CAPÍTULO

1 Teoría de probabilidades

1.1 Introducción

Si el único propósito del investigador es describir los resultados de un experimento concreto, los métodos descriptivos analizados en los capítulos anteriores pueden considerarse suficientes. No obstante, si lo que se pretende es utilizar la información obtenida para extraer conclusiones generales sobre todos aquellos objetos del tipo de los que han sido estudiados, entonces estos métodos constituyen sólo el principio del análisis, y debe recurrirse a métodos de inferencia estadística, los cuales implican el uso de una de las ramas de la matemática, llamada teoría de la probabilidad.

Analizaremos en este párrafo la noción de probabilidad y la terminología subyacente a esta área de las matemáticas, ya que la probabilidad constituye por sí misma un concepto básico que refleja su relación con la faceta del mundo exterior que pretende estudiar: los fenómenos aleatorios, los cuales obedecen unas ciertas reglas de comportamiento.

El concepto de probabilidad es importante cuando se estudian procesos físicos, biológicos, químicos, sociales que generan observaciones que no es fácil o factible predecir con exactitud, pero se puede determinar la frecuencia relativa con que ocurren con cierta precisión, si realizamos un gran número de observaciones.

Los eventos que poseen esta propiedad se denominan eventos aleatorios estocásticos y la frecuencia relativa con que ocurren es una interpretación intuitiva de la probabilidad, pero no nos proporciona una definición exacta de ella.

En su definición y en sus aplicaciones nos dedicaremos en este capítulo.

1.2 Experimentos y sucesos aleatorios

Definición 1.1

Diremos que un experimento es aleatorio si se verifican las siguientes condiciones,\

1. Se puede repetir indefinidamente, siempre con las mismas condiciones.
2. Antes de realizarlo no se puede predecir el resultado.
3. El resultado "e" que se obtiene pertenece a un conjunto de resultados posibles conocido previamente el cual llamaremos espacio muestral y lo denotaremos con la letra Ω *o* S. Los elementos del espacio muestral se denominan sucesos elementales.

Es decir si $e_1, e_2 \in S \Longrightarrow e_1, e_2$ son sucesos elementales o puntos muestrales. En otras palabras: Un suceso es elemental si su ocurrencia o no ocurrencia no está relacionada con ningún otro suceso.

Cualquier subconjunto A de S se denomina suceso o evento aleatorio.

El espacio muestral puede ser de dos tipos:

- Discreto si está formado por un conjunto finito o numerable de resultados.
- Continuo si está compuesto por un conjunto no numerable de elementos.

Definición 1.2

[Suceso determinista]Se denomina experimento determinista a el experimento que al realizarlo varias veces con las mismas condiciones iniciales obtenemos siempre el mismo resultado

Ejemplo: 1.2.1

Si dejamos caer dos cuerpos de diferentes masas y a la misma altura en el vacío, los dos cuerpos caerán al mismo tiempo.

Cuando en un experimento no se puede predecir el resultado final, decimos que el experimento es aleatorio

Ejemplo: 1.2.2

En una ruleta legal no se sabe que número va a salir

1.2.1. Tipos de eventos

1. Evento seguro es aquel que siempre se verifica después del experimento aleatorio, es decir S.
2. Evento imposible es aquel que nunca se verifica como resultado del experimento aleatorio y como un evento debe ser un subconjunto de S el suceso imposible es el conjunto vacío ϕ.
3. Evento complementario. Se denomina suceso complementario de un suceso A al que se verifica si no se verifica A es decir El complemento de A con respecto a S es el conjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotaremos el complemento del conjunto A como $A^{'}$

Ejemplo: 1.2.3

Si realizamos el experimento aleatorio de lanzar un dado al aire. Determinar el conjunto de eventos posibles

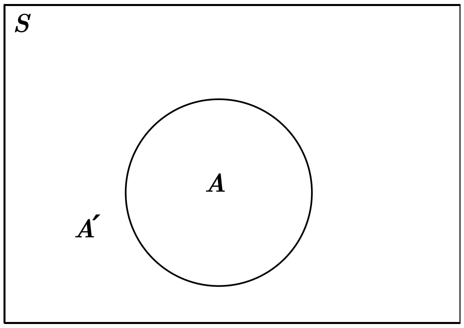


Figura 1.1: Evento complementario

Solución

En este caso tenemos el espacio muestral es
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
y los sucesos elementales son
$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

El conjunto de eventos posibles es $\mathcal{A} = \begin{cases} \phi \text{ suceso imposible} \\ S \text{ suceso seguro} \\ \{1, 2, 3\} \\ \{4, 5\} \\ \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3\}' \\ \vdots \end{cases}$

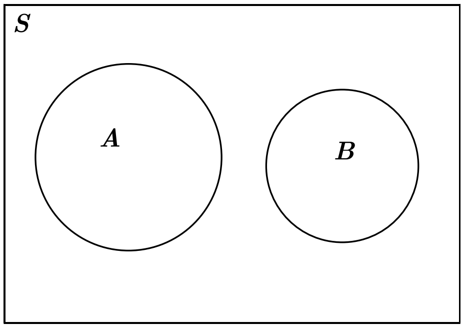
1.3 Operaciones básicas con eventos aleatorios

Como los eventos son en realidad conjuntos podemos aplicarles el álgebra de conjuntos tratada en su curso de álgebra elemental visto en I semestre.

1. Intersección. La intersección de dos eventos A y $B \subset S$ que se representa $A \cap B$, es el evento que contiene a todos los sucesos elementales comunes de A y B, es decir

$$A \cap B = \{e \in S : e \in A \wedge e \in B\}$$

2. Dos eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos si
$A \cap B = \phi$, esto es si A y $B \subset S$ no tienen elementos comunes.



Eventos disjuntos

3. La unión. Dados dos sucesos aleatorios A y B, se denomina suceso unión de A y $B \subset S$ al evento formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a A o bien a B, es decir

$$A \cup B = \{e \in S : e \in A \vee e \in B\}$$

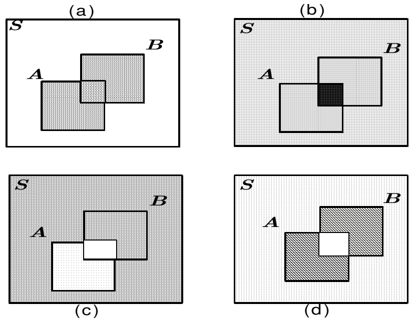
4. Dados dos sucesos aleatorios $A, B \subset S$, se llama diferencia de A y B, y se representa $A - B$ o $A \backslash B$, al suceso aleatorio formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a A, pero no a B, es decir

$$A \backslash B = \{e \in S : e \in A \wedge e \notin B\} = A \cap B'$$

Donde a B' se le llama complemento de B y se define $S \backslash B$

5. Diferencia simétrica. Si $A, B \subset S$ se denomina evento diferencia simétrica de A y B y se denota por $A \triangle B$ al evento formado por todos los sucesos elementales que pertenecen a A y no a B, y los que están en B y no en A es decir,

$$A \triangle B = \{e \in S : e \in (A \cup B) \wedge e \notin (A \cap B)\}$$



Dados dos eventos $A, B \subset S$ se presenta en: (a) $A \cup B$; en (b) $A \cap B$; en (c) $A - B$; en (d) $A \triangle B$.

Hay algunas propiedades importantes que valen la pena recordar

- Leyes de Morgan

i $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ii $(A \cap B)' = A' \cup B'$

- $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $A \cap A' = \phi$

- $A \cap B' = A \backslash B$
- $A' = S \backslash A$
- $A \cup A' = S$

Definición 1.3

Sea $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ una serie de eventos se tiene,
○ El evento formado por todos los sucesos comunes y no comunes de la serie es,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$$

○ El evento formado por los sucesos comunes entre los eventos de la serie es el evento,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n = \cap_{i=1}^{n} A_i$$

Definición 1.4

Sea A un conjunto finito o enumerable, Se le denomina $n\left(A\right)$, al cardinal de A, es decir el número de elementos que posee el conjunto A.

1.4 Probabilidad

1.4.1. Probabilidad estocástica

En los experimentos aleatorios observamos que si conservamos las mismas condiciones iniciales al aumentar el números de ensayos la frecuencia relativa con la que ocurre el suceso A es,

$$f_n\left(A\right) = \frac{número\, de\, veces\, que\, ocurre\, A}{n}$$

y tiende a converger hacia un valor, el cual se denomina probabilidad de A

$$P\left(A\right) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(A\right)$$

Esta noción de probabilidad no se puede aplicar en la práctica ya que:

- Se requiere realizar un número infinito de veces el experimento para calcular la probabilidad
- Los experimentos aleatorios a veces no pueden ser realizados en la práctica por ejemplo. Si se quiere saber cuantas personas mueren al fumigar con un tóxico

1.4.2. Probabilidad de laplace

Si un experimento cualquiera se puede repetir obteniendo un número finito de resultados posibles y no existe ninguna razón para pensar que un resultado tiene privilegios sobre otro, se calcula la probabilidad del suceso A según la regla de Laplace

$$P\left(A\right)=\frac{n\acute{u}mero\,de\,casos\,favorables\,para\,A}{n\acute{u}mero\,de\,casos\,posibles}=\frac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)}$$

Ejemplo: 1.4.4

Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par

Solución

El espacio muestral es $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ llamaremos A al suceso que da como resultado un número par el lanzamiento del dado, $A=\{2,4,6\}$, si suponemos que el dado es legal, es decir ninguna cara tiene privilegio sobre otra para salir, entonces

$$P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

1.4.3. Definición axiomática de la probabilidad

Como en toda rama de las matemáticas debemos establecer una serie de axiomas y definiciones básicas

Definición 1.5

Sea $\mathcal{A}$ una clase no vacía formada por subconjuntos de S, diremos que la clase $\mathcal{A}$ es un $\sigma-\acute{a}lgebra$ de eventos si los eventos complementarios de cada elemento de $\mathcal{A}$ está también en $\mathcal{A}$ y además las uniones numerables de eventos de $\mathcal{A}$ es elemento de $\mathcal{A}$ es decir.

