

# Defensa de Tesis para Optar el Título de Magister



Director:

Dr: Jorge Rodríguez  
jorge.jrodri@gmail.com  
Universidad del Atlántico



Candidato:

Angélica Arroyo  
angelicarroyo1020@gmail.com  
Universidad del Atlántico

## Acotación de Soluciones e Integrales de Darboux en un Sistema Particular del Circuito de Chua

## Introducción

## Función de Lyapunov

Punto de Equilibrio

Construcción de la Función de Lyapunov

## Sólido Invariante

## Integrales de Darboux

## Conclusiones y Trabajos Futuros

## Referencias Bibliograficas



## Sección 1 | Introducción



El **Circuito de Chua** es un circuito electrónico simple que exhibe el comportamiento caótico clásico. Fue introducido en 1983 por Leon Ong Chua. A causa de la facilidad de construcción del circuito, se ha convertido en un ejemplo común de un sistema caótico, y algunos lo han declarado “un paradigma de caos”.



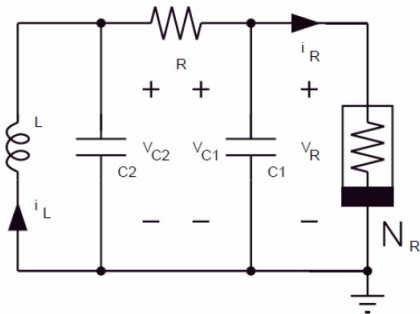


Figura: Circuito de Chua



El Circuito de Chua, es analizado por ser una red eléctrica simple que exhibe una variedad de fenómenos de bifurcaciones y atractores.

Al aplicar las leyes de Kirchhoff al Circuito de Chua de la figura anterior, y teniendo en cuenta las variables señaladas en el esquema, se obtienen las siguientes ecuaciones que describen su comportamiento:

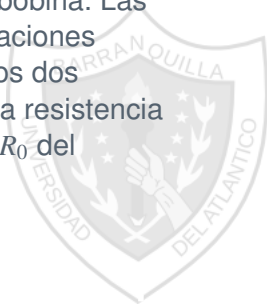
$$C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{R_0} (V_{C_2} - V_{C_1}) - i_R \quad (1)$$

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{1}{R_0} (V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L \quad (2)$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -V_{C_2} \quad (3)$$



Donde  $i_R$  es la función de respuesta del elemento no lineal. Las variables que surgen en las ecuaciones son la tensión  $V_{C_1}$  que aparecen en bornes del condensador de la derecha, la tensión  $V_{C_2}$  que aparecen en bornes del condensador izquierdo e  $i_L$  que se trata de la intensidad que circula por la bobina. Las constantes que aparecen en el sistema de ecuaciones diferenciales son las capacitancias  $C_1$  y  $C_2$  de los dos condensadores, la inductancia  $L$  de la bobina, la resistencia interna  $r_0$  de la bobina y la resistencia variable  $R_0$  del potenciómetro.



El Circuito de Chua puede ser modelado a través de un sistema de tres ecuaciones lineales diferenciales con las variables  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  que representan las tensiones en los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , y la intensidad de la corriente eléctrica en la bobina, respectivamente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases} \quad (4)$$



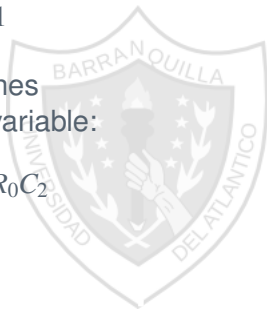


Donde la función de transferencia  $h(x)$  esta dada por:

$$h(x) = \begin{cases} bx + c - b & \text{si } x \geq 1 \\ cx & \text{si } |x| < 1 \\ bx - c + b & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

La forma en el espacio del sistema de ecuaciones diferenciales; se obtienen con los cambios de variable:

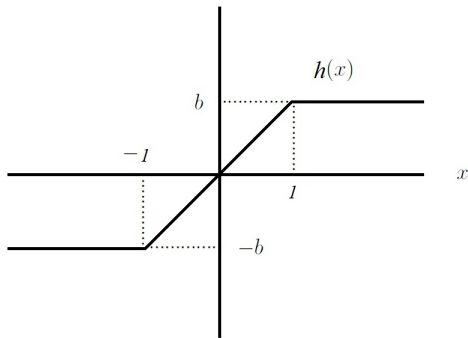
$$x = \frac{V_{C1}}{B_P}; \quad y = \frac{V_{C2}}{B_P}; \quad z = \frac{R_0 i_L}{B_P}; \quad \tau = t R_0 C_2$$



En este trabajo se presenta un estudio de los fenómenos críticos de un caso particular del Circuito de Chua, el caso en donde la función de transferencia  $h(x)$  esta dada por:

$$h(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \geq 1 \\ cx & \text{si } |x| < 1 \\ -b & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$





**Figura:** Función de transferencia



En este trabajo:

- ▶ Se construye una función de Lyapunov para este sistema con la que se demuestra que el único punto de equilibrio es asintóticamente estable.
- ▶ Se construye una superficie esférica en  $\mathbb{R}^3$  positivamente invariante que encierra al punto crítico y que tiene la propiedad de que cada recta dirigida desde el origen de coordenadas a la superficie la interseca en uno y solo un punto, tal que toda trayectoria del sistema autónomo la cruza hacia el interior, para  $t$  suficientemente grande.
- ▶ Se estudia la integrabilidad del sistema, calculando la integral primera racional generalizada y demostrando que ésta es única.

## Sección 2 | Función de Lyapunov



En esta parte caracterizamos el comportamiento cualitativo del sistema de ecuaciones diferenciales no lineal:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$$

donde  $h(x)$  esta dada por:

$$h(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \geq 1 \\ cx & \text{si } |x| < 1 \\ -b & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$



la función  $h$  es de Lipschitz,  $h'$  existe y es continua en un entorno de 0 y  $h'(0) = c > 0$ ,  $xh(x) > 0$  si  $x \neq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ .

El Sistema de Ecuaciones Diferenciales anterior presenta un único punto de equilibrio en  $(0,0,0)$  esto es,

$$\frac{dz}{d\tau} = 0 \implies -\beta y = 0 \implies y = 0$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 0 \implies x - y + z = 0 \implies x + z = 0 \implies x = -z$$

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \implies -\alpha(y - h(x)) = 0 \implies y - h(x) = 0 \implies h(x) = y \implies h(x) = 0$$



Se puede observar en la función que  $h(x) = 0$  si  $x = 0$ , luego  $(0,0,0)$  es el único punto de equilibrio que presenta el sistema.

## La parte Lineal en el Equilibrio

Para el estudio del punto singular linealizamos el sistema y obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha y - \alpha cx \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$$



La matriz Jacobiana evaluada en  $(0,0,0)$  es:



$$A = \begin{pmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Y el polinomio característico está dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha c + 1)\lambda^2 + (\alpha c - \alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta c = 0 \quad (7)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  son las raíces del polinomio característico (7), las cuales satisfacen:

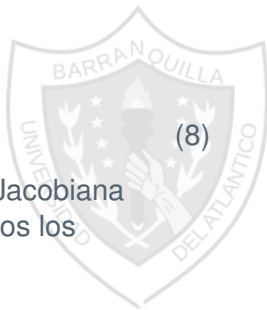
$$\begin{cases} A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = -(\alpha c + 1) \\ A_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 & = \alpha(c - 1) + \beta \\ A_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = -\alpha\beta c \end{cases}$$

Donde  $A_2$  representa la traza de la matriz Jacobiana,  $A_1$  la suma de los menores diagonales de segundo orden y  $A_0$  el determinante de la matriz. Además, estableciendo el que el

parámetro  $\alpha$  cumpla la siguiente condición:

$$\alpha c + \beta > \alpha$$

Se puede ver que los autovalores de la matriz Jacobiana presentan algunas propiedades cuando variamos los parámetros  $c$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  positivos:



a) Sean  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 = \sigma + i\omega$ ,  $\lambda_3 = \sigma - i\omega$  raíces del polinomio característico, entonces:

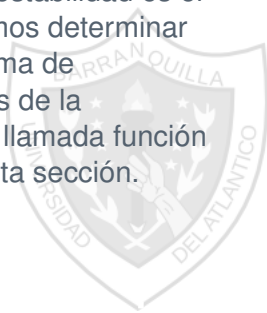
- ▶  $\sigma > 0 \iff (\alpha c + 1)(\alpha c - \alpha + \beta) < \alpha \beta c$
- ▶  $\sigma < 0 \iff (\alpha c + 1)(\alpha c - \alpha + \beta) > \alpha \beta c$
- ▶  $\sigma = 0 \iff (\alpha c + 1)(\alpha c - \alpha + \beta) = \alpha \beta c$

b) Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  raíces reales, entonces  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son negativas y  $(\alpha c + 1)(\alpha c - \alpha + \beta) > \alpha \beta c$



La determinación de la estabilidad global asintótica en los puntos de equilibrio de un sistema diferencial ordinario no lineal tiene una importancia especial.

Un método útil para trabajar este problema de estabilidad es el método directo de Lyapunov, con el cual podemos determinar la estabilidad asintótica global de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales de 3 variables a través de la construcción y estudio de una función positiva, llamada función de Lyapunov, éste es el objetivo principal en esta sección.



El método de construcción que se empleó es una adaptación de Rodríguez [2] y del teorema de Lyapunov que establece la correspondencia entre cada forma cuadrática definida positiva  $U(x, y, z)$  y una forma cuadrática positiva  $V(x, y, z)$  tal que:

$$\dot{V} = -U$$

Empezamos con la parte lineal del sistema de ecuaciones, el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha y - \alpha cx \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$$



Donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $c$  son constantes que satisfacen las siguientes condiciones:

$$(\alpha c + 1) > 0 \quad (\alpha c + 1)(\alpha c - \alpha + \beta) > \alpha \beta c > 0 \quad (9)$$

De la ecuación (9) existe una constante  $\kappa$  tal que:

$$\frac{1}{(\alpha c + 1)} < \kappa < \frac{\alpha c - \alpha + \beta}{\alpha \beta c} \quad (10)$$

Ahora, sea  $V$  una función definida positiva dada por:

$$V = \kappa_1 (Ax + By)^2 + \kappa_2 (Dy + Ez)^2 + \kappa_3 y^2 \quad (11)$$

Donde  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, A, B, D, E$  son constantes positivas, busquemos las constantes de manera que:

$$\dot{V} = -U = -(\alpha c - \alpha + \beta - \kappa \alpha \beta c)x^2 - (\kappa(\alpha c + 1) - 1)z^2 \quad (12)$$

Se puede verificar que  $\dot{V}$  es negativa, ya que por (10), se tiene:

$$\alpha c - \alpha + \beta > \kappa \alpha \beta c \quad \text{y} \quad \kappa(\alpha c + 1) > 1$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (2\kappa_1 AB - 2\kappa_1 A^2 \alpha c)x^2 + (2\kappa_1 A^2 \alpha - 2\kappa_1 AB - 2\kappa_1 AB \alpha c + 2\kappa_1 B^2 \\ & + 2\kappa_2 D^2 + 2\kappa_3)xy + (2\kappa_1 AB + 2\kappa_2 ED)xz + (2\kappa_1 AB \alpha - 2\kappa_1 B^2 \\ & - 2\kappa_2 D^2 - 2\kappa_2 ED \beta - 2\kappa_3)y^2 + (2\kappa_1 B^2 + 2\kappa_2 D^2 - 2\kappa_2 E^2 \beta \\ & - 2\kappa_2 ED + 2\kappa_3)yz + 2\kappa_2 EDz^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Entonces, de las ecuaciones (12) y (13) obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2\kappa_1 AB - 2\kappa_1 A^2 \alpha c = -(\alpha c - \alpha + \beta - \kappa \alpha \beta c) \\ \kappa_1 A^2 \alpha - \kappa_1 AB - \kappa_1 AB \alpha c + \kappa_1 B^2 + \kappa_2 D^2 + \kappa_3 = 0 \\ \kappa_1 AB + \kappa_2 ED = 0 \\ \kappa_1 AB \alpha - \kappa_1 B^2 - \kappa_2 D^2 - \kappa_2 ED \beta - \kappa_3 = 0 \\ \kappa_1 B^2 + \kappa_2 D^2 - \kappa_2 E^2 \beta - \kappa_2 ED + \kappa_3 = 0 \\ 2\kappa_2 ED = -(\kappa(\alpha c + 1) - 1) \end{cases}$$





