CAPÍTULO

1 Variables aleatorias

1.1 Introducción

Cuando definimos la probabilidad en el axioma 1 del capítulo 3 se estableció de la siguiente manera

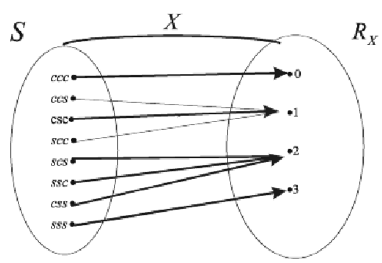
$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{A} & \rightarrow & [0,1] \subset I\!R \\ A \in \mathcal{A} & \mapsto & 1 \geq P(A) \geq 0 \end{array}$$

Tomamos un elemento de $\mathcal{A}$ y le asignamos un número, pero esta forma de trabajar a veces dificulta la interpretación del concepto de probabilidad, porque los elementos de $\mathcal{A}$ no son números si no conjuntos, pero que tal si $\mathcal{A}$ estuviera formado no por subconjuntos de S, sino por números, entonces consideremos el ejemplo de lanzar tres monedas al aire para mostrar como podríamos hacer esto.

En este caso el espacio muestral es

$$S = \{ccc, ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss\}$$

ahora si definimos una función, por decir X tal que a cada evento fundamental le asignamos un número de la siguiente forma

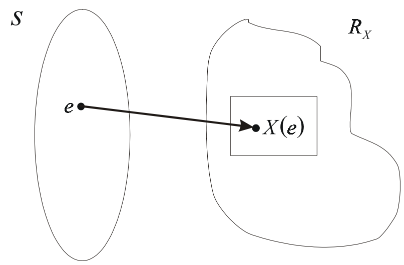


De este modo aparece el concepto de variable unidimensional

$$\begin{array}{rcl} X : S & \longrightarrow & I\!R \\ e & \longmapsto & X(e) = x \end{array}$$

de acuerdo con el ejemplo anterior se define la variable

$$X \equiv número \quad de \quad caras$$



de la siguiente forma

$$\begin{aligned} X :&\longrightarrow I\!R \\ X(CCC) &= 3 \\ X(CCS) &= X(CSC) = X(SCC) = 2 \\ X(CSS) &= X(SSC) = X(SCS) = 1 \\ X(SSS) &= 0 \end{aligned}$$

la variable X no recibe el calificativo de aleatoria por el echo de asignarle a un elemento $e \in S$ un valor numérico, (por que de echo este valor esta definido de forma precisa), sino por el echo de que al realizar el experimento no sabemos que elemento de S puede ocurrir

En función del espacio del rango R_X esta función puede ser clasificada como

- Variable aleatoria discreta . Si toma un número finito o numerable de valores, por ejemplo

$$X :\longrightarrow I\!N$$

- Variable aleatoria continua. Si toma un número de valores no numerables, por ejemplo

$$X :\longrightarrow I\!R$$

Definición 1.1

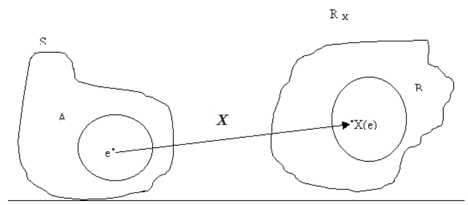
Si E es un experimento que tiene como espacio muestral a S, y X es una función que le asigna un número real $X(e)$ a todo resultado $e \in S$, entonces X se llama variable aleatoria

Definición 1.2

Si S es el espacio muestral de un experimento E y una variable aleatoria X con rango el espacio R_X se define en S, y además si el $A \subset S$ y $B \subset R_X$, entonces A y B son eventos equivalentes si

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P(A) \\ donde \quad A &= \{e \in S : X(e) \in B\} \end{aligned}$$

como indica la 1.1.



Definición 1.3

Si $A \subset S$ y $B \subset R_X$ definimos la probabilidad de B como

$$P_X = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(A)$$

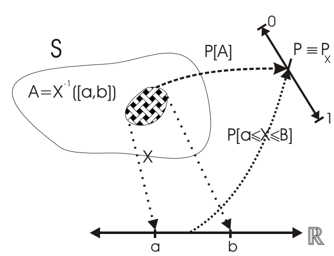
donde

$$A = \{e \in S : X(e) \in B\}$$
$$X^{-1}(B) = \{e \in S : X(e) \in B\}$$

si sobre los elementos de S existe una distribución de probabilidad, esta se transmite a los valores que toma la variable X. Es decir toda variable aleatoria conserva la estructura probabilística del experimento aleatorio que describe, es decir si P es la función de probabilidad definida sobre $S \in \mathcal{A}$, esta induce otra función P_X definida sobre $\mathbb{R}$, de forma que conserva los valores de las probabilidades

$$P_X(X = x) = P(\{e \in S : X(e) = x\})$$
$$P_X(X \in (a,b)) = P(\{e \in S : X(e) \in (a,b)\})$$

como indica la 1.1



Espacio probabilístico

De ahora en adelante denotaremos P_X como P pero no se debe confundir con la probabilidad P que definimos en el capitulo 3

1.2 Variables aleatorias discretas

Definición 1.4

Si X es una variable aleatoria discreta, asociamos un número

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

como cada resultado x_i en R_X para $i = 1, 2, 3 \cdots, n, \cdots$, donde los números $f(x_i)$ satisfacen

1. $f(x_i) \geq 0 \quad$ para toda i
2. $\sum_{i=1}^{x} f(x_i) = 1$La función $f(x_i)$ se llama función de probabilidad o ley de probabilidad de la variable aleatoria, y la colección de pares $(x_i, f(x_i))$ se llama distribución de probabilidad de X
3. Dada una variable aleatoria discreta $X : S \longrightarrow I\!N$, su función de probabilidad f se define de modo que $f(x_i)$ es la probabilidad de que X tome ese valor

$$\begin{array}{ccc} f : I\!N & \longrightarrow & [0,1] \\ x_i & \longmapsto & f(x_i) = P(X = x_i) \end{array}$$

si x_i no es uno de los valores que puede tomar X, entonces $f(x_i) = 0$

Definición 1.5

[Función de distribución]De una variable aleatoria discreta, F que se define de modo que si $x_i \in I\!R, F(x_i)$ es igual a la probabilidad de que X tome un valor inferior o igual a x_i, es decir,

$$\begin{array}{ccc} F : I\!N & \longrightarrow & [0,1] \\ x_i & \longmapsto & F(x_i) = P(x_i \geq X) \end{array}$$

La función de distribución F, es una función no decreciente, es decir. Si

$$x_{1<}x_2 \Longrightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$$

Además, es continua a la derecha

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} F(x) = F(a)$$

y

$$F(-\infty) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x_i) = 0$$

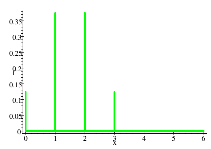
$$F(+\infty) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x_i) = 1$$

Ejemplo: 1.2.1

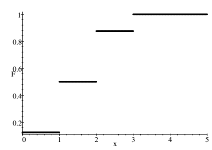
Analicemos el experimento del lanzamiento de la moneda tratado en la introducción y determinemos $f(x), F(x)$

Presentación tabular

x	$f(x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8



Función de probabilidad



Función de distribución

Ejemplo: 1.2.2

Supóngase que tenemos una variable aleatoria X con una distribución de probabilidad dada por la relación

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

donde n es un entero positivo y $0 \leq p \leq 1$. El ejemplo anterior es un caso particular de ésta distribución de probabilidad llamada Binomial

Ejemplo: 1.2.3

Supóngase que hay 100 artículos de los cuales hay 5 defectuosos. Se toma una muestra de de 4 artículos sin reemplazo Determine la distribución de probabilidad para los artículos defectuosos

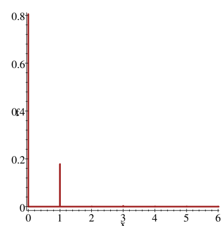
Solución

Si X representa el número de artículos defectuosos entonces la probabilidad de que se escojan x artículos defectuosos es

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{100-5}{4-x}}{\binom{100}{4}} \text{ si } x = 0, 1, 2, 3, 4$$

Ya que los casos posibles serían $\binom{100}{4}$ porque de 100 se escogen 4 y los casos favorables sería $\binom{5}{x}\binom{100-5}{4-x}$, debido a que es una muestra sin reemplazo el número de combinaciones distintas que se pueden formar con x artículos defectuosos para formar una muestra de 5 es $\binom{5}{x}$ y la afirmación de que se van a escoger 5 al azar significa que todas las $\binom{100-5}{4-x}$ son igualmente posibles

x	$f(x)$
0	0,805
1	0,178
2	0,014
3	0,003
4	0,00



Función de probabilidad ej 4.3

Ejemplo: 1.2.4

Supóngase que una variable aleatoria X tiene una distribución discreta con la siguiente función de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{para} \quad x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor de la constante c

Solución

Debido a que f(x) es una función de probabilidad entonces

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 1 \Longrightarrow$$
$$15c = 1 \Longrightarrow$$
$$c = \frac{1}{15}$$

Si la variable X puede tomar un número enumerable de valores $x_1, x_2, x_3, \cdots$, entoces se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$$

1.3 Variables aleatorias continuas

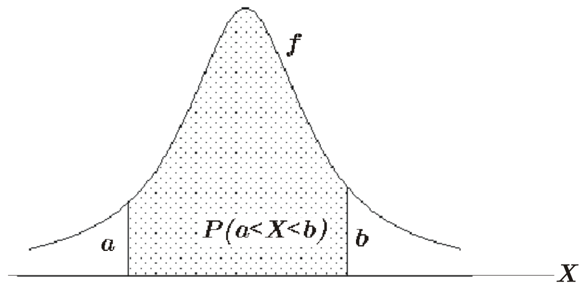
Cuando tenemos una variable aleatoria continua no tiene sentido realizar una suma de las probabilidades de cada uno de los valores que toma, ya que el conjunto es no enumerable por lo que hay que introducir otro concepto.