Se dice que una clase $\mathcal{A}$ no vacía de conjuntos S de es una $\sigma-\acute{a}lgebra$ si y sólo si cumple las siguientes propiedades

$$S\in\mathcal{A}$$

$$\forall A\in\mathcal{A}\Longrightarrow A'\in\mathcal{A}$$

$$\forall A_1,A_2,A_3,\cdots\in\mathcal{A}\Longrightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$$

Definición 1.6

Definición axiomática de probabilidad

Dado un espacio muestral S, y una $\sigma-\acute{a}lgebra$ de sucesos $\mathcal{A}$ sobre él, diremos que P es una probabilidad sobre $\mathcal{A}$ si cumple las siguientes propiedades

A$_1$ La probabilidad es una función definida sobre $\mathcal{A}$, que toma solo valores positivos comprendidos entre 0 y 1, es decir

$$\begin{array}{rcl} P:\mathcal{A} & \rightarrow & [0,1]\subset IR \\ A\in\mathcal{A} & \mapsto & 1\geq P\left(A\right)\geq 0 \end{array}$$

A$_2$ La probabilidad del suceso seguro es 1

$$P\left(S\right) = 1$$

A$_3$ Para cualquier sucesión infinita $A_1, A_2, A_3, \cdots$ de sucesos disjuntos de $\mathcal{A}$ se tiene que la probabilidad de el evento $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es la serie infinita de las probabilidades, es decir

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

Ejemplo: 1.4.5

Cuando el conjunto S formado por todos los posibles resultados de un experimento es finito o infinito enumerable podemos considerar que la clase $\mathcal{A}$ es el conjunto denominado **partes de** S

$$\mathbb{P}\left(S\right) = \{A|A \subseteq S\}$$

el cual es un $\sigma - \acute{a}lgebra$.

Ejemplo: 1.4.6

Consideremos el experimento de lanzamiento de un dado, entonces

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$\mathbb{P}\left(S\right) = \{\phi, S, \{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, ...\}$$

Es decir $\mathbb{P}\left(S\right)$ tiene $2^6 = 64$ elementos

Ejemplo: 1.4.7

Cuando S es infinito no enumerable por ejemplo queremos realizar el experimento de esperar el tiempo necesario para que el polietileno se desintegre naturalmente, observamos que $S = I\,R+$ y consideramos $\mathcal{A}$ como el conjunto de intervalos abiertos o cerrados, y sus uniones finitas, es decir

$$\mathcal{A} = \{\phi, I\,R^{+}, [2,2], (2,3)\,, (4,5] \cup [8, +\infty), ...\}$$

De acuerdo con el nivel de estas notas no trabajaremos con σ-álgebra diferentes a las indicadas en los ejemplos 3.6 y 3.7[1], por lo que de aquí en adelante suponemos que estas son las clases $\mathcal{A}$

[1] El lector interesado en σ-álgebra puede remitirse a Real Analysis probability de Robert B. Ash

falta teorema del vacio

Prueba

consideremos la sucesión infinita de eventos $A_1, A_2, A_3, \cdots \in \mathcal{A}$ los cuales son todos vacíos y además disjuntos ya que $\phi \cap \phi = \phi$, de acuerdo con esto tenemos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$ al aplicar A$_3$ tenemos

$$P(\phi) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

y el único real que cumple esta propiedad es el cero por lo que $P(\phi) = 0$ ■(q.e.d)

Teorema 1.1

ara cualquier sucesión finita de n eventos disjuntos $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \in \mathcal{A}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Prueba

Consideremos la sucesión infinita de eventos $A_1, A_2, A_3, \cdots \in \mathcal{A}$ en los cuales hay $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ eventos disjuntos y los $A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, \cdots$ son vacíos. Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Por A$_3$ tenemos

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) \\ &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \end{aligned}$$

■(q.e.d)

Teorema 1.2

ara cualquier suceso $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $P(A') = 1 - P(A)$

Prueba

Como $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A' \in \mathcal{A}$ y además $A \cup A' = S$ y $P(S) = 1$ tenemos por el teorema 4 que

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(S)$$

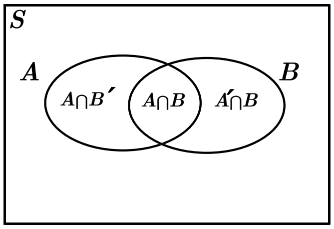


Figura 1.2: aaaa

pero de acuerdo con A$_2$ $P\,(S) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} P\,(A) + P\,(A') &= 1 \\ P\,(A') &= 1 - P\,(A) \end{aligned}$$

■(q.e.d)

Teorema 1.3

i $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $P\,(B) \geq P\,(A)$

Prueba

Como se ilustra en la fig 3.1 El evento B lo podemos escribir como $B = A \cup (B \cap A')$ entonces

$$\begin{aligned} P\,(B) &= P\,(A \cup (B \cap A')) \\ &= P\,(A) + P\,(B \cap A') \end{aligned}$$

y del A$_1$ $P\,(B \cap A') \geq 0$ de lo que se deduce $P\,(B) \geq P\,(A)$ ■(q.e.d)

Para dos sucesos cualesquiera $A, B \subset \mathcal{A}$ cualesquiera

$$P\,(A \cup B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B)$$

Como se ilustra en la fig 3.2

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

como los eventos $(A' \cap B)\,, (A \cap B')$ y $(A \cap B)$ son disjuntos podemos aplicar el teorema 3.1

$$\begin{aligned} P\,(A \cup B) &= \\ & P\,(A \cap B') + P\,(A \cap B) + P\,(A' \cap B) \end{aligned}$$

pero en la gráfica se observa que

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B\acute{}) \cup (A \cap B) \\ &y \\ B &= (A \cap B) \cup (A\acute{} \cap B) \end{aligned}$$

al aplicar el teorema 5 queda

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

al despejar y sustituir obtenemos lo que queremos

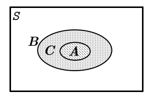


Figura 3.1 $B = A \cup (B \cap A')$ donde $C = (B \cap A')$

$B = A \cup (B \cap A')$ donde $C =$

Teorema 1.4

ara dos sucesos $A, B \subset \mathcal{A}$ cualesquiera

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como se ilustra en la fig 3.2

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

como los eventos $(A' \cap B), (A \cap B')$ y $(A \cap B)$ son disjuntos podemos aplicar el teorema 3.1

$$P(A \cup B) =$$
$$P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

pero en la gráfica se observa que

$$A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$
$$y$$
$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

al aplicar el teorema 5 queda

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

al despejar y sustituir obtenemos lo que queremos

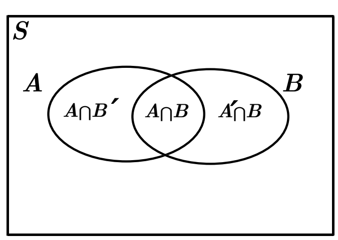


Figura 3.2 Partición de $A \cup B$

Teorema 1.5

ean $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \in \mathcal{A}$ una sucesión finita de eventos se tiene

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{i<j<r=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \\ + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Ejemplo: 1.4.8

Un estudiante de clase puede ser hombre o mujer. Si la probabilidad de que un hombre sea seleccionado es 0.3 ¿Cuál es la probabilidad de que sea seleccionada una mujer?

Solución

Sea A el evento de que se seleccione un hombre de la clase y sea B el evento de seleccionar una mujer, entonces es obvio que $S = A \cup B$, y además $A \cap B = \phi$, aplicando el teorema 7

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

y de los teorema 4 y A_2 obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= P(A) + P(B) \\ 1 &= 0,3 + P(B) \\ P(B) &= 0,7 \end{aligned}$$

Ejemplo: 1.4.9

Se selecciona una bola de una urna que contiene bolas rojas, blancas, azules, amarillas y verdes. Si la probabilidad de seleccionar una bola roja es $\frac{1}{5}$ y la de seleccionar una blanca es $\frac{2}{5}$ ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una bola azul, amarilla o blanca?

Solución

Sean $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ los eventos de seleccionar de la urna una bola roja, blanca, azul, amarilla y verde respectivamente. Nos dicen que $P(A_1) = \frac{1}{5}$ y $P(A_2) = \frac{2}{5}$, entonces

$$P(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = P(B) =?$$

Como los eventos son disjuntos

$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$$

y por A_2 y el th.3

$$1 = P(A_1) + P(A_2) + P(B)$$
$$P(B) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Ejemplo: 1.4.10

Si la probabilidad de que un estudiante A pierda un examen de estadística es de 0,5, la probabilidad de que un estudiante B pierda el mismo examen es de 0,2 y la probabilidad de que ambos pierdan el examen es de 0,1

1. *¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de estos estudiantes gane el examen?*
2. *¿Cuál es la probabilidad de de que ninguno de los dos pierda el examen?*

Solución

Sea A el evento que el estudiante A pierda el examen y sea B el evento de que el estudiante B pierda el examen de estadística

Nos *piden la probabilidad de que uno de los dos gane el examen pero no los dos, es decir si C es este evento*

$$P(C) = P(A') + P(B') - P(A' \cap B')$$
$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5$$
$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$$
$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$
$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

Pero

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6$$
$$P(A' \cap B') = 0,4$$

entonces

$$P(C) = 0,5 + 0,8 - 0,4 = 0,9$$

$P(A' \cap B') = 0,4$

1.5 Técnica para la enumeración de puntos muestrales

Cuando S o cualquiera de sus subconjuntos tiene muchos eventos elementales describirlo por extensión para determinar los casos favorables y casos posibles se hace engorroso por lo que en esta sección utilizaremos el análisis combinatorio para determinar los casos favorables y posibles de una manera más simple.

