

*Apuntes de un curso de*

# MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.  
José Rogan C.



# Índice

<b>1. Espacio de funciones</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones . . . . .	1
1.2. Sucesiones de funciones . . . . .	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt . . . . .	9
1.4. Coeficientes de Fourier . . . . .	10
1.5. Integrales impropias (valor principal) . . . . .	14
1.6. Convergencia según Cesàro . . . . .	15
<b>2. Series de Fourier</b>	<b>19</b>
<b>3. Transformada de Fourier</b>	<b>35</b>
3.1. Definiciones . . . . .	35
3.2. Ejemplos . . . . .	36
3.3. Propiedades . . . . .	41
3.4. Aplicaciones . . . . .	43
<b>4. Convolución</b>	<b>45</b>
4.1. Espacio $\mathcal{S}$ . . . . .	45
4.2. Producto de convolución . . . . .	46
4.3. El espacio $\mathcal{S}$ como anillo . . . . .	49
<b>5. Distribuciones temperadas</b>	<b>53</b>
5.1. Definiciones . . . . .	53
5.2. Sucesión de distribuciones . . . . .	61
5.3. Producto de distribuciones . . . . .	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales . . . . .	72
5.5. Convergencia débil . . . . .	73
<b>6. Distribuciones y transformada de Fourier</b>	<b>79</b>
<b>7. Convolución de distribuciones</b>	<b>87</b>
7.1. Definiciones . . . . .	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones . . . . .	89
7.3. Uso de convolución en Física . . . . .	91

<b>8. La función Gamma</b>	<b>93</b>
8.1. La función factorial . . . . .	93
8.2. La función Gamma . . . . .	94
8.3. Función Beta . . . . .	96
8.4. Notación doble factorial . . . . .	99
8.5. Fórmula de Stirling . . . . .	99
8.6. Otras funciones relacionadas . . . . .	101
<b>9. Transformada de Laplace</b>	<b>103</b>
9.1. Definición . . . . .	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace . . . . .	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace . . . . .	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace . . . . .	111
<b>10. Aplicaciones de la transformada de Laplace</b>	<b>113</b>
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes . . . . .	114
10.2. Ecuaciones integrales . . . . .	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales . . . . .	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales . . . . .	120
<b>11. Polinomios ortogonales</b>	<b>123</b>
11.1. Definiciones . . . . .	123
11.2. Teoremas . . . . .	123
11.3. Relación de recurrencia . . . . .	125
<b>12. Polinomios de Hermite</b>	<b>127</b>
12.1. Definición . . . . .	127
12.2. Función generatriz . . . . .	127
12.3. Ortogonalidad . . . . .	130
12.4. Algunos resultados interesantes . . . . .	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite . . . . .	131
<b>13. Polinomios de Laguerre</b>	<b>133</b>
13.1. Definición . . . . .	133
13.2. Función generatriz . . . . .	133
13.3. Relaciones de recurrencia . . . . .	135
13.4. Ecuación de Laguerre . . . . .	135
13.5. Ortogonalidad . . . . .	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre . . . . .	138
<b>14. El problema de Sturm-Liouville</b>	<b>139</b>
14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos . . . . .	139
14.2. Operadores autohermíticos . . . . .	141
14.3. Problema de autovalores . . . . .	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales . . . . .	143

