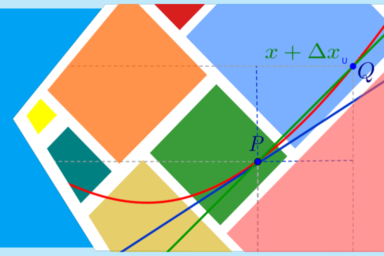
CAPÍTULO

1

# Teoría elemental de los límites de sucesiones de números reales.




*"Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable."*

D´Alembert :

## Contenido Del Capítulo

INTRODUCCIÓN:

Existen numerosos problemas matemáticos que solo exigen para su solución la consideración de un conjuntos finitos de números, operaciones, relaciones y construcciones, etc. Tales problemas constituyen el objeto de estudio de la rama de las matemáticas que recibe el nombre de «Matemática Finita».

Pero también se presentan problemas de gran interés teórico y práctico, como los que hemos descrito en el capítulo de introducción, que requieren la consideración de conjuntos con un número infinito de elementos y que son el objeto del «Cálculo Infinitesimal».

## 1.1 Concepto de sucesión de números reales.

Los conjuntos más sencillos que poseen un número infinito de elementos, son las sucesiones, las cuales definiremos a continuación.

**Definición 1.1 Sucesiones de números Reales**

Una sucesión de números Reales es un conjunto de números reales en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales.

ESTO SIGNIFICA QUE:

1. A cada término de la sucesión le corresponde le corresponde un número Natural, que se considera como su número de orden.
2. A cada número Natural, o sea cada número de orden, corresponde un término de la sucesión.

Se deduce fácilmente de la definición(1.1) que, al igual que el conjunto de los números naturales, la sucesión que esta en correspondencia con ellos, no tiene último elemento. Se dice dice esto porque la sucesión es un conjunto infinito, (es decir tiene un número infinito de elementos), pero no hay que confundir este concepto con el de sucesión infinita, que será definida más adelante.

**Ejemplos: 1.1.1**

1. Si consideramos los polígonos regulares inscritos en una circunferencia, de tres lados en adelante, las áreas de estos polígonos forman una sucesión de números reales. análogamente, los perímetros de dichos polígonos forman otra sucesión. ambas sucesiones son importantes el el cálculo del área del circulo y de la longitud de la circunferencia, respectivamente.
2. El conjunto de los recíprocos multiplicativos (también llamados inversos) de los números Enteros positivos forman la siguiente sucesión $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, donde los puntos suspensivos colocados al final indican que el conjunto es infinito.
3. Si partiendo de un número Natural, por ejemplo del 1, lo multiplicamos por un factor constante, por ejemplo $\frac{1}{3}$, obtenemos la sucesión $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \cdots, \frac{1}{3^{n-1}}, \cdots\right\}$, a este tipo de sucesiones se le llama progresión geométrica.
4. Los cinco problemas presentados en la introducción nos conducen a cinco sucesiones. Se consideran como primeros términos la primera aproximación en cada ejemplo y luego la sucesión la forman el número indefinido de aproximaciones que se realicen.

**Ejercicios. 1.1.1**

1. ¿Cuáles son las sucesiones análogas formadas por los volúmenes de los poliedros regulares inscritos en una esfera?
2. Construya la sucesión formada por los valores decimales aproximados hasta las décimas, centésimas, milésimas, y así sucesivamente, de la fracción $\frac{2}{3}$.

## 1.2 Determinación del término $n-ésimo$ de una sucesión.

Determinar una sucesión es dar una regla que permita obtener sus términos inequívocamente, es decir que dado un lugar de orden, por ejemplo el lugar 50, podamos hallar el término de la sucesión correspondiente a dicho lugar.

esta regla puede ser una frase, por ejemplo «la sucesión de los cuadrados de los números Naturales».

lo más frecuente es determinar una sucesión por medio de su «*término n-ésimo*», llamado también «*término genérico*» de la sucesión. El término n-ésimo se suele expresar mediante una fórmula que contiene a $n$ y tal que sustituyendo en ella $n$ por los números $1, 2, 3, \cdots$ nos va generando los términos primero, segundo, tercero, $\cdots$ de la sucesión.

A veces, para engendrar la sucesión a partir de su término n-ésimo, no se empieza dando a $n$ el valor de 1, si no otro; pero en estos casos se indica expresamente.

**Ejemplo: 1.2.2**

La sucesión cuyo término n-ésimo es $\dfrac{1}{4n+2}$, tiene los siguientes primeros tres términos: $\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}$, obtenidos al darle a $n$ los valores $1, 2, 3$, en la fórmula del n-ésimo término.

*Dados los primeros términos de una sucesión, el determinar su término n-ésimo requiere captar, a partir de estos primeros términos la ley de la sucesión.*

*Se comprende que esta es la mejor forma de expresar una sucesión, pues considerando a $n$ como variable, el término n-ésimo representa a toda la sucesión.*

*A veces suele ser difícil determinar el término n-ésimo. En muchos «test» de inteligencia figuran ejercicios de este tipo, lo cual no nos parece adecuado, pues en la solución influye mucho, el adiestramiento, además de la inteligencia.*

**Ejemplos: 1.2.3**

1. ¿Cuál es el término n-ésimo de la siguiente sucesión?

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots$$

SOLUCIÓN: Se observa que los denominadores son los cuadrados de 1, 2, 3, 4 más una unidad , «es decir $1^2+1,\ 2^2+1,\ 3^2+1,\ 4^2+1$», o sea, que la sucesión quedaría $\frac{1}{1^2+1}, \frac{1}{2^2+1}, \frac{1}{3^2+1}, \frac{1}{4^2+1}, \cdots$, por lo tanto el término n-ésimo sería: $\dfrac{1}{n^2+1}$. □

2. Hallar el n-ésimo término de la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

SOLUCIÓN: Se observa que los términos de la sucesión son fracciones cuyo denominador es igual al numerador más una unidad; además, los cuatro primeros términos son respectivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, por tanto el término n-ésimo es $\dfrac{n}{n+1}$. □

Ejercicios. 1.2.2

Obtener los términos n-ésimos de las siguientes sucesiones.

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \cdots$
3. $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{15}, \frac{5}{24}, \cdots$

Notación: Representaremos una sucesión encerrando su término n-ésimo entre llaves. De acuerdo con esto las sucesiones de los ejemplos 1 y 2 de ejemplos(3) se notarían así $\left\{\dfrac{1}{n^2+1}\right\}$y $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ respectivamente.

cuando no se trate de una sucesión determinada, sino que se que se esté hablando de una sucesión general, se suelen indicar sus términos con letras minúsculas dotadas con un subíndice, que indica el puesto que corresponde a dicho término en la sucesión. De acuerdo con esto, con la notación $\left\{\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots \\ b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots,\ b_n, \cdots \end{array}\right.$ o en forma abreviada; $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ , se representan a dos sucesiones cualesquiera.

## 1.3 Representaciones geométricas.

En el estudio de la teoría de los límites de las sucesiones nos será de gran utilidad las representaciones geométricas que describiremos a continuación, pues ellas proporcionan imágenes de gran belleza, tanto del concepto de límite como de sus propiedades. Puede desarrollarse una teoría rigurosa de los límites de sucesiones utilizando sus representaciones geométricas. En este capítulo presentaremos ambos aspectos de la teoría, el aritmético puro y el geométrico, para pasar de uno a otro basta con sustituir las relaciones aritméticas entre números por sus correspondientes relaciones geométricas entre puntos.

### 1.3.1. Representación de una sucesión sobre una recta metrizada o numérica.

Sabemos que cuando sobre una recta se fija un punto llamado origen, un sentido positivo y una unidad de medida, y además a cada punto de la recta le asignamos biunívocamente un número real; a esa correspondencia la llamamos recta metrizada o numérica. «Esta correspondencia entre números reales y los puntos de una recta fue enunciada explícitamente por el matemático Alemán Dedekin en el siglo XIX».
Ahora, *si cada de la sucesión, que es un número real, lo representamos sobre una recta metrizada, obtendremos una sucesión de puntos sobre dicha recta que se dice que es la imagen geométrica de la sucesión numérica.*

**Ejercicio. 1.3.1** Represetación geométrica

Representar los cinco primeros términos de la sucesión $\left\{\dfrac{2n+1}{n+2}\right\}$sobre una recta metrizada. (Elijase una unidad grande, por ejemplo un dm, para que no se confundan los puntos en el diagrama. )

### 1.3.2. Representación Cartesiana.

Si se elije un sistema de ejes cartesianos y se representan sobre el eje horizontal, eje $O_n$, los términos correspondientes de la sucesión, $a_n$, a cada par $(n, a_n)$ corresponde un punto sobre el plano cartesiano. *Se obtiene de esta forma, representando los pares $(n, a_n)$, un conjunto de puntos, sobre el plano cartesiano que es la imagen geométrica de la sucesión.*
En la práctica solo se pueden representar los primeros puntos.

**Ejercicio. 1.3.2**

*Representar en el plano cartesiano $(O_n, O_{a_n})$ los cinco primeros términos de la sucesión* $\left\{\dfrac{3n+1}{2n+2}\right\}$.

Notación: A los términos o elementos de una sucesión los llamaremos puntos cuando nos interese su interpretación geométrica.

## 1.4 Clasificación de las sucesiones.

### 1.4.1. Sucesiones acotadas superiormente.

**Ejemplo: 1.4.4**

Si piensas que en la sucesión de las áreas de los polígonos regulares inscritos en una circunferencia, cuando el número de lados se aumenta indefinidamente, advertirás claramente que dichas áreas son todas menores que el área del circulo; En este caso se dice que la sucesión está acotada superiormente, como muestra la figura(1.1).

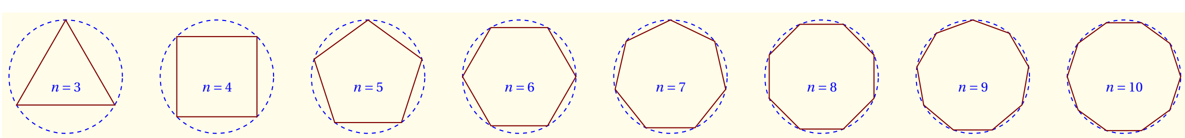



Figura 1.1: Polígonos inscritos en una circunferencia

**Definición 1.2 Sucesión acotada superiormente**

Se dice que una sucesión, $a_n$, es acotada superiormente, cuando existe un número real $K$, llamado cota superior de la sucesión, tal que $a_n < K$, para todo $n$ ( es decir todos los elementos de la sucesión son menores que $K$).

**Ejercicio. 1.4.3** Sucesión acotada superiormente

Demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ es acotada superiormente.

### 1.4.2. Sucesión acotada inferiormente.

**Ejemplo: 1.4.5**

La sucesión de las áreas de los polígonos regulares circunscritos en una circunferencia, cuando el número de lados se aumenta indefinidamente, tiene la propiedad de que todos sus términos son mayores que el área des circulo correspondiente, en un caso como este se dice que la sucesión está acotada inferiormente.

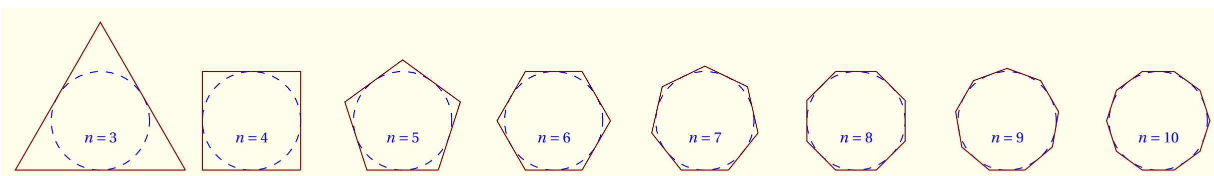



Figura 1.2: Polígonos circunscritos en una circunferencia

**Definición 1.3 Sucesión acotada superiormente**

Se dice que una sucesión, $a_n$, es acotada inferiormente, cuando existe un número real $M$, llamado cota inferior de la sucesión, tal que $a_n > M$, para todo $n$ ( es decir todos los elementos de la sucesión son mayores que $M$).

**Ejercicio. 1.4.4** Sucesión acotada superiormente

Demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ es acotada superiormente.

### 1.4.3. Sucesión acotada.

**Definición 1.4 Sucesión acotada**

Se dice que una sucesión, $a_n$, es acotada cuando lo es superiormente e inferiormente, es decir, cuando admite una cota superior $M$ y una cota inferior $K$ .
Se cumplirá por tanto que existen números reales $M$ y $K$ tal que $M < a_n < K$, para todo $n$.

GEOMÉTRICAMENTE: La sucesión acotada queda representada si se encuentra totalmente dentro del segmento $MK$.

### 1.4.4. Sucesión infinita.

**Definición 1.5 Sucesión infinita**

Se dice que una sucesión, $a_n$, es infinita si no está acotada.

Este concepto será más, como un caso especial de límite.

GEOMÉTRICAMENTE: Si una sucesión es infinita, no existe un segmento, por grande que se considere, que contenga a todos los puntos de la sucesión.

**Ejemplos: 1.4.6**

Las sucesiones siguientes son infinitas, es decir, no acotadas.

1. $\{n^2\}$ Esta sucesión no está acotada superiormente, pues dado un número $K$, por grande que sea, para que $n^2 > K$, bastará tomar un $n > \sqrt{K}$.
2. la sucesión $\left\{(-n)^3\right\}$ no está acotada inferiormente, pues dado un número, $M$, por pequeño que sea para que $(-n)^3 < M$, bastará tomar $n > \sqrt[3]{M}$ (pues entonces $\left|(-n)^3\right| > M$, y por tanto $(-n)^3 < M$, recuerde que si un número negativo tiene modulo mayor que otro número, el primero es menor que el segundo).

### 1.4.5. Sucesiones monótonas.

**Definición 1.6 Sucesiones monótonas**

Una sucesión cuyos términos se suceden siempre creciendo se llama monótona creciente, ( $a_i > a_j$ siempre que $i > j$). Una secesión cuyos términos se suceden decreciendo sin cesar se llama monótona decreciente ( $a_1 < a_j$ siempre que $i < j$).

**Ejemplo: 1.4.7**

Las aproximaciones decimales sucesivas por defecto de la $\sqrt{2}$ forman una sucesión monótona creciente, y las aproximaciones por exceso forman una sucesión monótona decreciente.

## 1.5 Nociones preliminares necesarias para el estudio de límites.

### INTRODUCCIÓN:

A nuestro juicio, la falta de comprensión del concepto de límite, por parte de la mayoría de los estudiantes, radican en las siguientes causas

1. La falta de un apoyo intuitivo que permita la asimilación de la definición abstracta (general).
2. La falta de dominio del cálculo con desigualdades (leyes de monotonía),
3. La falta de un conocimiento claro de las relaciones modulares y de sus interpretaciones geométricas.

Es muy probable que muchos alumnos no hayan tenido nunca una idea clara de las leyes de monotonía ni del significado de las desigualdades en las que figuran módulos; y en el supuesto de que la hayan tenido , al llegar al 11º grado de bachillerato la han olvidado. siendo así es muy difícil que entiendan una definición abstracta construida basada en estos elementos.

