. Prólogo

☞ Autores

Javier de la Cruz
Estudios posdoctorales en la Universidad de Zúrich, Suiza (2016-2017). Doctor en Matemáticas de la Universidad Magdeburg, Alemania (2012). M.Sc. en Matemáticas de la Universidad Nacional de Medellín, Colombia (2007). Especialista en Matemáticas de la Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. (2004). Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Atlántico (2001). Profesor Tiempo Completo del Departamento de Matemáticas y Estadísticas de la Universidad del Norte (2012-).

Carlos de Oro
Magíster en Matemáticas y Estadistíca de la Universidad del Norte. Matemático de la Universidad de Córdoba. Profesor Tiempo Completo del Departamento de Matemáticas y Estadísticas de la Universidad del Norte.

Stiven Díaz
Magíster en Matemáticas de la Universidad del Norte, Colombia (2015). Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Atlántico, Colombia (2015). Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadísticas de la Universidad del Norte.

Rogelio Grau
Doctor en Matemáticas de la Universidad de Sao Paulo, Brasil. M.Sc. en Matemáticas de la Universidad del Norte. Matemático de la Universidad del Atlántico. Profesor Tiempo Completo del Departamento de Matemáticas y Estadísticas de la Universidad del Norte.

Darling Varsquez
Magíster en Matemáticas de la Universidad del Norte. Matemática de la Universidad del Atlántico. Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadísticas de la Universidad del Norte.

☞ Características del libro

El presente libro surge como el deseo de los autores por organizar y compartir los apuntes de clase elaborados en su labor docente a lo largo de los últimos años al frente de la asignatura de cálculo integral, en los programas de ingeniería, geología y matemáticas de la Universidad del Norte. Por ello, inicialmente, el objetivo central de este proyecto es suministrar un texto guía que se ajuste a la parcelación de dichos programas, pero que con el tiempo su uso pueda ser extendido a otras instituciones. En ese orden de ideas, hemos realizado una selección adecuada del contenido programático, presentando solamente los temas acordes al pensum de los programas de pregrado antes mencionados.

En el texto los conceptos son presentados intentando que estos sean lo más asequible posible para el estudiante, pero sin alejarnos de la formalidad y rigurosidad matemática en las definiciones y resultados. Asimismo, con respecto a las demostraciones de los teoremas y propiedades estudiadas en este texto, los autores desarrollan sólo las que consideran importantes y que pueden contribuir al alcance de los objetivos del curso. Sin embargo, se hace una continua invitación al lector a establecer o consultar las pruebas restantes.

Con el fin de hacer un texto didáctico que acompañe el proceso de enseñanza-aprendizaje, estos apuntes cuentan con un gran número de problemas resueltos de forma detallada, que lo convierten en un punto medio entre problemario y libro tradicional. Además pretendemos, mediante ejercicios cuidadosamente escogidos, la construcción y aplicación de los conceptos abordados y un aprendizaje autodidacta.

Algunas componentes que hacen parte de la estrategia metodológica y de la estructura del texto son:

- Los ejercicios propuestos que gradualmente se hacen más complejos, hasta que el estudiante alcance un nivel avanzado de destreza.
- Relación de las matemáticas con otras áreas del conocimiento.
- Variedad de actividades que incluyen problemas y ejercicios
- Énfasis en la compresión y el uso del lenguaje matemático, para comunicar ideas y generar pensamiento abstracto.
- Respuestas a los ejercicios impares planteados.

Es importante aclarar que no suministramos las respuestas a los ejercicios pares, para generar confianza en el estudiante al momento de su realización.

En cuanto a la distribución del contenido, éste ha sido organizada en cuatro unidades generales. La primera unidad, llamada Integración, inicia con el concepto de antiderivada, como operación inversa a la derivación y se centra en la presentación de la integral indefinida de funciones algebraicas y trascendentes, haciendo énfasis en el método de sustitución. Además se aborda el problema de la determinación del área de la región bajo una curva, el concepto de integral definida y los dos teoremas fundamentales del cálculo. Posteriormente, en la unidad Métodos de integración, son abordados el método de integración por partes, el método de integración por sustitución trigonométrica y el método de integración de fracciones parciales. En la tercera Unidad, denominado Aplicaciones, usaremos la integral definida para determinar el área de dada una región plana limitada por dos o más curvas y el volumen de un sólido de revolucióń, introduciendo elementos diferenciales convenientes. También presentaremos las herramientas para calcular la longitud de arco una curva plana. Finalmente, en la cuarta unidad, denominada Series, se estudian las series reales y los principales criterios de convergencia.