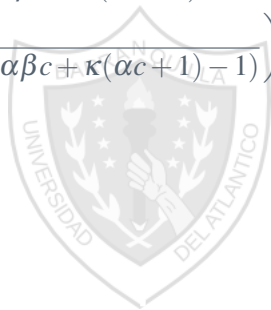
Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos que:

$$2\kappa_1 = \frac{1}{\alpha c} \quad 2\kappa_2 = \frac{1}{\beta c}$$

$$2\kappa_3 = (\alpha + \beta)(\kappa(\alpha c + 1) - 1) - \left( \frac{\alpha c}{\alpha c - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta c + \kappa(\alpha c + 1) - 1} + \frac{\beta c}{c(2 + \alpha c)(\kappa(\alpha c + 1) - 1) - (\alpha c - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta c + \kappa(\alpha c + 1) - 1)} \right)$$

$$A = \sqrt{\alpha c - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta c + \kappa(\alpha c + 1) - 1}$$

$$B = \frac{\alpha c(\kappa(\alpha c + 1) - 1)}{\sqrt{\alpha c - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta c + \kappa(\alpha c + 1) - 1}}$$



Por lo tanto,  $V$  para el sistema lineal asociado al sistema (??) es:

$$2V = \frac{1}{\alpha c} \left( \sqrt{\gamma + \eta} x + \frac{\alpha c \eta}{\sqrt{\gamma + \eta}} y \right)^2 + \frac{1}{\beta c} \left( \sqrt{c(2 + \alpha c)\eta - (\gamma + \eta)} z - \frac{1}{\sqrt{c(2 + \alpha c)\eta - (\gamma + \eta)}} \right. \\ \left. + (\alpha + \beta)\eta - \left( \frac{\alpha c}{\gamma + \eta} + \frac{\beta c}{c(2 + \alpha c)\eta - (\gamma + \eta)} \eta^2 \right) y^2 \right)$$

Donde:

$$\eta = \kappa(\alpha c + 1) - 1$$

$$\gamma = \alpha c - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta c$$



## Construcción para la parte No Lineal del Sistema

Desarrollando las expresiones de  $V$  tenemos:

$$V = \frac{1}{2\alpha c}(\gamma + \eta)x^2 + \eta xy + \frac{1}{2}Ay^2 - \eta zy + \frac{\Psi}{\beta c}z^2.$$

Con  $A = \left( \frac{\alpha c \eta^2}{\gamma + \eta} + \frac{\beta c \eta^2}{\Psi} + (\alpha + \beta)\eta - \frac{\alpha c}{\gamma + \eta} - \frac{\beta c}{\Psi} \eta^2 \right)$

$$V = \frac{\gamma + \eta}{2\eta \alpha c} \int_0^x 2\eta x dx + 2\eta xy + Ay^2 - 2\eta zy + \frac{\Psi}{\beta c}z^2$$

Donde:

$$\Psi = c(2 + \alpha c)\eta - (\gamma + \eta) \neq 0$$



Por analogía y tomando  $h(x) = 2\eta x$ , obtenemos la función de Lyapunov para la parte no lineal del sistema:

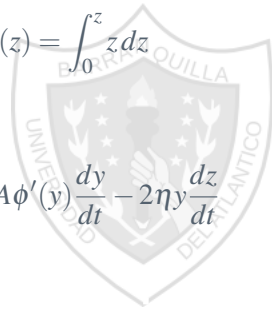
$$V(x, y, z) = \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha c} H(x) + h(x)y + A\phi(y) - 2\eta zy + \frac{\Psi}{\beta c} \varphi(z) \quad (14)$$

Donde:

$$H(x) = \int_0^x h(x) dx \quad \phi(y) = \int_0^y y dy \quad \varphi(z) = \int_0^z z dz$$

Luego, para  $x \geq 0$  y  $y > 0$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) = & \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha c} H'(x) \frac{dx}{dt} + h'(x)y \frac{dx}{dt} + h(x) \frac{dy}{dt} + A\phi'(y) \frac{dy}{dt} - 2\eta y \frac{dz}{dt} \\ & - 2\eta z \frac{dy}{dt} + \frac{\Psi}{\beta c} \varphi'(z) \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$



**N**  $H'(x) = h(x)$  cuando  $x \geq 0$  y  $H'(x) = -h(x)$  cuando  $x \leq 0$

Entonces,  $\dot{V}$  para  $h(x) = -b$  es igual a  $\dot{V}$  para  $h(x) = b$ , es decir, debemos analizar si  $\dot{V} < 0$  para  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  en:

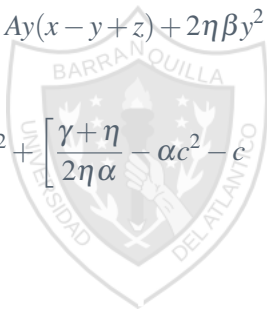
- 1)  $h(x) = b$  o  $h(x) = -b$
- 2)  $h(x) = cx$ , cuando  $x \geq 0$
- 3)  $h(x) = cx$ , cuando  $x \leq 0$



$\dot{V} < 0$  para  $h(x)$  de 1, y, 2 y 3 son análogas porque cuando  $x < 0$ ,  $-h(x) > 0$ , así que basta con probar para uno de los dos que  $\dot{V} < 0$ .

Luego, si  $x \geq 0$ ,  $h(x) = cx$ :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha}x[y - cx] + cy[\alpha y - \alpha cx] + cx[x - y + z] + Ay(x - y + z) + 2\eta\beta y^2 \\ &\quad - 2\eta z(x - y + z) - \beta yz \\ &= \left(-\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha}c + c\right)x^2 + (c\alpha - A + 2\eta\beta)y^2 - 2\eta z^2 + \left[\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} - \alpha c^2 - c\right. \\ &\quad \left.+ Axy + [c - 2\eta]xz + [A + 2\eta - \beta]yz\right]\end{aligned}$$



Así,  $\dot{V} < 0$  bajo las condiciones:

$$-\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} + 1 < 0, \text{ pues } c > 0$$

$$\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} + 1 < 0$$

$$\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} - \alpha c^2 - c + A < 0$$

$$c - 2\eta = 0$$

$$A + 2\eta - \beta = 0$$







## Sección 3 | Sólido Invariante

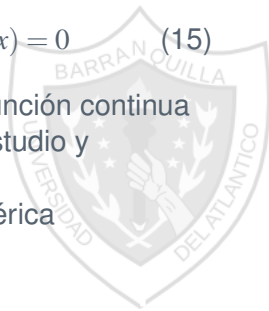


Existen varios autores que han tratado sobre la estabilidad de la solución nula y la existencia de soluciones periódicas en una ecuación diferencial de orden superior, algunos de ellos son: Ezeilo, Pliss, McCarthy, Violet Haas , Rolf Reissig. En esta parte consideramos la ecuación autónoma:

$$\ddot{x} + (c\alpha + 1)\ddot{x} + [\alpha(c - 1) + \beta]\dot{x} + \beta h(x) = 0 \quad (15)$$

Donde  $\alpha, \beta$  son constantes positivas,  $h$  es la función continua de nuestro sistema de ecuaciones objeto de estudio y  $-\sqrt{\gamma + \eta} < c < \sqrt{\gamma + \eta}$ .

