

son de este tipo. Por ejemplo: bismuto, cobre, diamante, hidrógeno, mercurio, nitrógeno, oro, plata, agua.

Otro tipo de materiales tiene \vec{m} a nivel atómico, los cuales tienden a orientarse en forma paralela al campo aplicado, y el resultado es que el campo magnético en el interior de estos materiales es mayor al campo aplicado. Son los materiales *paramagnéticos*. Ejemplos son: aluminio, manganeso, oxígeno, sodio, titanio, tungsteno, platino.

Hay un grupo aparte de materiales, los llamados *ferromagnéticos* tales como el hierro, níquel y cromo. Estos materiales pueden estar magnetizados, es decir, tienen dipolos magnéticos a nivel molecular y ellos tienden a estar ordenados en forma espontánea, por lo que son fuente de campo magnético (son imanes). Muchos materiales paramagnéticos sometidos a temperaturas suficientemente bajas suelen transformarse en ferromagnéticos.

Las propiedades magnéticas de la materia, entonces, están ligadas a las propiedades electrónicas a nivel atómico. Concretamente son las corrientes las responsables de tales propiedades, pero no son corrientes macroscópicas, sino aquellas que existen localmente en torno a los centros cristalográficos en el caso de sólidos. Tales corrientes por sí solas son responsables que exista tanto densidades de corriente volumétricas \vec{J} como también corrientes de superficie \vec{K} . A continuación se verá que el potencial magnético \vec{A} producido por una distribución cualquiera de dipolos magnéticos puede ser escrito como

(4.2.15) y (4.2.4).

El potencial vectorial (4.6.7) en \vec{r} debido a un dipolo \vec{m} ubicado en \vec{r}' es aquel dado en (4.6.7)

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (5.1.1)$$

Puede demostrarse que el rotor de este potencial vectorial conduce a

$$B_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\mu_o \nabla \phi_{\text{dip}} \quad (5.1.2)$$

donde

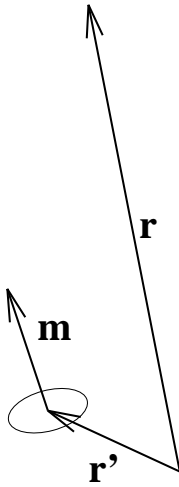
$$\phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (5.1.3)$$

El campo magnético que un dipolo lejos de él puede ser expresado como el gradiente de un potencial escalar, es decir, este campo magnético tiene rotor nulo (recordar que en general el rotor de \vec{B} es una densidad de corriente) y eso se debe precisamente porque al ser un campo lejano, la corriente propia del dipolo es nula lejos de él.

Los pequeños momentos dipolares a nivel atómico permiten definir una densidad de dipolos magnéticos por unidad de volumen, $\vec{M}(\vec{r})$ de tal manera que un pequeño volumen dV tiene asociado un momento dipolar magnético $d\vec{m}$ dado por

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}) dV. \quad (5.1.4)$$

A esta cantidad $\vec{M}(\vec{r})$ se la conoce como la magnetización del material.



De aquí que el potencial vectorial debido a una distribución continua de dipolos magnéticos (materia), descrita por $\vec{M}(\vec{r})$ es,

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_M(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' \\
 &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \\
 &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' - \frac{\mu_o}{4\pi} \int \nabla' \times \frac{\vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \\
 &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' + \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{M} \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}. \quad (5.1.5)
 \end{aligned}$$

En esta última expresión se reconoce a la formas (4.2.15) y (4.2.4), para el potencial proveniente de densidades de corriente volumétrica y superficial dadas por,

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_M &= \nabla \times \vec{M} \\
 \vec{K}_M &= \vec{M} \times \hat{n}. \quad (5.1.6)
 \end{aligned}$$

Estas densidades de corriente describen en forma suavizada los efectos de las corrientes a nivel atómico que son responsables de las propiedades magnéticas macroscópicas de la materia.