1.5.1. Diagrama de árbol

En experimentos simples es muy útil utilizar un método llamado diagrama de árbol el cual explicaré con un ejemplo.

Ejemplo: 1.5.11

Si se lanza una moneda legal tres veces ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera y la ultima lanzada salga cara?.

Solución

En el diagrama observamos que para el primer lanzamiento hay dos posibilidades sello (S) y cara (C) en el segundo lanzamiento para cada posibilidad anterior hay dos nuevas posibilidades y en el tercer se da lo mismo por lo que al final hay 8 casos posibles y dos casos favorables de acuerdo con Laplace, entonces si A es el evento que sale cara en el primer y último lanzamiento

$$P\left(A\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

/media/antalcides/Antalcides-EXT1/est/bak/est/g11ir300.pdf

Diagrama de árbol

Teorema 1.6

onsidérese un experimento que tiene las dos características siguientes

- *El experimento se realiza en dos partes*
- *La primera parte del experimento tiene m resultados posibles $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ independientemente del resultado x_i obtenido la segunda parte del experimento tiene n resultados posibles $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$.*
  Cada resultado del espacio muestral S del experimento será por tanto, un par de la forma (x_i, y_j) es decir

$$S = \{(x_i, y_j) \,|i = 1, 2, 3, \cdots m; j = 1, 2, 3 \cdots n\}$$
$$n\left(S\right) = mn$$

Este teorema puede generalizarse de la siguiente forma

Si un experimento puede realizarse con las siguientes características

- El experimento se realiza en k partes
- la primera parte puede realizarse con n_1 resultados posibles $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots, x_{1n_1}$ e independientemente del resultado x_{1i} se pueden realizar la segunda parte con n_2 resultados posibles $x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots, x_{2n_2}$ y así sucesivamente cada parte del experimento puede realizarse de n_l formas, $l = 1, 2, 3, \cdots k$ obteniéndose un espacio muestral de la forma

$$S = \{(x_{1i}, x_{2j}, x_{3r}, \cdots, x_{km})\}$$
$$n(S) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k$$

Ahora enunciamos este teorema de una manera diferente.

Teorema 1.7 Fundamental

Si una acción puede efectuarse de una de p maneras diferentes, y si después de que esta acción ha sido efectuada de una de esas maneras, una segunda acción puede efectuarse de una de q maneras diferentes, entonces el número total de maneras diferentes en que las acciones pueden efectuarse siguiendo el orden mencionado es pq.

Si una acción puede efectuarse de p maneras diferentes, y una segunda acción puede efectuarse de q maneras diferentes, y una tercera acción puede efectuarse de r maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número total de maneras diferentes en que pueden realizarse todas estas acciones en el orden mencionado es pqr...

Si r acciones pueden efectuarse sucesivamente de p maneras diferentes cada una, entonces el número total de maneras diferentes en que pueden efectuarse las r acciones sucesivamente es p^r.

1.6 Permutaciones

Definición 1.7

Una permutación es un arreglo de objetos distintos de tal manera que una permutación difiere de otra si el orden del arreglo o su contenido difieren

Conviene observar que el orden es una característica de especial importancia en una permutación. Cuando cambiamos el orden de los elementos de este arreglo, se dice que permutamos dichos elementos

1.6.1. Muestreo sin reemplazo

Consideremos un experimento en el cual se selecciona un objeto de n objetos distintos, y luego se selecciona un segundo objeto de los $n-1$ objetos restantes, y así sucesivamente hasta seleccionar el último objeto Este proceso se llama muestreo sin reemplazo de acuerdo con el teorema anterior los n objetos se pueden seleccionar de $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ formas diferentes Ahora si no se escogen todos los objetos, si no k objetos, los k

objetos se pueden seleccionar

$$p_{n,k} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad r \leq n$$
$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$p_{n,n} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 1 = n!$$

Ejemplo: 1.6.12

Supongamos que se necesitan dos representantes del grupo 02 de estadística I-ad para asistir a un congreso

Solución

Como el grupo 02 de estadística tiene 40 alumnos y se necesitan dos, eso quiere decir que que escogen 2 de 40

$$p_{40,2} = \frac{40!}{(40-2)!} = 1560$$

Ejemplo: 1.6.13

Se necesita colocar 7 libros en un estante ¿De cuantas formas posibles se pueden colocar?

Solución

Como se escogerán 7 de 7 entonces

$$p_{7,7} = 7! = 5040$$

1.6.2. Muestreo con reemplazo

Si suponemos que tenemos una urna con n objetos numerados del 1 al n y se selecciona un objeto de la urna y se anota su número, y luego se coloca nuevamente en la urna, luego se selecciona otro objeto el cual pude ser el primero y así sucesivamente se pueden seleccionar tantos objetos como se quieran. Este proceso se denomina muestreo con reemplazo.

Si queremos realizar un total de k selecciones distintas, se nos presentan dos posibilidades

- Si $k > n$, es imposible ya que hay n números posibles y no están repetidos.
- Si $n \geq k$ Entonces existen n^k posibles formas de escoger los k objetos

Ejemplo: 1.6.14

Si se colocan al azar 12 bolas en 20 urnas, ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna urna contenga más de una bola

Solución

Como hay 20 urnas y 12 bolas entonces podemos escoger 12 de 20 posibilidades de colocar las bolas, pero hay 20^{12}, posibles formas de escoger una urna con una bola

$$p = \frac{20!}{8! * 20^{12}} = \frac{235\,702\,467}{16\,000\,000\,000}$$

Coeficiente multinomial

El número de formas en las que se pueden asignar n objetos distintos de k grupos diferentes que contienen $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$ objetos respectivamente es

$$N = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!} = \left(\begin{array}{c} n \\ n_1 n_2 n_3 \cdots n_k \end{array} \right)$$
$$\text{donde } n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

1.6.3. Combinación

Una combinación es un arreglo de objetos distintos donde una combinación difiere de otra si difiere el contenido del arreglo. Si nos interesa determinar el número de combinaciones cuando en n objetos distintos deben seleccionarse r a la vez entonces

$$C_{n,r} = \frac{p_{n,r}}{r!} = \left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) \quad r \leq n$$

ya que el numerador es el número de permutaciones al escoger r objetos de n posibles, pero hay que descontar los casos en que el orden determina para la combinación el mismo elemento, que es exactamente $r!$.

1.6.3.1. Propiedades

- $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = 1$
- $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right)$
- $C_{n,r} = C_{n-1,r-1} + C_{n-1,r}$

- El número de maneras en que mn objetos diferentes pueden dividirse en m grupos de n objetos cada uno, en donde el orden de los objetos en cada grupo no se toma en consideración, es
$\frac{(mn)!}{(n!)^m}$, considerando el orden en que se forman los grupos,
$\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$, sin considerar el orden en que se forman los grupos.

Ejemplo: 1.6.15

Calcular el número de maneras distintas en que 15 libros diferentes pueden dividirse en tres grupos de 9, 4 y 2 libros respectivamente.

Solución

En este caso

$$N_m = \frac{15!}{9!4!2!} = 75075.$$

Ejemplo: 1.6.16

Se tiene una baraja[a] de 52 cartas diferentes.

[a] Muchos problemas de probabilidad están relacionados con cartas, y aunque algunos estudiantes están relacionados con este juego, lo describiremos brevemente para que los problemas sean entendidos con claridad.
Una baraja ordinaria tiene 52 cartas divididas en cuatro grupos o palos con trece cartas cada uno. Los nombres de los palos y sus colores son los siguientes:
Bastos(negros), diamantes(rojos), corazones(rojos) y espadas(negras.
Cada palo consiste de 9 cartas numeradas del 2 al 10 inclusive y 4 cartas más llamadas as, rey, reina y sota (ordenadas en valor descendente). La expresión de que una carta se escoge o saca al azar, significa que la carta se toma de una baraja bien mezclada del modo que todas las cartas tengan igual oportunidad de ser escogida.

Encontrar

1. El número de maneras en que pueden repartirse las cuatro manos de 13 cartas a cuatro jugadores de bridge
2. El número de maneras en que las 52 cartas pueden dividirse en cuatro grupos de 13 cartas cada uno.

1. En el juego de bridge cada distribución diferente de las manos entre los jugadores constituye una división diferente. Por tanto, en este caso, los grupos aparecen permutados, y por lo tanto, el número de maneras diferentes es

$$\frac{52!}{(13!)^4} =$$

$$53\,644\,737\,765\,488\,792\,839\,237\,440\,000$$

2. En este caso, no importa el orden de los grupos, así el número de maneras es

$$\frac{52!}{(13!)^4\,4!} = 2235\,197\,406\,895\,366\,368\,301\,560\,000$$

Ejemplo: 1.6.17

Una moneda se tira 10 veces. Calcular la probabilidad de que aparezcan exactamente 7 caras

Solución

Ya que la moneda tiene dos formas diferentes de aparecer en cada tiro, en 10 sería 2^{10} formas. Y de las 10 caras vamos a seleccionar 7 caras, por lo que serían $C_{10,7}$ formas diferentes, por lo que la probabilidad buscada es

$$P = \frac{\binom{10}{7}}{2^{10}} = \frac{15}{128}$$

Ejemplo: 1.6.18

Si se sacan 3 cartas al azar de una baraja de 52 cartas, calcular la probabilidad de que sean as, rey y reina.