Por este motivo repasaremos en esta sección los conceptos instrumentales necesarios para una buena comprensión del concepto de límite y de sus propiedades.

### 1.5.1. Reglas de cálculo con desigualdades (leyes de la monotonía).

#### 1.5.1.1. Ley de la suma de desigualdades.

**Ley 1.5.1**

Sumando miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

es decir podemos hacer lo siguiente.

$$\begin{array}{ccc} a & < & b \\ c & < & d \\ \hline a+c & < & b+d \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{ccc} a & > & b \\ c & > & d \\ \hline a+c & > & b+d \end{array}$$

**Ejemplos: 1.5.8**

1. Si $\begin{cases} 1 & < & 4 \\ 2 & < & 5 \\ 4 & < & 7 \end{cases}$, entonces $1+2+4 < 4+5+7$ por tanto $7 < 16$.
2. Si $\begin{cases} -2 & < & 1 \\ -4 & < & -3 \end{cases}$, entonces $(-2)+(-4) < 1+(-3)$ por tanto $(-6) < (-2)$ .

3. En general si $\begin{cases} a_1 & < & b_1 \\ a_2 & < & b_2 \\ a_3 & < & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & < & b_n \end{cases}$, entonces $\begin{array}{ccc} a_1 & < & b_1 \\ a_2 & < & b_2 \\ a_3 & < & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & < & b_n \\ \hline a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n & < & b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n \end{array}$

Ejercicio. 1.5.5

Dadas las desigualdades $2 < 5$ $x > y$, $a < b$; obtener una nueva desigualdad aplicando la suma de desigualdades (SUGERENCIA: debe colocar todas las desigualdades con el mismo sentido antes de sumarlas)

#### 1.5.1.2. Leyes de monotonía para la diferencia.

**Ley 1.5.2**

Si a los dos miembros de una desigualdad se les resta un mismo número se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.

**Ejemplos: 1.5.9**

1. Si $12 < 15$, entonces $12 - 3 < 15 - 3$, o sea, $9 < 12$.
2. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.

**Ley 1.5.3**

Si a los dos miembros de una igualdad se les restan los miembros de una desigualdad, se obtiene otra desigualdad de sentido contrario.

**Ejemplos: 1.5.10**

1. Si $3 = 3$ y $7 > 5$, entonces $3 - 7 < 3 - 5$, o sea, $-4 < -2$.
2. En general: Si $a = b$ y $c < d$ entonces $a - c > b - d$.

**Ley 1.5.4**

Si se restan miembro a miembro dos desigualdades, de sentidos contrarios, se obtiene otra desigualdad con el sentido de la primera .

**Ejemplos: 1.5.11**

1. Si $8 > 2$ y $4 < 6$, entonces $8 - 4 > 2 - 6$, o sea, $4 > -4$.
2. En general: Si $a < b$ y $c > d$ entonces $a - c < b - d$.

#### 1.5.1.3. Leyes de la monotonía para la multiplicación.

**Ley 1.5.5**

Multiplicando miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido y con términos positivos, se obtiene otra desigualad del mismo sentido .

es decir si $a$, $b$, $c$ y $d$ son números positivos, podemos hacer lo siguiente.

$$\begin{array}{ccc} a & < & b \\ c & < & d \\ \hline a\cdot c & < & b\cdot d \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{ccc} a & > & b \\ c & > & d \\ \hline a\cdot c & > & b\cdot d \end{array}$$

**Ejemplos: 1.5.12**

1. Si $8 > 2$ y $4 > 6$, entonces $8 \cdot 4 > 2 \cdot 6$, o sea, $32 > 12$.
2. Si $2 < 4$ y $1 < 5$ entonces $2 \cdot 1 < 4 \cdot 5$, o sea $2 < 20$.

**Ley 1.5.6**

Si multiplicamos los miembros de una desigualdad por un número positivo, la desigualdad resultante tiene el mismo sentido de la original.

es decir si $a > 0$ y, $b > c$ entonces $a \cdot b > a \cdot c$, o si $b < c$ entonces $a \cdot b < a \cdot c$.

**Ley 1.5.7**

Si multiplicamos los miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad resultante cambia de sentido con respecto a la original.

es decir si $a < 0$ y, $b > c$ entonces $a \cdot b < a \cdot c$, o si $b < c$ entonces $a \cdot b > a \cdot c$.

**Ejemplos: 1.5.13**

1. Si $8 = 8$ y $4 < 6$, entonces $8 \cdot 4 < 8 \cdot 6$, o sea, $32 < 48$.
2. Si $-2 = -2$ y $5 > 1$ entonces $-2 \cdot 5 < -2 \cdot 1$, o sea $-10 < -2$.

**Ley 1.5.8**

Si elevamos los dos miembros de una desigualdad con términos positivos, a una potencia positiva, se obtiene una desigualdad del mismo sentido. Si el exponente es negativo se invierte el sentido de la desigualdad.

es decir si $a, b > 0$; $n > 0$ y $a > b$, entonces $a^n > b^n$, y $a^{-n} < b^{-n}$.

**Ejemplos: 1.5.14**

1. Si $4 < 6$, entonces $4^2 < 6^2$, o sea, $16 < 36$.
2. Si $5 > 1$ entonces $5^{-3} < 1^{-3}$, o sea $\frac{1}{125} < 1$.

OBSERVACIÓN: Cuando el exponente es fraccionario la propiedad 1.5.8 podemos aplicarla a la radicación.

#### 1.5.1.4. Leyes de la monotonía para la división

**Ley 1.5.9**

Si dividimos miembro a miembro los términos de dos desigualdades con términos positivos, y con sentidos contrarios, obtenemos una desigualdad con el sentido del dividendo.

es decir si $a, b, c, d > 0$ y, $a > b$, $c < d$ entonces $\frac{a\cdot}{c} > \frac{b}{d}$, o si $a, b, c, d > 0$ y, $a < b$, $c > d$ entonces $\frac{a\cdot}{c} < \frac{b}{d}$.

**Ejemplos: 1.5.15**

1. Si $4 < 6$ y $2 > 1$ entonces $\frac{4}{2} < \frac{6}{1}$, o sea, $2 < 6$.
2. Si $5 > 1$ y $10 < 20$ entonces $\frac{5}{10} > \frac{1}{20}$, o sea $\frac{1}{2} > \frac{1}{20}$.

**Ley 1.5.10**

Si a una desigualdad le dividimos sus miembros por términos positivos, obtenemos una desigualdad con el mismo sentido ,a

es decir si $a > 0$ y, $c > b$ entonces $\frac{c\cdot}{a} > \frac{b}{a}$, o si $a > 0$ y, $c < b$ entonces $\frac{c\cdot}{a} < \frac{b}{a}$.

**Ejemplo: 1.5.16**

Si $4 < 6$ entonces $\frac{4}{2} > \frac{6}{2}$, o sea, $2 < 3$.

**Ley 1.5.11**

Si tenemos una igualdad de miembros positivos, y una desigualdad, al dividir la ecuación entre la desigualdad miembro a miembro obtenemos una desigualdad de sentido contrario a la original.

es decir si $a > 0$ y, $c > b$ entonces $\frac{a\cdot}{c} < \frac{a}{b}$, o si $a > 0$ y, $c < b$ entonces $\frac{a\cdot}{c} > \frac{a}{b}$.

**Ejemplo: 1.5.17**

Si $4 < 6$ entonces $\frac{2}{4} > \frac{2}{6}$, o sea, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

### 1.5.2. Relaciones entre módulos.

**Definición 1.7 Módulo o valor absoluto**

El módulo o valor absoluto de un número real, $a$, se representa por $|a|$ (se lee módulo de $a$) y se define

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si} \quad a < 0 \\ 0 & \text{si} \quad a = 0 \\ a & \text{si} \quad a > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

**Ejemplos: 1.5.18**

1. $|-3| = -(-3) = 3$.
2. $|0| = 0$.
3. $|3| = 3$.

De acuerdo con las reglas del cálculo con números reales, recordamos que se cumplen las siguientes relaciones:

**Propiedad 1.5.1 : Propiedad triangular**

El módulo de una suma de números reales es igual o menor que la suma de los módulos de los sumandos. resulta igual a la suma de los módulos cuando todos los sumandos son del mismo signo.

**Ejemplos: 1.5.19**

1. $|5-2+3-4+1| < |5| + |-2| + |3| + |-4| + |1|$ entonces $3 < 15$.
2. $|-2-5-7| = |-2| + |-5| + |-7|$ entonces $-(-14) = |-14| = 2+5+7 = 14$.
3. $|3+6| = |3| + |6| = 9$.

**Propiedad 1.5.2**

El módulo de un producto es igual al producto de los módulos.

Es decir $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

**Ejemplos: 1.5.20**

1. $|-3 \cdot 2| = |-3| \cdot |2| = 6$.
2. $|(-2) \cdot (-5)| = |-2| \cdot |-5| = 2 \cdot 5 = 10$.

**Propiedad 1.5.3**

El módulo de un cociente es igual al cociente de los módulos.

Es decir, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

**Ejemplos: 1.5.21**

1. $\left|\frac{-2}{5}\right| = \frac{|-2|}{|5|} = \frac{2}{5}$.
2. $\left|\frac{-3}{-2}\right| = \frac{|-3|}{|-2|} = \frac{3}{2}$.

**Propiedad 1.5.4**

El módulo de una potencia es igual a la potencia del módulo.

Es decir $|a^n| = |a|^n$.

**Ejemplo: 1.5.22**

$$\left|\left(\frac{-2}{5}\right)^3\right| = \left|\frac{-2}{5}\right|^3 = \frac{8}{125}.$$

**Propiedad 1.5.5**

El módulo de una raíz es igual a la raíz del mismo índice del módulo del radicando.

es decir $|\sqrt[n]{a}| = \sqrt[n]{|a|}$.

**Ejemplo: 1.5.23**

$|\sqrt[3]{-8}| = \sqrt[3]{|-8|} = \sqrt[3]{8} = 2.$

### 1.5.3. Interpretación geométrica de algunas relaciones modulares.

#### 1.5.3.1. Ecuaciones con módulos.

**Ejemplo: 1.5.24**

Resolver la ecuación $|x| = 3$.

SOLUCIÓN: La ecuación $|x| = 3$ la verifican dos valores $x = -3$ y $x = 3$, cuyas imágenes geométricas son dos puntos simétricos respecto al origen, situados a una distancia de 3 unidades de dicho origen, como muestra la figura(1.3) □
.

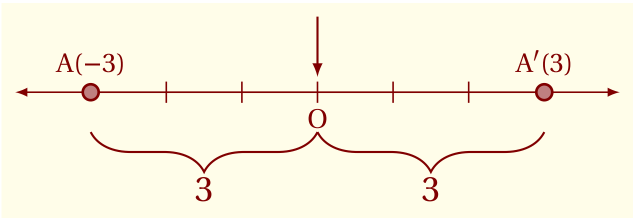



Figura 1.3: $|x| = 3$

EN GENERAL: La ecuación $|x| = K$ tiene como soluciones a $x = -K$ y $x = K$, cuyas imágenes geométricas son dos puntos simétricos respecto al origen, situados a $K$ unidades de éste.

**Ejemplo: 1.5.25**

Resolver la ecuación $|x - 2| = 3$.

SOLUCIÓN: La ecuación $|x - 2| = 3$ es verificada por los números que difieren del 2 en tres unidades, en módulo, ( es decir tres unidades por debajo y tres unidades por encima se 2); estos números son $x = 2-3 = -1$ y $x = 2+3 = 5$.

Las imágenes geométricas de estos números son dos puntos simétricos del punto correspondiente al número 2 y a una distancia de 3 unidades de él, como se muestra en la figura(1.4)

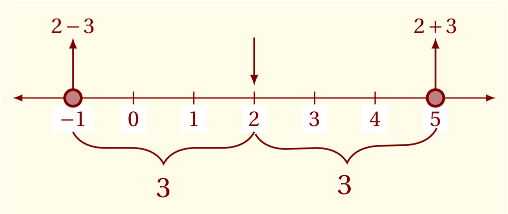



Figura 1.4: $|x-2|=3$

□

EN GENERAL: $|x-a|=k$ tiene como soluciones $x=a-k$ y $x=a+k$, cuyas imágenes geométricas son dos puntos simétricos del punto de abscisa $a$ y situados a $k$ unidades de él.

Ejercicios. 1.5.3

Resolver las ecuaciones y representar geométricamente sus soluciones.

1. $|x-1|=2$,
2. $|x+2|=1$,
3. $|x-4|=3$.

#### 1.5.3.2. Inecuaciones con módulos

**Ejemplo: 1.5.26**

Resolver la inecuación $|x|<5$.

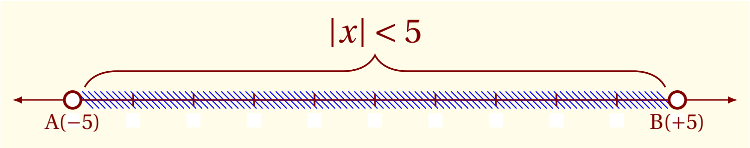



Figura 1.5: $|x|<5$

SOLUCIÓN: La inecuación $|x|<5$ la cumplen todos los puntos que distan del origen menos de 5 unidades, o sea, todos los puntos en el interior del segmento rectilíneo $AB$, siendo $A(-5)$ y $B(5)$ como se observa en la figura(1.5).
□

EN GENERAL: $|x|<k$ representa a todos los puntos en el interior que tiene extremos en $A(-k)$ y $B(k)$

**Observación:**
Cuando se considera la relación modular $|x| \leqslant k$ (en vez de $|x| < 5$), los extremos del segmento $A\,(-k)$ y $B\,(k)$, quedan incluidos como soluciones de la inecuación, y se dice que $|x| \leqslant 5$ representa el segmento cerrado o completo, mientras que $|x| < 5$representa el segmento abierto, es decir no contiene los extremos, como se indica en la figura 1.6

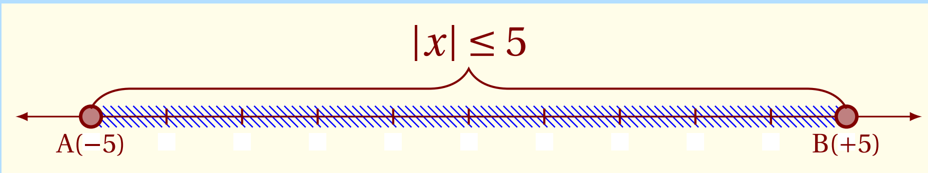



Figura 1.6: $|x| \leqslant 5$

□

### Ejercicios. 1.5.4

Resolver las siguientes Inecuaciones.

1. $|x| \leqslant 3$,
2. $|x| < 1$,
3. $|x| \leqslant \frac{3}{2}$.

**Entorno de un punto.**

**Definición 1.8 Entorno de un punto**

Llamaremos entorno de un punto a cualquier segmento abierto que contenga a dicho punto como centro. En particular, un entorno del origen es cualquier segmento abierto que tenga su punto medio como el origen.