Sea $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ una función llamada función de densidad de una variable aleatoria continua, integrable que cumple las propiedades

$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

además para todo $[a, b]$ se tiene

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Función de densidad de $f\left(x\right)$

Al observar la 1.3 observamos que $P\left(a\leq x\leq b\right)$ es el área bajo la curva de f

Por ser f integrable entonces la la probabilidad en un punto es nula, es decir

$$P\left(X=a\right)=P\left(a\leq x\leq a\right)=\int_a^a f\left(x\right)dx=0$$

Debido a lo anterior se tiene que

- La función de densidad no es única
- $P\left(a\leq x\leq b\right)=P\left(a<x<b\right)$
- $P\left(a\leq x\leq b\right)=P\left(a\leq x<b\right)=P\left(a<x\leq b\right)$

La función de distribución de una variable aleatoria, F, continua se define de modo que dado $x\epsilon\ I\!R$, $F\left(x\right)$ es la probabilidad de que X sea mayor o igual que x, es decir

$$\begin{array}{rcl} F:I\!R & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & F\left(x\right)=P\left(x\geq X\right)=\int_{-\infty}^{x}f\left(t\right)dt \end{array}$$

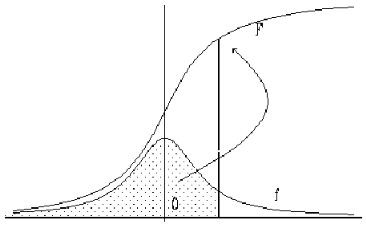


Figura 1.1: Función de distribución F

Proposición 1

ado un intervalo de la forma $(a, b]$, tenemos

$$\begin{aligned} P(X \in (a,b]) &= \int_a^b f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^b f(x)\,dx - \int_{-\infty}^a f(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Se puede observar que la cantidad $F(b) - F(a)$ representa la masa de probabilidad extendida alo largo del intervalo $(a, b]$. Si dividimos esta cantidad por la longitud del intervalo,

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

tenemos la masa media de probabilidad por unidad de longitud en $(a, b]$, es decir, su densidad media de probabilidad, ahora si

$$\lim_{a \longrightarrow b} \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(b) = f(b)$$

que es la densidad de probabilidad en el punto b

- Si X es una variable continua la función de distribución F es no decreciente, es decir si

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$$

- esta función es absolutamente convergente y se verifica

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= \lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0 \\ F(+\infty) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x)\,(1) \end{aligned}$$

Ejemplo: 1.3.5

Suponga que la f.d.p de una variable aleatoria X es

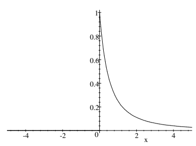
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

- Represente graficamente la f.d.p
- encuentre la f.d y representela gráficamente

Solución

- Su representación gráfica es

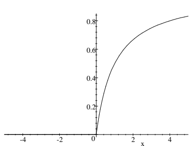
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$



Gráfica del ejemplo

- Si $x > 0$ entonces $F(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt = 1 - \frac{1}{1+x}$ entonces

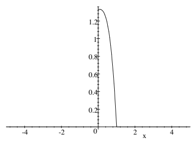
$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{1+x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$



Ejemplo: 1.3.6

- Determine la gráfica de la f.d.p y determinar la f.d

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\left(1 - x^3\right) & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad x \geq 1 \\ 0 & si \quad 0 \leq x \end{cases}$$

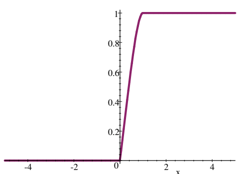


f.d.p de $\frac{4}{3}(1-x^3)$

- Si $0 < x < 1$ entonces

$$F(x) = 1 - \int_x^1 \frac{4}{3}\left(1-t^3\right)dt = 1 - \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^4\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x \leq 0 \\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^4 & si & 0 < x < 1 \\ 1 & si & x \geq 1 \end{cases}$$



f.d del ejemplo 4.6

1.4 Distribuciones de probabilidad conjuntas

En muchas situaciones tratamos problemas donde intervienen más de una variable aleatoria en forma simultánea, por lo que el objetivo de esta sección es el de tratar y formular las distribuciones de probabilidad conjuntas para dos o más variables aleatorias.

Definición 1.6

si S es el espacio muestral de un experimento E, y $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$ son funciones, cada una de las cuales asignan un número real, $X_1(x), X_2(x), X_3(x), \cdots, X_k(x)$ a cada resultado x, designaremos como $(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k)$ el vector $k-dimensional$, el espacio del rango del vector $(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k)$ es el conjunto de todos los valores posibles del vector aleatorio

En la mayor parte de esta sección trataremos el caso bidimensional es decir el vector $k-dimensional$ es (X_1, X_2)

Definición 1.7

Funciones de probabilidad bivariada

1. Caso discreto: para cada resultado (x_{1i}, x_{2j}) de (X_1, X_2), asociamos un número

$$f(x_{1i}, x_{2j}) = P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2j})$$

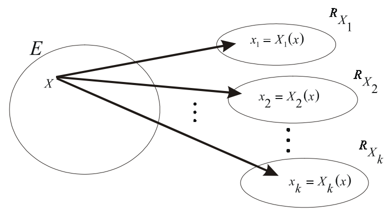


Figura 1.2: vector k-dimensional

donde

$$f(x_{1i}, x_{2j}) \geq 0$$
$$\text{para todo } i \in I, j \in J \text{ siendo } I, J \text{ conjuntos de subíndices}$$

y

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f(x_{1i}, x_{2j}) = 1$$

Los valores $((x_{1i}, x_{2j}), f(x_{1i}, x_{2j}))$ para todo $i \in I$ y $j \in J$ forman la distribución de probabilidad de (X_1, X_2)

2. Caso continuo . Si (X_1, X_2) es un vector aleatorio continuo con espacio del rango, R, en $I\!R^2$, entonces f, la función de densidad conjunta, tiene las siguientes propiedades

$$f(x_1, x_2) \geq 0 \ \forall (x_1, x_2) \in R$$

y

$$\int \int_R f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$$

Definición 1.8

Se dice que n variables aleatorias
$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$,tiene una distribución discreta conjunta si el vector aleatorio
$X = (X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k)$ puede tomar solamente un número finito o una sucesión finita de valores distintos posibles$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ en $I\!R^k$. La función de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$ se define entonces como la función f tal que para cualquier punto $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k) \in A \subset I\!R^k$,

$$f(x) = P(X = x) \quad \forall x \in A$$

donde A es cualquier subconjunto de $I\!R^k$

$$P(x \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

Definición 1.9

Distribuciones continuas. se dice que n variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$ tienen una distribución conjunta continua si existe una función no negativa f definida sobre $I\!R^k$ tal que para cualquier subconjunto $A \subset I\!R^k$

$$\begin{aligned} & P\left(\left(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k\right) \in A\right) \\ & = \int \cdots \int_A f\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_k \end{aligned}$$

Definición 1.10

La f.d conjunta de k variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$, se define como la función F cuyo valor en cualquier punto $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ de un espacio k-dimensional $I\!R^k$ está dado por la relación

$$F\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\right) = P\left(X_1 \leq x_1, \cdots X_k \leq x_k\right)$$

Ésta f.d satisface todas las propiedades de la f.d univariada.

En el caso bivariado. Si X y Y son variables aleatorias con f.d.p conjunta f se tiene que

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du dv$$

Si la distribución conjunta de $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$ es continua, entonces la f.d.p conjunta f se puede obtener a partir de la f.d conjunta F utilizando la relación

$$f\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\right) = \frac{\partial^k F\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\right)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k}$$

para todos los puntos $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ donde exista la derivada.

En el caso bivariado

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$\forall (x, y)$ donde exista la derivada parcial de 2^o orden

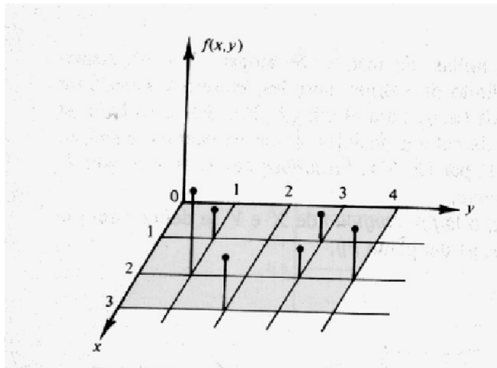


Figura 1.3: f.d.p del ejemplo 4.7

Ejemplo: 1.4.7

Supóngase que la variable aleatoria X puede tomar solamente los valores 1,2,3, y que la variable Y puede tomar solamente los valores 1,2,3,4, donde la f.p conjunta de X e Y es como indica la tabla

$X\|Y$	1	2	3	4
1	0.1	0	0.1	0
2	0.3	0	0.1	0.2
3	0	0.2	0	0

determine los valores de $P\left(X \geq 2, Y \geq 2\right)$ y $P\left(X = 1\right)$

Solución

Sumando$f\left(x, y\right)$ sobre todos los valores de $x \geq 2$ y de $y \geq 2$, se obtiene

$$\begin{aligned} p\left(X \geq 2, Y \geq 2\right) &= f\left(2,2\right) + f\left(2,3\right) + f\left(2,4\right) + \\ &+ f\left(3,2\right) + f\left(3,3\right) + f\left(3,4\right) \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

$$P\left(X = 1\right) = \sum_{y=1}^{4} f\left(1, y\right) = 0{,}2$$

Ejemplo: 1.4.8

Supóngase que la f.d.p conjunta de X e Y es la siguiente

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y & para \quad x^2\le y\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

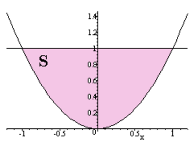
- Determine el valor de la constante c
- $P(X\geq Y)$

Solución

Sea el conjunto S de puntos (x,y) para los que f$(x,y)>0$ está representado en la figura 4.8 . puesto que $f(x,y)=0$ fuera de S, resulta que

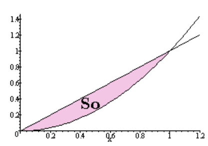
$$\int\int_s f(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} cx^2ydydx=\frac{4}{21}c$$

y como esta integral debe ser 1, entonces c=$\frac{21}{4}$



- Sea S_0 el conjunto donde $x\geq y$, entonces

$$\int\int_{S_0} f(x,y)\,dxdy=$$
$$\int_0^1\int_{x^2}^{x}\frac{21}{4}x^2ydydx=\frac{3}{20}$$



Fig(b) Ejemplo 4.8

Ejemplo: 1.4.9

Supóngase que X e Y son variables aleatorias que solamente pueden tomar valores en los intervalos $0\leq X\leq 2, 0\leq Y\leq 2$. Supóngase también que la f.d. conjunta de X e Y, para todos los valores $0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2$, es la siguiente

$$F(x,y) = \frac{1}{16}xy(x+2) \tag{1.1}$$

Solución

Se determinará primero la F_x de la variable aleatoria X y luego la f.d.p conjunta f de X e Y.
El valor de $F(x,y)$ en cualquier punto (x,y) del plano xy que nos representa un par de valores posibles de X e Y se puede calcular a partir **??**, teniendo en cuenta que $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Por tanto, si $x < 0$ o $y < 0$, entonces $F(x,y) = 0$. Si $x > 2$ o $y > 2$, entonces $F(x,y) = 1$, Si $0 \leq x \leq 2, y \geq 2$ entonces $F(x,y) = F(x,2)$ y resulta de la ecuación **??** ya que $F(x,y) = 0$ si $y > 0$

$$F(x,y) = \frac{1}{8}x(x+2)$$

análogamente, si $0 \leq y \leq 2, x > 2$, entonces

$$F(x,y) = \frac{1}{8}y(y+2)$$

La función $F(x,y)$ queda así definida para todo punto del plano xy .
Haciendo $y \longrightarrow \infty$, se determina que la f.d de la variable aleatoria X es

$$F_x = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{8}x(x+2) & si \quad 2 \geq x \geq 0 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Además, para $0 < x < 2, 0 < y < 2$,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{8}(x+y)$$

Mientras que si $x < 0, y < 0, x > 2, y > 2, entonces$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$$

Por tanto, la f.d.p conjunta de X e Y es

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & si \quad 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1.4.1. Distribuciones marginales

cuando nos interesa conocer la distribución por ejemplo de X_1 solamente entonces es necesario introducir el concepto de una distribución llamada marginal

- En el caso discreto la distribución marginal para X_1 y X_2 es

$$f(x_1) = \sum_{todo\, j} f(x_{1i}, x_{2j}) \; \forall i = 1, 2, \cdots$$
$$f(x_2) = \sum_{todo\, i} f(x_{1i}, x_{2j}) \; \forall j = 1, 2, \cdots$$

- En el caso continuo la distribución marginal para X_1 y X_2 es

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2$$
$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

1.4.1.1. Tablas de doble entrada

Consideremos una población de n individuos, desde un punto de vista descriptivo, donde cada uno de ellos presenta dos caracteres que representaremos mediante las variables X e Y donde la variable X tiene k modalidades y la variable Y tiene p modalidades, el problema ahora es tratar de representar toda la información de manera adecuada y fácil de interpretar, por lo que creamos una tabla formada por kp celdas de forma que tenga k filas y p columnas, donde la celda que denotaremos con el subíndice ij representará el número de elementos de la muestra que presentan simultáneamente las modalidades x_i, y_j

