

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DINÁMICOS

Tema 1

INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DINÁMICOS

Modelos matemáticos y teorías

- Un **modelo** constituye una representación abstracta de un cierto aspecto de la realidad. En su estructura intervienen, por una parte, los elementos que caracterizan la realidad modelizada y, por otra parte, las relaciones existentes entre ellos.
- Un **modelo matemático** es un tipo de modelo basado en la lógica matemática, cuyos elementos son esencialmente variables y funciones, y las relaciones entre ellos vienen expresadas a través de relaciones matemáticas (ecuaciones, inecuaciones, operadores lógicos...) que se corresponden con las correspondientes relaciones del mundo real que modelizan (relaciones tecnológicas, leyes físicas, restricciones del mercado...).

- Importancia de los modelos matemáticos en Economía:
 - La construcción de modelos revela, a veces, relaciones que no son evidentes a primera vista
 - Una vez construido el modelo, es posible extraer de él propiedades y características de las relaciones que de otra forma permanecerían ocultas
 - En aquellas situaciones económicas del mundo real en las que no es posible experimentar con la realidad, ofrecen un marco teórico para evaluar la toma de decisiones así como sus consecuencias

Modelos matemáticos estáticos vs modelos matemáticos dinámicos

- En un modelo estático la variable tiempo no desempeña un papel relevante. En un **modelo dinámico**, por el contrario, alguno/s de los elementos que intervienen en la modelización no permanecen invariables, sino que se consideran como funciones del tiempo, describiendo trayectorias temporales.
- El análisis de un modelo dinámico tiene por objeto el estudio de la trayectoria temporal específica de alguno/s de sus elementos

**MODELOS DINÁMICOS DETERMINISTAS VS
MODELOS DINÁMICOS ESTOCÁSTICOS**

- Un modelo dinámico determinista es aquel en el que, tanto a los parámetros como a las variables temporales, se les asignan valores determinados con certeza absoluta
- En general existen pocos modelos deterministas en el campo de la Economía y las Finanzas, ya que en la mayor parte de los casos, las variables y parámetros involucrados en los modelos económicos y financieros (tasas de interés, precios de activos,) son impredecibles.
- Habitualmente la modelización dinámica en modelos económico-financieros hace uso de **modelos estocásticos**.
- En un modelo estocástico, alguna variable (o parámetro) sigue un proceso estocástico, es decir, que los valores que toma a lo largo del tiempo no son determinados con certeza absoluta sino que siguen una distribución de probabilidad.
- El estudio de los **modelos dinámicos estocásticos** (y sus aplicaciones económico-financieras) constituye el contenido fundamental de la asignatura

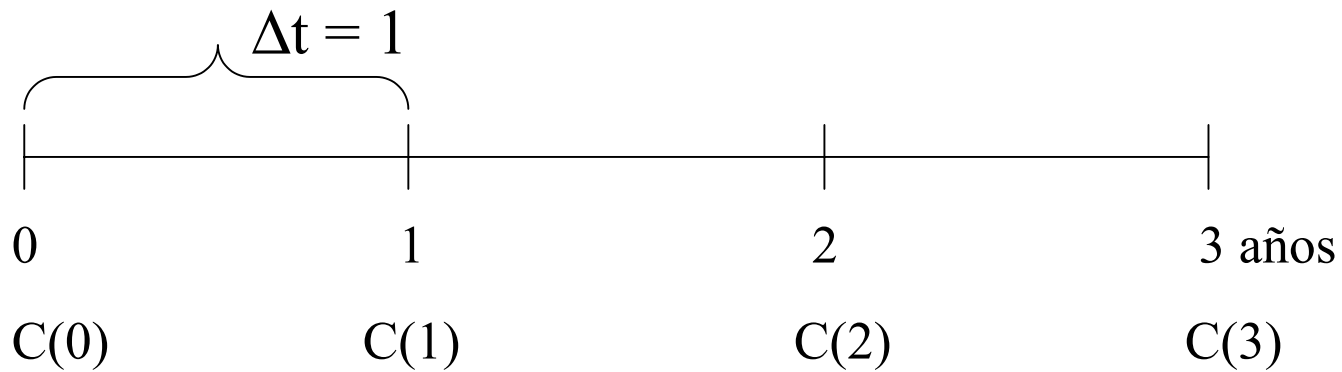
Ejemplo: Modelo de capitalización compuesta