Un entorno queda determinado mediante su centro y su amplitud. De acuerdo con lo tratado en el apartado 1.5.3.2, los entornos del origen quedan representados analíticamente mediante una relación del tipo $|x| < k$ (entorno del origen de semi-amplitud $k$). en general un entorno de un punto es cualquier segmento abierto al cual pertenezca el punto, pero nosotros sólo usaremos entornos simétricos por comodidad.

### Ejemplos: 1.5.27

1. El segmento del origen de semi-amplitud 0,001 se representa analíticamente así: $|x| < 0{,}001$, o sea el intervalo $(-0{,}0010, 0{,}001)$.
2. El entorno del origen de semi-amplitud 1 queda representado por la inecuación $|x| < 1$.
3. Expresar analíticamente que todos los términos de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ siguientes al término de lugar

100, pertenecen al entorno de origen de semi-amplitud 0.01.

SOLUCIÓN: Bastará con escribir: $\left|\dfrac{1}{n}\right| < 0{,}01$, para todo $n > 100$. $\square$

4. Investigar si todos los términos de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$, a partir de 1, pertenecen al entorno de origen $|x| < 0{,}0001$, (1.2), e indicar el lugar a partir del cual se cumple la ecuación(1.2)

   SOLUCIÓN: De acuerdo con el enunciado deberá cumplirse que: $\left|\dfrac{1}{n^2}\right| < 0{,}0001$, que por ser $n^2$ positivo se puede escribir así; $\dfrac{1}{n^2} < 0{,}0001$, extrayendo la raíz cuadrada en ambos términos obtenemos la desigualdad $\dfrac{1}{n} < 0{,}01$ ahora multiplicando los dos miembros por $100n$ se obtiene $100 < n$, por tanto, los términos de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ están en el interior del entorno $|x| < 0{,}0001$, para todo $n > 100$. $\square$

5. Dada la sucesión $\dfrac{1}{n+10}$ y el entorno del origen $|x| < 10^{-12}$. Investigar si toda la sucesión a partir de un término dado, pertenece a dicho entorno.

   SOLUCIÓN: Deberá cumplirse $\left|\dfrac{1}{n+10}\right| < 10^{-12}$, o lo que es equivalente, $\dfrac{1}{n+10} < \dfrac{1}{10^{12}}$, (por ser $\dfrac{1}{n+10}$ positivo), podemos multiplicar los dos miembros por $10^{12} \cdot (n+10)$, queda $n + 10 > 10^{12}$, de donde $n > 10^{12} - 10$.

   > Observe: cómo se aplican las leyes de la monotonía o reglas del cálculo con desigualdades en cada una de las transformaciones que se efectúan hasta lograr que la $n$ quede despejada en un miembro de la desigualdad.

   Respuesta: Para tono $n > 10^{12} - 10$ los términos de la sucesión están en el interior del entorno dado. $\square$

## Ejercicios. 1.5.5

1. Representar analíticamente el entorno de origen de semi-amplitud $10^{-6}$,
2. Investigar si todos los términos de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$, siguientes a un cierto término , pertenecen al entorno de origen $|x| < 10^{-2}$, (1.3), e indicar a partir de que término de la sucesión se cumple la ecuación 1.3.
3. Dada la sucesión $\left\{\dfrac{2}{n^2+1}\right\}$y el entorno del origen $|x| < 10^{-6}$, investigue si todos los términos de la sucesión, a partir de uno, están en el entorno e indicar el valor de $n$ a partir del cual los términos de la sucesión están en el interior del entorno dado.
4. Dada la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$y el entorno del origen $|x| < 0{,}99$, investigue cuantos términos están en el interior y cuantos están en el exterior del entorno dado.

**Ejemplo: 1.5.28**

Resolver la inecuación $|x| > 3$.

SOLUCIÓN: La ecuación $|x| > 3$ la cumplen todos los puntos que distan del origen más de tres unidades, geométricamente dichos puntos forman el exterior del segmento con extremos $A(-3)$ y $B(3)$, como muestra la figura1.7

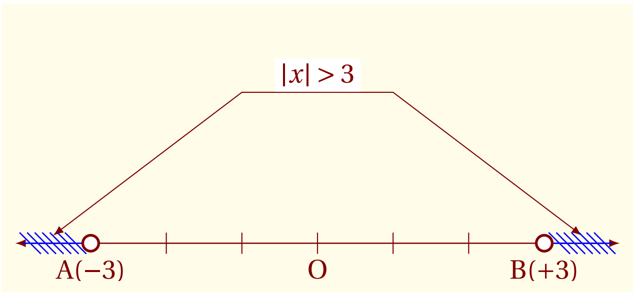



Figura 1.7: $|x| > 3$

□

EN GENERAL: La inecuación $|x| > k$ representa el exterior del segmento con extremos $A(-k)$ y $B(k)$.

**Ejercicios. 1.5.6**

S eñalar sobre una recta metrizada las regiones representadas por las siguientes relaciones modulares:

1. $|x| > 2$,
2. $|x| \leqslant 5$,
3. $|x| \geqslant 3$,
4. $|x| \geqslant \frac{3}{4}$,
5. $|x| \leqslant \frac{1}{2}$

**Ejemplo: 1.5.29**

Resolver la inecuación $|x-2| < 3$.

SOLUCIÓN: La inecuación $|x-2| < 3$ la verifican todos los números que difieren del 2, en módulo, menos de tres unidades. La imagen geométrica de dicha inecuación es el interior del segmento con centro 2 y semi-amplitud tres unidades, pero este segmento es el entorno del punto 2 con semi-amplitud 3,como muestra la figura 1.8

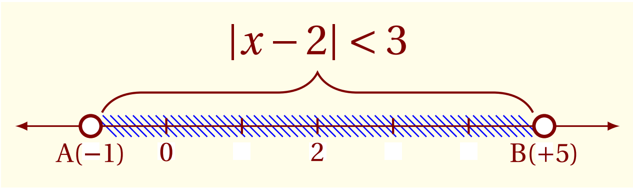



Figura 1.8: $|x-2|<3$

$\square$

**EN GENERAL:** La inecuación $|x-a|<k$ la verifican todos los números que son mayores de $a-k$ y menores de $a+k$, o sea, todos los números $x$ que cumplen: $a-k<x<a+k$. GEOMÉTRICAMENTE: Dichos puntos forman el interior del segmento $AB$, siendo $A\,(a-k)$ , $B\,(a+k)$, o sea: El entorno del punto $a$ de semi-amplitud $k$.

> Es muy importante, para una buena comprensión del concepto fundamental de límite, que el lector maneje con mucha habilidad las relaciones modulares de este tipo, así como sus interpretaciones geométricas.

### Ejemplos: 1.5.30

1. La inecuación $|x-5|<6$ representa al entorno del punto $P\,(5)$de semi-amplitud 6 unidades. Los extremos $A$ y $B$ de este entorno son:
$$A\,(5-6)\equiv A\,(-1)\ \text{ y }\ B\,(5+6)\equiv B\,(11)\,.$$

2. La inecuación $|x+1|<2$ representa el entorno del punto $Q\,(-1)$de semi-amplitud 2 unidades. (Note que $|x+1|=|x-(-1)|$).

3. Investigar el término de la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$están en el interior del entorno del punto 1 y semi-amplitud 0,01a partir de un valor de $n$.
**SOLUCIÓN:** Los puntos de la sucesión que verifican la inecuación $|x-1|<0{,}01$ cumplirán que $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<0{,}01$, o sea, $\left|\dfrac{n-n-1}{n+1}\right|<\dfrac{1}{100}$, o bien $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{100}$, ahora si multiplicamos ambos miembros de la inecuación por $100\,(n+1)$, obtenemos $100<n+1$, de donde $n>99$.
**RESPUESTA:** Los puntos de la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$que se encuentran en el interior del punto 1, $|x-1|<0{,}01$, son todos los que cumplen que $n>99$. $\square$

### Ejercicios. 1.5.7

1. Descubrir los números los números que satisfacen a las siguientes inecuaciones y dibujar los segmentos correspondientes en una recta metrizada.
   a) $|x-1|<3$,
   b) $|x+3|<2$,
   c) $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{2}{3}$,

*d*) $|x+4| < \frac{1}{4}$,
*e*) $|x+4| < 2$,
*f*) $|x+\alpha| < \epsilon$,

2. Investigue cuantos términos de la sucesión $\left\{\dfrac{2n-1}{n+2}\right\}$ pertenecen al entorno $|x-2| < 0{,}0001$, y cuantos no pertenecen.

### Ejemplo: 1.5.31

Resolver la inecuación $|x-1| > 2$

SOLUCIÓN: La inecuación $|x-1| > 2$, la cumplen todos los números que difieren de 1, en módulo, más de dos unidades, osea, todos los números que son menores de $1-2=-1$ y mayores de $1+2=3$.

GEOMÉTRICAMENTE: Dichos números corresponden a los puntos exteriores del segmento formado por los extremos $A(-1)$ y $B(3)$, como se muestra en la figura(1.9)

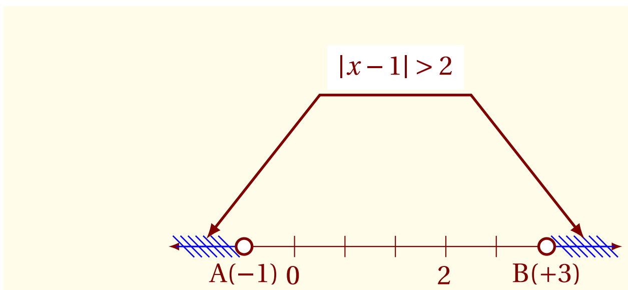



Figura 1.9: $|x-1| > 2$

□

EN GENERAL: La inecuación $|x-a| > k$, la cumplen todos los números que son menores que $a-k$, y mayores que $a+k$, o sea, todos los números que cumplen: $x < a-k$ y .

GEOMÉTRICAMENTE: Los puntos correspondientes a los números que verifican $|x-a| > k$ forman el exterior del segmento con extremos $A(a-k)$ y $B(a+k)$.

### Ejercicios. 1.5.8

Descubrir los números que satisfacen las inecuaciones dadas y representarlas en una recta metrizada.

1. $|x-2| > 4$,
2. $|x+3| > 5$,
3. $|x-3| > 3$,
4. $\left|x+\frac{1}{2}\right| > 4$.

## 1.6 El concepto fundamental de sucesión infinitésima.

INTRODUCCIÓN:

Damos a continuación una explicación detallada, mediante ejemplos, del concepto de infinitésimo. Después de estudiar cuidadosamente los ejemplos el lector queda preparado para comprender bien la definición general, que fijará definitivamente mediante la resolución de ejercicios.

**Ejemplo: 1.6.32**

En el ítem 3 del ejemplo(1.6.27) vimos que los términos de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ son menores que 0,01 para todo $n > 100$. Análogamente, si en vez de fijar el valor 0,01 fijamos otro más pequeño, por ejemplo, 0,0001, se cumplirá que $\left|\dfrac{1}{n}\right| < 0{,}0001$ para todo $n > 10000$; pero si queremos demostrar que, por pequeño que se fije un número los términos de $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ quedan menores que él, a partir de un término, tendremos que recurrir a la notación literal; Representemos con la letra $\epsilon$ (epsilon), a cualquier numero positivo; si logramos probar que $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \epsilon$, para todo $n$ superior a un cierto valor, como $\epsilon$ representa a cualquier número positivo, quedará demostrado que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ tiene la propiedad de que sus términos son, en módulo, menores que cualquier número positivo, a partir de uno de ellos. Pero en efecto: para que $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \epsilon$, o sea, $\dfrac{1}{n} < \epsilon$ basta con que $n > \dfrac{1}{\epsilon}$.

CONCLUSIÓN: Dado un número positivo cualquiera $\epsilon$, en particular tan pequeño como queramos, los términos de la sucesión$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ tienen la propiedad de ser en módulo menores que $\epsilon$ para todo $n < \dfrac{1}{\epsilon}$. Las sucesiones que cumplen esta propiedad se llaman sucesiones infinitésimas.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: Decir que $\dfrac{1}{n} < \epsilon$ para todo $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, equivale a decir que los términos de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ que pertenecen al entorno del origen de semi-amplitud $\epsilon$ para todo $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, o sea, desde un término en adelante. En otras palabras: Rodeado el origen de un entorno cualquiera, en particular tan pequeño como queramos, todos los términos de la sucesión, a partir de uno, sin excepción, están en dicho entorno; por tanto: fuera del entorno del origen hay un número finito de términos de la sucesión y en el interior un número infinito. Tenemos caracterizada así una sucesión infinitésima por la siguiente propiedad geométrica: Cualquier entorno del origen, por pequeño que sea, contiene infinitos puntos de la sucesión. La expresión analítica de esta propiedad, definidora de las sucesiones infinitésimas, es la siguiente:

La inecuación $|x| > \epsilon$ solo la cumplen un número finito de términos de $\{a_n\}$; por tanto, la inecuación $|x| < \epsilon$ la verifican un número infinito de términos de $\{a_n\}$, donde $\epsilon$ representa a cualquier número positivo, en particular tan pequeño como queramos.

### Ejemplo: 1.6.33

Consideremos un cuadrado de lado unidad que representaremos por $C_1$. Si se unen los puntos medios de sus lados (los puntos medios de los lados del cuadrado son extremos de segmentos rectilíneos), se obtiene otro cuadrado, $C_2$; uniendo los puntos medios de los lados de $C_2$ se obtiene un cuadrado $C_3$, y continuando así indefinidamente , uniendo cada vez los puntos medios de los lados del último cuadrado obtenido, se llega a una sucesión de cuadrados: $C_1,\ C_2,\ C_3, \cdots,\ C_n, \cdots$.

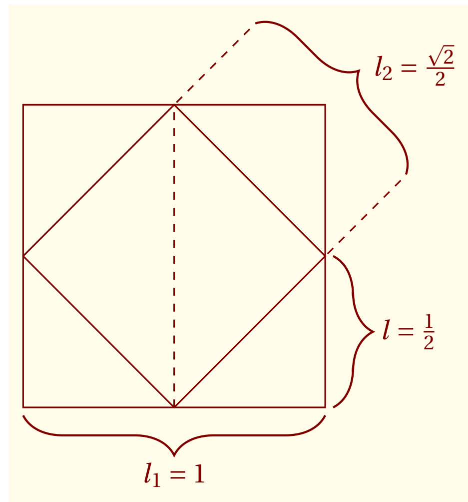



Figura 1.10: Sucesión de cuadrados

Representaremos las áreas de estos cuadrados por

$S_1,\ S_2\ S_3, \cdots,\ S_n, \cdots$ , respectivamente.

En primer lugar calculemos la expresión del área $S_n$ .

$S_1 = 1,\ S_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, pues los cuatro triángulos rectángulos isósceles de las esquinas de $C_1$ son congruentes a los cuatros triángulos en los que se descompones el cuadrado interior $C_2$; por tanto $S_{n-1} = \frac{1}{2}S_n$, es decir para obtener el área del cuadrado interno se multiplica por $\frac{1}{2}$ el área del cuadrado externo. de esta forma la sucesión de las áreas sería

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots,$$

es decir la sucesión se representaría como $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$.

