (b) Si ϕ y ψ son fórmulas, también lo son: $\sim \phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \phi \leftrightarrow \psi$.
 - (c) Si ϕ es una fórmula, $(\forall x) \phi$ y $(\exists x) \phi$ también lo son.

Solamente aquellas expresiones obtenidas por la aplicación de (un o número finito de) estas reglas es una fórmula de L_{\in} .

Entonces el lenguaje L_{\in} se generan mediante las reglas precedentes:

Relaciones y axiomas en la teoría de conjuntos 1.2

Término no definido. 1.2. 1

Conjunto y elemento

Los términos conjunto y elemento, los consideramos como primitivos, esto es no definidos.

Definición. 1.2. 1

Pertenencia

$a \in B$ significa que el objeto a es un elemento del conjunto B

Definición. 1.2. 2

No pertenece

$a \notin A$ significa que el objeto a no es un elemento del conjunto A .

Ejemplo. 1.2. 1

D

ado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces $1 \in A$, porque 1 es un elemento de A .

En cambio $b \notin A$, porque b no es un elemento del conjunto A .

Término. 1.2. 1

Representación

Se dice que un nombre, diagrama o una proposición representa a un objeto si explica de forma precisa cuales son sus propiedades.

Como ejemplos de representación están:

1. La fórmula $y = f(x)$ que representa al una función f .
2. Si $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, en este caso A representa al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
3. Los grafos dirigidos son diagramas que representan a las relaciones.
4. Una tabla de datos es un diagrama que representa a una relación.

Término. 1.2. 2

Igualad

Se dice que dos representaciones son iguales si representan al mismo objeto,

Por ejemplo $x = 2$, en este caso los nombres equis y dos representan al mismo número.

Axioma. 1.2. 1

Propiedades de la igualdad

1. $(\forall x) (x = x)$, propiedad reflexiva.
2. $(\forall x) (\forall y) (x = y \iff y = x)$, propiedad simétrica.
3. $(\forall x) (\forall y) (\forall z) (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$, propiedad transitiva.

El siguiente axioma nos muestra el uso de la idea de igualdad.

Axioma. 1.2. 2

(Axioma de extensión)

Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos. Esto es: el conjunto A es igual al conjunto B si todo elemento de A es elemento de B y si todo elemento de B es elemento de A .

En el lenguaje L_{\in} se expresa.

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow (A = B).$$

Este axioma nos permite demostrar la unicidad de muchos conjuntos definidos de alguna forma concreta. Haremos un ejemplo, dejando el resto de casos de unicidad como ejercicio, explícito o implícito:

Ejemplo. 1.2. 2

Igualdad de conjuntos

Por ejemplo $A = \{\text{Los ríos de América}\}$ y $B = \{\text{Los Ríos de Colombia}\}$.

Es claro que en Colombia no están todos los ríos de América, por tanto $A \neq B$, Es decir que los conjuntos A y B no tienen los mismos elementos.

Veamos otro ejemplo :

El primer axioma de Zermelo, afirma que si dos conjuntos tienen los mismos elementos entonces son iguales (el recíproco es un caso particular de un principio lógico: si $X = Y$ entonces todo lo que vale para X vale para Y).

Según hemos comentado en la introducción , el problema que presenta la fundamentación de la teoría de conjuntos es que no podemos permitirnos el lujo de postular que toda propiedad define un conjunto.

En su lugar, la teoría de Zermelo postula la existencia de conjuntos definidos por ciertas propiedades inofensivas (no como $X \notin X$). Tal vez el conjunto más inofensivo de todos sea el que nos da el axioma del conjunto vacío

Axioma. 1.2. 3

Conjunto vacío

Existe un conjunto que no contiene ningún elemento.

$$(\exists X \forall x) x \notin X$$

Este axioma afirma la existencia de un conjunto que no tiene elementos. Dicho conjunto es único, pues dos conjuntos sin elementos tendrían los mismos elementos, como lo probaremos mas adelante. Esto nos permite definir el término

$$\emptyset \equiv \{X : (\forall U) U \notin X\}.$$

Nota: Observe que \emptyset no es un signo del lenguaje de la teoría de conjuntos, si no una abreviatura de un término que puede eliminarse de cualquier expresión sin más que sustituirla por el miembro derecho de la definición.