☞ Objetivo del libro

Brindar a los estudiantes de los programas de ingeniería, geología y matemáticas, un documento complementario en su proceso de aprendizaje del cálculo integral y su conexión con el ejerecicio profesional.

☞ Competencias

El texto pretende contribuir al desarrollo de las siguientes competencias:

- Comprende los conceptos de primitiva, integral definida de una función y los dos teoremas fundamentales del cálculo.
- Aplicar los conocimientos operativos necesarios para el cálculo de integrales de funciones polinómicas, racionales, algebraicas trascendentes.
- Utilizar las técnicas de integración para modelar explicaciones o soluciones a problemas específicos del área profesional en el que se encuentran formando.
- Comprende las sumas infinitas como una sucesión y establecer a partir de criterios básicos su convergencia o divergencia.

1. Integración

¿Qué vas a aprender?

1. A aplicar los conocimientos operativos necesarios para el cálculo de integrales de funciones polinómicas, racionales, algebraicas trascendentes de forma inmediata y por el método de sustitución.

2. A comprender la integral definida de una función, el teorema fundamental del cálculo y su aplicación en la determinación del área de una región definida por una función.

Resumen

En este capítulo se inicia el estudio de las integrales indefinidas y definidas. Sus definiciones formales, y los teoremas relevantes para su compresión. Además, se presenta la técnica de integración por sustitución como avance de lo que se desarrollará en el segundo capitulo.

