



# Diseños óptimos en la presencia de efectos de bloques aleatorios

Eddie Edinson Rodríguez Bossio

Tesis De Maestría

Barranquilla, Febrero 2016



# **Diseños óptimos en la presencia de efectos de bloques aleatorios**

**Eddie Edinson Rodríguez Bossio**

Trabajo de Maestría

**Barranquilla, Febrero 2016**



## **Diseños Óptimos En La Presencia De Efectos De Bloques Aleatorios**

**Trabo Especial de Grado Presentado a la Universidad del Atlántico por**

**Eddie Edinson Rodriguez Bossio**

**Trabajo de grado presentado para optar al grado de**

**Magister en Ciencias Matemática**

**Este trabajo de investigación ha sido realizada bajo la dirección de  
Dr. rer. nat. Jesús Alonso Cabrera <sup>†</sup>**

**<sup>†</sup> Departamento de Matemática,  
Universidad del Norte (UN)**

---

**Barranquilla, Febrero 2016**





**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO**

**PROGRAMA DE MATEMÁTICAS**

## **MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS**

### **Diseños Óptimos En La Presencia De Efectos De Bloques Aleatorios**

**Estudiante: Eddie Rodriguez Bossio**

**Código: 72231783**

**Este Trabajo Especial de Grado ha sido aprobado en nombre de la Universidad del Atlántico por el siguiente jurado examinador:**

---

**Dr. Julio Cesar Romero Pabón**  
**Universidad del Atlántico - Colombia**

---

**M.Sc. Alejandro Sanchez Salazar**  
**Universidad del Atlántico - Colombia**

---

**Dr. rer. nat. Jesús Alonso Cabrera**  
**Tutor**

**Diciembre 2015**

## Agradecimientos

**E**n primer lugar doy gracias a Dios dador de la vida y oportunidades; quien puso en mi camino a personas e instituciones que fueron piezas claves para este logro en mi vida. Ellos son mi familia, mi tutor de tesis Dr. rer. nat. Jesús Alonso Cabrera por compartir sus conocimientos y consejos, Dr. Jorge Rodriguez, Dr. Alejandro Urieles, profesores de la maestría, compañeros de estudio y las instituciones de la Universidad del Atlántico donde cursé mi pregrado y maestría, y la Universidad del Norte donde realicé mi especialización en matemáticas y se llevaron a cabo las asesorías de este trabajo de grado, ya que mi asesor es docente de planta de esta alma mater.

Eddie Rodriguez



## Contenido





**A**l interior de los experimentos estadísticos la teoría de los diseños óptimos ha sido desarrollada. En general el tema de esta teoría es que para un apropiado modelo, si queremos poner énfasis sobre una cualidad particular de los parámetros a estimar, entonces la configuración experimental debería ser elegida de acuerdo a ciertos criterios con sentido estadístico. En la literatura relacionada con los diseños óptimos, un prominente autor fue Kiefer (1959), el cuál presentó los principales conceptos, tales como diseños aproximados y una variedad de criterios de óptimalidad para esta rama de los diseños de experimentos; Kiefer, en particular dio el nombre  $D$ —óptimalidad al criterio introducido por Wald (1943), este criterio es el más comunmente aplicado y está definido en función del determinante de la matriz de covarianza.

Más recientemente son reconocidos los libros de Atkinson y Donev (1992) y Pukelsheim (1993), donde los autores hacen una presentación estadística formal de los diseños óptimos. El presente trabajo se ha organizado en tres capítulos: el capítulo uno (Preliminares) contiene conceptos generales que sirven de apoyo y base a la teoría que se desarrolla en los siguientes dos capítulos. El capítulo dos trata sobre diseños óptimos en la presencia de efectos de bloques aleatorios, y en el capítulo tres se daran a conocer las conclusiones y una serie de problemas abiertos para futuras investigaciones relacionadas con el tema central de este trabajo de investigación.



# PARTE I

## Preliminares



## Preliminares

**E**n el área de diseños de experimentos existen, principalmente, dos enfoques competitivos: uno basado en el análisis combinatorio más ajustado para modelos estadísticos de análisis de varianza y el otro enfoque basado en métodos analíticos que envuelve el análisis convexo, el cual se aplica, por ejemplo, a superficies de respuesta. Una concisa introducción a este último enfoque es dado en la breve monografía por Silvey (1980).

Mientras para modelos en la presencia de efectos fijos se han encontrado diseños óptimos para una gran variedad de casos (Schwabe, 2003) si los efectos de bloques se asumen que provienen de procesos aleatorios, aparecen dificultades adicionales. Un primer simple ejemplo de polinomios de regresión en la presencia de efectos de factores aleatorios discretos ha sido considerado en los pioneros artículos de Cheng (1995) y Atkins y Cheng (1999). Goos (2000) extendió este resultado a varias estructuras de bloque y obtuvo soluciones numéricas. A continuación presentaremos los conceptos básicos de la teoría de diseños de experimentos.

### 1.1 La ecuación de regresión

La siguiente ecuación es básica en la teoría de regresión:

$$Y_j = \eta(x_j, \theta) + \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.1.1)$$

donde  $Y_1, \dots, Y_N$  son resultados experimentales,  $\eta(x, \theta)$  es una función dada con vector de parámetros desconocidos  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^\top$ ,  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$  corresponden al error de observación y  $x_1, \dots, x_N$  son condiciones experimentales, que pertenecen a un conjunto compacto  $\mathcal{X}$  usualmente llamado la región de diseño.

Los casos para representar los resultados de los experimentos reales en la forma (1.1) se ha demostrado en muchos ejemplos, ver Rao (1973), Federow (1972), y Pukelsheim (1993).

Recordemos algunos supuestos básicos del modelo clásico de regresión.

- (a) **Insesgamiento:**  $E(\epsilon_j) = 0$ ; ( $j = 1, \dots, N$ ). Esto significa que  $E(Y_j) = \eta(x_j, \theta)$  (es decir, el modelo está libre de un error sistemático).
- (b) **Incorrelación:**  $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$ ; ( $i \neq j$ ).
- (c) **Homogeneidad de varianza:**  $E(\epsilon_j^2) \equiv \sigma^2 > 0$ ; ( $j = 1, \dots, N$ ).
- (d) **La linealidad de parametrización:**  $\eta(x, \theta) = f(x)^\top \theta$ , donde  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^\top$ ,  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , son funciones básicas y conocidas.

Como es habitual en la teoría estadística, estos supuestos proporcionan resultados observables a obtener y corresponden en cierta medida a las características de experimentos reales.

El propósito principal de un experimento es estimar un vector de parámetros desconocidos, o probar una hipótesis sobre los valores de los parámetros. Aquí, la exactitud de conclusiones estadísticas depende tanto del método de la inferencia estadística y en la elección de las condiciones experimentales.

Si (a) - (b) se asumen, entonces la técnica de mínimos cuadrados, proporciona valoración del vector  $\theta$  de parámetros bajo cualesquiera condiciones experimentales fijas.

## 1.2 Estimación de mínimos cuadrados

La paternidad de este método se reparte entre Legendre que lo publicó en 1805 y Gauss que lo utilizó en 1795 y lo publicó en 1809.

El método de mínimos cuadrados (MC) es utilizado para estimar los parámetros en el modelo de regresión lineal.

Por ejemplo, en el modelo de regresión lineal múltiple

$$\begin{aligned}
 Y_j &= \beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \cdots + \beta_k x_{jk} + \epsilon_j \\
 &= \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} + \epsilon_j, j = 1, \dots, N.
 \end{aligned}
 \tag{1.2.1}$$

Suponga que se tiene  $N > k$  observaciones. Se asume que  $E(\epsilon_j) = 0$  y  $\text{Var}(\epsilon_j) = \sigma^2$  y que los errores son independientes. El método de mínimos cuadrados minimiza la suma de cuadrados del error dada por

$$\begin{aligned}
 SSE &= \sum_{j=1}^N \epsilon_j^2 \\
 &= \sum_{j=1}^N \left( Y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{1.2.2}$$

con respecto a cada uno de los parámetros del modelo  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ .

La derivada con respecto a  $\beta_0$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial SSE}{\partial \beta_0} &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{j=1}^N \left( Y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right)^2 \\
&= -2 \sum_{j=1}^N \left( Y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right)
\end{aligned}
\tag{1.2.3}$$

**La derivada con respecto a  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) es**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial SSE}{\partial \beta_j} &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \sum_{j=1}^N \left( Y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right)^2 \\
&= -2 \sum_{j=1}^N \left( Y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right) x_{ji}
\end{aligned}
\tag{1.2.4}$$

**igualando a cero las derivadas, se tiene**

$$\frac{\partial SSE}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{j=1}^N \left( Y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right) = 0$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{j=1}^N \left( Y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right) x_{ji} = 0$$

**Simplificando para  $\beta_0$  se tiene**

$$\sum_{j=1}^N Y_j - \sum_{j=1}^N \beta_0 - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^N \beta_0 + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} = \sum_{j=1}^N Y_j$$

$$N\beta_0 + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} = \sum_{j=1}^N Y_j \quad (1.2.5)$$

$$N\beta_0 + \sum_{j=1}^N (\beta_1 x_{j1} + \beta_2 x_{j2} + \cdots + \beta_k x_{jk}) = \sum_{j=1}^N Y_j$$

$$N\beta_0 + \beta_1 \sum_{j=1}^N x_{j1} + \beta_2 \sum_{j=1}^N x_{j2} + \cdots + \beta_k \sum_{j=1}^N x_{jk} = \sum_{j=1}^N Y_j$$

**Simplificando para  $\beta_j$  se tiene**

$$\sum_{j=1}^N \left( Y_j - \beta_0 - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right) x_{ji} = 0$$

$$\left( \sum_{j=1}^N Y_j - \sum_{j=1}^N \beta_0 - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right) x_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^N Y_j x_{ji} - \beta_0 \sum_{j=1}^N x_{ji} - \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ji} \right) x_{ji} = 0$$

(1.2.6)

$$\sum_{j=1}^N Y_j x_{ji} - \beta_0 \sum_{j=1}^N x_{ji} - \sum_{j=1}^N (\beta_1 x_{j1} + \cdots + \beta_k x_{jk}) x_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^N Y_j x_{ji} - \beta_0 \sum_{j=1}^N x_{ji} - \left( \sum_{j=1}^N \beta_1 x_{j1} + \cdots + \beta_k \sum_{j=1}^N x_{jk} \right) x_{ji} = 0$$

$$\beta_0 \sum_{j=1}^N x_{ji} + \left( \sum_{j=1}^N \beta_1 x_{j1} + \cdots + \beta_k \sum_{j=1}^N x_{jk} \right) x_{ji} = \sum_{j=1}^N Y_j x_{ji}$$

