Geometría con regla y compás

UNIVERSIDAD DEL NORTE ÁREA DE CIENCIAS BÁSICAS
MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA Esp. ANTALCIDES OLIVO

August 22, 2012

Contenido

The global option open right, triggers the typesetting of chapter on odd pages only. There are a couple of layouts that must be typeset on an even pages.

Capítulo

1

Contenido

Definiciones y construcciones

La geometría nace de la necesidad de los antiguos Egipcios en medir sus tierras después de una inundación del río Nilo, luego los griegos la convirtieron en una disciplina hasta cuando Euclides la organizó convirtiéndola en la primera rama de las matemáticas que fue axiomatizada. Decir que la geometría fue axiomatizada, quiere decir que tiene una estructura de la siguiente forma:

- ☞ Lo primero es establecer un conjunto mínimo de términos, los cuales no se pueden definir, pero que de forma natural se pueden conocer sus características o propiedades.
- ☞ A partir de los elementos anteriores se construyen otros usando proposiciones en forma de equivalencia. estas proposiciones se llaman definiciones.
- ☞ Luego se establecen un conjunto de propiedades independientes, los cuales son ciertos por si solos , es decir su validez es evidente. A este conjunto de propiedades se llaman axiomas y/o postulados.
- ☞ Para terminar se construyen a partir de todo lo anterior un conjunto ilimitado de propiedades, las cuales no son evidentes por si solas y por lo tanto es necesario demostrarlas a partir de proposiciones verdaderas usando los métodos de demostración establecidos por la lógica.

1 . 1 Términos

Antes de empezar la construcción de la geometría estableceremos alguna ideas generales.
Por ejemplo:

Término. 1.1.

Término es una palabra o propiedad que representa a un elemento o la relación entre varios elementos.

Término. 1.2. Cantidad

Cantidad es cualquier objeto y/o fenómeno que puede ser medida, es decir, medir un objeto es encontrar cuántas veces contiene un patrón del mismo tipo al objeto. A ese patrón tomado como estándar. Se llama unidad de medida.

En `GEOMETRÍA` hay cuatro especies de cantidades, `LÍNEAS, SUPERFICIES, VOLUMEN y ÁNGULOS`. Estas son llamadas MAGNITUDES GEOMÉTRICAS. Dado que la unidad de medida de una cantidad es del mismo tipo que la cantidad medida, hay cuatro tipos de unidades de medición: unidades de **longitud**, unidades de **superficie**, unidades de **volumen** y unidades de **medida angular**.
Basandonos en la anterior idea podemos establecer lo que es la geometría.

Término. 1.3. Geometría

GEOMETRÍA es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades, relaciones y medidas de las magnitudes geométricas.

En Geometría, las medidas de las cantidades consideradas son generalmente representadas por medio de letras minúsculas. Las operaciones a realizarse con las medidas de las cantidades y las relaciones entre ellas, son las establecidas por el **álgebra**. Si a y b son medidas de cantidades geométricas, se tiene:

- La operación **adición** , la cual usa el signo llamado más, $+$; Entonces, $a+b$ indica que b y a son sumados.
- La operación **substracción**, la cual usa el signo llamado menos, $-$; Entonces, $a-b$ indica que b es el sustraendo y a el minuendo.
- La operación **multiplicación o producto**,la cual usa el signo llamado por, $\cdot$; Entonces, $a \cdot b$ indica que a y b son factores.
- La operación **división**, la cual usa el signo $/$, llamado entre; Entonces, a/b, indica que b es el divisor y a el dividendo.
- La **potenciación** a^n , indica que a se tomará n veces como factor, o elevado a la enésima potencia, Nota: $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$.
- La **radicación** $\sqrt[n]{a}$, indica que existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^n = a$.
- La relación **igualdad** $a = b$, lo que significa que $a - b$ es 0.
- La relación **menor que** $a < b$, lo que significa que $a - b \in \mathbb{R}^-$.
- La relación **mayor que** $a > b$, lo que significa que $a - b \in \mathbb{R}^+$.
- La relación **menor o igual** $a \leq b$, lo que significa que $a = b$ o $a < b$,
- La relación **mayor o igual** $a \geq b$, lo que significa que $a = b$ o $a > b$,

En todos los casos las medidas de las cantidades geométricas son números reales no negativos.
Nota: Estudiar las propiedades de las operaciones y las relaciones de los números reales en el apéndice A.

Término. 1.4. Proposición

Una **proposición** es un enunciado al cual se le puede asignar un valor de verdad, es decir puede ser falso o verdadero, pero no ambas.

Por ejemplo:

- ☛ $3+2=5$. De acuerdo con la definición de adición entre naturales, este enunciado es verdadero, por lo tanto es una proposición.

- ☛ Mañana llueve. esto es algo que no se puede saber antes de termine el día, por lo tanto no se le puede asignar un valor de verdad, es decir este enunciado no es una proposición.

Término. 1.5. Tautología

Una **tautología** es una proposición que siempre es verdadera.

A las tautologías a veces en geometría se les llama verdades geométricas o afirmaciones. Las verdades generales de la geometría se deducen a partir del razonamiento lógico, siendo las premisas definiciones, postulados o principios previamente establecidos. El razonamiento utilizado para establecer cualquier verdad o principio es llamado una demostración.

Término. 1.6. Definición

Una **definición** es una afirmación que explica el significado de un término o una palabra, en función de palabras o términos conocidos.

En caso de que un término no se pueda expresar en función de otros términos ya establecidos, se dice que es un término no definido.

Término. 1.7. Teorema

Un **teorema** es una verdad que requiere demostración.

Término. 1.8. Axioma

Un **axioma** es una verdad auto-evidente.

Un **PROBLEMA** es una situación o proposición que requiere solución.

Término. 1.9. Postulado

Un **Postulado** es un problema auto-evidente.

Término. 1.10. Hipótesis

Una **hipótesis** es una suposición hecha, bien en el texto de una proposición, o en el curso de una demostración.

1 . 2 Términos no definidos

En geometría tenemos que utilizar algunos elementos que no podemos definir, lo que podemos hacer es tener una idea de lo que son. Estos elementos son; el punto, la linea recta y el plano. Un punto lo representa la marca que deja un lápiz de punta muy fina en una hoja de papel.

Término no definido. 1.0. El Punto

Podemos decir que representa un punto, no lo que es un punto:
Un punto lo representa la marca que deja un lápiz de punta muy fina en una hoja de papel.

Los punto se denotan con letras mayúsculas, generalmente las primeras del alfabeto. por ejemplo:

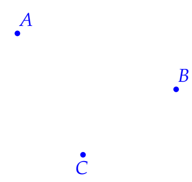


Figura .1: Los puntos A,B y C

Término no definido. 1.0. Linea Recta

Una linea recta la representa una cuerda delgada y tensa la cual es infinitamente larga.

Las rectas se denotan con letras minúsculas, generalmente a partir de la l también podemos tomar dos puntos sobre ella como por ejemplo:

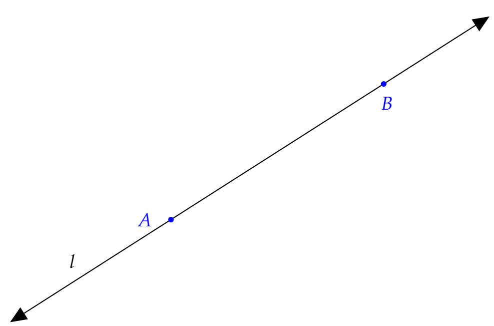


Figura .2: Linea l

La recta de la figura (.2) se denota: $\overleftrightarrow{AB}$ o l

Término no definido. 1.0. El Plano

Una buena idea de lo que es el plano es decir que lo representa una hoja de papel delgada e infinitamente grande.

Los planos se denotan con letras góticas mayúsculas, por ejemplo:

Figura .3: El Plano

El plano ξ en la figura (.3).

Nota: Observe que la figura (.3) no tiene bordes, lo cual significa que es ilimitado.

1 . 3 Definiciones preliminares

Después de identificar el punto la recta y el plano podemos definir a partir de ellos otros elementos de la geometría como los que veremos en esta sección.

Definición. 1.1. El Espacio

El espacio es el conjunto de todos los puntos

De la definición podemos deducir que el espacio es un ente abstracto pero que existe porque por lo menos podemos construir un punto y este punto estaría en el espacio, veamos que es evidente que existen infinitos puntos y que muchos no se encuentran en un plano por lo que es necesario hablar del espacio.

Definición. 1.2. Segmento de recta

Un segmento de recta es un subconjunto de la linea recta determinado por dos puntos y todos los puntos que se encuentran entre ellos.

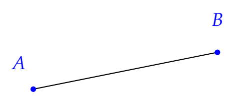


Figura .4: Segmento de recta

Notación: Sean A y B dos puntos de una recta, el segmento determinado por ellos se denota como $\overline{AB}$. A los puntos A y B se les lama extremos del segmento

Definición. 1.3. Puntos colineales

Los puntos de un conjunto se dice que están alineados o son colineales si existe una recta que los contiene a todos.

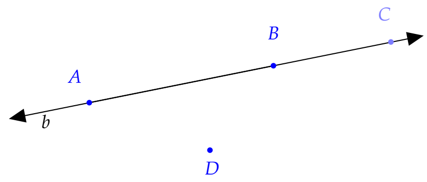


Figura .5: Punto Alineados

Por ejemplo en la figura (.5) el conjunto de puntos $\{A, B, C\}$ es un conjunto de puntos alineados, mientras que el conjunto de puntos $\{A, B, C, D\}$ no es un conjunto de puntos alineados, porque el punto D no está en la recta $\overrightarrow{b}$.

Definición. 1.4. Puntos coplanarios

Los puntos de un conjunto son coplanarios si existe un plano que los contiene a todos.

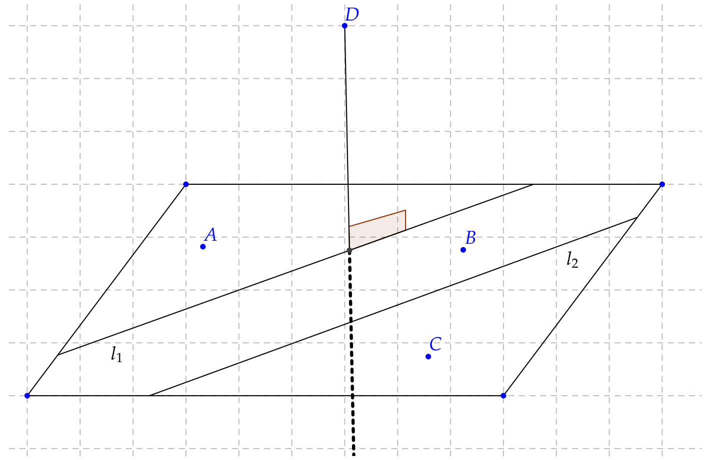


Figura .6: Puntos coplanarios

En la figura suponemos que el punto D no está en el plano.

Ejemplo .1 . 3. 1

La figura (.6) nos muestra varios conjuntos de puntos indiquemos si son o no coplanarios

Solución:

- Las rectas l_1 y l_2 son coplanarias
- Los puntos A, B y C son coplanarios
- Los puntos A, B, C y D no son coplanarios
- La recta l_1 y el punto A son coplanarios
- La recta l_2 y el punto D no son coplanarios.

Definición. 1.5. Rectas Intersecantes

Son dos o mas rectas que se intersecan en un punto.

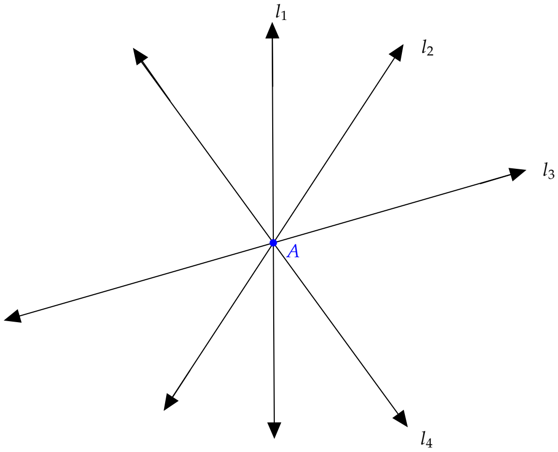


Figura .7: rectas Intersecantes

La intersección de las rectas l_1,l_2,l_3 y l_4 en la figura (.7) es el punto A, por lo tanto son intersecantes

Definición. 1.6. Rectas Paralelas

Dos recta son paralelas si y sólo si son coplanarias y no son intersecantes

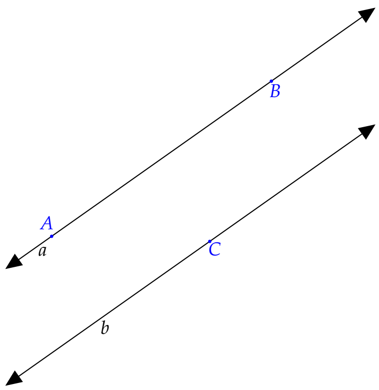


Figura .8: Rectas Paralelas

Definición. 1.7. Rectas alabeadas

Dos rectas son alabeadas si y sólo si no son coplanarias y no se intersecan

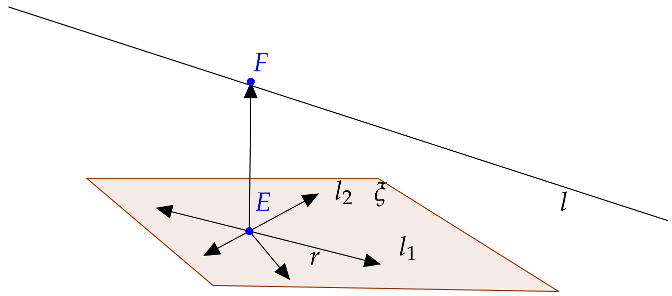


Figura .9: Rectas alabeadas

En la figura (.9 el punto C no está en plano ξ, por lo tanto como las rectas l_1 y l_2 no son coplanarias y no se cortan, entonces son alabeadas.

En la geometría **Euclideana** se establecen cinco postulados, nosotros estableceremos aquí sólo dos para facilitar el desarrollo, y en el segundo capítulo estableceremos más de tres para facilitar la construcción. [1].

Postulado..1. **De la regla**

Entre los números reales y los puntos de una recta se puede establecer una correspondencia biunívoca, es decir a cada punto de la recta le podemos asignar uno y sólo un número real y cada número real le podemos asignar uno y sólo un punto de la recta.

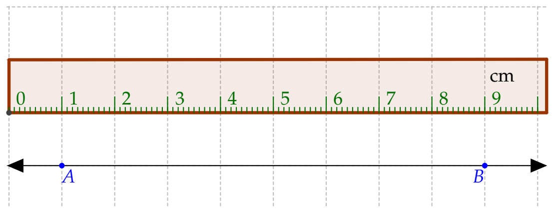


Figura .10: Postulado de la regla

En la figura (.10) de acuerdo con el postulado de la regla, al punto A se le asigna el número 1 y al punto B se le asigna el número 9.

La anterior correspondencia lo tomaremos como un postulado, porque no podemos garantizar que a cada punto le corresponde un número natural, pero parece ser evidente que si le corresponde un número real.

Definición. 1.8. **Coordenada de un punto**

Al número que la anterior correspondencia le asigna a un punto de la recta se le llama coordenada del punto

Por ejemplo en la figura (.10) 1 es la coordenada del punto A y se denota: $A(1)$ que se lee el punto A con coordenada 1.

[1]En los "Elementos de Euclides" se establecen un conjunto de tres términos no definidos,132 definiciones, 5 postulados, 5 axiomas y 465 teoremas repartidos en 13 libros.

