Introducción metodológica e histórica

El principio de razón suficiente, que afirma que nada sucede gratuitamente, es decir, que a todo fenómeno le corresponde una explicación, una razón de ser que se presente admisible a la razón.

Leibniz:

Antes de empezar a definir los conceptos abstractos (generales) sobre los cuales se basa el *Cálculo Infinitesimal*, nos parece conveniente desde el punto de vista psicológico, adelantar algunas ideas acerca de ciertos problemas que dieron origen a esta rama importante de la *Matemática Moderna*. el desarrollo lógico del tema no requiere de esta introducción panorámica, sino que se bastaría con dar las definiciones abstractas necesarias y después ir demostrando las relaciones importantes entre los conceptos definidos. Para la mayoría de los matemáticos este es el único camino «correcto» y esta es la causa de que casi todos los textos de la materia, impecable la mayoría de ellos desde el punto de vista lógico resulten inasequibles a los principiantes; y es natural que así sea, pues no todo el mundo tiene sentido de la adivinación para descubrir de antemano que problemas puede resolver, qué uso puede dar, a aquellos instrumentos abstractos que el matemático le va presentando como por arte de magia.

Los que proceden de esta forma, es decir limitándose a dar las definiciones y teoremas, sin anticipar una descripción global (aunque no sea definitivamente rigurosa) de los problemas que requieren para su solución aquellas definiciones y teoremas , condenan al alumno al hastío y la esterilidad, pues dejan inoperantes las fuerzas vitales concurrentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. No hay que olvidar que «El martillear fue antes que el martillo»; los problemas fueron anteriores a los métodos para resolverlos, y es difícil, para la mayoría de las inteligencias, moverse comprensivamente, en un plano de ideas abstractas sin entrever de donde fueron abstraídas. de aquí la necesidad psicológica (no lógica) de anticipar la descripción de los problemas que dieron origen a los nuevos métodos, pues ellos fueron la base de lo que nació síntesis de conceptos y relaciones que constituyen el moderno *Cálculo Infinitesimal*. Si a ser inteligente, que nunca hubiese visto un martillo, se le muestra uno, indicándole previamente que ese instrumento se va a usar para martillear, comprenderá muy bien por qué tiene el diseño que todos nosotros conocemos, y hasta es posible que, si tiene genio para ello, idee un nuevo diseño para el martillo, más adecuado para la acción de martillear. Consecuentemente con estas ideas, hemos decidido, aunque esto sea salirnos de los moldes euclidianos de la mayoría de los textos, escribir el libro que nos hubiese gustado leer cuando teníamos quince o dieciséis años, anticipando la descripción de los problemas más importantes que dieron origen al Cálculo Infinitesimal.

Los problemas típicos que dieron origen al Cálculo Infinitesimal comenzaron a plantearse en la época clásica de Grecia (hacia el siglo III antes de nuestra era cristiana) y no se encontraron métodos generales y sistemáticos de resolución hasta veinte siglos después (en el siglo XVII por obra de Newton y Leibniz).

Se debe al matemático y filósofo griego *Eudoxio* el «método de Exhaustación» (método de agotamiento) para resolver ciertos problemas típicos de lo que, pasados los siglos, habría de llamarse *Cálculo Infinitesimal*. Con dicho método se atacaron con éxito los problemas relativos al cálculo de las áreas y volúmenes de las figuras elementales (círculos, esferas, conos, pirámides, etc.)

por la misma época, el más grande de los matemáticos griegos, y uno de los mayores de toda la historia de la humanidad, *ARQUIMEDES*, resolvió problemas, por el «Método de los Recubrimientos», tan difíciles que, aún hoy en día , después de conocer los modernos «Métodos Infinitesimales», resultan laboriosos. por este motivo se le llama «el precursor del Cálculo Infinitesimal».

Describamos uno de estos problemas típicos, que fue resuelto con éxito por Arquímides y que nosotros resolveremos al final de este libro con los métodos modernos.

Problema 0.0.1 Segmento de Arquímides

Hallar el área de un segmento de parábola.