- Consideremos un depósito financiero a 3 años, con capital inicial C_0 y tasa de interés anual del 6 %. Diseña un modelo de capitalización compuesta considerando que la capitalización es:

(a) Anual

• *Elementos del modelo*

- Variable tiempo t : variable discreta $t \in \{0, 1, 2, 3\}$
- Variable de estado $C(t)$ que describe la evolución del capital a lo largo del tiempo. Es función del tiempo y el estudio de su trayectoria temporal es el objetivo del modelo.
- $\Delta t = 1$: incremento de tiempo transcurrido entre dos valores de la variable t , es decir entre dos periodos Los modelos discretos suelen trabajar con valores de t equidistantes y, por tanto, con un incremento constante.
- $n = 3$; número de periodos. Se cumple $n * \Delta t = \text{intervalo temporal total}$.



• *Relaciones*

- Queremos establecer la relación existente entre el capital en un instante t y el capital en el instante siguiente $t + \Delta t$. Aplicando la ley de capitalización compuesta se tiene que:

$$C(t + \Delta t) = C(t) + C(t) * 0.06 = C(t) * (1 + 0.06)$$

• *Resolución del modelo*

- Procediendo recursivamente obtenemos $C(3)$:

$$C(0) = C_0$$

$$C(1) = C_0 * (1 + 0.06)$$

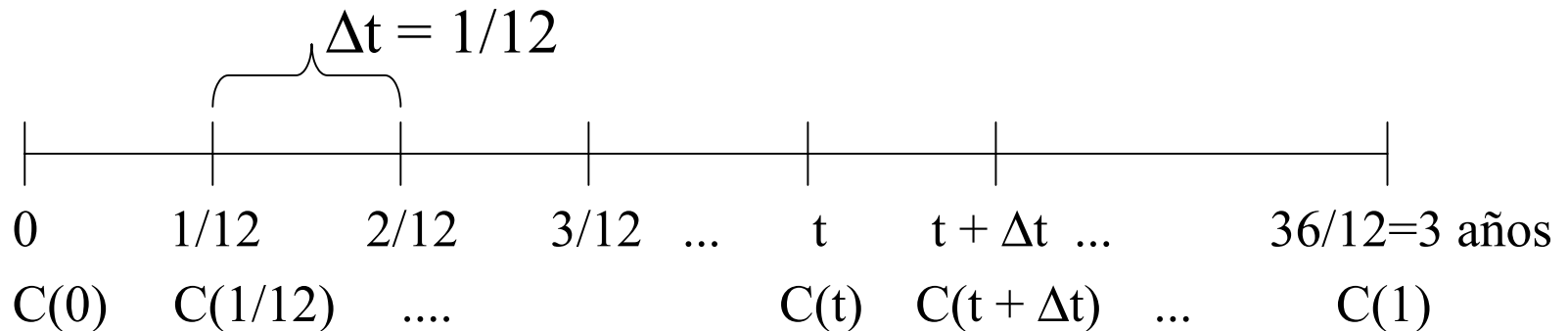
$$C(2) = C(1) * (1 + 0.06) = C_0 * (1 + 0.06) * (1 + 0.06) = C_0 * (1 + 0.06)^2$$

$$C(3) = C_0 * (1 + 0.06)^3$$

(b) Mensual

- *Elementos del modelo*

- Variable tiempo t : $t \in \{0, 1/12, 2/12, \dots, 12/12, \dots, 24/12, \dots, 36/12\}$
- Variable de estado $C(t)$
- $\Delta t = 1/12$ (1 mes)
- $n = 36$