El campo magnético de la materia

Ahora se calculará el campo magnético de la materia \vec{B}_M , es decir, el rotor $\nabla \times \vec{A}_M$. El campo \vec{B}_M en un punto \vec{r} particular de una muestra de materia puede entenderse como una superposición de dos campos: el campo $\vec{B}_I(\vec{r})$ que produce la corriente microscópica local (es decir, se debe a la magnetización \vec{M} en ese mismo punto) y el campo neto $\vec{B}_{II}(\vec{r})$ producido por las corrientes microscópicas de todo el

resto de la materia, excepto la corriente en \vec{r} ya contabilizada en \vec{B}_I . Este último, entonces proviene de corrientes que son nulas en \vec{r} y debiera poder escribirse en la forma de gradiente de un potencial escalar, tal como en (4.6.10).

Si se toma la expresión de partida del potencial vectorial que se usó para terminar con (5.1.5), de ella se puede calcular inmediatamente el campo \vec{B}_M , producido por una distribución de dipolos magnéticos, calculando el rotor,

$$\vec{B}_M(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \nabla_r \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) dV'. \quad \vec{B}_{II}(\vec{r}) = -\mu_o \nabla \phi(\vec{r}). \quad (5.1.10)$$

Puesto que este rotor actúa solo sobre la dependencia en \vec{r} del integrando, \vec{M} es una constante para el rotor y se obtiene que el integrando puede ser escrito en la forma:

$$\vec{M}(\vec{r}') \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} - \left(\vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

y entonces el campo magnético puede ser separado en dos partes:

$$\vec{B}_M(\vec{r}) = \vec{B}_I(\vec{r}) + \vec{B}_{II}(\vec{r}) \quad (5.1.7)$$

donde

$$\vec{B}_I = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv' \quad \vec{B}_M(\vec{r}) = \mu_o \vec{M}(\vec{r}) - \mu_o \nabla \phi(\vec{r}). \quad (5.1.8)$$

$$\vec{B}_{II} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int \left(\vec{M}(\vec{r}') \cdot \nabla \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'.$$

La demostración de (4.3.1) permite darse cuenta que

$$\vec{B}_I(\vec{r}) = \mu_o \vec{M}(\vec{r}). \quad (5.1.9)$$

que permite ver que B_I es la contribución de los dipolos locales al campo magnético que genera la materia.

Una integración por partes de la expresión para B_{II} permite demostrar que,

La función escalar $\phi(\vec{r})$, llamada el potencial escalar magnético está dada por,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'. \quad (5.1.11)$$

Este potencial escalar asociado a \vec{B}_{II} es el efecto en el punto \vec{r} de todos los dipolos del resto de la muestra de materia y es del mismo tipo de (5.1.3).

En resumen se ha demostrado que

El campo magnético total

Hasta aquí se ha calculado un campo magnético provocado únicamente por una distribución de dipolos magnéticos. Para tener una expresión

más general debe agregarse un término que corresponda a la presencia corrientes eléctricas de conducción. De este modo, un campo magnético más gen-

eral se escribe como

que entonces se expresa como

$$\vec{B} = \vec{B}_M + \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' \quad (5.1.13)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' + \mu_o \vec{M}(\vec{r}) - \mu_o \nabla \phi(\vec{r}). \quad (5.1.14)$$

En campo magnético general proviene tanto de corrientes macroscópicas (conducción) \vec{J} como de estos efectos propios de la estructura molecular, es decir, \vec{B} puede escribirse como

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M}) \quad (5.1.15)$$

donde

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' - \nabla \phi(\vec{r}) \quad (5.1.16)$$

con $\phi(\vec{r})$ dado en (4.6.10). Al campo \vec{H} será denominado *intensidad magnética*, expresión que no es universal.

5.2. Nuevamente la ley circuital.

En magnetostática se cumple la ecuación $\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}_T$ donde \vec{J}_T es la corriente total de magnetostática, la cual incluye un sumando \vec{J}_M . Al reemplazar en esta ley a \vec{B} usando (5.1.15) se obtiene

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (5.2.1)$$

Tal como antes se pudo deducir la ley circuital (4.3.6) ahora de (5.2.1) se deduce

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\Gamma} \quad (5.2.2)$$

que es la ley circuital para corrientes macroscópicas.

El vector magnetización juega en magnetostática un papel semejante al que juega \vec{P} en electrostática. Y tal como en electrostática se tuvo que incorporar una ley empírica (1.9.1) que relaciona a \vec{P} con \vec{E} , acá también se establece que para muchos materiales homogéneos, lineales e isótropos se cumple que

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi \vec{H}(\vec{r}) \quad (5.2.3)$$

donde χ es una cantidad adimensional llamada la susceptibilidad magnética del material. Esta cantidad puede ser positiva (materiales paramagnéticos) o negativa (materiales diamagnéticos).