Solución

Se pueden seleccionar 3 cartas al azar entre 52, por lo que hay $C_{52,3}$ formas diferentes. Y como hay 4palos y en cada palo hay un as, un rey y una reina, entonces resulta que estas barajas pueden obtenerse de $4 \times 4 \times 4$ formas diferentes .Por lo que la probabilidad buscada es

$$\frac{4^3}{\binom{52}{3}} = \frac{16}{5525} = 2.895\,9 \times 10^{-3}$$

Ejemplo: 1.6.19

De una bolsa que que contiene 4 bolas blancas, 2 negras y 3 rojas, se sacan 5 al azar. Calcular la probabilidad de que 2 sean blancas 1 negra y 2 rojas.

Solución

Del total de $4+2+3=9$ bolas se pueden seleccionar 5 bolas en $C_{9,5}$ formas diferentes. Ahora entre las 4 bolas blancas 2 de ellas pueden seleccionarse $C_{4,2}$, entre las 2 blancas $C_{2,1}$ y entre las 3 rojas $C_{3,2}$ formas por lo que el total de casos favorables es $C_{4,2}C_{2,1}C_{3,2}$, así

$$P = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{9}{5}} = \frac{2}{7}$$

1.7 Probabilidad condicionada e independencia de eventos

Definición 1.8

Sean $A, B \in \mathcal{A}$ y sea B un evento de probabilidad no nula para el evento A, llamamos probabilidad condicionada de A a B a la cantidad que representamos $P(A|B)$ y que definimos

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

la cantidad $P(A|B)$ se lee la probabilidad de A dada la ocurrencia de B

Ejemplo: 1.7.20

Se lanza al aire un dado ¿Cuál es la probabilidad de que salga el número 4? si sabemos que el resultado ha sido par

Solución

Sea $A = \{4\}$, entonces $P(A) = \frac{1}{6}$,
$B = \{2,4,6\}$, entonces $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
por tanto

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Definición 1.9

Sean $A, B \in \mathcal{A}$ dos eventos de probabilidad no nula se dice que son independientes si y solo si

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

Ejemplo: 1.7.21

Para cierta población de empleados, los porcentajes de quienes aprueban un examen de aptitud para un trabajo, especificados según el sexo, se muestran en la tabla. Es decir todas las personas que presentan el examen el 24 % cae en la categoría de hombre aprobado, el 16 % en la categoría de de hombre reprobado, y así sucesivamente. Se selecciona al azar un empleado de esta población. Sea A el evento de que el empleado aprueba el examen y H el evento de que se selecciona un hombre ¿Son independientes los eventos A y H ?

	sexo		
Resultado	Mujer(M)	Hombre(H)	Total
Aprueba (A)	24	36	60
Reprueba(A')	16	24	40
Total	40	60	100

Solución

Determinemos

$$
\begin{aligned}
P\left(A|H\right) &= \\
&= \text{------} \\
&= \text{------} \\
&= \text{-------}
\end{aligned}
$$

1.7.1. Reglas multiplicativas

Teorema 1.8

ea $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \in \mathcal{A}$ una sucesión de eventos aleatorios, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2|A_1\right) P\left(A_3|A_1 A_2\right) \cdots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Definición 1.10

Se dice que una colección de eventos independientes $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \in \mathcal{A}$ es un evento exhaustivo y excluyente de sucesos, si se verifican las siguientes condiciones

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

$$A_i \cap A_j = \phi \qquad \forall i \neq j$$

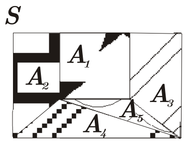


Figura 1.3: A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 forman un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos

Teorema 1.9

ea $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \in \mathcal{A}$ un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos. Entonces

$$\forall B \subset \mathcal{A}, \Longrightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)$$

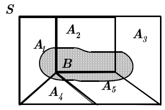


Figura 1.4: Si A_1, A_2, A_3, A_4 forman un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos , podemos calcular la probabilidad de B a partir de las cantidades $P(B \cap A_i)$

Prueba

Como $B \subset S$ podemos decir

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i) \end{aligned}$$

Ejemplo: 1.7.22

Se tienen dos urnas, y cada una de ellas contiene un número diferente de bolas blancas y rojas:

■(q.e.d)

- *primera urna U_1: 3 bolas blancas y 2 rojas*
- *Segunda urna U_2 4 bolas blancas y 2 rojas*

Se realiza el siguiente experimento :

Se tira una moneda al aire y si sale cara se elige una bola de la primera urna y si sale sello se escoge una bola de la segunda urna.

¿Cuál es la probabilidad de que salga una bola blanca?

Solución

La situación que tenemos la podemos esquematizar de la siguiente manera
Si B: es el evento de sacar una bola blanca y R : el evento de sacar una bola roja, entonces

$$P(U_1) = \frac{1}{2}$$
$$P(B|U_1) = \frac{3}{5}$$
$$P(U_2) = \frac{1}{2}$$
$$P(B|U_2) = \frac{4}{6}$$

Como U_1 y U_2 forman un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos aplicando el teorema de la probabilidad total podemos afirmar que,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|U_1)\,P(U_1) + P(B|U_2)\,P(U_2) \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{19}{30} \end{aligned}$$

Teorema 1.10

Bayes) Sea $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \in \mathcal{A}$ un sistema exhaustivo y excluyente de eventos. Sea $B \subset \mathcal{A}$ un suceso del que conocemos todas las cantidades

$$P(B|A_i)\,, i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

a las que denominamos verosimilitudes, entones se verifica

$$\forall j = 1, 2, 3, \cdots, n, \qquad P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i)}$$

Prueba

Es consecuencia de la definición de probabilidad condicionada en términos de la intersección, y del teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned} P\left(A_j|B\right) &= \frac{P\left(A_j \cap B\right)}{P\left(B\right)} \\ &= \frac{P\left(B|A_j\right)P\left(A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(B|A_i\right)P\left(A_i\right)} \end{aligned}$$

■(q.e.d)

Ejemplo: 1.7.23

Se tienen tres urnas. Cada una de ellas contiene un número diferente de bolas blancas y rojas. La primera urna tiene 3 bolas blancas y 2 rojas, la segunda 4 bolas blancas y 2 rojas y la tercera 3 bolas rojas.
Se realiza el siguiente experimento:
Alguién elije al azar y con la misma probabilidad una de las tres urnas, saca una bola.
Si el resultado del experimento ha sido sacar una bola blanca ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la primera urna? Calcular lo mismo para las otras dos urnas.

Solución

Si B: es el evento de sacar una bola blanca y R: el evento de sacar una bola roja, entonces como
U_1 : 3 bolas blancas y 2 rojas
U_2 : 4 bolas blancas y 2 rojas
U_3 : 3 bolas rojas
tenemos

$$\begin{aligned} P\left(U_1\right) &= \frac{1}{3} \\ P\left(U_2\right) &= \frac{1}{3} \\ P\left(U_3\right) &= \frac{1}{3} \\ P\left(B|U_1\right) &= \frac{3}{5} \\ P\left(B|U_2\right) &= \frac{4}{6} \\ P\left(B|U_3\right) &= 0 \end{aligned}$$

En este caso U_1, U_2, U_3 forman un sistema incompatible y excluyente de eventos, por lo que es posible aplicar el teorema de Bayes

$$
\begin{aligned}
P(U_1|B) &= \frac{P(B|U_1)\,P(U_1)}{P(B|U_1)\,P(U_1)+P(B|U_2)\,P(U_2)+P(B|U_3)\,P(U_3)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+0\left(\frac{1}{3}\right)} \\
&= \frac{9}{19}
\end{aligned}
$$

Para los otros dos casos resulta de manera equivalente

$$
\begin{aligned}
P(U_2|B) &= \frac{P(B|U_2)\,P(U_2)}{P(B|U_1)\,P(U_1)+P(B|U_2)\,P(U_2)+P(B|U_3)\,P(U_3)} \\
&= \frac{10}{19}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(U_3|B) &= \frac{P(B|U_3)\,P(U_3)}{P(B|U_1)\,P(U_1)+P(B|U_2)\,P(U_2)+P(B|U_3)\,P(U_3)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo: 1.7.24

En la segunda guerra mundial, uno de los primeros intentos de investigación de operaciones en la Gran Bretaña se orientaba en establecer patrones de búsqueda de submarinos desde vuelos de escuadrones o mediante un sólo avión. Por algún tiempo, la tendencia fue concentrar los vuelos en la costa, pues se pensaba que le mayor número de avistamientos que ocurrían ahí. El grupo de investigación registró 1000 vuelos de un solo avión con los siguientes resultados(Los datos no son reales)

	En la playa	Fuera de la costa	Total
Observación	80	20	100
No observación	820	80	900
Total de salidas	900	100	1000

sea

S_1	Hubo un avistamiento
S_2	No hubo avistamiento
B_1	Salida a la costa
B_2	Salida en altamar

Vemos de inmediato que

$$
\begin{aligned}
P(S_1|B_1) &= \frac{80}{900} = \frac{4}{45} = 8.888\,9\times 10^{-2} \\
P(S_2|B_2) &= \frac{20}{100} = 0.2
\end{aligned}
$$

lo cual indica una estrategia de búsqueda es contraria a la primera práctica.

