

Capítulo 1

Electrostática y Dieléctricos

1.1 Ley de Coulomb

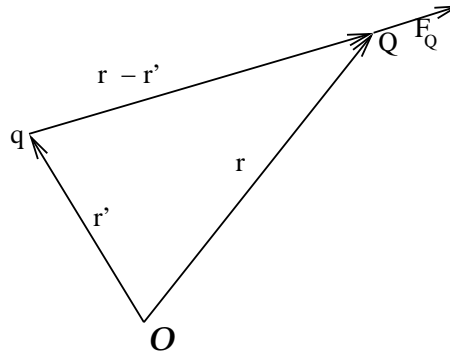
Dos cargas puntuales Q y q se ejercen mutuamente fuerzas (*de Coulomb*) de igual magnitud y signo contrario. La fuerza de Coulomb que actúa sobre una carga puntual Q debido a la presencia de una carga puntual q es,

$$\vec{F}_Q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (1.1.1)$$

En el sistema internacional de unidades, SI (o MKS),

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{10^7}{4\pi c^2} \\ &= 8,854187817 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{farad}}{\text{metro}} \right] \\ c &= 299792458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

y c es la velocidad de la luz.



Toda carga eléctrica es un múltiplo entero de la carga del protón (o menos la carga del electrón):

$$q_e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} [\text{C}]. \quad (1.1.3)$$

La fuerza de Coulomb es enormemente más fuerte que la fuerza gravitacional. El cociente entre la fuerza de repulsión eléctrica y atracción gravitacional entre dos protones colocados a cualquier distancia es

$$\frac{q_e^2 / 4\pi\epsilon_0}{Gm_p^2} \approx 10^{36} \quad (1.1.4)$$

viéndose de inmediato la importancia despreciable de los efectos gravitacionales en el estudio de las interacciones a nivel molecular.

El *campo eléctrico* que produce en un punto \vec{r} , una carga eléctrica q puntual ubicada en \vec{r}_q :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|^3} \quad (1.1.5)$$

es tal que la fuerza que actúa sobre una carga puntual q en \vec{r} es

$$\vec{F}_q = q \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.1.6)$$

Hay que destacar que esta definición no depende de la elección del origen \mathcal{O} ya que depende de posiciones relativas. Para convencerse de esto considere la

forma como cambiaría la expresión para \vec{E} si en lugar de \mathcal{O} se usa como origen un punto \mathcal{O}' con posición \vec{a} con respecto a \mathcal{O} .

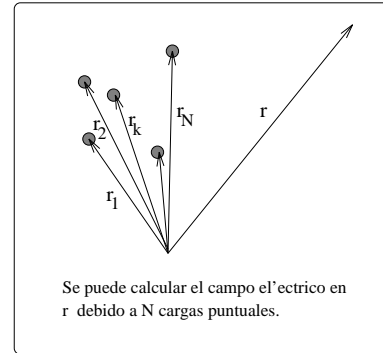
La expresión (1.1.5) para el campo asociado a una carga puntual q contiene los vectores \vec{r} y \vec{r}_q , los cuales dependen del origen \mathcal{O} escogido. Para expresar el mismo campo utilizando un origen \mathcal{O}' se debe usar los nuevos vectores \vec{r}' y \vec{r}_q' que se relacionan con los anteriores por $\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'$ y $\vec{r}_q = \vec{a} + \vec{r}_q'$ donde $\vec{a} = \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$. Al hacer estos reemplazos en (1.1.5) se ve que se preserva la forma del campo, pero ahora en términos de los vectores posición relativas al nuevo origen.

1.2 Campo Eléctrico de Fuentes Compuestas Principio de Superposición

Si se tiene N partículas cargadas, de carga q_k con ($k = 1, 2, \dots, N$) ubicadas en puntos definidos por los vectores posición \vec{r}_k entonces cada una de ellas produce, en un punto arbitrario \vec{r} , un campo y el *campo total es la suma de los campos separados de cada carga*,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{\|\vec{r} - \vec{r}_k\|^3} \quad (1.2.1)$$

Este es el *principio de superposición de los campos eléctricos*.



Lo anterior puede ser generalizado al caso en que se tiene distribuciones continuas de cargas. Se puede tener cargas distribuidas continuamente en volumen, y se habla de una densidad

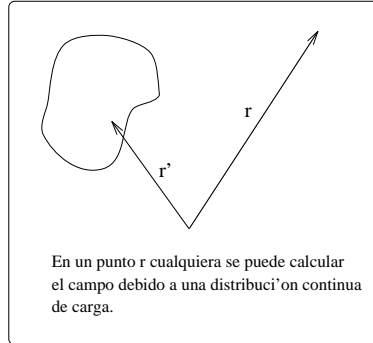
volumétrica $\rho(\vec{r})$ de carga, o bien de una densidad superficial $\sigma(\vec{r})$ de carga o, por último, una densidad $\lambda(\vec{r})$ en el caso de una distribución filiforme.

En cada uno de estos casos se puede hablar del elemento $dq(\vec{r})$ de carga asociado al punto \vec{r} de la distribución continua. El campo producido por una distribución continua se puede escribir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq(\vec{r}') \quad (1.2.2)$$

donde, según sea el caso,

$$\begin{aligned} dq &= \lambda(\vec{r}') dr', \quad (\text{línea}) \\ dq &= \sigma(\vec{r}') dS', \quad (\text{superficie}) \\ dq &= \rho(\vec{r}') dV' \quad (\text{volumen}) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$



Naturalmente que una fuente puede constar simultáneamente de un conjunto de cargas discretas puntuales, que obligan a escribir parte del campo como una suma discreta, más una serie de distribuciones continuas de distintas dimensiones ($d = 1, 2, 3$) lo que agrega una integral del tipo (1.2.2) por cada una de ellas.

¿Puede un cuerpo A actuar sobre un cuerpo B distante? La ley de Coulomb (1.1.1) parece indicar que la respuesta es sí y si así fuera un cambio en la posición de A afectaría instantáneamente al valor de la fuerza sobre B. Sin embargo la respuesta es un rotundo no. En el caso de la ley de Coulomb lo que sucede es que cada carga q modifica el espacio circundante creando un campo. Cada carga está rodeada de su campo eléctrico y una carga q' en \vec{r}' sufre el efecto de la carga q en \vec{r} tan solo porque sobre q' actúa una fuerza $\vec{F} = q' \vec{E}_q(\vec{r}')$ que considera el valor q' de la carga eléctrica en \vec{r}' y el valor vectorial $\vec{E}(\vec{r}')$ del campo que se debe a q, evaluado en \vec{r}' . Se subraya que ambos objetos están en el mismo punto. Además el campo eléctrico creado por q a cierta distancia reacciona con retardo a los cambios de posición y velocidad de q. Tal información se propaga a la velocidad de la luz. No veremos la descripción de estos efectos retardados.