Los valores de χ positivos o negativos para diferentes materiales son mucho menores que la unidad, típicamente de orden de 10^{-3} .

Para los materiales dia- y paramagnéticos la propiedad (5.2.3) es válida y se puede escribir,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r}) \quad (5.2.4)$$

donde

$$\mu = \mu_o(1 + \chi) \quad (5.2.5)$$

es la permeabilidad magnética del material que se trate.

5.3. Condiciones de borde

Es de especial interés estudiar las condiciones de borde que se deben satisfacer en la superficie entre dos materiales magnéticos que satisfacen las propiedades lineales recién descritas y en los cuales hay corrientes de superficie. En tal caso se puede trabajar con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

De la primera de estas dos relaciones se desprende inmediatamente que la componente normal a la interfaz del campo \vec{B} es continua:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (5.3.2)$$

De la segunda se puede ver que si existe una corriente superficial en la interfaz se satisface que

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (5.3.3)$$

donde \hat{n} es la normal a la interfaz que apunta desde el medio 1 al medio 2. La misma relación se puede escribir en

términos de las componentes tangenciales de \vec{H} ,

$$H_{2t} - H_{1t} = \left(\vec{K} \times \hat{n} \right)_t \quad (5.3.4)$$

Si no hay corriente superficial en la interfaz, la componente tangencial de \vec{H} es continua. En tal caso se puede deducir una relación entre los ángulos y las permeabilidades en forma semejante a como se hizo en electrostática.

Si se llama θ_j al ángulo que forma \vec{B} con la normal a la superficie interfaz en el medio j , entonces es directo obtener de las ecuaciones anteriores que

$$\begin{aligned} B_2 \cos \theta_2 &= B_1 \cos \theta_1 \\ \mu_1 B_2 \sin \theta_2 &= \mu_2 B_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

y de aquí

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (5.3.6)$$

Se puede deducir de estas expresiones que el campo \vec{B} tiende a hacerse más intenso en el medio con mayor permeabilidad magnética. También se puede llegar a comprender que si se

tiene un campo magnético uniforme en una zona vacía y se introduce un trozo paramagnético, el campo se deforma comportándose como si fuese atraído hacia el material y así un mayor flujo de campo pasa por dentro del material. Si el mismo experimento se hace con una muestra diamagnética ocurre lo inverso: el campo se deforma alejándose de la muestra y dentro de ella el campo es entonces menos intenso.

La propiedad de los materiales paramagnéticos de atraer al campo magnético hacia su interior los hace candidatos para núcleos de dispositivos en los que se desee confinar al campo magnético a una geometría especial. Sin embargo, como veremos, los materiales que por excelencia cumplen esta labor son los ferromagnéticos. La razón es que la susceptibilidad χ para un material paramagnético es muy pequeña, es decir, $B/(\mu_0 H)$ es cercano a uno.

Muchas veces es necesario analizar casos en los cuales se cumple que $\nabla \times \vec{H} = 0$. Esta condición no es equivalente a que \vec{B} sea irrotacional ya que (5.2.3) no es cierta para todos los materiales. Si \vec{H} es irrotacional entonces existe un potencial escalar asociado al que denotaremos $\varphi(\vec{r})$,

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) \quad (5.3.7)$$

Existe dos casos notables para los cuales este potencial escalar satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = 0 \quad \text{en casos especiales} \quad (5.3.8)$$

• Caso 1: si se cumple que $\vec{B} = \mu\vec{H}$ y puesto que la divergencia de \vec{B} es siempre nula, entonces (5.3.8) vale.

• Caso 2: si se cumple que $\nabla \cdot \vec{M} = 0$ entonces (5.3.8) es cierto aun cuando (5.1.15) no lo sea.

5.4. Flujo magnético

Ya se definió en el capítulo anterior la noción de flujo magnético

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{\Gamma=\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (5.4.1) \end{aligned}$$

como una medida de la cantidad de campo magnético que atraviesa una superficie arbitraria S . Puesto que la divergencia de \vec{B} es siempre nula este flujo no depende de la superficie misma. El flujo a través de dos superficies que tienen el mismo borde Γ común tienen el mismo flujo.