Ejemplo: 1.7.25

Supóngase que se va a seleccionar una muestra aleatoria de tamaño 2 de un lotes de tamaño 100, y que se sabe que 98 de los 100 artículos se encuentran en buen estado. La muestra se toma de manera tal que el primer artículo se observa y se regresa antes de seleccionar el segundo artículo

Solución

. Si aceptamos que
A : El primer artículo observado está en buen estado
B : El segundo artículo observado está en buen estado
Y si deseamos determinar la probabilidad de que ambos artículos estén en buen estado, entonces

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = \left(\frac{98}{100}\right)\left(\frac{98}{100}\right) = 0.960\,4$$

Si se selecciona el artículo sin reemplazo de modo que que el primer artículo no se regresa antes de seleccionar el segundo, entonces

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{99} = 0{,}9602$$

Los resultados son muy parecidos por lo que generalmente suponemos que los eventos son independientes cuando la fracción de muestreo (tamaño de la muestra/tamaño de la población) es menor que 0.1

Ejemplo: 1.7.26

Tres industrias suministran microprocesadores a un fabricante de equipos de telemetría. Todos se elaboran supuestamente con las mismas especificaciones. No obstante, el fabricante ha probado durante varios años los microprocesadores, y los registros indican la siguiente información

Industria	Fracción de defectos	Fracción suministrada por
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

EL fabricante ha interrumpido las pruebas por causa de los costos involucrados, y puede ser razonable suponer que la proporción defectuosa y la mezcla de inventarios son las mismas que durante el periodo en el que se efectuaron los registros. El director de manufactura selecciona un microprocesador al azar, lo lleva al departamento de pruebas y descubre que está defectuoso. Determinar la probabilidad que el artículo proviene de la industria 3
Sea A el evento de que el artículo es defectuoso y B_i $i = 1, 2, 3$ es el evento que el artículo proviene de la

empresa i

$$
\begin{aligned}
P\left(B_3|A\right) &= \frac{P\left(A|B_2\right)P\left(B_2\right)}{P\left(A|B_1\right)P\left(B_1\right)+P\left(A|B_2\right)P\left(B_2\right)+P\left(A|B_3\right)P\left(B_3\right)} \\
&= \frac{(0{,}05)\,(0{,}03)}{(0{,}15)\,(0{,}02)+(0{,}8)\,(0{,}01)+(0{,}05)\,(0{,}03)} = 0.\,12
\end{aligned}
$$

Ejemplo: 1.7.27

Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 bolas blancas y nueve azules. Si se sacan 3 bolas al azar, determinar la probabilidad de que

a. *Las 3 sea rojas*

b. *Las tres sean blancas*

c. *2 sean rojas*

d. *Al menos una blanca*

e. *Sea una de cada color*

f. *Salgan en el orden roja,blanca y azul*

Solución

Denotaremos por R_i $i=1,2,3$ *los eventos que la primera, la segunda y la tercera bola sean rojas respectivamente. Denotaremos por* B_i $i=1,2,3$ los eventos que la primera, la segunda y la tercera bola sean blancas respectivamente, y *denotaremos por* A_i $i=1,2,3$ *los eventos que la primera, la segunda y la tercera bola sean rojas respectivamente, entonces*

a.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{3} R_i\right) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{14}{285}$$

b.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140}$$

c.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{2} R_i \cap B\right) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{-}{-}$$

d.

$$P\left(\text{ninguna es blanca}\right) = \frac{\begin{pmatrix} 17 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{}{}$$

e.

$$P\left(\text{sacar una de cada color}\right) = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{}{}$$

f.

$$\begin{aligned} &P\left(\text{bolas en el orden R, B,A}\right) \\ &= \frac{1}{3!}P\left(\text{una de cada colore}\right) = \frac{3}{95} \end{aligned}$$

Ejemplo: 1.7.28

De una baraja de 52 naipes bien mezclada se sacan 5 naipes. Hallar la probabilidad de que 3 sean de un palo y 2 de otro

Solución

$$\begin{aligned} P\left(\text{3 de cualquier figura y 2 de otra}\right) = & \\ &= \frac{4\binom{13}{3} \cdot 3\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}} \\ &= 0.103 \end{aligned}$$

Ejemplo: 1.7.29

Supóngase que se lanzan 12 dados. Se determina la probabilidad p de que cada uno de los seis números distintos aparezca dos veces

Solución

tenemos que S es el conjunto formado por la sucesión de 12-tupla donde la i-ésimo valor de la sucesión es el resultado i-ésimo lanzamiento, de lo que se deduce que $n\left(S\right) = 6^{12}$ donde todos los 6^{12} resultados posibles son igualmente probables, ahora podemos considerar los seis valores posibles que se puede dar en cada dado como seis casillas las cuales se le pueden asignar solo dos posibilidades. Por lo que al utilizar el coeficiente multinomial para determinar los casos favorables tenemos

$$\begin{aligned} n &= 12 \\ k &= 6 \\ n_1 &= n_2 = \cdots = n_6 = 2 \\ N &= \frac{12!}{(2!)\,(2!)\cdots(2!)} = \frac{12!}{(2!)^6} \end{aligned}$$

Por lo que la probabilidad buscada es
$P = \frac{12!}{2^6 6^{12}} = \frac{1925}{559\,872} = 3.\,438\,3 \times 10^{-3}$

Ejemplo: 1.7.30

Una baraja de 52 cartas contiene 13 corazones. Supóngase que se barajan las cartas y se distribuyen entre cuatro jugadores A,B,C y D de tal manera que a cada jugador le correspondan 13 cartas, Se determinará la probabilidad P de que cada jugador reciba 6, 4, 2 y 1 corazones respectivamente

Solución

El número de combinaciones distintas posibles de las 13 posiciones ocupadas en la baraja por los corazones es $\binom{52}{13}$. Si el jugador A recibe 6 corazones, hay $\binom{13}{6}$ combinaciones posibles de las 6 posiciones que ocupan estos corazones entre las 13 cartas que recibe el jugador A. De la misma manera podemos establecer las combinaciones posibles de cada jugador entre las 13 cartas que recibe cada uno como $\binom{13}{4}$, $\binom{13}{2}$ y $\binom{13}{1}$ respectivamente para B,C y D. Por tanto como los eventos A,B,C y D son independientes

$$P\,(ABCD) = \frac{\binom{13}{6}\binom{13}{4}\binom{13}{2}\binom{13}{1}}{\binom{52}{13}} = 1.\,9592 \times 10^{-3}$$

Ejemplo: 1.7.31

Supóngase que una moneda equilibrada va a ser lanzada diez veces y se desea determinar

a. *la probabilidad P de obtener exactamente 3 caras*

b. *La probabilidad P de obtener a lo sumo tres caras*

Solución

a. El número total de posibles combinaciones distintas de 10 caras y sellos es 2^{10} y se puede suponer que todas estas combinaciones son igualmente probables y el número de casos favorables es $\binom{10}{3}$ por lo que

$$p = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}} = 0.117\,19$$

Solución

b. Puesto que lo que me piden es la union de los eventos A_i : obtener 0,1,2 y 3 caras $i = 0, 1, 2, 3,$ y como estos eventos son disjuntos tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{3} A_i\right) = \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}}{2^{10}} = 0.171\,88$$

Ejemplo: 1.7.32

Supóngase que en una clase hay 15 hombres y 30 mujeres, y que se van a seleccionar al azar 10 estudiantes para una tarea especial. se determinará la probabilidad P de seleccionar exactamente 3 hombres

Solución

el número de combinaciones distintas que se pueden formar con 45 estudiantes para obtener una muestra de 10 es $\binom{45}{10}$, y como el muestreo es al azar y sin reemplazo entonces todas estas combinaciones son igualmente posibles por lo que hay que determinar el números de combinaciones distintas que se pueden seleccionar con 3 hombres y 7 mujeres, entonces con los hombres se pueden realizar $\binom{15}{3}$ y con las mujeres $\binom{30}{7}$ por lo que

$$P = \frac{\binom{15}{3}\binom{30}{7}}{\binom{45}{10}} = \frac{3958\,500}{13\,633\,279} = 0.290\,36$$

Ejemplo: 1.7.33

Supóngase que se baraja un naipe de 52 cartas que contiene 4 ases y que las cartas se reparten entre cuatro jugadores, de forma que cada una reciba 13 cartas. se determinará la probabilidad de que cada jugador reciba un as.