Es fácil deducir, por intuición, que el área $S_n$ puede llegar a ser tan pequeña como queramos, tomando $n$ lo suficientemente grande, pero esto debe ser demostrado matemáticamente, es decir, debemos probar que dado $\epsilon > 0$ cualquiera, se puede encontrar un término de $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ tal que él y todos los siguientes son menores en modulo que $\epsilon$.

En efecto: Para que $\left|\frac{1}{2^{n-1}}\right| < \epsilon$, o lo que es lo mismo, para que $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$, basta con que sea $2^{n-1} > \epsilon$, o sea:

$(n-1)\ln 2 > \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ , o bien, $n - 1 > \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln 2}$, de donde $n > 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln 2}$.

Conclusión: La sucesión $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ es infinitésima, pues dado un $\epsilon > 0$, cualquiera se tiene que $\left|\frac{1}{2^{n-1}}\right| < \epsilon$ para todo $n > 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln 2}$.

**Definición 1.9 Sucesión infinitésima**

Se dice $\{a_n\}$ es una sucesión infinitésima cuando cumple la siguiente propiedad:
Fijando un número positivo cualquiera , $\epsilon > 0$, (en particular tan pequeño como queramos), todos lo términos de la sucesión a partir de uno, son menores en módulo que $\epsilon$.

Podemos expresar la anterior definición como: Una sucesión $\{a_n\}$ se llama infinitésima si para todo $\epsilon > 0$, $|a_n| < \epsilon$

desde un $a_n$ en adelante.

Interpretación Geométrica: La sucesión $\{a_n\}$ es infinitésima si, rodeado del origen de un entorno cualquiera, (en particular tan pequeño como queramos), todos los términos de la sucesión, a partir de uno, están en el interior de dicho entorno.

Por tanto: Cualquier entorno del origen, por pequeño que sea, contiene infinitos términos de la sucesión (todos a partir de uno) y fuera de dicho entorno sólo habrá un número finito de términos de la sucesión.

Notación: Para Indicar que $\{a_n\}$ es infinitésima escribiremos: $\{a_n\} \to 0$, que se lee la sucesión $\{a_n\}$ ***tiende a cero***.

Cuando una sucesión es infinitésima se dice también que tiene límite cero, y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

que se lee: ***el límite de*** $a_n$ ***es igual a cero cuando*** $n$ ***tiende a infinito*** $(\infty)$.

Ejercicios. 1.6.9

1. Probar que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^2+1}\right\}$ es infinitésima. ( hay que demostrar que, cualquiera que sea $\epsilon > 0$, $\left|\dfrac{1}{n^2+1}\right| < \epsilon$ para todos los términos siguientes a uno dado).
2. Demostrar que la sucesión de perímetros de los cuadrados $C_1,\ C_2,\ C_3, \cdots,\ C_n, \cdots$, del ejemplo 1.6.33 es una sucesión infinitésima. ( Indicación: El término n-ésimo de la sucesión es: $\dfrac{4}{2^{\frac{n-1}{2}}}$, y se tiene que probar que $\left|\dfrac{4}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right| < \epsilon$ para todo $n > 1 + \dfrac{2}{\ln 2}\ln\left(\frac{4}{\epsilon}\right)$).
3. Demostrar que $\{\operatorname{sen} a_n\}$es infinitésima, siendo $\{a_n\}$ infinitésima (Indicación: basta tener en cuenta que $\operatorname{sen} a_n < a_n$).
4. Demostrar que $\left\{\left|\dfrac{1}{n^3-9}\right|\right\}$ es infinitésima.
5. Dar la interpretación geométrica cartesiana de una sucesión infinitésima.

## 1.7 El concepto fundamental de límite de una sucesión.

### Introducción:

En está sección explicaremos el concepto de límite, haciéndolo depender del concepto de infinitésimo.

Así procederemos también con las reglas del cálculo de límites, es decir, que las haremos depender del cálculo con infinitésimas. este no es el camino más directo, pero lo hace más fácil de entender. Después de un estudio detallado del concepto de límite mediante a través del concepto de infinitésimos, lo enunciaremos en las diferentes formas que son usuales en los cursos de Análisis matemático.

Como lo que perseguimos fundamentalmente, más que dar expresiones muy concisas, lo cual sería más rápido, es que el lector comprenda lo mejor posible este importante concepto, daremos ejemplos que sirven de base para construir la definición general y después propondremos ejercicios que permitan al lector construir ideas que lo lleven a comprender la definición como síntesis propia.

### Ejemplo: 1.7.34

Consideremos la sucesión $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$. Al desarrollarla obtenemos $\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right), \cdots .$ (1.4)

Si observamos los términos de la ecuación 1.4 vemos que se va acercando más y más al valor de 1, pero esta afirmación debe ser precisada matemáticamente, lo cual se consigue con facilidad por medio del concepto de infinitésima, que ya fue definido en 1.7.1.9. En efecto, si la sucesión de la ecuación 1.4 tiende a 1, al restarle una unidad a tos sus términos, la sucesión resultante debe tender a cero, o sea debe ser infinitésima; pero el resultado de restar una unidad a todos los términos de la sucesión de la ecuación 1.4 es la siguiente sucesión: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n}, \cdots$, que efectivamente es infinitésima (recuerde el ejemplo 1.7.32 ).

RESUMEN: Decir que la sucesión $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ tiende a 1, o tiene límite 1, lo cual se indica así: $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\} \to 1$ ó bien $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}=1$, significa que $\left\{\dfrac{n+1}{n}-1\right\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ es una sucesión infinitésima; como esto es cierto, también los es que el límite de $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ es igual a 1.

### Ejemplo: 1.7.35

Consideremos un vaso de volumen $V$ e imaginemos las siguientes operaciones: llenar la mitad del vaso, después agregar la mitad de lo que queda por llenar y continuar así indefinidamente agregando cada vez la mitad de agua que falta para llenarse.

SOLUCIÓN: Se comprende fácilmente que, por este procedimiento, nunca lograríamos llenar por completo el vaso, pues cada vez se agrega la mitad de lo que falta para llenarse; pero también se comprende fácilmente que las cantidades de aguas sucesivas contenidas por el vaso forman una sucesión que tiende al volumen del vaso, o que tiene por límite el volumen del vaso. pero un matemático no puede conformarse con una idea intuitiva, sino que tiene que precisarla aritméticamente, (esto fué lo que hicieron Cauchy y Weierstrass en el siglo XIX). De acuerdo con lo dicho en el ejemplo 1.7.34, la frase: «**El límite de la sucesión de los volúmenes de agua contenidos sucesivamente por el vaso es igual al volumen $V$, del vaso**» es equivalente[1]a esta otra «**al restar a la sucesión de volúmenes de agua que va conteniendo el vaso la cantidad $V$, se obtiene una sucesión infinitésima**», cuya veracidad puede ser comprobada aritméticamente.

Para ello, antes de nada, obtengamos la sucesión de volúmenes de agua que va conteniendo el vaso: El volumen de agua después de la primera operación será $V_1 = \left(V - \dfrac{V}{2}\right)$; el volumen después dela segunda operación es; $V_2 = \left(V - \dfrac{V}{2^2}\right)$, esto es después de la segunda operación solo le falta al vaso para llenarse $\dfrac{V}{4} = \dfrac{V}{2^2}$. Por un razonamiento análogo, el volumen contenido por el vaso después de la tercera operación será; $V_3 = \left(V - \dfrac{V}{2^3}\right)$, y así sucesivamente, el volumen contenido después de $n$ operaciones será; $V_n = \left(V - \dfrac{V}{2^n}\right)$ por tan to la sucesión de los volúmenes de agua contenida sucesivamente por el vaso tiene por tanto la siguiente expresión general: $\left\{V - \dfrac{V}{2^n}\right\}$, (1.5)

[1]Recordamos que, según se estudia en lógica, dos enunciados son equivalentes, cuando los dos son verdaderos o falsos al mismo tiempo, es decir, no puede darse el caso de que uno se verdadero y el otro falso. Cuando dos enunciados son equivalentes se dice Matemáticas que el uno es condición necesaria y suficiente para el otro.

Si a todos los términos de está sucesión le restamos la cantidad $V$ nos que la siguiente sucesión: $\left\{-\dfrac{V}{2^n}\right\}$.

Si logramos probar que esta última sucesión es infinitésima, quedará demostrada la ecuación 1.5 tiende a $V$.

Ahora bien, probar que $\left\{-\dfrac{V}{2^n}\right\}$ (1.6), es infinitésima, es equivalente a probar que, dado un $\epsilon > 0$ o cualquiera, todos los términos de la ecuación 1.6 a partir de uno, son en módulo menores que $\epsilon$, o sea, que hay que probar que $\left|\dfrac{-V}{2^n}\right| = \dfrac{V}{2^n} < \epsilon$, (1.7), a partir de un valor de $n$. Pero la ecuación 1.7 se cumple siempre que $2^n > \frac{V}{\epsilon}$ o sea, siempre que $n \ln 2 > \ln\left(\frac{V}{\epsilon}\right)$, de donde

$$n > \frac{\ln\left(\frac{V}{\epsilon}\right)}{\ln 2}.$$

Al haber probado que la sucesión $\left\{\left(V - \dfrac{V}{2^n}\right) - V\right\}$ es infinitésima, ha quedado demostrado que el límite de $\left\{V - \dfrac{V}{2^n}\right\}$ es igual a $V$. □

Más adelante cuando se expliquen las reglas del cálculo con límites, o sea, las técnicas de la operación de paso al límite, verás que este resultado se obtiene rápidamente; pero lo que estamos tratando con estos ejemplos es que se comprenda bien la noción de que una sucesión «tienda a cierto límite, o tiene por límite un cierto número».

**Ejemplo: 1.7.36**

Consideremos un segmento, $AB$, de longitud $l$, (vea la figura 1.11); y construyamos, sobre él como la base, un triángulo equilátero, $ABC$. Después se toma el punto $M$, medio de $AB$, y como bases $AM$ y $MB$ se construyen dos triángulos equiláteros,$ADM$ y $MEB$. Después se toman los puntos medios de $AM$ y $MB$,$P$ y $Q$, construyendo triángulos equiláteros de base $AP$, $PM$, $MQ$, $QB$; después se tomarían los puntos medios de estas bases y se construirían nuevos triángulos equiláteros, sobre unas bases que serían la mitad de las anteriores. Continuando este proceso indefinidamente se obtiene una sucesión de segmentos quebrados, circunscritas al segmento $AB$, a saber: $ACB$, $ADMEB$, $AFPGMHQIB, \cdots$ .

¿Cuál será el límite de las longitudes de estos segmentos quebrados?

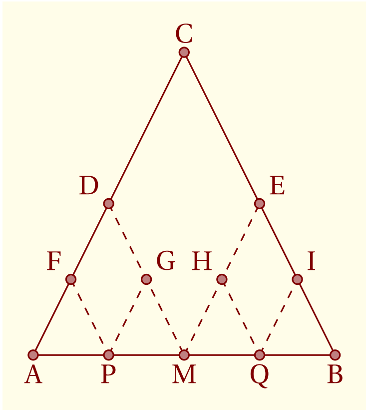



Figura 1.11: Sucesión de puntos medios en un triángulo equilátero

Solución: La intuición nos indica que, cuando el número de lados del segmento quebrado tienda a infinito su longitud tenderá a confundirse con la longitud $l$ del segmento $AB$; es decir, que el límite de la sucesión de longitudes del segmento quebrado sería igual a $l$. La demostración de este hecho nos indicará que nuestra intuición no es correcta; en efecto: la longitud del primer segmento quebrado, $ACB$, es igual a $2l$; la de la segunda es $AD + DM + ME + EB = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} + \frac{l}{2} + \frac{l}{2} = 2l$; análogamente, la longitud del tercer segmento quebrado y la de todas las siguientes es igual a $2l$. Si representamos por $l_n$ la longitud del n-ésimo segmento quebrado se cumple que $l_n = 2l$. para todo $n$. La diferencia $\{l_n - l\} = \{2l - l\} = \{l\}$ no es infinitésima, y por tanto el límite de $\{l_n\}$ no es igual a $l$, como la intuición nos indica.

El límite correcto es $2l$, pues se tiene $\{ln - 2l\} = \{2l - 2l\} = \{0\}$, y una sucesión formada por ceros cumple con la definición de infinitésimo. □

EN GENERAL: El límite de una sucesión cuyos términos son todos iguales a una constante, $k$, es igual a dicha constante; pues $\{k - k\} = \{0\}$ es una sucesión infinitésima. Insistimos en que el símbolo $\{0\}$ ha de interpretarse como una sucesión cuyos términos son todos ceros. análogamente, el símbolo $\{k\}$, se interpreta como una sucesión cuyos términos son todos iguales a $k$.

### Ejemplo: 1.7.37

Consideremos la sucesión $\left\{\dfrac{2n+1}{n+2}\right\}$, (1.8). Sus primeros términos son: $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{11}{7}, \cdots$ . Se observa que los términos de la sucesión se van acercando al valor 2. Comprobemos si el valor 2 es el límite de la sucesión infinitésima.

Se tiene: $\left\{\dfrac{2n+1}{n+2} - 2\right\} = \left\{\dfrac{2n+1-2n-4}{n+2}\right\} = \left\{\dfrac{-3}{n+2}\right\}$ (1.9).

Para probar que esta última sucesión es infinitésima habrá que probar que, dado un $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeño, sus términos son, en módulo, menores que $\epsilon$, a partir de uno, es decir, hay que probar que $\left|\dfrac{-3}{n+2}\right| < \epsilon$ para todo $n$ superior a un cierto valor; o sea, hay que probar que $\dfrac{3}{n+2} < \epsilon$, (1.10), a partir de un $n$; pero para que se cumpla la ecuación 1.10 basta que $n + 2 > \frac{3}{\epsilon}$, o sea que $n > \frac{3}{\epsilon} - 2$; por tanto: la sucesión representada por la ecuación 1.9 es infinitésima y la sucesión representada por la ecuación 1.8 tiene por límite 2.

**Definición 1.10 Límite finito**

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$, tiene por límite $\alpha$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ó $a_n \to \alpha$, si y solamente sí, $\{a_n - \alpha\}$ es una sucesión infinitésima.

RESUMEN: Las afirmaciones $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - \alpha) = 0$, son equivalentes.

EXPRESIÓN ANALÍTICA: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, si y solamente sí, dado un $\epsilon > 0$, arbitrario, (en particular tan pequeño como se quiera), se cumple que $|a_n - \alpha| < \epsilon$ para todos los términos de la sucesión siguientes a uno dado.

Esta es la forma usual de presentar el concepto de límite en los textos del Análisis Matemático; pero sin una preparación previa del lector, le queda muy difícil comprenderla bien.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: De acuerdo con lo explicado en el ejemplo 1.7.29 de la sección 1.5.3, todos los números que verifican la relación modular $|a_n - \alpha| < \epsilon$ pertenecen al entorno de centro $\alpha$ y semi-amplitud $\epsilon$.

