UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

12 / 08 / 2003
Prof. Félix Marín
Métodos Matemáticos de la Física II
http://bloch.ciens.ucv.ve/felix/pregrado/
TAREA[1]N$^{\underline{o}}$ 4

SOLUCIÓN

Resuelva SOLO tres (3) de los siguientes problemas. Cada uno de ellos contribuye 20/3 a la calificación de esta tarea.

En los dos primeros problemas, $\mathrm{P}_\ell(x)$ es el polinomio de Legendre de orden ℓ con $\ell = 0, 1, 2, \ldots$.

1. Evalue la integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \, \mathrm{P}_\ell(x)$$

como una expresión que involucra factoriales. Por ejm..., el resultado no contiene *explícitamente* funciones Gamma[2].

SOLUCIÓN:

La *Función Generatriz* de los polinomios de Legendre viene dada por

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \mathrm{P}_\ell(x) \,, \qquad |h| < 1 \,, \quad x \in [-1, 1]$$

Integrando ambos miembros sobre el intervalo $[0, 1]$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}} = \int_0^1 \mathrm{d}x \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \mathrm{P}_\ell(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \int_0^1 \mathrm{d}x \, \mathrm{P}_\ell(x) \tag{4.1}$$

La evaluación solicitada se obtiene por un desarrollo en potencias de h del miembro izquierdo el cual se compara, término a término, con el miembro derecho

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}} &= \left. \frac{\sqrt{1 - 2xh + h^2}}{-h} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{\sqrt{1 - 2h + h^2} - \sqrt{1 + h^2}}{-h} \\
&= \frac{1 - h - \sqrt{1 + h^2}}{-h} = \frac{\sqrt{1 + h^2} - 1 + h}{h}
\end{aligned}$$

---

[1] FECHA DE ENTREGA: **miercoles 20 de agosto de 2003 (Antes de o en el examen final).**
No se aceptarán tareas realizadas en computador.

[2] Note que

$$(a + b)^n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\ell! \, \Gamma(n - \ell + 1)} a^\ell b^{n-\ell} \,, \qquad a, b, n \in \mathbf{C}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3/2)}{\ell!\,\Gamma(3/2-\ell)}\,h^{2\ell}-1+h\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[1+\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\Gamma(3/2)}{\ell!\,\Gamma(3/2-\ell)}\,h^{2\ell}-1+h\right]\\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\Gamma(3/2)}{\ell!\,\Gamma(3/2-\ell)}\,h^{2\ell-1}+1
\end{aligned}
$$

La expresión (4.1) se reduce a

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3/2)}{(\ell+1)!\,\Gamma(1/2-\ell)}\,h^{2\ell+1}+1\\
&=\\
&\sum_{\ell=0}^{\infty}h^{\ell}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{P}_\ell(x)\\
&=\\
&\overbrace{\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{P}_0(x)+\sum_{\ell=1}^{\infty}h^{2\ell}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{P}_{2\ell}(x)}^{\text{Potencias pares de } h}+\overbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty}h^{2\ell+1}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{P}_{2\ell+1}(x)}^{\text{Potencias impares de } h}
\end{aligned}
$$

Comparando ambos miembros, se obtiene[3]:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{P}_\ell(x) &= \delta_{\ell 0}\,, \qquad \ell \text{ par}\\
\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{P}_{2\ell+1}(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(1/2)}{(\ell+1)!\,\Gamma(1/2-\ell)}\,, \qquad \ell=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

Expresaremos el cuociente $\Gamma(1/2)/\Gamma(1/2-\ell)$ en término de factoriales

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1/2) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-\ell\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\ell\right)\\
&= \frac{(-1)^\ell}{2^\ell}\,1\times 3\times\ldots\times(2\ell-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\ell\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-\ell)}=\frac{(-1)^\ell}{2^\ell}\,\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\ldots\times(2\ell-2)\,(2\ell-1)\,(2\ell)}{(2\times 1)\,(2\times 2)\,(2\times 3)\ldots(2\times[\ell-1])\,(2\times\ell)}=(-1)^\ell\,\frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}\,\ell!}
$$