EJERCICIO 1.2-1. Demostrar que el campo producido por un hilo recto e infinito con densidad uniforme λ_0 y a distancia ρ de él se

escribe, en coordenadas cilíndricas, como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\rho}}{\rho}. \quad (1.2.4)$$

EJERCICIO 1.2-2. Demostrar que el cam-

po que produce un disco de radio R , con densidad de carga uniforme σ_0 en un punto de su eje es,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \hat{k} \quad (1.2.5)$$

Tal vez lo más importante de este último resultado es que se puede calcular el campo producido por un plano infinito cargado uniformemente. Tomando el límite ($R \rightarrow \infty$) el resultado anterior da

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{z}{|z|} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \hat{k} \quad (1.2.6)$$

El campo de un plano infinito con densidad uniforme σ_0 positiva apunta siempre hacia afuera del plano. Si el plano es horizontal, el campo sobre el plano apunta hacia arriba y bajo el plano apunta hacia abajo.

EJERCICIO 1.2-3. Calcule el campo total en un punto cualquiera, debido a dos fuentes cargadas: un plano infinito con densidad de carga σ_0 y una recta infinita que forma un ángulo α con el plano y que tiene densidad de carga λ_0 .

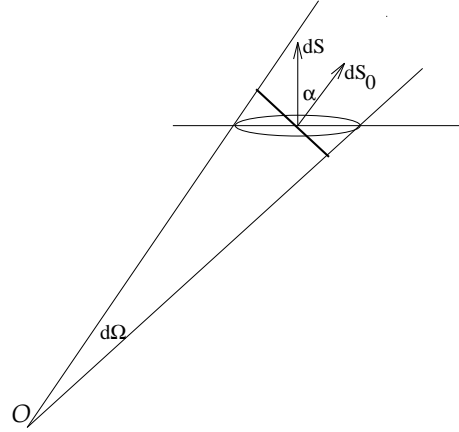
1.3 Ley de Gauss

A continuación se analizará el *flujo del campo eléctrico* a través de una superficie cerrada S que encierra un volumen \mathcal{V} ,

$$\Phi_S = \oint_{S=\partial\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.3.1)$$

lo que va a permitir reescribir la Ley de Coulomb en forma diferencial.

Consideremos una carga q en el origen O . El elemento de flujo $d\Phi$ del campo eléctrico de una carga puntual q a través de un elemento de superficie $d\vec{S}$ es $d\Phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$. Este elemento de superficie subtiende el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ que caracteriza al cono con vértice en la posición O de q y es generado por el continuo de rectas que van desde q hasta el perímetro de $d\vec{S}$. $d\Omega$ es común a todos los elementos de superficie que se obtiene al seccionar este cono con un plano. A una distancia fija r de q la menor sección posible —de magnitud dS_0 — se obtiene cuando el ángulo α entre $d\vec{S}$ y el vector unitario \hat{r} es nulo. Una sección oblicua en ese punto tiene una magnitud $dS = \frac{dS_0}{\cos \alpha}$. Para un α fijo, la sección crece cuando aumenta la distancia r entre q y la sección. La relación precisa es



$$d\vec{S} = \hat{n} \frac{r^2 d\Omega}{\cos \alpha} \quad (1.3.2)$$

donde \hat{n} es la normal a la sección que se trate. Ahora es fácil calcular el ele-

mento de flujo,

$$\begin{aligned} d\Phi &= \|\vec{E}\| \hat{r} \cdot \hat{n} \frac{r^2 d\Omega}{\cos \alpha} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

que es independiente de r .

De lo anterior resulta que el flujo de campo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada es la integral de la expresión anterior,

$$\begin{aligned} \Phi_S &= \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ \oint_{S=\partial\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

independientemente de la superficie cerrada que se utilice. A esta última relación se la conoce como *Ley de Gauss*.

Este resultado se ha obtenido considerando una carga puntual q rodeada de una superficie cualquiera. Si el origen se escogiera en un punto que no coincide con la posición de q el resultado sería el mismo. Tan solo que la argumentación geométrica sería un poco más complicada.

Si en lugar de una carga puntual se considera N cargas puntuales rodeadas por una superficie, el resultado análogo a (1.3.4) se obtiene recordando que el campo en cualquier punto se puede expresar como la suma de los campos de cada una de las cargas. Cada uno de estos campos arroja un resultado (1.3.4) y el campo total entonces tiene un flujo que es $\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$.

Completamente en general, entonces, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie S es proporcional a la carga total Q_S que es encerrada por S lo que nuevamente nos da la *Ley de Gauss*

$$\oint_{S=\partial\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S \quad (1.3.5)$$

Las cargas que están fuera del volumen que encierra S no contribuyen al flujo.

Ley de Gauss. *El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total Q_S encerrada por S , dividida por la constante ϵ_0 .*

La ley de Gauss vale para todo tipo de fuentes y para todo tipo de superficies cerradas. En particular, si se tiene una distribución volumétrica caracterizada por una densidad de carga $\rho(\vec{r})$, entonces la ley de Gauss garantiza que,

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) d\mathcal{V} \quad (1.3.6)$$

pero por definición el flujo es,

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

lo que establece que la igualdad

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} d\mathcal{V} \quad (1.3.8)$$

es válida para todo volumen \mathcal{V} , lo que implica que,

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r})} \quad (1.3.9)$$

igualdad que puede ser interpretada como *la forma diferencial de la Ley de Coulomb*. Esta expresión es una de las ecuaciones fundamentales de la Electrodinámica.

La densidad de carga ρ que aparece en (1.3.9) debe entenderse en forma muy general. Con ella se puede expresar cualquier distribución de carga. Dos ejemplos: (1) si se estudia un campo eléctrico (1.2.1) proveniente de un conjunto de cargas puntuales entonces $\int_V \rho dV = \sum_k q_k$, suma sobre

todas las cargas que están dentro del volumen V ; (2) si el campo proviene de una densidad de carga superficial $\sigma(\vec{r})$ definida en una superficie S entonces $\int \rho dV = \int_{S(V)} \sigma dS$ donde el dominio de integración $S(V)$ es la parte de la superficie S que queda dentro de del volumen V .