Lema. 1.2. 1**Unicidad del vacío**

Existe un único conjunto que no contiene ningún elemento.

Demostración:

Según el axioma de extensión, dos conjuntos A y B son iguales si y solo si

$$\forall Z(Z \in A \Leftrightarrow Z \in B).$$

Por otro lado, el axioma del conjunto vacío dice

$$\exists Y \forall Z \sim (Z \in Y) \quad (1.1)$$

Si suponemos que existen conjuntos Y y Y' que satisfacen la condición (1.1) y $Y \neq Y'$; entonces es claro que, para todo Z , se satisface

$$Z \in Y \Leftrightarrow Z \in Y'$$

pues ambas expresiones son falsas. Así, por el axioma de extensión resulta que $Y = Y'$.

□

Definición. 1.2. 3**Subconjunto**

Decimos que X es subconjunto de Y , en símbolos, $X \subseteq Y$, si y sólo si todo elemento de X es un elemento de Y . O sea,

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x(x \in X \Rightarrow x \in Y).$$

Usando la definición 1.2.3 se puede escribirse más abreviado el axioma de extensión;

$$(\forall X \forall Y)(X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y).$$

Nota: Si tenemos dos conjuntos A y B tal que $A \subseteq B$, de la definición 1.2.3 se sigue que es suficiente que exista al menos un elemento del conjunto A que no sea elemento de B para que A no sea subconjunto de B , en este caso se dice que $A \not\subseteq B$.

Ejemplo. 1.2. 3**Subconjuntos**

Dados dos conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, que relación hay entre ellos

Solución: La relación que existe entre ellos es que A es subconjunto de B , es decir, $A \subseteq B$. En efecto se observa por simple inspección que todo elemento de A es también elemento de B .

Definición. 1.2. 4**Subconjunto propio**

Decimos que un conjunto X es un subconjunto propio de un conjunto Y , o parte de Y , si se verifica $X \subseteq Y$ y además existe algún $x \in Y$ tal que $x \notin X$.

Notación: Si un conjunto X es subconjunto propio de un conjunto Y se denota $X \subset Y$.

La definición de subconjunto propio también se puede expresar de la siguiente forma;

$$X \subset Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge X \neq Y.$$

Ejemplo. 1.2. 4**Subconjunto Propio**

Dados los conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Indicar si A es subconjunto propio de B ,

Solución: Es evidente que $A \subseteq B$, además los elementos de B 1, 3 y 5 no pertenecen al conjunto A , por tanto existe un elemento de B que no está en A . Por lo que podemos asegurar que $A \subset B$ de acuerdo con la definición 1.2.4.

Definición. 1.2. 5**Comparables**

Se dice que dos conjuntos X e Y son comparables si $A \subseteq B \vee B \subseteq A$.

y se dice que no son comparables si $A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$.

Ejemplo. 1.2. 5**Comparables**

Dados los conjuntos $A = \{a, e, i\}$ y $B = \{a, e, o, i, u\}$. Determine si los conjuntos A y B son comparables.

Solución:

Es evidente que $A \subseteq B$, por tanto los conjuntos A y B son comparables.

Ejemplo. 1.2. 6**Comparables**

Dados los conjuntos $M = \{1, 5, 7, 8\}$ y $N = \{2, 5, 6, 8, 9\}$. Determine si los conjuntos M y N son comparables.

Solución: Los conjuntos M y N no son comparables ya que solo el elemento $5 \in M$ está en N . Por tanto $M \not\subseteq N$ y solo el $5 \in N$ está en M de lo que se concluye que $N \not\subseteq M$, es decir $M \not\subseteq N \wedge N \not\subseteq M$ y de acuerdo con la definición 1.2.5 los conjuntos M y N no son comparables.

Axioma. 1.2. 4**Especificación o separación**

A todo conjunto A y a toda condición o fórmula $\psi = S(x)$, corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos de A que cumplen $S(x)$.