Con este resultado se obtiene[4]

$$
\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{P}_{2\ell+1}(x)=\frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell+1}\,(\ell+1)}\binom{2\ell}{\ell}, \quad \ell=0,1,2,\ldots
$$

[3]Aquí usamos la conocida propiedad de recurrencia de la funcion Gamma: $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

[4]
$$
\binom{m}{n}\equiv\frac{m!}{n!\,(m-n)!}\,, \qquad 0\le n\le m\,, \qquad m,n\in\mathbf{N}
$$

$$
\boxed{\int_0^1 \mathrm{d}x \, \mathrm{P}_\ell(x) = \begin{cases} \delta_{\ell 0} & , \quad \text{si} \quad \ell \text{ es par} \\ \dfrac{(-1)^{(\ell-1)/2}}{2^{\ell-1}\,(\ell+1)} \dbinom{\ell-1}{[\ell-1]/2}, & \quad \text{si} \quad \ell \text{ es impar} \end{cases}} \tag{4.2}
$$

2. Evalue explícitamente la expresión

$$
\sum_{\ell'=0}^{\ell} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \mathrm{P}_{\ell'}(x) \, \mathrm{P}_{\ell-\ell'}(x)
$$

SOLUCIÓN:

La *Función Generatriz* de los polinomios de Legendre viene dada por

$$
\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \mathrm{P}_\ell(x) \;, \qquad |h| < 1 \,, \quad x \in [-1,1]
$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-2xh+h^2} &= \sum_{\substack{\ell'=0 \\ \ell''=0}}^{\infty} h^{\ell'+\ell''} \mathrm{P}_{\ell'}(x) \, \mathrm{P}_{\ell''}(x) = \sum_{\substack{\ell'=0 \\ \ell''=0}}^{\infty} h^{\ell'+\ell''} \mathrm{P}_{\ell'}(x) \, \mathrm{P}_{\ell''}(x) \overbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{\ell,\ell'+\ell''}}^{=\,1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{\ell''=0}^{\infty} \mathrm{P}_{\ell'}(x) \, \mathrm{P}_{\ell''}(x) \, \delta_{\ell'',\ell-\ell'} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \sum_{\ell'=0}^{\infty} \mathrm{P}_{\ell'}(x) \, \mathrm{P}_{\ell-\ell'}(x) \sum_{\ell''=0}^{\infty} \delta_{\ell'',\ell-\ell'}
\end{aligned}
$$

Pero $\sum_{\ell''=0}^{\infty} \delta_{\ell'',\ell-\ell'} = 1$ si $\ell - \ell' \geq 0$ y es nula en cualquier otro caso. Por lo tanto

$$
\frac{1}{1-2xh+h^2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \left[\sum_{\ell'=0}^{\ell} \mathrm{P}_{\ell'}(x) \, \mathrm{P}_{\ell-\ell'}(x) \right]
$$

Integrando ambos miembros, en el intervalo $[0,1]$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell \left[\sum_{\ell'=0}^{\ell} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \mathrm{P}_{\ell'}(x) \, \mathrm{P}_{\ell-\ell'}(x) \right] &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-2xh+h^2} = \left. \frac{\ln|1-2xh+h^2|}{-2h} \right|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2h} \left[\ln\left(1+h^2\right) - 2\ln(1-h) \right]
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Usando la serie de Taylor $\ln(1+z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell z^{\ell+1} / (\ell+1)$, con $|z| < 1$; podemos obtener una serie en potencias de h para la expresión anterior:

$$
\frac{1}{2h} \left[\ln\left(1+h^2\right) - 2\ln(1-h) \right] =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2h}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\,\frac{h^{2\ell+2}}{\ell+1} - 2\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\,\frac{(-h)^{\ell+1}}{\ell+1}\right] \\
&= \frac{1}{2h}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\,\frac{h^{2\ell+2}}{\ell+1} + 2\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{h^{\ell+1}}{\ell+1}\right] \\
&= \frac{1}{2h}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\,\frac{h^{2\ell+2}}{\ell+1} + 2\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{h^{2\ell+2}}{2\ell+2} + 2\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{h^{2\ell+1}}{2\ell+1}\right] \\
&= \frac{1}{2h}\left\{\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[(-1)^{\ell}+1\right]\,\frac{h^{2\ell+2}}{\ell+1} + 2\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{h^{2\ell+1}}{2\ell+1}\right\} = \sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\ \text{par}}}^{\infty}\frac{h^{2\ell+1}}{\ell+1} + \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{h^{2\ell}}{2\ell+1}
\end{aligned}
$$

Con este resultado y la expresión (4.3) concluimos que

$$
\boxed{\sum_{\ell'=0}^{\ell}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{P}_{\ell'}(x)\,\mathrm{P}_{\ell-\ell'}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\ell+1}\,, & \text{si } \ell \text{ es impar y } \dfrac{\ell-1}{2} \text{ es par} \\ \dfrac{1}{\ell+1}\,, & \text{si } \ell \text{ es par} \\ 0 \quad , & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}} \tag{4.4}
$$

3. Considere la región encerrada por el *cono*

$$
\mathcal{C} = \left\{(x,y,z)\ \mid\ \sqrt{x^2+y^2} = z\tan\alpha\,,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right\}
$$

Encuentre la solución para la ecuación de Laplace tridimensional $\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0$ en $\mathcal{C}$ si

$$
\Phi(x,y,z) = V_0\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,/\lambda}\,, \qquad (x,y,z)\in \text{la superficie del cono}\,; \qquad \lambda>0
$$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Obviamente, el problema tiene simetría azimutal cuando es formulado en coordenadas esféricas[5]. Por tanto, la solución general es independiente de la variable azimutal (ver pie de página 5) ϕ y de la forma ($\Phi(x,y,z)\equiv\Phi(r,\theta)$)

$$
\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell\,r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)\mathrm{P}_\ell(\cos\theta)
$$

A_ℓ y B_ℓ ($\ell = 0,1,2,\ldots$) son constantes independientes de r y θ. $\mathrm{P}_\ell(\cos\theta)$ es el polinomio de Legendre de orden ℓ. $\ell = 0,1,2,\ldots$.

[5] $x = r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)\ ,\quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\ ,\quad z = r\cos(\theta)\ ;\qquad r\ge 0\,,\quad 0\le\theta\le\pi\,,\quad 0\le\phi<2\pi$

Al imponer la condición de frontera en la superficie del cono, se obtiene

$$V_0\, \mathrm{e}^{-r/\lambda} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell\, r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) \mathrm{P}_\ell\,(\cos\alpha)$$

Usemos el desarrollo en serie de Taylor ($\mathrm{e}^z = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell/\ell!,\ z \in \mathbf{C}$) de la función exponencial

$$V_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-r/\lambda)^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell\, r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) \mathrm{P}_\ell\,(\cos\alpha)$$

Comparando, en ambos miembros, los coeficientes de las potencias de r, se obtiene

$$V_0\, \frac{(-1)^\ell}{\lambda^\ell\, \ell!} = A_\ell \mathrm{P}_\ell\,(\cos\alpha)\ , \qquad B_\ell \mathrm{P}_\ell\,(\cos\alpha) = 0\,; \qquad \forall \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

La solución no trivial y que satisface ambas ecuaciones requiere que $B_\ell = 0$, $\forall \ell = 0, 1, 2, \ldots$, y se reduce a

$$\boxed{\Phi\,(r,\theta) = V_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^\ell \frac{\mathrm{P}_\ell\,(\cos\theta)}{\mathrm{P}_\ell\,(\cos\alpha)}} \tag{4.5}$$