EJERCICIO 1.3-4. *Utilizando la Ley de Gauss calcule en cualquier punto del espacio el campo eléctrico debido a un cilindro recto infinito de radio a con densidad de carga uniforme ρ_0 .*

1.4 Potencial Eléctrico

Mientras se esté estudiando electrostática, los campos eléctricos son estrictamente el efecto de la presencia de cargas, tal como se ha estudiado hasta aquí. Esos campos, como puede verse (por ejemplo) de (1.2.2), son irrotacionales, es decir,

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1.4.1)$$

condición que seguirá válida durante todo el estudio de fenómenos electrostáticos y corrientes continuas. Si un campo es irrotacional entonces la integral de camino

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.4.2)$$

no depende del camino que se escoja para integrar entre dos puntos arbitrarios \vec{a}, \vec{b} . En tal caso tiene sentido definir una función escalar $V(\vec{r})$, llamada

potencial eléctrico, a través de,

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (1.4.3)$$

donde \vec{r}_0 es un punto arbitrario para el cual se escoge que el potencial sea nulo. En otras palabras, la función potencial está definida salvo por una constante aditiva, arbitrariedad que es usada para fijar el valor del potencial en un punto escogido. El potencial es una función continua salvo en puntos donde \vec{E} sea divergente.

La definición anterior es equivalente a decir que $V(\vec{r})$ es una función escalar tal que,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \quad (1.4.4)$$

Es de particular interés estudiar el potencial eléctrico en distintas situaciones físicas y ver la forma de las superficies en las que el potencial tiene un

valor constante: las superficies *equipotenciales*. Debido a la propia definición de gradiente se puede afirmar que el *campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales*.

De (1.3.9) y (1.4.4) resulta la *ecuación de Poisson* para el potencial,

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\varepsilon_0 \quad (1.4.5)$$

Esta ecuación es una de las formas útiles para determinar la función potencial en muchas situaciones físicas de interés. Lo importante es saber resolver la ecuación de Poisson con las condiciones de borde correctas. En las zonas donde la densidad de carga es nula la ecuación anterior tiene lado derecho nulo y se denomina *ecuación de Laplace*. Al final de este capítulo se muestra un sencillo algoritmo para resolver numéricamente estas ecuaciones.

Se puede comprobar que el potencial para una carga puntual q ubicada en un punto arbitrario \vec{r}_q es,

$$V_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}_q\|} \right) \quad (1.4.6)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}'\|} \right) dq(\vec{r}') \quad (1.4.8)$$

Basta calcular el gradiente de esta expresión.

La generalización de lo anterior al caso del potencial de un conjunto de cargas es trivial, ya que la propiedad de superposición del campo eléctrico y la relación lineal que conecta al potencial con el campo eléctrico permite asegurar que el potencial de un conjunto de cargas es la suma de los potenciales debidos a cada una de ellas,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k q_k \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_k\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}_k\|} \right) \quad (1.4.7)$$

Como puede verse, este potencial está definido para que se anule en un punto \vec{r}_0 arbitrario.

El potencial para el caso de una distribución continua es semejante. Basta cambiar las sumas por integrales sobre los elementos dq de carga del sistema,

EJERCICIO 1.4-5. Demostrar que el potencial eléctrico debido a un alambre rectilíneo infinito con densidad de carga uniforme λ_0 es,

$$V = -\frac{\lambda_0 \log(\rho/\rho_0)}{2\pi\varepsilon_0} \quad (1.4.9)$$

donde ρ es la distancia perpendicular entre la recta cargada y el punto en que se evalúa el potencial y ρ_0 representa la distancia perpendicular desde el punto de referencia (\vec{r}_0) y el

alambre cargado.

EJERCICIO 1.4-6. Demostrar que el potencial eléctrico para $\rho > a$ debido a un alambre con distribución de carga uniforme σ_0 en una superficie cilíndrica infinita con eje rectilíneo y de radio a no depende de a y es

$$V(\rho) = -\frac{\sigma_0 \log(\rho/\rho_0)}{\varepsilon_0} \quad (1.4.10)$$

La ecuación (1.4.9) y (1.4.10) muestran que

las equipotenciales son superficies cilíndricas centradas en el alambre. Este problema puede resolverse tanto utilizando la definición del potencial dada en (1.4.3) haciendo uso del resultado (1.2.4), como también integrando directamente (1.4.8) con la densidad uniforme conocida.

Como se verá en (1.5.9) el campo eléctrico producido por una distribución de cargas de tamaño finito (es decir, cabe en una esfera de radio finito), medido a distancia suficientemente lejos de la fuente, se comporta como el campo (1.1.5) de una carga puntual

con carga q igual a la carga total de la distribución. Una buena aproximación para el potencial a esa misma gran distancia es muy bien aproximado por el potencial (1.4.6) de una carga puntual. En otras palabras, todo campo y potencial de una fuente de tamaño finito y carga neta no nula tiene un comportamiento Coulombiano a distancias suficientemente grandes de la distribución de cargas.

La energía potencial de una carga puntual en un punto \vec{r} está dada por

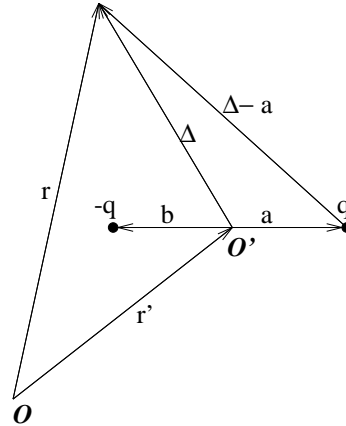
$$U(\vec{r}) = qV(\vec{r}) \quad (1.4.11)$$

1.5 Dipolo Eléctrico y Expansión Multipolar

Es normal que el cálculo del campo eléctrico que produce una fuente cargada arbitraria no pueda ser calculado en forma analítica. En tales casos es necesario hacer ciertas aproximaciones. La que se verá en este capítulo corresponde a la aproximación del potencial eléctrico de una fuente finita, estimado para distancias grandes de la fuente.

Dipolo eléctrico. Se calculará el potencial y el campo producidos por un par de cargas puntuales $+q$ y $-q$. Sea O' un punto arbitrario sobre la recta que une las dos cargas puntuales. Su posición es \vec{r}' . Las posiciones de las cargas q y $-q$, con respecto a O' están dadas por \vec{a} y \vec{b} respectivamente. La distancia entre las cargas entonces es $\delta = a + b$. Se usará la convención $V(\infty) = 0$. Se desea deter-

minar el potencial en un punto arbitrario P con posición \vec{r} . El vector desde O' hasta P es $\vec{\Delta} = \vec{r} - \vec{r}'$. El vector desde la carga q hasta el punto P es: $\vec{r} - \vec{r}' - \vec{a} = \vec{\Delta} - \vec{a}$. El potencial en P debido solamente a la carga q es:



$$\begin{aligned}
V_q(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\|\vec{\Delta} - \vec{a}\|} \\
&\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0\Delta\sqrt{1 - 2\frac{\vec{a}\cdot\vec{\Delta}}{\Delta^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{a}{\Delta}\right)^2\right)}} \\
&\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0\Delta} \left(1 + \frac{\vec{a}\cdot\vec{\Delta}}{\Delta^2}\right) \quad (1.5.1)
\end{aligned}$$

Sumando los potenciales debidos a las cargas q y $-q$, ambos evaluados en \vec{r} , resulta

$$V_{q,-q}(\vec{r}) = \frac{q\vec{\delta}\cdot(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (1.5.2)$$

donde $\vec{\delta} = \vec{a} - \vec{b}$ es el vector que va de $-q$ hasta q . Este resultado no depende explícitamente del punto \mathcal{O}' particular escogido.