<b>15. Ecuaciones diferenciales con singularidades</b>	<b>145</b>
15.1. Puntos singulares . . . . .	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius . . . . .	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs . . . . .	149
15.4. Una segunda solución . . . . .	151
<b>16. Ecuaciones diferenciales del tipo...</b>	<b>155</b>
16.1. Soluciones en puntos regulares . . . . .	155
16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares . . . . .	159
16.3. Singularidades en infinito . . . . .	167
16.4. Ejemplos . . . . .	168
16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas . . . . .	171
<b>17. Funciones hipergeométricas</b>	<b>177</b>
17.1. La ecuación hipergeométrica general . . . . .	177
17.2. Ecuación indicial . . . . .	178
17.3. Ecuación diferencial de Gauss . . . . .	179
17.4. La serie hipergeométrica . . . . .	181
17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente . . . . .	183
<b>18. Polinomios de Legendre</b>	<b>187</b>
18.1. Función generatriz . . . . .	187
18.2. Relaciones de recurrencia . . . . .	189
18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$ . . . . .	190
18.4. Fórmula de Rodrigues . . . . .	191
18.5. Ecuación diferencial de Legendre . . . . .	192
18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$ . . . . .	193
18.7. Relación de ortogonalidad . . . . .	193
18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$ . . . . .	194
18.9. Serie de Legendre . . . . .	196
18.10. Funciones asociadas de Legendre . . . . .	199
18.11. Problema de Sturm-Liouville asociado . . . . .	201
18.12. Armónicos esféricos . . . . .	203
18.13. Segunda solución de la ecuación de Legendre . . . . .	205
<b>19. La ecuación diferencial de Bessel</b>	<b>211</b>
19.1. La ecuación diferencial de Bessel . . . . .	211
19.2. Funciones de Bessel de índice no entero . . . . .	212
19.3. Funciones de Bessel de índice entero . . . . .	213
19.4. Comportamiento asintótico . . . . .	214
19.5. Función generatriz . . . . .	215
19.6. Fórmulas de adición . . . . .	216
19.7. Representaciones integrales . . . . .	217
19.8. Relaciones de recurrencia . . . . .	219
19.9. Relaciones de ortogonalidad . . . . .	220
19.10. Problema de Sturm-Liouville asociado . . . . .	221

<b>20. Diversos tipos de funciones cilíndricas</b>	<b>223</b>
20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel . . . . .	223
20.2. Funciones de Hankel . . . . .	226
<b>21. Aplicaciones a la Electrostática</b>	<b>229</b>
21.1. Coordenadas rectangulares . . . . .	229
21.2. Coordenadas polares, dos dimensiones . . . . .	233
21.3. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas . . . . .	236
21.4. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas . . . . .	240
21.5. Otras aplicaciones . . . . .	243
21.6. Ecuación de difusión . . . . .	246
21.7. Difusión con creación de partículas . . . . .	248



# Capítulo 19

## La ecuación diferencial de Bessel

versión preliminar 3.1-26 diciembre 2002

### 19.1. La ecuación diferencial de Bessel

Consideremos en la ecuación hipergeométrica general el caso  $A = 0$ ,  $C = \infty$ ,  $\alpha + \alpha' = 0$ ,  $\beta + \beta' = 1$  y  $\gamma + \gamma' = 0$ , lo cual esta de acuerdo con  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$

$$\Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left[ \frac{-B\alpha\alpha'}{z^2(z-B)} + \frac{B\beta\beta'}{z(z-B)^2} + \frac{\gamma\gamma'}{z(z-B)} \right] \Psi = 0 ,$$

si consideramos además,  $\beta\beta' = \gamma\gamma' = B^2$  y tomamos el límite  $B \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\boxed{\Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) \Psi = 0 .} \quad (19.1)$$

la cual es conocida como *la ecuación diferencial de Bessel*. Esta ecuación tiene una singularidad fuchsiana en  $z = 0$  cuando  $\text{Re}(\alpha) > 0$ . Planteamos como solución

$$\Psi(z) = z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{\nu+\sigma} .$$

Sustituyendo en la ecuación (19.1)

$$z^2\Psi'' + z\Psi' - \alpha^2\Psi = -z^2\Psi ,$$

tenemos

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \{a_\nu(\nu+\sigma)(\nu+\sigma-1) + a_\nu(\nu+\sigma) - a_\nu\alpha^2\} z^{\nu+\sigma} = - \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu-2} z^{\nu+\sigma} ,$$

obteniendo

$$a_\nu [(\nu+\sigma)^2 - \alpha^2] = -a_{\nu-2} , \quad \nu = 2, 3, \dots ,$$



mientras que para  $\nu = 0$

$$a_0(\sigma^2 - \alpha^2) = 0 ,$$

lo que da una ecuación para el exponente  $\sigma^2 = \alpha^2$ , con dos soluciones,  $\sigma_1 = +\alpha$  y  $\sigma_2 = -\alpha$ . Elegimos  $\sigma = \sigma_1 = +\alpha$  y  $a_0 \neq 0$ . Para  $\nu = 1$

$$a_1(1 + 2\alpha) = 0 ,$$

lo que implica  $a_1 = 0$ . Además, usando la *fórmula recursiva* para los coeficientes

$$\boxed{a_\nu = -\frac{a_{\nu-2}}{\nu(\nu + 2\alpha)}} , \quad (19.2)$$

se puede demostrar que todos los coeficientes impares son nulos. Los coeficientes pares