Subtemas

1.1 Integral indefinida

1.2 Integración por sustutución

1.3 Funciones trigonométricas inversas

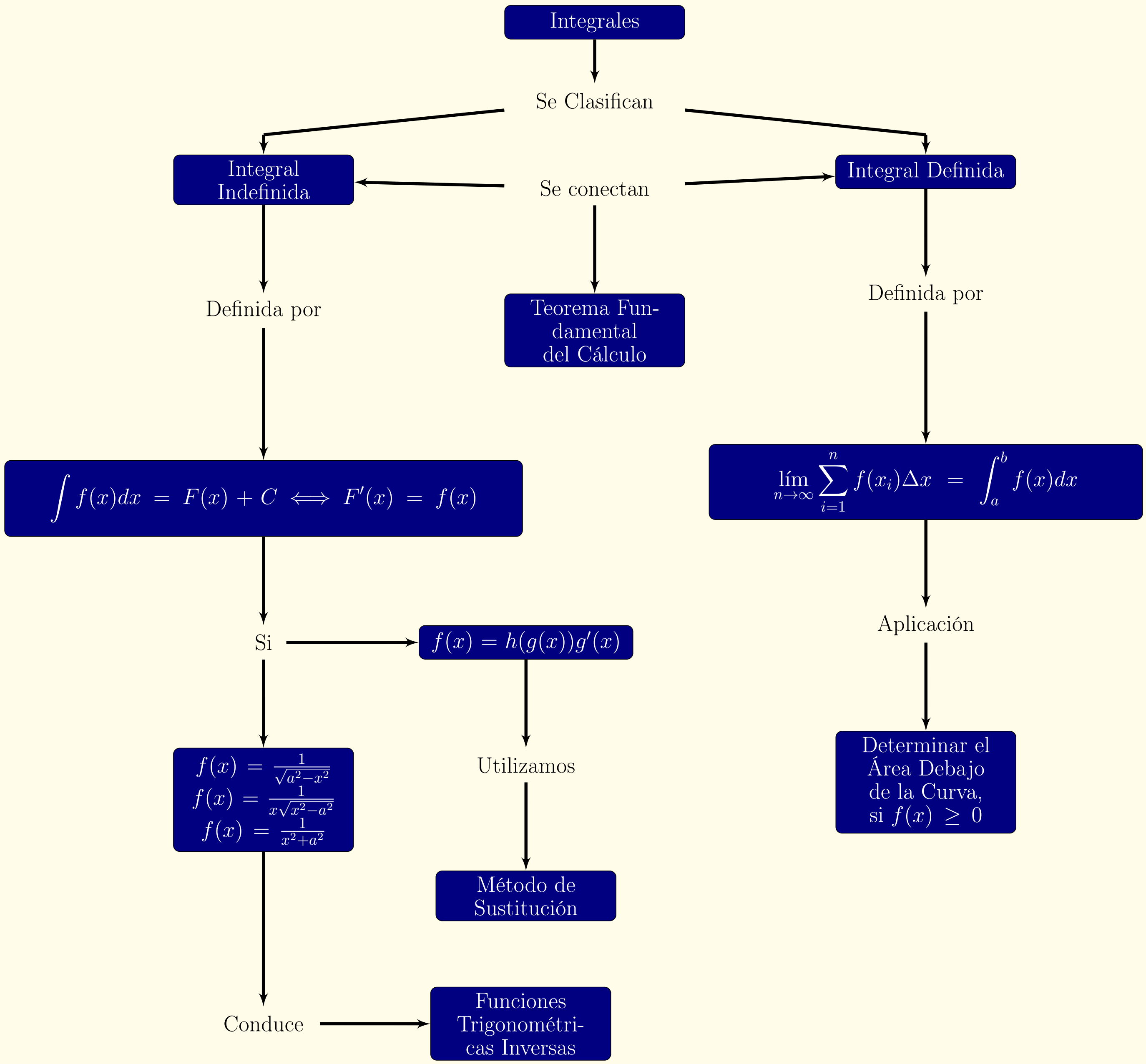
1.4 La notación sigma y sus propiedades

1.5 El problema del Área

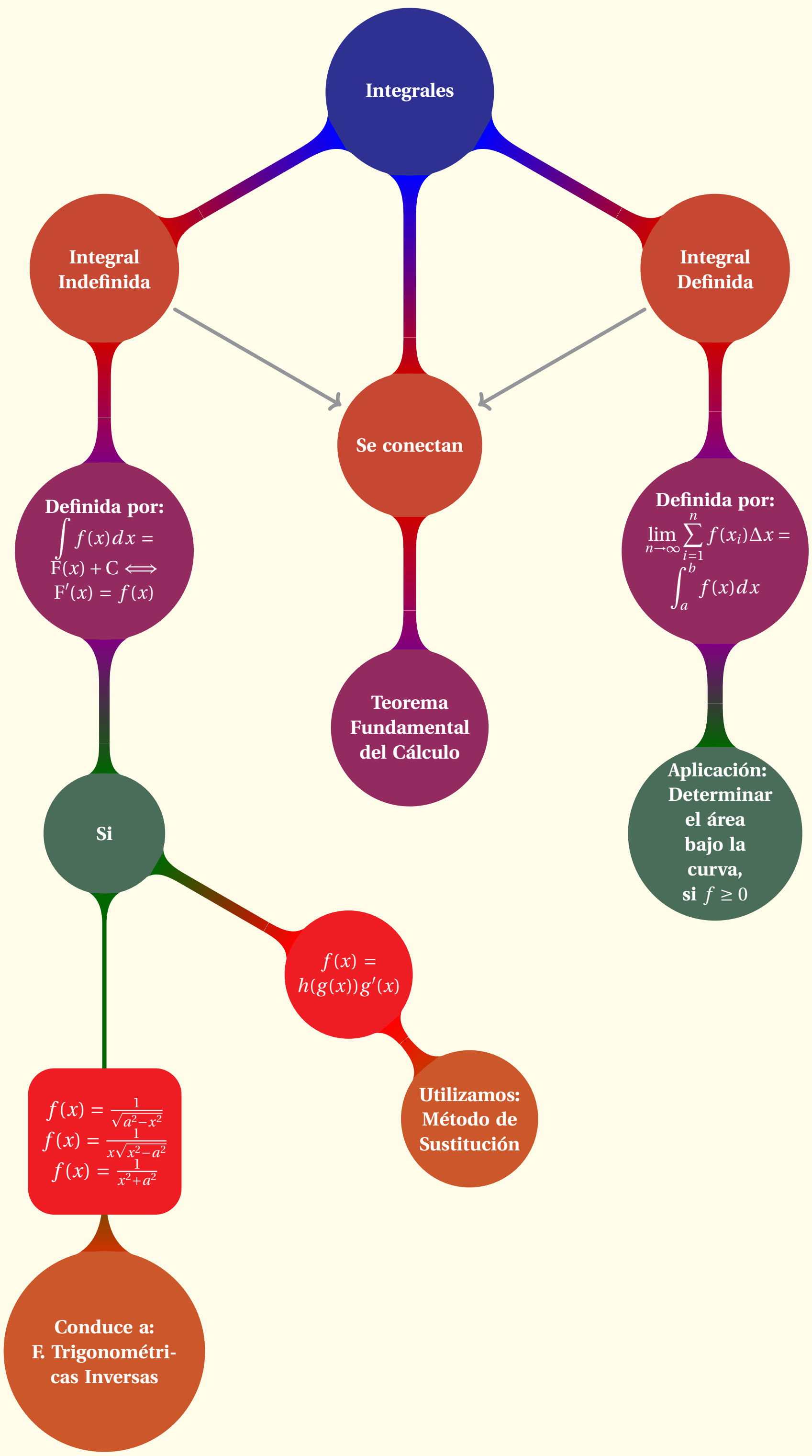
1.6 Integral definida

1.7 Teorema fundamental del cálculo

Mapa Conceptual del Cápitulo.