Pero la relación modular $|a_n - \alpha| < \epsilon$, (si $\alpha$ es el límite de $\{a_n\}$), la cumplen todos los términos de la sucesión desde uno en adelante; por tanto concluimos que: $\alpha$ será el límite de $\{a_n\}$ si y solo sí, rodeando el punto $\alpha$ de un entorno, de semi-amplitud $\epsilon$ arbitrariamente pequeño, tan pequeño como queramos, todos los términos de $\{a_n\}$ a partir de uno en particular están dentro del entorno; por tanto: en el interior de dicho entorno están infinitos puntos de la sucesión, y en el exterior hay un número finito de puntos de $\{a_n\}$,

OBSERVACIÓN:

No todas las sucesiones tienen límite. De acuerdo con lo afirmado últimamente, el límite de una sucesión $\{a_n\}$ solo existe, cuando existe un punto $\alpha$ que goza de la siguiente propiedad: En el interior de cualquier entorno de $\alpha$, por pequeño que sea, existen un número infinito de puntos de la sucesión $\{a_n\}$, y en el exterior un número finito. Analíticamente; Los números que verifican la condición $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ son infinitos y los que no son finitos.

Ejercicios. 1.7.10

1. Demostrar que el límite de $\left\{\dfrac{3n+2}{n+1}\right\}$ es igual a 3. (tome como orientación el ejemplo 37).
2. Demostrar que el límite de $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2+9}\right\}$ es 1.
3. Demostrar que el límite de $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2}\right\}$ es 1.
4. Demostrar que el límite de $\left\{\dfrac{2n-1}{3n+1}\right\}$ es $\frac{2}{3}$.
5. Si se representa una sucesión $\{a_n\}$, con límite $\alpha$, sobre un plano cartesiano, $(O_n, O_{a_n})$ , y se trazan las rectas paralelas al eje $O_n$, $y = \alpha - \epsilon$ y $y = \alpha + \epsilon$, ¿que puede decirse de los puntos de la sucesión a partir de uno en particular? siendo $\epsilon > 0$ un número cualquiera.
6. Si el límite de $\{a_n\}$ es $\alpha$, ¿cuál será el límite de $\{a_n + k\}$, siendo $k$ un número real constante? Haga un razonamiento analítico de la situación y otro geométrico.

## 1.8 Propiedades fundamentales de los límites.

En esta sección desarrollaremos algunas propiedades fundamentales de los límites que ilustran muy bien la parte esencial del concepto, aparte de que algunas de tales propiedades serán usadas después, su estudio dará oportunidad al lector de reafirmar bien el significado exacto de la idea matemática de límite.

**Propiedad 1.8.6 : Unicidad del límite**

Una sucesión no puede tener más de un límite.

**Demostración:**

Supongamos que $\{a_n\}$ tiene dos límites distintos, $\alpha$ y $\beta$ como se observa en la figura 1.12.

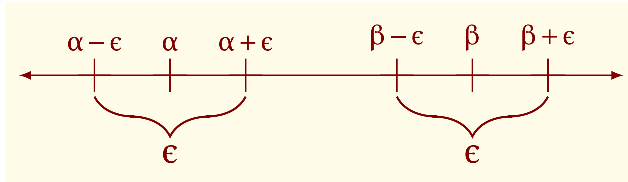



Figura 1.12: Unicidad del límite

Elijamos un $\epsilon > 0$, menor que la mitad de la longitud $|\beta - \alpha|$; si rodeamos los puntos de coordenadas $\alpha$ y $\beta$ de sendos entornos de semi-amplitud $\epsilon$, dichos entornos serán disjuntos. Ahora, si $\{a\}$ tiene por límite $\alpha$ todos sus términos a partir de uno valor dado, que representaremos por $a_{n_1}$, pertenecerán al entorno de $\alpha$; análogamente, si $\beta$ fuese también límite de $\{a_n\}$ todos los términos de $\{a_n\}$, a partir de uno que representaremos por $a_{n_2}$ pertenecerán al entorno de $\beta$. Si consideramos los términos de $\{a_n\}$ siguientes a $a_{n_1}$ y $a_{n_2}$ dichos términos tendrían que pertenecer simultáneamente al entorno de $\alpha$ y al de $\beta$, lo cual es absurdo, ya que, en virtud del postulado de Dedekind, cada término de $\{a_n\}$ (número real) solo tiene un punto correspondiente sobre la recta metrizada.

■(q.e.d)

**Propiedad 1.8.7 : Encaje**

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$, tres sucesiones tales que $a_n < c_n < b_n$ para todo $n$ : entonces si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen el mismo límite, la sucesión $\{c_n\}$ tiene también el mismo límite. En otras palabras si una sucesión está comprendida entre dos sucesiones que tienen el mismo límite, ella tiene también el mismo límite.

**Demostración:**

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$, Dado un $\epsilon > 0$arbitrario, en particular tan pequeño como queramos, si rodeamos el punto $\alpha$ de un entorno de semi-amplitud $\epsilon > 0$, se cumplirá:

1. Todos los puntos de $\{a_n\}$ a partir de un punto en particular, que representaremos $a_{n_1}$estarán en el entorno de $\alpha$.
2. Todos los puntos de $\{b_n\}$ a partir de un punto en particular, que representaremos $b_{n_2}$estarán en el entorno de $\alpha$.
3. Por tanto, todos los términos cuyo orden sea posterior a $n_1$ y a $n_2$, tanto de $\{a_n\}$como de $\{b_n\}$ estarán en el entorno de $\alpha$.
4. En consecuencia, como todos los términos de $\{c_n\}$ cumplen que $a_n < c_n < b_n$, se cumplirá que: todos los números de $\{c_n\}$ de orden posterior a $n_1$ y a $n_2$estarán en el entorno de $\alpha$,y por tanto, $\alpha$ será el límite de $\{c_n\}$.

■(q.e.d)

**Propiedad 1.8.8**

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ y $k$ un número real cualquiera menor que $\alpha$, $k < \alpha$. Entonces, todos los términos de $\{a_n\}$, a partir de un número dado son mayores que $k$. (vea la figura 1.13

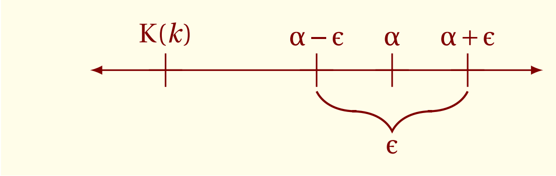



Figura 1.13: $a_n > k$, $\forall n$ tal que $k < \alpha$

**Demostración:**

Elijamos un $\epsilon > 0$ menor que la longitud $|\alpha - k|$. Si rodeamos el punto $\alpha$ de un entorno de semi-amplitud $\epsilon$, el punto $k$ quedará a la izquierda de dicho entorno; además, si $\alpha$ es el límite de $\{a_n\}$, todos sus términos a partir de un valor dado, estarán en el entorno de $\alpha$ y por tanto quedarán a la derecha de $k$, es decir, serán mayores que $k$.

■(q.e.d)

Análogamente se demuestra que: Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ y $l$ es cualquier número mayor que $\alpha$, todos términos de $\{a_n\}$, a partir de un valor dado, son menores que $l$. (la demostración le queda al lector).

**Propiedad 1.8.9**

Todos los términos de una sucesión, a partir de un valor dado, tiene el mismo signo que su límite.

**Demostración:**

Supongamos, para fijar ideas, que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ tiene signo positivo. (Análogamente se puede demostrar en el caso que $\alpha < 0$). vea la figura 1.14
Elijamos un $\epsilon > 0$ menor que la longitud del segmento $OA$; entonces si rodeamos al punto $\alpha$ de un entorno de semi-amplitud $\epsilon$, dicho entorno estará todo en el semieje positivo tomando a $\alpha - (\beta + \frac{\epsilon}{2}) > 0$; pero como $\alpha$ es el límite de $\{a_n\}$ todos los términos de $\{a_n\}$, a partir de un valor dado, estarán en el entorno de $\alpha$, por tanto, todos ellos serán positivos.

■(q.e.d)

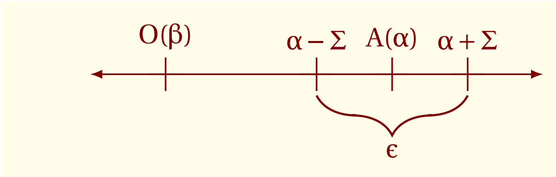



Figura 1.14: $a_n > k$, $\forall n$ tal que $k < \alpha$

**Propiedad 1.8.10 Subsucesión**

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ y $\{b_n\}$ una sucesión formada por términos de $\{a_n\}$, es decir $\{b_n\} \subseteq \{a_n\}$; entonces se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

Por ejemplo, la sucesión $\{b_n\}$ puede estar formada por todos los términos pares de $\{a_n\}$.

**Demostración:**

Por hipótesis, fijado un entorno cualquiera del punto $\alpha$, en su interior habrá infinitos puntos de $\{a_n\}$ y fuera solo un número finito; además como cada punto de $\{b_n\}$ es un punto de $\{a_n\}$, entonces la sucesión $\{b_n\}$ no podrá tener infinitos puntos fuera del entorno de $\alpha$, pues en tal caso, esos mismos puntos serían términos de $\{a_n\}$ y por tanto estarían en el exterior del entorno de $\alpha$, en contra del supuesto de que la sucesión $\{a_n\}$ tiene un número finito de puntos en el exterior del entorno de $\alpha$; de lo que se deduce que la sucesión $\{b_n\}$ solo contiene un número finito de puntos en el exterior del entorno de $\alpha$, por lo que el límite de la sucesión $\{b_n\}$ debe ser $\alpha$.

■(q.e.d)

Como caso particular de la propiedad 1.8.10, se tiene la siguiente propiedad.

**Propiedad 1.8.11**

La sucesión $\{b_n\}$ es una sucesión reordenada de la sucesión $\{a_n\}$, es decir con los mismos términos que la sucesión $\{a_n\}$ pero en otro orden y las dos sucesiones tiene el mismo límite, es decir $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

La demostración le queda al lector.

**Propiedad 1.8.12**

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -\alpha$, es decir si $\{a_n\}$ es infinitésima, $\{-a_n\}$ también lo es.

El lector puede realizar la demostración siguiendo la siguiente recomendación: Puede darse la demostración basada en la interpretación geométrica del concepto de límite, análoga a las realizadas anteriormente.

## 1.9 Caso de límite infinito

En esta sección vamos a tratar el concepto de límite infinito, precisando así lo que dijimos acerca de las sucesiones no acotadas.

**Ejemplo: 1.9.38**

Dada la sucesión $\left\{\dfrac{n^2+1}{2}\right\}$, (1.11), podremos asegurar que todos los términos, a partir de un valor dado, superan a cualquier número, por grande que este sea.

SOLUCIÓN: Para poder responder a esta pregunta con toda generalidad, representaremos por $N$ a un número positivo arbitrariamente grande, tan grane como queramos.

Tendremos que probar que $\left\{\dfrac{n^2+1}{2}\right\} > N$, (1.12), a partir de un $n$; para ello procedemos de la siguiente manera: si se cumple 1.12 se cumplirá también que $n^2+1 > 2N$, o sea, que $n^2 > 2N-1$, finalmente se obtiene que $n > \sqrt{2N-1}$. □

RESUMEN:

Dado un número tan grande como queramos, $N$, todos los términos de la sucesión $\left\{\dfrac{n^2+1}{2}\right\}$, cuyo número de orden sea superior a $\sqrt{2N-1}$, son mayores que $N$.

Las sucesiones que tienen esta propiedad se llaman «infinitas positivas», o se dice que la sucesión tiende a «más infinito $(+\infty)$».

**Ejemplo: 1.9.39**

Si en vez de considerar la sucesión definida por la ecuación 1.11 en el ejemplo 1.9.38., consideramos su opuesta $\left\{\dfrac{-n^2-1}{2}\right\} > N$, (1.13), podremos asegurar que la sucesión 1.13 tiene todos sus términos menores que un número arbitrariamente pequeño.

SOLUCIÓN: Si fijamos un número negativo, arbitrariamente pequeño[2] $-N$ siendo $N>0$, puesto que se ha probado $\left|-\dfrac{n^2+1}{2}\right| > N$, a partir del término de orden $\sqrt{2N-1}$, se cumplirá que, a partir de ese mismo término, la sucesión $\left\{-\dfrac{n^2+1}{2}\right\}$ tiene todos sus términos menores que $-N$. □

Las sucesiones que tienen esta propiedad se dice que son «infinitas negativas» o que tienen « límite menos infinito $(-\infty)$». Tanto las sucesiones que tienen limites infinito positivo o limites infinito negativo, reciben el nombre de « sucesiones divergentes». En cambio, las sucesiones que tienen límite finito se llaman convergentes.

### 1.9.1. Definiciones generales

**Definición 1.11 Suceción divergente a $+\infty$**

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es «infinita-positiva», o tiene por límite «más infinito», y se indica así: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ó $a_n \to +\infty$, si y solamente sí, $\{a_n\}$ tiene la siguiente propiedad: Dado un número positivo arbitrariamente grande $N$, todos los términos de la sucesión, a partir de uno en particular, son superiores a $N$.

Notación: Si $\{a_n\} \to +\infty$, entonces $a_n > N$ para todo $n$ superior a un cierto valor.

[2] Aclaramos que en esta ocasión no nos referimos a un número positivo y pequeño, como ocurría en el caso infinitésimo, sino a un número negativo y pequeño, y como se sabe del estudio de los números negativos, cuan más grande sea su módulo más pequeño es el número.

**Definición 1.12 Sucesión divergente a $-\infty$**

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es «infinita-negativa», o tiene por límite «menos infinito», y se indica así: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ó $a_n \to -\infty$, si y solamente sí, $\{a_n\}$ tiene la siguiente propiedad: Dado un número negativo arbitrariamente pequeño $-N$, todos los términos de la sucesión, a partir de uno en particular, son inferiores a $-N$.

Notación: Si $\{a_n\} \to -\infty$, entonces $a_n < -N$ para todo $n$ superior a un cierto valor.

**Definición 1.13 Sucesión divergente**

Sea $\{a_n\}$ una sucesión si; $a_n \to -\infty$, ó $a_n \to +\infty$, a esta sucesión se le llama divergente.

### 1.9.2. Interpretación geométrica de las sucesiones divergentes.

Si $\{a_n\}$ es divergente y fijamos un entorno del origen de semi-amplitud $N$, tan grande como queramos, todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$, a partir de un valor dado, son puntos exteriores a dicho entorno. Por tanto; la sucesión $\{a_n\}$ es divergente si y solo sí, en cualquier entorno del origen hay un número finito de términos de la sucesión y fuera de él infinitos términos (todos los puntos de $\{a_n\}$ a partir de un valor dado).

Observación: Tanto el concepto de infinito como el de infinitésimo se refieren a sucesiones, es decir, a variables ordenadas que tienen las propiedades descritas en las definiciones respectivas, dadas en este capítulo.