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 1! (\alpha + 1)} , \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4 2! (\alpha + 1)(\alpha + 2)} , \quad \dots$$

El término general es

$$a_{2\mu} = (-1)^\mu \frac{a_0}{2^{2\mu} \mu! (\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + \mu)} .$$

Tomando

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} ,$$

se obtiene

$$\boxed{J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu! \Gamma(\mu + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu}} , \quad (19.3)$$

con  $\text{Re } \alpha \geq 0$ , conocida como función de Bessel de orden  $\alpha$ .

## 19.2. Funciones de Bessel de índice no entero

Consideremos  $\sigma = -\alpha$ . Hay solución, en este caso, linealmente independiente de  $J_\alpha$ , en forma de serie

$$J_{-\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu! \Gamma(\mu - \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu} , \quad (19.4)$$

**Ejemplo** Observemos que si  $\alpha = 1/2$ , la resta de las dos raíces  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1/2 + 1/2 = 1 \in \mathbb{Z}$ . Sin embargo, a pesar de estar en el caso incómodo las dos soluciones todavía funcionan (habíamos encontrado un hecho similar al discutir el oscilador armónico). En efecto, consideremos  $\alpha = 1/2$ . El denominador en (19.3) se puede reescribir

$$\mu! \Gamma(\mu + 3/2) = \mu! (\mu + 1/2) \Gamma(\mu + 1/2) .$$

Pero  $\Gamma(n + 1/2) = (2n - 1)!! \sqrt{\pi} / 2^n$ , luego

$$\begin{aligned} \mu! \Gamma(\mu + 3/2) &= \mu! (\mu + 1/2) (2\mu - 1)!! \sqrt{\pi} / 2^\mu \\ &= \mu! (2\mu + 1) (2\mu - 1)!! \sqrt{\pi} / 2^{\mu+1} \\ &= \mu! (2\mu + 1)!! \sqrt{\pi} / (2^{\mu+1}) \end{aligned}$$

Y como  $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$ , de modo que

$$\mu! \Gamma(\mu + 3/2) = (2\mu + 1)! \sqrt{\pi} / 2^{2\mu+1} ,$$

se tiene finalmente

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{z}{2}} \frac{1}{z\sqrt{\pi}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu 2^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \frac{z^{2\mu+1}}{2^{2\mu}} ,$$

es decir

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!} z^{2\mu+1} . \quad (19.5)$$

La sumatoria en (19.5) es el desarrollo en serie de  $\sin z$ , luego

$$\boxed{J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}} . \quad (19.6)$$

La otra solución resulta ser

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!} z^{2\mu} , \quad (19.7)$$

o bien

$$\boxed{J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}} . \quad (19.8)$$

Sin demostración:  $J_\alpha$  para índices  $\alpha = \pm(2n+1)/2$  se expresa por fórmulas semejantes.

### 19.3. Funciones de Bessel de índice entero

Para  $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ ,  $J_n$  dada por (19.3) es holomorfa en  $z = 0$ , y en realidad holomorfa en todo el plano. Consideremos la primera función de Bessel, es decir con  $n = 0$ , y derivémosla:

$$J_0(z) = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2} \frac{z^4}{2^4} - \cdots ,$$