Mapa Mental del Cápitulo.



1.1 Integral indefinida

En el curso de cálculo diferencial hemos estudiado el procedimiento para a partir de una función F determinar su derivada, la cual denotaremos como f. Sin embargo, existen situaciones en donde conocemos la derivada f y pretendemos obtener la función F. En ese caso, F se conoce como la antiderivada. A continuación presentaremos el concepto de antiderivada o primitiva y fórmulas básicas para determinarla .

Definición 1.1.1 (Antiderivada): *Una función $F : I \to \mathbb{R}$ es una* ***antiderivada*** *o primitiva para una función $f : I \to \mathbb{R}$ en el intervalo I, si*

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$. Si x es punto extremo del intervalo I, la derivada es la derivada lateral respectiva.

Observación 1.1: *En la practica generalmente no hacemos mención del intervalo I, mas la primitiva de una función siempre será definida en un intervalo.*

Ejemplo 1.1.1. Sea

$$P(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Muestre que P es antiderivada de $p(x) = x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$.

Solución. Derivando la función P, obtenemos

$$P'(x) = x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} = p(x)$$

■

Con relación al ejemplo anterior, se puede observar que P no es la única antiderivada de p, puesto que $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$, es tambień una antiderivada de p. El siguiente resultado muestra que si se conoce una antiderivada de una función entonces se puede encontrar otra antiderivada agregando una constante arbitraria.

Proposición 1.1.2: *Sea $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva para la función $f : I \to \mathbb{R}$ en el intervalo I. Entonces*

$$G(x) := F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

es también una primitiva de f en I.

Ejemplo 1.1.2. Dada la función:

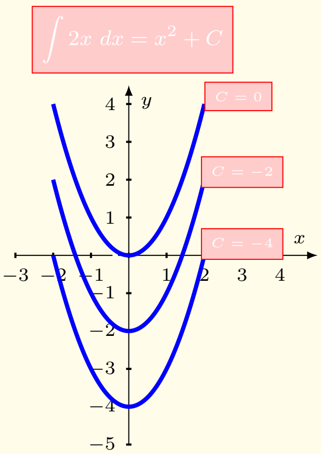
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^4(x) + \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Pruebe que $F(x) = \tan(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, es antiderivada de $f(x)$.

Solución. Observe que $F'(x) = \sec^2(x)$. Al simplificar la función f, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^4(x) + \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^4(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \tan^2(x) + \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) \\ &= \tan^2(x) + 1 \\ &= \sec^2(x). \end{aligned}$$

De donde se concluye que $F(x) = \tan(x) + C$ es antiderivada de $f(x)$. ■



Una pregunta natural que surge, es la siguiente: si F y G son primitivas de una función f en un intervalo I,

¿será que F y G están relacionadas de alguna manera?

La respuesta a este interrogante está dada por el siguiente resultado.

Proposición 1.1.3: *Si $F, G : I \to \mathbb{R}$ son primitivas de una función $f : I \to \mathbb{R}$ en el intervalo I, entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$G(x) = F(x) + C,$$

para todo $x \in I$.

A continuación vamos a presentar el concepto de integral indefinida.

Definición 1.1.4: *Sea $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva para la función $f : I \to \mathbb{R}$ en el intervalo I. La expresión*

$$F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

es llamada la ***integral indefinida*** *de la función f y es denotada por*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1.1}$$

Es decir,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Longleftrightarrow F'(x) = f(x), \quad x \in I.$$

En (1.1) $f(x)$ es llamada integrando y dx es el diferencial de x.

Ejemplo 1.1.3. Con relación a los Ejemplos 1.1.1 y 1.1.2 tenemos que,

$$\int \left(x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}\right)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + C$$
$$\int \sec^2(x)\, dx = \tan(x) + C$$

Para nuestro propósito inmediato, el diferencial dx nos indica la variable de integración. Sin embargo, más adelante y en especial en el Capítulo 2 se expone más sobre su importancia. Por otro lado, aunque la mayoría de las funciones que aparecen comúnmente poseen antederivada o primitiva, se debe preguntar que condiciones son necesarias para su existencia.

Reglas básicas de integración

A partir de las propiedades de la diferenciación se pueden obtener la antiderivada de algunas funciones de forma inmediata. En cada caso se tiene en cuenta la constante de integración. Por ejemplo

$$\frac{d}{dx}[\tan(x)] = \sec^2(x) \qquad \textit{entonces} \qquad \int \sec^2(x)\ dx = \tan(x) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Integrales algebraicas:

Derivadas	Integrales
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\,dx = kx + C$
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
	Con $n \neq -1$

Ejemplo 1.1.4. Determine las siguientes integrales

1. $\int x^2\,dx$
2. $\int \sqrt{x}\,dx$
3. $\int x^{-1/3}\,dx$
4. $\int \frac{dx}{x^3}$

Solución.