Luego las ecuaciones normales son:

$$\begin{aligned}
 N\beta_0 + \beta_1 \sum_{j=1}^N x_{j1} + \cdots + \beta_k \sum_{j=1}^N x_{jk} &= \sum_{j=1}^N Y_j \\
 \beta_0 \sum_{j=1}^N x_{j1} + \beta_1 \sum_{j=1}^N x_{j1}^2 + \cdots + \beta_k \sum_{j=1}^N x_{jk}x_{j1} &= \sum_{j=1}^N Y_j x_{j1} \\
 \beta_0 \sum_{j=1}^N x_{j2} + \beta_1 \sum_{j=1}^N x_{j1}x_{j2} + \cdots + \beta_k \sum_{j=1}^N x_{jk}x_{j2} &= \sum_{j=1}^N Y_j x_{j2} \\
 &\vdots \\
 \beta_0 \sum_{j=1}^N x_{jk} + \beta_1 \sum_{j=1}^N x_{j1}x_{jk} + \cdots + \beta_k \sum_{j=1}^N x_{jk}^2 &= \sum_{j=1}^N Y_j x_{jk}
 \end{aligned}
 \tag{1.2.7}$$

Observe que hay  $p = k + 1$  ecuaciones. Para obtener la solución es conveniente utilizar notación matricial. En esta notación el modelo se expresa como

$$Y = X\beta + \epsilon$$

donde

$Y$  es el vector de observaciones

$X$  es una matriz  $n \times p$  de niveles de la variable

$\beta$  es un vector  $p \times 1$  de coeficientes de regresión

$\epsilon$  es el vector aleatorio error de orden  $p \times 1$

La suma de cuadrados del error es dada por

$$SSE = \sum_{j=1}^N \epsilon_j^2 = \epsilon' \epsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

Luego se obtiene que las ecuaciones normales son

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

Para solucionar las ecuaciones normales se requiere que exista la inversa de la matriz  $X'X$ . Esta existe siempre que las variables regresoras sean linealmente independientes. Así, la solución de mínimos cuadrados de vector paramétrico  $\beta$  es

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

**Ejemplo 1** Myers y Montgomery (1985) describen un experimento que trata con motores de turbina de gas. El voltaje de salida de los motores se midió en diversas combinaciones de velocidad de la cuchilla y extensión del sensor de medición de tensión. Los datos del experimento se dan en el Cuadro 1.1.

El propósito del experimento fue estimar un modelo cuadrático completo con el voltaje de salida como la variable dependiente y la velocidad de la cuchilla y extensión del sensor de medición de tensión como las variables explicativas.

### Variables codificadas

Es conveniente para la mayoría de aplicaciones describir el experimento en términos de variables codificadas, porque esto facilita la comparación de los diseños de diferentes experimen-

Corrida	Voltaje	Velocidad de la cuchilla (pulg/seg)	Extension (pulg)
1	1.23	5300	0.000
2	3.13	8300	0.000
3	1.22	5300	0.012
4	1.92	8300	0.012
5	2.02	6800	0.000
6	1.51	6800	0.012
7	1.32	5300	0.006
8	2.62	8300	0.006
9	1.65	6800	0.006
10	1.62	6800	0.006
11	1.59	6800	0.006

**Tabla 1.1** Experimento turbina de gas descrito por Myers y Montgomery (1995).

tos. Por lo tanto, se reajustarán las variables cuantitativas. Es característico de una variable  $u$  cuantitativa o continua que varía entre un valor mínimo y máximo,  $u_{\min}$  y  $u_{\max}$ . Por lo general, los niveles de los factores se reajustarán a estar entre  $-1$  y  $+1$ . Los valores codificados pueden ser calculados por

$$z = \frac{u - u_0}{\Delta}$$

donde  $u_0$  es el punto medio del intervalo  $[u_{\min}, u_{\max}]$  y  $\Delta$  es la mitad de la diferencia entre  $u_{\max}$  y  $u_{\min}$ . Para la interpretación de los resultados experimentales, sin embargo, es deseable para volver a los niveles de los factores originales. Para el experimento de turbina de gas, los niveles codificados se pueden obtener de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{\text{Velocidad de la cuchilla} - 6800}{1500}$$

y

$$x_2 = \frac{\text{Extension} - 0.006}{0.006}$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  representan los niveles codificados de los factores de velocidad de la cuchilla y extensión del sensor de medición de tensión, respectivamente. Los niveles codificados se muestran en el Cuadro 1.2. Vamos a utilizar esta forma de analizar los datos. Del Cuadro 1.2, es fácil ver que las corridas 9, 10 y 11 se llevan a cabo en el nivel medio de los factores experimentales.

Corrida	Voltaje	Velocidad de la cuchilla (pulg/seg)	Extension (pulg)
1	1.23	-1	-1
2	3.13	+1	-1
3	1.22	-1	+1
4	1.92	+1	+1
5	2.02	0	-1
6	1.51	0	+1
7	1.32	-1	0
8	2.62	+1	0
9	1.65	0	0
10	1.62	0	0
11	1.59	0	0

**Tabla 1.2** Forma codificada del experimento de turbinas de gas.

## Análisis

El propósito del experimento fue estimar un modelo cuadrático completo en las dos variables. Como resultado, la expansión polinómica

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1x_2 & x_1^2 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{\beta}^T = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_{12} & \beta_{11} & \beta_{22} \end{bmatrix},$$

de manera que  $p = 6$  y el modelo estadístico se pueden escribir como

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \epsilon.$$

**La matriz de diseño de todo el experimento viene dada por**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 1 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**la matriz  $X^T X$  es**

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

**y entonces  $(X^T X)^{-1}$  es**



$$\begin{pmatrix} 0.2632 & 0 & 0 & 0 & -0.1579 & -0.1579 \\ 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ -0.1579 & 0 & 0 & 0 & 0.3947 & -0.1053 \\ -0.1579 & 0 & 0 & 0 & -0.1053 & 0.3947 \end{pmatrix}$$

**El vector  $Y$  es**

$$Y = \begin{pmatrix} 1.23 \\ 3.13 \\ 1.22 \\ 1.92 \\ 2.02 \\ 1.51 \\ 1.32 \\ 2.62 \\ 1.65 \\ 1.62 \\ 1.59 \end{pmatrix}$$

**y el vector  $X^T Y$  es**

**el estimador de mínimos cuadrados de  $\beta$  es**

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

**o**

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} &= \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.2632 & 0 & 0 & 0 & -0.1579 & -0.1579 \\ 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ -0.1579 & 0 & 0 & 0 & 0.3947 & -0.1053 \\ -0.1579 & 0 & 0 & 0 & -0.1053 & 0.3947 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19.83 \\ 3.9 \\ -1.73 \\ -1.2 \\ 11.44 \\ 11.03 \end{pmatrix} \quad (1.2.8) \\
 &= \begin{pmatrix} 1.6705 \\ 0.6500 \\ -0.2883 \\ -0.3000 \\ 0.2237 \\ 0.0187 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**luego el modelo ajustado por mínimos cuadrados es**

$$\hat{Y} = 1.6706 + 0.6500x_1 - 0.2883x_2 - 0.3000x_1x_2 + 0.2237x_1^2 + 0.0187x_2^2 \quad (1.2.9)$$

## 1.3 Propiedades de los estimadores de mínimos cuadrados

(1)  $\hat{\beta}$  es un estimador insesgado de  $\beta$ . Esto es,  $E(\hat{\beta}) = \beta$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E[(X^T X)^{-1} X^T Y] \\ &= (X^T X)^{-1} X^T E(Y) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

y como  $E(Y) = X\beta$ , entonces

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= (X^T X)^{-1} X^T X\beta \\ &= \beta \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

(2) La matriz de varianzas y covarianzas del vector  $\hat{\beta}$  es  $\text{Cov}(\hat{\beta}) = \text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$

**Demostración:**

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \text{Var}((X^T X)^{-1} X^T Y)$$

Sea  $A = (X^T X)^{-1} X^T$  y como  $A$  es una matriz y  $Y$  un vector columna y por la propiedad de varianzas  $\text{Var}(AY) = A\text{Var}(Y)A^T$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}) &= (X^T X)^{-1} X^T \text{Var}(Y) ((X^T X)^{-1} X^T)^T \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 ((X^T X)^{-1} X^T)^T \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 (X^T)^T ((X^T X)^{-1})^T \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} (X^T X) (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} I \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

**Ejemplo 2** Para los datos del ejemplo 1, se tiene que la estimación de la matriz de varianzas-covarianzas del vector  $\hat{\beta}$  es

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X^\top X)^{-1}$$

$$= 0.0083 \begin{pmatrix} 0.2632 & 0 & 0 & 0 & -0.1579 & -0.1579 \\ 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ -0.1579 & 0 & 0 & 0 & 0.3947 & -0.1053 \\ -0.1579 & 0 & 0 & 0 & -0.1053 & 0.3947 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.00218456 & 0 & 0 & 0 & -0.00131057 & -0.00131057 \\ 0 & 0.00138361 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00138361 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.002075 & 0 & 0 \\ -0.00131057 & 0 & 0 & 0 & 0.00327601 & -0.00087399 \\ -0.00131057 & 0 & 0 & 0 & -0.00087399 & 0.00327601 \end{pmatrix} \quad (1.3.4)$$

Los errores estándar de cada parámetro es dado en la tabla:

Parámetro	Error estándar
$\beta_0$	$\sqrt{0.00218456} = 0.04673928$
$\beta_1, \beta_2$	$\sqrt{0.00138361} = 0.03719691$
$\beta_{12}$	$\sqrt{0.002075} = 0.04555217$
$\beta_{11}, \beta_{22}$	$\sqrt{0.00327601} = 0.05723644$

## 1.4 Teorema de Gauss - Markov

Si no se asume normalidad el estimador mínimo cuadrático  $\hat{\beta}$  es el mejor estimador dentro de los estimadores lineales insesgados de  $\beta$ , en el sentido que es el de la varianza más pequeña.

**Demostración:**

Conocemos que  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ , sea  $A = (X^T X)^{-1} X^T$ , entonces  $\hat{\beta} = AY$ .