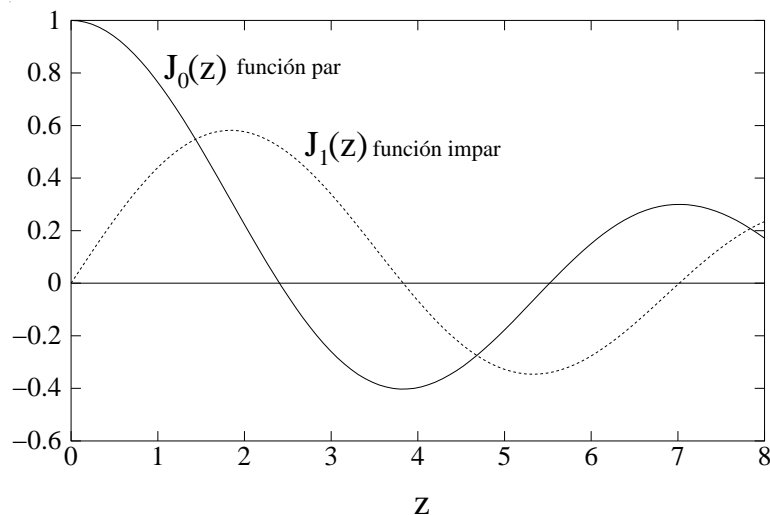
$$J_0'(z) = -\frac{2}{(1!)^2} \frac{z}{2^2} + \frac{4}{(2!)^2} \frac{z^3}{2^4} - \frac{6}{(3!)^2} \frac{z^5}{2^6} + \cdots .$$

Por otra parte, la función de Bessel de índice uno es

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{\nu}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = \frac{z}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1!)^2} \frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2} \frac{z^4}{2^4} - \cdots \right\} .$$

Comparando concluimos que

$$\boxed{J_1(z) = -J_0'(z)} . \quad (19.9)$$



Para índice entero positivo, (19.3) da

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! (\nu+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}. \quad (19.10)$$

Para índice entero pero negativo:

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! \Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}.$$

Consideraremos nulos los coeficientes con  $\nu < n$  en la función gamma (la función gamma tiene polos en  $\lambda = 0, -1, -2, \dots$ , luego  $1/\Gamma(\lambda) = 0$ ). Sea  $\mu = \nu - n$ . Luego

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu (-1)^n}{(\mu+n)! \mu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu},$$

lo que resumimos como

$$\boxed{J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)}. \quad (19.11)$$

## 19.4. Comportamiento asintótico

**Proposición 19.1** Para una variable real  $x \gg 1$ , toda solución real de la ecuación de Bessel es aproximadamente de la forma  $A \cos(x + \gamma)/\sqrt{x}$ .

**Demostración** Sea

$$\sqrt{x}\Psi(x) = u(x).$$

Despejando y diferenciando tenemos

$$\Psi(x) = x^{-1/2}u(x),$$

$$\Psi'(x) = x^{-1/2}u'(x) - \frac{1}{2}x^{-3/2}u(x),$$

$$\Psi''(x) = x^{-1/2}u''(x) - x^{-3/2}u'(x) + \frac{3}{4}x^{-5/2}u(x).$$

Sustituyendo en la ecuación de Bessel,

$$u''(x) - \frac{u'(x)}{x} + \frac{3}{4} \frac{u(x)}{x^2} + \frac{u'(x)}{x} - \frac{1}{2} \frac{u(x)}{x^2} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u(x) = 0 ,$$

quedando

$$u''(x) + \left(1 - \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\right) u(x) = 0 .$$

Para  $x$  muy grande,

$$u''(x) + u(x) = 0 , \quad \text{con solución } u(x) = A \cos(x + \gamma) ,$$

luego la solución completa es

$$\Psi(x) = A \frac{\cos(x + \gamma)}{\sqrt{x}} .$$

q.e.d.

Por otra parte, cerca de cero la función de Bessel de índice nulo se puede aproximar por

$$J_0(z) \approx 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} = \left(1 - \frac{z^2}{8}\right)^2 . \quad (19.12)$$

## 19.5. Función generatriz

Buscamos una función generatriz de las funciones de Bessel de índice entero,

$$\Psi(z, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) . \quad (19.13)$$

Usando (19.10) (que es válida también si  $n < 0$ , recordando que  $1/h! \equiv 0$  si  $h < 0$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ ),

$$\begin{aligned} \Psi(z, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l} \left(\frac{zs}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{z}{2s}\right)^l \frac{1}{(l+n)!} \left(\frac{zs}{2}\right)^{l+n} \end{aligned}$$

Sea  $h = l + n$ . La doble suma se puede reescribir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} ,$$

pero los factores de la forma  $1/h!$  reducen la suma sobre  $h$  a ir entre 0 e  $\infty$ . Así,

$$\Psi(z, s) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{z}{2s}\right)^l \left[ \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left(\frac{zs}{2}\right)^h \right] = e^{-\frac{z}{2s}} e^{\frac{zs}{2}} .$$