Solución

Si por un punto M del eje de una parábola trazamos un segmento PP'perpendicular a dicho eje, en la figura **??** POP' representa la región determinada por el segmento parabólico y el segmento PP'el cual es llamado «*Segmento de parábola*».
El método seguido por Arquímides para hallar el área del *Segmento parabólico* POP' fue el siguiente: recubrir el segmento de parábola por una serie de rectángulos inscritos con bases paralelas a PP' y alturas muy pequeñas. En la figura **??** se destaca uno de tales rectángulos inscritos, así como. Si suponemos que la altura del Segmento parabólico como $h = OM$, se divide por ejemplo en 100 partes iguales, y por los puntos de división se trazan paralela a PP' (base del segmento parabólico), se tendrían 100 rectángulos inscritos y otros 100 circunscritos.
Se dice que los 100 rectángulos inscritos constituyen un «recubrimiento interno» del Segmento parabólico y los cien rectángulos circunscritos un «recubrimiento externo», ahora se comprende fácilmente que: la suma de las áreas de los rectángulos del recubrimiento interno será menor que el área del segmento parabólico y la suma de las áreas de los rectángulos del recubrimiento externo será mayor que el área de dicho Segmento parabólico.

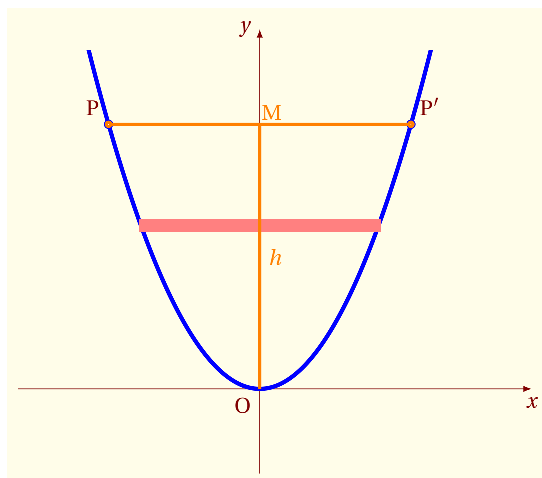

Figura 1: Segmento de una Parábola POP'.

Supongamos que el área del recubrimiento externo menos la del interno fuese igual a 0.1 cm^2; en este caso podría tomarse como el área del Segmento parabólico; bien la del recubrimiento interno o la del recubrimiento externo, con un error menor de 0.1 cm^2. Si «queremos afinar más» el resultado (es decir reducir el error) podríamos dividir la altura OM en 1000 partes iguales , en vez de 100, y obtener lo
s respectivos recubrimientos externos e internos, formados por los rectángulos circunscritos e inscritos , respectivamente . el área de cualquiera de estos recubrimientos es una aproximación más precisa que la proporcionada anteriormente.

Se comprende que si quisiéramos el valor exacto del área del segmento parabólico, tendríamos que proseguir indefinidamente la operación de dividir la altura OM en un número cada vez mayor de partes iguales,construyendo los correspondientes recubrimientos del segmento parabólico con rectángulos.

La idea contenida en este método es genial, y como todas las ideas geniales esta es extraordinariamente simple y directa, surgida de la esencia misma del problema: Recubrir una magnitud desconocida (el Segmento parabólico) con piezas conocidas (rectángulos); la novedad que se presenta es que, el número de piezas necesarias para que el recubrimiento se confunda con el Segmento parabólico es un número infinito. (estas ideas descriptivas serán presentadas más adelante con todo rigor, pues son de gran importancia en la Matemática Superior Moderna).

En resumen:
A la operación de sumar las áreas de los rectángulos que «integran» cada recubrimiento hay que añadir una operación nueva, que definiremos después con precisión, y que se llama «operación de paso al límite», y que consiste en obtener el valor correspondiente al área de un recubrimiento cuando el número de sus rectángulos crece indefinidamente.

El ejemplo que acabamos de describir corresponde a un problema típico del *Cálculo Integral*, y como tal será resuelto después.

Otro de los problemas históricos que dieron origen al *Cálculo Infinitesimal* es el problema de la recta tangente , el cual describiremos a continuacion.