Nótese que este potencial decrece como el inverso al cuadrado de la distancia Δ entre el sistema de las dos cargas y el punto P donde se mide.

Es muy conveniente idealizar al par $(q, -q)$ a distancia δ como un *dipolo* puntual \vec{p} , que se obtiene de tomar el límite $q \rightarrow \infty$ y simultáneamente $\delta \rightarrow 0$, de tal modo que

$$\vec{p} = \lim q\vec{\delta} \quad (1.5.3)$$

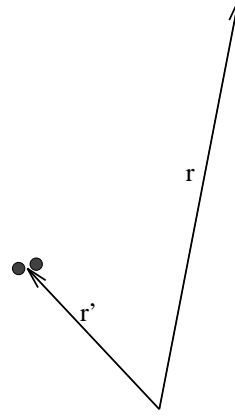
permanezca finito.

La razón de tomar este límite es, por un lado, que en él todas las aproximaciones hechas en los pasos anteriores pasan a ser exactas y por otro lado, físicamente los dipolos que interesan son muy pequeños y su extensión δ es absolutamente despreciable.

La expresión (1.5.2) ahora se puede escribir,

$$V_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (1.5.4)$$

(1.5.5) representa al potencial en \vec{r} de un dipolo \vec{p} ubicado en \vec{r}' .



Si se tiene un conjunto de cargas q_1, q_2, \dots, q_N tal que su suma es nula, $Q = \sum_k q_k = 0$, se define el momento dipolar eléctrico asociado a este sistema como:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^N q_k \vec{r}_k \quad (1.5.6)$$

Es fácil comprobar que esta definición no depende de la elección del origen cuando $Q = 0$.

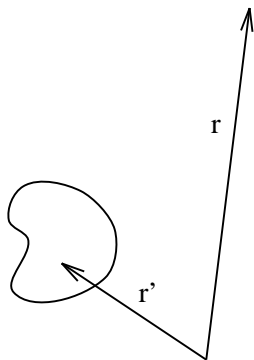
1.5.1 Expansión multipolar

Sea una fuente finita definida por una distribución volumétrica $\rho(\vec{r})$ de carga. El potencial de esta fuente es (ver(1.2.3) y (1.4.8)),

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (1.5.7)$$

Se escoge el origen en un punto cercano a la fuente, para que el vector \vec{r}' tenga una magnitud acotada, y se elige un punto \vec{r} lejos de la fuente para que se pueda considerar $r \gg r'$. A continuación se hace una expansión como la que llevé a (1.5.1), obteniéndose,

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \quad (1.5.8)$$



Es claro que (1.5.8) es una serie cuyos términos pueden deducirse sin ma-

yor dificultad.

Con (1.5.8) el potencial puede escribirse como:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \quad (1.5.9) \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(\vec{r}') dV' = \text{carga total} \\ \vec{p} &= \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (1.5.10) \\ &= \text{momento dipolar total} \end{aligned}$$

El resultado (1.5.9) demuestra que el potencial de una fuente finita arbitraria, visto desde suficiente distancia, está dominado por una forma coulombiana (1.4.6) en la convención de que $V(\infty) = 0$. Pero si $Q = 0$, \vec{p} tiene un valor independiente de la elección del origen, tal como en (1.5.6).

1.6 Generalidades sobre Dieléctricos

Hasta ahora solo se ha estudiado el campo eléctrico en el vacío. La nube electrónica negativa en torno a los iones o centros cristalinos de todo material, aislante o conductor, no es necesariamente simétrica, lo que tiene por efecto que las moléculas se comporten como pequeños dipolos.

En un material dieléctrico aislante los electrones se mueven en torno a los centros cristalinos y están firmemente ligados a ellos. Un material dieléctrico puede pensarse compuesto

de pequeños dipolos.

Si se aplica un campo eléctrico a lo largo de un trozo de material dieléctrico, los dipolos moleculares tienden a orientarse en la dirección del campo eléctrico y se detecta densidades de carga superficiales positivas en un lado de la muestra y negativas en otro lado.

La existencia de una densidad de carga superficial en el caso de un material dieléctrico se debe a la orientación de los dipolos moleculares en direccio-

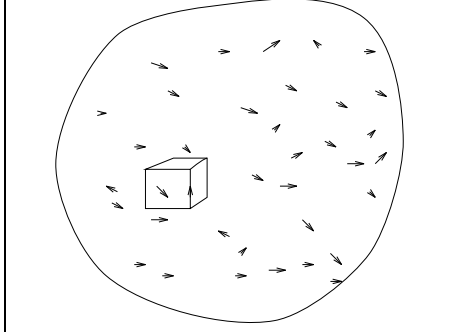
nes cercanas a la dirección del campo eléctrico. Esta orientación privilegiada provoca que las puntas de los dipolos que hay en la superficie no estén neutralizadas por las colas de otros dipolos.

Al aparecer una densidad de carga superficial por efecto de la polarización

del medio, aparece también un campo eléctrico el cual, en el interior del material, apunta en dirección opuesta al campo externo que causó la polarización. *El efecto neto es que los campos eléctricos dentro de un material polarizable sean más débiles que en el exterior.*

1.7 Medios Polarizables

Materia compuesta de dipolos moleculares. A cada elemento de volumen diferencial dV se le asocia una polarización \vec{P} tal que el momento dipolar de ese elemento es $d\vec{p} = \vec{P} dV$.



Un medio polarizado puede ser caracterizado por la *densidad de dipolos* \vec{P} . El momento dipolar $d\vec{p}$ asociado a un elemento de volumen dV definido en torno a un punto \vec{r} se escribe como

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}) dV \quad (1.7.1)$$

La acción de un campo eléctrico externo tiende a orientar los dipolos.

A \vec{P} se le llama *vector densidad de*

polarización o sencillamente *la polarización* del material. El campo \vec{E} tiende a apuntar de zonas negativas a positivas.

El potencial en \vec{r} de un pequeño dipolo $d\vec{p}$ ubicado en \vec{r}' puede expresarse en la forma que se vio en (1.5.5),

$$dV(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (1.7.2)$$

En la expresión anterior se puede reemplazar el elemento dipolar $d\vec{p}$ por el producto del vector polarización \vec{P} por el correspondiente elemento de volumen dV' y entonces el potencial se obtiene integrando sobre todo el volumen V'

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_D} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (1.7.3)$$

El vector \vec{r}' recorre todo el volumen del medio polarizable.