El axioma de especificación en el lenguaje L_{\in} se escribe

$$(\forall A \exists B) (\forall z) (z \in B \Leftrightarrow (z \in A \wedge S(x))) \text{ ó } B = \{x \in A : \psi = S(x)\}.$$

Este axioma nos dice que para cualquier propiedad (expresada por $S(x)$) y cualquier conjunto A existe el subconjunto de A formado por los elementos que verifican esa propiedad. Obviamente este conjunto es único.

Este Axioma ayuda a construir subconjuntos de un conjunto dado.

Definición. 1.2. 6

Si $S(x)$ es una fórmula de L_{\in} y A un conjunto, el conjunto cuya existencia está garantizada por el axioma 1.2.4 se denotará con el símbolo $x \in A : S(x)$ y se lee “el conjunto de los elementos de A tales que cumplen $S(x)$ ”.

Por último, cabe destacar que este no es propiamente un axioma si no más bien un esquema. En efecto, para cada fórmula $S(x)$ de L_{\in} tenemos un axioma distinto, o sea, hay una cantidad ilimitada de instancias para este axioma.

Recordemos que la paradoja de Russell se produce al tratar de construir el conjunto de todos los conjuntos que verifican una propiedad cualquiera $S(x)$. Este axioma limita nuestra capacidad de formar conjuntos de objetos que verifican una cierta propiedad, sólo podemos referirnos a aquellos elementos que perteneciendo a un cierto conjunto dado, verifican la propiedad en cuestión. Veamos que esta restricción evita que se produzca la paradoja.

Para ello tratemos de formar la clase de Russell. Dado un conjunto A , el axioma de extensión nos permite formar el conjunto

$$R = \{x \in A : x \notin x\}$$

En este caso tenemos que si $R \in A$ y $R \notin R$,

lo cual es contradicción, luego $R \notin R$, lo que, que a diferencia de antes, no es contradictorio, sólo implica que $R \notin A$.

Teorema. 1.2. 1

No hay ningún conjunto A tal que $\forall x (x \in A \leftrightarrow x \notin x)$, es decir el conjunto $R = \{x : x \notin x\}$ no existe.

Demostración:

Vamos a efectuar una prueba indirecta.

Es decir suponemos que existe un conjunto A tal que

$$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \notin x).$$

Este vale en particular para el caso $x = A$, de modo que

$$A \in A \leftrightarrow A \notin A$$

lo cual es contradictorio.

□

Si bien hay un conjunto mínimo, el conjunto vacío, veremos ahora que no hay un conjunto máximo. El proceso de construcción de conjuntos no puede darse nunca por acabado.

Teorema. 1.2. 2

Conjunto de todos los conjuntos

No existe el conjunto de todos los conjuntos, es decir $(\sim \exists A \forall x) (x \in A)$

Demostración:

Supongamos que si existe el conjunto de todos los conjuntos y llamaremos A , con la propiedad de que $(\forall x) (x \in A)$. Entonces podemos aplicar el axioma 4 (axioma de separación) al conjunto A con la proposición $x \notin x$, obteniendo de ese modo el conjunto $B = \{x : x \in A \wedge x \notin x\}$. Sin embargo la propiedad $x \in A \wedge x \notin x$ se puede sustituir por $x \notin x$, porque la propiedad $x \in A$ la verifican todos los objetos x . al efectuar la sustitución obtenemos el conjunto $B = \{x : x \notin x\}$, pero ese conjunto no existe, lo cual es una contradicción.

□

Axioma. 1.2. 5

Axioma de Pares

Dados dos conjuntos X e Y , existe un conjunto cuyos únicos elementos son X e Y .

Su expresión en el lenguaje L_{\in} es

$$(\forall X \forall Y \exists Z) \forall x (x \in Z \Leftrightarrow (x = X \vee x = Y)) \text{ ó } Z = \{X, Y\}.$$

Resulta claro por el axioma 2 que este conjunto es único. Lo denotaremos

$$\{X, Y\}$$

y lo llamaremos par no ordenado X, Y .

El axioma 2 también garantiza de un conjunto cuyo único elemento es el conjunto X

$$\{X, X\} = X,$$

Ejemplo. 1.2. 7

conjunto $\{\emptyset\}$

Tomando $X = Y = \emptyset$, llegamos a la conclusión de que $\{\emptyset\}$ es un conjunto no vacío, ya que contiene un elemento. Ahora si tomamos $X = \emptyset$, $Y = \{\emptyset\}$, llegamos a la conclusión que $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es un conjunto con dos elementos.