De este modo, la función generatriz queda

$$\boxed{\Psi(z, s) = \exp \left[ \frac{z}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) s^n .} \quad (19.14)$$

## 19.6. Fórmulas de adición

Consideremos la función generatriz (19.14) con argumento  $z = (z_1 + z_2)/2$

$$\begin{aligned} \exp \left[ \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] &= \exp \left[ \frac{z_1}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] \exp \left[ \frac{z_2}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] , \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z_1 + z_2) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s^\mu J_\mu(z_1) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s^\nu J_\nu(z_2) . \end{aligned}$$

Comparando coeficientes para igual potencia en  $s$  tenemos

$$\boxed{J_n(z_1 + z_2) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(z_1) J_{n-\mu}(z_2) .} \quad (19.15)$$

Particularicemos (19.15) al caso  $n = 0$  y  $z_1 = z = -z_2$

$$J_0(0) = 1 = J_0^2(z) + \sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu(z) J_{-\mu}(-z) + \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{-\mu}(-z) J_\mu(z) ,$$

obteniendo

$$\boxed{1 = J_0^2(z) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu^2(z) .} \quad (19.16)$$

En el caso que la variable  $z \in \mathbb{R}$  y considerando que  $|J_0(z)| \leq 1$ , podemos acotar los  $J_\nu$  por

$$\boxed{|J_\mu(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad \text{si } \mu = 1, 2, 3, \dots} \quad (19.17)$$

Reemplazamos  $s = e^{i\varphi}$  con  $\varphi \in \mathbb{R}$ , luego

$$\frac{1}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = i \sin \varphi .$$

En la función generatriz,

$$\exp \left[ \frac{z}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] = \exp(iz \sin \varphi) ,$$

luego

$$\boxed{\exp(iz \operatorname{sen} \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} J_n(z) .} \quad (19.18)$$

Desarrollando, y usando (19.11),

$$\begin{aligned} \exp(iz \operatorname{sen} \varphi) &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(z)(\cos n\varphi - i \operatorname{sen} n\varphi) , \\ &= J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(z) \cos 2m\varphi + 2i \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(z) \operatorname{sen}(2m+1)\varphi , \end{aligned}$$

Comparando partes real e imaginaria, con  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) &= J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) \cos 2m\varphi , \\ \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(x) \operatorname{sen}(2m+1)\varphi . \end{aligned} \quad (19.19)$$

Sea  $\varphi = 0$ . Entonces

$$\boxed{1 = J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) .} \quad (19.20)$$

Sea  $\varphi = \pi/2$ . Entonces

$$\begin{aligned} \cos x &= J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(x) , \\ \operatorname{sen} x &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(x) . \end{aligned} \quad (19.21)$$

## 19.7. Representaciones integrales

Cambiamos el índice de suma en (19.18) a  $m$ , multipliquemos la ecuación por  $e^{-im\varphi}$  e integremos en  $\varphi$ . Se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(z \operatorname{sen} \varphi - m\varphi)) d\varphi = 2\pi J_m(z) .$$

Si  $x \in \mathbb{R}$  entonces  $J_m(x)$  es real, lo que significa

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi - m\varphi) d\varphi ,$$

por paridad de la función subintegral, podemos reescribir la integral como

$$\boxed{J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi .} \quad (19.22)$$

En particular,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi + \int_{\pi/2}^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi \right] .$$

Haciendo el cambio de variable  $\theta = \varphi - \pi$ , tenemos

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi + \int_{-\pi/2}^0 \cos(x \operatorname{sen}(\theta + \pi)) d\theta \right] .$$

Usando que  $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen} \theta$  y que coseno es una función par,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi + \int_{-\pi/2}^0 \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta \right] .$$

Sumando ambas integrales

$$\boxed{J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi .} \quad (19.23)$$