Aquí, mostramos que existe una superficie esférica positivamente invariante.



Diremos que una superficie en  $E_3$  tiene la propiedad  $\mathbf{P}_1$  si es acotada y cada recta dirigida desde el origen de coordenadas a la superficie en  $E_3$  la interseca en uno y solo un punto.

## Teorema 3.0

Suponga que  $b > 0$ ,  $h$  Lipschitz, no decreciente, con derivada continua en 0 y  $h'(0) = c > 0$ , Existe un  $C > 0$  tal que para toda  $x$   $|h(x)| < C$  y  $\frac{|h(x)|}{|x|} < C$  para  $0 < |x| < 1$ .

Entonces, existe una superficie esférica  $S$  en el espacio que cumple la propiedad  $\mathbf{P}_1$  y tal que toda trayectoria del sistema autónomo la cruza hacia el interior, para  $t$  suficientemente grande.

## La Función $\Gamma(\lambda, \kappa)$

La prueba del teorema es directamente la construcción de la superficie  $S$ .

Estamos buscando superficies de la forma:

$$\Gamma(\lambda, \kappa) \equiv V(x, y, z) + \lambda(z + ay + bx) - \kappa = 0 \quad (16)$$

donde  $\lambda$  y  $\kappa$  son constantes finitas.



## Técnicas de Construcción

El principal objetivo en esta parte del trabajo era proporcionar una estructura para la construcción de funciones definidas positivas. La discusión está en el contexto de la ecuación particular bajo estudio. De esta manera podemos construir la superficie.

**Lema 3.1** Sean las constantes  $\gamma, \eta, \alpha, c$  definidas en el capítulo 2, la Función  $F(x, y) = \frac{\gamma + \eta}{\eta \alpha c} H(x) + 2h(x)y + 2\eta \alpha y^2$  está definida positivamente en un entorno cerca de cero.

## Demostración

**Demostración** Hallemos primero los puntos críticos de  $F(x, y)$ , calculando sus derivadas parciales e igualando a cero:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\gamma + \eta}{\eta \alpha c} h(x) + 2cy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2h(x) + 4\eta \alpha y$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

**Luego,**

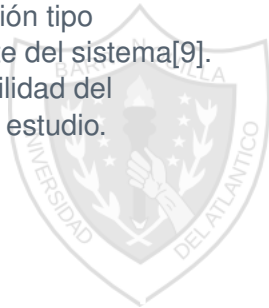
$$\frac{\gamma + \eta}{\eta \alpha c} h(x) + 2cy = 0 \quad (17)$$

$$2h(x) + 4\eta \alpha y = 0 \quad (18)$$

## Sección 4 | Integrales de Darboux



El Método de Darboux es un método para construir integrales primeras de campos vectoriales polinomiales utilizando sus curvas invariantes algebraicas [9]. Ésto a través de la construcción de una función (denominada función tipo Darboux) que juega el papel de factor integrante del sistema[9]. En esta parte del trabajo se estudió la integrabilidad del sistema de Ecuaciones Diferenciales objeto de estudio.

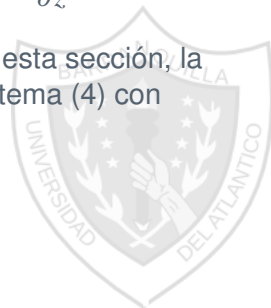




Se define el espacio de vectores  $\mathbb{X}$  asociado a (4) como:

$$\mathbb{X} = [\alpha(y - h(x))]\frac{\partial}{\partial x} + (x - y + z)\frac{\partial}{\partial y} - \beta y\frac{\partial}{\partial z}$$

Lo que sigue es nuestro resultado principal en esta sección, la Integral Primera Racional Generalizada del sistema (4) con  $\beta > 0$



## Teorema 4.0

La única integral primera racional generalizada del sistema (4) se calcula teniendo en cuenta:

i) Si  $\beta < 1/4$ , es la función:

$$|z+x| \left[ \frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right]^{\left( \frac{\beta}{r_1 - r_2} \right)}$$

Donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces reales distintas de  $\beta s^2 - s + 1$ .

ii) Si  $\beta = 1/4$ , es la función:

$$\left[ \frac{1}{\frac{y}{z+x} - r} \right]^{\beta} |z+x| \cdot E \left[ \frac{\beta r}{\frac{y}{z+x} - r} \right]$$

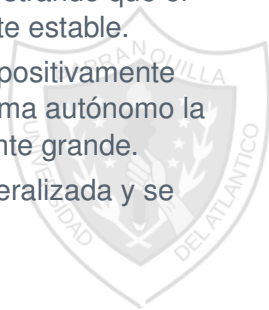


## Sección 5 | Conclusiones y Trabajos Futuros



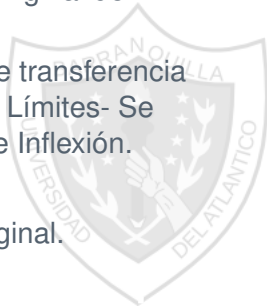
En este trabajo se presentó un estudio de los fenómenos críticos de un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento del Circuito de Chua:

- ▶ Se construye una función de Lyapunov mostrando que el único punto de equilibrio es asintóticamente estable.
- ▶ Se construye una superficie esférica en  $\mathbb{R}^3$  positivamente invariante tal que toda trayectoria del sistema autónomo la cruza hacia el interior, para  $t$  suficientemente grande.
- ▶ Se calcula la integral primera racional generalizada y se demuestra que es única.



En trabajos futuros se quiere:

- ▶ Mostrar la existencia de ciclos límites del sistema de estudio.
- ▶ Al Perturbar el caso particular en el ángulo de inclinación de la función de transferencia = Sistema Original del Circuito de Chua.
- ▶ Demostrar que el sistema con la función de transferencia propia del circuito de Chua, no tiene ciclos Límites- Se piensa que hay rompimiento en el punto de Inflexión.
- ▶ Estudiar Numéricamente el Sistema.
- ▶ Integrales de Darboux para el Sistema Original.



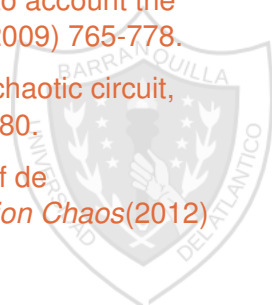
## Sección 6 | Referencias Bibliograficas



- [1] Lawrence Perko. Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics 7, Estados Unidos de América.
- [2] j. Rodríguez Contreras, J. Rodriguez Ripoll. Amortiguamiento de Soluciones Periódicas. Dpto de Matemáticas, Universidad del Atlántico. Agosto de 2010.
- [3] E.Vásquez, Existencia de Soluciones Periódicas en un Sistema diferencial No lineal en el Espacio. Trabajo de grado Pregrado. Universidad del Atlántico, Noviembre 2014.
- [4] J.Ginoux, C.Letellier and L.O. Chua, Topological analysis of chaotic solution of a three-element memristive circuit, *Int.J.Bifurcation Chaos* **20** (2010) 3819-3827.



- [5] J.Llibre and X.Zhang, Darboux theory of the integrability in  $\mathbb{C}^n$  taking into account the multiplicity, *J. Differential Equations* **246** (2009) 541-551.
- [6] J.Llibre and X.Zhang, Darboux theory of the integrability for polynomial vector fields in  $\mathbb{R}^n$  taking into account the multiplicity at infinity, *Bull. Sci. Math.* **133** (2009) 765-778.
- [7] B.Muthuswamy and L.O. Chua, Simplest chaotic circuit, *Int.J.Bifurcation Chaos* **20** (2010) 1567-1580.
- [8] J.Llibre and C. Valls, On the integrability of de Muthuswamy-Chua System, *Int.J.Bifurcation Chaos* (2012) 477-488.





- [9] C. Pantazi, El Método de Darboux, *Notas del primer Seminario de Integrabilidad de la Universitat de Catalunya*(Marzo 2005) 61-72.