- *Relaciones*

- Como la tasa de interés es anual y el periodo de capitalización es mensual, debemos convertir la tasa anual en mensual. Para ello, sustituimos 0.06 por $0.06/12 = 0.06 \cdot (1/12) = 0.06 \cdot \Delta t$

$$C(t + \Delta t) = C(t) + C(t) \cdot 0.06 \cdot \Delta t$$

- **Modelo general: Modelo dinámico discreto en diferencias finitas**
 - Capitalización compuesta
 - C_0 capital inicial
 - r tasa de interés anual
 - Δt expresado de modo que permita transformar la tasa de interés anual en la correspondiente a la duración del periodo utilizado

$$C(t + \Delta t) = C(t) + C(t) * r * \Delta t$$
$$C(0) = C_0$$

- **Modelo dinámico continuo**

- Supongamos que en el ejemplo anterior disminuimos la duración del periodo y trabajamos con capitalización diaria. El modelo seguira siendo:

$$\left. \begin{aligned} C(t + \Delta t) &= C(t) + C(t) * r * \Delta t \\ C(0) &= C_0 \end{aligned} \right\}$$

pero Δt pasa a ser $\Delta t = 1/360$ (transformando la tasa de interés anual en diaria). Cuanto menor sea Δt , menor será el periodo de capitalización utilizado.

- Si hacemos que $\Delta t \rightarrow 0$, entonces $r * \Delta t$ representa la *tasa de interés instantánea*. Para obtener el modelo de capitalización “instantánea” o **modelo continuo de capitalización** procedemos como sigue:

- Operamos en la ecuación de relaciones del modelo reagrupando los términos:

$$C(t + \Delta t) - C(t) = C(t) * r * \Delta t$$

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = C(t) * r$$



- Tomamos límites cuando $\Delta t \rightarrow 0$ en ambos miembros de la igualdad:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C(t) * r$$

Es la definición
de derivada de
 $C(t)$: $C'(t)$



$$C'(t) = C(t) * r$$

$$C(0) = C_0$$

No depende de Δt

Modelo continuo de capitalización

Obtenemos una ecuación en la que se relaciona una función con su primera derivada. Este tipo de ecuaciones serán estudiadas en el tema siguiente y constituyen la esencia de las modelizaciones dinámicas en tiempo continuo. Son las denominadas **ecuaciones diferenciales**.

Tema 2

ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS

Definiciones básicas

- Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona una función desconocida, tanto en una como en varias variables, con sus derivadas (o derivadas parciales) hasta un cierto orden. Distinguimos dos tipos de ecuaciones diferenciales:
 - **Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)** : son aquellas en las que la función incognita es una función de una sola variable $y = y(t)$. Se representan como:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

o bien en su forma normal o explícita como:

$$y^{(n)} = H(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Ejemplos: $C'(t) = C(t) * r$; $y' = y + 1$

- **Ecuaciones en derivadas parciales (EDP):** son aquellas en las que la función incógnita es una función de varias variables $y = y(t_1, t_2, \dots, t_n)$, por lo que las derivadas que intervienen en la ecuación son derivadas parciales. Se representan como:

$$F(t_1, \dots, t_m, \frac{\partial y}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial t_m}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2} \dots \partial t_m^{r_m}}) = 0$$

Ejemplo: $z = z(t, x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial z}{\partial y} = z + 1$$

A continuación nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias EDO. Consideremos las siguientes definiciones básicas:

- **Solución de una EDO:** es una función $y(t)$ que al ser sustituida en la ecuación, la convierte en una identidad.

Ejemplo: La solución de la ecuación $y'(t) = -ky(t)$ es $y(t) = Ce^{-kt}$, siendo C una constante arbitraria.

- **Solución general de una EDO:** es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial. Se expresa como una función que depende de uno o más parámetros. Dando valores concretos a dichos parámetros se obtienen las denominadas **soluciones particulares**.

Ejemplos: 1. Demostrar que la solución general de la ecuación $y'(t) = y(t) + t$ es $y(t) = Ce^t - t - 1$

2. Demostrar que dos soluciones particulares de la ecuación $y'(t) = y(t) + t$ son $y(t) = e^t - t - 1$; $y(t) = -t - 1$

3. Demostrar que $y(t) = e^t - 1$ no es solución de $y'(t) = y(t) + t$

- **Orden de una EDO:** se llama orden de la ecuación diferencial al mayor orden de derivación que aparece en la ecuación.

Ejemplos: $y'(t)=t^2+y^2$ es una EDO de orden 1;

$3y'''(t)+2y'(t) = e^t$ es una EDO de orden 3;

- **Condiciones iniciales de una EDO:** se llaman condiciones iniciales a los valores asignados a la función y a sus derivadas hasta orden una unidad menos del orden de la ecuación, en un instante dado t_0 :

$$\left. \begin{array}{l} y^{(n)} = H(t, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \\ y(t_0)=a_0 \\ y'(t_0)=a_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0)=a_{n-1} \end{array} \right\}$$

- **Problema de valores iniciales:** dada la solución general de una EDO, se llama problema de valores iniciales al problema de encontrar una solución particular para la cual se verifiquen las condiciones iniciales dadas.