Solución

El número de combinaciones diferentes es $\binom{52}{4}$. Y podemos suponer que todas estas combinaciones son igualmente probables. si cada jugador recibe un as entonces debe haber un as entre las 13 cartas que recibe por ejemplo el primer jugador y un as recibirá cada uno de los jugadores de las 13 cartas que recibirán, es decir hay

13 posiciones posibles para el as que recibe cada jugador por lo que los casos favorables será 13^4, entonces

$$P = \frac{13^4}{\binom{52}{4}} = \frac{2197}{20\,825} = 0.\,105\,5$$

Ejemplo: 1.7.34

Supóngase que una máquina produce un artículo defectuoso con probabilidad $p = 0{,}4$ y produce un artículo no defectuoso con una probabilidad $q = 0, 6$. Supóngase además que se seleccionan aleatoriamente para su control seis de los artículos producidos por la máquina y que los resultados de control son independientes para estos seis artículos. Se determinará la probabilidad de que exactamente dos de los seis artículos sean defectuosos

Solución

Si consideramos los eventos D_i el evento del que el $i-ésimo$ artículo sea defectuoso y N_j el evento de que el $i-ésimo$ artículo sea no defectuoso para, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, como los eventos son independientes entonces por ejemplo

$$P\left(N_1N_3D_2D_4D_5D_6\right) = qqpppp$$

como esta es una de las posibles combinaciones hay que determinar las otras que no es más que $\binom{6}{2}$ combinaciones distintas y por el th 3.13 tenemos

$$P = \binom{6}{2}(0{,}4)^2(0{,}6)^4 = 0.\,311\,04$$

Ejemplo: 1.7.35

considérese una máquina que produce un artículo defectuoso con una probabilidad $p = 0{,}4$ y uno no defectuoso con probabilidad $q = 0{,}6$. Supóngase que el control se realiza seleccionando artículos al azar y de uno en uno hasta obtener exactamente cinco artículos defectuosos. Se determinará la probabilidad P de que deban ser seleccionados 20 artículos para obtener 5 defectuosos

Solución

El quinto artículo defectuoso será el $n-\acute{e}simo$ controlado si, y sólo si, hay exactamente cuatro defectuosos entre los primeros $n-1$ artículos y el $n-\acute{e}simo$ es defectuoso entonces por el th 3.13 tenemos que

$$P = \binom{n-1}{4} p^5 q^{n-5} = \binom{19}{4} (0{,}4)^5 (0{,}6)^{15}$$
$$= 1.866\,2 \times 10^{-2}$$

Ejemplo: 1.7.36

Supóngase que se van a extraer dos bolas aleatoriamente y sin reemplazo, de una urna que contiene 8 bolas rojas y 10 bolas azules. Se determinará la probabilidad P de obtener la primera bola roja y la segunda azul

Solución

Sea A el evento de que la primera bola sea roja y B de que la segunda bola sea azul, entonces $P(A) = \frac{8}{18} = 0.444\,44$, además si el suceso A ha ocurrido, entonces se ha obtenido una bola roja de la urna en la primera extracción por lo que la probabilidad de obtener una bola azul en la segunda extracción es

$$P(B|A) = \frac{10}{17} = 0.588\,24$$

entonces

$$P(AB) = (0.444\,44)(0.588\,24) = 0.261\,44$$

Ejemplo: 1.7.37

Para la fabricación de un gran lote de artículos similares se utilizaron tres máquinas M_1, M_2 y M_3. Supóngase que el 20 % de los artículos fueron fabricados por la máquina M_1, el 30 % por la máquina M_2 y el 50 % por la máquina M_3 Suponemos además que el 1 % de los artículos fabricados por la máquina M_1 son defectuosos y así respectivamente 2 % y 3 % de los artículos fabricados por la máquinas M_2 y M_3. Se quiere seleccionar al azar uno de los artículos del lote que resultan defectuosos. Determine la probabilidad de que el artículo haya sido fabricado por la máquina M_2.

Solución

Sea A_i el evento de que el artículo haya sido fabricado por la máquina $M_i, i = 1, 2, 3$, y sea B el suceso de que el artículo seleccionado sea defectuoso, de acuerdo con esto hay que determinar $P(A_2|B)$, entonces

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0{,}2 \\ P(A_2) &= 0{,}3 \\ P(A_3) &= 0{,}5 \\ P(B|A_1) &= 0{,}01 \\ P(B|A_2) &= 0{,}02 \\ P(B|A_3) &= 0{,}03 \end{aligned}$$

aplicando el teorema de Bayes

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)\,P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\,P(B|A_i)} = 0{,}26$$

1.8 Problemas

1. Tres clases diferentes tienen 20, 18 y 25 estudiantes, respectivamente, y cada estudiante pertenece a una sola clase. Si se forma un equipo con un estudiante de cada una de estas tres clases, ¿de cuántas maneras distintas se pueden seleccionar los miembros del equipo?
2. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar cinco letras a, b, c, d y e?
3. Si un hombre tiene seis camisas distintas y cuatro pares distintos de pantalones, ¿de cuántas formas distintas se puede vestir combinando esas prendas?
4. Si se lanzan cuatro dados, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro números que aparecen sean distintos?
5. Si se lanzan seis dados, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno de los seis números posibles aparezcan exactamente una vez?
6. Si se colocan al azar 12 bolas en 20 urnas, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna urna contenga más de una bola?
7. El ascensor de un edificio empieza a subir con cinco personas y para en siete pisos. Si la probabilidad de que cualquier pasajero salga del ascensor en un piso concreto es igual para todos los pisos y los pasajeros salen independientemente unos de otros, ¿cuál es la probabilidad de que no haya dos pasajeros que salgan en el mismo piso?
8. Si k personas se sientan aleatoriamente en una fila de n asientos ($n > k$), ¿cuál es la probabilidad de que ocupen k asientos contiguos en la fila?
9. Sik personas se sientan aleatoriamente en n sillas dispuestas en círculo ($n > k$), ¿cuál es la probabilidad de que ocupen k sillas contiguas del círculo?
10. Si n personas se sientan aleatoriamente en una fila de $2n$ asientos, ¿cuál es la probabilidad de que no haya dos personas sentadas en asientos contiguos?
11. Una caja contiene 24 bombillas, de las cuales 2 son defectuosas. Sí una persona selecciona 10 bombillas al azar, sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar las 2 bombillas defectuosas?
12. Supóngase que se ha de seleccionar un comité de 12 personas aleatoriamente escogidas entre un grupo de 100. Determínese la probabilidad de que dos personas concretas, A y B, sean seleccionadas.
13. Supóngase que 35 personas se dividen aleatoriamente en dos equipos de manera que uno de los equipos consta de 10 personas y el otro de 25. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas concretas, A y B, estén en el mismo equipo?
14. Una caja contiene 24 bombillas, de las cuales 4 son defectuosas. Si una persona selecciona aleatoriamente 10 bombillas de la caja, y una segunda persona toma entonces las 14 bombillas restantes, ¿cuál es la probabilidad de que la misma persona seleccione las 4 bombillas defectuosas?
15. Demuéstrese que, para cualquier entero positivo n y k ($n > k$),
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$
16. Demuéstrese que
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$
17. El Senado de Estados Unidos está constituido por dos senadores de cada uno de los 50 estados,

a) Si se selecciona aleatoriamente un comité de 8 senadores, ¿cuál es la probabilidad de que contenga al menos uno de los dos senadores de un estado concreto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo de 50 senadores seleccionados aleatoriamente contenga un senador de cada estado?

18. Supóngase que$A$ es un suceso tal que $P(A) = 0$ y que B es cualquier otro suceso. Demuéstrese que A yB son sucesos independientes.

19. Supóngase que una persona lanza tres veces dos dados equilibrados. Determínese la probabilidad de que en cada uno de los tres lanzamientos la suma de los dos números que aparecen sea 7.

20. Supóngase que la probabilidad de que el sistema de control utilizado en una nave espacial no funcione en un vuelo concreto es 0.001. Supóngase además que la nave también tiene instalado un segundo sistema de control idéntico, pero completamente independiente del primero, que toma el control cuando el primero falla. Determínese la probabilidad de que en un vuelo concreto la nave espacial esté bajo control, ya sea del sistema original o del sistema duplicado.

21. Supóngase que una lotería consta de 10 000 boletos y que otra lotería consta de 5000. Si una persona compra 100 boletos de cada lotería, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos un primer premio?

22. Dos estudiantes A y B están inscritos en un curso. Si el estudiante A asiste a las clases el 80 % de las veces y el estudiante B el 60 %, y si las ausencias de los dos estudiantes son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes esté en clase un día concreto?

23. Si se lanzan tres dados equilibrados, ¿cuál es la probabilidad de que los tres números que aparecen sean iguales?

24. Considérese un experimento en el cual se lanza una moneda equilibrada hasta que aparece una cara por primera vez. Si este experimento se repite tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que se necesite exactamente el mismo número de lanzamientos para cada una de las tres repeticiones?

25. Supóngase que A, B y C son tres sucesos independientes tales que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y $P(C) = \frac{1}{2}$.

    a) Determínese la probabilidad de que ninguno de estos tres sucesos ocurra

    b) Determínese la probabilidad de que ocurra exactamente uno de estos tres sucesos.

26. Supóngase que la probabilidad de que una partícula emitida por un material radiactivo penetre en cierto campo es 0.01. Si se emiten diez partículas,

    a) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente una de ellas penetre en el campo?

    b) Si se emiten diez partículas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas penetre en el campo?

    c) ¿Cuántas partículas tienen que ser emitidas para que la probabilidad de que al menos una partícula penetre en el campo sea al menos 0.8?

27. En la Serie Mundial de Béisbol, dos equipos A y B juegan una serie de partidos uno contra otro y el primer equipo que gana un total de cuatro partidos es el ganador de la Serie Mundial. Si la probabilidad de que el equipo A gane un partido contra el equipo B es $\frac{1}{3}$, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la Serie Mundial?

28. 15. El Senado de Estados Unidos está constituido por dos senadores de cada uno de los 50 estados, (a) Si se selecciona aleatoriamente un comité de 8 senadores, ¿cuál es la probabilidad de que contenga al menos uno de los dos senadores de un estado concreto? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo de 50 senadores seleccionados aleatoriamente contenga un senador de cada estado?