La última integral se puede hacer por partes utilizando la identidad

$$\vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \quad (1.7.4)$$

El primer término a la derecha conduce a una integral sobre la superficie del dieléctrico y por lo tanto,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}_D} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}_D} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \quad (1.7.5)$$

Al comparar esta forma del potencial con aquella que se obtiene de (1.4.8) con $dq = \sigma_P dS' + \rho_P d\mathcal{V}'$ y con $\vec{r}_0 = \infty$ se obtiene una expresión para las densidades de superficie y volumétricas debido a la polarizabilidad del medio,

$$\begin{aligned} \sigma_P(\vec{r}) &= \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = P_n, \\ \rho_P(\vec{r}) &= -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.7.6)$$

Como de costumbre, el vector normal \hat{n} apunta hacia afuera del dieléctrico.

Las distribuciones de carga de polarización deben su existencia tan solo a la presencia de dipolos en la materia y los dipolos son objetos de carga total nula. Esto implica que un trozo de materia neutra polarizada tiene que tener carga total nula, lo que se comprueba abajo, en (1.8.1). Estas distribuciones aparecen porque localmente los dipolos pueden estar de tal forma ordenados que producen el efecto de cargas no nulas en ese lugar.

Si la segunda ecuación se compara con $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ pareciera que es posible interpretar a $-\vec{P}/\epsilon_0$ como el campo eléctrico debido a la fuente ρ_P . Esta comparación no es correcta, sin embargo, porque las condiciones

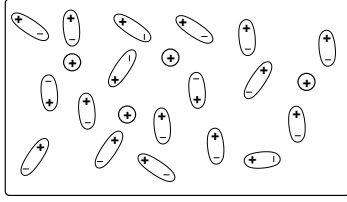
de borde que debe obedecer \vec{P} no son necesariamente las que corresponden a un campo eléctrico.

Las relaciones (1.7.6) establecen una conexión entre el concepto de *vector de polarización* \vec{P} y las *densidades de carga de polarización*. Pero no hay forma de calcular estas cantidades sin un conocimiento del comportamiento del material particular que se trate. Lo usual es que de un modo u otro se dé como dato el vector \vec{P} , o bien, lo que resultará equivalente, la *constante dieléctrica* del material.

En §1.9 se incorporarán nuevas hipótesis, válidas para muchos materiales, y que permiten calcular las densidades de polarización.

Las densidades de carga de polarización que se han escrito en (1.7.6) normalmente aparecen como consecuencia de la aplicación de un campo eléctrico externo sobre el material y se deben, como ya se explicó, a la orientación de los dipolos moleculares. Estas densidades, entonces, describen cargas que se comportan en forma muy diferente a las cargas depositadas sobre el

material.



Dipolos y cargas libres

Para hacer énfasis en la diferencia entre las cargas que no son de polarización de las de polarización que describen σ_P y ρ_P , se llama *cargas libres* a las primeras y así distinguirlas de las cargas de polarización.

Hay materiales, llamados *ferroeléctricos*, que pueden presentar

una polarización permanente detectable macroscópicamente, es decir, existe un campo \vec{P} en el material, privilegiando una dirección macroscópicamente sin que se esté aplicando un campo eléctrico a la muestra.

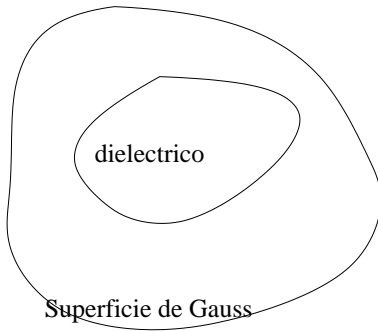
En la superficie que separa a dos medios polarizados aparece una densidad de carga de polarización superficial que resulta ser la superposición de dos contribuciones:

$$\sigma_P^{\text{total}}(\vec{r}) = (\vec{P}_1(\vec{r}) - \vec{P}_2(\vec{r})) \cdot \hat{n} \quad (1.7.7)$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie de contacto y que apunta desde el medio 1 hacia el medio 2.

1.8 Desplazamiento Eléctrico

Cuando un dieléctrico es sometido a un campo eléctrico externo debiera resultar carga total de polarización nula, ya que no es más que el efecto de un reordenamiento de dipolos.



Esto es fácil de comprobar haciendo una integral de ambas densidades usando para ello un volumen \mathcal{V} que

contenga al volumen del dieléctrico, \mathcal{V}_D ,

$$Q_P = \oint_{\partial \mathcal{V}_D} \sigma_P(\vec{r}) dS + \int_{\mathcal{V}_D} \rho_P(\vec{r}) dV \quad (1.8.1)$$

Al reemplazar las expresiones (1.7.6) es inmediato ver que da $Q_P = 0$.

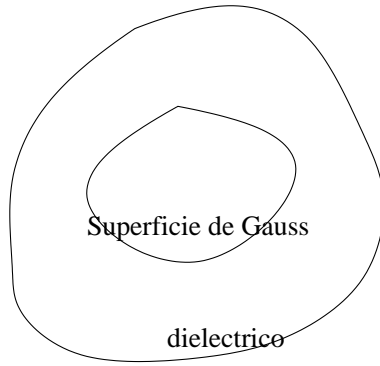
Si el dieléctrico además tiene cargas libres distribuidas en su volumen, entonces éstas son las únicas que contribuyen a la integral de flujo del campo eléctrico a través de una superficie que encierra al dieléctrico,

$$\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_\ell}{\epsilon_0} \quad (1.8.2)$$

es decir, un dieléctrico no altera el valor

del flujo a través de superficies cerradas externas a él.

Si se aplica la ley de Gauss a una superficie totalmente *contenida* en un material dieléctrico, el resultado necesariamente es la suma de la carga libre total encerrada más la carga de polarización que arroje ρ_P ,



$$\begin{aligned}\oint \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} (Q_\ell - \int_{V_S} \nabla \cdot \vec{P} dV) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (Q_\ell - \oint \vec{P} \cdot d\vec{S})\end{aligned}\quad (1.8.3)$$

o bien, definiendo

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \quad (1.8.4)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= Q_\ell \\ &= \text{carga libre encerrada}\end{aligned}\quad (1.8.5)$$

El campo vectorial \vec{D} definido en (1.8.4) es tan importante que Maxwell

le dió nombre propio, *vector desplazamiento eléctrico*. Esta ley, (1.8.5), es equivalente a,

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_\ell(\vec{r}) \quad (1.8.6)$$

donde ρ_ℓ es la densidad volumétrica de carga libre en el material.