Operaciones entre conjuntos 1.3

En realidad, los axiomas que tenemos hasta ahora sólo garantiza la existencia del conjunto vacío, y la existencia de conjuntos más pequeños a partir de conjuntos ya conocidos. los siguientes axiomas nos permitirán construir conjuntos más grandes.

El siguiente axioma nos permite construir uniones arbitrarias de conjuntos (siempre que los conjuntos que queramos anexas formen un conjunto: recordemos que no existe el conjunto de todos los conjuntos).

Axioma. 1.3. 1

Union de conjuntos

Para todo conjunto S , existe un conjunto, que denotaremos $\bigcup S$, tal que $x \in \bigcup S$ si y sólo si $x \in X$ para algún $X \in S$.

Nota: El conjunto $\bigcup S$ es la unión de los subconjuntos X de S .

Ejemplo. 1.3. 1

Union de conjuntos

Si $S = \{X, Y\}$, entonces obtenemos la unión de X e Y , que denotamos $X \cup Y$. Además, tomando $S = \{X \cup Y, Z\}$, podemos obtener $(X \cup Y) \cup Z$ y en general, la unión de un número finito de conjuntos.

Nota: Si $S = \{X, Y\}$ el conjunto $\bigcup S$ se puede definir como:

$$\bigcup S = X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y, X, Y \in S\}.$$

Ejemplo. 1.3. 2

Union

Dado el conjunto $S = \{\{1, 2, 3\}, \{0, 2, 4, 6\}, \{5, 7, 9\}, \{a, b, c, d\}\}$. Determine $\bigcup S$.

Solución: Sean $X_1 = \{1, 2, 3\}$, $X_2 = \{0, 2, 4, 6\}$, $X_3 = \{5, 7, 9\}$ y $X_4 = \{a, b, c, d\}$, tenemos que los elementos 1, 2, 3 están en $\bigcup S$ porque son elementos de X_1 de la misma forma podemos decir que los elementos 0, 2, 4, 6; 5, 7, 9; y a, b, c, d están en $\bigcup S$ porque pertenecen a los conjuntos X_2, X_3 y X_4 respectivamente, entonces de acuerdo con el axioma 1.3.1 $\bigcup S = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, a, b, c, d\}$.

Aplicando el axioma de separación podemos demostrar la existencia de la intersección de conjuntos

Lema. 1.3. 1

Intersección de conjuntos

Dados dos conjuntos, X, Y , existe un (único) conjunto Z tal que $x \in Z$ si y sólo si $x \in X$ y $x \in Y$.

Demostración:

Definamos la propiedad $P(x)$ que sea $x \in Y$. Entonces, por el axioma de separación, existe el conjunto $Z = \{x \in X : P(x)\}$, que es el conjunto buscado. La demostración de la unicidad se deja como ejercicio, esto se demuestra a partir del axioma de Extensión.

□

Definición. 1.3. 1

Intersección de conjuntos

El conjunto Z cuya existencia acabamos de demostrar se llama intersección de X e Y , y se denota $Z = X \cap Y$.

De acuerdo con el lema 1.3.1 podemos definir la intersección entre dos conjuntos X e Y como:

$$X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}.$$

Ejemplo. 1.3. 3**Intersección**

Dados conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determine $A \cap B$.

Solución: Sean las proposiciones abiertas $A_x = x \in A$, $B_x = x \in B$ y $(A \cap B)_x = x \in (A \cap B) \equiv x \in X \wedge x \in B$. Usemos las tablas de verdad para resolver la proposición $x \in X \wedge x \in B$.

