Geometría con regla y compás

UNIVERSIDAD DEL NORTE ÁREA DE CIENCIAS BÁSICAS
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA Esp. ANTALCIDES OLIVO

August 20, 2012

Contenido

Página

1. Definiciones y construcciones

La geometría nace de la necesidad de los antiguos Egipcios en medir sus tierras después de una inundación del río Nilo, luego los griegos la convirtieron en una disciplina hasta cuando Euclides la organizó convirtiéndola en la primera rama de las matemáticas que fue axiomatizada. Decir que la geometría fue axiomatizada, quiere decir que tiene una estructura de la siguiente forma:

- Lo primero es establecer un conjunto mínimo de términos, los cuales no se pueden definir, pero que de forma natural se pueden conocer sus características o propiedades.
- A partir de los elementos anteriores se construyen otros usando proposiciones en forma de equivalencia. estas proposiciones se llaman definiciones.
- Luego se establecen un conjunto de propiedades independientes, los cuales son ciertos por si solos , es decir su validez es evidente. A este conjunto de propiedades se llaman axiomas y/o postulados.
- Para terminar se construyen a partir de todo lo anterior un conjunto ilimitado de propiedades, las cuales no son evidentes por si solas y por lo tanto es necesario demostrarlas a partir de proposiciones verdaderas usando los métodos de demostración establecidos por la lógica.

Antes de empezar la construcción de la geometría estableceremos alguna ideas generales.
Por ejemplo:

Término. 1. 1.

Término es una palabra o propiedad que representa a un elemento o la relación entre varios elementos.

Término. 1. 2. Cantidad

Cantidad es cualquier objeto y/o fenómeno que puede ser medida, es decir, medir un objeto es encontrar cuántas veces contiene un patrón del mismo tipo al objeto. A ese patrón tomado como estándar. Se llama unidad de medida.

En `GEOMETRÍA` hay cuatro especies de cantidades, `LÍNEAS, SUPERFICIES, VOLUMEN y ÁNGULOS`. Estas son llamadas MAGNITUDES GEOMÉTRICAS. Dado que la unidad de medida de una cantidad es del mismo tipo que la cantidad medida, hay cuatro tipos de unidades de medición: unidades de **longitud**, unidades de **superficie**, unidades de **volumen** y unidades de **medida angular**.
Basandonos en la anterior idea podemos establecer lo que es la geometría.

Término. 1. 3. Geometría

GEOMETRÍA es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades, relaciones y medidas de las magnitudes geométricas.

En Geometría, las medidas de las cantidades consideradas son generalmente representadas por medio de letras minúsculas. Las operaciones a realizarse con las medidas de las cantidades y las relaciones entre ellas, son las establecidas por el **álgebra**.
Si a y b son medidas de cantidades geométricas, se tiene:

- La operación **adición** , la cual usa el signo llamado más, $+$; Entonces, $a+b$ indica que b y a son sumados.
- La operación **substracción**, la cual usa el signo llamado menos, $-$; Entonces, $a-b$ indica que b es el sustraendo y a el minuendo.
- La operación **multiplicación o producto**,la cual usa el signo llamado por, $\cdot$;

Entonces, $a \cdot b$ indica que a y b son factores.

- La operación **división**, la cual usa el signo $/$, llamado entre; Entonces, a/b, indica que b es el divisor y a el dividendo.
- La **potenciación** a^n , indica que a se tomará n veces como factor, o elevado a la enésima potencia, Nota: $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$.
- La **radicación** $\sqrt[n]{a}$, indica que existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$.
- La relación **igualdad** $a = b$, lo que significa que $a - b$ es 0.
- La relación **menor que** $a < b$, lo que significa que $a - b \in \mathbb{R}^-$.
- La relación **mayor que** $a > b$, lo que significa que $a - b \in \mathbb{R}^+$.
- La relación **menor o igual** $a \leq b$, lo que significa que $a = b$ o $a < b$,
- La relación **mayor o igual** $a \geq b$, lo que significa que $a = b$ o $a > b$,

En todos los casos las medidas de las cantidades geométricas son números reales no negativos.
Nota: Estudiar las propiedades de las operaciones y las relaciones de los números reales en el apéndice A.

Término. 1. 4. Proposición

Una **proposición** es un enunciado al cual se le puede asignar un valor de verdad, es decir puede ser falso o verdadero, pero no ambas.

♣

Por ejemplo:

- $3 + 2 = 5$. De acuerdo con la definición de adición entre naturales, este enunciado es verdadero, por lo tanto es una proposición.
- Mañana llueve. esto es algo que no se puede saber antes de termine el día, por lo tanto no se le puede asignar un valor de verdad, es decir este enunciado no es una proposición.

Término. 1. 5. Tautología

Una **tautología** es una proposición que siempre es verdadera.

♣

A las tautologías a veces en geometría se les llama verdades geométricas o afirmaciones. Las verdades generales de la geometría se deducen a partir del razonamiento lógico, siendo las premisas definiciones, postulados o principios previamente establecidos. El razonamiento utilizado para establecer cualquier verdad o principio es llamado una demostración.

Término. 1. 6. Definición

Una **definición** es una afirmación que explica el significado de un término o una palabra, en función de palabras o términos conocidos. ♣

En caso de que un término no se pueda expresar en función de otros términos ya establecidos, se dice que es un término no definido.

Término. 1. 7. Teorema

Un **teorema** es una verdad que requiere demostración. ♣

Término. 1. 8. Axioma

Un **axioma** es una verdad auto-evidente. ♣

Un **PROBLEMA** es una situación o proposición que requiere solución.

Término. 1. 9. Postulado

Un **Postulado** es un problema auto-evidente. ♣

Término. 1. 10. Hipótesis

Una **hipótesis** es una suposición hecha, bien en el texto de una proposición, o en el curso de una demostración. ♣

1.1 Términos no definidos

En geometría tenemos que utilizar algunos elementos que no podemos definir, lo que podemos hacer es tener una idea de lo que son. Estos elementos son; el punto, la linea recta y el plano. Un punto lo representa la marca que deja un lápiz de punta muy fina en una hoja de papel.

Término no definido. 1. 1. El Punto

Podemos decir que representa un punto, no lo que es un punto:
Un punto lo representa la marca que deja un lápiz de punta muy fina en una hoja de papel.

Los punto se denotan con letras mayúsculas, generalmente las primeras del alfabeto. por ejemplo:

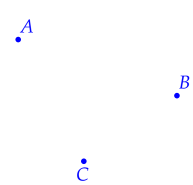


Figura 1.1: Los puntos A,B y C

Término no definido. 1. 2. Linea Recta

Una linea recta la representa una cuerda delgada y tensa la cual es infinitamente larga.

Las rectas se denotan con letras minúsculas, generalmente a partir de la l también podemos tomar dos puntos sobre ella como por ejemplo:

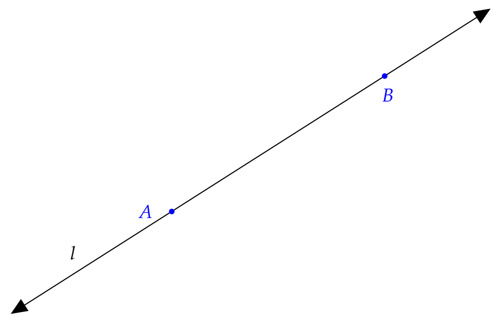


Figura 1.2: Linea l

La recta de la figura (1.2) se denota: $\overleftrightarrow{AB}$ o l

Término no definido. 1. 3. El Plano

Una buena idea de lo que es el plano es decir que lo representa una hoja de papel delgada e infinitamente grande.