$X\|Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_p	total
x_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1p}	$\mathrm{n}_{1\cdot}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2j}	$\cdots$	n_{2p}	$\mathrm{n}_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	n_{i2}	n_{11}	n_{ij}	$\cdots$	n_{ip}	$\mathrm{n}_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	$\cdots$	n_{kj}	$\cdots$	n_{kp}	$\mathrm{n}_{k\cdot}$
total	$\mathrm{n}_{\cdot 1}$	$\mathrm{n}_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\mathrm{n}_{\cdot j}$	$\cdots$	$\mathrm{n}_{\cdot p}$	$\mathrm{n}_{\cdot\cdot}$

El número de individuos que presentan la modalidad $x_i$es la frecuencia absoluta marginal de x_i y se representa $n_{i\cdot}$ y evidentemente es

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{p} n_{ij}$$

de manera análoga se define la frecuencia absoluta marginal para la modalidad y_j

$$n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$$

El número total de elementos es

$$n = n_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{k} n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{p} n_{\cdot j}$$

Llamaremos frecuencia relativa $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$

las frecuencia relativas marginales serían

$$f_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{p} f_{ij} = \frac{n_{i\cdot}}{n}$$
$$f_{\cdot j} = \sum_{j=1}^{p} f_{ij} = \frac{n_{\cdot j}}{n}$$
$$f_{\cdot\cdot} = 1$$

Ejemplo: 1.4.10

Supóngase que X e Y tienen la f.p conjunta dada por la tabla del ejemplo 4.7. La f.p marginal f_x de X se puede determinar sumando los valores de cada fila de esta tabla . De esta manera se obtiene que

$$f_x(1) = 0{,}2$$
$$f_x(2) = 0{,}6$$
$$f_x(3) = 0{,}2$$
$$f_x(x) = 0 \text{ para los restantes valores de } x$$

Ejemplo: 1.4.11

Supóngase que la f.p.d conjunta de X e Y es la descrita en el ejemplo 4.8. Obtenga la f.d.p marginal

Solución

Se puede observar en la figura (a) del ej. 4.8 que X no puede tomar ningún valor fuera del intervalo $-1 \leq X \leq 1$ Por tanto, $f_x(x) = 0$ para $x < -1$ o $x > 1$. Además, para $-1 \leq x \leq 1$, se observa en la misma figura que $f(x, y) = 0$, a menos que $x^2 \leq y \leq 1$.Por tanto, para $-1 \leq x \leq 1$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy =$$
$$\int_{x^2}^{1} \left(\frac{21}{4}\right) x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x)(1 + x)\left(x^2 + 1\right)$$

Se puede observar en la figura (a) del ej. 4.8 que Y no puede tomar ningún valor fuera del intervalo $0 \leq Y \leq 1$. Por tanto, $f_y(y) = 0$ para $y < 0$ o $y > 1$. Además, para $0 \leq y \leq 1$, se observa en la misma fig. Que $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$.Por tanto, para $0 \leq y \leq 1$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx =$$
$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left(\frac{21}{4}\right) x^2 y dx = \left(\frac{7}{2}\right) y^{5/2}$$

1.4.1.2. Variables aleatorias independientes

Se dice que dos variables aleatorias son independientes si Para $A, B \subset I\!R$

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Es decir si

$$P(x \geq X, y \geq Y) = P(x \geq X)\, P(y \geq Y)$$
$$F(x, y) = F_x(x)\, F_y(y)$$
$$f(x, y) = f_x(x)\, f_y(y)$$

En el caso discreto la independencia nos indicaría que X, Y son independientes si

$$f_{ij} = f_{i\cdot} \cdot f_{\cdot j}$$

pero cada una de las relaciones siguientes expresa por si sola la independencia

$$\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} = \frac{n_{\cdot j}}{n_{\cdot\cdot}} = \frac{n_{2j}}{n_{2\cdot}} = \cdots = \frac{n_{kj}}{n_{k\cdot}}$$

Ejemplo: 1.4.12

Supóngase que se toman dos medidas independientes X eY de lluvia durante un periodo de tiempo en una localidad y que la f.d.p g de cada medida es la siguiente

$$g(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se determinará el valor de $P(X+Y \leq 1)$

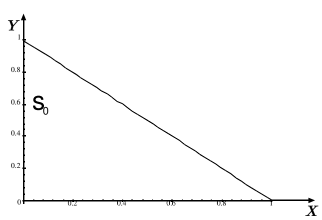
Solución

Puesto que X e Y son independientes y cada una tiene la f.d.p. g, resulta que para cualquier par de valores x e y la f.d.p. conjunta $f(x,y)$ de X e Y está dada por la relación $f(x,y) = g(x)\,g(y)$. Por tanto

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & si \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El conjunto S del plano xy en el que $f(x,y) > 0$ y el subconjunto S_0 en el que $x+y \leq 1$ se encuentra representado en la figura 4.9. Por tanto

$$P(X+Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xy\,dy\,dx = \frac{1}{6}$$



1.4.2. Distribuciones discretas

1.4.2.1. Distribuciones condicionales discretas

Sean X e Y dos variables aleatorias que tienen distribución discreta conjunta cuya f.p. conjunta es f, definimos f_x, f_y como las f.p marginales de X e Y, respectivamente. Si observamos un valor y de la variable Y, la probabilidad de que la variable aleatoria X tome cualquier valor particular x, está dado por la siguiente probabilidad condicional

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y) &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\ &= \frac{f(x,y)}{f_y(y)} \end{aligned}$$

A esta distribución se le denomina distribución condicional de X dado Y y se denota

$$f(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_y(y)} & si \quad f_y(y) > 0 \end{cases}$$

Análogamente se define la distribución de probabilidad condicional de Y dado X

$$f(y|x) = \left\{ \frac{f(x,y)}{f_x(x)} \quad si \quad f_x(x) > 0 \right.$$

La función de densidad conjunta se define

$$\begin{aligned} F(x|y) &= P(x \geq X, Y = y) \\ &\text{para un valor fijo de } y \\ F(y|x) &= P(y \geq Y, X = x) \\ &\text{Para un valor fijo de } x \end{aligned}$$

Ejemplo: 1.4.13

Analice la independencia para los datos tabulados

$X\|Y$	$1 \in (0,2]$	$3 \in (2,4]$	$5 \in (4,6]$	*total*
0	24	4	8	36
1	6	1	2	9
2	12	2	4	18
total	42	7	14	63

1.4.2.2. Distribuciones condicionales continuas

Sean X, Y variables aleatorias continuas con densidad conjunta $f(x,y)$ y las densidades marginales $f_x(x), f_y(y)$, respectrivamente . Entonces la densidad condicional de X dado un $Y = y$ fijo

$$f(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{fy(y)} & si \quad f_y(y) > 0 \\ 0 & en \quad otro\,caso \end{cases}$$

De manera analoga

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_x(x)} & si \quad f_x(x) > 0 \\ 0 & en \quad otro\,caso \end{cases}$$

Ejemplo: 1.4.14

Supóngase que la f.p conjunta de X e Y es la dada por la tabla del ejemplo 4.7 . Se determinará la f.p condicional de Y dado $X = 2$

Solución

A partir de de la tabla $f_x(x) = 0{,}6$. Por tanto la probabilidad condicional f($y|x$) $= \frac{f(2,y)}{0{,}6}$ Por ejemplo si $Y = 1$ entonces f($1|2$) $= 0{,}5$

Ejemplo: 1.4.15

Sea la f.d.p conjunta de X e Y la del ejemplo 4.8 Determinar la f.d.p condicional de Y dado $X = x$

Solución

El conjunto S para el cual $f(x,y) > 0$ se observa en la figura (a) del ejemplo 4.8 . Además la f.d.p marginal se obtuvo en el ejemplo 4.11 y se representa en la fig 4.14 .Se puede observar a partir de esta figura que $f_x(x) > 0$ para $-1 < x < 1$, pero no para $x = 0$. Por tanto, para cualquier valor concreto de x tal que $-1 < x < 0$ ó $0 < x < 1$, la f.d.p condicional f$(y|x)$ de Y es la siguiente

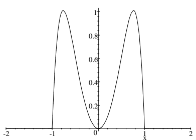


Fig 4.14

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^4} & si \quad x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & y > 1 \end{cases}$$

En particular si X=0.5 entonces

$$P(Y \geq 0{,}75|X = 0{,}5)$$
$$= \int_{0,75}^{1} f(y|0{,}5)dy = \frac{7}{15}$$

1.4.3. Cambio de variable

1.4.3.1. Funciones de una variable con una distribución discreta

Sea X una variable aleatoria que tiene una f.p discreta f, y sea $Y = h(X)$ otra variable aleatoria definida como función de X, y sea g la f.p discreta de Y, entonces g se puede obtener a partir de f para cualquier valor y de Y, así

$$g(y) = P(Y = y) =$$
$$P(h(X) = y) = \sum_{\{x:h(x)=y\}} f(x)$$

1.4.3.2. Funciones de una variable con una distribución continua

Sea X una variable aleatoria que tiene distribución continua, con una f.d.p de X f, se define para otra variable aleatoria $Y = h(X)$ y para cualquier real y, la f.d $G(y)$ de Y así

$$G(y) = P(y \geq Y)$$
$$P(y \geq h(X)) = \int_{\{x:y=h(x)\}} f(x)\, dx$$

además si la variable Y tiene una distribución continua, su f.d.p se puede obtener

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy}$$

Lo anterior lo podemos formalizar de la siguiente manera

Proposición 2

ea X una variable aleatoria cualquiera. Si realizamos el cambio de variable $Y = h(X)$, tenemos una nueva variable aleatoria de modo que su f.d.p es f y P$(a < x < b) = 1$ y además supóngase que $r(x)$ es continua y estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $a < X < b$ si y sólo si $\alpha < Y < \beta$ y sea $X = h^{-1}(Y)$ la función inversa de h para $\alpha < Y < \beta$, entonces la f.d.p de g está dada por la relación

$$g(y) = \begin{cases} g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| & si \quad \alpha < Y < \beta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde se tiene que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(y)\right)}$$

En el caso que la aplicación no sea inyectiva, podemos tener para un y dado ciertos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ tales que $f(x_i) = y$ En este caso

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left|\frac{dx_i}{dy}\right|$$

donde

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{1}{h'(x_i)}$$

Ejemplo: 1.4.16

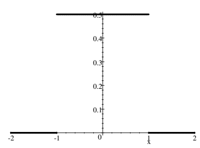
Sea X una variable aleatoria continua tal que $Y = X^2$en este caso $h(x) = x^2$ la cual no inyectiva pero si la restringimos a los reales positivos y los reales negativos tenemos que

$$g(y) = f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Ejemplo: 1.4.17

Supóngase que X tiene una distribución f uniforme sobre el intervalo $(-1, 1)$, así que

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 & si \quad -1 < x < 1 \\ 0 & si \quad x \geq 1, -1 \geq x \end{cases}$$



Distribución uniforme

Determine la f.d.p para la variable $Y = X^2$

Solución

Como $Y = X^2$ entonces Y debe pertenecer a $[0, 1]$, entonces para todo y $\in$ $(0, 1)$ la f.d G(y) de Y es

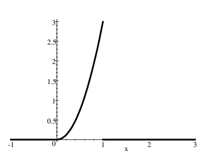
$$G(y) = P(y \geq Y)$$
$$P\left(y \geq X^2\right) = P\left(-y^{0,5} \leq X \leq y^{0,5}\right) =$$
$$\int_{-y^{0,5}}^{y^{0,5}} 0{,}5dx = \sqrt{y} \text{ para } y \in (0, 1)$$