Tabla 1.1: Tabla de verdad de la Intersección de conjuntos.

x	A_x	B_x	$(A \cap B)_x$
-1	v	f	f
0	v	f	f
1	v	v	v
2	v	v	v
3	v	v	v
4	v	v	v
5	v	v	v
6	f	v	f
7	f	v	f
8	f	v	f
9	f	v	f

En la ultima columna de la tabla 1.1 tenemos que los elementos que están en $A \cap B$ son 1, 2, 3, 4 y 5 ya que $(A \cap B)_x$ es verdadera . Entonces

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Definición. 1.3. 2**Conjuntos Disjuntos**

Sean X e Y se dicen que son disjuntos ($\nexists x$) ($x \in X \vee x \in Y$)

Teorema. 1.3. 1**Diferencia de conjuntos**

Dados dos conjuntos X, Y , existe un (único) conjunto Z tal que $x \in Z$ si y sólo si $x \in X$ y $x \notin Y$. Dicho conjunto se llama diferencia de los conjuntos X e Y .

La demostración queda de tarea.

Definición. 1.3. 3**Diferencia simétrica**

Dados dos conjuntos X, Y , se llama diferencia simétrica de X e Y al conjunto $X \triangle Y := (X - Y) \cup (Y - X)$

Axioma. 1.3. 2**Conjunto Potencia**

Dado cualquier conjunto X , existe un conjunto, que denotaremos $\mathcal{P}(X)$ tal que $x \in \mathcal{P}(X)$ si y sólo si x es un subconjunto de X .

Algunas propiedades del Conjunto Potencia Recuerda que si A es un conjunto, la colección que tiene por elementos a los subconjuntos de A es un conjunto al que denotamos $\mathcal{P}(A)$ y llamamos el conjunto potencia de A . Por ejemplo,

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
2. $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
3. $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Nota que el conjunto potencia de un conjunto A siempre tiene como elementos al conjunto vacío \emptyset y a A mismo. En particular, $\mathcal{P}(A)$ siempre es diferente del vacío.

Definición. 1.3. 4**Conjunto universal**

Sea X un conjunto y sea $P(x)$ una condición definida $\psi = P(x) := P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge P_3(x) \wedge \cdots \wedge P_n(x)$, entonces por el axioma de separación existe un conjunto definido $U := \{x \in X : \psi = P(x)\}$. A este conjunto se le llama conjunto universal o de referencia.

Teniendo el conjunto universal como referencia podemos aplicar el axioma de separación de la siguiente manera:

Sea U el conjunto Universal y sea la condición $\psi = P^j(x) := \{P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge P_3(x) \wedge \cdots \wedge P_j(x)\}$ ó cualquier conjunción de propiedades $P_i(x)$, con $i \leq j < n$. Por el axioma de separación existe un conjunto $A_j = \{x \in U : \psi = P(x)\}$, pero en este caso A_j no es único, si no que es una colección de subconjuntos de U .

Por esta razón es que el conjunto Universal lo podemos definir como el conjunto que contiene todos los elementos que poseen las propiedades de referencia que nos interesa.

Nota: Observe que el conjunto X utilizado para definir el conjunto universal es su vez un conjunto universal. Pero esto de ningún modo establece una contradicción, porque el conjunto universal es solo un

conjunto de referencia que tomamos para construir una colección de subconjuntos, es decir cualquier conjunto con dos o más elementos nos puede servir de referencia.

Definición. 1.3. 5**Complemento de un conjunto**

Sean X, Y conjuntos tales que, $Y \subset X$, definimos utilizando el axioma de separación, un conjunto con la propiedad: $x \in X \wedge x \notin Y$ dicho conjunto llamaremos complemento del conjunto Y con respecto al conjunto X y lo notaremos Y_X^c .

Nota: En el caso que definamos un conjunto universal U tal que $X \subset U$ denotamos el complemento de X con respecto a U como X^c .

Propiedades de los conjuntos 1.4

Ahora podemos hacer una relación entre la teoría axiomática de conjuntos y la teoría intuitiva vista en secundaria.

Sea U el conjunto referencia definido en la definición 4 podemos establecer el producto $U \times U$ y luego las operaciones de la forma

$$\begin{aligned} \oplus : \quad U \times U &\rightarrow U \\ (A, B) &\mapsto C = A \oplus B \end{aligned}$$

Unión de conjuntos Sean $A, B \subseteq U$ se define el conjunto $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Intersección de conjuntos Sean $A, B \subseteq U$ se define el conjunto $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Teorema. 1.4. 1**Propiedades de la unión y la intersección**

Si A, B y C son conjuntos, entonces:

1. $A \cap A = A$ y $A \cup A = A$ (IDEMPOTENCIA)
2. $A \cap B = B \cap A$ y $A \cup B = B \cup A$ (CONMUTATIVIDAD)
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ASOCIATIVIDAD)
4. $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$ y $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ (DISTRIBUTIVIDAD)
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$ y $A \cup \emptyset = A$

Algunas propiedades de la unión y la intersección son las siguientes.