Ejemplo: Resolver el problema de valores iniciales para

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = y(t) + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

sabiendo que $y(t) = Ce^t - t - 1$ es la solución general

Ejemplos con Mathematica

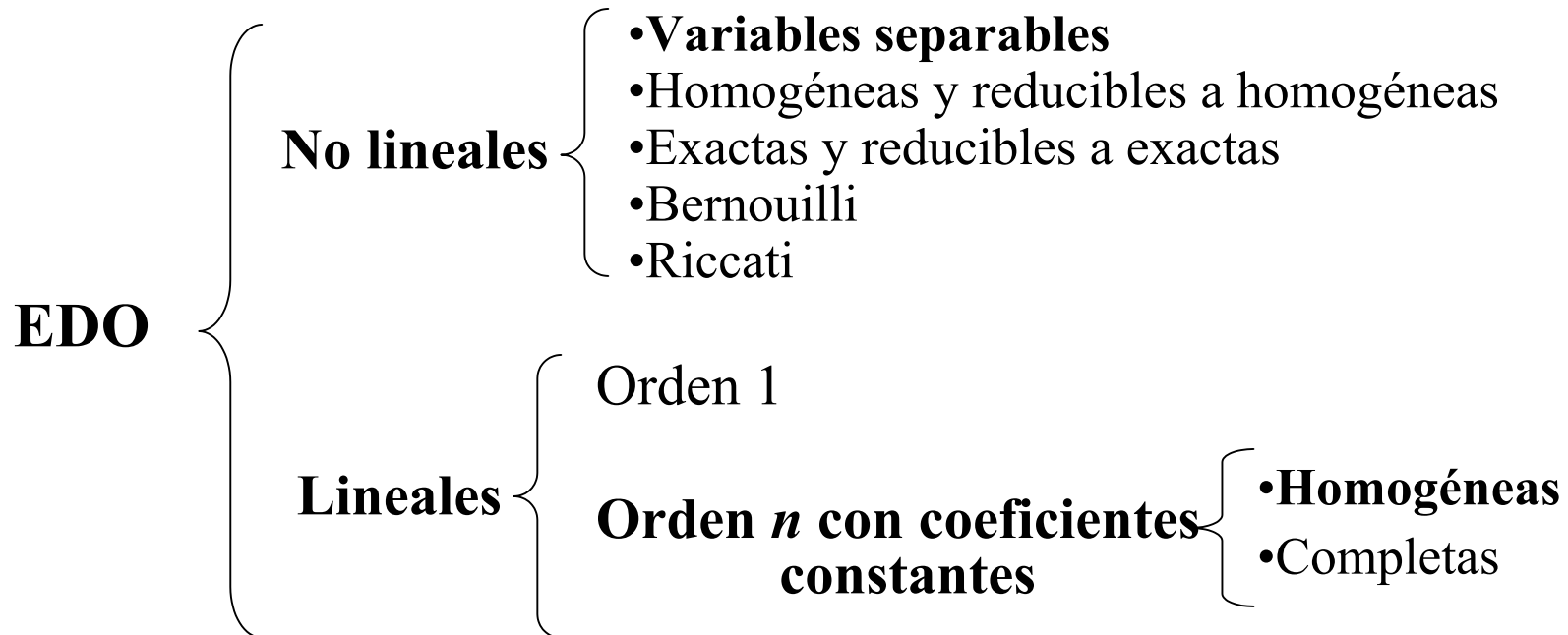
- *Representación de la solución general de $y'(t) = y(t) + t$;
representación de la solución particular $y(t) = 2e^t - t - 1$*
- *Representación de la solución general de $y'(t) = -2x^2t$*

Métodos de resolución de EDO

- **Métodos analíticos:** consisten en la obtención de la función solución de la EDO expresada por medio de una “formula”, es decir de una expresión analítica, que involucra funciones elementales. Ahora bien, en general, las EDO (y los problemas de valores iniciales) no tienen solución analítica, por lo que es necesario recurrir a los denominados métodos numéricos para la obtención de soluciones.
- **Métodos numéricos:** consisten en la obtención de soluciones numéricas de problemas de valores iniciales. La solución se expresa entonces por medio vectores de valores numéricos; es decir que, aunque no conozcamos la expresión analítica de la solución, podemos determinar en cada instante del tiempo cual sería su valor numérico.