Los planos se denotan con letras góticas mayúsculas, por ejemplo:

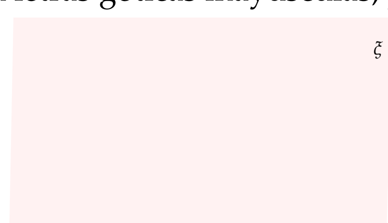


Figura 1.3: El Plano

El plano ξ en la figura (1.3).
Nota: Observe que la figura (1.3) no tiene bordes, lo cual significa que es ilimitado.

1.2 Definiciones preliminares

Después de identificar el punto la recta y el plano podemos definir a partir de ellos otros elementos de la geometría como los que veremos en esta sección.

Definición. 1.1. El Espacio

El espacio es el conjunto de todos los puntos ♡

De la definición podemos deducir que el espacio es un ente abstracto pero que existe porque por lo menos podemos construir un punto y este punto estaría en el espacio, veamos que es evidente que existen infinitos puntos y que muchos no se encuentran en un plano por lo que es necesario hablar del espacio.

Definición. 1.2. Segmento de recta

Un segmento de recta es un subconjunto de la linea recta determinado por dos puntos y todos los puntos que se encuentran entre ellos. ♡

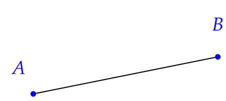


Figura 1.4: Segmento de recta

Notación: Sean A y B dos puntos de una recta, el segmento determinado por ellos se denota como $\overline{AB}$. A los puntos A y B se les lama extremos del segmento

Definición. 1.3. Puntos colineales

Los puntos de un conjunto se dice que están alineados o son colineales si existe una recta que los contiene a todos. ♡

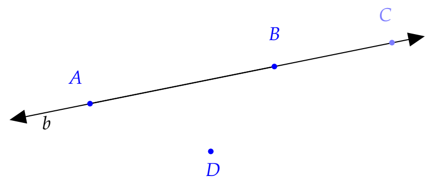


Figura 1.5: Punto Alineados

Por ejemplo en la figura (1.5) el conjunto de puntos $\{A, B, C\}$ es un conjunto de puntos alineados, mientras que el conjunto de puntos $\{A, B, C, D\}$ no es un conjunto de puntos alineados, porque el punto D no está en la recta $\overleftrightarrow{b}$.

Definición. 1.4. Puntos coplanarios

Los puntos de un conjunto son coplanarios si existe un plano que los contiene a todos.

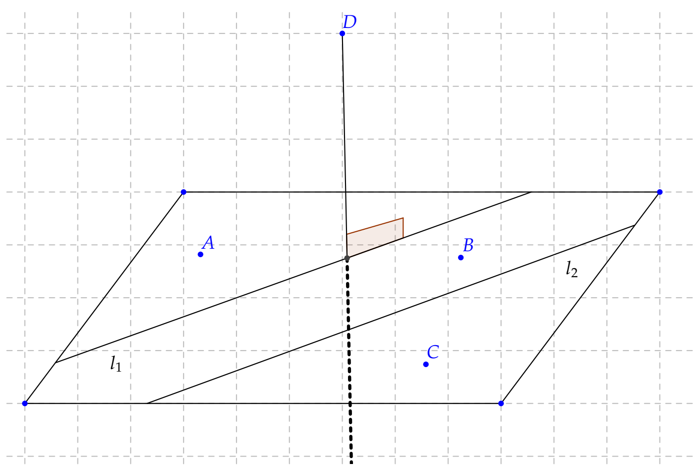


Figura 1.6: Puntos coplanarios

En la figura suponemos que el punto D no está en el plano.

Ejemplo. 1.1

La figura (1.6) nos muestra varios conjuntos de puntos indiquemos si son o no coplanarios

Solución:

- Las rectas l_1 y l_2 son coplanarias
- Los puntos A, B y C son coplanarios
- Los puntos A, B, C y D no son coplanarios
- La recta l_1 y el punto A son coplanarios
- La recta l_2 y el punto D no son coplanarios.

Definición. 1.5. **Rectas Intersecantes**

Son dos o mas rectas que se intersecan en un punto.

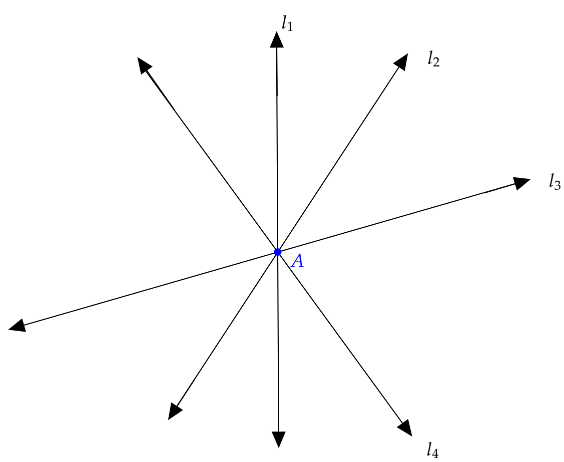


Figura 1.7: rectas Intersecantes

La intersección de las rectas l_1,l_2,l_3 y l_4 en la figura (1.7) es el punto A, por lo tanto son intersecantes

Definición. 1.6. Rectas Paralelas

Dos recta son paralelas si y sólo si son coplanarias y no son intersecantes ♡

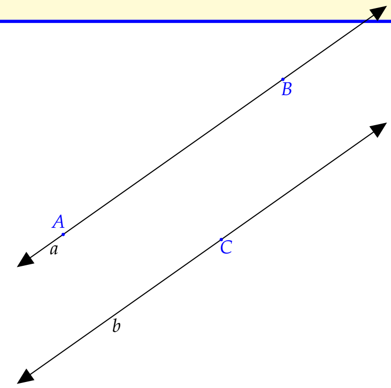


Figura 1.8: Rectas Paralelas

Definición. 1.7. Rectas alabeadas

Dos rectas son alabeadas si y sólo si no son coplanarias y no se intersecan ♡

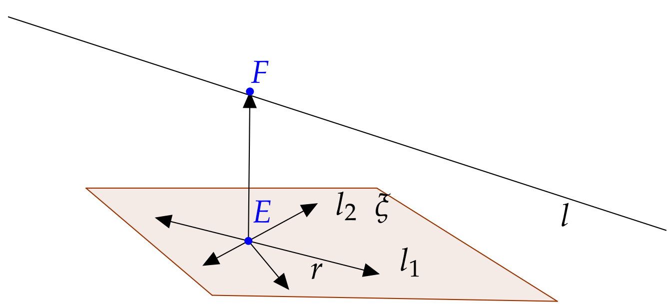


Figura 1.9: Rectas alabeadas

En la figura (1.9 el punto C no está en plano ξ, por lo tanto como las rectas l_1 y l_2 no son coplanarias y no se cortan, entonces son alabeadas.