Diferencia de conjuntos Sean $A, B \subseteq U$ se define el conjunto $A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Teorema. 1.4. 2

Propiedades de la diferencia

Si A es un conjunto, entonces

1. $A - \emptyset = A$
2. $\emptyset - A = \emptyset$
3. $A - A = \emptyset$

Representación de conjuntos 1.5

Cuando tenemos definido un conjunto de referencia podemos usar diagrama para representar los conjuntos sus operaciones y sus relaciones. estos diagramas se llaman de Venn y consisten en dibujar un rectángulo que representa al conjunto de referencia y dentro de él dibujamos con ovalos o circunferencias sus subconjuntos.

1.5.1. Diagrama de Venn

Sea U el conjunto de referencia y $A \subseteq U$ el siguiente diagrama los representa.

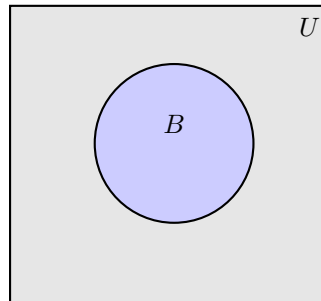


Figura 1.1: Diagrama de Venn- Euler

En los diagramas de Venn-Euler se representa el conjunto de referencia con un rectángulo, y los subconjuntos se representan con círculos o elipses, como se muestra en la figura 1.1.

1.5.1.1. Subconjuntos

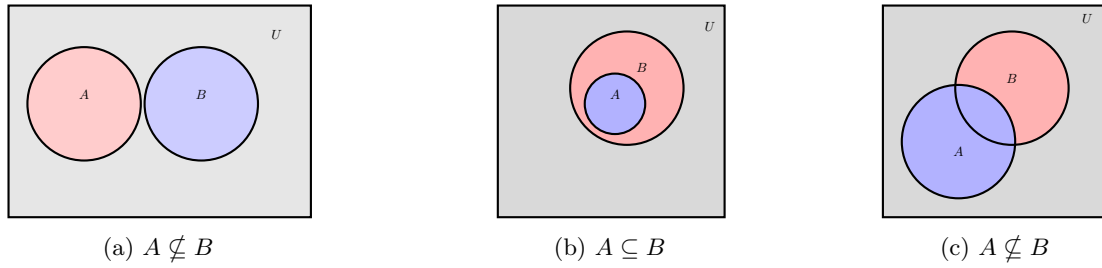


Figura 1.2: Contenencia De Conjuntos

En la figura 1.2 observamos en la figuras 1.2a y 1.2c que el círculo que representa al conjunto A no se encuentra totalmente en el interior del círculo que representa al conjunto B , por tanto decimos que $A \not\subseteq B$, mientras que el figura 1.2b si se da que el círculo que representa al conjunto A si se encuentra en el interior del círculo que representa al conjunto B , por tanto podemos decir que $A \subseteq B$.

Ejemplo. 1.5. 1**Subconjunto**

Consideremos los siguientes conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $M = \{a, b, c, d, e\}$ y $N = \{b, c, d, m, n\}$. Que podemos afirmar sobre la relación entre A y B , e M y N .

Solución:

- i) $A \subseteq B$, porque todos los elementos de A están en B .
- ii) $M \not\subseteq N$, porque algunos elementos de M , m y n no están en N .