Ejemplo . 1 . 3. 2

Sean A y B dos puntos de una recta y sean a y b los números reales que la relación biunívoca le asigna a los puntos entonces denotamos $A\left(a\right)$ y $B\left(b\right)$ para indicar que a y b son las coordenadas de los puntos A y B

Definición. 1.9. Valor absoluto

Sea a un número real se define el valor absoluto de a $(|a|)$ como:

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{si } a \leq 0 \\ a, & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Ejemplo . 1 . 3. 3

Calcular $|-3|$

Solución: al aplicar la definición de valor absoluto tenemos que como $a = -3 < 0$, entonces $|-3| = -\left(-3\right) = 3$.

Ejemplo . 1 . 3. 4

Calcular $\left|\sqrt{2}\right|$

Solución: si aplicamos la definición de valor absoluto obtenemos que si $a = \sqrt{2} > 0$, entonces $\left|\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$.

Definición. 1.10. Distancia entre dos puntos de una recta

Sean $A\left(a\right)$ y $B\left(b\right)$ dos puntos sobre una recta, la distancia entre los puntos A y B se define:

$$AB = |b - a|$$

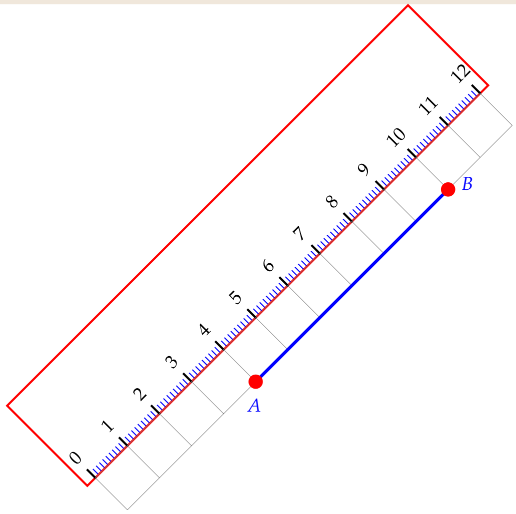
Ejemplo . 1 . 3. 5

Calcular la distancia entre los puntos A y B de la figura (.10)

Solución: Del postulado de la regla obtenemos $A(1)$ y $B(9$, así de acuerdo con la definición de la distancia entre dos puntos obtenemos $AB = |9cm - 1cm| = 8cm$.

Ejemplo . 1 . 3. 6

Calcule la longitud de $\overline{AB}$



Ejemplo . 1 . 3. 7

Sean $A\,(3\text{cm})$ y $B\,(-6\text{cm})$ dos puntos de una recta l calcule la distancia entre A y B

Solución: Si aplicamos la definición de distancia obtenemos

$$AB = |-6\text{cm} - 3\text{cm}| = 9\text{cm}$$

Definición. 1.11. Longitud de un segmento de recta

Sean $A\,(a)$ y $B\,(b)$ los extremos del segmento $\overline{AB}$ se define la longitud o medida del segmento, como la distancia entre sus extremos

$$m\overline{AB} = |b - a|$$

Término. 1.11. Objetos congruentes

Dos objetos o elementos son congruentes si y sólo sí tienen la misma forma y el mismo Tamaño

también podemos decir que dos objetos son congruentes si al sobreponer uno sobre el otro los dos coniciden exactamente.

Definición. 1.12. Segmentos congruentes

Dos segmentos son congruentes si y sólo si tienen la misma longitud o medida.

Definición. 1.13. Circunferencia

El conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, se llama circunferencia

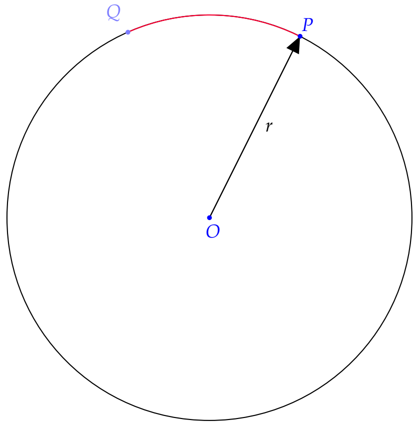


Figura .11: La circunferencia

Nota: **Elementos de la circunferencia.**

- Centro : Al punto fijo se le llama centro, por ejemplo el punto O en la figura (.11).
- A la distancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia se le denomina radio, por ejemplo el radio de la figura (.11) es $r = OP$.
- Un subconjunto de al menos dos puntos de la circunferencia se le llama arco, por ejemplo el subconjunto entre P y Q en la figura (.11), y se denota $\overset{\frown}{PQ}$.

Definición. 1.14. Circulo.

A un conjunto de puntos X se le llama circulo. Si dada una circunferencia de radio r y centro O, el conjunto de puntos X cumple la siguiente condición. $OX < r$

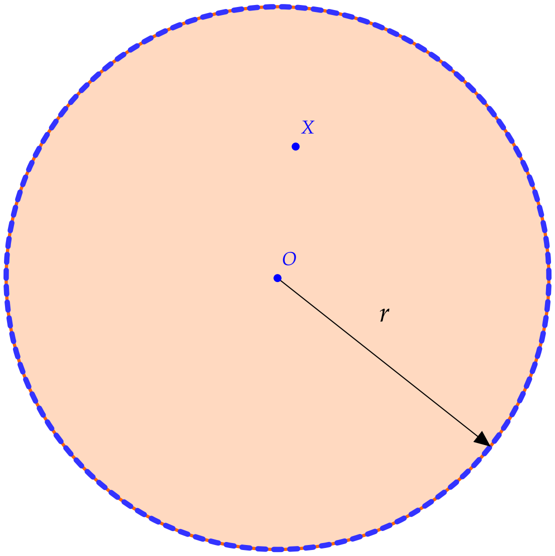


Figura .12: Circulo

Observe que la circunferencia es el conjunto de puntos en azul y el circulo es el conjunto de puntos en rosado.

Definición. 1.15. Estar entre

Se dice que un punto de una recta B está entre dos puntos distintos A y C si se cumple que

$$AB + BC = AC$$

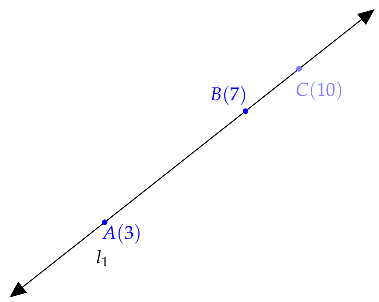


Figura .13: Estar entre

Ejemplo . 1 . 3. 8

Verificar que B está entre A y C.

Solución: al aplicar la definición de estar entre y de la distancia entre dos puntos observamos que:

$$AB + BC = |7 - 3| + |10 - 7| = 4 + 3 = 7 y AC = |10 - 3| = 7.$$

O sea que se cumple, por lo que podemos afirmar que B está entre A y C.

Definición. 1.16. Rayo

Sea una recta l y sean A, B y X puntos de l , el conjunto de puntos del segmento $\overline{AB}$ y todos los puntos X para los cuales se cumple una y sólo una de las dos condiciones

- B está entre A y X
- A está entre B y X

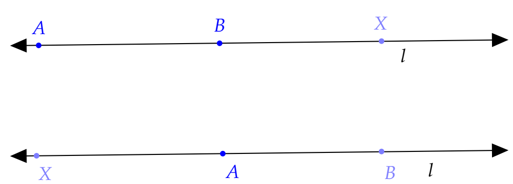


Figura .14: Rayo

El rayo que contiene al segmento $\overline{AB}$ se denota $\overrightarrow{AB}$ o $\overleftarrow{AB}$ y al extremo se le llama origen

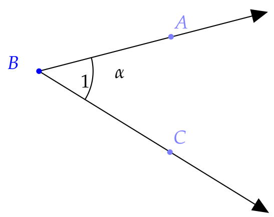
Nota: De la definición de rayo podemos deducir que un punto divide a una recta en dos rayos

Definición. 1.17. Ángulo

Un ángulo es el conjunto determinado por la unión de dos rayos de origen común

- **Vértice:** el vértice de un ángulo es el origen de los rayos que se intersecan
- **Lados:** Los lados de un ángulo son los rayos que lo forman
- **Notación:** Sea el ángulo formado por los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ entonces se denota $\widehat{ABC}$ o $\widehat{A}$, también se puede denotar con numéros como 1 o con letras griegas minúsculas, como α

Figura .15: Ángulo



Definición. 1.18. Conjunto convexo

Un conjunto de puntos se llama convexo si para cada par de puntos A y B, del conjunto, todo segmento $\overline{AB}$ está contenido en el conjunto. Si no se cumple está condición se dice que el conjunto es cóncavo

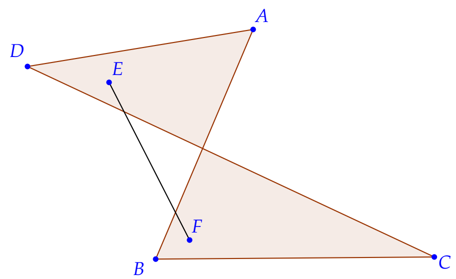


Figura .16: Conjunto cóncavo

En la figura (.16) vemos que en el conjunto sombreado determinado por los puntos A, B, C, y D se puede construir un segmento EF de tal forma que no está contenido totalmente en él. Por que el conjunto no es convexo si no cóncavo.

Ejemplo . 1 . 3. 9

La linea recta es un conjunto convexo

Ejemplo . 1 . 3. 10

El ángulo divide el plano en tres conjuntos de puntos.

- El ángulo, el cual es un conjunto cóncavo.
- Un conjunto convexo, el interior.
- Un conjunto cóncavo, el exterior.

Trabajar con conjuntos cóncavos o convexos es a veces confuso, por lo que es mejor trabajar con conjuntos de puntos llamadas regiones planas

Definición. 1.19. Región plana.

Una región plana es un conjunto de puntos que cumple la siguiente condición. Para cada punto X del conjunto existe un circulo centrado en X tal que este está contenido en el conjunto

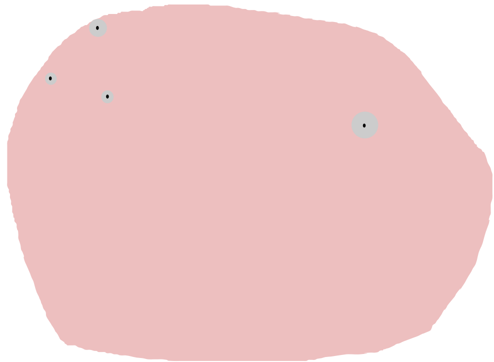


Figura .17: Región Plana

Como podemos observar en la figura .17 en cada punto de la gráfica rosada podemos trazar un circulo de radio tan pequeño como queramos y este se encuentra contenido en el subconjunto del plano de color rosado, por tanto es una región plana.

Ejemplo .1 . 3. 11

En la figura .18 se representa un conjunto de puntos del plano que no es una región plana, porque para cada punto del conjunto no existe un circulo que se encuentre contenido en el conjunto.

Ejemplo de un conjunto de puntos que no es región

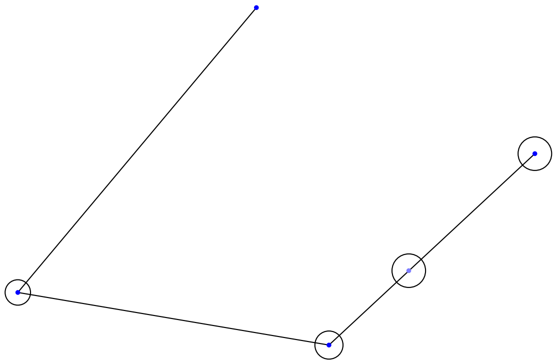


Figura .18: Ejemplo

Utilizando el concepto de región plana podemos decir que un ángulo divide el plano en dos regiones planas, una convexa y otra cóncava, a la región convexa se le llama interior del ángulo. Como se indica en la figura .19

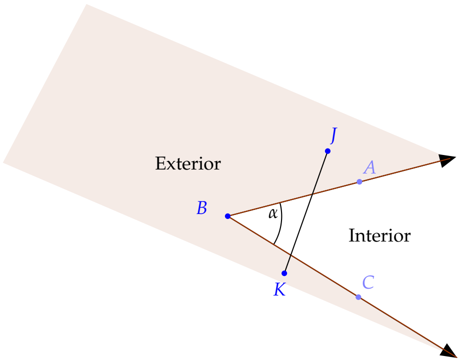


Figura .19: Regiones del ángulo

Definición. 1.20. Polígonos

Un polígono es la unión de segmento que se intersecan en sus extremos, de tal manera que como máximo dos segmentos se cortan en un punto y cada segmento se interseca exactamente con otros dos segmentos.

Nota: **Elementos de un polígono:**

- **Vértice:** Es el punto de intersección de los segmentos.
- **Lados:** Son los segmentos que forman el polígono.
- **Ángulo:** Es al ángulo interior formado por dos lados y el vértice común.

Ejemplo . 1 . 3. 12

En la figura (.20) indique cuales de los conjuntos dados son polígonos.

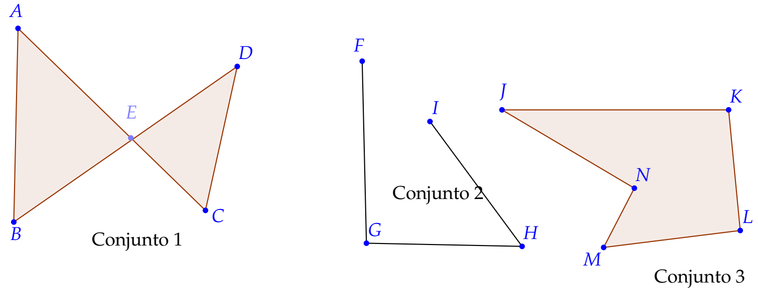


Figura .20: Conjuntos de puntos

Solución:

- El conjunto 1 no es polígono, porque por ejemplo $\overline{AC}$ se interseca con tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$
- El conjunto 2 no es un polígono porque $\overline{FG}$ solo se interseca con $\overline{GH}$.
- El conjunto 3 si es polígono porque todos los segmentos se intersecan de dos en dos.

Nota: Al la intersección de las regiones angulares de los ángulos formados por un polígono se le llama región poligonal o interior de un polígono.

Definición. 1.21. sector circular

Un sector circular es el conjunto de puntos formado por la unión de dos radios y el arco que ellos intersecan en sus extremos.

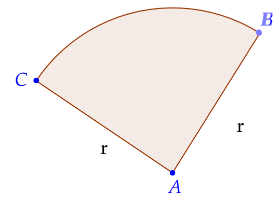


Figura .21: Sector circular

Nota: Al sector circular formado por dos radios colineales se le llama semicirculo.

Nota: Al arco que forma un semicirculo se le llama semicircunferencia.

Postulado..2. Del transportador

A cada ángulo se le puede asociar dos números reales a y b entre 0 y 180 de la siguiente forma:

- Se construye una semicircunferencia y se divide en 180 arcos congruentes.
- Al punto inicial de la semicircunferencia se le asigna el numero 0 y al punto final se le asigna el numero 180.
- Se coloca el vértice del ángulo en el centro de la semicircunferencia, de tal forma que los lados se intersecan con la semicircunferencia.
- Al punto de intersección de un lado con se semicircunferencia se le hace coincidir un número a que corresponde al arco número a.
- Se determina el numero b del arco de la semicircunferencia que coincide con el otro lado del ángulo y se le asigna ese número al lado.