En las expresiones anteriores debe entenderse que \vec{E} es el campo eléctrico total. Él se debe tanto a fuentes externas como a las cargas libres y a las cargas de polarización. Es un verdadero campo electrostático. En cambio el vector desplazamiento, o mejor, \vec{D}/ϵ_0 , que satisface una ecuación de la forma (1.3.9) *no es totalmente* asimilable a un campo electrostático cuyas fuentes serían las cargas libres debido a que en general su rotor puede ser no nulo. En efecto, calculando el rotor de la expresión (1.8.4) se obtiene (electrostática) que

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P} \quad (1.8.7)$$

En general estos dos rotores no son nulos lo que debe contrastarse con (1.4.1).

Para algunos efectos, sin embargo, es posible hablar de $-\vec{P}/\epsilon_0$ como el “campo eléctrico” debido a las cargas de polarización y \vec{D}/ϵ_0 como el “campo eléctrico” debido a las cargas libres.

El punto delicado está en el tipo de condiciones de borde que satisfacen estas funciones vectoriales, las que serán discutidas en §1.10.

1.9 Dieléctricos Lineales, Isótropos y comunmente Homogéneos

El vector \vec{P} de polarización de un material rara vez es distinto de cero cuando no hay un campo eléctrico externo que esté polarizando al medio. Los materiales (los ferroeléctricos mencionados al final de §1.7) que pueden tener polarización permanente son un capítulo aparte en física y no hablaremos de ellos.

Cuando, por efecto de un campo eléctrico aplicado, un material está polarizado, la orientación de \vec{P} está relacionada a la orientación de \vec{E} en ese mismo punto, pero ello no significa que tengan que ser paralelos. Más aun, los sólidos normalmente tienen una estructura cristalina y por lo tanto tienen direcciones privilegiadas, por lo que no es de extrañar que la polarización de un cristal tienda a favorecer ciertas direcciones. Esto explica porqué es razonable pensar que \vec{P} no sea paralelo a \vec{E} . Pero lo usual es que, mientras \vec{E} no sea muy intenso, \vec{P} responda linealmente a la intensidad del campo eléctrico, esto es, en cada punto el vector de polarización resulta proporcional a \vec{E} .

Sin embargo, es bastante usual que un sólido no sea un *monocristal*, es decir, no tenga sus ejes especiales orientados de igual manera en toda la extensión de una muestra. Lo contrario es lo común, un sólido tiene una estructura granular, en que cada grano microscópico tenga una orien-

tación al azar. Esto hace que macroscópicamente un sólido suela no presentar direcciones privilegiadas. Tal propiedad, en electrostática se denomina *isotropía*.

Un dieléctrico se dice *lineal* si en cada punto se satisface que $\|\vec{P}\| = \alpha\|\vec{E}\|$; se dice *isótropo* si $\vec{P} = \alpha\vec{E}$; y se dice *homogéneo* si α tiene el mismo valor en todos los puntos del material. (Como es común a muchas afirmaciones en física de objetos extendidos, cuando se habla del *mismo valor en todos los puntos* realmente se quiere decir que las variaciones que pueden haber de un punto a otro, a escala de pocos cientos de átomos, se promedian ya que no tienen efecto importante en el comportamiento de muestras que tienen miles de billones de átomos).

A partir de ahora se trabajará con materiales que tienen todas estas propiedades, excepto por la homogeneidad, y por lo tanto se supondrá que se cumple,

$$\vec{P}(\vec{r}) = (\varepsilon(\vec{r}) - \varepsilon_0)\vec{E}(\vec{r}) \quad (1.9.1)$$

con ε depende del material de que se trate y, si no el material no es homogéneo, además depende de la posición. Puesto que ésta es una relación local el campo eléctrico a considerar es aquel que hay en el mismo punto \vec{r} donde se evalúa \vec{P} .

De (1.8.4) resulta entonces que,

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \quad (1.9.2)$$

Por lo general se supondrá que ε es una constante salvo que explícitamente se diga lo contrario.

La cantidad $(\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$ es un número independiente del sistema de unidades y que indica cuán polarizable es un medio. Para el vacío, por definición vale cero. Para el agua en estado líquido y temperatura ambiente el valor es extraordinariamente grande: ~ 80 , pero en estado sólido (hielo) disminuye a poco más de 2, lo que señala que la polarizabilidad tiene también que ver con la movilidad de las moléculas. Para el aire es muy chico: 0,0003, lo que a menudo justifica tratar al aire como si fuese vacío.

Al reemplazar (1.9.2) en (1.8.6) se observa que el campo eléctrico satisface,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho_\ell(\vec{r})/\varepsilon \quad (1.9.3)$$

que es idéntica a la conocida relación (1.3.9). Pero aquí pareciera que solo las cargas libres son fuente del campo eléctrico y además que la constante dieléctrica que debe usarse es ε .

Lo importante de (1.9.3) es que da un método de cálculo que puede ser muy cómodo. Para calcular campos eléctrico, o potenciales, se puede escoger usar simultáneamente que las únicas cargas son las cargas libres usando como constante dieléctrica ε dentro del material.

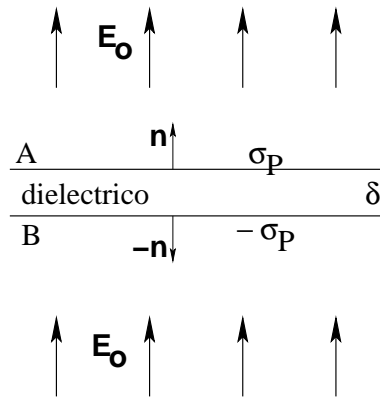
Alternativamente, si se toma en cuenta a las cargas de polarización debe usarse siempre ε_0 .

De (1.9.3) se desprende que el campo de una partícula puntual inmersa en un medio dieléctrico de constante dieléctrica ε es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|^3} \quad (1.9.4)$$

que tiene la forma de (1.1.5) pero ahora se debe usar ε .

EJEMPLO LARGO. Se tiene una placa dieléctrica de espesor δ y extensión infinita, de constante dieléctrica ε conocida. Perpendicular a la placa hay un campo eléctrico externo uniforme \vec{E}_0 . Supongamos que, por efecto de este campo externo, el material dieléctrico adquiere una polarización uniforme $\vec{P} = P_0\hat{k}$, donde \hat{k} es la dirección del campo eléctrico: $\vec{E}_0 = E_0\hat{k}$. Fuera de la placa $\vec{D}(\vec{r})$ vale $\varepsilon_0\vec{E}_0$ debido a (1.9.2). Pero aun más, se puede adivinar que el vector desplazamiento vale lo mismo dentro de la placa dieléctrica, ya que su ecuación (1.8.6) señala que no depende de las cargas de polarización; depende de las cargas libres (que no hay en este ejemplo) y de las condiciones de borde, que podemos tomar como su valor fuera del dieléctrico. A continuación verificaremos que esto es cierto. A partir de (1.7.6) es directo obtener que la densidad de carga en la superficie superior (A) del dieléctrico la densidad de polarización es $\sigma_P^{(A)} = P_0$, en la superficie inferior, B, la densidad de carga de polarización es $\sigma_P^{(B)} = -P_0 = -\sigma_P^{(A)}$. Además ρ_P es nulo ya que \vec{P} es uniforme, lo que implica que su divergencia es nula.