Este ejemplo se puede representar usando los diagramas de Venn-Euler como se muestra en la figura 1.3

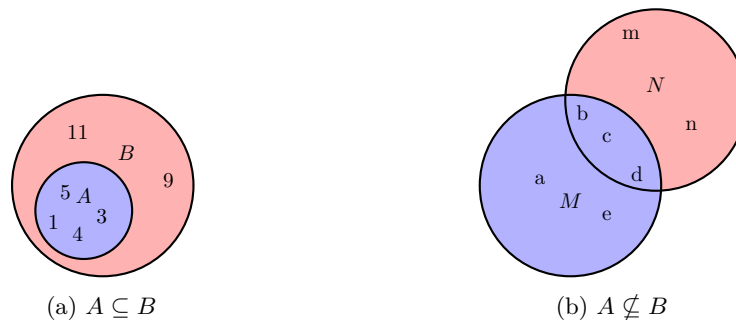
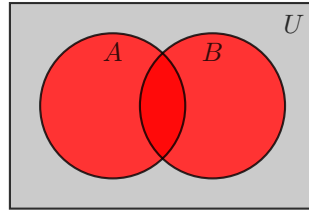
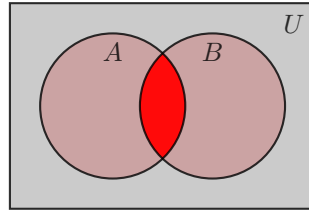


Figura 1.3: Ejemplo 1.5.1

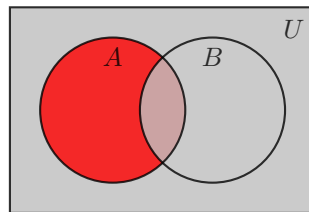
Unión de conjuntos Sean $A, B \subseteq U$ el conjunto $A \cup B$ se representa



Sean $A, B \subseteq U$ el conjunto $A \cap B$ se representa



Sean $A, B \subseteq U$ el conjunto $A - B$ se representa



Problemas 1.6

- Demuestra que si A es un conjunto, la colección de todos los objetos que no son elementos de A no es un conjunto.
- $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.
- Si $A \cup B \subset C$, entonces $A \setminus B = A \cap (C \setminus B)$.
- $A \subset B$ si y sólo si para todo conjunto E , $E \setminus B \subset E \setminus A$.
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
- Muestra por medio de ejemplos que las siguientes proposiciones son falsas:
 - $A \setminus B = B \setminus A$.
 - Si $A \subset B \cup C$ entonces $A \subset B$ o $A \subset C$.
- Definimos la *diferencia simétrica* de A y B como el conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y lo denotamos por $A \triangle B$. Demuestra que:
 - $A \triangle \emptyset = A$.
 - $A \triangle B = \emptyset$ si y sólo si $A = B$.
 - Si $A \triangle B = A \triangle C$, entonces $B = C$.
- $A \times B = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.
- $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$.
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- Usando las leyes de De Morgan y el ejercicio 4 enuncia y demuestra las igualdades duales de los siguientes enunciados:
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
- Muestra con un ejemplo que la igualdad en el ejercicio 14 no siempre se cumple.

Determinar por extensión los siguientes conjuntos

1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 3 \vee 5 < x < 7\}$
2. $B = \{y \in \mathbb{Z} : y = x^2 - 1 \wedge -1 < x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$
3. $C = \{y \in \mathbb{Z} : y = 3 - 5x \wedge -2 < x < 5 \wedge 3 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{Z}\}$

Determinar por comprensión el conjunto $T = \{-1, 1, 2\}$

Si $A = \{2, 3, 5, 7\}$, indica cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas

1. $5 \in A$
2. $3 \subset A$
3. $\{7\} \subset A$
4. $\{3, 5\} \in A$

Si $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2 \vee x = 7\}$, hallar todos los subconjuntos propios de A .

Dados los siguientes conjuntos

$$A = \{y \in \mathbb{Z} : y = 7x + 2 \wedge x \in \mathbb{Z}\},$$

$$B = \{y \in \mathbb{Z} : y = 7x - 26 \wedge x \in \mathbb{Z}\},$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} : y = 4x + 1 \wedge x \in \mathbb{Z}\} \text{ y}$$

$D = \{y \in \mathbb{Z} : y = 2x + 1 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$, analizar y justificar debidamente su conclusión en cada caso:

1. $A = B$
2. $C = D$
3. $C \subset D$
4. $A \cup B = A$
5. $C \cap D = \{\}$

Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5\}$. Al hallar un subconjunto X de U tal que $X \subset C$, $x \notin A$, $X \not\subset B$, cuántas soluciones existen.