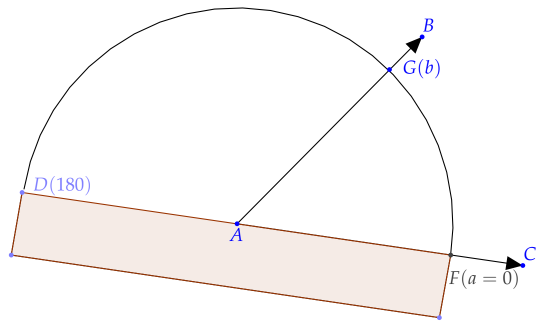


Figura .22: Postulado del transportador

Nota: Generalmente el numero a se hace coincidir con el cero como en la figura (.22)

Definición. 1.22. Medida de un ángulo

Sean a y b los números que se le asignan a un ángulo ABC de acuerdo con el postulado del transportador, la medida del ángulo se define:

$$m\angle ABC = |b - a|$$

Ejemplo . 1 . 3. 13

Calcular la medida del $\angle ABC$ en la figura (.23), usando el postulado del transportador y la definición de la medida de un ángulo.

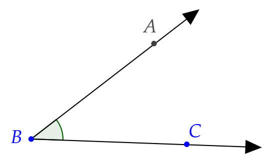


Figura .23: medida del un ángulo

Solución: Se toma un transportador y de acuerdo con el postulado, se observa en la figura (**??**) que $a = 20$ y $b = 60$. Y de acuerdo con la definición de medida del ángulo $m\angle ABC = |60 - 20| = 40$.

Nota: generalmente la medida de un ángulo se da en grados, es decir la respuesta del ejemplo anterior es 40 grados que se denota $40°$.

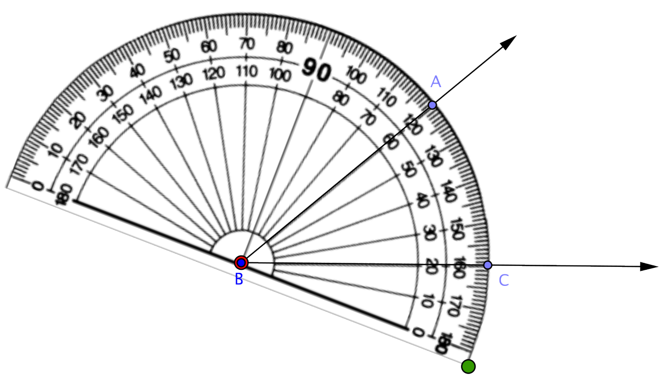


Figura .24: Medida de un ángulo

Ejemplo . 1 . 3. 14

Calcular la medida del $\angle ABC$

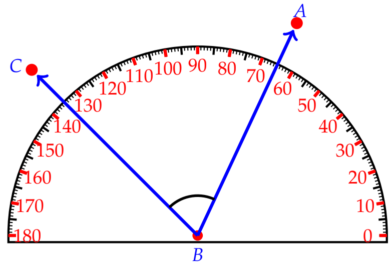


Figura .25: Medida de un ángulo

Transportadortrans

Solución: Usando el postulado del transportador y la definición de medida de un ángulo, de la figura(.25) obtenemos: $\angle ABC = |135 - 65| = 70^{o}$

Definición. 1.23. Ángulos congruentes

Dos ángulos son congruentes si y sólo si tiene la misma medida.

Ejemplo . 1 . 3. 15

Todos los ángulos rectos son congruentes.

Nota: **Clasificación de los ángulos según su medida.**

- **Ángulo nulo:** Es un ángulo es que tiene con medida cero, es decir sus lados coinciden.
- **Ángulo agudo:** Es un ángulo que tiene una medida mayor que cero y menor de 90 grados.
- **Ángulo recto:** Es un ángulo que tiene como medida 90 grados.
- **Ángulo obtuso:** Es un ángulo que tiene una medida mayor de 90 y menor de 180 grados.
- **Ángulo llano:** Es un ángulo que mide 180 grados, es decir sus lados forman una linea recta.

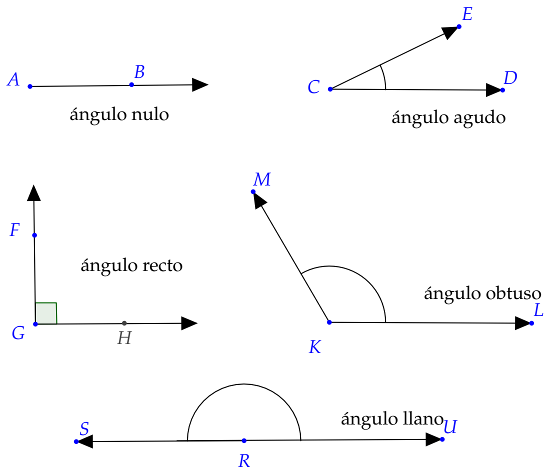


Figura .26: Clasificación de los ángulos

Definición. 1.24. Rectas perpediculares

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si al intersectarse forman un ángulo de 90º

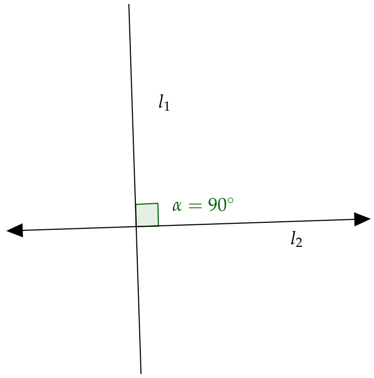


Figura .27: Rectas perpendiculares

Definición. 1.25. Recta perpendicular a un plano

Una recta es perpendicular a un plano si y sólo si la recta es perpendicular a cualquier recta que pase por el punto de intersección de la recta y el plano.

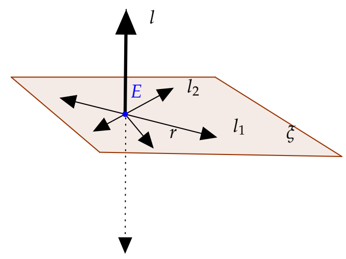


Figura .28: Recta perpendicular a un plano

Definición. 1.26. Planos perpendiculares

Dos planos son perpendicularessi en uno de ellos hay una recta perpendicular al otro.

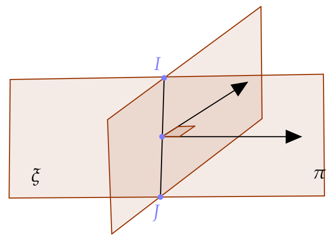
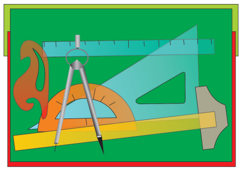


Figura .29: Planos perpendiculares

1 . 4 Construcciones básicas

Los diseñadores utilizan una variedad de instrumentos y técnicas para elaborar sus diseños, a los cuales no se les puede aprovechar en su totalidad, si no se conocen y se aplican las propiedades de los elementos y los conceptos de la geometría.



En esta sección presentaremos las construcciones de las cuales se basan la mayoría de las construcciones más complicadas que utilizaremos en el libro.

Construcción. 1.1. **Duplicar un segmento**

Para duplicar un segmento hay que realizar los siguientes pasos

- Se construye un segmento.
- Se colocan las puntas de un compás en los extremos del segmento.
- se construye un rayo o una recta donde queremos duplicar el segmento
- Se coloca la punta filosa del compás en un punto de la recta, manteniendo la abertura del primer paso y se dibuja con la otra punta un pequeño. arco sobre la recta.
- El punto de intersección de la recta y el arco es el otro extremo del segmento.

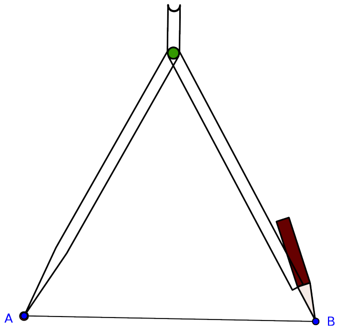


Figura .30: Segmento dado

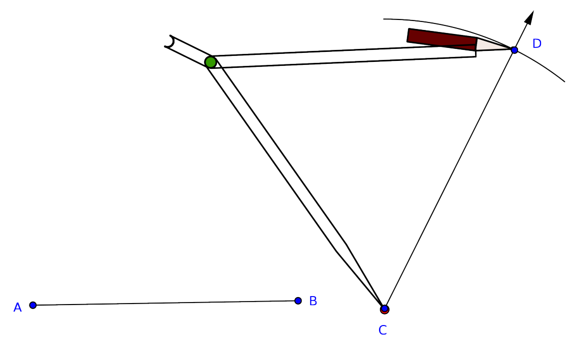


Figura .31: Segmento duplicado

De acuerdo con la construcción los segmentos AB y CD de la figura(.31) son congruentes.

Ejemplo . 1 . 4. 16

Un triángulo es un polígono de tres lados, usando esta definición. Construya Un triángulo con dos lados congruentes.

Solución: En el triángulo de la figura(.32) los lados AB y AC son congruentes.

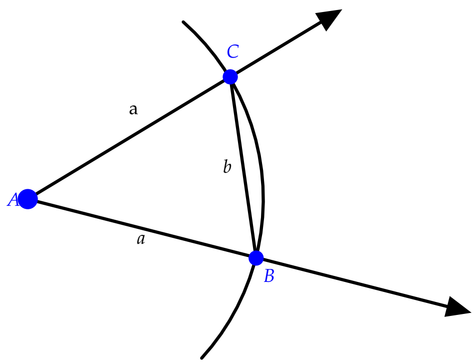


Figura .32: Triángulo isósceles.

Construcción. 1.2. Ángulos congruentes

Para construir dos ángulos congruentes se realizan los siguientes pasos:

- ☛ Dado un ángulo.
- ☛ Se traza un arco con centro en el vértice que corte a los otros dos lados, y se marcan los puntos de intersección.
- ☛ Se construye un rayo, para que sea un lado del ángulo a duplicado.
- ☛ Con la misma abertura del compás se traza un arco sobre el rayo, con centro en el origen del rayo.
- ☛ Coloque la puntas del compás sobre los puntos de intersección del arco y los lados del ángulo dado.
- ☛ En el punto de intersección del arco y el rayo trace un nuevo arco centrado en este punto y con la misma abertura del compás del paso anterior.
- ☛ una el punto de interseccion de los arcos trazados sobre el rayo y el origen de este.

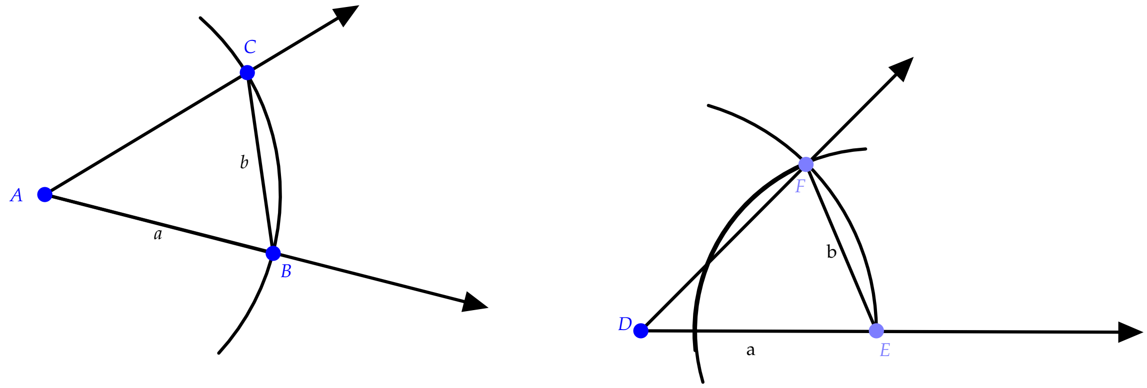


Figura .33: Ángulos congruentes

Ejemplo .1 . 4. 17

Construya un triángulo con dos ángulos congruentes.

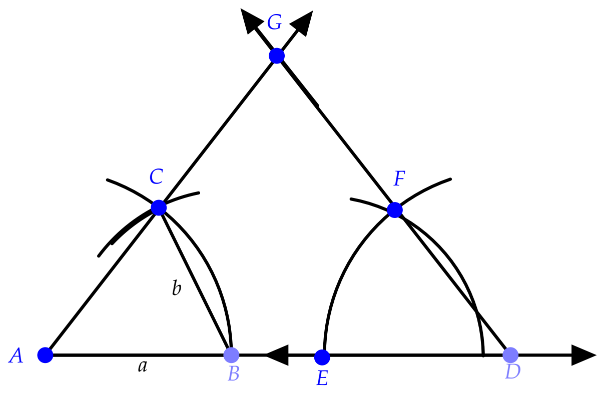


Figura .34: Triángulo con dos ángulos congruentes

En el $\triangle$ ADG los ángulos ABC y EDF son congruentes.

Construcción. 1.3. Punto medio de un segmento

Para bisecar un ángulo se realizan los siguientes pasos:

- Dado un segmento
- Se traza una semi circunferencia con centro en un extremo del segmento y que lo intersecte en un punto.
- Se traza una semi circunferencia con centro en el otro extremo, de tal forma que intersecte al primero.
- Se traza un segmento con extremos en los puntos de intersección de las semi circunferencias.
- El punto de intersección de los dos segmentos es el punto medio.

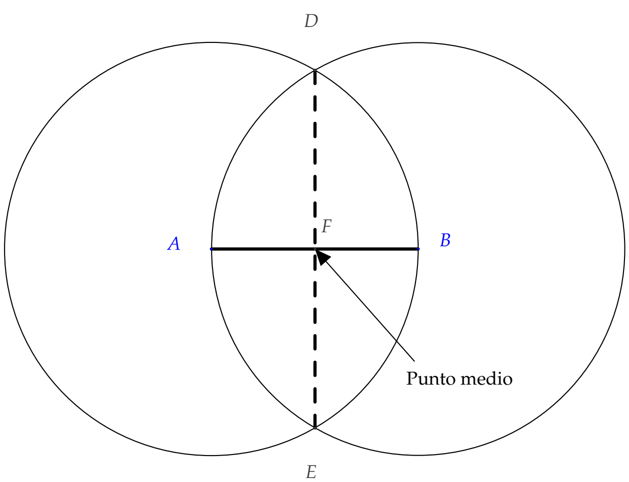


Figura .35: Punto medio

Definición. 1.27. Bisectriz de un segmento

La bisectriz de de un segmento es una recta que pasa por el punto medio del segmento.

Construcción. 1.4. Bisectriz de un segmento

Para construir la bisectriz de un segmento que pasa por un punto no alineado con el segmento, se realizan los siguientes pasos.

- Dado un segmento y un punto no alineado.
- Se construye el punto medio del segmento.
- la bisectriz es la recta que pasa por el punto no alineado y el puto medio.

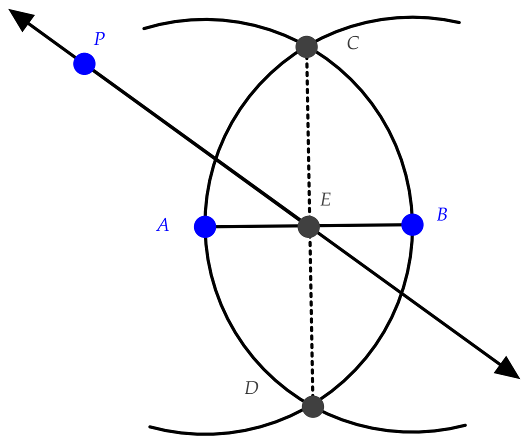


Figura .36: Bisectriz de un segmento

Definición. 1.28. Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por el vértice de un ángulo y forma dos ángulos congruentes

Construcción. 1.5. Bisectriz de un ángulo

Para bisecar un ángulo se realiza el siguiente procedimiento:

- dado un ángulo.
- Se traza un arco con centro en el vértice del ángulo que corte los lados del ángulo.
- En cada punto de intersección se construyen dos arcos de igual radio.
- Se determina el punto de intersección de los arcos.
- La bisectriz es la recta que pasa por el punto de corte de los arcos y el vértice del ángulo.