Finalmente observemos que si se calcula el rotor de ambos miembros de la igualdad (5.1.15) se obtiene $\nabla \times \vec{B} = \mu \nabla \times \vec{H} = \mu \vec{J}$ es decir,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (5.4.2)$$

a pesar de que al comienzo de esta sección se afirmó que $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_T$. Esta última relación es siempre cierta mientras que (5.4.2) vale solo para materiales lineales y homogéneos. Para estos materiales especiales se cumple

entonces que $\mu_o \vec{J}_T = \mu \vec{J}$. Además de (5.4.2) se desprende que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu I_{\Gamma} \quad (5.4.3)$$

que es aun otra forma de ver la ley circuital de Ampère en el caso de materiales lineales y homogéneos.

5.5. Ferromagnetismo

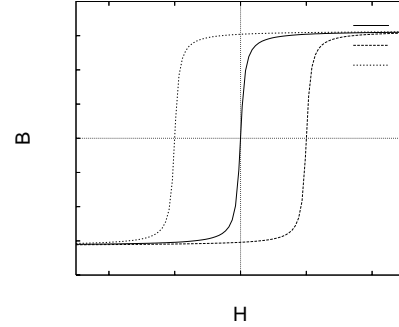
En los materiales ferromagnéticos la relación (5.1.15) pierde significado, porque la respuesta del material es no lineal y, más aun, depende de la historia de la muestra. En estos casos es bueno considerar a \vec{H} como el campo independiente y estudiar el comportamiento:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{H}(\vec{r})) \quad (5.5.1)$$

de \vec{B} como función de \vec{H} .

Si se toma una muestra ferromagnética con magnetización nula (no está magnetizada) y se comienza a aplicar un campo \vec{H} externo de magnitud creciente, con dirección y sentido fijos, se observa que el campo \vec{B} en la muestra también aumenta, para finalmente comenzar a hacerse cada vez más insensible al valor de la intensidad magnética \vec{H} aplicada. Llamando componente '3' a la dirección que tiene el campo a lo largo de su propia dirección, se ha descubierto que estos materiales tienen una magnetización máxima. La razón $B_z/(\mu_o H_z)$ puede ser de varios miles (o incluso cientos de miles), lo que los hace materiales magnéticos únicos en aplicaciones

tecnológicas. Esto quiere decir que el campo magnético en el interior de una bobina, puede ser cientos de miles veces más grande si se usa un buen material ferromagnético como núcleo con respecto a la bobina con núcleo vacío.



Si en la misma muestra anterior se comienza a disminuir H_z , se observa que en el material B_z no recupera los valores que tuvo en el ascenso, sino que sistemáticamente B_z es mayor que aquel que se tuvo a la subida para el mismo valor de H_z . Y de esta manera se llega $H_z = 0$ y sin embargo hay un campo magnético en el material: el material se ha magnetizado ($\vec{M} \neq 0$). Si se continua disminuyendo H_z , es decir, si comienza a crecer apuntando en

la dirección contraria, B_z irá disminuyendo y durante todo un intervalo de valores de H_z se tendrá que H_z y B_z apuntan en direcciones opuestas (se dice que \vec{H} y \vec{B} son vectores antiparalelos). Finalmente B_z se anula y si se sigue variando H_z en el mismo sentido, H_z y B_z vuelven a ser paralelos y se puede volver a tener una magnetización de saturación, solo que con el signo cambiado.

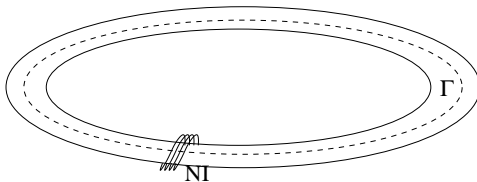
Si, a partir de ese último punto, se vuelve a variar H_z en el sentido de la primera etapa, se alcanza un momento en que H_z se hace cero y en ese punto la muestra tiene una magnetización permanente en el sentido

opuesto al que tuvo anteriormente.

Estos ciclos H_z - B_z se denominan *ciclos de histéresis*. Al efectuar uno de estos ciclos se gasta cierta energía en forma de calor la cual se relaciona al área cuyo perímetro es la curva cerrada H_z - B_z correspondiente al ciclo que se estudia. Es un problema tecnológico encontrar materiales ferromagnéticos apropiados para funcionar como núcleos en circuitos con corriente alterna (e.g. en un transformador) que tengan curvas de histéresis que impliquen una pérdida mínima de energía. Tal es el caso del hierro dulce.