4. Considere la región (encerrada por una *semiesfera*)

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z)\ \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2\,, \quad z > 0 \right\}\,; \qquad a > 0$$

Encuentre la solución para la ecuación de Laplace tridimensional $\nabla^2 \Phi\,(\vec{r}) = 0$ en $\mathcal{S}$ si

$$\Phi\,(x, y, 0) = V_0\,, \qquad \text{y} \qquad \Phi\,(x, y, z) = 0 \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Obviamente, el problema tiene simetría azimutal cuando es formulado en coordenadas esféricas. Por tanto, la solución general es independiente de la variable azimutal (ver pie de página 5) ϕ. En este caso particular, la variable θ se encuentra en el intervalo $[0, \pi/2]$.

La forma de la solución general ($\Phi\,(x, y, z) \equiv \Phi\,(r, \theta)$) es:

$$\Phi\,(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell\, r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) \mathrm{P}_\ell\,(\cos\theta)$$

A_ℓ y B_ℓ ($\ell = 0, 1, 2, \ldots$) son constantes independientes de r y θ. $\mathrm{P}_\ell\,(\cos\theta)$ es el polinomio de Legendre de orden ℓ. $\ell = 0, 1, 2, \ldots$.

Para garantizar que la solución sea *finita* cuando $r \to 0^+$, es necesario imponer la condición $B_\ell = 0$, $\forall \ell = 0, 1, 2, \ldots$. La solución se reduce a

$$\Phi\,(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell\, r^\ell \mathrm{P}_\ell\,(\cos\theta)$$

Al imponer la condición de frontera en la *base inferior de la semiesfera* ($\theta = \pi/2$) se obtiene[6]

$$V_0 = \Phi\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell\, r^\ell \mathrm{P}_\ell\,(0) = A_0 + \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \mathrm{par}}}^{\infty} A_\ell\, r^\ell \mathrm{P}_\ell\,(0)$$

Esta puede satisfacerse con la escogencia

$$A_0 = V_0\,, \qquad A_\ell = 0 \quad \forall \ell \text{ par}$$

La solución se reduce a

$$\Phi\,(r, \theta) = V_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell+1}\, r^{2\ell+1} \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(\cos\theta)$$

Al imponer la condición de frontera en la semiesfera ($r = a$) se obtiene

$$0 = \Phi\,(a, \theta) = V_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell+1}\, a^{2\ell+1} \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(\cos\theta)$$

Multiplicando ambos miembros por $\mathrm{P}_{2\ell+1}\,(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$ ($\ell = 0, 1, 2, \ldots$) e integrando en el intervalo $[0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} & V_0 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \mathrm{sen}\,(\theta)\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(\cos\theta) \\ & + \\ & \sum_{\ell'=0}^{\infty} A_{2\ell'+1}\, a^{2\ell'+1} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \mathrm{sen}\,(\theta)\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(\cos\theta)\, \mathrm{P}_{2\ell'+1}\,(\cos\theta) = 0 \end{aligned}$$

Evaluando las integrales de la expresión anterior

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \mathrm{sen}\,(\theta)\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(\cos\theta) = -\int_1^0 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(x) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(x)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \mathrm{sen}\,(\theta)\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(\cos\theta)\, \mathrm{P}_{2\ell'+1}\,(\cos\theta) \\ & = \\ & -\int_1^0 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(x)\, \mathrm{P}_{2\ell'+1}\,(x) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(x)\, \mathrm{P}_{2\ell'+1}\,(x) \\ & = \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(x)\, \mathrm{P}_{2\ell'+1}\,(x) = \frac{1}{2}\, \frac{2\delta_{2\ell+1, 2\ell'+1}}{2\,(2\ell+1)+1} = \frac{\delta_{\ell\ell'}}{4\ell+3} \end{aligned}$$

se obtiene

$$V_0 \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(x) + A_{2\ell+1}\, a^{2\ell+1}\, \frac{1}{4\ell+3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_{2\ell+1} = -V_0\, \frac{4\ell+3}{a^{2\ell+1}} \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\,(x)$$