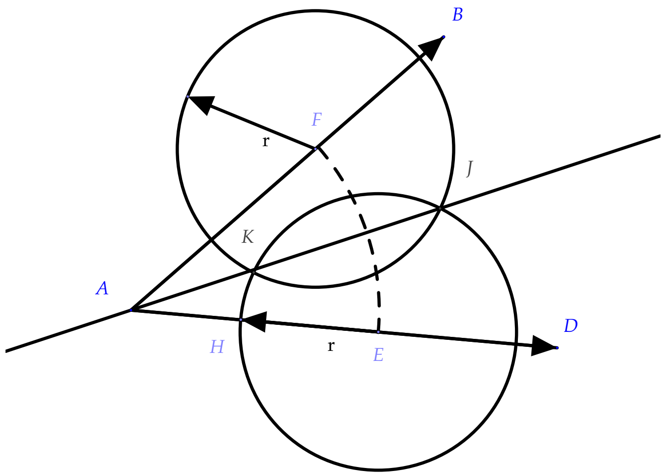


Figura .37: Bisectriz del ángulo

Ejemplo . 1 . 4. 18

Construya una flor de 4 pétalos bisecando en ángulo de 90 grados para cada pétalo.

Solución:

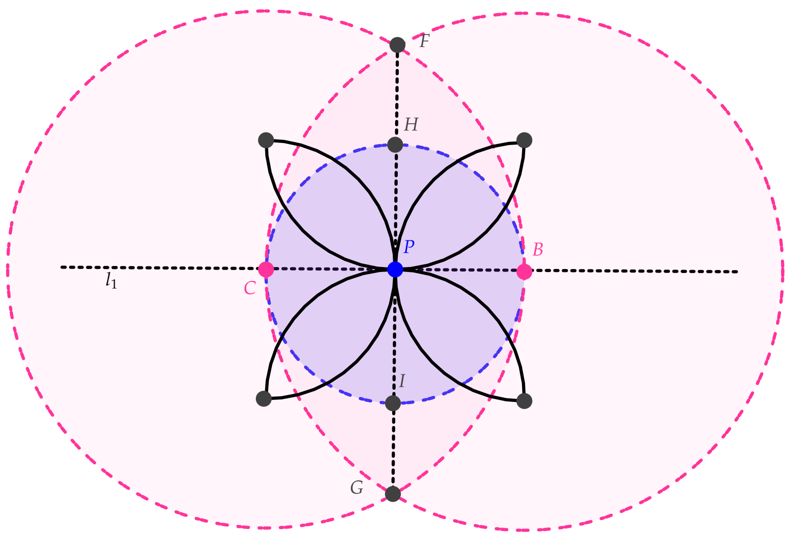


Figura .38: Flor de cuatro pétalos.

Construcción. 1.6. Recta perpendicular dado un punto en ella

Dado un punto de una recta. Para construir construir una recta perpendicular que pase por el punto dados se realiza lo siguiente:

- Dado un punto en una recta.
- Trace un arco centrado en el punto dado que corte a la recta en dos puntos.
- Trace dos arcos centrados en cada uno de los puntos de corte del paso anterior.
- Trace la linea perpendicular entre el punto de intersección de los arcos construidos en el paso anterior y el punto dado.

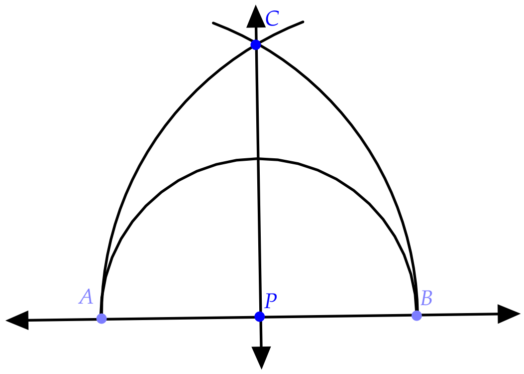


Figura .39: Recta perpendicular

Definición. 1.29. Mediatriz

La mediatriz de un segmento es la bisectriz perpedicular del segmento

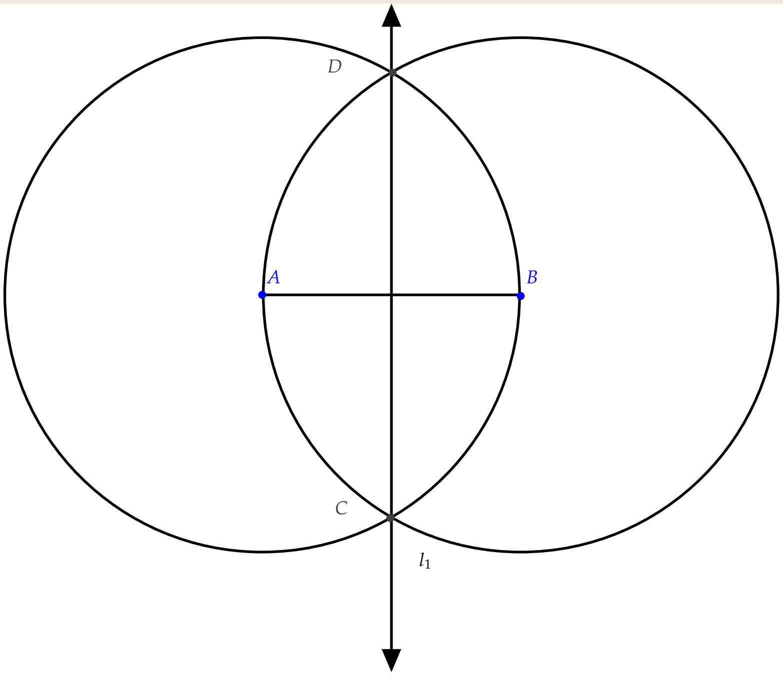


Figura .40: Mediatriz de un segmento

Construcción. 1.7. Rectas perpendiculares

Dado un punto y una recta no alineados para trazar una recta perpendicular que contiene al punto. Se realiza lo siguiente:

- Dada una recta y un punto no alineado.
- Centrados en el punto dado trace dos arcos de igual radio que intersecten la recta.
- Centrados en los puntos de intersección del paso anterior trace dos arcos de igual radio, en lado opuesto de la recta al punto dado.
- Una el punto de intersección de los arcos del paso anterior y el punto dado.

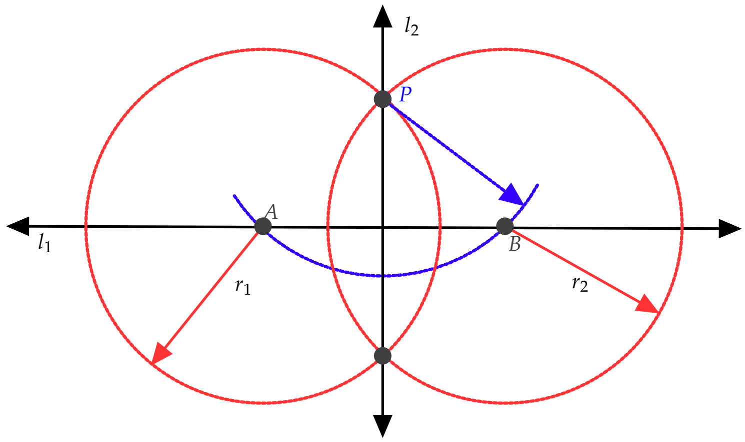


Figura .41: Rectas Perpendiculares

Definición. 1.30. **Distancie entre un punto y una recta.**

La distancia entre un punto y una recta es la medida del segmento perpendicular entre el punto y la recta.

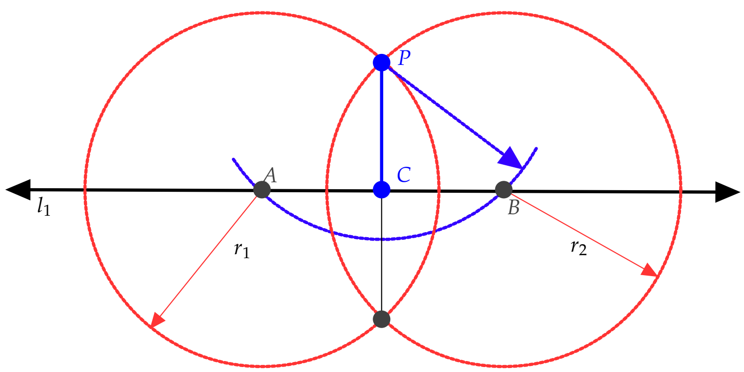
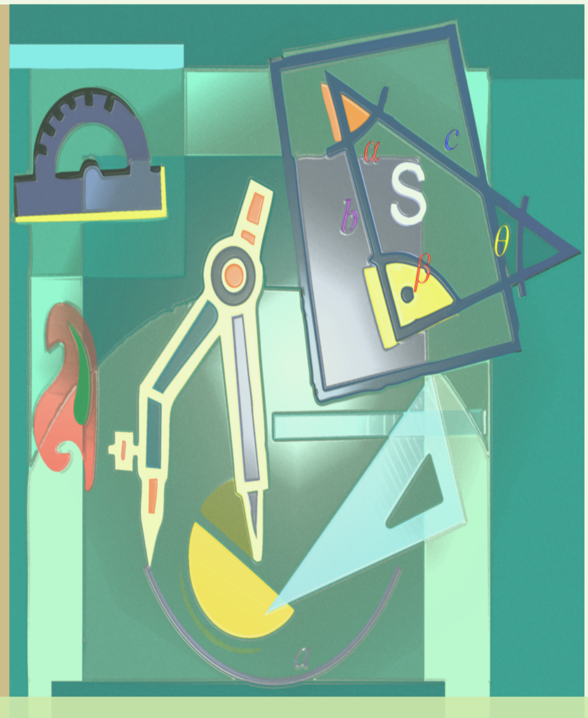


Figura .42: Distancia entre un punto y una recta.

The global option open right, triggers the typesetting of chapter on odd pages only. There are a couple of layouts that must be typeset on an even pages.



Capítulo

2

Contenido

Razonamiento en geometría

☞ En este capítulo seguiremos con la construción axiomática de la geometría y paralelamente presentaremos construcciones con regla y cómpas, que luego al final de este capítulo empezaremos a demostrar.

☞ Del párrafo anterior se nos presenta una duda, ¿Qué es demostrar? Podemos considerar la demostración de una proposición q como una cadena finita de conclusiones que se realizan mediante reglas lógicas y que se forman a partir de proposiciones verdaderas o supuestamente verdaderas y las cuales nos conducen a una proposición p.

☞ La proposición o relación resultante de otras mediante el proceso de la demostración se llama `teorema` y este proceso podemos dividirlo tres partes (figura.1):

☛ Conocer la proposición que se trata de demostrar. En esta parte es importante diferenciar muy claramente la información que nos dan (la hipótesis) de lo que nos solicitan que demostremos (la tesis).

☛ Los fundamentos empleados como base de la demostración. Estos fundamentos están constituidos por los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones o teoremas ya demostrados.

☛ El procedimiento usado para lograr que la proposición quede demostrada (elegir el método adecuado).

2 . 1 Introducción

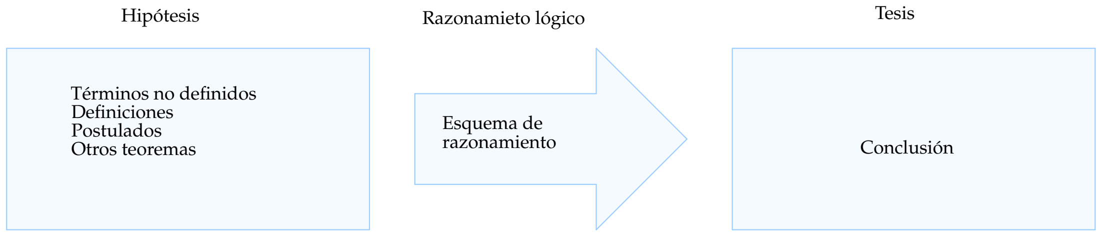


Figura .1: Esquema de una demostración

Para realizar una demostración además de tener las reglas lógicas y el encadenamiento de proposiciones, también hay que determinar un método o razonamiento como expondremos a continuación.

2 . 2 Razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo es el proceso mediante el cual se obtienen conclusiones a partir de nuestras propias observaciones o a partir de ejemplos particulares, es decir al observar que una acción o propiedad se repite se concluye en general que esa acción o propiedad siempre es cierta

Término. 2.12. **Conjetura**

Es la conclusión que se obtiene a partir de un proceso inductivo

Ejemplo . 2 . 2. 19

Suponga que una persona mide los lados de cuatro triángulos como muestra la figura(.2)

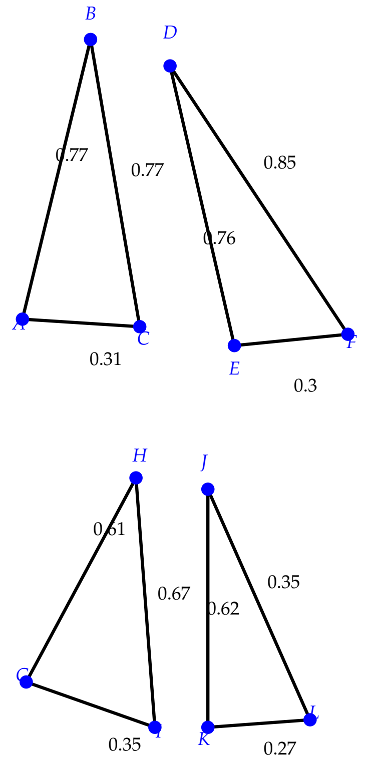


Figura .2: Desigualdad triangular

De los cuatro triángulos podemos concluir que la suma de las longitudes de dos lados siempre es menor que la longitud del tercer lado.

2 . 2.1 MÉTODO DEL CONTRAEJEMPLO

Hay ocasiones donde después de un razonamiento inductivo obtenemos una conjetura que no se cumple para todos los casos, es decir obtenemos una generalización falsa, entonces para indicar que esa generalización es falsa buscamos un ejemplo donde no se cumpla la acción o la propiedad.

Término. 2.13. **Contraejmplo**

Es el método que se usa para demostrar que una generalización es falsa, utilizando un ejemplo que la contradiga.

Ejemplo . 2 . 2. 20

Si un cuadrilátero tiene sus diagonales perpendiculares, entonces es un rombo.

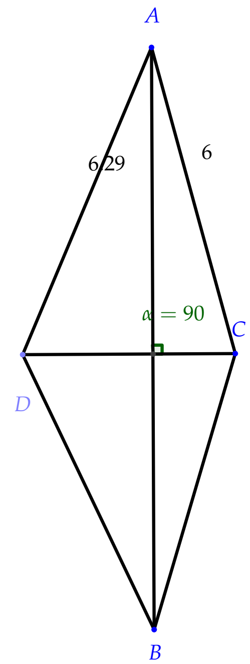


Figura .3: Cometa

En el cuadrilátero podemos observar que $AD = 6.29$ y $AC = 6$ y por definición de rombo el cuadrilátero $ABCD$ no puede ser un rombo porque no tiene sus lados congruentes.

2 . 3 Razonamiento deductivo

El método deductivo consiste en partir de un número reducido de información (hipótesis) y mediante un proceso lógico deducir otros conocimientos o proposiciones nuevas. Para profundizar y entender este método explicaremos a continuación cuales son los procesos lógicos.

2 . 3.1 Tipos de proposiciones lógicas

En este curso casi siempre trabajaremos con proposiciones compuestas, es decir una proposición que esta formada por un conjunto de proposiciones, unidas por operadores lógicos llamados conectores:
Esos conectores son

- $\sim$, es una proposición simple a la cual se le cambia el valor de verdad. La proposición se llama nagación.

Ejemplo . 2 . 3. 21

La negación de la proposición "Los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son rectos" es:
"El ángulo $\angle\alpha$ no es recto o el ángulo $\angle\beta$ no es recto".

- $\vee$, a la proposición compuesta formada por este conectivo que se lee "o", se llama disyunción.