Problema 0.0.2 Pendiente de la recta tangente

Hallar la pendiente de una recta tangente a una curva.

Solución

Sea dada una curva, cuya ecuación referida a un sistema de ejes cartesianos cartesianos, donde $y = f(x)$como se muestra en la figura **??**. Se define la tangente a la curva en uno de sus puntos. P_0 , como la posición límite de las secantes P_0P_n, cuando P_n se mueve sobre la curva aproximándose indefinidamente a P_0, teniendo a confundirse con él. (Estas nociones descriptivas serán precisadas en el capítulo 1, cuando demos el concepto riguroso de infinitésimo).
Si las coordenadas de P_0 son (x_0, y_0), para determinar la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{P_0T}$, tangente a la curva en P_0, bastará determinar su pendiente, pues según sabemos por Geometría Analítica, si la recta pasa por $P_0(x_0, y_0)$, y tiene pendiente conocida , m, la ecuación de dicha recta es: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, (recta que pasa por $P_0\,(x_0, y_0)$y tiene pendiente m). El problema de la determinación analítica de la tangente a una curva en uno de sus puntos se reduce por tanto a la determinación de la pendiente o coeficiente angular de dicha tangente. Describamos el proceso

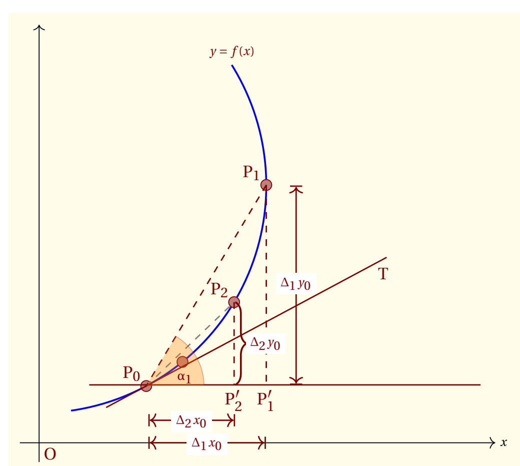

Figura 2: Recta tangente a $f(x)$.

mediante el cual se logra esta determinación.
Sea P_1 otro punto sobre la curva $f(x)$. Los puntos P_0 y P_1 determinan una recta secante $\overleftrightarrow{P_1P_0}$ a $f\,(x)$, y si P_0 está muy próximo a P_1la secante $\overleftrightarrow{P_1P_0}$ estará muy próxima a $\overleftrightarrow{P_0T}$ en P_0.
Tratando por P_0una paralela al eje OX, y por P_1 una paralela al eje OY, se forma el triángulo $P_0P_1P_1'$, que llamaremos triángulo de incrementos, pues el cateto P_oP_1' es el incremento que experimenta la x al pasar de P_0a P_1, y el cateto $P_1'P_1$es el incremento que experimenta la y, al pasar de P_0 a P_1. Representaremos estos incrementos así: $P_0P_1' = \Delta_1 x_0$ y $P_1'P_1 = \Delta y_0$ respectivamente. El cociente que resulta de dividir el incremento de la ordenada por el de la abscisa, o sea: $\dfrac{\Delta_1 y_0}{\Delta_1 x_0}$, recibe el nombre de cociente incremental y será muy usado en este libro.
Si llamamos α_1 al ángulo $P_1'P_0P_1$, se ve en la figura **??** que

$$\tan\alpha_1 = \frac{\Delta_1 y_0}{\Delta_1 x_0} \tag{1}$$

Como hemos dicho antes, la $\tan\alpha_1$ es un valor aproximado de la pendiente de la tangente, P_0T, a la curva P_0.
Si quisiéramos aumentar la precisión en el valor aproximado de la $\tan\alpha_1$, tomaríamos un nuevo punto, P_2, sobre la curva, más próximo a P_0 que el punto P_1. Construiríamos la secante $\overleftrightarrow{P_0P_2}$ y trazaríamos por P_2 la paralela al eje OY, con lo que se formaría el nuevo triángulos de incrementos $P_0P_2'P_2$(con ángulo recto en p_2').
Si llamamos $\alpha_2$al ángulo $P_2'P_pP_2$se tendría:

$$\tan\alpha_2 = \frac{\Delta_2 y_0}{\Delta_2 x_0}, (\text{véase la figura } \textbf{??}) \tag{2}$$