[6] $\mathrm{P}_\ell\,(x)$, con $x \in [-1, 1]$, es *par* (*impar*) si ℓ es par (impar). Por tanto, $\mathrm{P}_\ell\,(0) = 0$ si ℓ es impar. Note que $\mathrm{P}_0\,(x) = 1$, $\forall x \in [-1, 1]$.

y la solucion se reduce a

$$\boxed{\Phi\left(r,\theta\right) = V_0\left\{1 - \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(4\ell+3\right)\left[\int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{P}_{2\ell+1}\left(x\right)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{2\ell+1}\mathrm{P}_{2\ell+1}\left(\cos\theta\right)\right\}} \tag{4.6}$$

o usando el resultado (4.2)

$$\boxed{\Phi\left(r,\theta\right) = V_0\left[1 - \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(-1\right)^{\ell}\,\frac{\left(4\ell+3\right)}{2^{2\ell+1}\left(\ell+1\right)}\binom{2\ell}{\ell}\left(\frac{r}{a}\right)^{2\ell+1}\mathrm{P}_{2\ell+1}\left(\cos\theta\right)\right]} \tag{4.7}$$

5. Considere una partícula de masa m atada a un resorte de constante de Hooke $m\omega_0^2$ ($\omega_0 > 0$) la cual solo se mueve a lo largo del eje x (Oscilador Armónico Simple). Use el *método de la Función de Green* para evaluar el desplazamiento $x\left(t\right)$ ($t > 0$), en función del tiempo, si se aplica una *fuerza impulsora* $\mathrm{F}\left(t\right) \equiv m\omega_0 v_0 \,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t\right)$. Las condiciones iniciales son $x\left(0\right) = 0$ y $\dot{x}\left(0\right) = v_0$.

SOLUCIÓN:

La ecuación de movimiento para tal partícula viene dada por la componente x de la *segunda ley de Newton* ($m\ddot{x}\left(t\right) = -m\omega_0^2 x\left(t\right) + \mathrm{F}\left(t\right)$) la cual puede ser escrita en la forma

$$\ddot{x}\left(t\right) + \omega_0^2 x\left(t\right) = \frac{1}{m}\,\mathrm{F}\left(t\right)\,; \qquad x\left(0\right) = 0, \quad \dot{x}\left(0\right) = v_0 \tag{4.8}$$

En términos de la *función de Green* $\mathrm{G}\left(t,t'\right)$, la solución puede expresarse como

$$x\left(t\right) = x_p\left(t\right) + \int_0^{\infty}\mathrm{d}t'\,\mathrm{G}\left(t,t'\right)\left[\frac{\mathrm{F}\left(t'\right)}{m}\right], \qquad \left\{\begin{array}{c} \mathrm{G}\left(0,t'\right) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\mathrm{G}\left(t,t'\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{array}\right. \tag{4.9}$$

$x_p\left(t\right)$ es una *solución particular*, que satisface las condiciones iniciales, de la *ecuación homogenea*[7] $\ddot{x}\left(t\right) + \omega_0^2 x\left(t\right) = 0$

$$x_p\left(t\right) = \frac{v_0}{\omega_0}\,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t\right)$$

La presencia de $x_p\left(t\right)$ en (4.9) garantiza que las condiciones que satisface la función de Green $\mathrm{G}\left(t,t'\right)$ serán las *mas simples posibles*.