Ejemplo . 2 . 3. 22

Un cuadrilátero es un polígono con cuatro lados o cuatro vértices.

☛ $\wedge$, la proposición resultante se llama conjunción y el conector se lee " y "

Ejemplo . 2 . 3. 23

Un polígono regular tiene los ángulos interiores y sus lados congruentes.

☛ si $\cdots$,entonces $\cdots$, la proposicón resultante se llama condicional.

Ejemplo . 2 . 3. 24

Dos rectas que no se intersecan son paralelas o alabeadas

Está proposición es de la forma $p \rightarrow (q \vee r)$

☛ $\cdots$ si y sólo si $\cdots$, a la proposicón resultante se le llama bicondicional.

Vamos a hablar un poco de las dos últimas proposiciones: La condicional es una proposición que se denota de la forma $p \longrightarrow q$, donde p y q son proposiciones que llamaremos, hipótesis y conclusión respectivamente. Por ejemplo

Ejemplo . 2 . 3. 25

Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces es un triángulo rectángulo.

En este caso la hipótesis es : el triángulo es rectángulo y la conclusión es: el triángulo es rectángulo.

La bicondicional se denota $p \longleftrightarrow q$, y se puede descomponer en la conjunción de dos condicionales, así: $p \longrightarrow q \wedge q \longrightarrow p$.

Ejemplo . 2 . 3. 26

Dos rectas son paralelas si y sólo si sus ángulos alternos internos formados por una transversal son congruentes

en este ejemplo p es: Dos rectas son paralelas.
q es: Los ángulos formados por una transversal son congruentes.

Nota: Para saber el valor de verdad proposición compuesta se utilizan las definiciones organizadas en la siguiente tabla:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Con la condicional y la bicondicional se pueden construir dos tautologías de la siguiente manera:

Término. 2.14. **Implicación**

Es una condicional que siempre es verdadera

Por ejemplo:

Ejemplo .2 . 3. 27

Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos paralelos, entonces estos lados son congruentes.

La figura(.4) llamada trapecio tiene los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ paralelos y no son congruentes. Por tanto esta condicional no es una implicación.

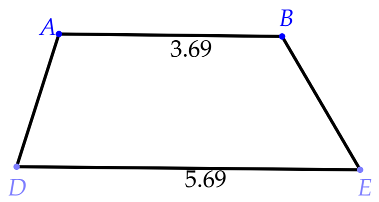


Figura .4: Trapecio

La condicional se denota $p \Longrightarrow q$ y se lee p implica q

Término. 2.15. Doble implicación

Es una bicondicional que siempre es cierta.

Por ejemplo todas las definiciones son bicondicionales. Nota: La doble implicación se denota $p \Longleftrightarrow q$ y se dice que que p y q son proposiciones lógicamente equivalentes

Ejemplo .2 . 3. 28

Analice el valor de verdad de la proposición compuesta

$$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$$

Solución:

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Es decir las proposiciones: $p \to q$ y $\sim q \to \sim p$ son equivalentes.

Ejemplo .2 . 3. 29

Presentaremos algunos ejemplos de implicaciones y equivalencia lógicas

1. $[p \wedge (p \to q)] \Longrightarrow q$
2. $[(p \to q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$
3. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Longrightarrow (p \to r)$
4. $(p \wedge q) \Longrightarrow p$
5. $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
6. $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

7. $(p \to q) \Longleftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
8. $[p \to (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) \to r]$
9. $[(p \to q) \wedge (q \to p)] \Longleftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
10. $(p \to q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$
11. $\sim (p \to q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$
12. $p \to (p \vee q)$

2 . 3.2 Otras formas de expresar una implicación

En algunos casos las condicionales, vienen expresadas de tal forma que cada proposición simple se puede representar como un conjunto, por ejemplo

$$\text{Los polígonos de cuatro lados son cuadriláteros.} \qquad (.1)$$

En este caso llamaremos $P_x = \{x : x \text{ es un polígono}\}$ y $Q_x = \{x : x \text{ es un cuadrilátero}\}$ [1] y representamos la proposición (.1) como $P_x \to Q_x$, pero a nosotros nos interesan son las implicaciones, por tanto veamos cuando está proposición es verdadera. Para ello tomaremos otro conjunto $U_x = \{x : x \text{ es una figura plana}\}$, a este conjunto lo llamaremos universal o de referencia. Ahora realizaremos un diagrama de Venn mostrado en la figura (.5).

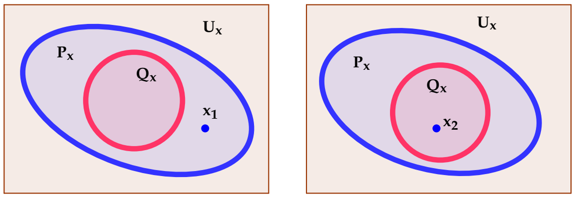


Diagrama 1 Diagrama 2

Figura .5: Proposiciones abiertas

Si tomamos un polígono, el cual representaremos con el símbolo x_1, observamos en el diagrama 1 que x_2 no está en el conjunto de los cuadriláteros, por tanto en este caso $P_x \to Q_x$ es falsa, mientras en el diagrama 2 tomaremos un polígono representado por x_2 el cual está en Q_x, por tanto $P_x \to Q_x$ es verdadera, de lo que podemos concluir que para que $P_x \to Q_x$ sea una tautología debe cumplirse la relación.

$$Q_x \subseteq P_x$$

Para indicar que $P_x \to Q_x$ es una tautología utilizamos unos operadores lógicos de existencia, los cuales son:

- Existe algún: Se representa $\exists x$ y se lee existe algún x.
- Para todo: se representa $\forall x$ y se lee para todo x.
- Existe un único: Se representa $\exists\, !x$ y se lee existe uno y sólo un x.
- Ningún: Se representa $\sim \exists x$ y se lee no existe ningún X.

En nuestro caso la proposición quedaría:

$$\forall x (p_x \Longrightarrow q_x)$$

De aquí en adelante el conjunto que representa a la proposición se representará con letras mayúsculas y las proposiciones con letras minúsculas con la variable como subíndice:

[1] A las proposiciones que dependen de una variable y de un conjunto referencia, como es el caso de P_x y Q_x se llaman proposiciones abiertas.

Analicemos nuevamente el diagrama 2 de la figura (.5) Como, x_2 está en el conjunto, entonces podemos decir que P es condición suficiente para que x_2 esté en el conjunto Q. En este sentido, se dice que p_x es condición suficiente para q_x. Además es claro que para que un elemento x_2 esté en P se necesita que x_2 esté en en Q. De aquí que se diga que q_x es condición necesaria para p_x. También se observa que un elemento x_2 está en el conjunto Q si está en el conjunto P. Este análisis precedente sugiere otras maneras de expresar la implicación

$$p_x \Longrightarrow q_x$$

éstas son:

1. p_x implica a q_x
2. p_x es condición suficiente para q_x
3. q_x es condición necesaria para p_x
4. q_x, si p_x

2 . 3.3 Derivadas de un condicional

Asociado al condicional $p_x \rightarrow q_x$ hay otros tres condicionales que se consideran en matemáticas. éstos son:

1. **La recíproca**, cuya estructura es $q_x \rightarrow p_x$
2. **La contraria**, cuya estructura es $\sim p_x \rightarrow \sim q_x$
3. **La contrarrecíproca**, cuya estructura es $\sim q_x \rightarrow \sim p_x$

Ejemplo . 2 . 3. 30

Determine el valor de verdad de la proposición: “Si dos rectas son perpendiculares, entonces se intersecan”. Además escriba la recíproca, la contraria y la contrarrecíproca del condicional con sus respectivos valores de verdad.

Solución: De la definición de rectas perpendiculares se deduce que el condicional dado es verdadero. La recíproca del condicional es: “Si dos rectas de intersecan, entonces son perpendiculares”, la cual es falsa, ya que en el siguiente ejemplo se tienen dos rectas que se intersecan y no son perpendiculares.

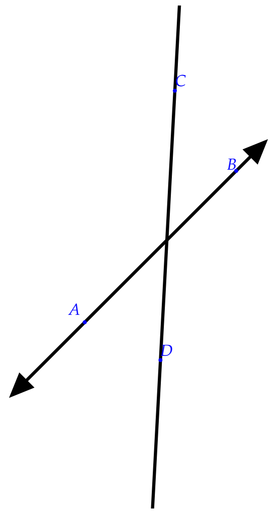


Figura .6: Reciproco

La contraria del condicional dado es: "Si dos rectas no son perpendiculares, entonces no se intersecan", la cual es falsa. De un contraejemplo.La contrarrecíproca del condicional es: "Si dos rectas no se intersecan, entonces no son perpendiculares", ¿cuál es su valor de verdad?, ¿por qué.?

2 . 4 Esquemas de razonamiento

Si no podemos encontrar un ejemplo que contradiga una conjetura, no quiere decir que esa generalización sea cierta, el camino a seguir es usar un esquema de razonamiento que nos asegure que la proposición siempre es verdadera.

2 . 4.1 Prueba indirecta

Es un razomiento de la forma:

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ \sim q \\ \hline \\ \sim q \end{array}$$

Como la condicional debe ser una implicación, entonces tenemos que para que ella sea una tautología, solo existen dos posibilidades, que las dos proposiciones p y q tengan el mismo valor de verdad. Por tanto si q es falsa se deduce que p también es falsa.

Ejemplo . 2 . 4. 31

$$\begin{array}{rl} p \to q: & \text{Si un triángulo tiene tres ángulos congruentes, entonces es equilátero.} \\ p: & \text{El triángulo } \triangle ABC \text{ tiene tres ángulos congruentes} \\ \hline \\ q: & \text{El triangulo } \triangle ABC \text{ es equilátero.} \end{array}$$

2 . 4.2 Modus ponendus ponens

Este es un razonamiento de la forma:

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ \sim p \\ \hline \\ \sim p \end{array}$$

La argumentación es la misma de la prueba indirectaes decir para que $p \longleftrightarrow q$ sea una implicación si p es verdadera, se tiene que q también lo es.

Ejemplo . 2 . 4. 32

$$\begin{array}{rl} p \to q: & \text{Si dos rectas son paralelas, entonces no tienen puntos en común.} \\ \sim q: & \text{Las rectas } \overleftrightarrow{l_1} \text{ y } \overleftrightarrow{l_2} \text{ tienen un punto en común.} \\ \hline \\ \sim p: & \text{Las rectas } \overleftrightarrow{l_1} \text{ y } \overleftrightarrow{l_2} \text{ no son paralelas.} \end{array}$$

2 . 4.3 Regla de la cadena

Este razonamiento es el más usado en geometría consiste en construir una cadena de implicaciones partiendo de la hipótesis hasta obtener la conclusión y es de la forma:

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow r \\ r \longrightarrow q \\ \hline \\ p \longrightarrow q. \end{array}$$

Ejemplo . 2 . 4. 33

$$\begin{array}{ll} p \to q: & \text{Si dos rectas son perpendiculares, entonces se intersecan.} \\ q \to r: & \text{Si dos rectas se intersecan, entonces no son paralelas.} \\ \hline \\ p \to r: & \text{Si dos rectas son perpendiculares, entonces no son paralelas.} \end{array}$$

Otra forma de interpretar este razonamiento es:

$$(p \longrightarrow r \wedge r \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow q),$$

mirándola de esta forma el razonamiento es equivalente si la conjunción es cierta entonces la conclusión también lo es decir $p \longrightarrow q$ es una tautología.

Ejemplo . 2 . 4. 34

Sea $\overleftrightarrow{ED}$ una mediatriz del segmento $\overline{AB}$ en el $\triangle ABC$, si el punto F es la intersección de lado AB y la mediatriz, entonces $\overline{AF} \cong \overline{FB}$.

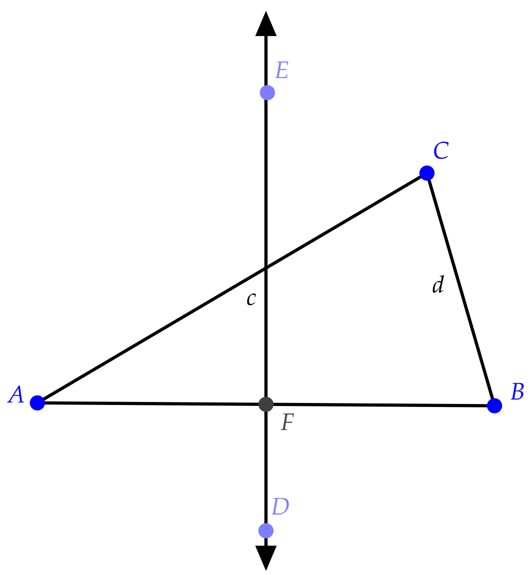


Figura .7: Mediatriz

Solución: Para demostrar que ésta proposición es una implicación vamos a utilizar el método de razonamiento deductivo, de la siguiente manera:

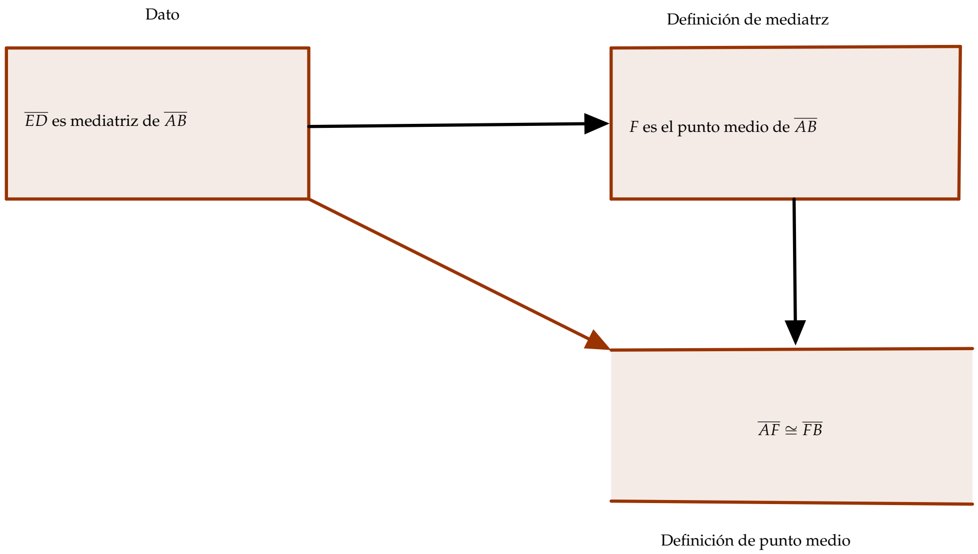


Figura .8: Solución

La estructura para radactar una demostración que usaremos es la siguiente.

Prueba:

	Afirmaciones	Razones
1.	$\overline{ED}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$	Dado
2.	F es punto medio de $\overline{AB}$	Definición de punto mediatriz
3.	$AD \cong DB$	Definición de punto medio

■

Es decir en este ejemplo usamos la regla de la cadena.

2 . 4.4 Ley modus tollendo-ponens

Este razonamiento es de la forma:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \\ q. \end{array}$$

2 . 4.5 Ley del silogismo disyuntivo

Es un razonamiento con la siguiente estructura

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \longrightarrow r \\ q \longrightarrow s \\ \hline \\ r \vee s. \end{array}$$

Nota: Existen tres reglas básicas de validez que se aplican continuamente en una demostración.
Regla 1: las definiciones, los postulados y los teoremas demostrados pueden aparecer en cualquier paso de la demostración.
Regla 2: las proposiciones equivalentes se pueden sustituir entre sí en cualquier parte de una demostración.
Regla 3: una proposición verdadera se puede introducir en cualquier punto de la demostración.

2 . 5 Postulados Y definiciones

Postulado..3. **Existencia de los puntos**

El espacio existe y contiene por lo menos 4 puntos no coplanares.

Postulado..4. **Existencia de la recta**

Dos puntos están contenidos en una y sólo una linea recta.