Ahora la f.d.p $g(y)$ de Y es g$(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ para $y \in (0, 1)$

Ejemplo: 1.4.18

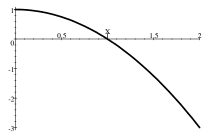
Supóngase que X es una v.a cuya f.d.p es

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & si \quad x \geq 1, 0 \geq x \end{cases}$$



Ejemplo 4.18

Obtengase la f.d.p para $Y = 1 - X^2$



$y = 1 - x^2$

Solución

En este ejemplo observamos de la gráfica que $Y = 1 - X^2$es continua y estrictamente decreciente para $0 < x < 1$ y además

$$\int_0^1 3x^2 dx = 1$$

y si $X \in (0,1)$ entonces Y $\in (0,1)$ y $X = (1-Y)^{0{,}5}$ por tanto para y $\in (0,1)$ $f[h^{-1}(y)] = 3(1-y)$ y $\frac{dx}{dy} = -0{,}5(1-y)^{-0{,}5}$entonces $g(y) = 1{,}5(1-y)^{0{,}5}$ así

$$g(y) = \begin{cases} 1{,}5(1-y)^{0{,}5} & si \quad 0 < y < 1 \\ 0 & si \quad y \geq 1, 0 \geq y \end{cases}$$

1.4.3.3. Funciones de dos o más variables aleatorias

- Sean n variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ las cuales tienen una distribución conjunta discreta cuya f.p conjunta es F y se definen m funciones $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_m$ de estas n variables de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & = & h_1(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n) \\ Y_2 & = & h_2(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_m & = & h_m(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n) \end{array}$$

  para un valor $y = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m)$ de las m variables $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_m$. Sea

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) : \\ y_1 = h_1(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n), \cdots, y_m = h_m(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)\}$$

  Entonces podemos determinar la f.p conjunta de $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_m$ en el punto $(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m)$ como

$$g(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m) = \sum_{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \in A} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

- Sean n variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ las cuales tienen una distribución conjunta continua cuya f.d conjunta es F y se definen n funciones $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$ de estas n variables de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & = & h_1\left(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\right) \\ Y_2 & = & h_2\left(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n & = & h_n\left(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\right) \end{array}$$

para un valor $y = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$ de las n variables
$Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$. Sean S el conjunto

$$\{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) : P\left((X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n) \in I\!R^n\right) = 1\}$$

$$T = \{(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) : \\ (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = h_1^{-1}\left(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\right)\}$$

Donde $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \in S$ Entonces podemos determinar la f.d.p conjunta de $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$ en el punto
$(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$ como

$$g(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y_1, y_2, \cdots, y_n))\,|J|, & (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: 1.4.19

Supóngase que dos variables aleatorias X_1 y X_2
tienen una distribución continua cuya f.d.p conjunta es

$$f\left(x_1, x_2\right) = \begin{cases} 4x_1x_2 & si \quad \begin{array}{c} 0 < x_1 < 1, \\ 0 < x_2 < 1 \end{array} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se determinará la f.d.p conjunta de dos nuevas variables aleatorias

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_2} \tag{a}$$

$$Y_2 = X_1X_2 \tag{b}$$

Solución

Al resolver el sistema (a) y (b) obtenemos que

$$X_1 = (Y_1 Y_2)^{0,5}$$
$$X_2 = \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)^{0,5}$$

Sea $S = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ entonces
$P((X_1, X_2) \in S) = 1$ y además

$$T = \{(y_1, y_2) : y_1 > 0, y_2 > 0, (y_1 y_2)^{0,5} < 1, \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{0,5} < 1\}$$

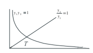
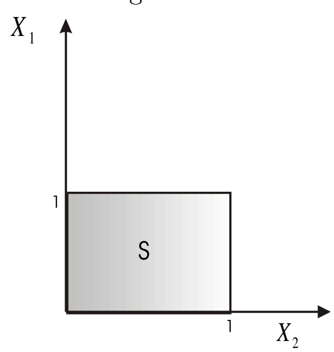


fig 4.19 a



ej 4.19 b

entonces

$$x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_2)^{0,5}$$
$$x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{0,5}$$

entonces

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{0,5} & \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{0,5} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{y_1^3}\right)^{0,5} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y_1 y_2}\right)^{0,5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$$

por tanto

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} 2\left(\frac{y_2}{y_1}\right) & si \quad (y_1, y_2) \in T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1.5 Esperanza matemática o valor esperado

1.5.1. Esperanza de una variable discreta

Definición 1.11

Supóngase que una variable aleatoria X tiene una distribución de probabilidad discreta f. la esperanza matemática de X, se denota E(X) y se define

$$E(X) = \sum_I x_i f(x_i) \qquad \forall i \in I \tag{*}$$

Donde I es el conjunto numerable de índices de los valores que puede tomar la variable

Puede de darse el caso de que la serie $\sum_I x_i f(x_i)$ sea divergente Por lo que en estos casos se dice que la esperanza existe si, y sólo si, la suma de la ecuación (*) es absolutamente convergente es decir si, y sólo si,

$$\sum_I |x_i| f(x_i) < \infty \tag{**}$$

Entonces podemos decir que si se cumple (**) E(X) existe y su valor está dado por la ecuación (*) y si (**) no se cumple $E(X)$ no existe

Ejemplo: 1.5.20

A un contratista se le asigna el trabajo de determinar la media de los días que tarda un trabajador en terminar un trabajador después de realzar el estudio obtuvo los siguientes datos

x	f(x)
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{5}{8}$
5	$\frac{2}{8}$
x>5	0

$$E(X) = 3 * \frac{1}{8} + 4 * \frac{5}{8} + 5 * \frac{2}{8} = \frac{33}{8}$$

1.5.2. Esperanza para una variable continua

Definición 1.12

Sea $f\left(x\right)$ la f.d.p de una variable aleatoria continua, entonces la esperanza matemática se define

$$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty} xf\left(x\right)dx$$

Se dice que esta integral existe, siempre que existan números a y b tales que $\infty < a < b < \infty$ y $P\left(a\leq x\leq b\right)=1$ en este caso se dice que $E\left(X\right)$ existe

Ejemplo: 1.5.21

Supóngase que la f.d.p de una variable aleatoria continua es

$$f\left(x\right)=\begin{cases} cx^2 & si \quad 0<x<1 \\ 0 & si \quad x\geq 0 \\ 0 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$$

Determine su esperanza

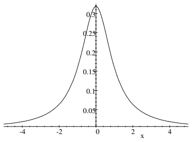
Solución

$E\left(X\right)=\int_0^1 cx^3dx=\frac{1}{4}c$

Ejemplo: 1.5.22

Sea la f.d.p de una variable aleatoria continua

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)} \qquad si -\infty<x<\infty$$



Distribución de Cauchy

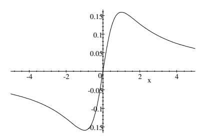
analicemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=1$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \infty \qquad (+)$$

De la gráfica se observa que la media debería ser cero, pero en la ecuación (+) observamos que $E(X)$ no existe, por lo tanto esta distribución llama da de Cauchy no tiene media



$xf(x)$

1.5.3. Propiedades del valor esperado

Teorema 1.1

Si $Y = aX + b$ donde a y b son constantes entonces

$$E(Y) = aE(X) + b$$

donde a y b son constantes

Prueba

Sea X una v.a con f.d.p f continua entonces

$$E(Y) = E(aX+b) =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x)\, dx = a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)\, dx =$$
$$aE(X) + b$$

En el caso discreto la demostración es similar, pero usando sumatoria en vez de integral ■(q.e.d)

Teorema 1.2 S

$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ son variables aleatorias cuyas esperanzas $E(X_i), i = 1, 2, 3, \cdots, n$ existen, entonces

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Ejemplo: 1.5.23

Sea un experimento de Bernoulli con proporción de obtener un éxito es p, determinar la esperanza al repetir el experimento n veces

Solución

Sea $X_i \rightsquigarrow \mathbb{B}$ (esto indica que X es una variable de Bernoulli), entonces

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el resultado es éxito} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

por tanto

$$P(X_i = 1) = p$$
$$P(X_i) = 0) = 1 - p$$

entonces

$$E(X_i) = 1p + 0(1-p) = p$$

Si el experimento se repite n veces tenemos que

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Teorema 1.3

Si $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ son n variables aleatorias independientes cuyas esperanzas $\mathrm{E}(X_i), i = 1, 2, 3, \cdots, n$ existen, entonces

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Ejemplo: 1.5.24

Sean X_1, X_2, X_3, variables aleatorias independientes tales que $E(X_i) = 2$ y $E\left(X_i^2\right) = 4$ para $i = 1, 2, 3$, Determine el valor de $E\left(X_1^2(X_2 - 3X_3)\right)$

Solución

$$\begin{aligned} E\left(X_1^2\left(X_2-3X_3\right)^2\right) &= E(X_1^2)E[(X_2-3X_3)^2] \\ &= 4E\left(X_2^2-6X_2X_3+9X_3^2\right) \\ &= 4\left(4-6*2*2+9*4\right)=64 \end{aligned}$$

Proposición 3

Sea X una v.a cuya f.d.p es f, entonces la esperanza de cualquier función $h(X)$se puede determinar que

$$E\left(h\left(x\right)\right)=E\left(Y\right)=\int_{-\infty}^{\infty} yg\left(y\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty} h\left(x\right)f\left(x\right)dx$$

Ejemplo: 1.5.25

Determine la esperanza para la $X^{0,5}$ si X tiene una f.d.p como lo determina el ejemplo 4.21

Solución

Del ejemplo 4.21 sabemos que
$E\left(X^{0,5}\right)=\int_0^1 x^{0,5}\left(cx^2\right)dx=0{,}285\,71c$

Proposición 4

Sean $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ variables aleatorias con f.d.p conjunta si existe una relación tal que
$Y=h\left(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\right)$ se tiene que
$E(Y)=\int\cdots\int_A h(X_1,\cdots,X_n)f(X_1,\cdots,X_n)dx_1\cdots dx_n,\ A\subset I\!R^n$

1.6 Varianza

Definición 1.13

Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mu = E(X)$. la varianza de X se denotará $V(X)$ o σ^2 y se define

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$
$$V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 f(x_i) \text{ X es discreta}$$
$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx \text{ X es continua}$$

1.6.1. Propiedades de la varianza

- Si b es una constante $V(b) = 0$ si y solo si $P(X = b) = 1$

Prueba

V$(b) = E[(b - E(b))^2] = E[(b - b)^2] = 0$ ■(q.e.d)

- Sea X una v.a y sea a, b contantes entonces

$$V(aX + b) = a^2 X$$

Prueba

$V(aX + b) = E[((aX + b) - E(aX + b))^2] =$
$E[((aX + b) - (a\mu + b))^2] = E[(aX - a\mu)^2]$
$a^2 E[(X - \mu)^2] = a^2 V(X)$ ■(q.e.d)

- Para cualquier variable aleatoria X,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

- Sea $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ variables aleatorias independientes entonces

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Ejemplo: 1.6.26

Consideremos una variable aleatoria discreta con función de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{4^x} & si \quad x = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Obtener

1. El valor de la constante c para que f sea una función de probabiliad
2. calcular $P(X = 3)$ y $P(3 \geq X)$
3. Calculese la esperanza y la varianza

Solución

1. $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{c}{4^x} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} c = \frac{c}{3} = 1 \Longrightarrow c = 3$
   Luego la f.p es
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4^x} & si \quad x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$
2. $P(X = 3) = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64}$ y $P(3 \geq X) = \sum_{x=1}^{3} \frac{3}{4^x} = 0{,}987$
3. $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{3x}{4^x} = \frac{4}{3}, V(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{3(x-\frac{4}{3})^2}{4^x} = \frac{4}{9}$