5.6. Circuitos magnéticos

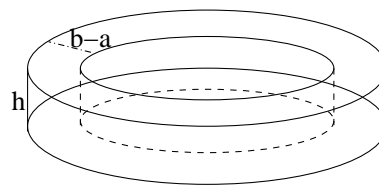
Veremos a continuación el concepto de circuitos magnéticos y el concepto asociado de *reluctancia*. La idea intuitiva se basa en la analogía con la ley de Ohm $\mathcal{E} = RI$. El lugar de la fem \mathcal{E} lo toma la fuerza magnetomotriz, *fmm*, el análogo de la corriente es el flujo magnético Φ y el de la resistencia lo toma la reluctancia \mathcal{R} .



Lo que se va a ver es que la fuerza magnetomotriz se identifica con NI (ver más adelante) y en

circuitos magnéticos se puede usar leyes como las de Kirchhoff las que se deducen: la primera ley a partir de $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ y la segunda de ley a partir de $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{r} = NI$, donde NI es la *fmm* (la corriente total) que pasa por una superficie que se apoya en Γ .

5.6.1. Ejemplo 1



Consideremos una bobina toroidal de N vueltas, de sección rectangular de radio interno a , radio externo b y altura h . Gracias a la ley circuital de Ampère, la intensi-

dad magnética en el interior de esta bobina es

$$\vec{H}(\rho, \phi) = \frac{NI}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

y el campo magnético, de acuerdo a (5.2.4), es μ multiplicando a la expresión anterior. A partir de este \vec{B} se puede calcular el flujo Φ de \vec{B} por una sección rectangular de la bobina (área $(b - a)h$) y resulta:

$$\Phi = \frac{\mu NI h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (5.6.1)$$

que se reescribe en la forma

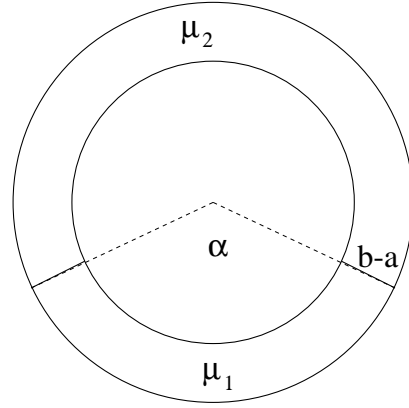
$$NI = \left(\frac{2\pi}{\mu h \ln(\frac{b}{a})} \right) \Phi. \quad (5.6.2)$$

El lado izquierdo, NI , es la característica de la bobina que se identifica con la *fmm* y el gran paréntesis de la derecha es, en este caso, la reluctancia \mathcal{R} . Se puede ver que si la sección de la bobina aumenta, \mathcal{R} disminuye y mientras mayor sea la permeabilidad magnética menor es la reluctancia.

5.6.2. Ejemplo 2

Consideremos una bobina toroidal de N vueltas con corriente I , de sección rectangular, radio interno a , radio externo b , altura h con un núcleo que en la zona $0 \leq \phi \leq \alpha$ tiene permeabilidad magnética μ_1 y en el resto tiene permeabilidad

magnética μ_2 . Se sabe que el campo magnético en el núcleo es de la forma de una constante c_0 dividida por el radio ρ de coordenadas cilíndricas y la magnitud de la constante c_0 no puede depender del medio porque el campo no sufre discontinuidad alguna al pasar de un medio al otro, $\vec{B} = \hat{\phi} c_0 / \rho$. La intensidad \vec{H} es diferente en ambos medios y la relación es $\vec{H}_a = \vec{B} / \mu_a$ (medio $a = 1$ ó $a = 2$). Si se escoge un camino Γ de integración que es una circunferencia de radio ρ , concéntrica a toda la geometría y dentro del núcleo y se utiliza la ley circuital se obtiene,



$$H_1(\rho) \alpha \rho + H_2(\rho) (2\pi - \alpha) \rho = N I \quad (5.6.3)$$

En lo anterior H_a es la magnitud de \vec{H} en el medio a a distancia ρ del eje de simetría; $\alpha \rho$ es el largo de la parte del camino Γ que está en el medio $a = 1$ y $(2\pi - \alpha) \rho$ es el largo

de la parte de Γ que está en el medio $\alpha = 2$.