Hagamos el cambio de variable en (19.23)  $\omega = \operatorname{sen} \varphi$ . Entonces  $d\varphi = \frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$  y la integral nos queda

$$J_0(x) = \int_{-1}^1 \frac{\cos(\omega x)}{\pi \sqrt{1-\omega^2}} d\omega .$$

Definamos una función  $p(\omega)$  de la forma

$$p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\omega| \geq 1, \\ \frac{1}{\pi \sqrt{1-\omega^2}} & \text{si } |\omega| < 1, \end{cases}$$

podemos reescribir  $J_0$  como

$$J_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) p(\omega) d\omega .$$

Con los cambios de variable  $x = t$  y  $\omega = 2\pi s$ , obtenemos

$$J_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st) F(s) ds ,$$

donde

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| \geq \frac{1}{2\pi}, \\ \frac{2}{\pi \sqrt{1-4\pi^2 s^2}} & \text{si } |s| < \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

De lo anterior se desprende, puesto que  $J_0(x)$  es una función par, que  $F(s)$  es precisamente la transformada de Fourier de  $J_0(x)$ :

$$\mathcal{F}\{J_0, s\} = F(s) .$$

Análogamente, tomando transformada de Fourier a la relación (19.9) obtenemos

$$\mathcal{F}\{J_1, s\} = \mathcal{F}\{-J'_0, s\} = -i2\pi s \mathcal{F}\{J_0, s\} = -2\pi i s F(s) .$$

## 19.8. Relaciones de recurrencia

Derivemos la función generatriz (19.14) respecto a  $s$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(z, s)}{\partial s} &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) , \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n s^{n+1} J_n(z) &= \frac{z}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{n-1} + J_{n+1}] s^{n+1} .\end{aligned}$$

Comparando coeficientes,

$$\boxed{\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) .} \quad (19.24)$$

Derivamos (19.14) respecto a  $z$  y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(z, s)}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) , \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J'_n(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{n-1} - J_{n+1}] s^n .\end{aligned}$$

Comparando coeficientes

$$\boxed{2J'_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) .} \quad (19.25)$$

Sumando (19.24) y (19.25) tenemos

$$\frac{n}{z} J_n(z) + J'_n(z) = J_{n-1}(z) , \quad (19.26)$$

es decir

$$\boxed{z^n J_{n-1}(z) = [z^n J_n(z)]' .} \quad (19.27)$$

Por otro lado, restando (19.24) y (19.25) obtenemos

$$J'_n(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = -J_{n+1}(z) , \quad (19.28)$$

es decir

$$\boxed{-z^{-n} J_{n+1}(z) = [z^{-n} J_n(z)]' .} \quad (19.29)$$

(19.27) y (19.29) indican que, al igual que los polinomios de Hermite, las funciones de Bessel de índice entero tienen operadores de subida y de bajada. En este caso, el operador de subida es

$$-z^n \frac{d}{dz} \frac{1}{z^n} ,$$

y el de bajada es

$$\frac{1}{z^n} \frac{d}{dz} z^n .$$



Finalmente, consideremos (19.20)

$$1 = J_0(z) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [J_{2\nu}(z) + J_{2\nu+2}(z)] .$$

Usando la relación de recurrencia (19.24) para  $n = 2\nu + 1$  tenemos

$$1 = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{z} J_{2\nu+1}(z) ,$$

$$\frac{z}{2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1) J_{2\nu+1}(z) ,$$

y por inducción completa:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu+n)(n+\nu+1)!}{\nu!} J_{2\nu+n}(z) . \quad (19.30)$$

Podemos pues expresar cualquier serie de potencias en serie de funciones de Bessel.

## 19.9. Relaciones de ortogonalidad

Estudiemos las relaciones de ortogonalidad en el intervalo  $0 \leq x \leq \infty$ . Consideremos

$$f(x) = J_{\sigma}(hx) , \quad g(x) = J_{\sigma}(kx) , \quad \text{con } h \neq k. \quad (19.31)$$

Tomemos las derivadas

$$\begin{aligned} f'(x) &= h J'_{\sigma}(hx) , & f''(x) &= h^2 J''_{\sigma}(hx) , \\ g'(x) &= k J'_{\sigma}(kx) , & g''(x) &= k^2 J''_{\sigma}(kx) . \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Bessel que satisfacen son:

$$\begin{aligned} J''_{\sigma}(hx) + \frac{1}{hx} J'_{\sigma}(hx) + \left(h^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) J_{\sigma}(hx) &= 0 , \\ J''_{\sigma}(kx) + \frac{1}{kx} J'_{\sigma}(kx) + \left(k^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) J_{\sigma}(kx) &= 0 . \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $h^2$  y la segunda por  $k^2$  y usando las definiciones dadas en (19.31) obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(h^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) f(x) &= 0 , \\ g''(x) + \frac{1}{x} g'(x) + \left(k^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) g(x) &= 0 . \end{aligned} \quad (19.32)$$