Solución

Sea X una variable aleatoria con f.d

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \quad x > 1, x < 0 \end{cases}$$

Determinar

1. La media
2. La varianza

1. $E(X) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$
2. $V(X) = \int_0^1 (x - 0{,}5)^2 \, dx = 8.333\,3 \times 10^{-2}$

Ejemplo: 1.6.27

Determine la varianza para la variable de Bernoulli definida en el ejemplo 4.23

Solución

tenemos que $V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$ por lo que nos que determinar

$$E\left(X_i^2\right) = \sum_{j=1}^{2} x_j^2 f(x_j) = p$$
$$V(X_i) = p - p^2 = p(1-p)$$
$$\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq$$

Proposición 5

uando estudiamos tablas de doble entrada podemos determinar las medias y varianzas marginales

$$\overline{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot} x_i$$
$$\overline{\overline{y}} = \sum_{j=1}^{k} f_{\cdot j} y_j$$
$$V_X = \sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot}(x_i - \overline{\overline{x}})^2$$
$$V_Y = \sum_{j=1}^{k} f_{\cdot j}(y_j - \overline{\overline{y}})^2$$

Proposición 6

uando estudiamos problemas con tablas de doble entrada podemos establecer las medias y varianzas marginales así

$$\overline{\overline{x}} = \frac{1}{n_{\cdot\cdot}} \sum_{i=1}^{m} n_{i\cdot} x_i$$
$$\overline{\overline{y}} = \frac{1}{n_{\cdot\cdot}} \sum_{j=1}^{k} n_{\cdot j} y_j$$
$$V_X = \frac{1}{n_{\cdot\cdot}} \sum_{i=1}^{m} n_{i\cdot}(x_i - \overline{\overline{x}})^2$$
$$V_Y = \frac{1}{n_{\cdot\cdot}} \sum_{j=1}^{k} n_{\cdot j}(y_j - \overline{\overline{y}})^2$$

1.7 Covarianza y correlación

Definición 1.14

[Covarianza]Sean X e Y variables aleatorias que tienen una distribución conjunta y además esperanzas y varianzas $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$ respectivamente . La covarianza de X e Y se denota $cov\,(X, Y)$, y se define

$$cov\,(X, Y) = E[(X - \mu_X)\,(Y - \mu_Y)]$$

$$cov\,(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} f_{ij} x_i y_j - \overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{y}}$$

Se dice que esta esperanza existe si $\sigma_X^2 < \infty, \sigma_Y^2 < \infty$
La covarianza puede ser negativa, positiva o cero

Definición 1.15

[Correlación]Si la $cov\,(X, Y)$ existe se denota el coeficiente de correlación $\rho\,(X, Y)$ el cual se define

$$\rho\,(X, Y) = \frac{cov\,(X, Y)}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \qquad si\, \sigma_Y^2, \sigma_X^2 \neq 0$$

1.7.1. Interpretación geométrica de la covarianza

Si consideramos una nube de puntos formados por las parejas de los datos concretos de dos v.a X e Y (x_i, y_j) el centro de gravedad de esta nube de puntos es $\left(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}\right)$, ahora si trasladamos los ejes de tal forma que este punto sea el centro, la nube queda dividida en cuatro cuadrantes los que indica que los puntos que se encuentran en el primer y tercer cuadrante contribuyen positivamente al valor de la covarianza y los que se encuentran en los otros dos cuadrantes contribuyen negativamente. como lo indica la figura.a y si los puntos se reparten con igual proporción la covarianza será nula como en la fig b

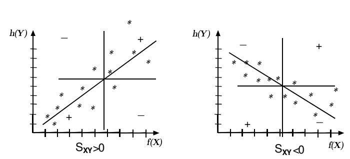


fig a

como indica la fig. b

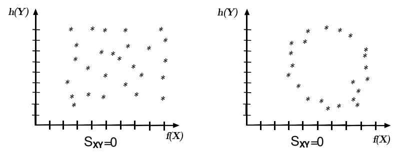


Figura 1.4: fig b

1.7.2. Interpretación geométrica de la correlación

Es el coseno del ángulo formado por los vectores de las desviaciones con respecto a las medias de X e Y es decir

$$\cos\theta = \frac{\left(\overrightarrow{X} - \vec{\bar{x}}\right)\left(\overrightarrow{Y} - \vec{\bar{Y}}\right).}{\left\|\overrightarrow{X} - \vec{\bar{x}}\right\|\left\|\overrightarrow{Y} - \vec{\bar{y}}\right\|}$$

Es decir este coeficiente determina la relación lineal entre las desviaciones de las variables y esta dependencia es perfecta cuando $\rho = \pm 1$

1.7.3. Propiedades

1. $-1 < \rho < 1$
2. Para cualesquiera variables X e Y tales que la covarianza exista

   (a).
   $$cov\left(X,Y\right) = E\left(XY\right) - E\left(X\right)E\left(Y\right)$$

   (b). Si las variables X e Y son independientes
   $$cov\left(X,Y\right) = \rho\left(X,Y\right) = 0$$

   (c). $V\left(X+Y\right) = V\left(X\right) + V\left(Y\right) + 2cov\left(X,Y\right)$

   (d). $V\left(X-Y\right) = V\left(X\right) + V\left(Y\right) - 2cov\left(X,Y\right)$

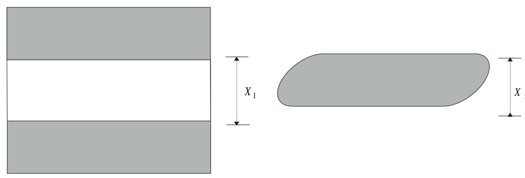
   (e). Si $Y = aX + b$, entonces $cov\left(X,Y\right) = a\sigma_X^2$

Ejemplo: 1.7.28

Dos piezas, como indica la figura ej.4.29, se pueden ensamblar. Si consideramos que las cotas X_1, X_2 son v.a. independientes y además consideramos que el espacio que queda libre entre las dos es $Y = X_1 - X_2$, donde la función de distribución conjunta para X_1, X_2 es

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 8\exp(-2x_1 + x_2) & si \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la media $E(Y)$ y la varianza $V(Y)$, si $E(X_1) = 0{,}5$, $E(X_2) = 0{,}25$



Ej 4.28

Solución

Para determinar la media tenemos que

$$E\left(Y\right)=E\left(X_1-X_2\right)=E\left(X_1\right)-E\left(X_2\right)=$$
$$0{,}5-0{,}25=0{,}25$$

Para determinar la varianza de Y primero debemos determinar V_{X_1} y V_{X_2}.
Como las variables X_1, X_2 son independientes entonces

$$f\left(x_1,x_2\right)=f_{x_1}\left(x_1\right)f_{x_2}\left(x_2\right)$$

además f es fácil de Factoriza entonces

$$f\left(x_1,x_2\right)=f_{x_1}\left(x_1\right)f_{x_2}\left(x_2\right)$$
$$[c_1\exp\left(-\left(2x_1\right)\right)]c_2\exp\left(-\left(4x_2\right)\right)]$$

y tenemos que

$$E\left(X_1\right)=\int_0^\infty c_1x_1\exp\left(-\left(2x_1\right)\right)dx_1=\frac{1}{4}c_1=\frac{1}{2}$$
$$\textit{entonces}\qquad c_1=2\quad\text{como}\quad c_1c_2=8\Longrightarrow c_2=4$$

Por lo tanto

$$V\left(X_1\right)=E\left(X_1^2\right)-E^2\left(X_1\right)=$$
$$=\int_0^\infty 2x_1^2\exp\left(-\left(2x_1\right)\right)dx_1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$
$$V\left(X_2\right)=\int_0^\infty 4x_2^2\exp\left(-\left(2x_2\right)\right)dx_2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$$

Ahora tenemos que X_1 Y X_2 son independientes entonces

$$V\left(Y\right)=V\left(X_1\right)+V\left(X_2\right)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{15}{16}=\frac{19}{16}$$

Ejemplo: 1.7.29

Suponga que X_1 y X_2 son calificaciones codificadas en dos pruebas de inteligencia, y la f.d.p conjunta está dada por

$$f\left(x_1,x_2\right)=\begin{cases}6x_1^2x_2 & si \quad 1\geq x_1\geq 0, 1\geq x_2\geq 0\\ 0 & en\text{ otro caso}\end{cases}$$

Encuentre $E(X_2|X_1)$, $E(X_1|X_2)$ y $V(X_1|X_2)$

Solución

La región S está representada en la fig 4.19 . Ahora determinaremos f_{x_1} y f_{x_2}

$$f_{x_1}(x_1) = \int_0^1 6x_1^2 x_2 dx_2 = 3x_1^2$$
$$f_{x_2}(x_2) = \int_0^1 6x_1^2 x_2 dx_1 = 2x_2$$

entonces

$$f(x_1|x_2) = \begin{cases} 3x_1^2 & si \quad 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & en \text{ otro caso} \end{cases}$$

y

$$f(x_2|x_1) = \begin{cases} 2x_2 & si \quad 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & en \text{ otro caso} \end{cases}$$

Por lo cual

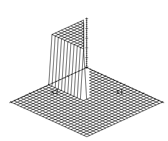
$$E(X_2|X_1) = \int_0^1 2x_2^2 dx_2 = \frac{2}{3}$$
$$E(X_1|X_2) = \int_0^1 3x_1^3 dx_1 = \frac{3}{4}$$
$$V(X_1|X_2) = \int_0^1 3x_1^4 dx_1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

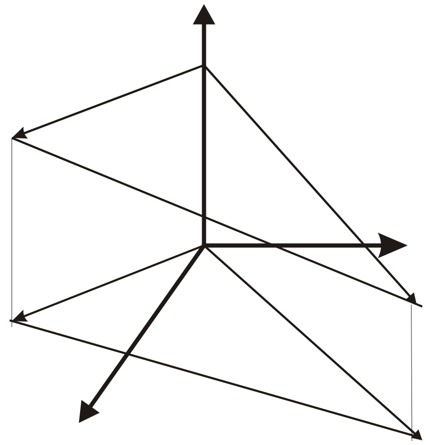
Ejemplo: 1.7.30

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias que tienen f.d.p conjunta

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & if \quad -x_2 < x_1 < x_2, 0 < x_2 < 1 \\ 0 & if \quad -x_2 \geq x_1, x_1 \geq x_2, 0 \geq x_2, x_2 \geq 1 \end{cases}$$

determinar $\text{cov}(X_1, X_2)$





Hallemos f_{X_1} y f_{X_2}

$$f(x_1) = \begin{cases} 1 - x_1 & si \quad 0 < x_1 < 1 \\ 1 + x_1 & si \quad -1 < x_1 < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f(x_2) = \begin{cases} 2x_2 & si \quad 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto

$$E(X_1) = \int_0^1 x_1 (1 - x_1)\, dx_1 + \int_{-1}^0 x_1 (1 + x_1)\, dx_1 = 0$$

$$E(X_2) = \int_0^1 x_2 (2x_2)\, dx_2 = \frac{2}{3}$$

$$cov(X_1, X_2) = \int_0^1 \int_{-x_2}^{x_2} x_1 x_2 dx_1 dx_2 - 0 = 0$$

1.8 Problemas

1. Supóngase que una variable aleatoria X tiene una distribución discreta con la siguiente f.p.:

$$f(x) = \begin{cases} cx & para \quad x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determínese el valor de la constante c.