1. $\displaystyle\int x^2\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

2. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

3. $\displaystyle\int x^{-1/3}\,dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2}x^{2/3} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = -\frac{x^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

■

Teorema 1.1.5 (Linealidad de la integral): *Sean $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitivas de $f, g : I \to \mathbb{R}$ respectivamente, en el intervalo I, y $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces $F + \beta G$ es una primitiva para $f + \beta g$ en I, y*

$$\int [f(x) \pm \beta g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \beta \int g(x)dx$$

Ejemplo 1.1.5. Determine las siguientes integrales indefinidas

1. $\displaystyle\int (3x^3 - 5x^2)\, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$
3. $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$
4. $\displaystyle\int z(z+a)(z+b)\ dz$
5. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{x^{2/3}}\, dx$
6. $\displaystyle\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx$

Solución.

1. $\displaystyle\int (3x^3 - 5x^2)\, dx = 3\int x^3\, dx - 5\int x^2\, dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + C$

2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$

3. $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx = \int (x^{3/2}+1)dx = \frac{2}{5}x^{5/2}+x+C$

4. $$\begin{aligned}\int z(z+a)(z+b)\ dz &= \int (z^2+az)(z+b)\ dz = \int (z^3+bz^2+az^2+abz)\ dz \\ &= \int (z^3+(b+a)z^2+abz)\ dz = \frac{z^4}{4} + \frac{(b+a)}{3}z^3 + \frac{ab}{2}z^2 + C\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{x^{2/3}} dx &= \int \frac{x^4-x^2-2}{x^{2/3}} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^{2/3}} - \frac{x^2}{x^{2/3}} - \frac{2}{x^{2/3}}\right) dx \\ &= \int \left(x^{10/3} - x^{4/3} - 2x^{-2/3}\right) dx = \frac{3}{13}x^{13/3} - \frac{3}{7}x^{7/3} - 4x^{1/2} +\end{aligned}$$

6. Supongamos que $n \neq m$ y $n, m \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\, dx &= \int \frac{x^{2m} - 2x^{m+n} + x^{2n}}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \int \left(x^{2m-1/2} - 2x^{m+n-1/2} + x^{2n-1/2} \right) dx \\
&= \sqrt{x} \left(\frac{2x^{2m}}{4m+1} - \frac{2x^{m+n}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{2n}}{4n+1} \right) + C
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Trigonométricos:

Derivadas	Integrales
$\dfrac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x)$	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$	$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}[\tan(x)] = \sec^2(x)$	$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}[\cot(x)] = -\csc^2(x)$	$\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}[\sec(x)] = \sec(x)\tan(x)$	$\int \sec(x)\tan(x)\,dx = \sec(x) + C$
$\dfrac{d}{dx}[\csc(x)] = -\csc(x)\cot(x)$	$\int \csc(x)\cot(x)\,dx = -\csc(x) + C$

Ejemplo 1.1.6. Determine las siguientes integrales indefinidas

1. $\displaystyle\int \frac{2\cot\ x - 3\,\mathrm{sen}^2\,x}{\mathrm{sen}\,x}dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{4\csc^2 t\ \cos t - \tan t}{\cos t}dt$

Solución.

1. Recuerde que $\csc(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2\cot\,(x) - 3\,\mathrm{sen}^2(x)}{\mathrm{sen}(x)}dx &= 2\int \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\cot(x)dx - 3\int \mathrm{sen}(x)dx \\ &= -2\csc\,(x) + 3\cos\,(x) + C.\end{aligned}$$

2. Recuerde que $\sec(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$

$$\begin{aligned}\int \frac{4\csc^2(t)\ \cos(t) - \tan(t)}{\cos(t)}dt &= 4\int \csc^2(t)\,dt - \int \frac{\tan(t)}{\cos(t)}dt \\ &= 4\int \csc^2(t) - \int \sec(t)\tan(t)dt \\ &= -4\cot(t) - \sec(t) + C\end{aligned}$$

■

Exponenciales y logarítmicas:

Derivadas	Integrales
$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$	$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x\, dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln(a)$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

Con $a > 0$ y $a \neq 1$

1.2 Ejercicios propuestos

Realizar las siguientes integrales aplicando las reglas básicas

1. $\int (2t-3)^3 dt$
2. $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\, dx$
3. $\int e^{\ln(x^2)} dx$
4. $\int (2e^x + 10^x)\, dx$
5. $\int \frac{1+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\, dx$
6. $\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}\, dx$