Cuántos de los siguientes conjuntos son vacíos:

1. $A = \{x \in U : x \notin U\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{Z} : y = x^3 = 3, y \in \mathbb{Z}\}$
3. $C = \{y \in \mathbb{R} : y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{Z}\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 1 = 2\}$

Si A , B y C son conjuntos tal que $A \subseteq B \subseteq C$ ¿Cuál es la relación entre $C - B$ y $C - A$?

Si A , B , C y D son conjuntos. Demostrar las siguientes propiedades

1. Si $A \subseteq U$, $A \cup U = U$
2. $B \subseteq A \cup B$
3. Si $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$
4. $A \cap B \subseteq B$
5. Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$

$$6. \text{ Si } A \subseteq U, A \cap U = A$$

$$7. \text{ Si } A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \subseteq C, \forall C$$

$$8. A - A = \emptyset$$

$$9. \emptyset - A = \emptyset$$

$$10. A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$11. A - \emptyset = A$$

$$12. A - B \neq B - A$$

$$13. (A - B) \subseteq A$$

$$14. \text{ Si } A \subseteq B \Rightarrow A - C \subseteq B - C, \forall C$$

$$15. \text{ Si } A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

$$16. B \cap (A - B) = \emptyset$$

$$17. \text{ Si } A \text{ y } B \text{ son disjuntos, entonces } A \cap B = \emptyset$$

Si A , B y C son conjuntos y U el conjunto definido en 1.6.4 demostrar las siguientes propiedades

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \cap A^c = \emptyset$
3. Si $A \subseteq U$, entonces $A \cup A_U^c = U$
4. Si $A \subseteq B$, entonces $B^c \subseteq A^c$
5. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
6. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
7. $A \Delta A = \emptyset$
8. $A \Delta \emptyset = A$
9. $A \Delta B = B \Delta A$
10. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
11. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$
12. $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
13. $\emptyset_r^c = U$
14. $U^c = \emptyset_r$

Dados los conjuntos $A = \{a, c, d\}$, $B = \{e, f, g\}$ y $C = \{l, e, j, k\}$, hallar $A \cup (B \cap C)$.

Si $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A \cup B = \{a, c\}$ y $A - B = \{b\}$. Hallar A y B .

Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es divisor de } 12\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es divisor de } 18\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es divisor de } 16\}$. Hallar

1. $(A - B) \cap (B - C)$
2. $(A - B) \cup (B - C)$

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 5, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 9\}$, $C = \{1, 3, 5, 6, 8\}$ y $U = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$. Hallar

1. $[(A \cup B) - (A \cap C)]^c$

2. $[(A \cap B) - (A \cup B)]^c$
3. $[(A - B) \cup (A - C)]^c$
4. $[(A^c - B) \cap (A - C)]^c$
5. $[(C - B^c) - (A^c \cup C)]^c$
6. $(A^c - B^c) \triangle (B^c \cup C)^c$.

Utilice el diagrama de Venn-Euler para demostrar las siguientes propiedades

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$
6. $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$
7. $A - B = A \cap B^c$
8. $A \subseteq A \cup B$.

Utilice el diagrama de Venn-Euler para demostrar las siguientes propiedades

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$
6. $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$
7. $A - B = A \cap B^c$
8. $A \subseteq A \cup B$.

Utilice el diagrama de Venn-Euler para demostrar las siguientes propiedades

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$
6. $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$
7. $A - B = A \cap B^c$
8. $A \subseteq A \cup B$.

Utilice las tablas de verdad para demostrar las siguientes propiedades

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$
6. $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$
7. $A - B = A \cap B^c$
8. $A \subseteq A \cup B$.

Utilice las leyes de inferencia para simplificar las siguientes proposiciones:

1. $A \cup \emptyset$
2. $A \cap U$
3. $A \cap \emptyset$
4. $A \cap A^c$
5. $(A^c)^c$
6. $(A - B)^c$

Pruebe: $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$

Sean A y B dos conjuntos no comparables. Hacer el diagrama lineal de A , B , $A \cap B$, $A \cup B$ y el vacío.