Mecánica Cuántica I
Tarea Nº 5

Prof. : J. Rogan
Ayud. : V. Muñoz

Fecha de publicación: 5 de junio de 2001.
Fecha de entrega: 12 de junio de 2001.

1. *Efecto túnel.* Considere el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & a < x \end{cases} \quad ,$$

con $V_0 > 0$.

(a) Encuentre los coeficientes de reflexión R y transmisión T para incidencia con energía E desde $x < 0$, y muestre que $R + T = 1$. Considere los casos $E > V_0$ y $0 < E < V_0$.

(b) Para $E > V_0$ grafique T para un intervalo adecuado de energías de incidencia E y muestre —gráfica y analíticamente— que $T = 1$ para ciertos valores específicos de E.

(c) Para $0 < E < V_0$, muestre que $T \sim e^{-a/d}$, con $d = \hbar/\sqrt{8m(V_0 - E)}$.

2. Estudie el potencial:

$$V(x) = V_0 \left[\delta\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \delta\left(\frac{x}{a} + 1\right) \right] \ .$$

Encuentre autofunciones y autovalores para $V_0 > 0$ y $V_0 < 0$.

3. Considere un potencial arbitrario localizado en una extensión finita del eje x. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger a la izquierda y a la derecha de la región del potencial no nulo están dadas por

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{I}}(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \ , \\ \psi_{\mathrm{II}}(x) &= Ce^{ikx} + De^{-ikx} \ , \end{aligned}$$

respectivamente. Se define la matriz de scattering mediante la relación

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} .$$

(a) Demuestre que la matriz S es unitaria y que satisface $S(-k) = S^\dagger(k)$.

(b) Demuestre que la matriz de scattering para el potencial

$$V(x) = \frac{\lambda}{a}\delta(x-b)$$

es

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\eta\lambda}{2ika-\eta\lambda}e^{2ikb} & \frac{2ika}{2ika-\eta\lambda} \\ \frac{2ika}{2ika-\eta\lambda} & \frac{\eta\lambda}{2ika-\eta\lambda}e^{-2ikb} \end{pmatrix} , \quad \eta = \frac{2m}{\hbar^2} .$$

Verifique explícitamente las propiedades demostradas en el punto anterior.

4. Resuelva la ecuación de Schrödinger para el potencial generalizado de Pöschl-Teller

$$V(x) = \frac{V_1}{\sin^2 \alpha x} + \frac{V_2}{\cos^2 \alpha x} ,$$

en el intervalo $0 < x < \pi/(2\alpha)$. V_1 y V_2 son constantes positivas. Demuestre que los autovalores están dados por

$$E_n = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}(\eta+\lambda+2n)^2 , \quad \eta,\ \lambda > 1 ,$$

y que las autofunciones correspondientes son

$$\psi_n = \sin^\eta(\alpha x)\cos^\lambda(\alpha x)F[\eta+\lambda+n, -n, \eta+\tfrac{1}{2}; \sin^2(\alpha x)] ,$$

donde la función hipergeométrica

$$F(a,b,c;z) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots$$

es la solución de

$$\left\{ z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{d}{dz} - ab \right\} u = 0 ,$$

con $u(0) = 1$ para $c \neq -n$, $n = 0,\ 1,\ 2 \ldots$