El campo eléctrico se puede calcular como superposición del campo debido a la densidad de carga $\sigma_P^{(A)}$ en A, al campo producido por la densidad de carga $\sigma_P^{(B)} = -\sigma_P^{(A)}$ y al campo externo $E_0 \hat{k}$. A partir de ahora usaremos σ_P para designar a $\sigma_P^{(A)}$. En el espacio encima de la placa dieléctrica los tres campos son: $\frac{\sigma_P}{2\epsilon_0} \hat{k}$, $-\frac{\sigma_P}{2\epsilon_0} \hat{k}$ y $\epsilon_0 \hat{k}$, lo que suma simplemente $E_0 \hat{k}$. El mismo tipo de cancelación ocurre al calcular el campo bajo la

placa. En el interior de la placa en cambio las contribuciones son $-\frac{\sigma_P}{2\epsilon_0} \hat{k}$, $\frac{\sigma_P}{2\epsilon_0} \hat{k}$ y $E_0 \hat{k}$. De esto resulta que el campo neto en el interior es $\vec{E} = (E_0 - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0}) \hat{k}$. Este campo es obviamente más débil que el campo en el exterior. Conocido \vec{E} el vector de polarización es $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) (E_0 - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0}) \hat{k}$. Para que todo sea consistente se debe cumplir que $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{k} = (\epsilon - \epsilon_0) (E_0 - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0})$ que es una ecuación para σ_P que arroja $\sigma_P = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} (\epsilon - \epsilon_0) E_0$. Calcule ahora, el valor de \vec{D} usando la definición (1.8.4).

♠ Considere una esfera dieléctrica de radio b con hueco esférico vacío de radio a , ($a < b$) y constante dieléctrica ϵ . Si la superficie interior de radio a tiene carga libre uniformemente distribuida con densidad σ_ℓ , determine \vec{D} , \vec{E} y \vec{P} en todas partes. Determine también σ_P en las superficies de radio a y b y ρ_P en el volumen dieléctrico.

1.10 Condiciones de Borde

Para determinar potenciales y campos eléctricos las condiciones de borde juegan un papel crucial.

Lo más general es considerar la superficie de contacto entre dos medios dieléctricos. Tal superficie suele ser llamada la superficie interfacial o interfaz. En lo que sigue se comenzará suponiendo que esa superficie, aparte de tener posibles cargas debido a polarización, tiene cargas libres descritas por una densidad superficial $\sigma_\ell(\vec{r})$. Habiendo fuentes en una superficie, se

tendrá discontinuidades tanto del campo eléctrico como del desplazamiento \vec{D} . Calcularemos separadamente la discontinuidad de las componentes tangenciales de las componentes normales a la interfaz. Para los cálculos que siguen se utiliza que una superficie suave siempre puede ser aproximada a un plano en una vecindad suficientemente pequeña. Para hacer estas deducciones se hablará del “plano de contacto” entre el medio (1) abajo y el medio (2) arriba.

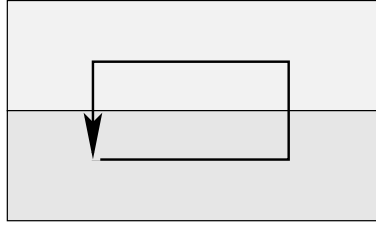
a) *Componentes tangenciales.* Se hace una integral de \vec{E} a lo largo de un camino cerrado infinitesimal rectangular perpendicular al plano de contacto con dos lados paralelos a la tangente y que cruza de un medio al otro. Tal integral da cero en electrostática porque el campo es irrotacional. Es fácil convencerse que las partes normales del camino se cancelan entre sí y solo se obtiene la contribución de las partes tangentes, dando,

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.10.1)$$

que también puede escribirse como

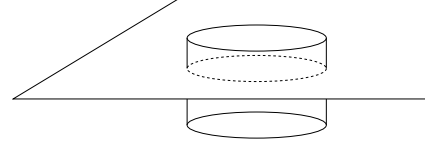
$$\varepsilon_2 D_{1t} = \varepsilon_1 D_{2t} \quad (1.10.2)$$

La última expresión muestra que el rotor de \vec{D} no es cero en la interfaz,



$$\nabla \times \vec{D}(\vec{r}) \neq 0 \quad (1.10.3)$$

En §2.1 se verá que el campo eléctrico se anula dentro de los materiales conductores, de modo que si el medio 1 es conductor, $\vec{E}_1 = 0$ y entonces de la ecuación (1.10.1) se desprende que el campo eléctrico no tiene componente tangencial en el medio 2, es decir, el campo eléctrico en 2 nace perpendicular a la interfaz.



b) *Componentes normales.* En este caso lo que conviene es aplicar la ley de Gauss, (1.8.5), para \vec{D} usando un cilindro infinitesimal con eje normal a la superficie. La única contribución proviene de las tapas que hay en cada medio, lo que da,

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_\ell \quad (1.10.4)$$

que también se puede escribir como,

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_\ell \quad (1.10.5)$$

Suponiendo, por un momento, que el campo eléctrico en el medio 1 es nulo, entonces (1.10.5) implica que el campo eléctrico en el medio 2, junto a la interfaz tiene que valer

$$\vec{E}(\text{muy cercano}) = \frac{\sigma_\ell}{\varepsilon_2} \hat{n} \quad (1.10.6)$$

donde \hat{n} apunta del medio 1 al 2.

En resumen, la componente tangencial de \vec{E} es continua en la interfaz, en cambio la componente normal de \vec{D} es continua solo si $\sigma_\ell = 0$. Las relaciones obtenidas arriba determinan totalmente el tipo de condiciones de borde que debe usarse cuando se trabaja con dieléctricos.