**Demostremos que  $\beta = CY$  no es mejor estimador insesgado que  $\hat{\beta}$ . Sabemos que  $E[CY] = CE[Y] = CX\beta$  por ser  $\beta$  insesgado se cumple que  $E[\beta] = \beta \implies CX\beta = \beta \implies CX\beta - \beta = \vec{0} \implies (CX - I)\beta = \vec{0}$ , como  $\beta \neq 0$ , entonces  $\implies CX - I = \vec{0} \implies CX = I$ .**

**Ahora como  $C$  es una matriz y  $Y$  un vector columna y por la propiedad  $\text{Var}(AY) = A\text{Var}(Y)A^T$ , tenemos que  $\text{Var}(CY) = C\text{Var}(Y)C^T = C\sigma^2 C^T = \sigma^2 CC^T$ .**

**Luego como  $\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$  y  $CX = I$  y  $(CX)^T = X^T C^T = I$ , podemos escribir  $\text{Var}(\hat{\beta}) = CX\sigma^2(X^T X)^{-1}X^T C^T = \sigma^2 CX(X^T X)^{-1}X^T C^T$**

**por lo tanto**

$$\begin{aligned} \text{Var}(\beta) - \text{Var}(\hat{\beta}) &= \sigma^2 CC^T - \sigma^2 CX(X^T X)^{-1}X^T C^T \\ &= \sigma^2 C(I - X(X^T X)^{-1}X^T)C^T \\ &= \sigma^2 CHC^T \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

**$H$  es simétrica ( $H^T = H$ ) e idempotente ( $H^2 = H$ ),  $H$  es definida positiva (Una matriz  $A$  se dice que es semidefinida positiva si  $Y^T AY \geq 0$  para todo vector  $Y \neq 0$ . Diremos que es definida positiva si  $Y^T AY > 0$  para todo vector  $Y \neq 0$ ), por tanto  $CHC^T > 0$ .**

**Entonces  $\text{Var}(\beta) - \text{Var}(\hat{\beta}) > 0 \implies \text{Var}(\beta) > \text{Var}(\hat{\beta})$ . Luego  $\hat{\beta}$  es el mejor estimador insesgado de mínima varianza.**

## 1.5 Diseños experimentales y matrices de información

El conjunto  $\{x_1, \dots, x_N\}$  de elementos de  $\mathcal{X}$  (aunque algunos de los elementos pueden coincidir unos con otros) se llama un diseño exacto (o discreto) de tamaño  $N$ .

Tengamos sólo  $n < N$  puntos distintos. Supongamos que  $x_i$  ocurre  $r_i$  veces entre los puntos  $\{x_1, \dots, x_N\}$  para  $i = 1, \dots, n$  así

$$N = \sum_{i=1}^n r_i.$$

Asociamos  $w_i = r_i/N$  con cada uno de los puntos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Así

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

será llamada diseño exacto (discreto) o diseño  $n$ -puntos de tamaño  $N$ .

La matriz

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i) f^T(x_i) w_i \quad (1.5.2)$$

se llama la matriz de información de diseño  $\xi$ .

Por el teorema de Gauss-Markov, tenemos

$$\text{Cov}(\theta) = \frac{\sigma^2}{N} M^{-1}(\xi)$$

para la matriz varianza de la estimación de mínimos cuadrados.

El diseño  $\xi$  es una medida de probabilidad discreta, definido por (1.2), que incluye los puntos del conjunto  $\mathcal{X}$  y los coeficientes de peso.

En muchas situaciones prácticas, es imposible de realizar estos diseños y tales diseños se deben considerar como aproximación de algunos diseños discretos.

Vamos a escribir un diseño, concentrado en un número finito de puntos, en la forma (1.2), donde los coeficientes  $w_i = \xi(x_i)$  son números positivos arbitrarios tales que  $\sum w_i = 1$ . La matriz

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i) f(x_i)^\top \xi(x_i) \quad (1.5.3)$$

se le llama la matriz de información del diseño aproximado.

Sea  $\Xi$  el conjunto de todos los diseños aproximados y  $\mathcal{M}$  el conjunto de matrices de información que les corresponden:

$$\mathcal{M} = \{M; M = M(\xi) \text{ para algunos } \xi \in \Xi\}$$

Sea  $\Xi_n$  el conjunto de diseños aproximados, concentrado en  $n$  puntos (con pesos distintos de cero).

Las propiedades básicas de matrices de información pueden enunciarse como un teorema.

**Teorema 1.** *Propiedades de las matrices de información:*

(i) Cualquier matriz de información es definida no negativa (en particular es simétrica).

**Demostración:**

La demostración fácilmente se concluye de la definición de matriz no negativa y del hecho de que para todo vector  $z \in \mathbb{R}^m$  se cumple

$$z^\top M(\xi) z = \sum_{i=1}^n z^\top f(x_i) f(x_i)^\top z \xi(x_i) = \sum_{i=1}^n \|z^\top f(x_i)\|^2 \xi(x_i) \geq 0$$

(ii) Si  $n < m$ , siendo  $m$  el número de parámetros, entonces  $\det M(\xi) = 0$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $\xi$  tiene en su soporte  $k < m$  puntos:  $x_1, \dots, x_k$ . En el desarrollo del determinante aparecerán siempre al menos dos columnas iguales y por tanto el determinante ha de ser cero.

(iii) El conjunto  $\mathcal{M}$  es convexo.

**Demostración:**

Es necesario comprobar que para cualquier  $\lambda \in [0, 1]$  y para cualquier par de diseños  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , la matriz

$$M = (1 - \lambda)M(\xi_1) + \lambda M(\xi_2)$$

pertenece al conjunto  $\mathcal{M}$ .

Definimos el diseño  $\xi$  según la fórmula

$$\xi = (1 - \lambda)\xi_1 + \lambda\xi_2$$

mostraremos que  $M = M(\xi) \in \mathcal{M}$ ; en efecto,



$$\begin{aligned}
M &= (1 - \lambda)M(\xi_1) + \lambda M(\xi_2) \\
&= (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i)^\top \xi_1(x_i) + \lambda \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i)^\top \xi_2(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^n f(x_i)f(x_i)^\top [(1 - \lambda)\xi_1(x_i) + \lambda\xi_2(x_i)] \\
&= M(\xi)
\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Con ello queda demostrado.

## 1.6 Criterios de optimalidad

Llamemos al diseño  $\xi$  no singular si  $\det M(\xi) \neq 0$ . Vamos a considerar sólo el caso de la estimación de todo el conjunto de parámetros. Aquí, sólo los diseños no singulares son de interés. El teorema de Gauss-Markov es válido para ello.

Típicamente, no existe un diseño  $\hat{\xi}$  tal que la matriz

$$M^{-1}(\hat{\xi}) - M^{-1}(\xi),$$

es no negativa, donde  $\xi$  es un diseño arbitrario. Por lo tanto, algunas funciones de matrices de información, que tienen sentido estadístico, se utilizan como los criterios de optimalidad.

Consideremos algunos criterios de optimalidad de nuestro interés.

### 1.6.1 D – criterio

El criterio de diseño más usado en las aplicaciones es el de D-optimalidad, en el que la varianza generalizada de las estimaciones de los parámetros, o su logaritmo se reduce al mínimo.

El diseño  $\xi = \arg \max_{\xi} |M(\xi)| = \arg \min_{\xi} |(M(\xi))^{-1}|$  se llama diseño D-óptimo.

**El funcional**

$$\Psi[M(\xi)] = -\text{Log}|M(\xi)|$$

**se llama criterio D-óptimo; donde el funcional  $\Psi$  definido en el espacio de elementos de la matriz de información de  $M \in \mathcal{M}$ , se le denomina criterio de optimización, ver Kiefer(1974).**

**D-optimalidad, criterio del determinante, equivale a minimizar el volumen del elipsoide de variación de los estimadores lineales e insesgados de los parámetros desconocidos.**

## 1.6.2 G – criterio

**Para diseños continuos la varianza normalizada de la respuesta predicha es**

$$d(x, \xi) = f^T(x)M^{-1}(\xi)f(x)$$

**El criterio G-óptimo es de la forma**

$$\max_{x \in \mathcal{X}} d(x, \xi) \rightarrow \inf_{\xi}$$

**Tenga en cuenta que para el diseño discreto normado  $\xi$ ,**

$$d(x, \xi) = \frac{\sigma^2}{N} \text{Cov}(f(x)^T \theta);$$

**es decir  $d(x, \xi)$  es igual (a la constante de precisión) a la varianza de un valor, predicha por el modelo en el punto  $x$ .**

## 1.6.3 $D_s$ – criterio

**Son apropiados cuando el interés es estimar un subconjunto de  $s$  parámetros de todo el  $p$  – vector  $\beta$ . Por lo tanto sin pérdida de generalidad, los términos del modelo se pueden dividir en dos**

## grupos

$$E(Y) = f^T(x)\beta = f_1^T(x)\beta_1 + f_2^T\beta_2$$

donde  $\beta_1 \in \mathbb{R}^s$  y  $\beta_2 \in \mathbb{R}^{p-s}$ . Los  $\beta_1$  son los parámetros de interés y los  $p - s$  parámetros  $\beta_2$  suelen ser tratados como parámetros molestia.

Un ejemplo es cuando  $\beta_1$  corresponde a los factores experimentales y  $\beta_2$  corresponde a los parámetros de las variables de bloqueo (Ver ejemplos, capítulo 15 en Optimum Experimental Designs, with SAS de A.C. Atkinson, A.N. Donev y R.D. Tobias). Un segundo ejemplo es cuando los experimentos están diseñados para comprobar la bondad de ajuste de un modelo.

Para obtener expresiones para el criterio de diseño y función de varianza relacionadas, dividimos la matriz de información como

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} M_{11}(\xi) & M_{12}(\xi) \\ M_{12}^T(\xi) & M_{22}(\xi) \end{pmatrix}$$

La matriz de covarianza para la estimación de mínimos cuadrados de  $\beta_1$  es  $M^{11}(\xi)$ , la submatriz superior izquierda  $s \times s$  de  $M^{-1}(\xi)$ . Se puede verificar, a partir de los resultados de la inversa de una matriz particionada (por ejemplo, Fedorov 1972, p. 24), que

$$M^{11}(\xi) = \left\{ M_{11}(\xi) - M_{12}(\xi)M_{22}^{-1}(\xi)M_{12}^T(\xi) \right\}^{-1}$$

En consecuencia, el diseño  $D_s$ -óptimo para  $\beta_1$  maximiza el determinante

$$|M_{11}(\xi) - M_{12}(\xi)M_{22}^{-1}(\xi)M_{12}^T(\xi)| = \frac{|M(\xi)|}{|M_{22}(\xi)|}.$$

Por otro lado, en la práctica se pueden utilizar teoremas que proporcionan herramientas para la construcción y el control de la optimización de un diseño. Si la atención se limita al parámetro  $\beta$ , se considera el conocido teorema general de equivalencia (cf. Kiefer y Wolfowitz(1990); cf. Silvey (1980); cf. Pulkselheim(2006)).