**Definición 1.14 Sucesión oscilantes**

Sea $\{a_n\}$ una sucesión que no es convergente ni divergente se le llama sucesión oscilante.

**Ejemplo: 1.9.40**

$\left\{(-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}\right\}$ es una sucesión «oscilante»; sus valores «oscilan» entre 1 y $-1$ los cuales reciben el nombre de límites de oscilación.

## 1.10 Sucesiones monótonas convergentes.

**Ejemplo: 1.10.41**

Consideremos un nuevo ejemplo de las sucesiones formadas por los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos en una circunferencia.

Dichas sucesiones cumplen las siguientes propiedades:

a) La primera es creciente y la segunda decreciente; es decir, los perímetros de los polígonos regulares inscritos crecen al crecer el número de lados, mientras que los perímetros de los circunscritos disminuyen.

b) Cualquier perímetro circunscrito es mayor que cualquier perímetro inscrito.

c) La diferencia $P_n - P'_n$ entre el n-ésimo perímetro circunscrito y el n-ésimo perímetro inscrito puede llegar a ser tan pequeño como queramos, tomando un $n$ lo suficientemente grande.

Dos sucesiones que cumplan las tres propiedades anteriormente descritas, se llaman sucesiones monótonas convergentes.

**Definición 1.15 Monótonas convergentes**

Dos sucesiones, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se llaman « monótonas convergentes » cuando cumplen las siguientes propiedades:

1. $\{a_n\}$ es creciente y $\{b_n\}$ es decreciente.
2. Los términos de la decreciente son mayores que los de la creciente: $b_i > a_j$ para todo $i$ y $j$.
3. La diferencia $\{b_n - a_n\}$ es infinitésima.

Notación:

1. $\begin{cases} a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \cdots \\ b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots \end{cases}$
2. $b_i > a_j$ para todo $i$ y $j$.
3. $\{b_n - a_n\} \to 0$.

Estas sucesiones, definidas y estudiados por Cantor, son de gran importancia en el Cálculo Infinitesimal, sobre todo en el cálculo Integral.

**Interpretación geométrica:**

Los puntos correspondientes a $\{a_n\}$ se suceden de izquierda a derecha y los correspondientes a $\{b_n\}$ de derecha a izquierda, como se observa en la figura 1.15

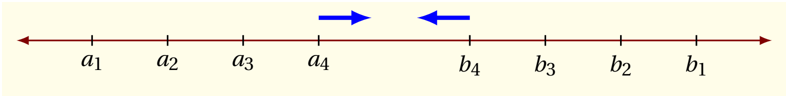



Figura 1.15: Sucesiones monótonas convergentes.

Si consideramos la sucesión de segmentos:

$$I_1 = (a_1, b_1)\,,\ I_2 = (a_2, b_2)\,,\ I_3 = (a_3, b_3)\,, \cdots\,,\ I_n = (a_n, b_n)\,,\ \cdots\,,$$

ella cumple las siguientes propiedades:

1. Cada segmento está incluido en el anterior.
2. La longitud de $I_n$ es $|b_n - a_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto es consecuencia de la propiedad 3 de la definición 1.15.

Una sucesión de segmentos que cumple las propiedades 1 y 2 se llama encaje de Cantor.

Resumen:

La imagen geométrica de un par de sucesiones monótonas convergentes es un encaje de Cantor.

### 1.10.1. Postulado de la continuidad de la recta.

Valiéndonos de la nomenclatura de los encajes de Cantor vamos a enunciar un postulado fundamental de la Geometría, que recibe el nombre de «postulado da la continuidad de la recta».

**Postulado 1.10.1 Continuidad de la recta**

Dado un encaje de Cantor existe exactamente un punto, que tiene la propiedad de pertenecer a todos los segmentos del encaje. a dicho punto le llamaremos « el punto de Cantor» correspondiente a dicho encaje.

Es fácil probar que no pueden existir dos puntos de Cantor para un mismo encaje, es decir dos puntos interiores a todos los segmentos del encaje. En efecto; Supongamos que existieran dos puntos de Cantor, $\alpha$ y $\beta$,para un mismo encaje; rodeemos al punto de coordenada $\alpha$ de un entorno de semi-amplitud $\epsilon$, menor que la longitud $|\beta - \alpha|$ . Como $\alpha$ pertenece a todos los $I_n$, y además $I_n \to 0$, habrá un cierto valor de $n$, $n = n_1$, tal que $I_{n_1}$ y todos los siguientes estarán en el interior del entorno de $\alpha$, lo cual is incompatible con el hecho de que $\beta$ sea también un punto de Cantor del encaje, pues $\beta$ está en el exterior del entorno elegido y por tanto y por tanto a todos los segmentos del encaje a partir del segmento $I_{n_1}$.

Los hechos que acabamos de describir se expresan así: *Dos sucesiones monótonas convergentes tienen un límite común*. Este límite es el número real correspondiente al punto de cantor del encaje definido por las dos sucesiones. Este enunciado es de gran importancia en el Análisis Infinitesimal y será usado para establecer resultados importantes.

### 1.10.2. Principio del crecimiento limitado

en el ejemplo 35 de la sección 1.7 se demostró que una sucesión creciente ( las cantidades de agua contenidas sucesivamente por el vaso son crecientes), pero acotada (todos los términos de la sucesión son menores que el volumen total del vaso), tenía límite. Este hecho es muy importante y de carácter general y se conoce con el nombre de «*principio del crecimiento limitado*», que se enuncia así:

**Propiedad 1.10.13 : Principio del crecimiento limitado**

Toda sucesión creciente, pero acotada, tiene límite finito, igual a su cota menor.

Demostración:

Sea $K$ la cota y elijamos un punto $M$, suficientemente a la izquierda de $K$, para que el segmento $MK$ se encuentran puntos de la sucesión. En tal caso, por ser la sucesión creciente, en el segmento $MK$ están todos están todos los puntos de la sucesión a partir un valor dado, luego a la izquierda del punto $M$ solo existe un número finito de puntos de la sucesión y en el segmento $MK$ infinitos. Sentado esto, dividamos el segmento $MK$ en dos segmentos de igual longitud, siendo su punto medio $M_1$; pueden darse dos casos;

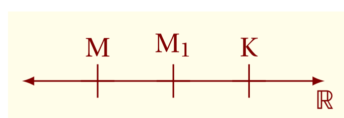



Figura 1.16: Principio del crecimiento limitado

1. Que en $M_1K$ no hay puntos de la sucesión.
2. Que si en $MM_1$hay puntos de la sucesión, sólo hay un número finito de ellos, y en $M_1K$ hay un numero infinito.

Tanto en el caso 1 como en el 2 sólo una de las dos partes tendrá infinitos puntos. Así que podemos elegir un único segmento entre $MM_1$ o $M_1K$ que contenga infinitos puntos y lo llamaremos $I_1$.

Se repite la bipartición de $I_1$ y se elije la mitad que contenga infinitos puntos, como muestra la figura 1.17. A la parte elegida la llamaremos $I_2$. Continuando el proceso de bipartición del segmento elegido y eligiendo de nuevo la parte que contiene infinitos puntos de la sucesión, se obtiene un encaje de Cantor: $I_1,\ I_2,\ I_3, \cdots$ cuyos segmentos están caracterizados porque en su interior se encuentran infinitos puntos de la sucesión y en su exterior se encuentra un número finito de ellos. El encaje de Cantor define un punto de Cantor, $\alpha$, tal que rodeándolo de un entorno arbitrariamente pequeño, en dicho entorno se encuentran los segmentos $I_i$ desde un $i$ en adelante y como los $I_i$ tienen en su interior infinitos puntos de la sucesión y fuera solo un número finito de tales puntos, ha quedado demostrado que, en cualquier entorno de $\alpha$, por pequeño que sea, se encuentran infinitos puntos de la sucesión y en su exterior un número finito de puntos y por tanto $\alpha$es el límite de la sucesión, cuya existencia se quería probar. □

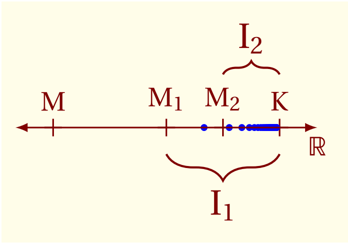



Figura 1.17: Principio del crecimiento limitado

**Observación:**

Cuando las partes, $I_1$, que se van eligiendo (las que contienen infinitos puntos de la sucesión) son siempre las de la derecha, el punto de Cantor, $\alpha$, o sea, el límite de la sucesión, es la menor de las cotas superiores, llamada $\sup\{a_n\}$, en caso contrario, el límite será menor que la cota.

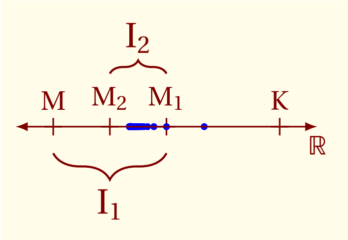



Figura 1.18: Principio del decrecimiento limitado

Con un razonamiento análogo al del principio del crecimiento limitado y usando la simetría geométrica del problema,(vea la figura 1.18), podemos probar el siguiente enunciado.

**Propiedad 1.10.14 : Principio del decrecimiento limitado**

Toda sucesión decreciente, pero acotada inferiormente, tiene límite finito, igual a su cota o superior a ella.

Si la sucesión es monótona creciente, pero no acotada, ella tendrá limite $+\infty$, pues sus términos llegan a superar a cualquier número, por grande que este sea, partir de un valor dado en adelante . Simétricamente: si una sucesión es monótona decreciente y no acotada, tiene límite $-\infty$, pues sus términos llegan a ser menores que cualquier número, por pequeño que este sea, a partir de un valor dado en adelante.

Resumiendo podemos decir lo siguiente

**Resumen:**

Toda sucesión monótona es convergente o divergente, nunca oscilante. Será convergente cuando este acotada y divergente en caso contrario, por tanto; *Una sucesión monótona siempre tiene límite finito o infinito, según que sea acotada o no.*

# 1.11 Ejemplos del principio del crecimiento limitado.

En esta sección daremos algunos ejemplos y ejercicios interesantes del «principio del crecimiento limitado de Cantor».

Como casi todos estos ejemplos se resuelven sumando una progresión geométrica indefinida de razón menor que la unidad, comenzaremos repasando tales progresiones y estableciendo la fórmula de la suma.

## 1.11.1. Progresiones geométricas.

**Definición 1.16 Progresión geométrica**

Una sucesión de la forma:$a,\ a\cdot r,\ a\cdot r^2,\ a\cdot r^2,\ \cdots,\ a\cdot r^{n-1},\cdots,$ (1.14), en la que cada término (distinto del primero) es igual al anterior multiplicado por una constante, $r$, recibe el nombre de «progresión geométrica».

### 1.11.1.1. Suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica.

Si llamamos $S_n$ a la suma de los $n$ primeros términos de la progresión geométrica 1.14 obtenemos la fórmula:

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}ar^i=a+a\cdot r+a\cdot r^2+\cdots+a\cdot r^{n-1}, \tag{1.15}$$

ahora si multiplicamos los dos miembros de la ecuación 1.15 por $r$, nos queda:

$$r\cdot S_n=r\cdot\sum_{i=0}^{n-1}ar^i=ar+a\cdot r^2+a\cdot r^3+\cdots+a\cdot r^n, \tag{1.16}$$

si restamos la ecuación 1.15 de 1.16, se obtiene $r\cdot S_n-S_n=(r-1)\,S_n=ar^n-a=a\,(r^n-1)$ (1.17), de donde se obtiene

$$S_n=\frac{a\,(r^n-1)}{r-1}. \tag{1.18}$$

La fórmula 1.18 nos da la suma de los $n$ primeros términos de la progresión geométrica 1.15, la cual se puede reescribir de la siguiente forma:

$$S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{a\cdot r^n}{1-r}, \tag{1.19}$$

en la ecuación 1.19, si $|r|<1$, $r^n$ es infinitésimo (la demostración de esta afirmación le que de tarea al lector) y, como se demostrará más adelante «*el producto de una constante por un término infinitésimo, es infinitésimo*», de acuerdo con estas afirmaciones si tomamos limites en ambos lados de la ecuación 1.19

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}-\frac{a\cdot r^n}{1-r}\right), \tag{1.20}$$

obtenemos $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-r}$, que escribimos simplemente así:

$$S=\frac{a}{1-r}. \tag{1.21}$$

Esta fórmula es de gran uso en matemáticas y se expresa así: La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica indefinida, de razón menor que la unidad, es igual a su primer término entre uno menos la razón.

OBSERVACIÓN: La sucesión $\{S_n\}$ donde $S_n$ está definida por la ecuación 1.15 es acotada si $|r| < 1$, ademas $\lim\limits_{n\to\infty} \{S_n\} = \dfrac{a}{1-r}$.

## Ejemplo: 1.11.42

Consideremos de nuevo el ejemplo de los cuadrados obtenidos uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado unitario y repitiendo indefinidamente la operación sobre cada uno de los cuadrados obtenidos (vea el ejemplo 33 de la sección 1.6).

SOLUCIÓN: La sucesión de las áreas de los cuadrados es:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \cdots. \tag{1.22}$$

Se observa que la sucesión dada por la ecuación 1.22, es una progresión geométrica indefinida de razón $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Ahora la sucesión formada por las áreas consecutivas tiene como término n-ésimo, según la fórmula dada por la ecuación 1.19, $S_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{2^n}$.

Esta sucesión $\{S_n\}$ es creciente, pues al aumentar $n$ disminuye el sustraendo y por tanto aumenta la diferencia; pero es acotada, pues todos los términos son menores que $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Según «el principio de crecimiento limitado» ella tiene límite, que se calcula aplicando la fórmula dada por la ecuación 1.21 de la siguiente forma :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Por tanto: la suma de las infinitas áreas de la sucesión 1.22 es igual a 2 unidades de área. □

### Fracciones generatrices de los números decimales periódicos.

Sabemos que los números racionales se caracterizan porque ellos se pueden representar mediante un número finito de cifras decimales o mediante infinitas cifras que se repiten periódicamente; en cambio, los números irracionales necesitan para su representación infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

EJEMPLOS:

$\frac{2}{5} = 0{,}4$, $\frac{7}{2} = 3{,}5$, $\frac{9}{20} = 0{,}45$, $\frac{8}{15} = 0{,}5333\cdots$, $\frac{4}{3} = 1{,}333\cdots$, $\frac{35}{6} = 5{,}8333\cdots$.

EXPLICACIÓN: Los tres primeros ejemplos tienen un número finito de cifras decimales, pero los siguientes tienen infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente. en el caso de $\frac{4}{3}$ el período empieza con las décimas y en este caso recibe el nombre de fracción decimal periódica pura; En el caso de $\frac{8}{15}$ el período no empieza en las décimas, sino en las centésimas, llamándose fracción decimal periódica mixta.

A continuación explicaremos un procedimiento general, por medio de la fórmula dada en la ecuación 1.21, para obtener las fracciones ordinarias «generatrices» de las fracciones decimales periódicas, Si el decimal tiene un número finito de cifras decimales por ejemplo $K$ cifras decimales, bastará multiplicar el denominador y el denominador por $10^K$ para obtener la fracción ordinaria generatriz.