En la geometría **Euclideana** se establecen cinco postulados, nosotros estableceremos aquí sólo dos para facilitar el desarrollo, y en el segundo capítulo estableceremos más de tres para facilitar la construcción. [1].

Postulado.1.1. De la regla

Entre los números reales y los puntos de una recta se puede establecer una correspondencia biunívoca, es decir a cada punto de la recta le podemos asignar uno y sólo un número real y cada número real le podemos asignar uno y sólo un punto de la recta.

♣

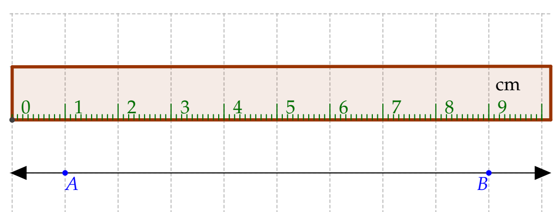


Figura 1.10: Postulado de la regla

En la figura (1.10) de acuerdo con el postulado de la regla, al punto A se le asigna el número 1 y al punto B se le asigna el número 9.

La anterior correspondencia lo tomaremos como un postulado, porque no podemos garantizar que a cada punto le corresponde un número natural, pero parece ser evidente que si le corresponde un número real.

Definición. 1.8. Coordenada de un punto

Al número que la anterior correspondencia le asigna a un punto de la recta se le llama coordenada del punto

♡

Por ejemplo en la figura (1.10) 1 es la coordenada del punto A y se denota: $A(1)$ que se lee el punto A con coordenada 1.

[1]En los "Elementos de Euclides" se establecen un conjunto de tres términos no definidos,132 definiciones, 5 postulados, 5 axiomas y 465 teoremas repartidos en 13 libros.

Ejemplo. 1.2

Sean A y B dos puntos de una recta y sean a y b los números reales que la relación biunívoca le asigna a los puntos entonces denotamos $A\,(a)$ y $B\,(b)$ para indicar que a y b son las coordenadas de los puntos A y B

Definición. 1.9. Valor absoluto

Sea a un número real se define el valor absoluto de a $(|a|)$ como:

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{si } a \leq 0 \\ a, & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Ejemplo. 1.3

Calcular $|-3|$

Solución: al aplicar la definición de valor absoluto tenemos que como $a = -3 < 0$, entonces $|-3| = -(-3) = 3$.

Ejemplo. 1.4

Calcular $\left|\sqrt{2}\right|$

Solución: si aplicamos la definición de valor absoluto obtenemos que si $a = \sqrt{2} > 0$, entonces $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$.

Definición. 1.10. Distancia entre dos puntos de una recta

Sean $A\,(a)$ y $B\,(b)$ dos puntos sobre una recta, la distancia entre los puntos A y B se define:

$$AB = |b - a|$$

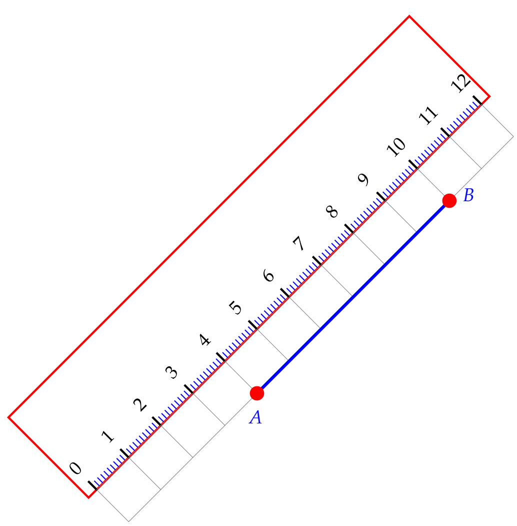
Ejemplo. 1.5

Calcular la distancia entre los puntos A y B de la figura (1.10)

Solución: Del postulado de la regla obtenemos $A(1)$ y $B(9$, así de acuerdo con la definición de la distancia entre dos puntos obtenemos $AB = |9cm - 1cm| = 8cm$.

Ejemplo. 1.6

Calcule la longitud de $\overline{AB}$



Ejemplo. 1.7

Sean $A\,(3\text{cm})$ y $B\,(-6\text{cm})$ dos puntos de una recta l calcule la distancia entre A y B ▲

Solución: Si aplicamos la definición de distancia obtenemos

$$AB = |-6\text{cm} - 3\text{cm}| = 9\text{cm}$$

Definición. 1.11. Longitud de un segmento de recta

Sean $A\,(a)$ y $B\,(b)$ los extremos del segmento $\overline{AB}$ se define la longitud o medida del segmento, como la distancia entre sus extremos

$$m\overline{AB} = |b - a|$$

♡

Término. 1. 11. Objetos congruentes

Dos objetos o elementos son congruentes si y sólo sí tienen la misma forma y el mismo Tamaño ♣

también podemos decir que dos objetos son congruentes si al sobreponer uno sobre el otro los dos coniciden exactamente.

Definición. 1.12. Segmentos congruentes

Dos segmentos son congruentes si y sólo si tienen la misma longitud o medida. ♡

Definición. 1.13. Circunferencia

El conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, se llama circunferencia ♡

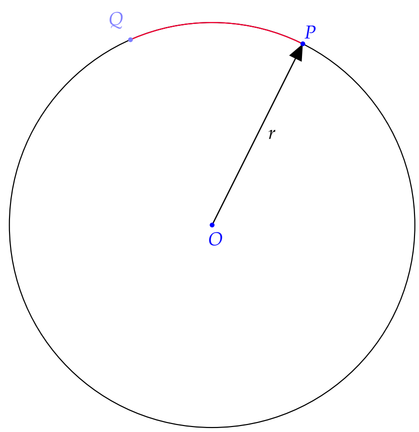


Figura 1.11: La circunferencia

Nota: **Elementos de la circunferencia.**

- Centro : Al punto fijo se le llama centro, por ejemplo el punto O en la figura (1.11).

- A la distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia se le denomina radio, por ejemplo el radio de la figura (1.11) es $r = OP$.

- Un subconjunto de al menos dos puntos de la circunferencia se le llama arco, por ejemplo el subconjunto entre P y Q en la figura (1.11), y se denota $\overset{\frown}{PQ}$.

Definición. 1.14. Circulo.

A un conjunto de puntos X se le llama circulo. Si dada una circunferencia de radio r y centro O, el conjunto de puntos X cumple la siguiente condición. $OX < r$

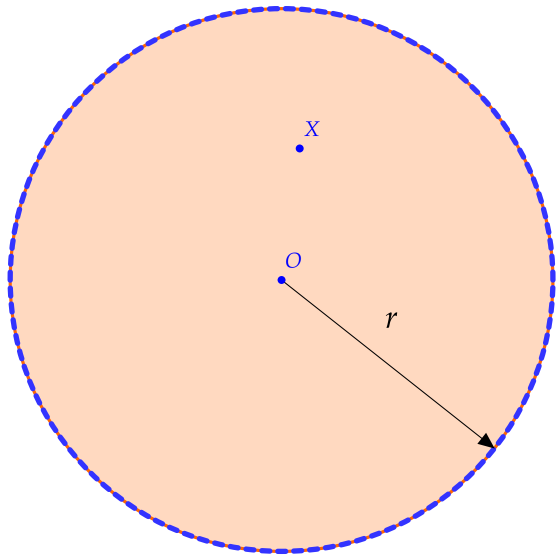


Figura 1.12: Circulo

Observe que la circunferencia es el conjunto de puntos en azul y el circulo es el conjunto de puntos en rosado.