Postulado..5. **Existencia del plano**

Tres puntos no colineales están en uno y sólo un plano.

Postulado..6. **Intersección de los planos**

Si dos planos se intersecan, se intersecan exacta en una recta.

Postulado..7. **Del Plano y la recta**

Si dos puntos están en un plano, la recta que los contiene, también está en el plano.

Postulado..8. **Separación del plano.**

Una recta divide al plano en tres regiones convexas, la recta y dos semiplanos.

Postulado..9. **Separación del espacio**

Un plano divide al espacio en tres regiones convexas, el plano y dos semi-espacios.

Postulado..10. **Existencia de la recta paralela**

Dada una recta y un punto no alineado, existe una y sola una recta paralela que contenga al punto.

Postulado..11. **Existencia de la recta perpendicular**

Dada una recta y un punto no alineado, existe una y sólo una recta perpendicular que contiene al punto

Axioma..1. Adición de ángulos

Si D está en el interior del $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

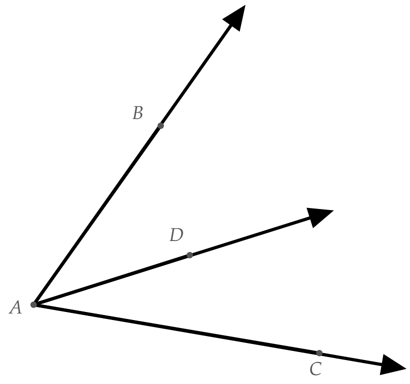


Figura .9: Suma de ángulos

2 . 5.1 Nuevas definiciones

En ésta sección presentaremos más definiciones para practicar el razonamiento deductivo.

Definición. 2.31. Ángulos verticales

Dos ángulos son opuestos por el vértice o verticales si tienen un vértice común y sus lados son rayos opuestos

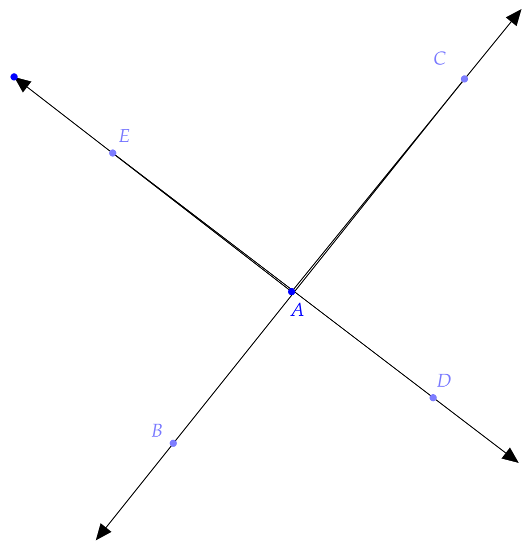


Figura .10: Ángulos opuestos por el vértice

En la figura(.18 tenemos que los ángulos EAC y BAD tienen el mismo vértice y además sus lados respectivos AE, AD y AC, AB son rayos opuestos, por tanto los ángulos son verticales.)

Definición. 2.32. Par lineal

Dos ángulos forman un par lineal si uno de sus lados son rayos opuestos y además tienen un vértice y un lado común.

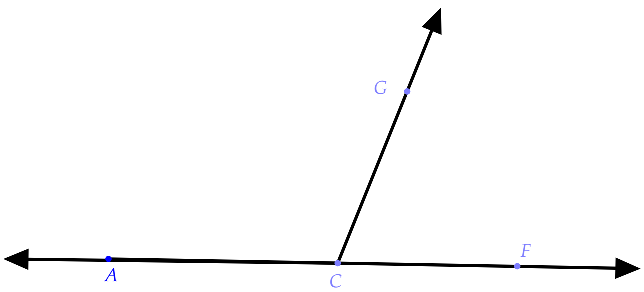


Figura .11: Par lineal

Teorema. 2.1. Teorema del par lineal

Los ángulos que forman un par lineal son suplementarios

La demostración queda de ejercicio.

Resuelva las siguientes interrogantes

1. ¿Es cierto que si dos ángulos son suplementarios entonces forman un par lineal? Justifique su respuesta.
2. Si dos ángulos suplementarios tienen medidas iguales, ¿cuál es la medida de cada ángulo? Argumente su respuesta.
3. Dos veces la medida de un ángulo es 30 menos que cinco veces la medida de su suplemento. Hallar la medida de cada ángulo.
4. Pruebe que si dos ángulos forman un par lineal y son congruentes entonces miden 90 cada uno.

2 . 6 Conjeturas y teoremas

Conjetura. .1

Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.

De los suplementos

Prueba:

	Afirmaciones	Razones
1.	$\angle A \cong \angle B$	Dado
2.	$\angle C$ es el suplemento de $\angle A$	Dado
3.	$\angle D$ es el suplemento de $\angle B$	Dado
4.	$m\angle A + m\angle C = 180$	Definición de angulos suplementarios
5.	$m\angle B + m\angle D = 180$	Definición de angulos suplementarios
6.	$m\angle A = m\angle B$	Definición de congruencia de ángulos
7.	$m\angle C = 180 - m\angle A$	Propiedades de la igualdad
8.	$m\angle D = 180 - m\angle B$	Propiedades de la igualdad
9.	$m\angle C = 180 - m\angle B$	Sustitución de (6) en (7)
10.	$m\angle C = m\angle D$	Sustitución de (8) en (9)
11.	$\angle C \cong \angle D$	Definición de congruencia

■

Teorema. 2.2. **Equivalencia**

Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva son validas en la congruencia de ángulos y segmentos

Probaremos la propiedad transitiva de la congruencia de segmentos, esto es, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

Prueba

Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, por la definición de congruencia de segmentos se sigue que $AB = CD$ y $CD = EF$. Ahora al aplicar las propiedades de la relación de igualdad, se sabe que ésta cumple la transitivad. En consecuencia, $AB = EF$, lo cual implica que $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. ■

Axioma..2. **Par lineal**

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

Teorema. 2.3. **Propiedad reflexiva**

Todo ángulo es congruente consigo mismo.

La congruencia de ángulos cumple las propiedades simétrica y transitiva, estas conjeturas se dejan de ejercicio.

Teorema. 2.4. **Ángulos rectos**

Dos ángulos rectos cualesquiera son congruentes.

Teorema. 2.5. **Ángulo recto**

Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.

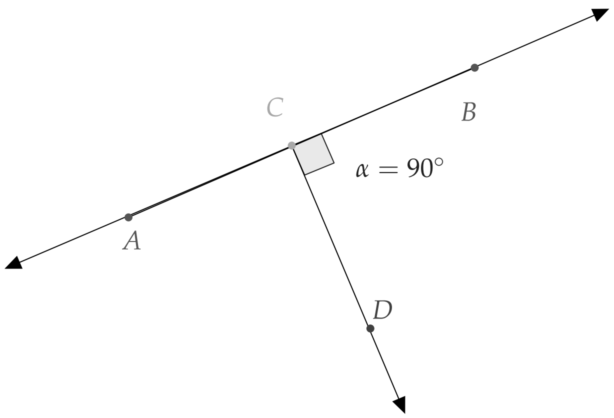


Figura .12: Angulo recto

Prueba

En la figura .12 tenemos que $\angle BCD \cong \angle ACD$ y además cumplen que $m\angle BCD + m\angle ACD = 180$ y como los ángulos son congruentes entonces se tiene que $m\angle BCD = m\angle ACD$ por tanto se tiene que $2m\angle BCD = 180$, entonces $m\angle BCD = 90 = m\angle ACD$ ∎

Teorema. 2.6. **Complementos**

Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

Teorema. 2.7. **Ángulo recto**

Si dos rectas que se cortan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos.

Teorema. 2.8. **Ángulo Recto**

Si los ángulos de un par lineal tienen la misma medida, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.

Teorema. 2.9. **Unicidad de la recta perpendicular**

En un plano, por un punto de una recta dada pasa una y sólo una perpendicular a la recta dada.

Teorema. 2.10. **Mediatriz**

Un segmento coplanario tiene exactamente una mediatriz.

2 . 6.0.1 CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Definición. 2.33. **Triángulo**

El triángulo es un polígono de tres lados.

Los triángulos pueden clasificarse por sus ángulos y por sus lados de las siguientes formas:

Definición. 2.34. Triángulo acutángulo

Un triángulo es **acutángulo** si todos sus ángulos interiores son agudos.

Definición. 2.35. Triángulo rectángulo

Si un triángulo tiene un ángulo interior recto, entonces se llama **triángulo rectángulo.**

Definición. 2.36. Triángulo obtusángulo

Si un triángulo tiene un ángulo interior obtuso, entonces se llama **triángulo obtusángulo**.

Definición. 2.37. Equiángulo

Un triángulo es **equiángulo** si todos sus ángulos interiores son congruentes entre sí.

Definición. 2.38. Equilátero

Un triángulo es **equilátero** si todos sus lados son congruentes entre sí.

Definición. 2.39. Isósceles

Un triángulo es **isósceles** si al menos dos de sus lados son congruentes entre sí.

Definición. 2.40. Escaleno

Un triángulo **escaleno**es aquel que no tiene lados congruentes entre sí.

2 . 6.0.2 Elementos notables de un triángulo

Definición. 2.41. Altura

Una **altura** de un triángulo es un segmento contenido en la recta que pasa por un vértice del triángulo y es perpendicular la recta que contiene al lado opuesto y que tiene como extremos el vértice y el punto de intersección de las rectas

Definición. 2.42. Ortocentro

El punto donde se intersecan las alturas de un triángulo se denomina **ortocentro.**

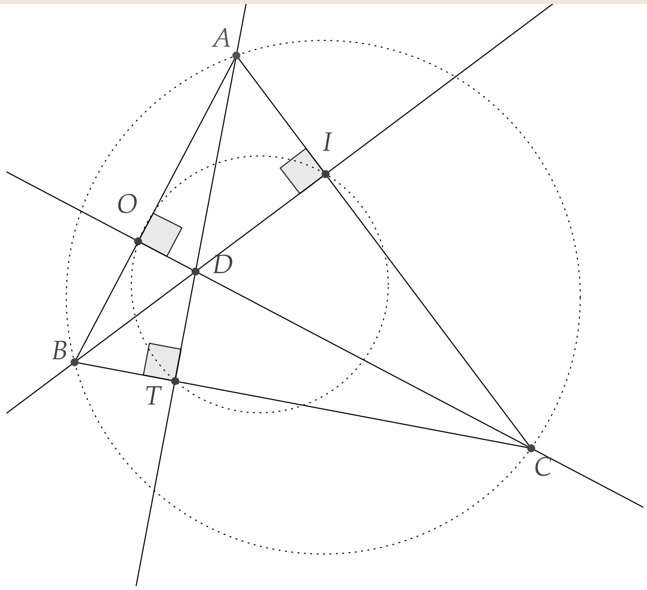


Figura .13: Ortocentro

En la figura (.13) El punto D es el ortocentro.

Definición. 2.43. Circuncentro

El punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo se denomina **circuncentro.**

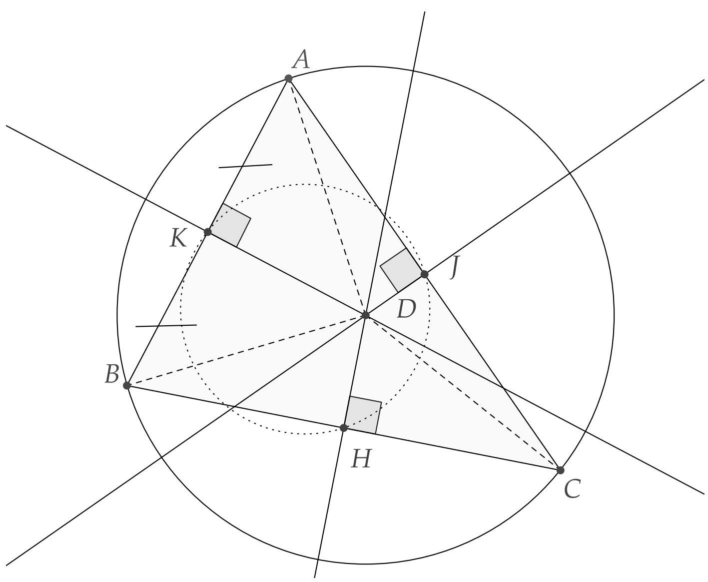


Figura .14: Circuncentro

En la figura(.14) el punto de intersección de las mediatrices es D y es el centro de la circunferencia que contiene los vértices del triángulos.

Definición. 2.44. Incentro

El punto donde se intersecan las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se denomina **incentro.**

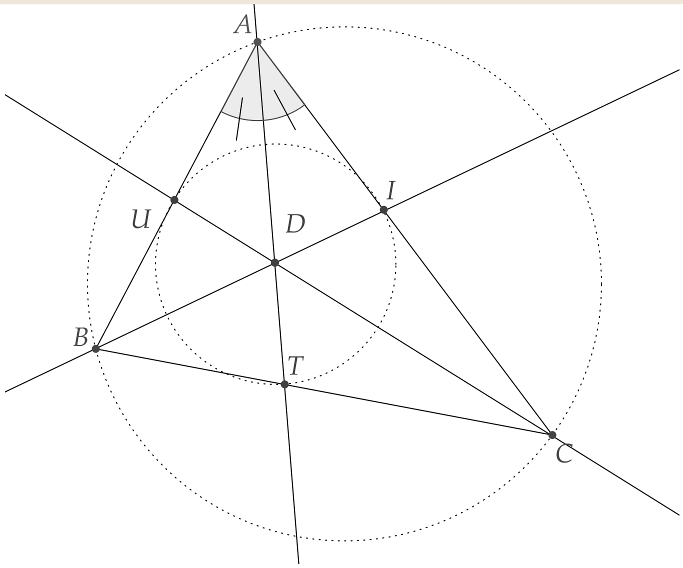


Figura .15: Incentro

El punto de la figura(.15) es el punto D.

Definición. 2.45. Mediana

Una **mediana** de un triángulo es un segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto

Definición. 2.46. Centroide

El **baricentro o centroide** es el punto de intersección de las medianas de un triángulo.

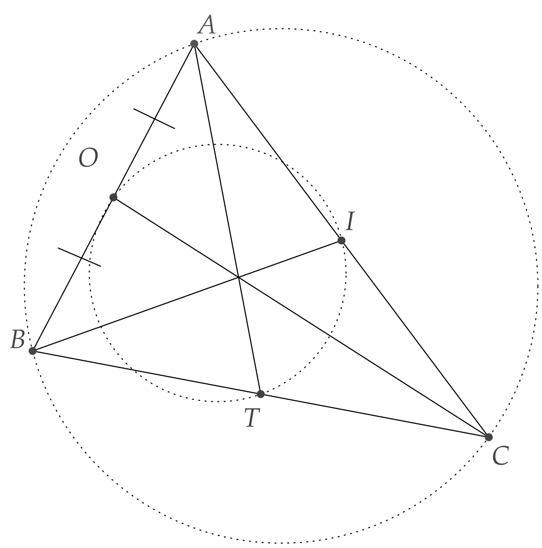


Figura .16: Centroide

2 . 6.1 Relaciones de ángulos

Conjetura. .1

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios

Par lineal

Prueba:

Afirmaciones	Razones
1. Los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle DBC$ forman un par lineal	Dado
2. $m\measuredangle ABD = 180$	Definición del ángulo llano.
3. $m\measuredangle ABC = x$ y $m\measuredangle DBC = y$	Postulado del transportador
4. $m\measuredangle ABC + m\measuredangle DBC = m\measuredangle ABD = 180$	Construcción
5. Los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle DBC$ son suplementarios	De 2), 3), 4) y definición de ángulos suplementarios

■

Teorema. 2.11. Suplementos

Si dos ángulos son congruentes sus suplementos son congruentes

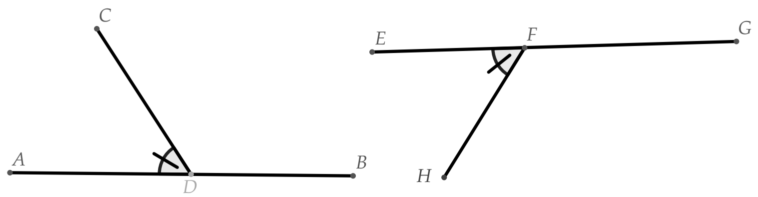


Figura .17: Complementos

En la figura (.19) los ángulos $\angle CDB$ y $\angle HFG$ son congruentes.