### Decimal periódico puro.

Razonaremos con un decimal periódico puro con tres cifras decimales en el período, pero el método es aplicable en general. Sea el decimal periódico puro $E, abc\cdots$ , donde $E$ representa a la parte entera y $abc$ el período, se tiene:

$$E, abc\cdots = E + \frac{abc}{10^3} + \frac{abc}{10^6} + \frac{abc}{10^9} + \cdots$$

Los términos siguientes al primero forman una progresión geométrica indefinida de razón $r = \frac{1}{10^3}$, menor que la unidad, aplicando la ecuación 1.21 de la suma, se tiene:

$$E, abc\cdots = E + \frac{\frac{abc}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}} = E + \frac{\frac{abc}{10^3}}{\frac{10^3-1}{10^3}} = E + \frac{abc}{10^3-1} = \frac{E\times 10^3 - E + abc}{999} = \frac{E000 - E + abc}{999} = \frac{Eabc - E}{999}. \quad (1.23)$$

El último miembro de la última igual puede traducirse en la siguiente regla:

Para hallar la fracción ordinaria generatriz de una fracción decimal periódica pura se resta de la parte entera seguida de un período la parte entera y el resultado se divide por el numero formado por tantos nueves como cifras tenga el período.

**Ejemplos: 1.11.43**

1. $2,\overset{\frown}{35} = 2{,}3535\cdots = \dfrac{235-2}{99} = \dfrac{233}{99}.$
2. $42,\overset{\frown}{328} = 42{,}328328\cdots = \dfrac{42328-42}{999} = \dfrac{42286}{999}.$

**Ejercicios. 1.11.11**

Obtener las fracciones ordinarias generatrices de los siguientes números decimales periódicos puros, primero aplicando el procedimiento para encontrar la regla dada por la ecuación 1.23 y luego aplicando la fórmula establecida directamente.

1. $6,\overset{\frown}{2525}.$
2. $4,\overset{\frown}{3126}.$

### Decimal periódico mixto.

Razonaremos sobre un número decimal que tenga dos cifras decimales no periódica y tres cifras decimales periódicas.

Sea $E, abcdecdecde\cdots = E, ab\overset{\frown}{cde}$, un número decimal periódico mixto, el cual, lo podemos representar como:

$$E, ab\overset{\frown}{cde} = E, ab + \frac{cde}{10^5} + \frac{cde}{10^8} + \frac{cde}{10^{11}} + \cdots.$$

Los términos siguientes al primero forman una progresión geométrica indefinida de razón $r = \dfrac{1}{10^3}$, menor que la unidad; aplicando la ecuación 1.21 se tiene:

$$\begin{aligned}
E,ab\widehat{cde} =& E,ab+\frac{\dfrac{cde}{10^5}}{1-\dfrac{1}{10^3}} = E,ab+\frac{\dfrac{cde}{10^5}}{\dfrac{10^3-1}{10^3}} = \\
=& E,ab+\frac{cde}{10^5-10^2} = \frac{E,ab\times 10^5 - E,ab\times 10^2 + cde}{100\,(10^3-1)} = \\
=& \frac{Eab000+cde-Eab}{99900} = \frac{Eabcde-Eab}{99900}.
\end{aligned}$$

Este último miembro puede traducirse en la siguiente regla:

**Resumen:**

La fracción ordinaria generatriz de una decimal periódica mixta es igual a la parte entera seguida de la no periódica y de un período, menos la parte entera seguida de la no periódica, partida por el número formado por tantos nueves como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica.

### Ejemplos: 1.11.44

1. $3,25\widehat{14} = \dfrac{32514-325}{9900} = \dfrac{32189}{9900}.$
2. $71,3\widehat{24} = \dfrac{71324-713}{990} = \dfrac{70611}{990}.$

**Ejercicios. 1.11.12**

Obtener las fracciones ordinarias generatrices de los siguientes números decimales periódicos mixtos: $18,24\widehat{712}$, $0,314\widehat{56}$ y $310,7\widehat{28}$.

### Ejemplo: 1.11.45

**La paradoja de Aquiles y la tortuga:**

El filósofo griego Zenón, natural de Elea, perteneció a la escuela de los Sofistas, que fue la primera escuela de lógicos en la historia de la filosofía. Los sofistas se complacían en presentar razonamientos falsos con apariencia de verdad; «*sofismas*». Entre estos sofismas se cuenta la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga, que se puede describir así: Aquiles el de los pies ligeros, se encuentra en una posición $A$ y ale en persecución de una lenta tortuga, que se encuentra en la posición $T$, (vea la figura 1.19) ¿Alcanzará Aquiles a la tortuga?

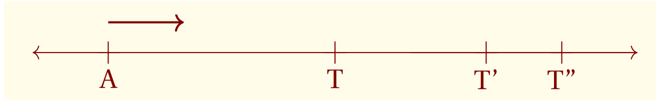



Figura 1.19: Aquiles y la Tortuga

SOLUCIÓN: Supongamos que la velocidad de Aquiles es igual a mil veces la de la tortuga.

Zenón razonaba así: Cuando Aquiles llegue a la posición $T$ ya no encontrará a la Tortuga, puesto que ella no se esta quieta; por tanto, al llegar Aquiles al punto $T$ la tortuga se encontrará en un punto $T'$; pero cuando Aquiles llegue al punto $T'$ la tortuga se ha movido al punto $T''$; así siguiendo el proceso, como cada vez que Aquiles llega al punto donde estaba la tortuga esta se habrá movido a otro punto, resultará que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Descubramos ahora donde está el sofisma: Si tomamos como unidad de tiempo el tiempo invertido por Aquiles en recorrer la distancia $AT$, en el mismo tiempo la tortuga habrá recorrido una distancia $TT'$ con una rapidez mil veces menor que la empleada por Aquiles en recorrer la distancia $AT$; por tanto, el tiempo invertido por Aquiles en recorrer el trayecto rectilíneo $TT'$será $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^3}$. Análogamente, el tiempo invertido por Aquiles en recorrer $T'T''$ será $\frac{1}{10^6}$; y así siguiendo el proceso se obtiene la siguiente sucesión de tiempos invertidos por Aquiles en recorrer las distancias, cada vez más cortas, que lo separan de la tortuga;

$$1,\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^9}, \cdots, \tag{1.24}$$

pero esta sucesión de tiempos es una progresión geométrica indefinida de razón $r = \frac{1}{10^3}$, la cual es menor que la unidad; la suma de los infinitos tiempos de 1.24, de acuerdo con la fórmula 1.21, será:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{\frac{10^3 - 1}{10^3}} = \frac{1}{10^3 - 1} = \frac{1000}{999} = 1 + \frac{1}{999}.$$

Los tiempos invertidos por Aquiles en ir alcanzando los puntos $T$, $T'$, $T''$, $\cdots$ , forman una sucesión creciente pero acotada, su cota, dada por la suma de los infinitos términos de la sucesión 1.24, es $1 + \frac{1}{999}$. Por tanto, puede asegurarse que antes de este tiempo, $\left(1 + \frac{1}{999}\right)$, Aquiles no alcanzará a la tortuga, pero transcurrido dicho tiempo sí la alcanzará; el sofisma proviene de confundir el crecimiento indefinido, pero acotado, con el crecimiento infinito.

□

### Ejercicios. 1.11.13

1. Partiendo de un triángulo equilátero de lado unidad, se unen los puntos medios de sus lados, obteniendo otro triángulo equilátero, y así se prosigue indefinidamente, uniendo cada vez los puntos medios del último triángulo obtenido. Calcular la suma de las áreas de la sucesión de triángulos.
2. En un círculo de radio unidad se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe un círculo en el cual se inscribe otro cuadrado, y así se prosigue indefinidamente. Se pide:
   *a*) Calcular la suma de las áreas de la sucesión de cuadrados.
   *b*) calcular la suma de las áreas de la sucesión de círculos.
3. Partiendo de un cubo de arista unidad se unen los puntos medios de las aristas pertenecientes a dos caras opuestas del cubo, de forma que se obtenga otro cubo; después se repite la operación con el nuevo cubo y así obtenidos. (La sucesión de cubos obtenidos constituye un encaje de Cantor en el espacio).

## 1.12 El límite de la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

En esta sección demostraremos que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente pero acotada, y en virtud del principio limitado esta tendría límite, el cual es representado por el símbolo $e$ y es uno de los límites fundamentales en la Matemáticas. Desarrollaremos la demostración en varias etapas con el fin de facilitar su comprensión.

- Aplicando la fórmula de Newton para obtener el desarrollo de un binomio elevado a la n-ésima potencia, se tiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + n\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1^{n-3}\cdot\frac{1}{n^3} + \\ + \cdots + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots[n-(n-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\cdot 1^1\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}. \quad (1.25)$$

- Simplifiquemos los términos de la fórmula 1.25, suprimiendo los factores 1, además, las fracciones que figuran en la fórmula tienen en sus numeradores productos de factores decrecientes, a partir de $n$, y en sus denominadores potencias de $n$, cuyo exponente coincide con el número de factores del denominador; así , dividiendo cada factor del numerador por un factor de $n$, contenido en la potencia del $n$ en el denominador, se llega a;

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots \\ \cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (1.26)$$

- Los factores que figuran encerrados en los paréntesis en la ecuación 1.26 son diferentes y al aumentar $n$ disminuyen los sustraendos con lo cual aumenta el valor de dichas diferencias; por tanto, al aumentar $n$, el valor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ crece, por dos razones; primero, porque aumenta el número de términos de su desarrollo, y segunda, porque los términos se hacen mayores.

  Resumen: Hasta aquí llegamos a la siguiente conclusión; que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente.

- Los paréntesis del segundo miembro de la ecuación 1.26 son menores que la unidad y por tanto son factores de contracción; por tanto, si suprimimos los paréntesis en el segundo miembro de la ecuación 1.26 obtendremos una expresión de mayor valor, o sea;

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n}. \quad (1.27)$$

- Si en el segundo miembro de la ecuación sustituimos los denominadores de las fracciones, por potencias de base 2, que sean menores que dichos denominadores; de esta manera, $1\cdot 2\cdot 3 > 2^2$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 > 2^3$, $\cdots$ , $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1) > 2^{n-2}$ y $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n > 2^{n-1}$; las fracciones aumentarán, de lo que se concluye:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (1.28)$$

- Lo términos del segundo miembro de la ecuación 1.28, a partir del segundo , forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$; sabemos que la suma de infinitos términos de una progresión de este tipo viene dada por la ecuación

1.21. Aplicando dicha fórmula al segundo miembro de la ecuación 1.28 llegamos a que , por grande que sea $n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 = 3. \quad (1.29)$$

Conclusión: Todos los términos de la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, por grande que sea $n$, son menores que 3; por tanto la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es acotada y como también es creciente entonces la sucesión es convergente en virtud del *principio del crecimiento limitado de Cantor* , este límite se representa por el símbolo $e$ (inicial del nombre de su descubridor , Euler).

El número $e$ es un número irracional . las primeras cifras de $e$ se obtienen dando valores a $n$, sucesivos en la expresión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ el cual es $e = 2{,}718281\cdots$ .

## 1.13 Algunos problemas cuya solución depende del número $e$.

Si observamos el término n-ésimo de la sucesión que define al número $e$, vemos que se compone de «Uno más un infinitésimo elevado al reciproco del infinitésimo». Se puede demostrar que todas las sucesiones cuyo término n-ésimo está construido de acuerdo con esta regla, tiene por límite $e$, es decir

Sea $\{a_n\}$ una sucesión infinitésima entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$

**Ejemplo: 1.13.46**

Hallar el límite de la sucesión $\left\{\left(\dfrac{3n+4}{3n}\right)\right\}^{\frac{3n}{4}}$ (1.30), cuando $n\to\infty$.

Solución: Puesto que $\dfrac{3n+4}{3n} = 1+\frac{4}{3n} = 1+\dfrac{1}{\frac{3n}{4}}$, la expresión 1.30 se puede escribir como $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{4}}\right)^{\frac{3n}{4}}\right\}$, por tanto $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{3n}\right)^{\frac{3n}{4}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{4}}\right)^{\frac{3n}{4}} = e.$ □

### 1.13.1. Fórmula del crecimiento continuo uniforme

Explicación del problema:

Supongamos que una sustancia crece continuamente. Puede ser cualquier tipo de material como por ejemplo; un ser vivo, la corteza de un árbol, una sustancia que se está formando por una reacción química, un capital al que se le esta acumulando sus intereses continuamente, una bola de una sustancia radioactiva, etc.

Supongamos además que la razón de crecimiento es uniforme, esto es, constantemente a lo largo del tiempo,lo cual significa que, si una unidad de sustancia se convierte en $1+r$ en un cierto periodo de tiempo, lo mismo ocurre a lo largo de todo el tiempo en que se considere el fenómeno. Esta condición solo se cumple aproximadamente en los fenómenos naturales; por ejemplo, el crecimiento de un árbol no es uniforme, pues hay unas épocas en que el crecimiento es mayor que en otras.

Ahora nos planteamos el siguiente problema: Dada una cantidad inicial de sustancia, $c$, y un período de tiempo, $t$, ($t$ unidades de tiempo), ¿cuál será la cantidad final de sustancia $C$, que se habrá formado a partir de la cantidad inicial $c$, mediante un crecimiento continuo uniforme, siendo $r$, el tanto por uno de crecimiento en la unidad de tiempo, durante $t$ unidades de tiempo?

SOLUCIÓN: Para resolver este problema, típico del Cálculo Infinitesimal, consideraremos tres etapas:

- ☛ En la primera supondremos que el crecimiento de la sustancia se va produciendo cada período de tiempo fijo, es decir, que la sustancia permanece constante hasta cumplirse el período, en cuyo instante se produce un crecimiento instantáneo, para volver a quedar constante hasta que transcurra otra vez el mismo período de tiempo, produciéndose así otro crecimiento instantáneo, al final del segundo período y así sucesivamente.
- ☛ En la segunda etapa dividiremos el período de tiempo en $n$ partes iguales y supondremos que hay crecimiento instántaneo al final de cada n-ésima parte del período inicial.
- ☛ Finalmente, en la tercera etapa, pasaremos al límite cuando $n$ tienda a $\infty$, con lo que la n-ésima parte del período considerado inicialmente tenderá a cero y la acumulación de la sustancia se efectuará por instantes, infinitamente pequeños, con lo que tendremos el crecimiento continuo.

Esta última etapa, en la que se efectúa un paso al límite, corresponde a un proceso típico del Cálculo Infinitesimal y nos permitirá obtener una fórmula del crecimiento continuo uniforme.

PRIMERA ETAPA: Supongamos que el crecimiento de la sustancia se produce al final de cada período de tiempo de manera instantánea y tomaremos este período como una unidad de tiempo. En los instantes intermedios se supone que la cantidad de sustancia permanece constante. Veamos en que se transforma una cantidad unitaria de sustancia al cabo de $t$ períodos de tiempo en los que hay acumulación. (vea la figura 1.20)

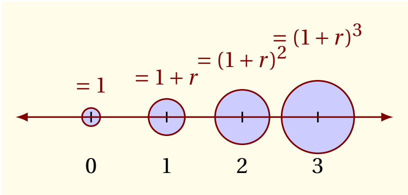



Figura 1.20: Crecimiento exponencial.