Definición. 1.15. **Estar entre**

Se dice que un punto de una recta B está entre dos puntos distintos A y C si se cumple que

$$AB + BC = AC$$

♡

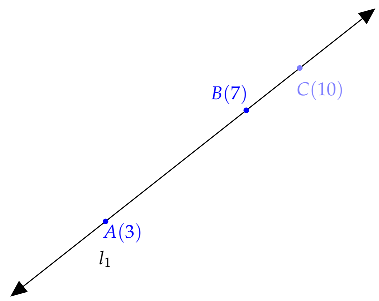


Figura 1.13: Estar entre

Ejemplo. 1.8

Verificar que B está entre A y C.

Solución: al aplicar la definición de estar entre y de la distancia entre dos puntos observamos que:

$$AB + BC = |7 - 3| + |10 - 7| = 4 + 3 = 7 \text{y} AC = |10 - 3| = 7.$$

O sea que se cumple, por lo que podemos afirmar que B está entre A y C.

Definición. 1.16. **Rayo**

Sea una recta l y sean A, B y X puntos de l , el conjunto de puntos del segmento $\overline{AB}$ y todos los puntos X para los cuales se cumple una y sólo una de las dos condiciones

- B está entre A y X
- A está entre B y X

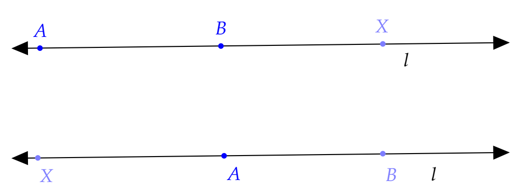


Figura 1.14: Rayo

El rayo que contiene al segmento $\overline{AB}$ se denota $\overrightarrow{AB}$ o $\overleftarrow{AB}$ y al extremo se le llama origen

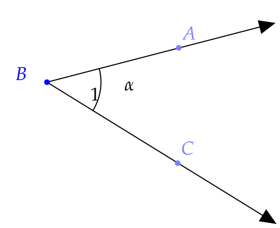
Nota: De la definición de rayo podemos deducir que un punto divide a una recta en dos rayos

Definición. 1.17. Ángulo

Un ángulo es el conjunto determinado por la unión de dos rayos de origen común

- **Vértice:** el vértice de un ángulo es el origen de los rayos que se intersecan
- **Lados:** Los lados de un ángulo son los rayos que lo forman
- **Notación:** Sea el ángulo formado por los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ entonces se denota $\widehat{ABC}$ o $\widehat{A}$, también se puede denotar con numéros como 1 o con letras griegas minúsculas, como α

Figura 1.15: Ángulo



Definición. 1.18. Conjunto convexo

Un conjunto de puntos se llama convexo si para cada par de puntos A y B, del conjunto, todo segmento $\overline{AB}$ está contenido en el conjunto. Si no se cumple está condición se dice que el conjunto es cóncavo

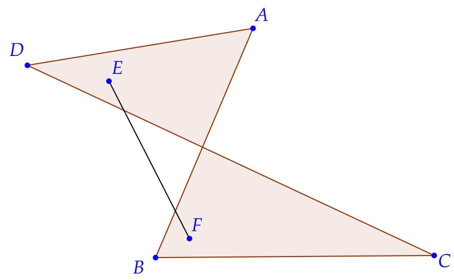


Figura 1.16: Conjunto cóncavo

En la figura (**??**) vemos que en el conjunto sombreado determinado por los puntos A, B, C, y D se puede construir un segmento EF de tal forma que no está contenido totalmente en él. Por que el conjunto no es convexo si no cóncavo.

Ejemplo. 1.9

La linea recta es un conjunto convexo

Ejemplo. 1.10

El ángulo divide el plano en tres conjuntos de puntos.

- El ángulo, el cual es un conjunto cóncavo.
- Un conjunto convexo, el interior.
- Un conjunto cóncavo, el exterior.

Trabajar con conjuntos cóncavos o convexos es a veces confuso, por lo que es mejor trabajar con conjuntos de puntos llamadas regiones planas

Definición. 1.19. **Región plana.**

Una región plana es un conjunto de puntos que cumple la siguiente condición. Para cada punto X del conjunto existe un circulo centrado en X tal que este está contenido en el conjunto

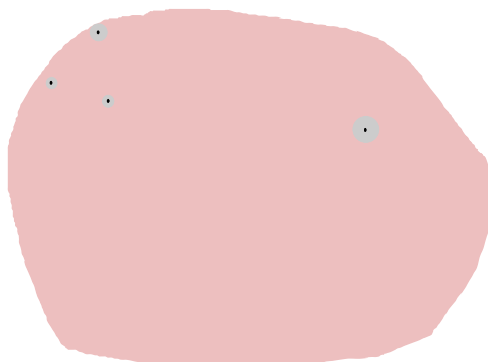


Figura 1.17: Región Plana

Como podemos observar en la figura **??** en cada punto de la gráfica rosada podemos trazar un circulo de radio tan pequeño como queramos y este se encuentra contenido en el subconjunto del plano de color rosado, por tanto es una región plana.

Ejemplo. 1.11

En la figura **??** se representa un conjunto de puntos del plano que no es una región plana, porque para cada punto del conjunto no existe un circulo que se encuentre contenido en el conjunto. ▲

Ejemplo de un conjunto de puntos que no es región

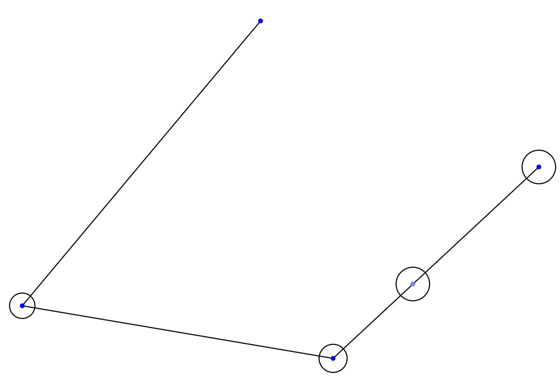


Figura 1.18: Ejemplo

Utilizando el concepto de región plana podemos decir que un ángulo divide el plano en dos regiones planas, una convexa y otra cóncava, a la región convexa se le llama interior del ángulo. Como se indica en la figura **??**

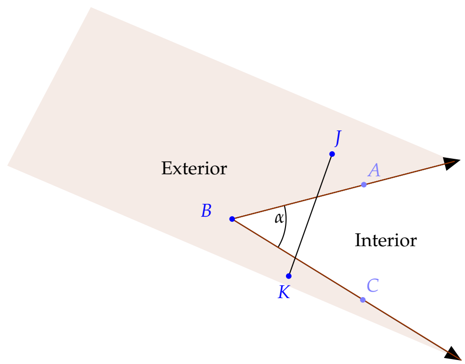


Figura 1.19: Regiones del ángulo

Definición. 1.20. Polígonos

Un polígono es la unión de segmento que se intersecan en sus extremos, de tal manera que como máximo dos segmentos se cortan en un punto y cada segmento se interseca exactamente con otros dos segmentos.