Teorema. 2.12. Opuestos por el vértice

Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes.

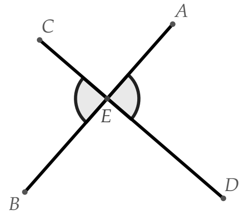


Figura .18: Opuestos por el vértice

En la figura(opv) se observa claramente que si aplicamos la definición de suma de ángulos y la de par lineal y luego aplicamos el teorema de los ángulos suplementarios nos que demostrado el teorema.

Teorema. 2.13. Complementos

Si dos ángulos son congruentes sus complementos son congruentes

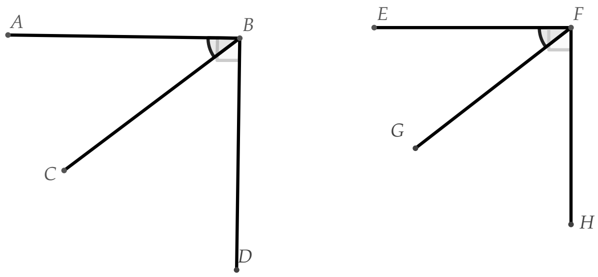


Figura .19: Ángulos complementarios

En la figura(.19) observamos que si los ángulos $\angle ABC$ y $\angle EFG$ son congruentes, los ángulos $\angle CBD$ y $\angle HFG$ deben ser congruentes. Utilizando las definiciones de ángulos complementarios y suma de ángulos.

Conjetura. .1

La medida del ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores no contiguos

Teorema del ángulo exterior Replantearemos la conjetura del ángulo exterior de la siguiente forma: Dado el $\triangle ABC$ como se muestra en la figura(.20) con ángulo exterior, $\angle 1$. demuestre que $m\angle 1 > m\angle 2$.

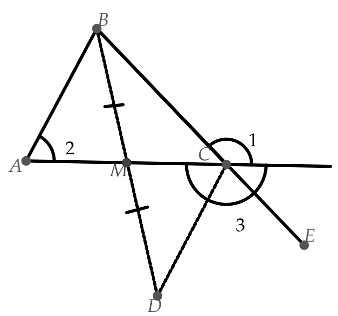


Figura .20: Teorema del ángulo exterior

Prueba:

	Afirmaciones	Razones
1.	$\angle 1$ es un ángulo exterior del $\triangle ABC$.	Dado
2.	Sea M el punto medio de $\overline{AC}$	Construcción auxiliar.
3.	Sea $\overline{BD}$ un segmento tal que M sea su punto medio.	Construcción auxiliar.
4.	$\overline{AM} \cong \overline{MC}$ y $\overline{BM} \cong \overline{MD}$	Definición de punto medio.
5.	$\angle BMA \cong \angle DMC$	Ángulos opuestos por el vértice.
6.	$\triangle ABM \cong \triangle CMD$	LAL de 4) y 5).
7.	$\angle 2 \cong \angle MCD$	PCTCC
8.	$m\angle 2 = m\angle MCD$	Definición de ángulos congruentes.
9.	$m\angle MCD + m\angle DCE = m\angle 3$	Definición de suma de ángulos.
10.	$m\angle 2 + m\angle DCE = m\angle 3$	Principio de sustitución.
11.	$m\angle 3 > m\angle 2$	Definición de mayor que.
12.	$\angle 3 \cong \angle 1$	Opuestos por el vértice.
13.	$m\angle 3 = m\angle 1$	Definición de congruencia de ángulos
14.	$m\angle 1 > m\angle 2$	Principio de sustitución de 11) y 13).

■

Nota: : Observe que en esta prueba se utiliza la principio de sustitución del álgebra y el principio de adición de premisa de acuerdo con el ítem 4 del ejemplo 2.10, en los pasos 2) y 3).

Definición. 2.47. Recta transversal

Se dice que una recta es transversal o secante si interseca a otras dos en puntos diferentes

2 . 6.2 Ángulos formados por una transversal

- Los ángulos alternos internos son dos ángulos interiores con diferentes vértices y en lados diferentes de la secante.

- Los ángulos conjugados internos son dos ángulos internos con diferentes vértices y del mismo lados de la secante.

- Loa ángulos correspondientes son dos ángulos con diferentes vértices del mismo lado de la secante pero, uno exterior y el otro interior.

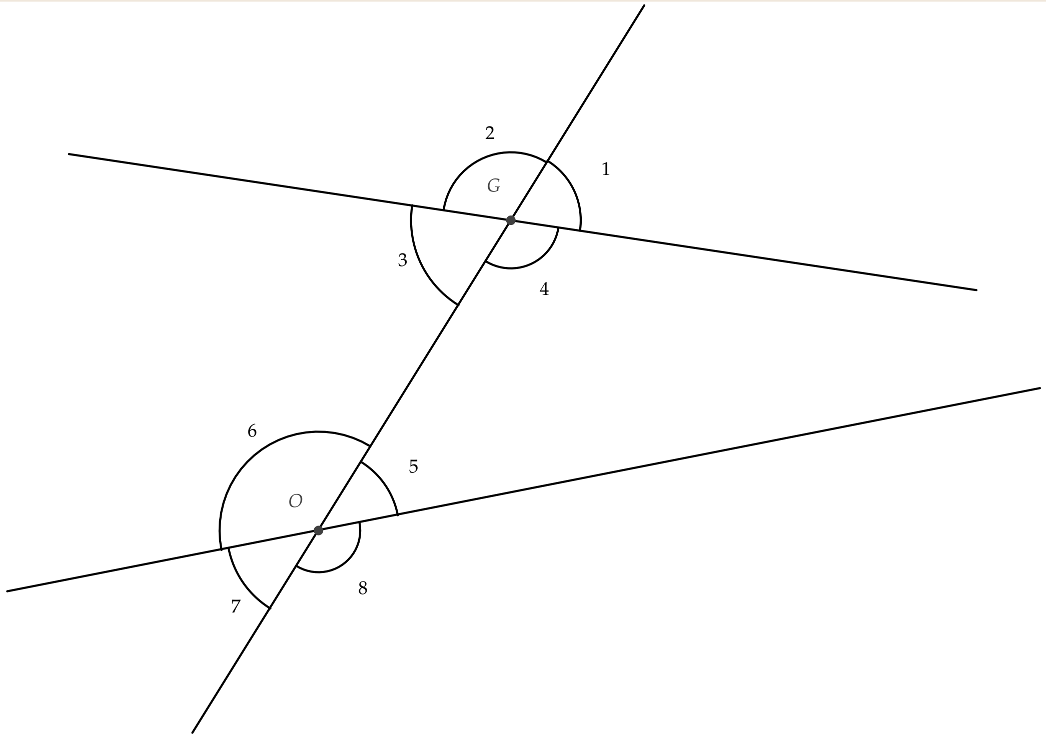


Figura .21: Recta secante

Por ejemplo los ángulos 4 y 6 son alternos internos, los ángulos 3 y 6 son conjugados internos, y los ángulos 1 y 5 son correspondientes.

2 . 6.3 Ángulos especiales entre rectas paralelas

Conjetura. .1

Dos rectas cortadas por una recta transversal son paralelas si y sólo si sus ángulos correspondientes son congruentes

Ángulos correspondientes (AC) Para realizar la prueba del reciproco de la conjetura usaremos el método reducción al absurdo o de contradicción, de la siguiente forma:
Suponemos que existen dos rectas l_1 y l_2 que no son paralelas y son cortadas por una secante l_3 y además que $\angle 1 \cong \angle 2$
Para la prueba observa la figura (.22)

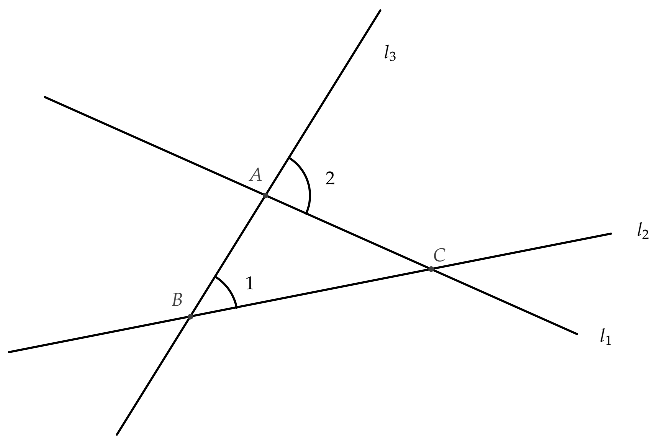
Prueba:

	Afirmaciones	Razones
1.	$l_1 \nparallel l_2$	Dado
2.	$\angle 1 \cong \angle 2$	Dato.
3.	Como $l_1 \nparallel l_2$, entonces se cortan en el punto C	Definición de rectas paralelas
4.	Entre los puntos A, B y C se forma un triángulo	Defnición de polígono.
5.	El $\angle 2$ es un ángulo exterior del $\triangle ABC$	Definición del ángulo exterior.
6.	$m\angle 2 > m\angle 1$.	Teorema del ángulo exterior.
7.	$m\angle 2 = m\angle 1$. contradicción de 6).	Definición de ángulos congruentes de 2).
8.	$l_1 \parallel l_2$	Conclusión de la prueba indirecta

■

Con lo anterior demostramos que:
Si las rectas l_1, l_2 y l_3 forman ángulos correspondientes $\angle 1 \cong \angle 2$, entonces las rectas $l_1 \parallel l_2$.
Nos queda probar que sia las rectas $l_1 \parallel l_2$ entonces se tiene que $\angle 1 \cong \angle 2$.
Ahora para probar la expresión directa de la conjetura usaremos el mismo método de la siguiente forma:
Suponemos que $\angle 1 \ncong \angle 2$ y que $l_1 \parallel l_2$.

Figura .22: ACEP



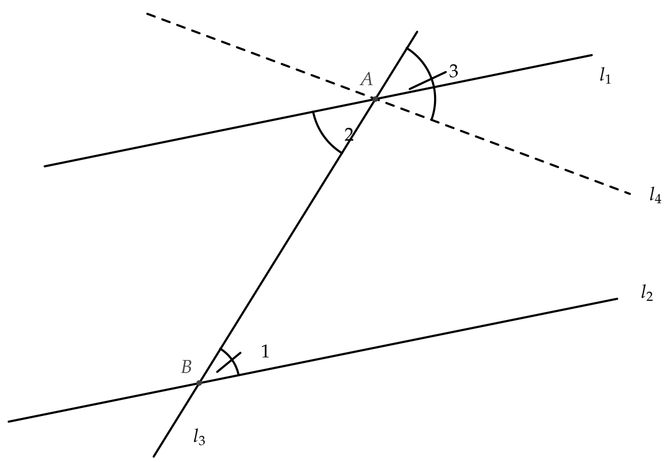


Figura .23: ACEP

Prueba:

	Afirmaciones	Razones
1.	$\angle 1 \ncong \angle 2$	Dado
2.	$l_1 \parallel l_2$	Dato.
3.	Trazamos una recta l_4 de tal forma que pase por A y con la secante forme un ángulo $\angle 3$ congruente con el $\angle 1$	Construcción auxiliar.
4.	$l_1 \parallel l_2$ y A está en l_4	Ángulos correspondientes congruentes.
5.	Hay dos rectas paralelas a la recta l_2	de 2) y 4).
	$\angle 1 \cong \angle 2$	Conclusión de la prueba indirecta.

Conjetura. .1

Dos rectas son paralelas si y son por una recta transversal sus ángulos alternos internos son congruentes

Ángulos alternos internos (AAI)

Conjetura. .1

Dos rectas son paralelas si y sólo si al ser interceptadas por una recta transversal sus ángulos alternos externos son congruentes

Ángulos alternos externos (AAE)

Conjetura. .1

Dos rectas son paralelas si y sólo si al ser interceptadas por una recta transversal sus ángulos conjugados internos son suplementarios

Ángulos conjugados internos (ACI)

Teorema. 2.14. recta perpendicular

Si dos rectas son paralelas y una secante es perpendicular a una de las paralelas, entonces también es perpendicular a la otra.

Construcción. 2.8. Recta paralela

Sea $\overleftrightarrow{AB}$ una recta paralela que pasa por por un punto C.

Para resolver el problema vamos a seguir los siguientes pasos:

- Se construye una recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pase por el punto C.
- Se construye un segmento AC.
- Se traza un arco centrado en A que pase por C, radio f.
- Se traza un arco centrado en C con el mismo radio f.
- En el punto de intersección del arco centrado en A y la recta $\overleftrightarrow{AB}$ se traza que pase por C, radio e.
- En el punto de intersección de la circunferencia centrada en C y radio f se traza una circunferencia de radio e.
- Se traza una recta entre el punto C y el punto de intersección de la circunferencia y el arco centrado en C.

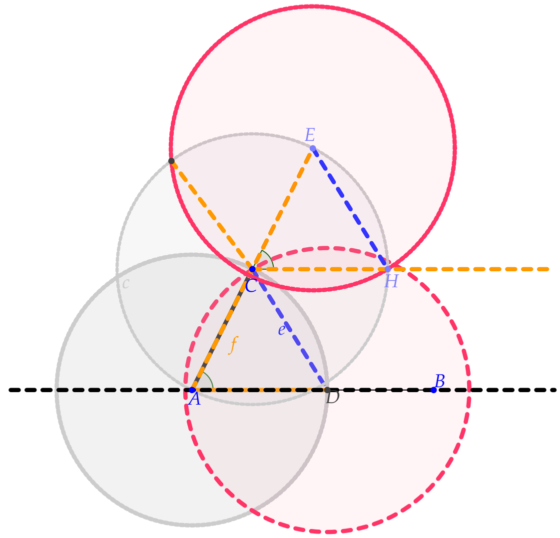


Figura .24: Recta paralela

Conjetura. .1

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180

SAIT

Dado el $\triangle ABC$, ver la siguiente figura(.25), se probará que $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$.

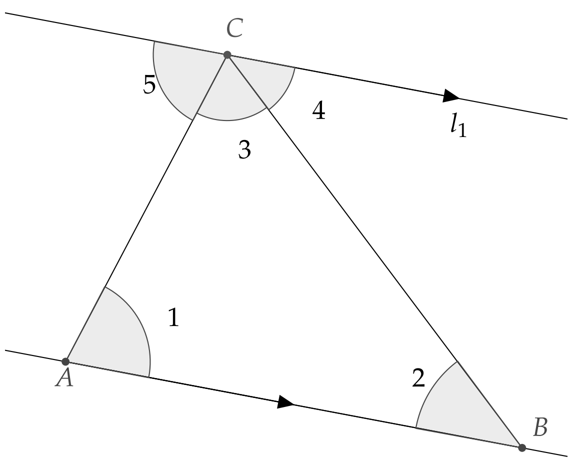


Figura .25: SAIT

Prueba:

Afirmaciones	Razones
1. Sea un triángulo ABC	Dado
2. $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y pasa por C	Construcción auxiliar
3. $\angle 1 \cong \angle 5$ y $\angle 2 \cong \angle 4$	Teorema de paralelismo
4. $m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 180$	Postulado de adición de ángulos y postulado de par lineal
5. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$	Sustitución de 2) en 3)

■

2 . 6.4 Rectas paralelas en un plano

Conjetura. .1

En un plano, si dos rectas son paralelas a una tercera recta, entonces son paralelas entre sí.