La figura 1.20 nos muestra que al iniciarse el proceso, en el instante cero, la cantidad de sustancia que hay es igual a 1; en el instante en el que se cumple el primer período la unidad de sustancia crece transformándose en $1+r$, siendo $r$ el «tanto por uno de crecimiento» uniforme, en el período considerado; en el instante que se cumple el segundo período ocurre un nuevo crecimiento, y es claro que si una unidad de sustancia se convierte en $(1+r)$, las unidades que teníamos al final del período anterior, o sea $(1+r)$, se transformarán en lo se convierte una unidad multiplicada por las unidades existentes, o sea , en $(1+r)$ en el primer período, y $(1+r)(1+r)=(1+r)^2$, en el segundo período, pues se trata de un crecimiento proporcional a la cantidad de sustancia existente, análogamente al finalizar el tercer período la sustancia crece proporcionalmente de la forma $(1+r)^2(1+t)=(1+r)^3$, así siguiendo el proceso al terminar el t-ésimo período la cantidad de sustancia se transforma en

$(1+r)^t$.

Ahora se comprende fácilmente, por la proporcionalidad aludida anteriormente que si una cantidad de sustancia se transforma en $t$ períodos de tiempo en $(1+r)^t$, $c$ unidades iniciales se transforman en el mismo tiempo en $c\cdot(1+r)^t$.

Se llega así a la fórmula del crecimiento discreto o discontinuo (efectuado a saltos).

Si representamos por $C$ la cantidad final de la sustancia, después de $t$ períodos de tiempo, se tendrá

$$C=c\cdot(1+r)^t, \tag{1.31}$$

siendo $r$ el tanto por uno de crecimiento en la unidad de tiempo considerada.

Cuando $c$ se interpreta como el capital inicial, $r$ como el tanto por uno de interés anual (lo que produce una unidad monetaria en un año), y $t$ como el número de años, la ecuación 1.31 es la famosa fórmula del interés compuesto; en este caso $C$ representa el capital final que se logra colocando un capital $c$ durante $t$ años a un interés compuesto del $r$ por uno anual, con la acumulación de interés cada año. Pero, por la explicación que hemos dado aquí se comprende que la ecuación 1.31 puede aplicarse en otros casos de crecimiento.

**SEGUNDA ETAPA:** En esta segunda etapa dividimos la unidad de tiempo de la etapa anterior en $n$ partes iguales, y supondremos que el crecimiento se produce cada n-ésima parte del período unitario de la etapa anterior.

Como $r$ representa el tanto por uno de crecimiento en una unidad de tiempo, y suponemos que el crecimiento es uniforme, es decir, proporcional al tiempo, en un período igual a un n-ésimo de la unidad, el tanto por uno de crecimiento será , Ahora, en $t$ unidades de tiempo hay $t \cdot n$ n-ésimos de unidad, o sea, $t \cdot n$ períodos de acumulación. Utilizando un razonamiento análogo al de la primera etapa, salvo que aquí los períodos de acumulación (de crecimiento de la sustancia) se producen cada n-ésimo del período de la primera etapa, y que el tanto por uno de crecimiento en este nuevo período es de $\frac{r}{n}$, y que en vez de $t$ periodos de acumulación hay $t \cdot n$, se llega a la ecuación

$$C = c \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{1.32}$$

La ecuación 1.32 corresponde a un crecimiento discontinuo, pero los crecimientos de la sustancia se producen cada n-ésima parte del tiempo de la primera etapa.

Cuando $c$ representa el capital inicial y $t$ el número de años, la ecuación 1.32 representa el interés compuesto con acumulación de intereses cada n-ésimo de año; $r$ sigue siendo el tanto por uno de interés anual. Por ejemplo, si $n = 4$, se tiene $C = c \cdot \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4t}$, que es fórmula del interés compuesto con acumulación trimestral de intereses. Se comprende fácilmente que el capital final que se logra mediante este tipo de acumulación de intereses al capital cada fracción de año, es mayor que la que se lograría con acumulación anual d intereses.

**TERCERA ETAPA:** Si suponemos ahora que $n \to \infty$, el crecimiento se producirá en cada instante, púes $\frac{1}{n} \to 0$, y tendremos el crecimiento continuo.

Entonces la ecuación 1.32 la podemos expresar de la siguiente manera:

$$C = c \cdot \left(1 + \frac{\dot{r}}{n}\right)^{nt \cdot \frac{r}{r}}. = c \cdot \left[\left(1 + \frac{\dot{r}}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{r \cdot t}. \tag{1.33}$$

Si en ecuación 1.33 pasamos al límite cuando $n \to \infty$, se observa que la expresión encerrada dentro de los corchetes se compone de «una más un infinitésimo elevado al recíproco del infinitésimo», y por tanto, dicha expresión tiende al número $e$ cuando $n \to \infty$, llegando así a la ecuación del crecimiento continuo uniforme:

$$C = c \cdot e^{rt}. \tag{1.34}$$

Para llegar a esta fórmula hemos usado la siguiente propiedad: «*El límite de una potencia es igual al límite de la base elevado al exponente de la potencia*». Esta propiedad la demostraremos más adelante.

La ecuación 1.34 es de gran importancia en física y química.

### Ejercicios. 1.13.14

1. El tanto por uno de crecimiento de la corteza de un árbol se supone que es $r = 0,08$ durante un me. Si un árbol tiene en este momento la cantidad inicial de corteza dada por $c = 0{,}7\text{m}^3$, y se supone el crecimiento continuo y uniforme, ¿ cuál será la cantidad de corteza de se árbol transcurrido 15 meses?.
2. Una sustancia química que se está produciendo en un laboratorio crece de forma uniforme continua, a razón de $0,5$ por unidad de sustancia por cada minuto. Si en este momento hay 600 gramos de sustancia formada, ¿cuál será la cantidad de la misma dentro de 40 minutos?
3. Calcular el capital final que se alcanzará colocando 1000 pesos a un interés compuesto del 6 % anual, al cabo de 100 años.

*a*) Con acumulación de interés anual.
*b*) Con acumulación de interés trimestral.
*c*) Con acumulación de interés continuo.

## 1.14 Las reglas de cálculo con infinitésimos.

Si con una o varias sucesiones infinitésimas se efectúan operaciones de adición, substracción, multiplicación, etc., ¿cuál será la naturaleza de la sucesión resultante?

El objeto de esta sección es resolver esta interrogante utilizando las reglas del cálculo con infinitésimos, que enunciaremos y demostraremos a continuación.

**Propiedad 1.14.15 Adición de infinitésimos**

La suma de un número finito de infinitésimos es infinitésimo.

Debemos demostrar el siguiente enunciado:

Si todas las sucesiones $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\} \to 0\,\{c_n\} \to 0, \cdots, \{l_n\} \to 0$, entonces $\{a_n + b_n + c_n + \cdots + l_n\} \to 0$, es decir que dado un $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, $|a_n + b_n + c_n + \cdots + l_n| < \epsilon$ para todo $n$ superior a un cierto valor.

**Demostración:**

Sea $p$ el número de sumandos. De la hipótesis deducimos que

$$\begin{cases} |a_n| < \frac{\epsilon}{p}, \text{ desde un } n \geqslant n_1 \\ |b_n| < \frac{\epsilon}{p}, \text{ desde un } n \geqslant n_2 \\ \qquad\vdots \\ |l_n| < \frac{\epsilon}{p}, \text{ desde un } n \geqslant n_p \end{cases} . \tag{1.35}$$

Tomando un valor de $n$ que sea el mayor de los valores $n_1$, $n_2, \cdots, n_p$, para dicho valor, y para todos los siguientes, se cumplirán simultáneamente todas la desigualdades de la ecuación 1.35 y podremos sumarlas miembro a miembro obteniendo;

$$|a_n| + |b_n| + \ldots + |l_n| < \underbrace{\frac{\epsilon}{p} + \frac{\epsilon}{p} + \cdots + \frac{\epsilon}{p}}_{p\ \text{veces}} = \epsilon,$$

para todo valor de $n$ superior al mayor de los valores .
Ahora bien, de acuerdo con la desigualdad triangular 1.5.2 tenemos que

$$|a_n + b_n + c_n + \cdots + l_n| \leqslant |a_n| + |b_n| + \ldots + |l_n| < \epsilon, \text{ entonces tenemos que}$$

$|a_n + b_n + c_n + \cdots + l_n| < \epsilon$ para todo $n$ siguiente al mayor de los números $n_1$, $n_2, \cdots, n_p$.

■(q.e.d)

**Ejemplo: 1.14.47**

Las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ y $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ son infinitésimas entonces $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ es también infinitésima.

Observación: Por grande que se el número $p$ de sucesiones infinitésimas, la suma de estas también es infinitésima. En cambio la suma de infinitas sucesiones infinitésimas no suele ser infinitésima, y este tipo de sucesiones se llama serie o integral.

**Propiedad 1.14.16 Multiplicación de una constante por un infinitésimo**

El producto de un número real por una sucesión infinitésima es una sucesión infinitésima.

Es decir si $\{a_n\}\to 0$ y $k\in\mathbb{R}$ entonces $\{k\cdot a_n\}\to 0$, de acuerdo con esto debemos demostrar que dado un $\epsilon>0$ cualquiera, $|k\cdot a_n|<\epsilon$ desde un número $n$ dado en adelante.

**Demostración:**

Por hipótesis tenemos que $|a_n|<\left|\frac{\epsilon}{k}\right|$ desde $n\geqslant n_1$, ahora si multiplicamos ambos miembros por $|k|$, obtenemos; $|k|\cdot|a_n|=|k\cdot a_n|<\left|\frac{\epsilon}{k}\right|\cdot|k|=\left|\frac{\epsilon}{k}\cdot k\right|=\epsilon$, de donde se obtiene que: $|k\cdot a_n|<\epsilon$ desde $n\geqslant n_1$.

■(q.e.d)

**Ejemplo: 1.14.48**

La sucesión $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ es infinitésima entonces la sucesión $\left\{\frac{1080}{n^3}\right\}$ también lo será.

Ejercicio. 1.14.6

Construya varias sucesiones infinitésimas aplicando la propiedad 1.14.16.

**Propiedad 1.14.17 Multiplicación de una sucesión acotada por un infinitésimo**

El producto de una sucesión infinitésima por otra convergente, o simplemente acotada, es también una sucesión infinitésima.

Antes de empezar la demostración debemos observar que una sucesión convergente es acotada, pues todos sus términos, a partir de una dado están en un entorno de su punto límite, y los que no están forman un conjunto finito. Por lo que bastará hacer la demostración para una sucesión acotada.

Note que una sucesión puede ser acotada y no tener límite, es decir, que no es convergente; pero, toda sucesión convergente es acotada. Por ejemplo la sucesión $(-1)^n\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ es acotada, pero no es convergente.

De acuerdo con lo anterior la propiedad 1.14.17, la podemos escribir de la siguiente forma: Si $\{a_n\}\to 0$ y $|b_n|<k$ para todo $n$, entonces $\{a_n\cdot b_n\}\to 0$. Y esta es la que vamos a demostrar.

**Demostración:**

Hay que probar que dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, $|a_n \cdot b_n| < \epsilon$ para todo $n$ siguiente a un cierto valor dado.
Ahora se cumple, por ser $\{a_n\}$ infinitésima que, $|a_n| < \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{k}$ (1.36), desde un $n$ en adelante, y además se cumple $|b_n| < k$, (1.37). Si multiplicamos miembro a miembro las ecuaciones 1.36 y 1.37 obtenemos $|a_n| \cdot |b_n| = |a_n \cdot b_n| < \frac{\epsilon}{k} \cdot k = \epsilon$,

■(q.e.d)

**Ejercicio. 1.14.7**

Construya varias sucesiones infinitésimas aplicando la propiedad 1.14.17.

**Observación:** El producto de un infinitésimo por una sucesión no acotada, la cual representaremos simbólicamente por $0 \cdot \infty$, no cumple con la propiedad 1.14.17. En este caso el resultado puede ser un infinitésimo o una sucesión convergente, una sucesión divergente o también una sucesión oscilante; este resultado depende de la forma particular de la sucesión infinitésima y de la sucesión divergente que se multiplican. Por este motivo se dice que los límites de la forma $0 \cdot \infty$ son «indeterminadas». Aquí la palabra indeterminada significa que, con el solo conocimiento de que un factor es infinitésimo y el otro divergente, no se puede determinar la naturaleza del producto; pero conocida la forma del infinitésimo y de la sucesión convergente es posible, con un análisis particular, determinar el límite del producto.

## Ejemplos: 1.14.49

1. $\left\{\frac{1}{n^2} \cdot n\right\} \to 0$.
2. $\left\{\frac{1}{n^2+1} \cdot \left(n^2+1\right)\right\} \to 1$.
3. $\left\{\frac{1}{n} \cdot \left(n^2+1\right)\right\} \to \infty$.
4. $\left\{\frac{(-1)^n}{n+3} \cdot (n+3)\right\}$ es oscilante.

**Propiedad 1.14.18 Multiplicación de una sucesión acotada por un infinitésimo**

Si la base de una potencia es una sucesión infinitésima de rango positivo y el exponente es un número positivo, entonces la Sucesión potencia es infinitésima.

Para demostrar esta propiedad la expresaremos simbólicamente de la forma: Si $\{a_n\} \to 0$, $a_n > 0$ y $\lambda > 0$, entonces $\left\{a_n^\lambda\right\} \to 0$.

**Demostración:**

Tenemos que demostrar que $\left\{a_n^\lambda\right\} \to 0$, es decir que $\left|a_n^\lambda\right| < \epsilon$, para cualquier $\epsilon > 0$; y para probarlo nos basaremos en la hipótesis: $\{a_n\} \to 0$ y por tanto $|a_n|$ será mayor que cualquier cantidad positiva, por muy pequeña que esta sea, a partir de un $n$; en particular podemos decir que $|a_n| < \epsilon^{\frac{1}{\lambda}}$, (1.38), a partir de un valor $n$.
Ahora si elevamos la ecuación 1.38, a $n$, se tiene:
$|a_n|^\lambda = \left|a_n^\lambda\right| < \left(\epsilon^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda = \epsilon$, o sea que $\left|a_n^\lambda\right| < \epsilon$, a partir de un $n$ dado.

■(q.e.d)

**Observación:** Como $\lambda \in \mathbb{R}^+$, podría ser un número racional, por lo que en la propiedad 1.14.18 está incluida la radicación, como por ejemplo si $\lambda = \frac{1}{2}$, entonces podemos decir que si $\{a_n\} \to 0$, se tiene que $\left\{\sqrt{a_n}\right\} \to 0$.

## 1.15 Las reglas de cálculo con sucesiones convergentes.

## 1.16 Límites indeterminados.

## 1.17 Infinitésimos e infinitos equivalentes.

## 1.18 Principio de sustitución.