Nota: **Elementos de un polígono:**

- **Vértice:** Es el punto de intersección de los segmentos.
- **Lados:** Son los segmentos que forman el polígono.
- **Ángulo:** Es al ángulo interior formado por dos lados y el vértice común.

Ejemplo. 1.12

En la figura (**??**) indique cuales de los conjuntos dados son polígonos.

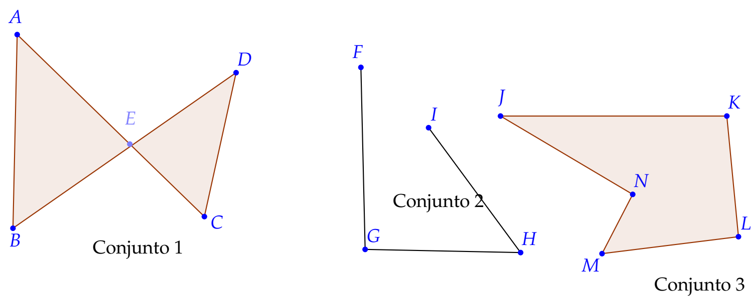


Figura 1.20: Conjuntos de puntos

Solución:

- El conjunto 1 no es polígono, porque por ejemplo $\overline{AC}$ se interseca con tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$
- El conjunto 2 no es un polígono porque $\overline{FG}$ solo se interseca con $\overline{GH}$.
- El conjunto 3 si es polígono porque todos los segmentos se intersecan de dos en dos.

Nota: Al la intersección de las regiones angulares de los ángulos formados por un polígono se le llama región poligonal o interior de un polígono.

Definición. 1.21. sector circular

Un sector circular es el conjunto de puntos formado por la unión de dos radios y el arco que ellos intersecan en sus extremos.

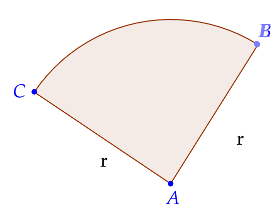


Figura 1.21: Sector circular

Nota: Al sector circular formado por dos radios colineales se le llama semicirculo.

Nota: Al arco que forma un semicirculo se le llama semicircunferencia.

Postulado.1.2. Del transportador

A cada ángulo se le puede asociar dos números reales a y b entre 0 y 180 de la siguiente forma:

- Se construye una semicircunferencia y se divide en 180 arcos congruentes.
- Al punto inicial de la semicircunferencia se le asigna el numero 0 y al punto final se le asigna el numero 180.
- Se coloca el vértice del ángulo en el centro de la semicircunferencia, de tal forma que los lados se intersecan con la semicircunferencia.
- Al punto de intersección de un lado con se semicircunferencia se le hace coincidir un número a que corresponde al arco número a.
- Se determina el numero b del arco de la semicircunferencia que coincide con el otro lado del ángulo y se le asigna ese número al lado.

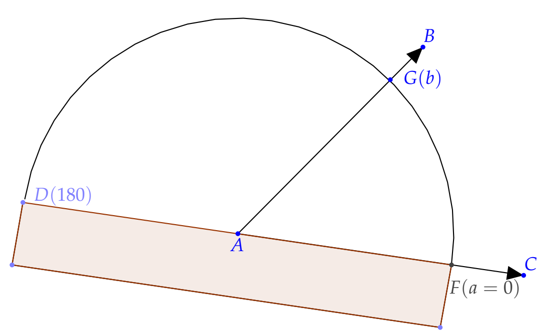


Figura 1.22: Postulado del transportador

Nota: Generalmente el numero a se hace coincidir con el cero como en la figura **(??)**

Definición. 1.22. **Medida de un ángulo**

Sean a y b los números que se le asignan a un ángulo ABC de acuerdo con el postulado del transportador, la medida del ángulo se define:

♡

$$m\angle ABC = |b - a|$$

Ejemplo. 1.13

Calcular la medida del $\angle ABC$ en la figura (**??**), usando el postulado del transportador y la definición de la medida de un ángulo.

▲

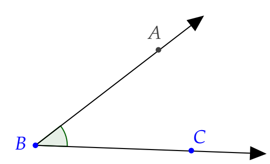


Figura 1.23: medida del un ángulo

Solución: Se toma un transportador y de acuerdo con el postulado, se observa en la figura (**??**) que $a = 20$ y $b = 60$. Y de acuerdo con la definición de medida del ángulo $m\angle ABC = |60 - 20| = 40$.

Nota: generalmente la medida de un ángulo se da en grados, es decir la respuesta del ejemplo anterior es 40 grados que se denota $40°$.

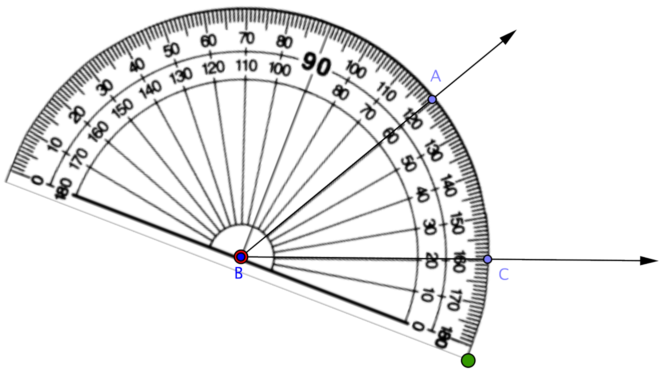


Figura 1.24: Medida de un ángulo

Ejemplo. 1.14

Calcular la medida del $\angle ABC$ ▲

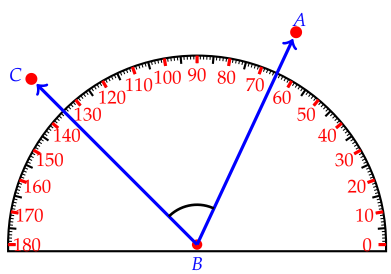


Figura 1.25: Medida de un ángulo

Transportadortrans

Solución: Usando el postulado del transportador y la definición de medida de un ángulo, de la figura(**??**) obtenemos: $\angle ABC = |135 - 65| = 70^{o}$

Definición. 1.23. Ángulos congruentes

Dos ángulos son congruentes si y sólo si tiene la misma medida. ♡

Ejemplo. 1.15

Todos los ángulos rectos son congruentes.

Nota: **Clasificación de los ángulos según su medida.**

- **Ángulo nulo:** Es un ángulo es que tiene con medida cero, es decir sus lados coinciden.
- **Ángulo agudo:** Es un ángulo que tiene una medida mayor que cero y menor de 90 grados.
- **Ángulo recto:** Es un ángulo que tiene como medida 90 grados.
- **Ángulo obtuso:** Es un ángulo que tiene una medida mayor de 90 y menor de 180 grados.
- **Ángulo llano:** Es un ángulo que mide 180 grados, es decir sus lados forman una linea recta.