Transitividad entre Paralelas

La prueba se deja como ejercicio.

Teorema. 2.15. Transitividad entre paralelas

Dos rectas en un plano son paralelas, si ambas son perpendiculares a una misma recta.

Teorema. 2.16. Unicidad de la perpendicular

Por un punto exterior a una recta dada pasa una y sólo una perpendicular a la recta dada.

Teorema. 2.17.

Ningún triángulo tiene dos ángulos rectos.

Ejemplo . 2 . 6. 35

Dado: $m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 5 = 180$,
$\angle 4 \cong \angle 5$.
Pruebe: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

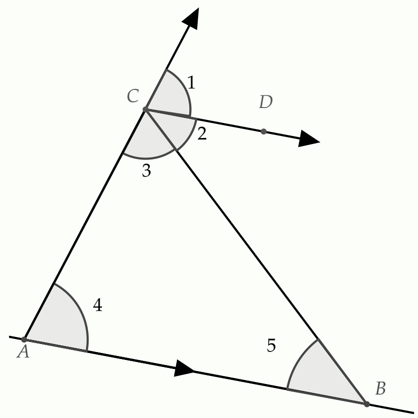


Figura .26: Ejemplo

Solución:

	Afirmaciones	Razones
1.	$m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 5 = 180$	Dado
2.	$\angle 4 \cong \angle 5$	Dato.
3.	$m\angle 4 + m\angle 3 + m\angle 5 = 180$	Teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
4.	$m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle ACD$	Postulado de la adicción de ángulos.
5.	$m\angle ACD + m\angle 1 = 180$	Definicion de par lineal.
6.	$m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 1 = 180$	Sustitución de 4) en 5).
7.	$m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 5 = m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 5$	Igualación.
8.	$m\angle 5 = \angle 1$	Propiedad cancelativa.
9.	$m\angle 4 = \angle 1$	Propiedad transitiva.
10.	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	Teorema de las paralelas.

■

Definición. 2.48. **Ángulo exterior Un ángulo**

Un ángulo es un ángulo exterior de un polígono si y solamente si forma un par lineal con uno de los ángulos del polígono.

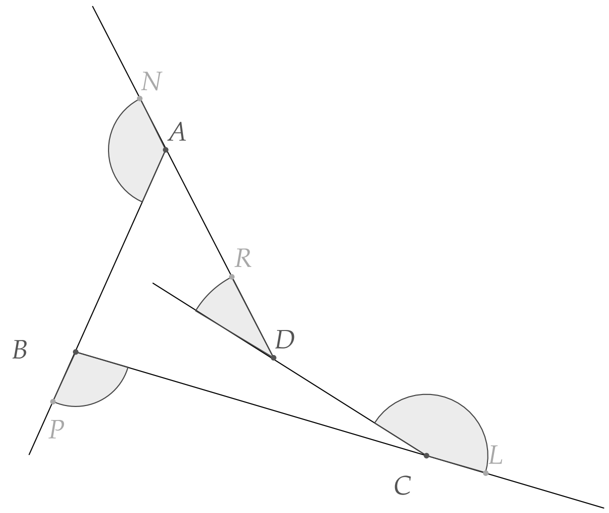


Figura .27: Ángulos exteriores

The global option open right, triggers the typesetting of chapter on odd pages only. There are a couple of layouts that must be typeset on an even pages.

Capítulo

3

Congruencia y semejanza

Contenido

- En este capítulo seguiremos con la construción axiomática de la geometría y paralelamente presentaremos construcciones con regla y cómpas, que luego al final de este capítulo empezaremos a demostrar.
- Del párrafo anterior se nos presenta una duda, ¿Qué es demostrar?
- Podemos considerar la demostración de una proposición q como una cadena finita de conclusiones que se realizan mediante reglas lógicas y que se forman a partir de proposiciones verdaderas o supuestamente verdaderas y las cuales nos conducen a una proposición p.
- La proposición o relación resultante de otras mediante el proceso de la demostración se llama `teorema` y este proceso podemos dividirlo tres partes (figura.1):

- Conocer la proposición que se trata de demostrar. En esta parte es importante diferenciar muy claramente la información que nos dan (la hipótesis) de lo que nos solicitan que demostremos (la tesis).
- Los fundamentos empleados como base de la demostración. Estos fundamentos están constituidos por los términos primitivos, las definiciones, los postulados y las proposiciones o teoremas ya demostrados.
- El procedimiento usado para lograr que la proposición quede demostrada (elegir el método adecuado).

3 . 1 Congruencia de triágulos

3 . 1.1 Correspondencia entre triángulos

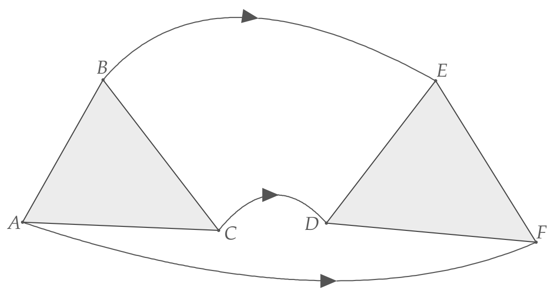


Figura .1: Correspondencia entre triángulos

Dados dos triángulos como se muestra en la figura(.1) siempre podemos establecer una correspondencia entre los vértices, como por ejemplo:
Podemos establecer $A \longleftrightarrow F, C \longleftrightarrow D$ y $B \longleftrightarrow E$.

Definición. 3.49. Partes correspondientes

La correspondencia establecida entre los vértices de de dos triángulos determina tres parejas de elementos del triángulo llamados partes correspondientes.

La correspondencia establecida en la figura .1 determina las siguientes partes correspondientes.
$\angle A \longleftrightarrow \angle F, \angle B \longleftrightarrow \angle E, \angle C \longleftrightarrow \angle D, \overline{AB} \longleftrightarrow \overline{FE}, \overline{BC} \longleftrightarrow \overline{ED}$ y $\overline{AC} \longleftrightarrow \overline{DF}$.

Definición. 3.50. Triángulos congruentes

Dos triángulos son congruentes si y sólo si existe una correspondencia entre los trángulos de tal forma que sus partes correspodientes, sean congruentes.

3 . 1.2 Postulados de congruencia

Postulado..12. LAL

Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y un ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

3 . 1.3 Postulados de congruencia

Postulado..13. ALA

Si dos ángulos y el lado del triángulo que es común, son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado comprendido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

3 . 1.4 Postulados de congruencia

Postulado..14. LAL

Si Los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con tres lados de otro triángulos, los triángulos son congruentes.

Teorema. 3.18. Triángulo isósseles

En un triángulo isóseles, la mediana al lado de la base forma dos triángulos congruentes. punto medio

Teorema. 3.19. LAA

Si en un triángulo , dos ángulos y un lado opuesto a uno de los ángulos son congruentes con dos ángulos y el lado correspondiente de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Teorema. 3.20. Hipotenusa y ángulo

Si la hipótenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un ángulo agudo de otro triángulo rectaángulo, entonces los triángulos son congruentes,

Teorema. 3.21. hipotenusa y el cateto

si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Teorema. 3.22. Mediatriz

Si un punto equidista de los extremos de segmento, entonces pertenece a la mediatriz del segmento.

Teorema. 3.23. circuncentro

El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.

Teorema. 3.24. Incentro

El incentro de un triángulo equidista de los lados del triángulo

Teorema. 3.25. Centroide

El centroide de un triángulo se encuentra a dos tercios de la longitud de cada mediana.

Teorema. 3.26. desigualdad triangular

Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son diferentes, entonces la longitud del lado opuesto al ángulo mayor, es mayor que la longitud del lado opuesto al ángulo menor.

Conjetura. .1

Un triángulo es isósceles si y sólo si los ángulos de la base son congruentes.

Triángulo isósceles

3 . 2 Proporciones

Definición. 3.51. Proporciones

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que se cumple $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cuando $c, d \neq 0$, entonces se dice que a, b, c y d son proporcionales.

3 . 2.1 Propiedades de las proporciones

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- Si $ad = bc$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

3 . 3 Teorema fundamental de la proporcionalidad

Definición. 3.52. Segmentos proporcionales

Cuatro segmentos son proporcionales si y sólo si sus longitudes son proporcionales

Teorema. 3.27. Teorema fundamental

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide a éstos dos en segmentos proporcionales

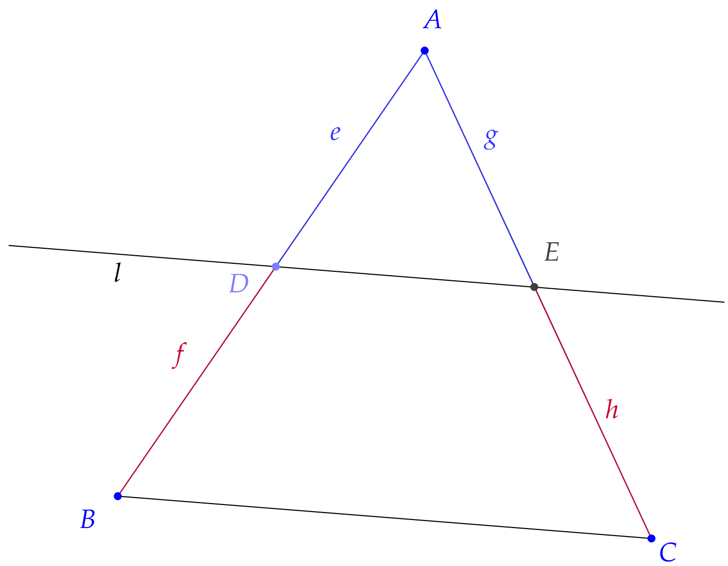


Figura .2: Proporción

Teorema. 3.28. Recíproco del teorema fundamental

Si una recta interseca a dos lados de un triángulo y los divide proporcionalmente, entonces la recta es paralela al tercer lado.

3 . 4 Polígonos semejantes

Definición. 3.53. Polígonos semejantes

Dos polígonos son semejantes si hay una correspondencia entre los vértices tal que los ángulos correspondientes sean congruentes y los lados correspondientes sean proporcionales

3 . 4.1 Triángulos semejantes

Postulado..15. A.A

Dos triángulos son semejantes si existe una correspondencia entre ellos tal que Dos parejas de ańgulos correspondientes son congruentes.

Teorema. 3.29. A.A.A

Dos triángulos son semejantes si y sólo si al establecer una correspondencia entre ellos los ángulos correspondientes son congruentes.

Teorema. 3.30. L.L.L

Dos triángulos son semejantes si y sólo si al establecer una correspondencia entre los dos triángulos sus lados correspondientes son proporcionales

Teorema. 3.31. L.A.L

Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de otro triángulo, y si los lados correspondientes que forman los ángulos, son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

3 . 4.2 Semejanza en triángulos rectángulos

Definición. 3.54. Media geométrica

Se dice que $x \in \mathbb{R}$ es media geométrica de $a, b \in \mathbb{R}$ si y sólo si se cumple $\dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{x}, a, x \neq 0$

Teorema. 3.32. Media geométrica

En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura a la hipotenusa es la media geométrica entre las longitudes de los dos segmentos de la hipótenusa.

Teorema. 3.33. Altura-hipotenusa

Dados un triángulo rectángulo y la altura a la hipotenusa, cada cateto es la media geométrica entre la longitud de la hipótenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente al cateto

3 . 5 Paralelogramos

Definición. 3.55. Cuadrilátero

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados

Definición. 3.56. Trapecio

Un trapecio es un cuadrilátero que tiene exactamente dos lados paralelos

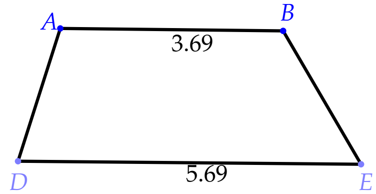


Figura .3: Trapecio

Nota: : Los lados paralelos de trapecio se llaman bases.

Construcción. 3.9. Trapecio

Para construir un trapecio, se construye dos segmentos paralelos, como se explicó en las construcción de paraleleas y luego se construye el cuadrilátero.

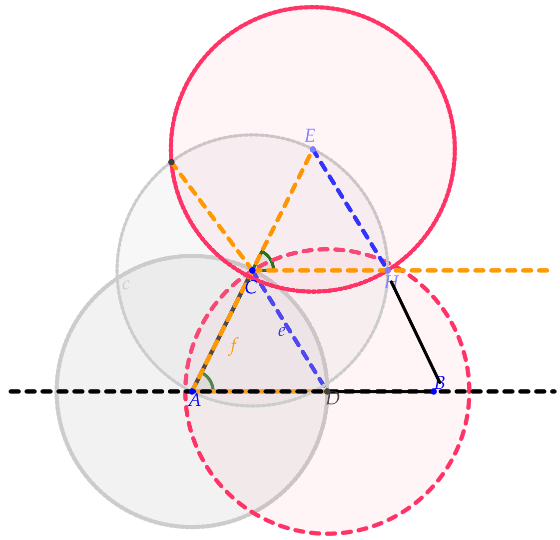


Figura .4: Trapecio

En la figura(.4) se observa el trapecio $ABHC$.

Definición. 3.57. Paralelogramo

Un paralelogramos es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos

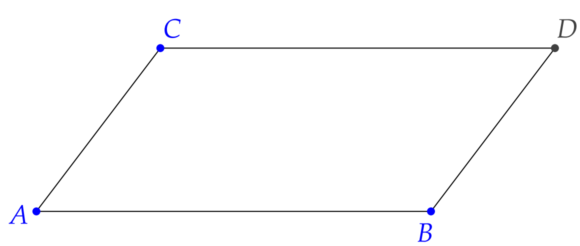


Figura .5: Paralelogramo

Definición. 3.58. Rombo

Un rombo es un paralelogramo que tiene sus lados congruentes

Definición. 3.59. Rectángulo

Un rectángulo es un paralelogramo que tiene dos lados contiguos perpendiculares.

Definición. 3.60. Cuadrado

El cuadrado es un paralelogramo que es rombo y rectángulo a la vez

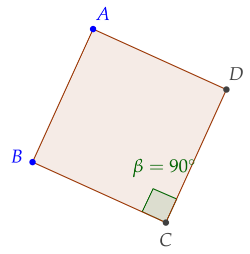


Figura .6: Cuadrado

Teorema. 3.34. LOPC

Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Teorema. 3.35. AOPC

Los ángulos opuestos de un paralelogramos son congruentes

Teorema. 3.36. PAAPC

Los pares de ángulos adyacentes de un paralelogramo son ángulos suplementarios.

Teorema. 3.37. RLOPC

Si los lados opuestos de un cuadriátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo

Teorema. 3.38. RPAAPC

Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo

Teorema. 3.39. Segmento medio

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud

Teorema. 3.40. PMCDP

Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son vértices de un paralelogramp

Teorema. 3.41. Diagonales de un paralelogramo

Un paralelogramo es un rectángulo si, y sólo si, sus diagonales son congruentes,

Teorema. 3.42. ERSDP

Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si sus diagonales son perpendiculares entre sí.

Teorema. 3.43. ERDBA

Un paralelogramo es un rombo si, y sólo si, cada diagonal biseca a un par de ángulos opuestos

Teorema. 3.44. Segmento medio del trapecio

El segmento que une los puntos medios de dos lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las dos bases y tiene una longitud igual a la semisuma de las longitudes de las bases.

Teorema. 3.45. trapecio isósceles

En un trapecio con sus lados no paralelos congruentes, los ángulos de la base y las diagonales son congruentes

Teorema. 3.46.

La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono, en cada uno de sus vértices es, 360°.

Teorema. 3.47.

La suma de los ángulos de un polígono convexo de n lados es $(n-2)180^\circ$