2. Supóngase que se lanzan dos dados equilibrados y sea X el valor absoluto de la diferencia entre los dos números que aparecen. Determínese y represéntese la f.p. de X.

3. Supóngase que se realizan 10 lanzamientos independientes de una moneda equilibrada. Determínese la f.p. del número de caras que se obtienen.

4. Supóngase que una urna contiene 7 bolas rojas y 3 azules. Si se seleccionan 5 bolas aleatoriamente, sin reemplazo, determínese la f.p. del número de bolas rojas que se obtienen.

5. Supóngase que una variable aleatoria X tiene una distribu-

ción binomial con parámetros $n = 15$ y $p = 0{,}5$. Calcúlese $P(X < 6)$.

6. Supóngase que una variable aleatoria X tiene una distribución binomial con parámetros $n = 8$ y $p = 0{,}7$. Calcúlese la $P(X > 5)$ utilizando la tabla que se encuentra al final del libro. Sugerencia: Utilícese el hecho de que $P(X \geq 5) = P(Y \leq 3)$, donde Y tiene una distribución binomial con parámetros $n = 8$ y $p = 0{,}3$.

7. SÍ el 10 % de las bolas de una urna son rojas y se selecciona al azar y con reemplazo el 20 %, ¿cuál es la probabilidad de que se obtengan más de tres bolas rojas?

8. Supóngase que una variable aleatoria X tiene una distribución discreta con la siguiente f.p.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & para \quad x = 1, 2, \cdots, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre el valor de la constante c.

9. Demuéstrese que no existe un número c tal que la siguiente función sea una f.p.:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x} & para \quad x = 1, 2, \cdots, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

10. Una variable aleatoria discreta X tiene la función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\left(\frac{1}{2}\right)^x & para \quad x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

b) Encuentre la función de distribución acumulativa, $F(x)$.

11. La variable aleatoria discreta $N(N = 0, 1, ...)$ tiene probabilidades de ocurrencia de $kr^n(0 < r < 1)$. Encuentre el valor apropiado de k.

12. El servicio postal requiere, en promedio, 2 días para entregar una carta en una ciudad. La varianza se estima como $.4(día)^2$. Si un ejecutivo desea que el 99 por ciento de sus cartas se entreguen a tiempo, ¿con cuánta anticipación las debe depositar en el correo?

13. Dos agentes de bienes raíces, A y B, tienen lotes de terrenos que se ofrecen en venta. Las distribuciones de probabilidad de los precios de venta por lote se muestran en la siguiente tabla.

	Precio					
\$	1000	1050	1100	1150	1200	1350
A	0.2	0.3	0.1	0.3	0.05	0.05
B	0.1	0.1	0.3	0.3	0.1	0.1

Suponiendo que A y B trabajan en forma independiente, calcule

a) El precio de venta esperado de A y de B.

b) El precio de venta esperado de A dado que el precio de venta de B es \$1,150.

c) La probabilidad de que tanto A como B tengan el mismo precio de venta.

14. Demuestre que la función de probabilidad para la suma de los valores obtenidos al lanzar dos dados puede escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{36} & si \quad x = 2, 3, \cdots, 6 \\ \frac{13-x}{36} & si \quad x = 7, 8, \cdots, 12 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la media y la varianza de X.

15. Una organización de consumidores que evalúa automóviles nuevos reporta regularmente el número de defectos importantes en cada automóvil examinado. Detonemos por X el número de defectos importantes en un automóvil seleccionado al azar de un cierto tipo. La f.d de X es como sigue

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 0{,}06 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0{,}19 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0{,}39 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 0{,}67 & si \quad 3 \leq x < 4 \\ 0{,}92 & si \quad 4 \leq x < 5 \\ 0{,}97 & si \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & si \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Calcule las siguientes probabilidades directamente de la fd.

a) $P(X = 2)$

b) $P(X > 3)$

c) $P(2 < X < 5)$

d) $P(2 \leq X \leq 5)$

16. Una compañía de seguros ofrece a sus tenedores de póliza varias opciones diferentes para el pago de primas. Para un tenedor seleccionado al azar, sea $X =$ número de meses entre pagos sucesivos. La f.d de X es como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 0{,}30 & , \quad 1 \leq x < 3 \\ 0{,}40 & , \quad 3 \leq x < 4 \\ 0{,}45 & , \quad 4 \leq x < 6 \\ 0{,}60 & , \quad 6 \leq x < 12 \\ 1 & , \quad x \geq 12 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la f.d.p de X?

b) Con el solo uso de la f.d, calcule $P(3 < X < 6)$ y $P(4 \geq X)$.

17. El voltaje de una batería nueva puede ser aceptable (A) o no aceptable (I). Cierta linterna de mano necesita dos baterías, así que éstas han de seleccionarse y probarse independientemente hasta encontrar dos aceptables. Supongamos que el 80 % de todas las baterías tiene voltaje aceptable y denotemos por Y el número de baterías que deben ser probadas.

a) ¿Cuál $P(Y = 2)$?

b) ¿Cuál es $P(Y = 3)$? (SUGERENCIA: Hay dos resultados diferentes que resultan en Y= 3.)

c) Para tener $Y = 5$, ¿qué debe ser cierto de la quinta batería seleccionada? Haga una lista de cuatro resultados para los que $Y = 5$ y luego determine $f(5)$.

d) Utilice el lector el modelo de sus respuestas para las partes de la (a) a la (c) para obtener una fórmula general para $f(y)$.

18. Dos dados no cargados de seis caras se tiran independientemente. Sea $M =$ el máximo de los dos tiros (así que $M(1,5) = 5, M(3,3) = 3$, etcétera).

a) ¿Cuál es la f.d.p de M?[SUGERENCIA: Primero determine $f(1)$, luego $f(2)$, etcétera.]

b) Determine la f.d de M y grafiquela.

19. Una biblioteca se suscribe a dos revistas semanales de noticias, cada una de las cuales se supone que llega por correo el miércoles. En realidad, cada una puede llegar el miércoles, jueves, viernes o sábado. Suponga que las dos llegan independientemente una de la otra y para cada una P(mié.) =0 .4, P(jue.) = 0.3, P(vie.) = 0.2 y P(sáb.) = 0. 1.Sea Y= el número de días después del miércoles que tardan ambas revistas en llegar (por lo que los posibles valores deˆson 0, 1,2 o 3). Calcule la f.d.p de Y. (SUGERENCIA: Hay 16 resultados posibles; Y(M, M) = 0, Y(V. J) = 2, etcétera.]

20. La distribución de probabilidad deˆ, el número de defectos por cada 10 metros de una tela sintética en rollos continuos de ancho uniforme, es

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

Dibuje la distribución acumulada de X.

21. Una firma de inversiones ofrece a sus clientes bonos municipales que vencen después de diferente número de años. Dada la distribución acumulada de T, el número de años para el vencimiento de un bono seleccionado aleatoriamente, es

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 1 \\ \frac{1}{4} & , \quad 1 \leq t < 3 \\ \frac{1}{2} & , \quad 3 \leq t < 5 \\ \frac{3}{4} & , \quad 5 \leq t < 7 \\ 1 & , \quad t \geq 7 \end{cases}$$

Encuentre

a) $P(T = 5)$

b) $P(T > 3)$

c) $P(1{,}4 < T < 6)$.

22. Una variable aleatoria continua X que puede asumir valores entre $x = 2$ y $x = 3$ tiene una función de densidad $f(x) = 1/2$

a) Demuestre que el área bajo la curva es igual a 1.

b) Encuentre $P(2 < X < 2{,}5)$

c) Encuentre $P(X \leq 1{,}6)$.

23. Una variable aleatoria continua X que puede tomar valores entre $x = 2$ y $x = 5$ tiene una función de densidad $f(x) = 2(1 + x)/27$. Encuentre

a) $P(X < 4)$

b) $P(3 < X < 4)$.

24. La proporción de personas que contestan una cierta encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua .y que tiene la f.d.p

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{5} & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Demuestre que $P(0 < X < 1) = 1$

b) Encuentre la probabilidad de que más de 0.25 pero menos de 0.5 de las personas en contacto responderán a este tipo de encuesta.

25. De una caja que contiene 4 monedas de 1000 pesos y 2 de 500, se seleccionan 3 de ellas al azar sin reemplazo. Determine la distribución de probabilidad para el total T de las 3 monedas. Exprese gráficamente la distribución de probabilidad como un histograma.

26. De una caja que contiene 4 pelotas negras y 2 verdes, se seleccionan 3 de ellas en sucesión con reemplazo. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de pelotas verdes.

27. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de discos de jazz cuando 4 discos se seleccionan al azar de una colección que consiste de 5 discos de jazz, 2 de música clásica y 3 de polka. Exprese el resultado por medio de una fórmula.

28. Encuentre una fórmula para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X que representa el resultado de un solo lanzamiento de un dado.

29. Un embarque de 7 televisores contiene 2 aparatos defectuosos. Un hotel realiza una compra aleatoria de 3 de ellos. Si X es el número de unidades defectuosas que se compran, encuentre la distribución de probabilidad de X. Exprese los resultados gráficamente como un histograma de probabilidad.

30. De un paquete de cartas se sacan tres en sucesión sin reemplazo. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de cartas de espadas.

31. Suponga que X y Y tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$f(x,y)$		x = 2	x = 4
y	1	0.10	0.13
	2	0.20	0.30
	3	0.10	0.15

a) Encuentre la distribución marginal de X

b) Encuentre la distribución marginal de Y

32. Dada la función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6-x-y}{8}, & 0 < x < 2, \quad 2 < y < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $P(1 < Y < 3 | X = 2)$

33. Si X y Y representan las duraciones, en años, de dos componentes en un sistema electrónico. Si la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $P(0 < X < 1 | Y = 2)$.

34. Determine si las dos variables aleatorias del , ejercicio 31 son dependientes o independientes.

35. La cantidad de kerosene, en miles de litros, en un tanque al principio del día es una cantidad aleatoria Y, de la cual una cantidad aleatoria X se vende durante el día. Suponga que el tanque no se rellena durante el día, de tal forma que $x \leq y$, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine si X y Y son independientes.

b) Encuentre $P(1/4 < X < 1/2 | Y = 3/4)$.

36. Una vinatería cuenta con instalaciones para atender a clientes que llegan en automóvil y a quienes llegan caminando. En un día seleccionado aleatoriamente, sean X y Y, respectivamente, los periodos de tiempo que se utilizan para cada caso y suponga que la función de densidad conjunta para estas dos variables aleatorias es

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y), & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre la densidad marginal de X

b) Encuentre la densidad marginal de Y

c) Encuentre la probabilidad de que las instalaciones para quienes lleguen en automóvil se utilicen menos de la mitad del tiempo.

37. Una compañía dulcera distribuye cajas de chocolates con una mezcla de tres tipos de chocolate: cremas, de chiclosos y envinados. Suponga que el peso de cada caja es de 1 kilogramo, pero los pesos individuales de las cremas, de los chiclosos y de los envinados varían de una caja a otra. Para una caja seleccionada aleatoriamente, X y Y representan los pesos de las cremas y de los chiclosos, respectivamente, y suponga que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{lr} 24xy, \quad 0 < x < 1,\ x + y \leq 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{array} \right|$$

a) Encuentre la probabilidad de que en una caja determinada el peso de los chocolates envinados sea más de 0.5 del peso total

b) Encuentre la densidad marginal para el peso de las cremas.

c) Encuentre la probabilidad de que el peso de los chocolates de chiclosos en una caja sea menos de 1/8 de kilogramo, si se sabe que las cremas constituyen 3/4 del peso.