## 1.6.4 Teorema de equivalencia

El siguiente resultado de Kiefer y Wolfowitz (1960) es de gran importancia en la teoría del diseño experimental óptimo.

**Teorema 2.** *(Kiefer-Wolfowitz. Teorema de equivalencia) Para el modelo (1.1), existe un diseño D-óptimo bajo los supuestos clásicos de regresión y las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i)  $\xi^*$  es un diseño D-óptimo.

(ii)  $\xi^*$  es un diseño G-óptimo.

(iii)  $\max_{x \in \mathcal{X}} d(x, \xi^*) = m$ .

Por otra parte, todos los D-óptimos diseños tienen la misma matriz de información, y la función de predicción de la varianza  $d(x, \xi^*)$  alcanza su máximo en los puntos de cualquier diseño D-óptimo con soporte finito.

Vale la pena subrayar que el teorema es cierto para los diseños que sean D-óptimo en la clase de diseño aproximado.

Este teorema no sólo establece la equivalencia entre D y G-criterios, sino que también da la importante condición necesaria y suficiente de D-optimalidad: Diseño  $\xi^*$  es D-óptimo si y sólo si

$$\max_{x \in \mathcal{X}} d(x, \xi^*) = m.$$

la demostración del teorema se puede encontrar en Kiefer y Wolfowitz (1960). Muchos análogos del teorema de Kiefer-Wolfowitz se pueden encontrar en Kiefer (1974), y aparece en forma más general en Whittle (1973).

**Ejemplo 3** Sea  $\eta(x_j, \theta) = \theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 x^2 + \theta_4 x^3$ ; un modelo polinomial con  $x \in [-1, 1]$ .

**En el caso D-óptimo, se verificará a continuación que el diseño**

$$\xi^* = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

**es un diseño D-óptimo.**

**En efecto, bastará con mostrar que el diseño  $\xi^*$  verifica las condiciones del criterio de D-óptimalidad. Primero note que su matriz de momento es**

$$\begin{aligned} M(\xi^*) &= \sum_{x \in \{-1, -\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5, 1\}} [1, x, x^2, x^3]^\top [1 \ x \ x^2 \ x^3] (1/4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 13/25 \\ 3/5 & 0 & 13/25 & 0 \\ 0 & 13/25 & 0 & 63/125 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

**Ahora**

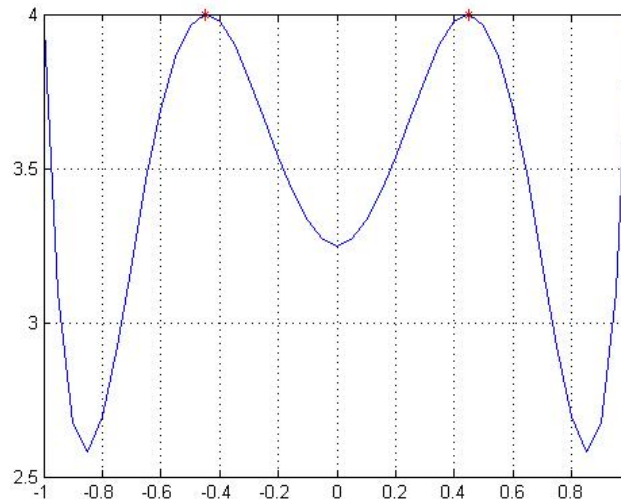
$$M^{-1}(\xi^*) = \begin{pmatrix} 13/4 & 0 & -15/4 & 0 \\ 0 & 63/4 & 0 & -65/4 \\ -15/4 & 0 & 25/4 & 0 \\ 0 & 65/4 & 0 & 75/4 \end{pmatrix}$$

**Luego**

$$\begin{aligned}
 d(x, \xi^*) &= f^\top(x) M^{-1}(\xi^*) f(x) \\
 &= \frac{75}{4}x^6 - \frac{105}{4}x^4 + \frac{33}{4}x^2 + \frac{13}{4}
 \end{aligned}
 \tag{1.6.2}$$

**Por último**

**$\max d(x, \xi^*) = 4$  y dicha función tiene sus puntos críticos en los valores del diseño.**



**Figura 1.1 Ejemplo 3**

**Por lo tanto  $\xi^*$  es D-óptimo.**

## 1.7 Diseños de Bloqueos Completos Aleatorizados

En cualquier experimento la variabilidad que surge de un factor perturbador puede afectar los resultados.

## **Factor Perturbador.**

Puede definirse como un factor del diseño que probablemente tenga un efecto sobre la respuesta pero en el que no existe interés específico.

En ocasiones un factor perturbador es desconocido y no controlable (se desconoce la existencia y puede tomar niveles variables mientras se realiza el experimento).

## **La Aleatorización.**

Es una técnica de diseño que se utiliza para protegerse contra factores perturbadores.

en otros casos el factor perturbador es conocido pero no controlable. Si por lo menos puede observarse el valor que asume el factor perturbador en cada corrida del experimento, es posible hacer la compensación correspondiente en el análisis estadístico mediante el uso del análisis de covarianza.

Cuando la fuente de variabilidad perturbadora es conocida y controlable, puede usarse una técnica de diseño llamada formación de bloques para eliminar de manera sistemática su efecto sobre las comparaciones estadísticas entre los tratamientos.

La formación de bloques es una técnica de diseño en extremo importante que se utiliza ampliamente en la experimentación industrial.

El error experimental reflejará tanto el error aleatorio como la variabilidad entre los ejemplares de prueba.

El objetivo sería hacer el error experimental tan pequeño como fuera posible (eliminar del error experimental la variabilidad entre los ejemplares de prueba).

Un diseño para lograr lo anterior es el diseño de bloques completos aleatorizados (RCBD, Randomized Complete Block Design). La palabra “Completo” indica que cada bloque (ejemplar de prueba) contiene todos los tratamientos.

- Ejemplos de factor perturbador: Materia prima, personas, tiempo, etc.

La unidad experimental es el total de corridas en un experimento.

## Análisis Estadístico Del Diseño de Bloques Completos Aleatorizados

Supongase que se tienen  $a$  tratamientos que van a compararse y  $b$  bloques.

Hay una observación por tratamiento en cada bloque, y el orden en que se corren los tratamientos dentro de cada bloque se determinan al azar.

Bloque 1	Bloque 2	Bloque b	
$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{1j}$	$y_{1b}$
$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{2j}$	$y_{2b}$
$y_{i1}$	$y_{i2}$	$y_{ij}$	$y_{ib}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_{a1}$	$y_{a2}$	$y_{aj}$	$y_{ab}$

El diseño estadístico de RCBD puede escribirse de varias maneras. El tradicional es el modelo de los efectos:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases}$$

$$Y_{ki} = \alpha_{ki} + f(X_{ki})^T \beta \text{ con } i = 1, 2, \dots, b \text{ y } k = 1, 2, \dots, a$$

$$f(X_{ki}) = [f_1(X_{ki}), \dots, f_a(X_{ki})]$$

donde  $\mu$  es la media global,  $\tau_i$  es el efecto del tratamiento  $i$  –ésimo,  $\beta_j$  es el efecto del bloque  $j$  –ésimo, y  $\epsilon_{ij}$  es el término del error NID( $0, \sigma^2$ ) usual.

Se considerará inicialmente que los tratamientos y los bloques son factores fijos.

El modelo de los efectos para el RCBD es un modelo especificado, los efectos de los tratamientos y los bloques se consideran por lo general como desviaciones de la media global por lo que:

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0 \text{ y } \sum_{j=1}^b \beta_j = 0$$

También es posible usar un modelo de las medias para el RCBD:

$$y_{ij} = \mu_{ij} + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases}$$

$$\text{Donde } \mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j$$

En un experimento en el que se use RCBD, el interés se encuentra en probar la igualdad de las medias de los tratamiento. Por lo tanto, las hipótesis de interés son:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$$



$H_1$  : Al menos una  $\mu_i \neq \mu_j$

Puesto que la media del tratamiento  $i$  –ésimo es  $\mu_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b (\mu + \tau_i + \beta_j) = \mu + \tau_i$

Otra forma de escribir las hipótesis en términos de los efectos de los tratamientos es:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$$

$H_1 : \tau_i \neq 0$  Para al menos una  $i$

Sea  $y_{i.}$  el total de observaciones hechas bajo el tratamiento  $i$ .

$y_{.j}$  el total de observaciones del bloque  $.j$

$y_{..}$  el gran total de las observaciones.

$N = ab$  el número total de observaciones. expresado matemáticamente.

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^b y_{ij} \text{ con } i = 1, 2, \dots, a$$

$$y_{.j} = \sum_{i=1}^a y_{ij} \text{ con } j = 1, 2, \dots, b$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij} = \sum_{i=1}^a y_{i.} = \sum_{j=1}^b y_{.j}$$

De manera similar,  $\bar{y}_{i.}$  es el promedio de las observaciones hechas bajo el tratamiento  $i$

$\bar{y}_{.j}$  es el promedio de las observaciones del bloque  $j$ .

$\bar{y}_{..}$  es el gran promedio total de las observaciones.

es decir  $\bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{b}$ ;  $\bar{y}_{.j} = \frac{y_{.j}}{a}$ ;  $\bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N}$

La suma de cuadrados total corregida puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})]^2 \\ &= b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \end{aligned} \quad *$$

Al expresar simbólicamente las sumas de cuadrados, se tiene:  $SS_T = SS_{\text{Tratamientos}} + SS_{\text{Bloques}} + SS_E$  \*\*

Puesto que hay  $N$  observaciones,  $a$  tratamientos y  $b$  bloques,  $SS_T$  tiene  $N-1$  grados de libertad,  $SS_{\text{Tratamientos}}$  tiene  $a-1$  grados de libertad y  $SS_{\text{Bloques}}$  tiene  $b-1$  grados de libertad.