Métodos analíticos

Para poder aplicar un determinado método analítico de resolución, es necesario que la ecuación presente una “estructura” particular. Si cambia dicha estructura el método deja de ser válido. A continuación recogemos una clasificación de EDO que admiten resolución analítica.



VARIABLES SEPARABLES

- Una ecuación diferencial se dice de variables separables si es de la forma:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f_1(t) * f_2(y) \quad (f_2(y) \neq 0)$$

- Método de resolución:

- Se agrupa dt con la función en t , $f_1(t)$, y dy con la función en y , $f_2(y)$

$$\frac{dy(t)}{f_2(y)} = f_1(t) * dt$$

- Se integran ambos miembros de la igualdad respecto de su variable correspondiente

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(t) dt$$

- *Ejemplo:* $\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{t(y-2)}$

$$\frac{y-2}{2y} dy = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{y-2}{2y} dy = \int \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{y-2}{2y} dy = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{2}y - \ln|y| + C_1$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_2$$

$$\frac{1}{2}y - \ln|y| + C_1 = \ln|t| + C_2$$



Solución general

$$\boxed{\frac{1}{2}y - \ln|y| = \ln|t| + K}$$

LINEALES HOMOGÉNEAS A COEFICIENTES CONSTANTES

- Una ecuación diferencial se dice que es lineal, de orden n , con coeficientes constantes y homogénea si es de la forma:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0$$

donde a_i son números reales e $y^{(i)}$ es la derivada i -ésima de $y(t)$.

- Método de resolución:
 - Se construye el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial:

$$P(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n$$

- Se obtienen las raíces del polinomio característico:


$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

- Distinguimos los siguientes casos:

- Las raíces son todas reales y distintas dos a dos: $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$

Sol. general $\Rightarrow y(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + \dots + C_n e^{k_n t}$ (C_1, \dots, C_n constantes arbitrarias)

- Las raíces son reales múltiples $\{k_1 \rightarrow m_1, k_2 \rightarrow m_2, \dots, k_p \rightarrow m_p\}$

Sol. general 

$$y(t) = C_{10}e^{k_1 t} + C_{11}te^{k_1 t} + \dots + t^{m_1-1}C_{1(m_1-1)}e^{k_1 t} + \dots + C_{p0}e^{k_p t} + C_{p1}te^{k_p t} + \dots + t^{m_p-1}C_{p(m_p-1)}e^{k_p t}$$

C_{ij} constantes arbitrarias

- Si una raíz es compleja simple $\alpha + \beta i$ (y su conjugada $\alpha - \beta i$), entonces a la solución general construida como en los casos anterior se le añadirá el sumando:

$$C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

- *Ejemplos:*

1. $y^{(2)}(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$

Polinomio característico $\longrightarrow P(k) = k^2 + 3k + 2$

Raices $\longrightarrow k_1 = -1, k_2 = -2$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \longleftarrow \text{Sol. general}$$

2. $y^{(3)}(t) - 3y^{(2)}(t) + 3y'(t) - y(t) = 0$

Polinomio característico $\longrightarrow P(k) = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$

Raices $\longrightarrow k_1 = -1, m_1 = 3$ (raiz triple)

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t \longleftarrow \text{Sol. general}$$

3. $y^{(2)}(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$

Polinomio característico $\longrightarrow P(k) = k^2 + 4k + 5$

Raices $\longrightarrow k_1 = -2 \pm i$

$$y(t) = C_1 e^{-2t} \cos t + C_2 e^{-2t} \sin t \longleftarrow \text{Sol. general}$$

Métodos numéricos

- Los métodos numéricos se aplican a problemas de valores iniciales y se basan en la **discretización** de la ecuación diferencial considerada, es decir, en la transformación de la ecuación diferencial (en tiempo continuo) en una ecuación en diferencias finitas (en tiempo discreto).
- Estudiaremos los esquemas de discretización de Euler y Adams, aplicados a un problema de valores iniciales con una EDO de orden 1 (con $f(y(t),t)$ no lineal en el caso general):

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Si la EDO es de orden n , se transforma ésta en un sistema equivalente de n ecuaciones diferenciales de orden 1 y se aplican los métodos estudiados.