Calcular

7 $\int \sqrt{1 + \left(2x\sqrt{x^2+1}\right)^2}\, dx$

8 $\int \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2}\, dx$

Comprueba que la función F es una antiderivada de f

9 $F(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^{-2} - 6$ $\qquad f(x) = 4x^3 - 6x^2 + x^{-3}$

10 $F(x) = \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$ $\qquad f(x) = \frac{2\operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)}$

11 $F(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ $\qquad f(x) = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$

1.3 Integración por sustitución

En la anterior sección, trabajamos reglas de integración relacionadas con las reglas de diferenciación básica. Ahora, presentamos un método de integración llamado método de sustitución o cambio de variable, que está relacionado con la regla de la cadenas. A partir de esta regla trataremos de buscar un método eficaz para resolver integrales de funciones compuestas.

Sea $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva de la función $f : I \to \mathbb{R}$ en el intevalo I y $g : I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\mathrm{Im}(g) \subset I$. Usando la regla de la cadena, tenemos

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Luego, $F(g(x))$ es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$. Por tanto,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C. \tag{1.2}$$

Realizando la sustitución,

$$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\ dx,$$

tenemos que la expresión (1.2), se transforma en la siguiente

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Como consecuencia de lo anterior, obtenemos el siguiente teorema,

Teorema 1.3.1 (Sustitución): *Sea $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva de la función $f : I \to \mathbb{R}$ en el intevalo I y $g : I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $Im(g) \subset I$. Entonces*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Ejemplo 1.3.1. $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)\,dx$

Solución. Si $u = \sin(x)$, entonces $du = \cos(x)\,dx$. Al reemplazar, resulta una integral inmediata,

$$\int \sin^3(x)\cos(x)\,dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C.$$

Una vez resulta, retomamos la variable inicial $u = \sin(x)$

$$\int \sin^3(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{4}\sin^4(x) + C$$

■

Ejemplo 1.3.2. Calcular $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

Solución. Sea $u = 1 + x^2$, entonces $du = 2x\,dx$. A diferencia del ejemplo anterior el diferencial no aparece de forma inmediata y es necesario agregarle factores constantes al integrando que no alteren la función. Por ejemplo,

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{2}\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Lo anterior se suele hacer despejando el diferencial

$$du = 2x\,dx \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}du = x\,dx$$

Sustituyendo en la integral tenemos

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}u^{3/2} + C\\ &= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C\end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.3.3. Calcula $\displaystyle\int \left[(2x-1)e^{x^2-x} + 2\pi\,\mathrm{sen}(2\pi x)\right]dx$

Solución. Aplicando las propiedad

$$\int \left[(2x-1)e^{x^2-x} + 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x)\right] dx = \int (2x-1)e^{x^2-x} dx + \int 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x) dx$$

Identificamos que cada integral tiene una sustitución diferente. Sean

$$u = x^2 - x \qquad du = (2x-1)dx \quad \text{y} \quad v = 2\pi x \qquad dv = 2\pi dx$$

$$\begin{aligned} \int \left[(2x-1)e^{x^2-x} + 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x)\right] \, dx &= \int e^u du + \int \operatorname{sen}(v) dv \\ &= e^{x^2-x} - \cos(2\pi x) + C \end{aligned}$$

■

Sustituir y despejar

En los siguientes ejercicios no basta con identificar la función y su derivada, es necesario realizar un despeje para poder sustituir el integrando.

Ejemplo 1.3.4. Hallar $\int x^5 \sqrt{x^2+4}\, dx$

Solución. Al tomar $u = x^2 + 4$, se obtiene $\frac{1}{2}\, du = x\, dx$. En el integrando no aparece explicitamente el diferencial pero al aplicar las propiedades de la potenciación lo obtenemos,

$$x^5\ dx = x^4 x\ dx$$

Ahora, nuestra integral tiene la siguiente forma

$$\int x^5 \sqrt{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2} \int x^4 \sqrt{u}\, du$$

Inicialmente la sustitución no permite cambiar totalmente la variable en el integrand, pero al despejar x en términos de u y elevar al cuadrado superamos el himpase.

$$u = x^2 + 4 \text{ entonces } u - 4 = x^2 \ \text{ y } \ (u-4)^2 = x^4.$$

Por lo tanto,

$$\int x^5 \sqrt{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2} \int (u-4)^2 u^{1/2}\, dx$$