**Como  $SS_E = SS_T - (SS_{\text{Tratamientos}} + SS_{\text{Bloques}})$  y  $N = ab$  entonces  $SS_E$  tiene  $ab - 1 - (a - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$  grados de libertad.**

**Como la suma de los grados de libertad del lado derecho es igual al total del lado izquierdo de \*\*, por lo tanto, al establecer los supuestos de normalidad usuales para los errores, puede usarse el Teorema de Cochran para demostrar que  $\frac{SS_{\text{Tratamientos}}}{\sigma^2}$ ;  $\frac{SS_{\text{Bloques}}}{\sigma^2}$  y  $\frac{SS_E}{\sigma^2}$  son variables aleatorias ji-cuadradas con distribuciones independientes.**

**Cada suma de cuadrados dividida por sus grados de libertad es un cuadrado medio.**

**Puede demostrarse que el valor esperado de los cuadrados medios, si los tratamientos y los bloques son fijos, es:**

$$E(MS_{\text{Tratamientos}}) = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^a \tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_{\text{Bloques}}) = \sigma^2 + \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b-1}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

**Por lo tanto, para probar la igualdad de las medias de los tratamientos, se usaría el estadístico de prueba:**

$$F_0 = \frac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}$$

**Que se distribuye como  $F_{a-1, (a-1)(b-1)}$  si la hipótesis nula es verdadera.**

**La región crítica es la cola superior de la distribución F, y  $H_0$  se rechaza si  $F_0 > F_{a, a-1, (a-1)(b-1)}$**

**También podría haber interés en comparar las medidas de los bloques porque, en caso de que la diferencia entre estas medias no sea considerables, quizá no sea necesaria la formación de bloques en experimentos futuros.**

**Por los cuadrados medios esperados, aparentemente la hipótesis  $H_0 : \beta_j = 0$  puede probarse comparando el estadístico  $F_0 = \frac{MS_{\text{Bloques}}}{MS_E}$  con  $F_{a, b-1, (a-1)(b-1)}$**

**Recuerde: la aleatorización sólo se ha aplicado a los tratamientos dentro de los bloques, es decir, los bloques representan una restricción sobre la aleatorización.**

**¿Qué efecto tiene lo anterior sobre el estadístico  $F_0 = \frac{MS_{\text{Bloques}}}{MS_E}$ ?**

**señalan que la prueba F del análisis de varianza común puede justificarse exclusivamente con base a la aleatorización, si el uso supuesto de normalidad (debido a la restricción sobre la aleator-**

ización). Pero si los errores son  $NID(O, \sigma^2)$ , puede usarse  $F_0 = \frac{MS_{\text{Bloques}}}{MS_E}$  para comparar las medias de los bloques.

argumentan que la restricción sobre la aleatorización impide que este estadístico sea una prueba significativa para comparar las medias de los bloques y que este cociente  $F$  es en realidad una prueba de la igualdad de las medias de los bloques más la restricción sobre la aleatorización (a la que le llaman error de la restricción).

Entonces, ¿Qué se hace en la práctica?

Debido a que con frecuencia el supuesto de normalidad es cuestionable, considerar  $F_0 = \frac{MS_{\text{Bloques}}}{MS_E}$  como una prueba  $F$  exacta para la igualdad de las medias de los bloques no es una buena práctica general.

Por lo anterior esta prueba  $F$  no se incluye en la tabla del análisis de varianza.

Sin embargo, como un procedimiento aproximado para investigar el efecto de la variable formación de bloques, examinar el cociente  $\frac{MS_{\text{Bloques}}}{MS_E}$  es razonable. Si este cociente es muy grande implica que el factor formación de bloques tiene un efecto considerable y que la reducción del ruido obtenida, por la formación de bloques probablemente fue útil para mejorar la precisión de la comparación de las medias de los tratamientos.

El procedimiento suele resumirse en un esquema de análisis de varianza, como el que se muestra en la tabla \*\* (los cálculos se realizarán con un paquete de software de estadística).

Sin embargo es posible obtener formulas de cálculo manual para la suma de cuadrados para los elementos de la ecuación \* expresándolos en términos de los totales de los tratamientos y los bloques. éstas son:

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Tratamientos}} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Bloques}} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^b y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$y \text{ } SS_E = SS_T - SS_{\text{Tratamientos}} - SS_{\text{Bloques}}$$

**Tabla 1.3** Análisis de Varianza de un Diseño de Bloques Completos Aleatorizados. \*\*

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	$F_0$
Tratamientos	$SS_{\text{Tratamientos}}$	$a - 1$	$\frac{SS_{\text{Tratamientos}}}{a-1}$	$\frac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}$
Bloques	$SS_{\text{Bloques}}$	$b - 1$	$\frac{SS_{\text{Bloques}}}{b-1}$	
Error	$SS_E$	$(a - 1)(b - 1)$	$\frac{SS_E}{(a-1)(b-1)}$	
Total	$SS_T$	$N - 1$		

## 1.8 Experimentos Con Factores Aleatorios

### Factores Fijos.

Quiere decir que los niveles de los factores usados por el experimentador son los niveles de interés específicos.

- Ejemplo: si se investigan 3 tipos de materiales, las conclusiones son válidas solo para esos tipos específicos de materiales.

Una variante de lo anterior ocurre cuando el factor o factores son cuantitativos.

Cuando se trabaja con un efecto fijo, se dice que el espacio inferencial del experimento es el conjunto específico de los niveles de los factores investigados.

En algunas situaciones experimentales, los niveles de los factores se eligen al azar de una población más grande de niveles posibles, no sólo de los que se usaron en el diseño experimental. En esta situación se dice que se trata de un factor aleatorio.

Se empieza con una situación simple, un experimento con un solo factor en el que el factor es aleatorio y se usa esto para introducir el modelo de efectos aleatorios para el análisis de varianza y los componentes de varianza. Los factores aleatorios ocurren normalmente en experimentos factoriales, así como en otros de tipos de experimentos.

### Modelo Con Efectos Aleatorios.

Es común que un experimentador esté interesado en un factor que tiene un gran número de posibles niveles. Cuando el experimentador selecciona aleatoriamente  $\alpha$  de estos niveles de la población de los niveles del factor, entonces se dice que el factor es aleatorio.

Puesto que los niveles del factor utilizados en el experimento se eligen al azar, se hacen inferencias acerca de la población completa de los niveles del factor.

Se supone que la población de los niveles del factor es de tamaño infinito o bien lo suficientemente grande para considerarla infinita. No es frecuente encontrar situaciones en la que la población de los niveles del factor sea lo suficientemente pequeña para encontrar el enfoque de una población finita.

El modelo estadístico lineal es:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a_* \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Donde  $\tau_i$  y  $\epsilon_{ij}$  son variables aleatorias. si  $\tau_i$  tiene varianza  $\sigma_\tau^2$  y es independiente de  $\epsilon_{ij}$  la varianza de cualquier observación es:

$$E(y_{ij}) = \mu \text{ y } v(y_{ij}) = \sigma_\tau^2 + \sigma^2$$

A las varianzas  $\sigma_\tau^2$  y  $\sigma^2$  se les llama los componentes de varianza y al modelo de la ecuación \* se le llama modelo de los efectos aleatorios o de los componentes de la varianza.

Para probar hipótesis en este modelo se requiere que las  $\{\epsilon_{ij}\}$  sean  $NID(O, \sigma^2)$ , que las  $\{\tau_i\}$  sean  $NID(O, \sigma_\tau^2)$  y que  $\tau_i$  y  $\epsilon_{ij}$  sean independientes.

La suma de cuadrados identidad  $SS_T = SS_{\text{Tratamientos}} + SS_E$  sigue siendo válida.

Es decir, se hace la partición de la variabilidad total en las observaciones en un componente que mide la variación entre los tratamientos ( $SS_{\text{Tratamientos}}$ ) en un componente dentro de los tratamientos ( $SS_E$ ).

Probar hipótesis acerca de los efectos de tratamientos individuales no tiene sentido, por lo que en su lugar se prueban hipótesis acerca del componente de la varianza  $\sigma_\tau^2$ .

$$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_\tau^2 > 0$$

entonces si  $\sigma_\tau^2 = 0$ , todos los tratamientos son idénticos, pero si  $\sigma_\tau^2 > 0$ , existe variabilidad entre los tratamientos.

Como anteriormente

$\frac{SS_E}{\sigma^2}$  se distribuye como ji-cuadrado con  $N - a$  grados de libertad y, bajo la hipótesis nula ( $\sigma_\tau^2 = 0$ )

$\frac{SS_{\text{Tratamientos}}}{\sigma^2}$  se distribuye como ji-cuadrada con  $a - 1$  grados de libertad

**Ambas variables aleatorias son independientes, por lo tanto bajo  $\sigma_\tau^2 = 0$ , el cociente**

$$F_0 = \frac{\frac{SS_{\text{Tratamientos}}}{a-1}}{\frac{SS_E}{N-a}} = \frac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}$$

**Se distribuye como F con  $a - 1$  y  $N - a$  grados de libertad.**

**Ahora**

$$E(MS_{\text{Tratamientos}}) = \frac{1}{a-1} E(SS_{\text{Tratamientos}})$$

$$E(MS_{\text{Tratamientos}}) = \frac{1}{a-1} E\left(\sum_{i=1}^a \left(\frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N}\right)\right)$$

$$E(MS_{\text{Tratamientos}}) = \frac{1}{a-1} E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^a \left(\sum_{j=1}^n (\mu + \tau_i + \epsilon_{ij})\right)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\mu + \tau_i + \epsilon_{ij})\right)^2\right]$$

**Cuando se eleva al cuadrado y se toma la función esperanza de las cantidades entre corchetes, se observa que  $\tau_i^2$  es reemplazada por  $\sigma_\tau^2$   $E(\tau_i) = 0$ . Además  $\epsilon_{i.}^2$ ,  $\epsilon_{..}^2$  y  $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \tau_i^2$  son reemplazadas por  $n\sigma^2$ ,  $an\sigma^2$  y  $an^2\sigma^2$ , respectivamente y todos los productos cruzados que incluyen a  $\tau_i$  y  $\epsilon_{ij}$  tienen valor esperado cero. Esto lleva a:**

$$E(MS_{\text{Tratamientos}}) = \frac{1}{a-1} [N\mu^2 + N\sigma_\tau^2 + a\sigma^2 - n\mu^2 - n\sigma_\tau^2 - \sigma^2] \text{ ó } E(MS_{\text{Tratamientos}}) = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$$