La misma relación anterior se puede reescribir,

$$\left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2} \right) \rho B(\rho) = N I \quad (5.6.4)$$

Uniendo con lo que se había dicho antes

$$\vec{B} = \frac{N I}{\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}} \frac{\hat{\phi}}{\rho} \quad (5.6.5)$$

El flujo de este campo a través de una sección cualquiera del núcleo es

$$\Phi = \frac{N I}{\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{2\pi - \alpha}{\mu_2}} h \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (5.6.6)$$

relación que se puede escribir como

$$(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \Phi = N I \quad (5.6.7)$$

donde

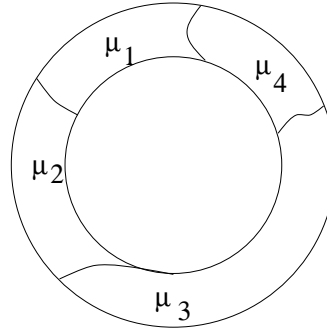
$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \frac{1}{\mu_1} \frac{\alpha}{h \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \\ \mathcal{R}_2 &= \frac{1}{\mu_2} \frac{2\pi - \alpha}{h \ln \left(\frac{b}{a} \right)} \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

5.6.3. Ejemplo 3

Si el núcleo estuviese dividido en n zonas de permeabilidades μ_1, \dots, μ_n , por todas estas zonas naturalmente pasa el mismo flujo Φ determinado por una reluctancia equivalente, \mathcal{R}_{eq}

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \dots + \mathcal{R}_n \quad (5.6.9)$$

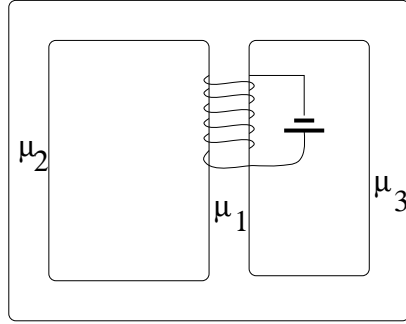
porque se trata de reluctancias en serie. En este ejemplo las superficies entre dos medios son ortogonales al campo, de modo que la condición de borde que se usó fue la continuidad de las componentes normales de \vec{B} : $B_{1n} = B_{2n} = \dots$



5.6.4. Ejemplo 4

Consideremos el caso de la figura adjunta. Se tiene un núcleo en forma de 8 dividido en tres sectores con permeabilidades magnéticas μ_1, μ_2 y μ_3 y reluctancias $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ y \mathcal{R}_3 respectivamente. En cada una de estas tres partes los flujos magnéticos son Φ_1, Φ_2 y Φ_3 . La ecuación circuital implica entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_2 \Phi_2 &= N I \\ \mathcal{R}_2 \Phi_2 - \mathcal{R}_3 \Phi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.6.10)$$



Pero de la figura es obvio que además

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad (5.6.11)$$

Con estas tres ecuaciones lineales se puede despejar que

$$NI = \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} \Phi_1$$

$$= \mathcal{R}_{\text{tot}} \Phi_1 \quad (5.6.12)$$

donde \mathcal{R}_{tot} es la reluctancia total del sistema. Puesto que \mathcal{R}_1 está en serie con el sistema de \mathcal{R}_2 y \mathcal{R}_3 y estas últimas están en paralelo, entonces es interesante estudiar $\mathcal{R}_{23} \equiv \mathcal{R}_{\text{tot}} - \mathcal{R}_1$ para obtener la reluctancia equivalente a las dos reluctancias \mathcal{R}_2 y \mathcal{R}_3 en paralelo. Un mínimo de álgebra conduce a

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{23}} = \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} \quad (5.6.13)$$

5.7. Problemas

- 5.1 Considere una bobina toroidal de sección rectangular de N espiras, por cada una de las cuales circula una corriente I . El radio interior de la bobina es a y el exterior es b y la altura es h . El núcleo de esta bobina es de un material inhomogéneo

en tal forma que su permeabilidad magnética μ depende tan solo del ángulo polar θ y satisface

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + k \cos \theta \quad (5.7.1)$$

Determine la intensidad magnética \vec{H} en todo el interior de la bobina.