Refracción del campo eléctrico cuando $\sigma_\ell = 0$. Si se designa por θ_1 al ángulo que forma \vec{E}_1 con la normal a la interfaz y θ_2 al análogo con

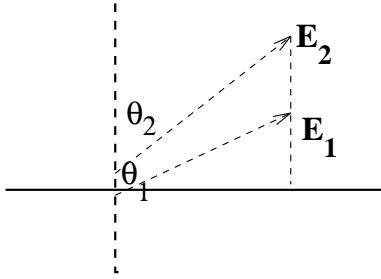
\vec{E}_2 , entonces las ecuaciones (1.10.1) y (1.10.5) en este caso son,

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (1.10.7)$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

de donde se obtiene que,

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (1.10.8)$$



Cuando se tiene una interfaz, como se ha estado discutiendo, se produce una densidad de cargas de polarización en esa superficie que se debe a la polarización de ambos medios. Es decir, la densidad total $\sigma_{P_{tot}}$ de carga de polarización en la interfaz se debe calcular

como $\sigma_{P1} + \sigma_{P2}$. Un breve ejercicio que incluye usar (1.10.8) conduce a

$$\sigma_{P_{tot}} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_0\sigma_{P1}}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\varepsilon_2} \quad (1.10.9)$$

Si $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ entonces $\sigma_{P_{tot}}$ es negativo en (1.10.9). Se puede ver que $\|E_2\| < \|E_1\|$. En la situación en que el campo eléctrico en la interfaz apunta hacia el medio menos polarizable se produce una densidad total superficial de polarización negativa y campo eléctrico es menor en el medio más polarizable. Todo lo anterior se refiere a posiciones infinitesimalmente próximas a la interfaz.

EJERCICIO 1.10-7. *Esto implica que si se sumerge en un líquido aislante muy polarizable (medio 2), una esfera cargada negativamente y una esfera dieléctrica poco polarizable (medio 1), las cargas de polarización que se inducen en la superficie de la esfera dieléctrica que enfrenta al conductor serán negativas y por lo tanto va a existir una fuerza de repulsión entre ambas esferas, contrario a lo que ocurre en el vacío o en aire.*

1.11 Problemas

1.1 Un volumen definido entre dos cilindros infinitos concéntricos de radios a y b ($a < b$) tiene densidad de carga ρ_0 mientras que el resto del espacio está vacío. Determine el campo \vec{E} y el potencial V en todos los puntos del espacio.

1.2 Se tiene una distribución de car-

ga con simetría esférica caracterizada por dos radios a y b , ($a < b$). Para $r < a$ la densidad de carga es constante, $\rho = \rho_0$. Para $a < r < b$ hay densidad de carga que no se conoce, pero se sabe que el potencial total en esa zona es $V(r) = -\frac{K}{6}r^2$. Además se sabe que en la cáscara esférica de radio $r = a$ hay una densi-

dad de carga superficial σ_1 uniforme y en $r = b$ otra de valor σ_2 . Los valores de estas densidades no se conocen. Los datos son: ρ_0 , a , b y K . Sabiendo que no hay otras distribuciones de carga y que el potencial en el infinito es nulo determine: el campo eléctrico en todas partes, el potencial en todas partes, σ_1 , σ_2 y $\rho(a < r < b)$.

- 1.3 Se sabe que hay una distribución de carga esféricamente simétrica en torno a un punto \mathcal{O} fijo, y que el flujo del campo eléctrico que produce esta distribución, en torno a ese punto, a través de cualquier superficie esférica de radio r centrada en \mathcal{O} es $\Phi = 4\pi r e^{-r/R}$ donde b y R son constantes conocidas. Se pide calcular el campo eléctrico en todas partes y la densidad de carga en todas partes.
- 1.4 Una línea semi-infinita con densidad de carga uniforme λ está ubicada sobre el eje X , con uno de sus extremos en el origen de coordenadas. Por el punto $(-D, 0, 0)$ pasa un plano, paralelo al plano YZ , con densidad de carga uniforme σ . Calcule el campo total en el punto $P = (-\frac{D}{2}, 0, 0)$. Calcule la diferencia de potencial entre los puntos P y Q donde $Q = (-2D, 0, 0)$.
- 1.5 Se calculó el potencial lejano asociado a un sistema de dos cargas puntuales q y $-q$ separados por una pequeña distancia δ . Calcule en forma semejante el potencial lejano asociado a un sistema de tres cargas : $[q_1 = 2q, q_2 = -q, q_3 = -q]$ ubicadas en el eje Z con coordenadas $z_1 = a, z_2 = 0$ y $z_3 = -2a$ respectivamente. Nota: En este problema usted debe demostrar que sabe hacer las aproximaciones necesarias para calcular un potencial lejano. La forma exacta del potencial es bastante obvia.
- 1.6 Un dieléctrico sometido a un campo eléctrico suficientemente intenso se puede convertir repentinamente en conductor. Tal proceso se llama "ruptura". Ruptura del aire ocurre cuando hay descarga nube-nube (relámpago) o nube-tierra (rayo). El campo de ruptura del aire es de aproximadamente 3 millones [Volt/metro]. ¿Cuál es el máximo potencial al que se puede cargar una superficie esférica de radio 10 cm antes que se produzca ruptura del aire? ¿Cuál es el radio de una superficie esférica que puede alcanzar una carga de 1 C antes que haya ruptura del aire circundante?
- 1.7 La atmósfera no es enteramente neutra. La presencia de iones tiene por efecto que exista un campo eléctrico en ella. En la superficie terrestre tal campo

apunta hacia abajo y su magnitud aproximadamente es 200 [V/m], mientras que a 1400m de altura este campo, que también apunta hacia abajo, es aproximadamente 20 [V/m]. ¿Cuál es la densidad media de carga en la atmósfera por debajo de 1400 m? ¿Cuál es el signo de la densidad de carga?

- 1.8 Un plano interfacial infinito separa a dos medio dieléctricos semiinfinitos. Bajo el plano hay un medio con constante dieléctrica ϵ_1 y sobre el plano la constante dieléctrica es ϵ_2 . La única fuente de campo eléctrico del sistema es un disco de radio R y densidad de carga libre uniforme σ_0 totalmente contenido en el plano interfacial. Calcule el campo eléctrico sobre el eje del disco tanto sobre como bajo el disco.

- 1.9 Una varilla delgada de dieléctrico de sección A se extiende sobre el

eje X desde $x = 0$ hasta $x = L$. El vector polarización de la varilla apunta a lo largo de ella y está dado por $\vec{P} = (ax^2 + b)\hat{i}$. Encuentre la densidad volumétrica de carga de polarización y la carga superficial de polarización en cada extremo. Demuestre en forma explícita que la carga total de polarización se anula.

- 1.10 Entre dos placas infinitas paralelas (horizontales) separadas por una distancia $2a$ hay una diferencia de potencial V . El espacio entre ellas está lleno con un dieléctrico con constante dieléctrica ϵ_1 hasta la mitad de la altura y de ahí hacia arriba hay un material dieléctrico con constante dieléctrica $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$. Determine el valor que debe tener la densidad de carga libre que hay en la interfaz si se mide que la densidad de carga total en ese plano interfacial es nula.