Puesto que (4.9) debe satisfacer la Ec. (4.8), debe cumplirse que

$$\frac{1}{m}\int_0^{\infty}\mathrm{d}t'\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\mathrm{G}\left(t,t'\right)\right]\mathrm{F}\left(t'\right) = \frac{1}{m}\,\mathrm{F}\left(t\right)$$

[7] Una ecuación tal como (4.8) se le llama *Ecuación con Fuentes* donde $\mathrm{F}\left(t\right)/m$ es la fuente.

con las condiciones iniciales

$$\mathrm{G}\left(0, t'\right) = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

Por tanto

$$\frac{\partial^2 \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t^2} + \omega_0^2 \mathrm{G}\left(t, t'\right) = \delta\left(t - t'\right) \tag{4.10}$$

$$\mathrm{G}\left(0, t'\right) = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{4.11}$$

Integrando, sobre la variable t, ambos miembros de la ecuación de movimiento (4.10) de la función de Green en el intervalo $[t' - \epsilon, t' + \epsilon]$ y tomando, a continuación, el límite $\epsilon \to 0^+$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial^2 \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t^2} + \omega_0^2 \mathrm{G}\left(t, t'\right)\right] &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \overbrace{\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \mathrm{d}t\, \delta\left(t - t'\right)}^{1} \\
\lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\left.\frac{\partial \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t}\right|_{t=t'+\epsilon} - \left.\frac{\partial \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t}\right|_{t=t'-\epsilon}\right] &= 1
\end{aligned}$$

En consecuencia, (4.10) y (4.11) equivalen a

$$\frac{\partial^2 \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t^2} + \omega_0^2 \mathrm{G}\left(t, t'\right) = 0\,, \quad t \neq t'\,; \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t}\right|_{t=t'^+} - \left.\frac{\partial \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t}\right|_{t=t'^-} = 1 \tag{4.12}$$

$$\mathrm{G}\left(0, t'\right) = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{G}\left(t, t'\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{4.13}$$

Aquí hemos usado la continuidad de la función de Green en $t = t'$. Es decir

$$\lim_{t \to t'} \mathrm{G}\left(t, t'\right) = \mathrm{G}\left(t', t'\right)$$

$\tau^{\pm}$ es una abreviatura de $\lim_{\epsilon \to 0^+} (\tau \pm \epsilon)$.

La ecuación diferencial en (4.12) nos muestra que la solución para la función de Green, cuando $t \neq t'$, es la solución para el oscilador armónico simple: Son combinaciones lineales de $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$ y $\cos(\omega_0 t)$. Como consecuencia de las condiciones iniciales (4.13), se obtiene que[8] $\mathrm{G}\left(t, t'\right) = 0$ cuando $t < t'$. Cuando $t > t'$, la combinación lineal

[8]Por ejm. . . , si $X(t) = \alpha \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \beta \cos(\omega_0 t)$ con $X(0) = 0$ y $\dot{X}(0) = 0$; entonces

$$\left(\ \alpha \operatorname{sen}(0) + \beta \cos(0) = 0\,, \quad \alpha\omega_0 \cos(0) - \beta\omega_0 \operatorname{sen}(0) = 0\ \right) \implies \alpha = \beta = 0 \implies \boxed{X(t) = 0\,,\ \forall t}$$

mencionada arriba que se anula[9] en el limite $t \to t'^{+}$ es de la forma $A \operatorname{sen}(\omega_0 [t - t'])$ donde A es una constante independiente del tiempo. En resumen

$$\mathrm{G}(t, t') = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si} \quad t < t' \\ A \operatorname{sen}(\omega_0 [t - t']) , & \quad \text{si} \quad t > t' \end{cases}$$

La constante A se determina a traves del *salto de la derivada* de la función de Green (ver (4.12)) en $t = t'$:

$$A\omega_0 \cos(\omega_0 [t - t'])_{t = t'^{+}} - 0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{\omega_0}$$

$$\mathrm{G}(t, t') = \Theta(t - t') \; \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 [t - t'])}{\omega_0}$$

Reemplazando en la solución general (4.9), encontramos que

$$\boxed{x(t) = x_p(t) + \int_0^t \mathrm{d}t' \, \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 [t - t'])}{\omega_0} \, \left[\frac{\mathrm{F}(t')}{m}\right]} \tag{4.14}$$

donde $\ddot{x}_p(t) + \omega_0^2 x_p(t) = 0$ y ($x_p(0) = x(0)$, $\dot{x}_p(0) = \dot{x}(0)$).