Integrando y retomando la variable inicial resulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int (u-4)^2 u^{1/2}\, dx &= \frac{1}{2} \int (u^2 - 2u + 16) u^{1/2}\ du \\
&= \frac{1}{2} \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + 16u^{1/2})\ du \\
&= \frac{1}{7} u^{7/2} - \frac{2}{5} u^{5/2} + \frac{16}{3} u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{7} (x^2+4)^{7/2} - \frac{2}{5} (x^2+4)^{5/2} + \frac{16}{3} (x^2+4)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

■

Doble sustitución

En algunos casos se debe realizar dos sustituciones

Ejemplo 1.3.5. Calcula $\int \frac{x\ dx}{(x+1) - \sqrt{x+1}}$

Solución. Sea $u = x + 1$, entonces $du = dx$.

$$\int \frac{x\ dx}{(x+1) - \sqrt{x+1}} = \int \frac{u - 1\ du}{u - \sqrt{u}} = \int \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}(\sqrt{u} - 1)}$$

Observando que la sustitución no fue suficiente para calcular la integrar, se plantea una nueva.

Sea $z = \sqrt{u}$. Entonces $dz = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(u-1)du}{\sqrt{u}(\sqrt{u}-1)} &= 2 \int \frac{z^2 - 1}{z - 1} dz \\
&= 2 \int (z+1) dz \\
&= z^2 + 2z + C \\
&= (\sqrt{u})^2 + 2\sqrt{u} + C
\end{aligned}$$

$$= x + 2\sqrt{x+1} + C$$

■

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

A partir de la técnica de sustitución las reglas básicas pueden generalizarse. Por ejemplo,

1. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$
2. $\displaystyle\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
3. $\displaystyle\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C.$

Ejemplo 1.3.6. Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{4x-1}\,dx$

Solución. Haciendo $u = 4x - 1$ tenemos que $du = 4\,dx$

$$\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$$

■

Ejemplo 1.3.7. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Solución. Haciendo $u = \ln x$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$, de modo que

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C,$$

y recuperando la variable nos queda que

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C.$$

■

Ejemplo 1.3.8. Encontrar $\displaystyle\int e^{3x+1}\,dx$

Solución. Sea $u = 3x + 1$ entonces $du = 3\,dx$. Despejando $\frac{du}{3} = dx$

$$\int e^{3x+1}\,dx = \int e^{u}\left(\frac{du}{3}\right) = \frac{1}{3}\int e^{u}\,du = \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$$

■

Ejemplo 1.3.9. Encontrar $\displaystyle\int 5xe^{-x^2}\,dx$

Solución. Sea $u = -x^2$ entonces $du = -2x\,dx$. Despejando $-\frac{du}{2} = x\,dx$

$$\begin{aligned}\int 5xe^{-x^2}\,dx = 5\int e^{-x^2}(x\,dx) = 5\int e^{u}\left(-\frac{du}{2}\right)\\ = -\frac{5}{2}\int e^{u}\,du = -\frac{5}{2}e^{u} + C = -\frac{5}{2}e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

■

Funciones trigonométricas

En en la Sección. 1.1 estudiamos las integrales de funciones trigonométricas a partir de la relación con la derivada. Por medio de la integral por sustitución, se puede completar el conjunto de reglas básicas de integración trigonométricas básicas. Por ejemplo la integral de $\tan(u)$, $\cot(u)$ o $\csc(u)$

Ejemplo 1.3.10. Hallar la integral $\displaystyle\int \cot x\,dx$

Solución. Usando la identidad trigonométrica de $\cot(x)$ tenemos que

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx.$$

Sea $u = \operatorname{sen}(x)$ entonces $du = \cos(x)\,dx$, y sustituyendo nos queda

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\operatorname{sen}(x)| + C.$$

■

Ejemplo 1.3.11. Hallar $\displaystyle\int \sec(x)\,dx$

Solución. Multiplicamos y dividimos en el integrando por $\tan(x) + \sec(x)$ entonces

$$\int \sec(x)\,dx = \int \sec(x)\frac{\tan(x) + \sec(x)}{\tan(x) + \sec(x)}\,dx = \int \frac{\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)}{\tan(x) + \sec(x)}\,dx.$$

Ahora bien, sea $u = \tan(x) + \sec(x)$ por lo que $du = (\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x))\,dx$

$$\int \frac{\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)}{\tan(x) + \sec(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|\tan(x) + \sec(x)| + C.$$

En conclusión, $\displaystyle\int \sec(x)\,dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)| + C.$ ■

El resto de integrales resulta de forma similar a las anteriores.