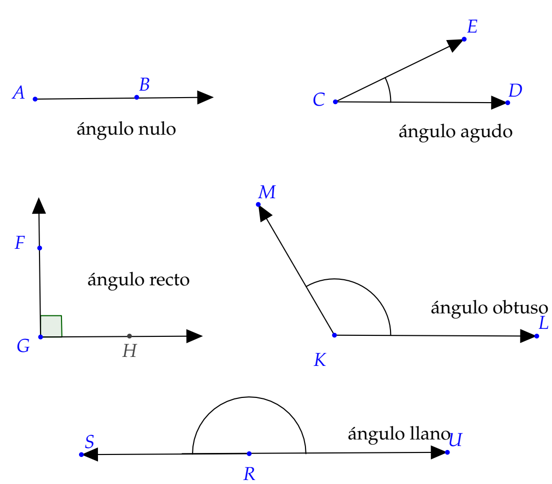


Figura 1.26: Clasificación de los ángulos

Definición. 1.24. Rectas perpediculares

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si al intersectarse forman un ángulo de 90º ♡

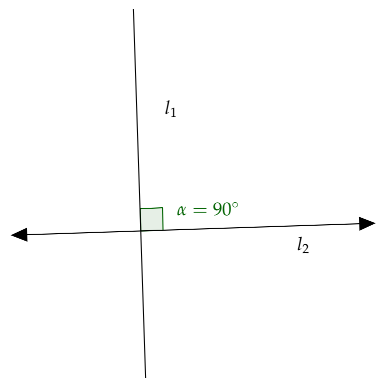


Figura 1.27: Rectas perpendiculares

Definición. 1.25. Recta perpendicular a un plano

Una recta es perpendicular a un plano si y sólo si la recta es perpendicular a cualquier recta que pase por el punto de intersección de la recta y el plano. ♡

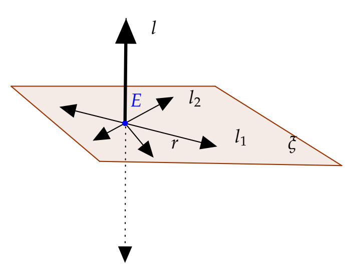


Figura 1.28: Recta perpendicular a un plano

Definición. 1.26. Planos perpendiculares

Dos planos son perpendicularessi en uno de ellos hay una recta perpendicular al otro.

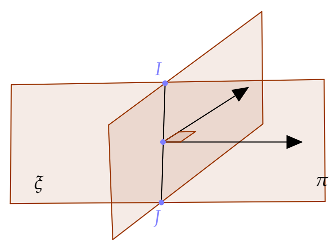
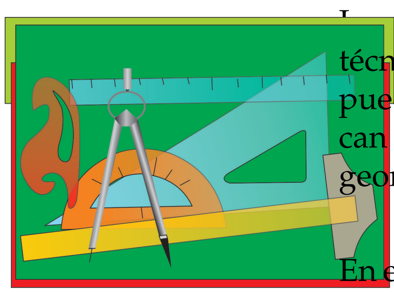


Figura 1.29: Planos perpendiculares

1.3 Construcciones básicas



Los diseñadores utilizan una variedad de instrumentos y técnicas para elaborar sus diseños, a los cuales no se les puede aprovechar en su totalidad, si no se conocen y se aplican las propiedades de los elementos y los conceptos de la geometría.

En esta sección presentaremos las construcciones de las cuales se basan la mayoría de las construcciones más complicadas que utilizaremos en el libro.

Construcción. 1.1 Duplicar un segmento

Para duplicar un segmento hay que realizar los siguientes pasos

- Se construye un segmento.
- Se colocan las puntas de un compás en los extremos del segmento.
- se construye un rayo o una recta donde queremos duplicar el segmento
- Se coloca la punta filosa del compás en un punto de la recta, manteniendo la abertura del primer paso y se dibuja con la otra punta un pequeño. arco sobre la recta.
- El punto de intersección de la recta y el arco es el otro extremo del segmento.

★

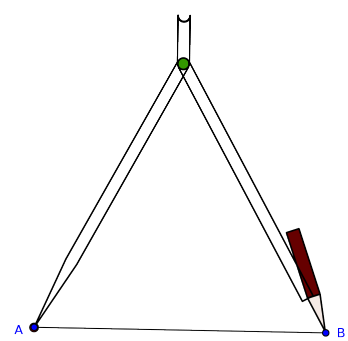


Figura 1.30: Segmento dado

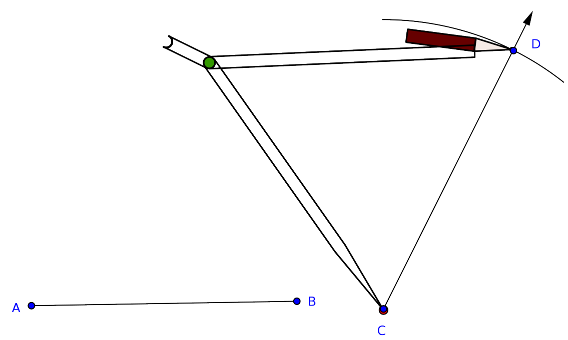


Figura 1.31: Segmento duplicado

De acuerdo con la construcción los segmentos AB y CD de la figura(**??**) son congruentes.

Ejemplo. 1.16

Un triángulo es un polígono de tres lados, usando esta definición. Construya Un triángulo con dos lados congruentes.

Solución: En el triángulo de la figura(**??**) los lados AB y AC son congruentes.

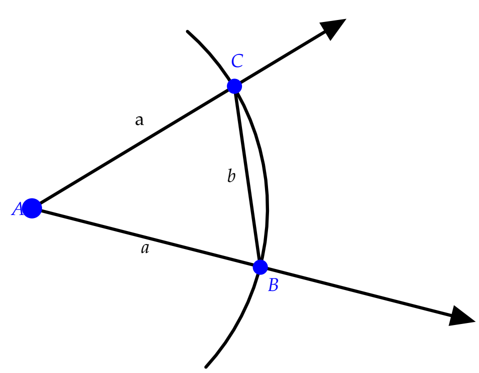


Figura 1.32: Triángulo isósceles.

Construcción. 1.2 Ángulos congruentes

Para construir dos ángulos congruentes se realizan los siguientes pasos:

- Dado un ángulo.
- Se traza un arco con centro en el vértice que corte a los otros dos lados, y se marcan los puntos de intersección.
- Se construye un rayo, para que sea un lado del ángulo a duplicado.
- Con la misma abertura del compás se traza un arco sobre el rayo, con centro en el origen del rayo.
- Coloque la puntas del compás sobre los puntos de intersección del arco y los lados del ángulo dado.
- En el punto de intersección del arco y el rayo trace un nuevo arco centrado en este punto y con la misma abertura del compás del paso anterior.
- una el punto de interseccion de los arcos trazados sobre el rayo y el origen de este.