**De manera similar, puede demostrarse que**

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

**Por los cuadrados medios esperados, se observa que bajo  $H_0$  tanto el numerado como el denominador del estadístico de prueba ( $F_0 = \frac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}$ ) son estimadores insesgados de  $\sigma^2$ .**

**Mientras que bajo  $H_1$  el valor esperado del numerado es mayor que el del denominador. Por lo tanto  $H_0$  deberá rechazarse para los valores de  $F_0$  que sean muy grandes.**

$$H_0 \text{ se rechaza si } F_0 > F_{\alpha, a-1, N-a}$$

**El procedimiento de cálculo y el análisis de la tabla de varianza del modelo de efectos aleatorios son idénticos a los que se utilizaron en el caso de efectos fijos. Sin embargo las conclusiones son muy diferentes, ya que se aplican a la población completa de los tratamientos.**

**Por lo general habrá interés en estimar los componentes de la varianza ( $\sigma^2$  y  $\sigma_\tau^2$ ) del modelo.**

**Al procedimiento que se usa para estimar  $\sigma^2$  y  $\sigma_\tau^2$ , se le llama método del análisis de varianza, ya que hace uso de las líneas de la tabla del análisis de varianza.**

**El procedimiento consiste en igualar los cuadrados medios esperados con sus valores observados en la tabla del análisis de varianza y despejar los componentes de la varianza.**

Al igualar los cuadrados medios observados con los esperados en el modelo de efectos aleatorios con un solo factor, se obtiene

$$MS_{\text{Tratamientos}} = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2 \text{ y } MS_E = \sigma^2$$

Por lo tanto, los estimadores de los componentes de la varianza son

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E \text{ y } \hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{\text{Tratamientos}} - MS_E}{n}$$

Para tamaños de las muestras desiguales, se reemplaza  $n$  en \* con

$$n_0 = \frac{1}{a-1} \left[ \sum_{i=1}^a n_i - \frac{\sum_{i=1}^a n_i^2}{\sum_{i=1}^a n_i} \right] = \frac{N - \frac{\sum_{i=1}^a n_i^2}{N}}{a-1}$$

En el método del análisis de varianza para estimar los componentes de la varianza no se requiere el supuesto de normalidad.

El método produce estimadores  $\sigma^2$  y  $\sigma_\tau^2$ , que son los mejores estimadores cuadráticos insesgados (estos estimadores tienen mínima varianza).

Ocasionalmente, el método del análisis de varianza produce una estimación negativa de uno de los componentes de la varianza. Evidentemente, los componentes de la varianza son por definición no negativos, por lo que la estimación negativa de un componente de la varianza se considera con una cierta preocupación.

Un curso de acción es aceptar la estimación negativa y usarla como evidencia de que el verdadero valor del componente de la varianza es cero (aunque esto adolece dificultades teóricas). Usar cero en lugar de la estimación negativa puede alterar las propiedades estadísticas de otras estimaciones.

Otra alternativa es volver a estimar el componente de la varianza utilizando un método que produzca siempre estimaciones no negativas.

y otra alternativa es considerar la estimación negativa como evidencia de que el modelo lineal supuesto es incorrecto y examinar de nuevo el problema.

## 1.9 Modelo Mixto Con Dos Factores

Se considera ahora la situación en que uno de los factores  $A$  este fijo y el otro,  $B$ , es aleatorio. Se le llama análisis de varianza del modelo mixto. El modelo estadístico lineal es:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

**Donde**

$\tau_i$  **es un efecto fijo.**

$\beta_j$  **es un efecto aleatorio.**

$(\tau\beta)_{ij}$  **es un efecto aleatorio (se supone).**

$\epsilon_{ijk}$  **es un error aleatorio.**

**Se supone que las  $\{\tau_i\}$  son efectos fijos tales que  $\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$  y que  $\beta_j$  es una variable aleatoria  $NID(0, \sigma_\beta^2)$ .**

**El efecto de la interacción  $(\tau\beta)_{ij}$ , es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza  $(\frac{a-1}{a})\sigma_{\tau\beta}^2$**

**La operación suma del componente de la interacción en el rango del factor fijo es igual a cero  $\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = (\tau\beta)_{.j} = 0$  con  $j = 1, 2, \dots, b$**

**Esta restricción implica que algunos elementos de la interacción en diferentes niveles del factor fijo no son independientes, puede demostrarse que:**

$$\text{Cov}[(\tau\beta)_{ij}, (\tau\beta)_{i'j}] = -\frac{1}{a} \sigma_{\tau\beta}^2 \text{ para } i \neq i'$$

**la Cov entre  $(\tau\beta)_{ij}$  y  $(\tau\beta)_{ij'}$  para  $j \neq j'$  es cero, y el error aleatorio  $\epsilon_{ijk}$  es  $NID(0, \sigma^2)$**

**Puesto que la suma de los efectos de la interacción en los niveles del factor fijo es igual a cero, a esta versión del modelo mixto se le llama modelo restringido.**

**En este modelo la varianza de  $(\tau\beta)_{ij}$  se define como  $(\frac{a-1}{a})\sigma_{\tau\beta}^2$  en vez de como  $\sigma_{\tau\beta}^2$  para simplificar los cuadrados medios esperados. El supuesto  $(\tau\beta)_{.j} = 0$  también tiene un efecto sobre los cuadrados medios esperados, los cuales se pueden demostrar que son:**

$$E(MS_A) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + \frac{bn \sum_{i=1}^a \tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + a n \sigma_\beta^2$$

$$E(MS_{AB}) = \sigma^2 + a n \sigma_{\tau\beta}^2$$

$$\text{y } E(MS_E) = \sigma^2$$



Por lo tanto, el estadístico de prueba aprobado para probar que las media de los efectos del factor fijo son iguales, o  $H_0 : \tau_i = 0$  es  $F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}}$  que tiene la distribución de referencia  $F_{a-1, (a-1)(b-1)}$

Para probar  $H_0 : \sigma_\beta^2$ , es el estadístico de prueba es  $F_0 = \frac{MS_B}{MS_E}$

Con la distribución de referencia  $F_{b-1, ab(n-1)}$

Por último, para probar la hipótesis de la interferencia  $H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$

$$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

Que tiene la distribución de frecuencia  $F_{(a-1)(b-1), ab(n-1)}$

En el modelo mixto es posible estimar los efectos del factor fijo como:  $\hat{\mu} = \bar{y}$  y  $\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}...$  para  $i = 1, 2, \dots, a$

Los componentes de la varianza  $\sigma_\beta^2$ ,  $\sigma_{\tau\beta}^2$  y  $\sigma^2$  pueden estimarse aplicando el método del análisis de varianza. de \* quedan:

$$\sigma^2 = \frac{MS_B - MS_E}{an}$$

$$\sigma_{\tau\beta}^2 = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n}$$

$$\text{y } \sigma^2 = MS_E$$

Este enfoque general puede emplearse para estimar los componentes de la varianza en cualquier modelo mixto.

## 1.10 Diseño Factorial de Dos Factores Aleatorios

Suponga que se tienen dos factores, A y B, y que ambos tienen un gran número de niveles de interés. Se escogen al azar  $a$  niveles del factor A y  $b$  niveles del factor B. si el experimento se hace con  $n$  réplicas las observaciones pueden representarse con el modelo lineal:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Donde todos los parámetros del modelo,  $\tau_i, \beta_j, (\tau\beta)_{ij}$  y  $\epsilon_{ijk}$ , son variables aleatorias independientes.

También se supondrá que las variables aleatorias  $\tau_i, \beta_j, (\tau\beta)_{ij}$  y  $\epsilon_{ijk}$  siguen una distribución normal con media cero y varianzas  $v(\tau_i) = \sigma$ ,  $v(\beta_j) = \sigma_\beta^2$ ,  $v[(\tau\beta)_{ij}] = \sigma_{\tau\beta}^2$  y  $v(\epsilon_{ijk}) = \sigma^2$  Por lo tanto.

$$v(y_{ijk}) = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2 \text{ y } \sigma_\tau^2, \sigma_\beta^2, \sigma_{\tau\beta}^2 \text{ y } \sigma^2 \text{ son los componentes de la varianza.}$$

**Las hipótesis que quieren probarse son  $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$  y  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$**

**Los cálculos numéricos del análisis de varianza ( $SS_A$ ,  $SS_B$ ,  $SS_T$ ,  $SS_E$ ) se calculan como en el caso de efectos fijos. Para formar los estadísticos de prueba, deben examinarse los cuadrados medios esperados, puede demostrarse que:**

$$E(MS_A) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\sigma_\tau^2$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + an\sigma_\beta^2$$

$$E(MS_{AB}) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2$$

$$\text{y } E(MS_E) = \sigma^2$$

**Por los cuadrados medios esperados se observa que el estadístico apropiado para probar la hipótesis de que no hay interacción,  $H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$  es  $F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$**

**Ya que bajo  $H_0$  tanto el numerador como el denominador de  $F_0$  tienen valor esperado  $\sigma^2$ , y solo si  $H_0$  es falsa  $E(MS_{AB})$  es mayor que  $E(MS_E)$ . El cociente  $F_0$  se distribuye como  $F_{(a-1), ab(n-1)}$  de manera similar para probar  $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$  se usaría  $F_0 = \frac{MS_A}{MS_{Ab}}$**

**Que se distribuye como  $F_{a-1, (a-1)(b-1)}$  y para probar  $H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$  el estadístico es  $F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}}$**

**Que se distribuye como  $F_{b-1, (a-1)(b-1)}$**

**Los componentes de la varianza pueden estimarse con el método del análisis de varianza**

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{MS_E - MS_{AB}}{an}$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_A - MS_{AB}}{bn}$$



## **PARTE II**

### **Meta**



## Diseños óptimos en la presencia de efectos de bloques aleatorios

**P**ara un modelo lineal en la presencia de efectos de bloques aleatorios se describe la situación donde se tienen  $b$  bloques, cada uno con  $m_i$  observaciones. Por lo tanto, la  $j$ -ésima observación  $Y_{ij}$  al bloque  $i$  se puede escribir como

$$Y_{ij} = \gamma_i + \beta_0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{ij})^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_{ij} \quad (2.0.1)$$

donde  $\mathbf{x}_{ij}$  son los puntos experimentales,  $j = 1, \dots, m_i$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p)^\top$  es un conjunto de funciones (conocidas) de regresión y  $\beta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$  son los parámetros desconocidos.  $\mathbf{f}$  puede ser la función identidad para regresión lineal simple.