38. Un distribuidor de aparatos electrodomésticos vende tres modelos diferentes de congeladores verticales con capacidad de 13.5, 15.9 y 19.1 pies cúbicos de espacio de almacenaje, respectivamente. Sea $X =$ la cantidad de espacio de almacenaje comprado por el siguiente cliente que va a comprar un congelador. Supongamos que X tiene f.d.p

x	13.5	15.9	19.1
$f(x)$	0.2	0.5	0.3

a) Calcule $E(X)$, $E(X^2)$ y

b) Si el precio de un congelador que tiene una capacidad de X pies cúbicos es $25X - 8{,}5$, ¿cuál es el precio esperado pagado por el siguiente cliente que va a comprar un congelador?

c) ¿Cuál es la varianza del precio $25X - 8{,}5$ pagado por el siguiente cliente?

d) Suponga que mientras la capacidad nominal de un congelador es X, la capacidad real es $h(X) = X - 0{,}01X^2$. ¿Cuál es la capacidad real esperada del congelador comprado por el siguiente comprador?

39. Suponga que el número de plantas de un tipo particular que se encuentra en una región rectangular (llamada cuadrante por ecologistas) de cierta región geográfica es una v.a. X con f.d.p

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{c}{x^3} & , & x = 1, 2, 3, \cdots \\ 0 & , & \text{en otro caso} \end{array} \right|$$

¿Es $E(X)$ finita? Justifique su respuesta (ésta es otra distribución a la que los expertos en estadística llamarían de cola gruesa).

40. Una pequeña farmacia solicita ejemplares de una revista de noticias para su estante cada semana. Sea $X =$ demanda de la revista, con f.d.p

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Suponga que el propietario de la farmacia paga en realidad \$0.25 por cada ejemplar de la revista de" precio a clientes es de \$1.00. Si las revistas que quedan el fin de semana no tienen valor de recuperación, ¿es mejor pedir tres o cuatro ejemplares de la revista? (SUGERENCIA: Para tres y cuatro ejemplares solicitados, exprese el ingreso neto como función de la demanda X y luego calcule el ingreso esperado.)

41. Sea X el daño incurrido (en \$) en cierto tipo de accidente durante un año dado. Los posibles valores de X son 0, 1 000, 5 000 y 10 000, con probabilidades 0.8, 0.1, 0.08 y 0.02 respectivamente. Una compañía particular ofrece una póliza deducible de \$500. Si la compañía desea que su utilidad esperada sea de \$100, ¿qué prima debe cobrar?.

42. Los n candidatos para un trabajo han sido clasificados como 1, 2, 3,. .., n. Sea $X =$ el grado de un candidato seleccionado al azar, de modo que$X$ tiene una f.d.p de

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{n} & , & 1, 2, 3, \cdots, n \\ 0 & & \text{en otro caso} \end{array} \right|$$

(ésta recibe el nombre de distribución discreta uniforma). Calcule $E(X)$ y $V(X)$. [SUGERENCIA: La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n+1)/2$, mientras que la suma de su cuadrados es $n(n+1)(2n+1)/6$.]

43. Sea $X =$ resultado cuando un dado no cargado se lanza una vez Si antes de hacer rodar el dado se ofrece al tirador ya sea (1/3.5) dólares o $h(X) = 1/X$ dólares, ¿aceptaría la cantidad garantizada o jugaría? [NOTA: No es generalmente cierto que $1/E(X) = E(1/X)$.]

44. Una compañía proovedora de productos químicos tiene actualmente en existencia 100 libras decierto producto que vende a clientes en lotes de 5 libras. Sea $X =$ número de lotes ordenados por un cliente seleccionado al azar, y suponga que X tiene una f.d.p de:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Calcule $E(X)$ y $V(X)$. Luego calcule el número esperado de libras sobrantes después de embarcar el pedido del siguiente cliente, y la varianza del número de libras restantes. (SUGERENCIA: El número de libras restantes es una función lineal de X.]

45. Considere la f.d.p para tiempo total de espera Y de dos autobuses es

$$f(y) = \begin{array}{ccc} \frac{1}{25}y & , & 0 \leq y < 5 \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}y & , & 5 \leq y \leq 25 \\ 0 & , & \text{en otro caso} \end{array}$$

a) Calcule y trace la f.d. de Y. [SUGERENCIA: Considere separadamente $0 \leq y < 5$ y$5 \leq y \leq 10$ al calcular $F(y)$. Una figura de la f.d.p podría ser útil.]

b) Obtenga una expresión para el $(100p)$avo percentil. (SUGERENCIA: Considere separadamente $0 < p < 0{,}5$ y $0{,}5 << 1$.)

c) Calcule $E(Y)$ y $V(Y)$. ¿Cómo se comparan éstas con el tiempo de espera y varianza supuestos para un solo autobús cuando el tiempo es uniformemente distribuido en [0, 5]?

46. Un ecologista desea marcar una región circular de muestreo de 10 m de radio. Sin embargo, el radio de la región resultante es en realidad una variable aleatoria R con f.p.d

$$f(r) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{3}{4}\left[1 - (10 - r)^2\right] & , & 9 \leq r \leq 11 \\ 0 & , & \text{en otro caso} \end{array} \right|$$

¿Cuál es el área esperada de la región circular resultante?

47. La demanda semanal de gas propano (en miles de galones) de una distribuidora en particular es una v.a. X con f.d.p

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) & , \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Calcule la f.d de X.

   b) Obtenga una expresión para el $(100p)$avo percentil ¿Cuál es el valor de $\tilde{X}$?

   c) Calcule $E(X)$ y $V(X)$.

   d) Si 1500 galones están en existencia al principio de semana y no se recibe nuevo suministro durante la semana, ¿cuánto de los 1500 galones se espera que queden al fin de la semana?

48. Si la temperatura a la que un cierto compuesto es una variable aleatoria con valor n desviación estándar de $2°C$, ¿cuáles son la temperatura media y la desviación estándar medidas ^oF, $^oF = 1{,}8°C + 32$)

49. 24. Haga que X tenga la f.d.p de Pareto

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k\theta^k}{x^{k+1}} & ; \quad x \ge \theta \\ 0 & ; \quad x < \theta \end{cases}$$

   a) Si $k > 1$, calcule $E(X)$.

   b) ¿Qué se puede decir acerca de $E(X)$ si $k = 1$?

   c) Si $k > 2$, demuestre que $V(X) = k\theta^2 (k-1)^{-2} (k-2)^{-1}$

   d) Si $k = 2$, ¿qué se puede decir acerca de $V(X)$

   e) ¿Qué condiciones para k son necesarias para asegurar que $E(X^n)$ sea finita?

50. Sea X la temperatura en $°C$ a la que tiene lugar cierta reacción química, y sea Y la temperatura en $°F$

   a) Si la mediana de la distribución X es $\tilde{X}$, demuestre que. $1{,}8\tilde{X} + 32$ es la mediana de la distribución Y

   b) Más generalmente, si $Y = aX + b$, ¿cómo se relaciona cualquier percentil particular de la distribución Y con el correspondiente percentil de la distribución X?

51. Al recordar la definición de σ^2 para una sola v.a. X, escriba una fórmula que sea correcta para calcular la varianza de una función $h(X, Y)$ de dos variables aleatorias. [SUGERENCIA: Recuerde que la varianza es sólo un valor esperado especial.]

52. Utilice las reglas de valor esperado para demostrar que

   a) $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$.

   b) Utilice la parte (a) junto con las reglas de varianza y desviación estándar para demostrar que $Corr(aX+b, cY+d) = Corr(X, Y)$ cuando$a$ y c tienen el mismo signo.

   c) ¿Qué sucede si a y c tienen signos opuestos?

53. Demuestre que si $Y = aX + b$, $(a \neq 0)$, entonces $Corr(X, Y) = +1$ o -1. ¿Bajo qué condiciones será $\rho = \pm 1$?

54. Supóngase que la f.d.p. conjunta de dos variables aleatorias X e Y es la siguiente:

$$f(x, y) = \begin{cases} cy^2, & 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1, \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determínese

   a) El valor de la constante c

   b) $P(X + Y > 2)$

   c) $P(Y < 1/2)$

   d) $P(X < 1)$

   e) $P(X = 3Y)$.

55. Supóngase que la f.d.p. conjunta de dos variables aleatorias X e Y es la siguiente:

$$f(x, y) = \begin{cases} c\left(x^2 + y^2\right) & si \quad 0 \le y \le 1 - x^2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determínese

   a) El valor de la constante c

   b) $P(0 < X < 1/2)$

   c) $P(Y < X + 1)$

   d) $P(Y = X^2)$.

56. Supóngase que se selecciona aleatoriamente un punto (X, Y) de la región S en el plano xy que contiene todos los puntos (x, y) tales que $x \ge 0$, $y \ge 0$ y $4y + x \le 4$.

   a) Determínese la f.d.p. conjunta de .X e Y.

   b) Supóngase que S_0 es un subconjunto de la región S con área α y determínese $P[(X, Y) \in S_0]$.

57. Supóngase que se selecciona un punto (X, Y) del cuadrado S en el plano xy que contiene todos los puntos (x, y) tales que $0 \le x \le 1$ y $0 < y < 1$. Supóngase que la probabilidad de que el punto seleccionado sea el vértice $(0, 0)$ es 0,1; la probabilidad de que sea el vértice $(1, 0)$ es 0,2; la probabilidad de que sea el vértice $(0, 1)$ es 0,4; y la probabilidad de que sea el vértice $(1, 1)$ es 0,1. Supóngase también que si el punto seleccionado no es uno de los cuatro vértices del cuadrado, entonces será un punto interior y se seleccionará de acuerdo con una f.d.p. constante en el interior del cuadrado. Determínese

   a) $P(X < 1/4)$

   b) $P(X + Y < 1)$.

58. Supóngase que X e Y son variables aleatorias tales que (X, Y) puede pertenecer al rectángulo del plano xy que contiene todos los puntos (x, y) para los cuales $0 < x < 3$ y $0 \le y \le 4$. Supóngase también que la f.d. conjunta de X e Y en cualquier punto (x, y) de este rectángulo es la siguiente:

$$F(x, y) = \frac{1}{156} XY \left(X^2 + Y\right)$$

   Determínese

   a) $P(l < X \le 2, 1 \le Y \le 2)$

   b) $P(2 \le X < 4, 2 < Y < 4)$

   c) La f.d. de Y

   d) La f.d.p. conjunta de X e Y

   e) $P(Y < X)$.

59. Supóngase que X e Y tienen una distribución discreta conjunta cuya f.p. conjunta se define como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{30}(x + y), & x = 0, 1, 2; \quad y = 0, 1, 2, 3, \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determínese las f.p. marginales de X e Y,

   b) ¿Son independientes .X e Y?

60. Supóngase que X e Y tienen una distribución continua conjunta cuya f.d.p. conjunta se define como sigue:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)y^2, & 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1, \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determínese las f.d.p. marginales de X e Y.

   b) ¿Son independientes X e Y?

   c) ¿Son independientes los sucesos $\{X < 1\}$ y $\{Y \ge 1/2\}$?

61. Supóngase que la f.d.p. conjunta de X e Y es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{15}{4}\right)x^2 & , \quad 0 \le y \le 1 - x^2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determínese las f.d.p. marginales de $.X$ e Y

   b) ¿Son independientes X e Y ?

62. Un establecimiento tiene tres teléfonos públicos. Para $i = 0, 1, 2, 3$, sea p_i, la probabilidad de que exactamente i teléfonos estén ocupados un lunes cualquiera a las 8 de la noche, y supóngase que $p_0 = 0{,}1$, $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}4$ y $p_3 = 0{,}3$. Sean X e Y el número de teléfonos ocupados a las 8 de la noche en dos lunes independientes. Determínese:

   a) La f.p. conjunta de X e Y.

   b) $P(X = Y)$.

   c) $P(X > Y)$.

