Mecánica Cuántica I
Tarea N$^{\underline{o}}$ 6

Prof. : J. Rogan
Ayud. : V. Muñoz

Fecha de publicación: 12 de junio de 2001.
Fecha de entrega: 19 de junio de 2001.

1. Demuestre que para un oscilador armónico de frecuencia ω se cumplen las siguientes relaciones:

   (a) $E_n = 2\langle\check{T}\rangle_n = 2\langle\check{V}\rangle_n$.

   (b) $(\Delta x)^2_n = x_0^2(n+\frac{1}{2})$, $(\Delta p)^2_n = \dfrac{\hbar^2}{x_0^2}(n+\frac{1}{2})$.

   (c) $\langle x^4\rangle_n = \dfrac{3x_0^4}{4}(2n^2+2n+1)$.

   Aquí, $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ y $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

2. Estudie la evolución temporal del estado descrito por

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} e^{(-(x-a)^2/2x_0^2)}$$

   en un potencial armónico de frecuencia ω.

3. (a) Encuentre el espectro de energía y las autofunciones para el sistema cuyo potencial es:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x > 0 \end{cases} .$$

   (b) Determine el espectro de energía y las autofunciones para una partícula de masa m y carga q en un potencial armónico de frecuencia ω al que se le superpone un campo eléctrico uniforme $\mathcal{E}$.

   Si el campo eléctrico fue superpuesto repentinamente al oscilador armónico cuando la partícula se encontraba en el estado fundamental, determine la probabilidad de transición a los estados propios del nuevo sistema.

4. (a) Muestre que la densidad de probabilidad para la posición de una partícula clásica de energía E en un potencial armónico de frecuencia ω está dada por

$$p_x(x) = \frac{1}{\pi a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2} \quad ,$$

en que a es el punto de retorno clásico. Compárela con el resultado cuántico para $n = 0$ y $n \to \infty$ ¿Se verifica el principio de correspondencia?

¿Cuál es la probabilidad (valor numérico) de encontrar a la partícula fuera del límite clásico si ella se encuentra en el estado fundamental? Evalúe este resultado para dos sistemas, uno macroscópico (un péndulo en un laboratorio, por ejemplo) y uno macroscópico (un átomo en una red cristalina, el átomo de nitrógeno en la molécula de amoníaco, u otro). Busque y/o invente los valores de las dimensiones físicas pertinentes.

(b) Determine la distribución de probabilidad para el momentum de una partícula en un potencial armónico si ella se encuentra en el n-ésimo estado excitado.