El término  $\gamma_i$  es el efecto del  $i$ -ésimo bloque aleatorio con  $E(\gamma_i) = 0$  y  $\text{Var}(\gamma_i) = \sigma_\gamma^2$ . Los errores de observación aleatorio  $\epsilon_{ij}$  se supone que son homoscedásticos,  $E(\epsilon_{ij}) = 0$ ,  $\text{Var}(\epsilon_{ij}) = \sigma^2$  y  $\text{Cov}(\gamma_i, \epsilon_{ij}) = 0$ . El análisis adicional dependerá del cociente de varianza  $d = \sigma_\gamma^2 / \sigma^2$ . Nos centraremos en los parámetros de la población  $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \boldsymbol{\beta}^\top)^\top$ . Asumiremos que el número de observaciones por bloque es constante, es decir,  $m_i = m$ .

Denotemos por  $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{im})^\top$  el vector de observaciones para el bloque  $i$ . La matriz de covarianza correspondiente  $\text{Cov}(\mathbf{Y}_i) = \sigma^2 \mathbf{V}$  es completamente simétrica,  $\mathbf{V} = \mathbf{I}_m + d \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top$ , donde

$\mathbf{I}_m$  indica la matriz identidad  $m \times m$  y  $\mathbf{1}_m$  es un vector de longitud  $m$  con todas las entradas iguales a uno. El efecto fijo individual de la matriz de diseño  $\mathbf{X}_i = (\mathbf{1}_m \mid \mathbf{F}_i)$  se puede descomponer en la primera columna de unos correspondiente a la intersección  $\beta_0$  y la matriz de diseño para el vector de parámetros  $\beta$ .

La inversa de  $\mathbf{V}$  la podemos hallar mediante álgebra matricial

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}^{-1} &= (\mathbf{I}_m + d\mathbf{1}_m\mathbf{1}_m^\top)^{-1} \\
 &= \mathbf{I} - d^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_m(\mathbf{I} + d\mathbf{1}_m^\top\mathbf{I}\mathbf{1}_m)^{-1}d^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_m^\top \\
 &= \mathbf{I} - d\mathbf{1}_m(\mathbf{I} + dm\mathbf{I})^{-1}\mathbf{1}_m^\top \\
 &= \mathbf{I} - d\mathbf{1}_m(\mathbf{I}(1 + dm))^{-1}\mathbf{1}_m^\top \\
 &= \mathbf{I} - \frac{d}{1 + dm}\mathbf{1}_m\mathbf{1}_m^\top
 \end{aligned} \tag{2.0.2}$$

Luego, la matriz de información por bloque, utilizando (2.2) queda  $\mathbf{X}_i^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i^\top \mathbf{X}_i - \frac{d}{1+md} \mathbf{X}_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top \mathbf{X}_i$  que es proporcional a la inversa de la matriz de varianza-covarianza  $\text{Cov}(\hat{\theta}_i)$  si  $\mathbf{X}_i$  es de rango completo. Así  $\theta$  es estimado sobre una base por bloque

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_i &= (\mathbf{X}_i^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y}_i \\
 &= (\mathbf{X}_i^\top \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{X}_i^\top \mathbf{Y}_i
 \end{aligned} \tag{2.0.3}$$

Sobre la base de la población el mejor estimador lineal insesgado se puede calcular como

$$\hat{\theta} = \left( \sum_{i=1}^b \mathbf{X}_i^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^b \mathbf{X}_i^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_i \hat{\theta}_i \text{ si } d \text{ es conocido. Entonces } \text{Cov}(\hat{\theta}) = \sigma^2 \mathbf{M}_d^{-1}, \text{ donde}$$

$\mathbf{M}_d = \sum_{i=1}^b \mathbf{X}_i^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}_i$  es la matriz de información sobre la base de la población. El subíndice  $d$

indica la dependencia del cociente de varianzas  $d$ . Como  $\mathbf{M}_d = \sum_{i=1}^b \mathbf{X}_i^\top \mathbf{X}_i - \frac{d}{1 + md} \sum_{i=1}^b \mathbf{X}_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top \mathbf{X}_i$ .

La matriz de información particionada de acuerdo a  $\beta_0$  y  $\beta$ , es

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_d &= \sum_{i=1}^b \mathbf{X}_i^\top \mathbf{X}_i - \frac{d}{1+md} \sum_{i=1}^b \mathbf{X}_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top \mathbf{X}_i \\
&= \sum_{i=1}^b (\mathbf{1}_m \mid \mathbf{F}_i)^\top (\mathbf{1}_m \mid \mathbf{F}_i) - \frac{d}{1+md} \sum_{i=1}^b (\mathbf{1}_m \mid \mathbf{F}_i)^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top (\mathbf{1}_m \mid \mathbf{F}_i) \\
&= \sum_{i=1}^b \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m^\top \\ \mathbf{F}_i^\top \end{pmatrix} (\mathbf{1}_m \mid \mathbf{F}_i) - \frac{d}{1+md} \sum_{i=1}^b \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m^\top \\ \mathbf{F}_i^\top \end{pmatrix} \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top (\mathbf{1}_m \mid \mathbf{F}_i) \\
&= \sum_{i=1}^b \begin{pmatrix} m & \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m & \mathbf{F}_i^\top \mathbf{F}_i \end{pmatrix} - \frac{d}{1+md} \sum_{i=1}^b \begin{pmatrix} m & \\ \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m \end{pmatrix} (m \mid \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i) \tag{2.0.4} \\
&= \sum_{i=1}^b \begin{pmatrix} m & \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m & \mathbf{F}_i^\top \mathbf{F}_i \end{pmatrix} - \frac{d}{1+md} \sum_{i=1}^b \begin{pmatrix} m^2 & m \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m m & \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+md} \sum_{i=1}^b \begin{pmatrix} m + m^2 d & \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i + md \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m + md \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m & \mathbf{F}_i^\top \mathbf{F}_i + md \mathbf{F}_i^\top \mathbf{F}_i \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{1+md} \sum_{i=1}^b \begin{pmatrix} dm^2 & dm \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \\ d \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m m & d \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_d = \frac{1}{1+md} \left( \begin{array}{c|c} bm & \sum_{i=1}^b \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \\ \hline \sum_{i=1}^b \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m & (1+md) \sum_{i=1}^b \mathbf{F}_i^\top \mathbf{F}_i - d \sum_{i=1}^b \mathbf{F}_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top \mathbf{F}_i \end{array} \right) \tag{2.0.5}$$



Si el interés está en los efectos fijos  $\beta$  solamente, entonces las reglas para invertir las correspondientes matrices de información parcial particionadas  $M_{\beta,d}^{-1} = \text{Cov}(\hat{\beta})/\sigma^2$  es igual a

$$M_{\beta,d} = \sum_{i=1}^b F_i^T F_i - \frac{d}{1+md} \sum_{i=1}^b F_i^T \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T F_i - \frac{1}{bm} \frac{1}{1+md} \left( \sum_{i=1}^b F_i^T \mathbf{1}_m \right) \left( \sum_{i=1}^b \mathbf{1}_m^T F_i \right) \quad (2.0.6)$$

También consideramos los modelos límites para  $d = 0$  y  $d \rightarrow \infty$ , respectivamente: Para  $d = 0$  obtenemos los modelos de efectos fijos y sin interceptos de bloques

$$Y_{ij} = \beta_0 + f(x_{ij})^T \beta + \epsilon_{ij} \quad (2.0.7)$$

Obviamente,  $M_d$  tiende a  $M_0 = \sum_{i=1}^b X_i^T X_i$  para  $d \rightarrow 0$ . Del mismo modo,  $M_{\beta,d}$  tiende a

$$M_{\beta,0} = \sum_{i=1}^b F_i^T F_i - \frac{1}{bm} \left( \sum_{i=1}^b F_i^T \mathbf{1}_m \right) \left( \sum_{i=1}^b \mathbf{1}_m^T F_i \right) \quad (2.0.8)$$

Para  $d \rightarrow \infty$  introducimos el modelo de efectos fijos con bloques fijos

$$Y_{ij} = \mu_i + f(x_{ij})^T \beta + \epsilon_{ij}; \quad (\mu_i = \gamma_i + \beta_0) \quad (2.0.9)$$

Aquí, el vector de parámetros  $(\mu_1, \dots, \mu_b, \beta_1, \dots, \beta_p)^T$  tiene dimensión  $b+p$  y la matriz de información correspondiente tiene la forma

$$M_{\infty} = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & \mathbf{1}_m^{\top} \mathbf{F}_1 \\ & & & \vdots \\ & m\mathbf{I}_b & & \mathbf{1}_m^{\top} \mathbf{F}_b \\ \hline \mathbf{F}_1^{\top} & \cdots & \mathbf{F}_b^{\top} \mathbf{1}_m & \sum_{i=1}^b \mathbf{F}_i^{\top} \mathbf{F}_i \end{array} \right) \quad (2.0.10)$$

Para  $\beta$  la matriz de información parcial correspondiente se puede calcular

$$M_{\beta, \infty} = \sum_{i=1}^b \mathbf{F}_i^{\top} \mathbf{F}_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^b \mathbf{F}_i^{\top} \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^{\top} \mathbf{F}_i \quad (2.0.11)$$

De ahí se obtiene el siguiente resultado, que establece la matriz de información parcial  $M_{\beta, d}$ .

**Lema 1.**

$$M_{\beta, d} = \frac{1}{1 + md} M_{\beta, 0} + \frac{md}{1 + md} M_{\beta, \infty} \quad (2.0.12)$$

*Tenga en cuenta que la matriz de información parcial  $M_{\beta, d}$  tiende a  $M_{\beta, \infty}$  cuando  $d$  tiende a  $\infty$ .*

## 2.1 Aspectos del diseño

La calidad de los estimadores  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\beta}$  depende de la configuración experimental  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, b$ ,  $j = 1, \dots, m$ , a través de las matrices de información  $M_d$  y  $M_{\beta, d}$ , respectivamente. El objetivo en el diseño experimental es elegir los puntos de una región diseño  $\mathcal{X}$  con el fin de minimizar la covarianza  $\text{Cov}(\hat{\theta})$  o  $\text{Cov}(\hat{\beta})$  o partes de ella, lo cual es equivalente a maximizar las correspondientes matrices de información  $M_d$  o  $M_{\beta, d}$  respectivamente. Como esas matrices no

están completamente ordenadas, una optimización uniforme no es posible, en general. Por lo tanto, algunos funcionales de valores reales que ponen énfasis en las propiedades particulares de los estimadores se optimizarán. El criterio de diseño más usado es el  $D$ -criterio, que tiene como objetivo maximizar el determinante de la matriz de información  $M_d$ . Esto es equivalente a minimizar el volumen de un elipsoide de confianza para  $\theta$  bajo la suposición de normalidad.