Si quisiéramos aproximar aún más la pendiente, tomaríamos un nuevo punto sobre la curva $f(x)$, P_0que los anteriores, y con construcciones análogas a las descritas para los puntos P_1 y P_2,y con la notación también análoga, se tendría:

$$\tan\alpha_3 = \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2 x_0}, \tag{3}$$

que sería un valor más aproximado de la pendiente de la recta tangente $\overleftrightarrow{P_0T}$,
Si continuáramos indefinidamente el proceso de acercamiento de los puntos sobre la curva $f\,(x)$al punto P_0, obtendríamos la siguiente sucesión de coeficientes incrementales:

$$\tan\alpha_1 = \frac{\Delta_1 y_0}{\Delta_1 x_0}, \tan\alpha_2 = \frac{\Delta_2 y_0}{\Delta_2 x_0}, \tan\alpha_3 = \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_3 x_0}, \cdots, \tan\alpha_n = \frac{\Delta_n y_0}{\Delta_n x_0} \tag{4}$$

Cuán más grande sea el valor de n en la ecuación (**??**), más próximo será el valor de α_n al valor de la pendiente de $\overleftrightarrow{P_0T}$ en P_0; pero si queremos el valor exacto, no aproximado, de la pendiente de la tangente, tendremos que calcular el valor hacia el cual tienden los cocientes incrementales dados el la ecuación (**??**), cuando el punto P_n tiende a confundirse con el punto P_0; es decir, nos encontramos nuevamente con la necesidad de efectuar la nueva operación que se será estudiada en el capítulo 1 de este libro y que se llama «*operación de paso al límite*».

Los límites del tipo que aquí descrito reciben el nombre de derivadas. El método seguido en la descripción de este problema permite descubrir una analogía con el problema del área del *Segmento parabólico*: Se calcula una sucesión de aproximaciones, cada vez más finas, de la magnitud que se desea obtener; después, por una operación nueva , de «*paso al límite*», efectuada sobre estas aproximaciones, se obtiene el valor exacto de la magnitud incógnita. Esta analogía se mantiene en los problemas que describiremos a continuación , y en todos los problemas del *Cálculo Infinitesimal*; de ahí la importancia de realizar un estudio sistemático y general de las sucesiones «*sucesiones de números reales*», (como la de recubrimientos en el problema (**??**), la de los cocientes incrementales, en el problema (**??**), y otras muchas más que nos encontraremos a lo largo del libro), y de la forma de obtener sus límites. Puede decirse que toda la tarea del *Cálculo Infinitesimal* consiste en dar reglas para obtener ciertos límites especiales que ocurren con bastante frecuencia en la solución de problemas importantes.

Problema 0.0.3 Velocidad Instantánea

Hallar la velocidad instantánea de un movimiento variado.

Solución

Sabemos de la Física, que un movimiento se llama uniforme cuando un móvil recorre espacios iguales en intervalos de tiempos iguales, y variado cuando los espacios recorridos en intervalos iguales no son iguales.
En el caso del movimiento uniforme los espacios son proporcionales a los intervalos de tiempos invertidos en recorrerlos, pues a doble, triple, ..., intervalos de tiempo, corresponde el doble, triple,..., espacio.
La constante de proporcionalidad recibe el nombre de velocidad del movimiento y es igual al cociente de dividir el espacio recorrido entre el intervalo de tiempo empleado.
Si representamos al espacio recorrido por el móvil por e, y el tiempo empleado por t, y a la velocidad por v, se cumple para el movimiento uniforme que $v = \frac{e}{t}$ es constante, siendo el espacio e el espacio recorrido y t el tiempo empleado cantidades con las unidades correspondientes a un sistema de medidas cualquiera.
La característica esencial del movimiento del movimiento uniforme es la constancia de la velocidad a lo largo del recorrido; pero en un movimiento variado la velocidad cambia de unos puntos a otros del recorrido.
Si queremos tener un conocimiento exacto de un movimiento variado necesitamos conocer la velocidad del móvil en cada punto del trayecto, es decir, la velocidad en cada instante del tiempo que dura el movimiento, que recibe el nombre de «*velocidad instantánea*».
Para simplificar la exposición del método seguido para obtener la «*velocidad instantánea*» de un movimiento variado, supondremos que el móvil se mueve sobre la recta AB, en negativo, como se muestra en la figura (**??**).