★

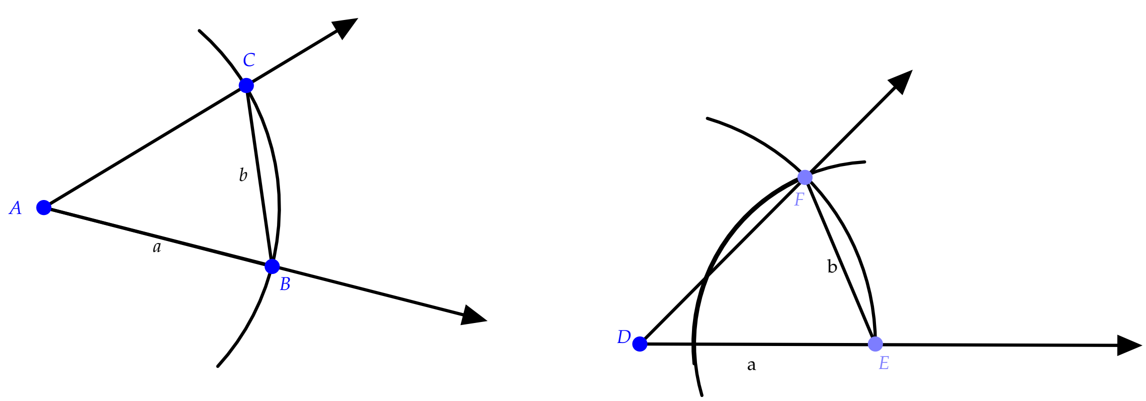


Figura 1.33: Ángulos congruentes

Ejemplo. 1.17

Construya un triángulo con dos ángulos congruentes.

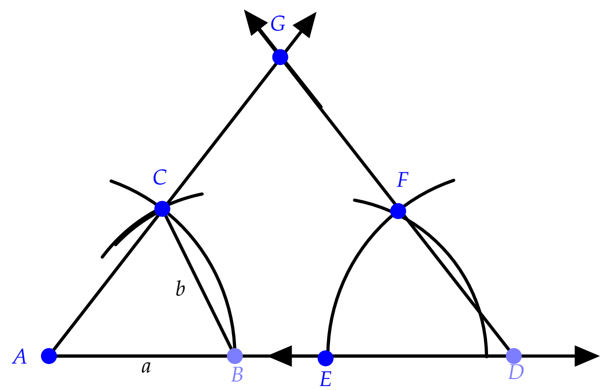


Figura 1.34: Triángulo con dos ángulos congruentes

En el $\triangle$ ADG los ángulos ABC y EDF son congruentes.

Construcción. 1.3 Punto medio de un segmento

Para bisecar un ángulo se realizan los siguientes pasos:

- Dado un segmento
- Se traza una semi circunferencia con centro en un extremo del segmento y que lo intersecte en un punto.
- Se traza una semi circunferencia con centro en el otro extremo, de tal forma que intersecte al primero.
- Se traza un segmento con extremos en los puntos de intersección de las semi circunferencias.
- El punto de intersección de los dos segmentos es el punto medio.

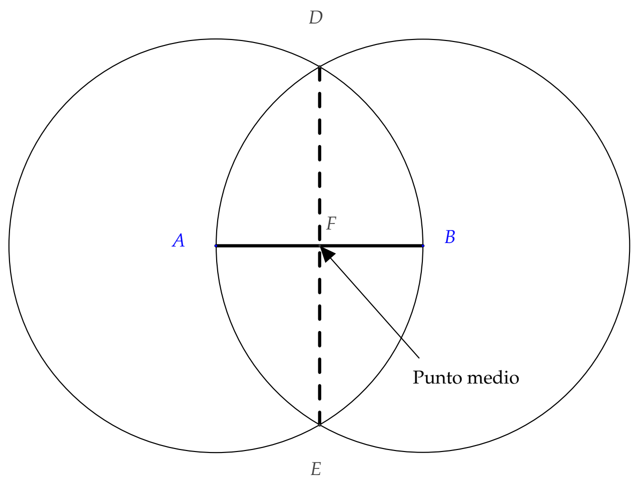


Figura 1.35: Punto medio

Definición. 1.27. Bisectriz de un segmento

La bisectriz de de un segmento es una recta que pasa por el punto medio del segmento.

Construcción. 1.4 Bisectriz de un segmento

Para construir la bisectriz de un segmento que pasa por un punto no alineado con el segmento, se realizan los siguientes pasos.

- Dado un segmento y un punto no alineado.
- Se construye el punto medio del segmento.
- la bisectriz es la recta que pasa por el punto no alineado y el puto medio.

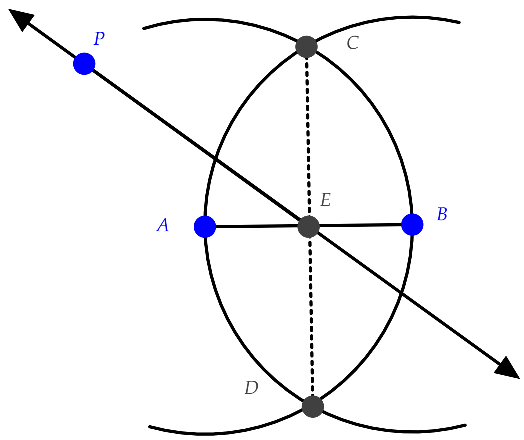


Figura 1.36: Bisectriz de un segmento

Definición. 1.28. Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por el vértice de un ángulo y forma dos ángulos congruentes

Construcción. 1.5 Bisectriz de un ángulo

Para bisecar un ángulo se realiza el siguiente procedimiento:

- dado un ángulo.
- Se traza un arco con centro en el vértice del ángulo que corte los lados del ángulo.
- En cada punto de intersección se construyen dos arcos de igual radio.
- Se determina el punto de intersección de los arcos.
- La bisectriz es la recta que pasa por el punto de corte de los arcos y el vértice del ángulo.

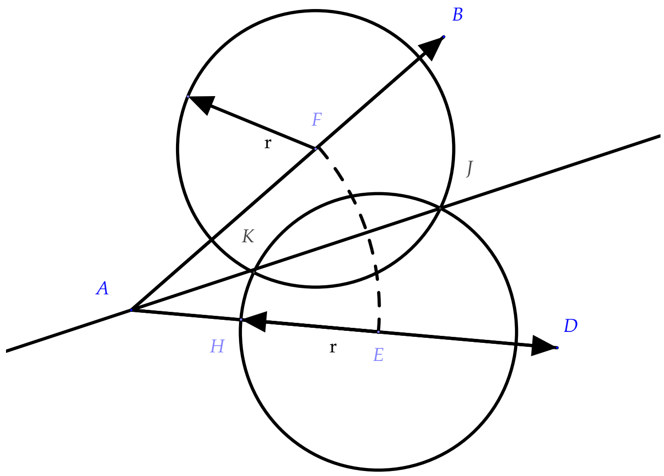


Figura 1.37: Bisectriz del ángulo

Ejemplo. 1.18

Construya una flor de 4 pétalos bisecando en ángulo de 90 grados para cada pétalo. ▲

Solución:

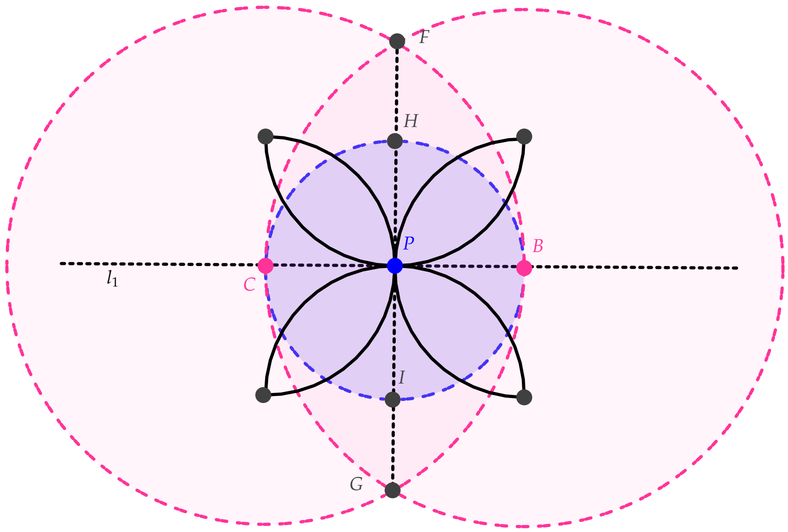


Figura 1.38: Flor de cuatro pétalos.

Construcción. 1.6 Recta perpendicular dado un punto en ella

Dado un punto de una recta. Para construir construir una recta perpendicular que pase por el punto dados se realiza lo siguiente:

- Dado un punto en una recta.
- Trace un arco centrado en el punto dado que corte a la recta en dos puntos. ★
- Trace dos arcos centrados en cada uno de los puntos de corte del paso anterior.
- Trace la linea perpendicular entre el punto de intersección de los arcos construidos en el paso anterior y el punto dado.

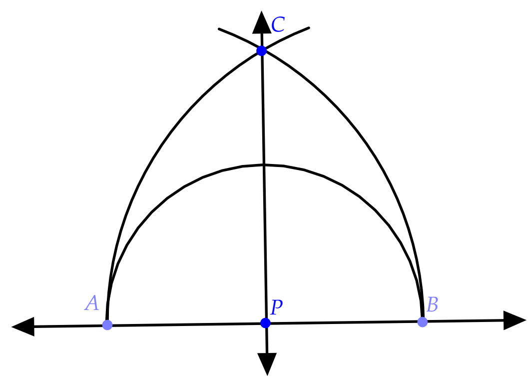


Figura 1.39: Recta perpendicular

Definición. 1.29. Mediatriz

La mediatriz de un segmento es la bisectriz perpedicular del segmento

♡

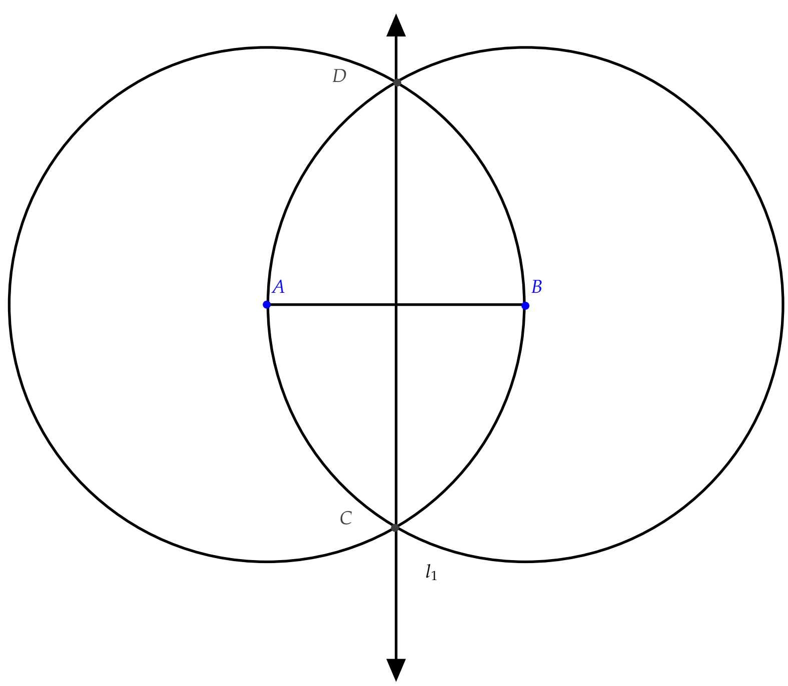


Figura 1.40: Mediatriz de un segmento

Construcción. 1.7 Rectas perpendiculares

Dado un punto y una recta no alineados para trazar una recta perpendicular que contiene al punto. Se realiza lo siguiente:

- ☛ Dada una recta y un punto no alineado.
- ☛ Centrados en el punto dado trace dos arcos de igual radio que intersecten la recta.
- ☛ Centrados en los puntos de intersección del paso anterior trace dos arcos de igual radio, en lado opuesto de la recta al punto dado.
- ☛ Una el punto de intersección de los arcos del paso anterior y el punto dado.

★

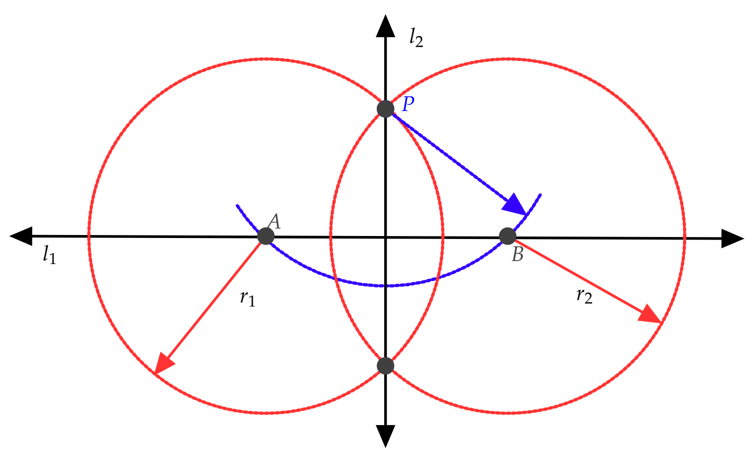


Figura 1.41: Rectas Perpendiculares

Definición. 1.30. Distancie entre un punto y una recta.

La distancia entre un punto y una recta es la medida del segmento perpendicular entre el punto y la recta.

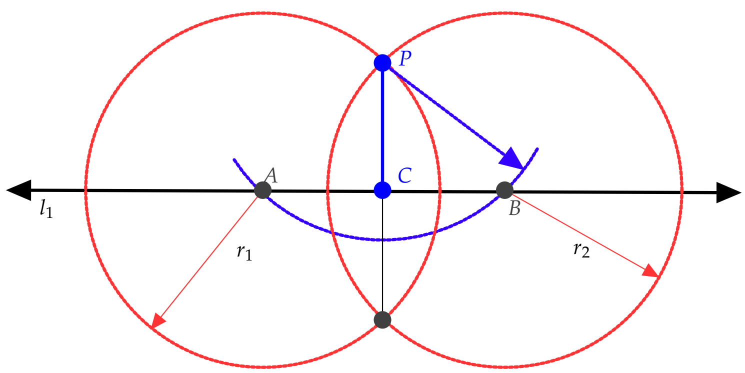


Figura 1.42: Distancia entre un punto y una recta.