29. La probabilidad de que una persona nade es de 0.45 y la probabilidad de que una persona cace es de 0.58. Si la probabilidad de que una persona cace sabiendo que también caza es 0.21, encuentre la probabilidad de que:

    a) Cace y nade

    b) Cace si también nada

    c) Cace y no nade

    d) Cace o nade

30. La tabla adjunta muestra las frecuencias relativas para el daltonismo en hombres y mujeres, donde H representa hombres, M mujeres, D daltónico y ND no daltónico

	H	M
D	0.042	0.007
ND	0.485	0.466

Si se escoge a una persona al azar, use la tabla para determinar las probabilidades siguientes:

a) $P(H)$

b) $P(H \cap D)$

c) $P(D)$

d) $P(H \cap ND)$

31. Si $P(E) = 0{,}2$ y $P(F) = 0{,}3$. Responda si puede ser cierto en cada una de las preguntas dadas y si es posible plantee un ejemplo.

    a) ¿$P(E \cup F) = 0{,}5$?

    b) ¿$P(E \cup F) = 0{,}7$?

    c) ¿$P(E \cup F) = 0{,}4$?

    d) ¿$P(E \cap F) = 0{,}2$?

    e) ¿$P(E \cap F) = 0{,}3$?

    f) ¿$P(E \cap F) = 0{,}1$?

    g) ¿$P(E \cap F) = 0{,}4$?

32. Si cuatro hombres y cuatro mujeres se colocan en fila, ¿Cuál es la probabilidad de que un arreglo aleatorio de los ocho individuos tenga

    a) hombres y mujeres alternados?

    b) A los hombres todos juntos?

33. De un conteo de tarjetas numeradas dei 1 al 10000. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que te toque sea divisible exactamente por 5?

34. Un especialista en alergias alega que el 50 % de sus pacientes sufre de alergia ¿Cuál es la probabilidad de que

    a) de que 3 de sus siguientes cuatro pacientes sufran de alergia?

    b) Ninguno de los cuatro pacientes sufran de alergias?

35. De una caja que contiene 6 pelotas negras y 4 verdes, se sacan 3 en sucesión, reemplazándose cada una en la caja antes de extraer la siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que

a) las 3 sen del mismo color

b) sea al menos una de cada color

36. Un embarque de 12 televisores contiene 3 defectuosos. ¿En cuantas formas puede un hotel comprar 5 y recibir al menos 2 de los defectuosos?

37. En una cierta ciudad, 40 % de los votantes son Liberales y el 60 % son conservadores; 70 % de los republicanos y el 80 % de los demócratas están a favor de una de una consulta popular. al seleccionar al azar un votante de la ciudad, ¿Cuál es la probabilidad de qué está a favor de la consulta ?

38. ¿Cuántas manos de bridge que contengan 4 espadas, 6 diamantes, 1 de bastos y 2 de corazones son posibles?

39. Una empresa industrial grande utiliza 3 hoteles locales para proporcionar alojamiento a sus clientes durante la noche. De pasadas experiencias se sabe que al 20 % de ellos se les asigna habitación en el hotel de Santa Marta, el 50 % en Cartagena y al 30 % en Tolú. Si existe una falla en el servicio de plomería en el 5 % de la habitaciones en Santa Marta , en el 4 % en Cartagena y del 8 % en Tolú. ¿Cuál es la probabilidad de que

a) a un cliente se le asigne un cuarto con problemas en plomería ?

b) a una persona con un problema en plomería se asigne el hotel en Cartagena?

40. Un espacio muestral de 200 adultos se clasifica de acuerdo con su sexo y nivel de educación

Educación	Hombre	Mujer
Primaria	38	45
Secundaria	28	50
Bachillerato	22	17

Si se selecciona aleatoriamente a una persona de ese grupo, encuentre la probabilidad de que

a) no tenga grado de profesional dado de que sea mujer

b) sea hombre dado que tiene educación superior

41. Se lanzan un par de dados, si se sabe que uno de ellos resulta en un 4, ¿cuál es la probabilidad de que

a) el otro caiga en 6

b) el total de ambos sea 9

42. Supongamos que se selecciona al azar un individuo de la población de todos los adultos hombres que en los Estados Unidos. Sea a el evento en que el individuo seleccionado tenga una estatura de más de 6 pies, y B el evento de que el individuo seleccionado sea un jugador profesional de baloncesto. ¿Cuál considera que sea mayor $P(B|A)$ o $P(A|B)$?. ¿Por qué?

43. Un circuito flexible se selecciona al azar de una corrida de producción de 1000 circuitos. Los defectos de manufactura se clasifican en tres diferentes tipos, denominados A. B y C. Los defectos de tipo A ocurren el 2 por ciento de las veces, los del tipo B, el 1 por ciento, y los de tipo C, el 1.5 por ciento. Además, se sabe que el 0.5 por ciento tienen los defectos de tipo A y B, el 0.6 por ciento, los defectos B y C, y el 0.4 por ciento presenta los defectos B y C, en tanto que el 0.2 por ciento tiene los tres defectos. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito flexible seleccionado tenga al menos uno de los tres tipos de defectos?

44. En un laboratorio de factores humanos, se miden tiempos de reacción, por ejemplo, el tiempo que transcurre desde el instante en que se despliega un número de posición en un tablero digital hasta que el sujeto presiona un botón localizado en la posición indicada. Participan dos sujetos, midiéndose el tiempo en segundos para cada individuo (t_1, t_2). ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento? Presente los siguientes eventos como subconjuntos y márquelos sobre un diagrama:

$$\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq 0{,}15, \ \text{máx}\,(t_1, t_2) \leq 0{,}15, \ |t_1 - t_2| < 0{,}6.$$

45. Durante un periodo de 24 horas se entrará a un procesamiento computarizado. En un tiempo X y se saldrá en tiempo Y $\geq$ X. Considérense X y Y medido en horas en la linea del tiempo con el inicio del periodo de 24 horas como el origen. El experimento consiste en observar X y Y, (X, Y).

a) Describa el espacio muestral S.

b) Dibuje los siguientes eventos en el plano X, Y.

1) El tiempo de utilización es una hora o menos

2) El acceso es antes de t_1 y la salida después de t_2, donde $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 24$

3) El tiempo de utilización es menor que el 20 por ciento del periodo.

46. Se prueban diodos de un lote uno a la vez y se marcan ya sea como defectuosos o como no defectuosos. Esto continúa hasta encontrar dos artículos defectuosos o cuando se han probado cinco artículos. Describa el espacio muestral para este experimento.

47. Un conjunto tiene cuatro elementos $A = \{a, b, c, d\}$. Describa el conjunto partes de A .

48. Describa el espacio muestral para cada uno de los siguientes experimentos:

a) Un lote de 120 tapas de baterías para celdas de marcapasos contiene varias defectuosas debido a un problema con el material de barrera que se aplica en el sistema de alimentación. Se seleccionan tres tapas al azar (sin reemplazo) y se inspeccionan con cuidado siguiendo una reducción.

b) Una paleta de 10 piezas fundidas contiene una unidad defectuosa y nueve en buen estado. Se seleccionan cuatro piezas al azar (sin reemplazo) y se inspeccionan.

49. El gerente de producción de cierta compañía está interesado en probar un producto terminado, que se encuentra disponible en lotes de tamaño 50. A él le gustaría volver a elaborar un lote si tiene la completa seguridad de que el 10 por ciento de los artículos son defectuosos. Decide seleccionar una muestra al azar de 10 artículos sin reemplazo y volver a producir el lote si éste contiene uno o más artículos defectuosos. ¿Este procedimiento parece razonable?

50. Una firma de transporte tienen un contrato para enviar una carga de mercancías de la ciudad W a la ciudad Z. No hay rutas directas que enlacen W con Z, pero hay seis carreteras de W a X y cinco de X a Z. ¿Cuántas rutas en total deben considerarse?

51. Un estado tienen un millón de vehículos registrados y está considerando emplear placas de licencia con seis símbolos en los que los primeros tres sean letras y los últimos tres, dígitos. ¿Es éste esquema factible?

52. El gerente de una pequeña planta desea determinar el número de maneras en que puede asignar trabajadores al primer turno. Cuenta con 15 hombres que pueden servir como operadores del equipo de producción, 8 que pueden desempeñarse

como personal de mantenimiento y 4 que pueden ser supervisores. Si el turno requiere 6 operadores, 2 trabajadores de mantenimiento, y 1 supervisor, ¿de cuántas maneras puede integrarse el primer turno?

53. Un lote de producción tiene 100 unidades de las cuales 20 se sabe que están defectuosas. Una muestra aleatoria de 4 unidades se selecciona sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra no contenga más de 2 unidades defectuosas?

54. En la inspección de lotes de mercancías que están por recibirse, se emplea la siguiente regla de inspección en lotes que contienen 300 unidades; se selecciona una muestra al azar de 10 artículos. Si no hay más que un artículo defectuoso en la muestra, se acepta el lote. De otro modo se regresa al vendedor. Si la fracción defectuosa en el lote original es p', determinar la probabilidad de aceptar el lote como una función de p'

55. En una planta de plásticos, 12 tubos vacían diferentes químicos en un tanque de mezcla. Cada tubo tienen una válvula de cinco posiciones que mide el flujo dentro del tanque. Un día, mientras se experimenta con diferentes mezclas, se obtiene una solución que emite un gas venenoso, no habiéndose registrado los valores en las válvulas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener esta misma solución cuando se experimenta de nuevo de manera aleatoria?

56. Ocho hombres y ocho mujeres con las mismas habilidades solicitan dos empleos. Debido a que los dos nuevos empleados deben trabajar estrechamente, sus personalidades deben ser compatibles. Para lograr esto, el administrador de personal ha aplicado una prueba y debe comparar las calificaciones para cada posibilidad. ¿Cuántas comparaciones debe efectuar el administrador?

57. En forma casual, un químico combinó dos sustancias de laboratorios que produjeron un producto conveniente. Desafortunadamente, su asistente no registró los nombres de los ingredientes. Hay cuarenta sustancias disponibles en el laboratorio. Si las dos en cuestión deben encontrarse mediante experimentos sucesivos de ensayo y error, ¿cuál es el número máximo de pruebas que pueden realizarse?