63. Supóngase que la f.d.p. conjunta de dos variables aleatorias X e Y es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} c\left(x + y^2\right), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determínese

   a) La f.d.p. condicional de X para cualquier valor concreto de Y.

   b) $P(Y < 1/2 | X = 1/2)$.

64. Supóngase que la f.d.p. conjunta de dos variables aleatorias X e Y es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,sen\,x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le 3 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determínese

   a) La f.d.p. condicional de Y para cualquier valor dado de X

   b) $P(1 < Y < 2 | X = 0{,}73)$.

65. Supóngase que la f.d.p. conjunta de dos variables aleatorias X e Y es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4 - 2x - y), & x > 0, \ y > 0, \quad 2x + y < 4, \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determínese

   a) La f.d.p. condicional de Y para cualquier valor dado de X.

   b) $P(y > 2 | X = 0{,}5)$.

66. Supóngase que la calificación X de una persona en una prueba de aptitud de matemáticas es un número entre 0 y 1, y que su calificación Y en una prueba de aptitudes musicales es también un número entre 0 y 1. Supóngase, además, que en la población de todos los estudiantes de bachillerato de Colombia, las calificaciones X e Y se distribuyen de acuerdo con la siguiente f.d.p. conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) ¿Qué proporción de estudiantes de bachillerato obtienen una calificación mayor que 0.8 en la prueba de matemáticas?

   b) Si la calificación en la prueba de música de un estudiante es 0.3, ¿cuál es la probabilidad de que su calificación en la prueba de matemáticas sea mayor que 0.8?

   c) Si la calificación en la prueba de matemáticas de un estudiante es 0.3, ¿cuál es la probabilidad de que su calificación en la prueba de música sea mayor que 0.8?

67. Supóngase que una variable aleatoria X puede tomar cada uno de los siete valores $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ con la misma probabilidad. Determínese la f.p. de $Y = X^2 - X$.

68. Supóngase que la f.d.p. de una variable aleatoria X es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Además,

   a) supóngase que $Y = .Y(2 - X)$. Determínese la f.d. y la f.d.p. de Y.

   b) Supóngase $Y = 4 - X^3$. Determínese la f.d.p. de Y

   c) Supóngase $Y = aX + b$ $(a \ne 0)$. Demuéstrese que la f.d.p. de Y es la siguiente:

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \text{para} \quad -\infty < y < \infty$$

69. Supóngase que la f.d.p. de $.X$ es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \le 0 \end{cases}$$

   Determínese la f.d.p. de $Y = X^{\frac{1}{2}}$.

70. Supóngase que X_1 y X_2 tienen una distribución conjunta continua cuya f.d.p. conjunta es la siguiente:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determínese

   a) la f.d.p. de $Y = X_1 X_2$.

   b) la f.d.p. conjunta de $Z = \frac{X_1}{X_2}$

71. Sean X e Y variables aleatorias cuya f.d.p. conjunta es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x + y) & si \quad 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determínese la f.d.p. de $Z = X + Y$.

72. Supóngase que X_1 y X_2 son variables aleatorias i.i.d.(identicamente distribuidas e independientes) y que la f.d.p. de cada una de ellas es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x > 0, \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determínese la f.d.p. de $Y = X_1 - X_2$.

73. Suponga que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución

$$f(x) = \begin{cases} c & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

si $Y = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$. Determínese el valor más pequeño de n tal que $P(Y \geq 0{,}99) \geq 0{,}95$. (a $f(x)$ se le llama distribución uniforme)

74. Sea W el rango de una muestra aleatoria de n observaciones de una distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$. Determínese el valor de $P(W > 0{,}9)$.

75. Supóngase que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme sobre el intervalo $0 < x < 1$. Demuéstrese que la esperanza de $1/X$ no existe.

76. Supóngase que X e Y tienen una distribución conjunta continua cuya f.d.p. conjunta la siguiente:

$$f(x, y) = \begin{cases} 12y^2 & , \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determínese el valor de $E(XY)$.

77. Supóngase que se selecciona al azar un punto de un bastón de longitud unidad y que se rompe en dos trozos por ese punto. Determínese el valor esperado de la longitud del trozo más grande.

78. Supóngase que se libera una partícula del origen del plano xy y pasa al semi-plano en que $x > 0$. Supóngase que la partícula se mueve en línea recta y que el ángulo entre el semieje x positivo y esta línea es α, el cual puede ser positivo o negativo. Supóngase, por último, que el ángulo α tiene una distribución uniforme sobre intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Sea Y la ordenada del punto en que la partícula corta la recta vertical $x = 1$. Demuéstrese que la distribución de Y es una distribución de Cauchy.

79. Supóngase que las variables aleatorias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria(es decir todas la variables son i.i.d) de tamaño n (de una distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$. Sea $Y_1 = \min\{X_1, ..., X_n\}$ y sea $Y_n = \max\{.X_1, ..., Xn_n\}$. Determínese $E(Y_1)$ y $E(Y_n)$

80. Para cualquier par de números a y b tales que $a < b$, determínese la varianza de la distribución uniforme sobre el intervalo (a, b).

81. Supóngase que X es una variable aleatoria cuyas $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. Demuéstrese que $E[X(X-1)] = \mu(\mu-1)+\sigma^2$.

82. Sea X una variable aleatoria cuya $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$ y sea c cualquier constante. Demuéstrese que

$$E[(X - c)^2] = (\mu - c)^2 + \sigma^2$$

83. Supóngase que X e Y son variables aleatorias independientes con varianzas finitas tales que $E(X) = E(Y)$. Demuéstrese que

$$E[(X - Y)^2] = V(X) + Var(Y).$$

84. Supóngase que$X$ e Y son variables aleatorias independientes con $V(X) = V(Y) = 3$. Determínese los valores de

   a) $V(X - Y)$,

   b) $V(2X - 3Y + 1)$.

85. Construyase un ejemplo de una distribución cuya media exista, pero no su varianza.

86. Supóngase que es igualmente verosímil que un valor observado de X provenga de una distribución continua cuya f.d.p. es f que de una cuya f.d.p. es g. Supóngase que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso y supóngase también que $g(x) > 0$ para $2 < x < 4$ y$g(x) = 0$ en otro caso. Determínese, la media y la mediana de la distribución de X,

87. Supóngase que la variable aleatoria X tiene una distribución continua cuya f.d.p. es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determínese el valor de d que minimiza

   a) $E[(X - d)^2]$ y

   b) $E(|X - d|)$.

88. Supóngase que la calificación X de una persona en un examen concreto es un número del intervalo $0 \leq X \leq 1$ y que X tiene una distribución continua cuya f.d.p. es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

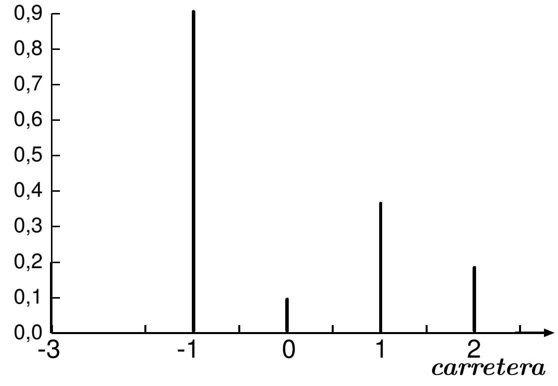
Determínese el valor de d que minimiza

   a) $E[(X - d)^2]$ y

   b) $E(|X - d|)$.

89. Supóngase que la distribución de una variable aleatoria X es simétrica respecto al punto $x = 0$ y que $E(X^4) < \infty$. Demuéstrese que$E[(X - d)^4]$ se minimiza con el valor $d = 0$.

90. Supóngase que puede ocurrir un incendio en cualquiera de cinco puntos a lo largo de una carretera. Estos puntos se localizan en $-3 - 1, 0, 1$ y 2 en la **??**. Supóngase también que la probabilidad de que cada uno de estos puntos sea la localización del próximo incendio que ocurra a lo largo de la carretera es como se representa en la **??**.¿En qué punto a lo largo de la carretera debería esperar un coche de bomberos para minimizar el valor esperado del cuadrado de la distancia que debe viajar hasta el siguiente incendio?



Gráfica del ejercicio 90

91. Demuéstrese que si $Var(X) < \infty$ y $Var(Y) < \infty$, entonces $Cov(X, Y)$ es finita. Sugerencia: Considerando la relación $[(X - \mu_X) \pm (Y - \mu_Y)]^2 \geq 0$, demuestre que

$$|(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)| \leq \frac{1}{2}[(X - \mu_X)^2 + (Y - \mu_Y)^2].$$

92. Supóngase que X tiene una distribución uniforme en el intervalo $(-2, 2)$ y que $Y = X^6$. Demuéstrese que X e Y son no correlacionadas.

93. Supóngase que la distribución de una variable aleatoria$X$ es simétrica respecto al punto $x = 0$, que $0 < E(X^4) < \infty$ y que $Y = X^2$. Demuéstrese que X e Y son no correlacionadas.

94. Para cualesquiera variables aleatorias X eY y constantes a, b, c y d, Demuéstrese que

$$Cov(aX + 6, cY + d) = acCov(X, Y)$$

95. Sean X e Y variables aleatorias tales que $0 < \sigma_X^2 < \infty$ y $0 < \sigma_Y^2 < \infty$. Supóngase que $U = aX + b$ y $V = cY + d$ donde $a \neq 0$ y $c \neq 0$. Demuéstrese que $\rho(U, V)= \rho(X, Y)$ si $ac > 0$ y que $\rho(U, V) = -\rho(X, Y)$ si $ac < 0$.

96. Sean X, Y y Z tres variables aleatorias tales que $Cov(X, Z)$ y $Cov(Y, Z)$ existen y sean a, b y c constantes cualesquiera. Demue que

$$Cov(aX + bY + c, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z).$$

97. Supóngase que $X_1, \cdots, X_n$ y $Y_1, \cdots, Y_n$ son variables aleatorias tales que $Cov\,(X_i, Y_i)$ existen para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$; y supóngase que $a_1, ..., a_m$ y $b_1, ..., b_n$ son constantes. Demuéstrese que

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{m} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov\,(X_i, Y_j)$$

98. Considérese una función de utilidad U para la que $U(0) = 0$ y $U(100) = 1$. Supóngase que a una persona que tiene esta función de utilidad se muestra indiferente entre aceptar un juego cuya ganancia será 0 dólares con probabilidad $1/3$ ó 100 dólares con probabilidad $2/3$ y aceptar 50 dólares seguros. ¿ Cuál es el valor $U(50)$?

99. Considérese una función de utilidad U para la que $U(0) = 5$, $U(1) = 8$ y $U(2) = 1$ Supóngase que una persona que tiene esta función de utilidad se muestra indiferente entre los juegos X e Y para los cuales las distribuciones de probabilidad de las ganancias son como sigue:

100. $P(X = -1) = 0{,}6$, $P(X = 0) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}2$, $P(Y = 0) = 0{,}9$, $P(Y = 1) = 0{,}1$. ¿Cuál es el valor de $U(-1)$?

101. Supóngase que una persona debe aceptar un juego X con la forma siguiente: $P(X = a) = p$ y $P(X = 1 - a) = 1 - p$, donde p es un número tal que $0 < p < 1$. Supóngase también que la persona puede elegir y fijar el valor de $a\,(0 \leq a \leq 1)$ utilizado en este juego. Determine el valor de a que la persona elegiría si su función de utilidad es $U(x) = \log x$ para $x > 0$