Teorema 1.3.2:

1. $\displaystyle\int \tan(u)\,du = -\ln|\cos(u)| + C$
2. $\displaystyle\int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + C$
3. $\displaystyle\int \cot(u)\,du = \ln|\operatorname{sen}(u)| + C$
4. $\displaystyle\int \csc(u)\,du = -\ln|\csc(u) + \cot(u)| + C$

Ejemplo 1.3.12. Halla $\displaystyle\int \frac{\tan^2(2x)}{\sec(2x)}\,dx$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^2(2x)}{\sec(2x)}\,dx &= \int \frac{\sec^2(2x)-1}{\sec(2x)}\,dx \\
&= \int \sec(2x)\,dx - \int \cos(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|\sec(2x)+\tan(2x)| - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.3.13. Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)}{\cos(x)}\,dx$

Solución.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)}{\cos(x)}\,dx &= \int \frac{1-\cos^2(x)-\cos^2(x)}{\cos(x)}\,dx \\
&= \int \frac{1-2\cos^2(x)}{\cos(x)}\,dx \\
&= \int \sec(x)\,dx - 2\int \cos(x)\,dx \\
&= \ln|\sec(x)+\tan(x)| - 2\operatorname{sen}(x) + C
\end{aligned}$$

■

Para resolver la integral $\displaystyle\int sec^2(x)\ tan(x)dx$, si usamos la sustitución $t = tan(x)$ o la sustitución $u = sec(x)$ encontramos la primitiva de $f(x) = sec^2(x)\ tan(x)$.

¿por qué obtiene resultados correctos y diferentes?

1.4 Ejercicios propuestos

Calcule la integral indefinida, usando si es necesario una o varias sustituciones.

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}dx$
2. $\displaystyle\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}dx$
3. $\displaystyle\int 2\frac{x^3}{(x^2+4)^{3/2}}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}dx$
5. $\displaystyle\int 3x\sqrt{x+6}dx$
6. $\displaystyle\int 5x^2\sqrt{1-x}dx$
7. $\displaystyle\int -\frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}}dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}dx$
10. $\displaystyle\int x^2\sqrt{3-2x}dx$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{3x}}dx$
12. $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^{3/2}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)dx$
13. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{(\frac{x^3}{3}+x^2+x+5)^4}dx$
14. $\displaystyle\int (x^2+1)^{-3/2}dx$
15. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{\sqrt{(1+x^2)^3}+x^2+1}}dx$
16. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1-2x)^{2/5}}{1-x}dx$
17. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}dx$

Calcule la integral indefinida de las siguientes funciones trigonométricas.

19. $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$
20. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin^{5/2}(x)}dx$
22. $\displaystyle\int \frac{\csc^2(x)}{\cot^3(x)}dx$
23. $\displaystyle\int \frac{\sin(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})}{x^2}dx$
24. $\displaystyle\int \sec^2(x)\sqrt{\tan(x)}dx$
25. $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
26. $\displaystyle\int \sin(x)\sqrt{1-\cos(x)}dx$
27. $\displaystyle\int \sin^3(x)dx$
28. $\displaystyle\int \cos^3(x)dx$
29. $\displaystyle\int \sin^3(x+\frac{1}{x})\cos(x+\frac{1}{x})(\frac{x^2-1}{x^2})dx$
30. $\displaystyle\int \frac{\tan^3\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
31. $\displaystyle\int \frac{\sin^4(1+\sqrt{x})\cos(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$
32. $\displaystyle\int \tan^2 x dx$
33. $\displaystyle\int \cot^2 x dx$
34. $\displaystyle\int [\tan(x/3)+\cot(x/3)]^2 dx$

Calcule la integral indefinida, haciendo si es necesario una sustitución.

35. $\displaystyle\int \frac{1}{2x+7}dx$

36. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln^3 x dx$

38. $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{2x}dx$

39. $\displaystyle\int \frac{2-3\sin 2x}{\cos 2x}dx$

40. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2-4}dx$

41. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}dx$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$

43. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx$

44. $\displaystyle\int \frac{2\ln x+1}{x[\ln^2 x+\ln x]}dx$

45. $\displaystyle\int \frac{2+\ln^2 x}{x[1-\ln x]}dx$

46. $\displaystyle\int \frac{\tan(\ln x)}{x}dx$

47. $\displaystyle\int 2^{x\ln x}(\ln x+1)dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 2x}{\sec 2x}dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx$

50. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x}dx$

51. $\displaystyle\int \frac{2-3\sin 2x}{\cos 2x}dx$

52. $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{\cos 3x-1}dx$

53. $\displaystyle\int (\tan 2x-\sec 2x)dx$

54. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos 4x}dx$

55. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin(3x+1)}dx$

56. $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^2+3x-4}{x}dx$

57. $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^2+3x-4}{x+1}dx$

58. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-2}dx$

59. $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}dx$