Si el interés está en los efectos  $\beta$  solamente,  $D_\beta$ -optimalidad se define en términos de la determinante de la inversa  $M_{\beta,d}^{-1}$  de la correspondiente matriz de información parcial. Como se ve a continuación,

$$\begin{aligned}
 \det(M_d) &= \left| \frac{1}{1+md} \begin{pmatrix} bm & \sum_{i=1}^b \mathbf{1}_m^\top F_i \\ \sum_{i=1}^b F_i^\top \mathbf{1}_m & (1+md) \sum_{i=1}^b F_i^\top F_i - d \sum_{i=1}^b F_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top F_i \end{pmatrix} \right| \quad (2.1.1) \\
 &= \left( \frac{1}{1+md} \right)^{p+1} |bm| \left| (1+md) \sum_{i=1}^b F_i^\top F_i - d \sum_{i=1}^b F_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top F_i \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^b F_i^\top \mathbf{1}_m (bm)^{-1} \sum_{i=1}^b \mathbf{1}_m^\top F_i \right| \\
 &= \left( \frac{1}{1+md} \right)^{p+1} |bm| \left| \sum_{i=1}^b F_i^\top F_i + md \sum_{i=1}^b F_i^\top F_i - d \sum_{i=1}^b F_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top F_i \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{bm} \sum_{i=1}^b F_i^\top \mathbf{1}_m \sum_{i=1}^b \mathbf{1}_m^\top F_i \right| \\
 &= \left( \frac{1}{1+md} \right)^{p+1} |bm| \left| \sum_{i=1}^b F_i^\top F_i - \frac{1}{bm} \sum_{i=1}^b F_i^\top \mathbf{1}_m \sum_{i=1}^b \mathbf{1}_m^\top F_i \right. \\
 &\quad \left. + md \left( \sum_{i=1}^b F_i^\top F_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^b F_i^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top F_i \right) \right| \\
 &= \left( \frac{1}{1+md} \right)^{p+1} |bm| |M_{\beta,0} + md M_{\beta,\infty}| \\
 &= \left( \frac{1}{1+md} \right)^{p+1} |bm| \left| (1+md) \left( \frac{1}{1+md} M_{\beta,0} + \frac{md}{1+md} M_{\beta,\infty} \right) \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{1+md} \right)^{p+1} |bm| \left| (1+md) \mathbf{M}_{\beta,d} \right| \\
&= \left( \frac{1}{1+md} \right)^{p+1} |bm| (1+md)^p \left| \mathbf{M}_{\beta,d} \right| \\
&= \frac{bm}{1+md} \det(\mathbf{M}_{\beta,d})
\end{aligned}$$

sujeta por la fórmula para el determinante de matrices particionadas. Por lo tanto,  $D$  y  $D_\beta$ —optimalidad coinciden también en modelos de interceptos aleatorios, un hecho bien conocido en el ajuste de efectos fijos.

**Lema2.** *Un diseño  $(x_{ij})$  es  $D$ —óptimo si y sólo si es  $D_\beta$ —óptimo.*

Si tenemos en cuenta los diseños que son uniformes en todos los bloques, es decir, en que los parámetros experimentales son los mismos para cada bloque,  $x_{ij} \equiv x_j$ , , entonces la situación se simplifica radicalmente. En este caso las matrices de diseños individuales coinciden,  $F_i = F_1$  y  $X_i = X_1$ , respectivamente, y  $X_1$  tiene que ser de rango columna completa para permitir estimabilidad de  $\theta$ . Además,  $\hat{\theta} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \hat{\theta}_i$  se reduce a la media de los valores ajustados de forma individual para los parámetros.

La matriz de covarianza estandarizada  $M_d^{-1}$  se descompone de forma aditiva en la matriz correspondiente  $M_0^{-1}$  para el modelo de efectos fijos y sin intercepciones individuales y la variabilidad de la intersección aleatoria (véase, por ejemplo, Entholzner y otros., (2005)). Para la matriz de información reducida observamos

$$M_{\beta,0} = b \left( F_1^\top F_1 - \frac{1}{m} F_1^\top \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top F_1 \right) = M_{\beta,\infty} \quad (2.1.2)$$

y, en consecuencia, por el Lema 1  $M_{\beta,d} = M_{\beta,0}$  es independiente de  $d$ . Así, el diseño

**D—óptimo para el modelo de efectos fijos y sin intersecciones individuales es D— y  $D_\beta$ —óptimo para cada  $d \geq 0$  visto en el Lema 2.**

### Ejemplo de aplicación del modelo propuesto

**Consideremos el modelo de regresión cuadrático en dos variables sin interacciones**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \epsilon_i; (x_{1i}, x_{2i}) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

**El diseño  $\xi$  el cual asigna iguales pesos  $\frac{1}{9}$  a las cuatro esquinas  $(\pm 1, \pm 1)$ , a los cuatro puntos centrales de los lados  $(0, \pm 1)$ ;  $(\pm 1, 0)$  y al punto central  $(0, 0)$  de la región experimental. Este diseño es D—óptimo para este modelo. Si el diseño  $\xi$  es bloqueado como sigue**

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} (-1, 0) & (0, 1) & (1, -1) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} (-1, -1) & (0, 0) & (1, 1) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} (-1, 1) & (1, 0) & (0, -1) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

**Entonces por el lema 2,  $\xi$  es D—óptimo para el correspondiente modelo en la presencia de efectos de bloques con respuesta**

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{1ij} + \beta_2 x_{2ij} + \beta_{11} x_{1ij}^2 + \beta_{22} x_{2ij}^2 + \gamma_i + \epsilon_{ij},$$

**en la  $j$ -ésima corrida sobre el bloque  $i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ) con pesos dados por  $\xi(i, (x_{1ij}, x_{2ij})) = \frac{1}{3} \xi_i(x_{1ij}, x_{2ij})$ . Además este diseño D—óptimo por bloques no depende del cociente de varianza  $d$ .**

## Conclusiones y trabajos futuros

**E**n el presente trabajo se desarrolla la matriz de información de los criterios fijos en un modelo de regresión lineal en la presencia de efectos de bloques aleatorios como una combinación convexa de las matrices de información de los modelos límites cuando la varianza del efecto de bloque es cero o tiende a infinito.

Por otro lado, se muestra que los diseños óptimos para modelos de efectos fijos también son óptimos para modelos en la presencia de efectos de bloques aleatorios siempre que los bloques sean uniformes.

$D$  y  $D_\beta$ -óptimalidad coinciden también en modelos en la presencia de efectos de bloques aleatorios, un hecho ya conocido en los escenarios con efectos fijos.

Para trabajos futuros se pueden considerar modelos en la presencia de efectos de bloques aleatorios donde los parámetros de regresión interactúan con diferentes grupos o tratamientos.



- [1] Atkins and Cheng. (1998). Optimal regression designs in the presence of random block effects. JSPI 77, 321-335.
- [2] Cheng. Optimal regression designs under random blocks-effects models. (1995). Statistica Sinica 5, 485-497.
- [3] Debusho and Haines. (2007). V- and D-optimal population designs for the simple linear regression model with a random intercept term. Journal of Statistical Planning and inference 138, 1116-1130.
- [4] Entholzner, M., Benda, N., Schwabe, R. (2005). A note on designs for estimating population parameters. Biometrical Letters 42, 25-41.
- [5] Fedorov, V.V. (1972) Theory of Optimal Experiments. Academic Press, New York.
- [6] Fedorov, V.V. (1997). Model-Oriented Design of Experiments. Springer, New York.
- [7] Goos, Peter. (2002) The Optimal Design of Blocked and Split-Plot. Springer, New York.
- [8] GraBhoff, U and Schwabe, R. (2003). On the analysis of paired observations. Statistics and Probability Letters 65, 7-12.
- [9] Norell, L. (2006). Optimal designs for maximum likelihood estimators in the one-way random model. U.U.D.M. Report 2006:24. Department of Mathematics, Uppsala University.
- [10] Schmelter, T. and Schwabe, R. (2008). On optimal designs in random intercept models. Tetra Mountains Mathematical Publications. 39, 145-53.



- [11] Schwabe, R. (1996). Optimum Designs for Multi-Factor Models. Springer, New York.
- [12] Silvey, S.D. (1980). Optimal Designs. Chapman & Hall, London.
- [13] Van Breukelen, G.J.P., Candel, M.J.J.M. and Berger, M.P.F. (2008). Relative efficiency of unequal cluster sizes for variance component estimation in cluster randomized and multicentre trials. *Statistical Methods in Medical Research*, 17, 439-58.

## **Diseños Óptimos En La Presencia De Efectos De Bloques Aleatorios**

Al interior de los experimentos estadísticos la teoría de los diseños óptimos ha sido desarrollada. En general el tema de esta teoría es que para un apropiado modelo, si queremos poner énfasis sobre una cualidad particular de los parámetros a estimar, entonces la configuración experimental debería ser elegida de acuerdo a ciertos criterios con sentido estadístico. En la literatura relacionada con los diseños óptimos, un prominente autor fue Kiefer (1959), el cuál presentó los principales conceptos, tales como diseños aproximados y una variedad de criterios de optimalidad para esta rama de los diseños de experimentos; Kiefer, en particular dio el nombre  $D$ —optimalidad al criterio introducido por Wald (1943), este criterio es el más comunmente aplicado y está definido en función del determinante de la matriz de covarianza.

Más recientemente son reconocidos los libros de Atkinson y Donev (1992) y Pukelsheim (1993), donde los autores hacen una presentación estadística formal de los diseños óptimos. El presente trabajo se ha organizado en tres capítulos: el capítulo uno (Preliminares) contiene conceptos generales que sirven de apoyo y base a la teoría que se desarrolla en los siguientes dos capítulos. El capítulo dos trata sobre diseños óptimos en la presencia de efectos de bloques aleatorios, y en el capítulo tres se daran a conocer las conclusiones y una serie de problemas abiertos para futuras investigaciones relacionadas con el tema central de este trabajo de investigación.

**Programa de Matemáticas**

Universidad del Atlántico