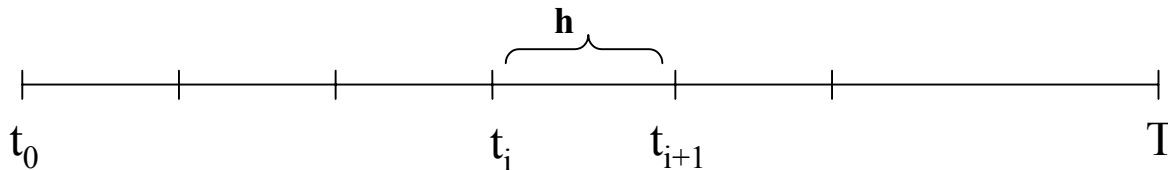
ESQUEMA DE DISCRETIZACIÓN DE EULER

- Consideramos el problema genérico de valores iniciales:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Método de resolución:***

- Suponemos que nuestro intervalo de trabajo es $[t_0, T]$, y consideramos que dicho intervalo está dividido en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$, de manera que $t_{i+1} = t_i + h$, siendo h la longitud del subintervalo



- Aplicando a la función $y(t)$ el desarrollo de Taylor de orden 1 obtenemos que:

$$y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + o(h^2)$$

Donde $o(h^2)$ representa el resto del polinomio de Taylor que depende de h^2 . Si h es muy pequeño (infinitesimal), a $o(h^2)$ se le llama infinitésimo de orden 2, y puede considerarse despreciable a efectos de aproximar.

- Sustituyendo en la ecuación diferencial sabemos que:

$$y'(t_i) = \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t_i} = f(y(t_i), t_i)$$

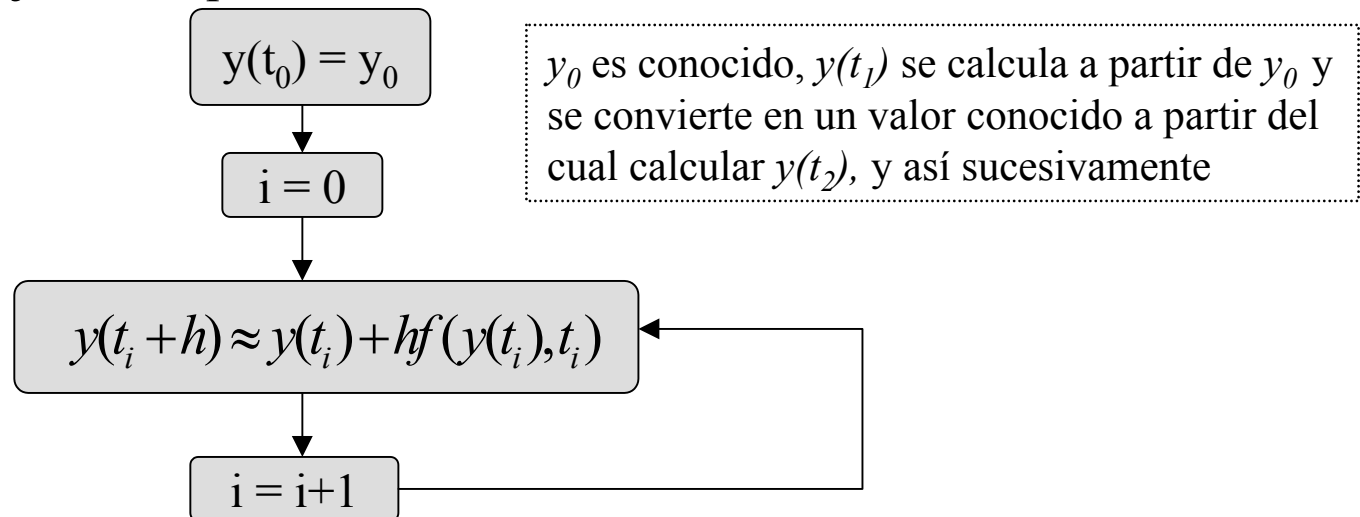
- Uniendo ambas expresiones obtenemos:

$$y(t_i + h) = y(t_i) + hf(y(t_i), t_i) + o(h^2)$$

- Despreciando el infinitésimo de orden 2, $o(h^2)$, tenemos que:

$$y(t_i + h) \approx y(t_i) + hf(y(t_i), t_i)$$

- Diagrama de flujo del esquema de discretización de Euler:



- *Dado el problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = 1 + (y - t)^2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

Compara el comportamiento de su solución analítica $y(t)=t + 1/(2-t)$, con el comportamiento de la solución numérica proporcionada por el esquema de discretización de Euler, en el intervalo $[0, 1.9999]$

- Construimos un programa en lenguaje FORTRAN con la siguiente estructura:

```
*  PROGRAMA EULER
```

```
PROGRAM EULER
```

► Nombre del programa

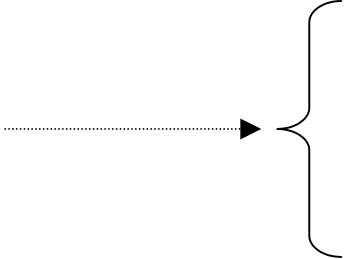
```
*PARAMETROS Y VARIABLES
```

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
PARAMETER (T0=0.,Y0=0.5,A=1.9999,N=1000)
```

```
DIMENSION T (N) , Y (N) , Z (N)
```



- 
- Dividimos el intervalo en 1000 subintervalos.
 - La variable T almacena los cortes de los subintervalos
 - La variable Y almacena los valores de la aproximación numérica
 - La variable Z almacena los valores de la solución analítica

```
*FICHEROS
```

```
OPEN(20, FILE='EULER.SOL')
```

Guarda en el fichero Euler.sol los valores de T, Y y Z en tres columnas

```
*INICIALIZACION DE MATRICES.
```

```
DO I=1,N
```

```
T(I)=0.
```

```
Y(I)=0.
```

```
Z(N)=0.
```

```
END DO
```

Asigna a las variables un valor inicial de 0

```
*ROUTINA DE CALCULO.
```

```
H=A/N
```

```
T(1)=T0+H
```

```
Y(1)=Y0+H*(1+(Y0-T0)**2)
```

Calcula la longitud H de los subintervalos y el valor de la aproximación de Euler en el primer corte Y(1).

```
DO I=2,N
```

```
    T(I)=T(I-1)+H
```

```
    Y(I)=Y(I-1)+H*(1+(Y(I-1)-T(I-1))**2)
```

```
END DO
```

Calcula los valores de la discretización de Euler en el resto de cortes

```
DO I=1,N
```

```
    Z(I)= T(I)+1 / (2.0 -T(I) )
```

```
END DO
```

Evalua la expresión analítica de la solución en cada corte del intervalo

```
*ESCRITURA EN UN FICHERO DE LOS VALORES
```

```
DO K=1,N
```

```
WRITE(20,*) T(K) , Y(K) , Z(K)
```

```
END DO
```

Transcribe los valores obtenidos al fichero de soluciones Euler.sol creado antes