58. Un prisionero político será enviado a Siberia o a los Urales. Las probabilidades de que lo envíen a estos dos lugares son 0.6 y 0.4, respectivamente. Se sabe además que si un residente de Siberia se elige al azar hay una probabilidad de 0.5 de que lleve un abrigo de piel, en tanto que la probabilidad para lo mismos es de 0.7 en el caso de un residente de los Urales. Al llegar al exilio, la primera persona que ve el prisionero no lleva un abrigo de piel. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en Siberia?

59. Se diseña un dispositivo de frenado para evitar que un automóvil patine en el que incluye un.sistema electrónico e hidráulico. El sistema completo puede descomponerse en tres subsistemas en serie que operan de manera independiente: un sistema electrónico, un sistema hidráulico y un accionador mecánico. En un frenado particular, las confiabilidades de estas unidades son aproximadamente 0.995, 0.993 y 0.994, respectivamente. Estime la confiabilidad del sistema.

60. Dos bolas se extraen de una urna que contiene m bolas numeradas del 1 a m. Se conserva la primera bola si tiene el número 1, y se regresa en caso contrario. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída tenga el número 2?

61. Se eligen dos dígitos al azar de los dígitos del 1 al 9 y la selección es sin reemplazo (el mismo dígito no puede escogerse en ambas selecciones). Si la suma de los dígitos es par, encuentre la probabilidad de que ambos dígitos sean impares.

62. En cierta universidad 20 por ciento de los hombre y 1 por ciento de las mujeres miden más de dos metros de altura. Asimismo, 40 por ciento de los estudiantes son mujeres. Si se selecciona un estudiante al azar y se observa que mide más de dos metros de altura, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

63. En un centro de maquinaria hay cuatro máquinas automáticas que producen tornillos. Un análisis de los registros de inspección anteriores produce los siguientes datos:

Máquina	Porcentaje de producción	Porcentaje de defectos producidos
1	15	4
2	30	3
3	20	5
4	35	2

Las máquinas 2 y 4 son más nuevas y se les ha asignado más producción que a las máquinas 1 y 3. Suponga que la combinación de inventarios refleja los porcentajes de producción indicados.

a) Si se elige un tornillo al azar del inventario, ¿cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

b) Si se elige un tornillo y se encuentra que está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya producido en la máquina 3?

64. Supóngase que $A \subset B$. Demuéstrese que $B' \subset A'$.

65. Para tres sucesos cualesquiera A, B y C, demuéstrese que

$$A(B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

66. Para dos sucesos cualesquiera A y B, demuéstrese que

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ y } (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

67. 4. Para cualquier conjunto de sucesos $A_i (i \in I)$, demuéstrese que

a) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$

b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

68. 5. Supóngase que se selecciona una carta de una baraja de veinte cartas que contiene diez cartas rojas numeradas del 1 al 10 y diez cartas azules numeradas del 1 al 10. Sea A el suceso de seleccionar una carta con un número par, sea B el suceso de seleccionar una carta azul y sea C el suceso de seleccionar una carta con un número menor que 5. Descríbanse el espacio muestral S y cada uno de los siguientes sucesos en palabras y en subconjuntos de S:

a) $A \cap B \cap C$.

b) $B \cap C'$.

c) $A \cup B \cup C$.

d) $A \cap (B \cup C)$.

e) $A' \cap B' \cap C'$.

69. Un estudiante seleccionado de una clase puede ser chico o chica. Si la probabilidad de que un chico sea seleccionado es 0.3, ¿cuál es la probabilidad de que sea seleccionada una chica?

70. Se selecciona una bola de una urna que contiene bolas rojas, blancas, azules, amarillas y verdes. Si la probabilidad de seleccionar una bola roja es $\frac{1}{5}$ y la de seleccionar una blanca es $\frac{2}{5}$ ¿cuál es la probabilidad de seleccionar una bola azul, amarilla o verde?

71. Si la probabilidad de que un estudiante A suspenda un cierto examen de estadística es 0.5, la probabilidad de que un estudiante B suspenda el examen es 0.2 y la probabilidad de que ambos estudiantes A y B suspendan el examen es 0.1,

    a) ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de estos dos estudiantes suspenda el examen?

    b) ¿cuál es la probabilidad de que ni el estudiante A ni el B suspendan el examen?

    c) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los dos estudiantes suspenda el examen?

72. Considérense dos sucesos Ay B tales que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$. Determínese el valor de $P(B \cap A')$ para cada una de las siguientes condiciones:

    a) A y B son disjuntos

    b) $A \subset B$

    c) $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

73. Si el 50 % de las familias de cierta ciudad están suscritas al periódico matinal, el 65 % de las familias al periódico vespertino y el 85 % al menos a uno de los dos periódicos, ¿ cuál es la proporción de familias que están suscritas a los dos periódicos?

74. Considérense dos sucesos A y B con $P(A) = 0{,}4$ y $P(B) = 0{,}7$. Determínense los posibles valores máximo y mínimo de $P(A \cap B)$ y las condiciones en las cuales se consigue cada uno de estos valores.

75. Demuéstrese que para dos sucesos A y B cualesquiera, la probabilidad de que exactamente uno de los dos sucesos ocurra está dada por la expresión

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

76. Se selecciona un punto (x, y) del cuadrado S que contiene todos los puntos (x, y) tales que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$. Supóngase que la probabilidad de que el punto seleccionado pertenezca a cualquier subconjunto específico de S es igual al área de ese subconjunto. Determínese la probabilidad de cada uno de los siguientes subconjuntos:

    a) el subconjunto de puntos tales que $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{4}$

    b) el subconjunto de puntos tales que $\frac{1}{2} < x + y < \frac{3}{2}$

    c) el subconjunto de puntos tales que $y < 1 - x^2$

    d) el subconjunto de puntos tales que $x = y$.

77. Sea $A_1, A_2, A_3, \cdots$ una serie numerable de eventos y sea $B_1, B_2, B_3, \cdots$ otra serie numerable de eventos tal que

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_1' \cap A_2,\ B_3 = A_1' \cap A_2' \cap A_3...$$

Demuéstrese que

    a) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$

    b) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$ para $n = 1, 2, 3, ...$

78. Sea $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ una serie cualquiera de eventos, demostrar que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

79. Supóngase que una urna contiene una carta azul y cuatro cartas rojas. A, B, C y D. Supóngase también que dos de estas cinco cartas se extraen al azar sin reemplazo

    a) Si se sabe que se ha extraído la carta A, ¿cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean rojas?

    b) Si se sabe que se ha extraído una carta roja, ¿cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean rojas?

80. La probabilidad de que cualquier niño de una familia determinada tenga ojos azules es $1/4$, y esta característica es heredada por cada niño de la familia independientemente de los demás. Si hay cinco niños en la familia y se sabe que al menos uno de estos niños tiene ojos azules,

    a) ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres de los niños tengan ojos azules?

    b) Considérese la familia de cinco nios

        1) Si se sabe que el niño más pequeño de la familia tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres de los niños tengan ojos azules?

        2) Explíquese por qué la respuesta es diferente de la respuesta de la parte (a)

81. Considérese la siguiente versión del juego de dados: El jugador lanza dos dados. SÍ la suma en el primer lanzamiento es 7 u 11, el jugador gana el juego. Si la suma en el primer lanzamiento es 2, 3 ó 12, el jugador pierde. Sin embargo, si la suma en el primer lanzamiento es 4, 5, 6, 8, 9 ó 10, entonces se lanzan los dos dados una y otra vez hasta que la suma sea 7, lío el valor original. Si el valor original se obtiene por segunda vez antes de obtener 7 u 11, entonces el jugador gana. Si se obtiene un total de 7 o de 11 antes de obtener el valor original por segunda vez, entonces el jugador pierde. Determínese la probabilidad de que el jugador gane este juego.

82. En una ciudad determinada, el 30 % de las personas son conservadores, el 50 % son liberales y el 20 % son independientes. Los registros muestran que en unas elecciones concretas, votaron el 65 % de los conservadores, el 82 % de los liberales y el 50 % de los independientes. Si se selecciona al azar una persona de la ciudad y se sabe que no votó en las elecciones pasadas, ¿ cuál es la probabilidad de que sea un liberal?

83. Supóngase que cuando una máquina está correctamente ajustada, el 50 % de los artículos que produce son de alta calidad y el otro 50 % son de calidad media. Supóngase, sin embargo, que la máquina está mal ajustada durante el 10 % del tiempo y que, en estas condiciones, el 25 % de los artículos producidos por ella son de alta calidad y el 75 % de los artículos son de calidad media.

    a) Supóngase que cinco artículos producidos por la máquina en un tiempo determinado son seleccionados al azar e inspeccionados. Si cuatro de estos artículos son de alta calidad y uno es de calidad media, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina estuviera correctamente ajustada durante ese tiempo?

    b) Supóngase que se selecciona un artículo adicional, que fue producido por la máquina al mismo tiempo que los otros cinco, y resulta ser de calidad media. ¿Cuál es la nueva probabilidad final de que la máquina estuviera correctamente ajustada?

84. Supóngase que una caja contiene cinco monedas y que la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento es distinta para cada moneda. Sea p_i la probabilidad de obtener cara al lanzar la $i-ésima$ moneda $(i = 1, ..., 5)$ y Supóngase que $p_1 = 0$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_3 = 1/2$, $p_4 = 3/4$ y $p_5 = 1$. Si se selecciona una moneda de la caja al azar y que al lanzarla una vez se obtiene una cara. ¿Cuál es la probabilidad final de que se haya seleccionado la $i-ésima$ moneda $(i = 1, ..., 5)$?