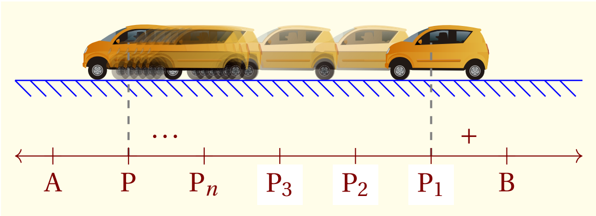

Figura 3: Velocidad instantánea

Sea P el punto del trayecto en el cual queremos obtener la velocidad del móvil; el espacio lo tomaremos como la longitud del segmento PP_1, y lo representaremos como $\Delta_1 e$ (primer incremento de espacio) y el tiempo invertido en recorrer $\Delta_1 e$ lo representaremos por $\Delta_1 t$. Emplearemos una notación análoga para los espacios $PP_2,\ PP_3, \cdots, PP_n$, y para sus tiempos correspondientes.
Describamos como se obtendría la velocidad en el punto P. El cociente incremental, $\frac{\Delta_1 e}{\Delta_1 t} = \frac{PP_1}{\Delta_1 t}$ (5), nos da la velocidad promedio en el trayecto PP_1, y si dicho trayecto es pequeño, cociente incremental (**??**) es un valor aproximado de la velocidad en el punto P. Si queremos aproximarnos más al valor de la velocidad en el punto P consideraríamos un nuevo punto, P_2 más próximo a P que P_1, y hallaríamos $\frac{\Delta_2 e}{\Delta_2 t} = \frac{PP_2}{\Delta_2 t}$, que es la velocidad promedio en el trayecto PP_2, más próxima que la anterior a la velocidad en el punto P.
Si queremos acercarnos aún más al valor de la velocidad en el punto P, consideraríamos un nuevo punto, P_3, más cercano a P que los anteriores, obteniendo; $\frac{\Delta_3 e}{\Delta_3 t} = \frac{PP_3}{\Delta_3 t}$.
Prosiguiendo indefinidamente este proceso de forma que los cocientes incrementales de los espacios recorridos para alcanzar P divididos por los tiempos empleados en recorrerlos, para espacios cada vez más pequeños, se

obtiene la siguiente sucesión de cocientes incrementales:

$$\frac{\Delta_1 e}{\Delta_1 t}, \frac{\Delta_2 e}{\Delta_2 t}, \frac{\Delta_3 e}{\Delta_3 t}, \dots, \frac{\Delta_n e}{\Delta_n t} \dots . \tag{6}$$

Los valores de los términos de la sucesión dada por la ecuación (**??**) se aproximan más y más a la velocidad del movimiento en el punto P, pero si queremos el valor exacto de dicha velocidad, necesitamos de la nueva operación, ya citada en los ejemplos anteriores: «*La operación de paso al límite*» que consiste en hallar el valor hacia el cual tienden los términos de la sucesión dada en (**??**) cuando P_n tiende a P, de forma que $\Delta_n t$ tienda a cero.

Este problema que acabamos de describir, es de importancia capital en la Física, necesita también para ser resuelto del instrumento da la «teoría de los límites». este problema quedará clasificados dentro de los límites que llamaremos *derivada*.

El lector habrá captado la identidad estructural entre el problema (**??**) y el de la tangente (problema: **??**). Ambos son problemas que conducen a límites de cocientes incrementales que reciben al aplicarle « *el paso al límite*» el nombre de derivada.