```
STOP
```

```
END
```



► Instrucciones de finalización de programa

Análisis de la solución

El fichero Euler.sol que genera el programa anterior al ser ejecutado contiene tres columnas de números de 20 dígitos:

- La 1ª columna contiene los 1000 cortes del intervalo temporal de trabajo.
- La 2ª columna los valores de la aproximación numérica en cada corte.
- La 3ª columna los correspondientes valores de la solución analítica.

A continuación presentamos las 11 primeras filas del fichero para poder comparar la precisión de la aproximación numérica realizada:

<i>Euler.sol</i>	 <i>Aproximación</i>	 <i>Valor analítico</i>
0.999949991703033472E-03	0. 5012 49937489628761	0. 5012 50062539648988
0.199989998340606694E-02	0. 502500 125016744681	0. 502500 375429675961
0.299984997510910041E-02	0. 503750 562956604031	0. 503750 939046151869
0.399979996681213389E-02	0. 505001 251685214259	0. 505001 753765901285
0.499974995851516779E-02	0. 506252 191579335986	0. 506252 819966504175
0.599969995021820170E-02	0. 50750 3383016484677	0. 50750 4138026297791
0.699964994192123560E-02	0. 50875 4826374932745	0. 50875 5708324378886
0.799959993362426951E-02	0. 51000 6522033711440	0. 51000 7531240605383
0.899954992532730341E-02	0. 51125 8470372612406	0. 51125 9607155598039
0.999949991703033732E-02	0. 51251 0671772190118	0. 51251 1936450743111
0.109994499087333712E-01	0. 51376 3126613763332	0. 51376 4519508193462

CONCLUSIONES

- El método de discretización de Euler nos permite obtener una aproximación numérica de la solución de la ecuación diferencial del ejemplo anterior, con una precisión de **4** cifras decimales.
- Existen esquemas de discretización más sofisticados que proporcionan mucho mejores aproximaciones. Por ejemplo, el método de Runge-Kutta aplicado al ejemplo anterior tiene una precisión de **15** cifras decimales.
- El método de Euler utiliza el polinomio de Taylor de orden 1 para diseñar el esquema de discretización. Si incrementamos el orden del polinomio de Taylor, mejoramos la precisión de la aproximación. Este hecho es el que incorpora Runge-Kutta. Asimismo, el esquema de discretización de Adams que describimos a continuación utiliza el desarrollo de Taylor de orden 2.

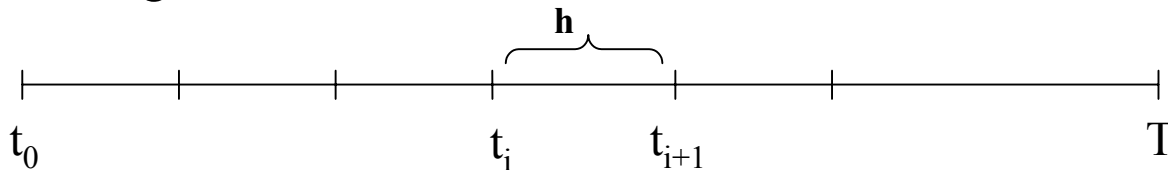
ESQUEMA DE DISCRETIZACIÓN DE ADAMS

- Consideramos el problema genérico de valores iniciales:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Método de resolución:***

- Suponemos que nuestro intervalo de trabajo es $[t_0, T]$, y consideramos que dicho intervalo está dividido en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$, de manera que $t_{i+1} = t_i + h$, siendo h la longitud del subintervalo



- Aplicando a la función $y(t)$ el desarrollo de Taylor de orden 1 obtenemos que:

$$y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + o(h^3)$$

Donde $o(h^3)$ representa el resto de orden 3 del polinomio de Taylor.

- Sustituyendo en la ecuación diferencial sabemos que:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t_i} = f(y(t_i), t_i) \qquad \left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t_i} = f'(y(t_i), t_i)$$

- Uniendo ambas expresiones obtenemos:

$$y(t_i + h) = y(t_i) + hf(y(t_i), t_i) + \frac{h^2}{2} f'(y(t_i), t_i) + o(h^3)$$

- Despreciando el infinitésimo de orden 3, $o(h^3)$, tenemos que:

$$y(t_i + h) \approx y(t_i) + hf(y(t_i), t_i) + \frac{h^2}{2} f'(y(t_i), t_i)$$

- Utilizando la definición de derivada, aproximamos:

$$f'(y(t_i), t_i) \approx \frac{f(y(t_i), t_i) - f(y(t_{i-1}), t_{i-1})}{h}$$

- Sustituyendo y operando en la expresión anterior obtenemos:

$$y(t_i + h) \approx y(t_i) + \frac{h}{2} (3f(y(t_i), t_i) - f(y(t_{i-1}), t_{i-1}))$$

•Notemos que para calcular el valor de la función en el instante $y(t_i+h)$, necesitamos conocer $y(t_i)$ e $y(t_{i-1})$. Por tanto, el algoritmo del esquema de discretización de Adams arranca calculando $y(2)$ a partir de $y(0)$ e $y(1)$. El valor de $y(0)$ es conocido, pero $y(1)$ deberá obtenerse a partir de $y(0)$. Para ello utilizamos el esquema de discretización de Euler:

$$y(1) \approx y(0) + hf(y(0), 0)$$

•Diagrama de flujo del esquema de discretización de Adams