Multiplicando por  $xg(x)$  y por  $xf(x)$  respectivamente y restando,

$$xf(x)''g(x) - xg(x)''f(x) + (xf'(x)g'(x) - xf'(x)g'(x)) \\ + f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + x(h^2 - k^2)f(x)g(x) = 0 .$$

El factor entre paréntesis corresponde a un cero agregado para lograr el reordenamiento

$$[x(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))]' = (k^2 - h^2)xf(x)g(x) .$$

Integrando en el intervalo  $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b t f(t)g(t) dt = \frac{1}{k^2 - h^2} \left[ x(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \right]_a^b .$$

La expresión del lado derecho se anulará en tres casos

1. Si  $J_\sigma(hx)$  y  $J_\sigma(kx)$  se anulan en  $a$  y en  $b$ .
2. Sus derivadas se anulan en  $a$  y en  $b$ .
3. O bien  $J_\sigma(ha) = J_\sigma(ka) = 0 = J'_\sigma(hb) = J'_\sigma(kb)$ .

De cualquier modo,

$$\int_a^b x J_\sigma(hx) J_\sigma(kx) dx$$

es la típica integral que interviene en asuntos de ortogonalidad.

### Ortogonalidad

Por ejemplo, para  $m \neq n$ , se tiene ortogonalidad sobre el intervalo  $[0, a]$  con

$$\int_0^a J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left( \alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \rho d\rho = 0 , \quad (19.33)$$

donde los  $\alpha_{\nu m}$  son tales que  $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$ .

**Normalización** (sin demostración)

$$\int_0^a \left[ J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right]^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2 . \quad (19.34)$$

## 19.10. Problema de Sturm-Liouville asociado

(19.33) y (19.34) sugieren que  $J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right)$  pueden ser base de un espacio de funciones en  $[0, a]$ . Poniendo  $h = \alpha_{\nu m}/a$  y  $\sigma = \nu$  en (19.32) encontramos que satisfacen la ecuación

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) + \left( \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) f(\rho) = 0 ,$$

que se puede reescribir

$$\rho f''(\rho) + f'(\rho) + \left( \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho f(\rho) = 0 ,$$

o bien

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} f \right) + \left( \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho f(\rho) = 0 , \quad (19.35)$$

que es un problema de autovalores de un operador autoadjunto. En efecto, tomando el operador autoadjunto

$$\mathcal{L} = \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho} ,$$

y la función de peso

$$w(\rho) = \rho > 0 \quad \text{en } \rho \in [0, \infty] ,$$

(19.35) corresponde al problema de autovalores de  $\mathcal{L}$ , con autovalores

$$\lambda_{\nu m} = \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} .$$

Así, las funciones  $J_\nu(\lambda_{\nu m}\rho)$  asociadas a cada autovalor, para  $m = 0, 1, 2, \dots$  ( $\nu$  está fijo) serán un set completo en el cual se podrá expandir cualquier función en  $[0, \infty]$ .

¿A qué problemas físicos está asociado este problema de Sturm-Liouville? Consideremos nuevamente el operador laplaciano, como en (18.40), pero ahora en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \Psi(\rho, \phi, z) . \quad (19.36)$$

Se aprecia de inmediato que en un proceso de separación de variables, las derivadas respecto a  $z$  serán reemplazadas por una constante, y las derivadas respecto a  $\phi$  serán reemplazadas por otra constante, quedando para la parte radial precisamente la ecuación de Bessel en la forma (19.35). Por tanto, las funciones de Bessel aparecerán típicamente (no únicamente) como soluciones de problemas que involucren el operador de Laplace (encontrar un potencial electrostático —ecuación de Laplace—, modos normales de oscilación —ecuación de Helmholtz—, etc.) y que tengan simetría cilíndrica.