Insertando en la solución general el caso particular $\mathrm{F}(t) = m\omega_0 v_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) + v_0 \int_0^t \mathrm{d}t' \, \operatorname{sen}(\omega_0 [t - t']) \operatorname{sen}(\omega_0 t') \\ &= \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \, v_0 \int_0^t \mathrm{d}t' \, \{\cos(\omega_0 [t - 2t']) - \cos(\omega_0 t)\} \\ &= \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \, v_0 \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 [t - 2t'])}{-2\omega_0} - t' \cos(\omega_0 t) \right\}_{t'=0}^{t'=t} \\ &= \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \, v_0 \left\{ \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0} - t \cos(\omega_0 t) + \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 t)}{2\omega_0} \right\} \\ &= \frac{3v_0}{2\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \, v_0 t \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Introduciendo la variable $\phi(t) \equiv \arctan(\omega_0 t / 3)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3v_0}{2\omega_0} [\operatorname{sen}(\omega_0 t) - \tan(\phi(t)) \cos(\omega_0 t)] \\ &= \frac{3v_0}{2\omega_0} \, \sec(\phi(t)) [\operatorname{sen}(\omega_0 t) \cos(\phi(t)) - \operatorname{sen}(\phi(t)) \cos(\omega_0 t)] \\ &= \frac{3v_0}{2\omega_0} \, \sqrt{\tan^2 \phi(t) + 1} \, \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi(t)) \end{aligned}$$

[9] La función de Green es continua en $t = t'$ y $\mathrm{G}(t', t') = 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{3v_0}{2\omega_0}\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t) - \frac{1}{2}\,v_0 t\cos(\omega_0 t) \\ &= \frac{3v_0}{2\omega_0}\,\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\,\omega_0 t\right)^2}\;\;\mathrm{sen}\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{1}{3}\,\omega_0 t\right)\right) \end{aligned}} \tag{4.15}$$

6. Las posiciones, en función del tiempo t, de N partículas de carga q_n vienen dadas, respectivamente, por $\vec{r}_n(t)$. $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Encuentre expresiones para la densidad de carga $\rho(\vec{r}, t)$ y la densidad de corriente $\vec{\mathrm{J}}(\vec{r}, t)$.

   <u>SOLUCIÓN:</u>

   La densidad de carga $\rho(\vec{r}, t)$ debe satisfacer las condiciones:

   a) $\rho(\vec{r}, t) = 0$ si $\vec{r} \neq \vec{r}_n(t)$, $\forall n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, en cualquier instante de tiempo t.

   b)
   $$\int \mathrm{d}^3_{\vec{r}}\,\rho(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{N-1} q_n\,, \qquad \forall t$$
   La integración se extiende a todo el espacio.

   Con estas condiciones es claro que

   $$\boxed{\rho(\vec{r}, t) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} q_n\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))} \tag{4.16}$$

   El lector podrá verificar que las condiciones mencionadas arriba se satisfacen idénticamente.

   La densidad de corriente $\vec{\mathrm{J}}(\vec{r}, t)$ se obtiene a traves de la *Ecuación de Continuidad* la cual relaciona la densidad de carga y la densidad de corriente como consecuencia de la *Conservación de la Carga Eléctrica*. Esbozaremos brevemente la derivación de la Ecuación de Continuidad.

   Dado un punto $\vec{r}$ del espacio, dividamos a este en dos partes: 1) un volumen V que contiene el punto $\vec{r}$ y *encierra* la carga $Q_V(t)$ y 2) el espacio exterior a V el cual contiene la carga $Q_{\not V}(t)$. La carga total $Q_{total}(t) \equiv Q_V(t) + Q_{\not V}(t)$ en todo el espacio se conserva ($\mathrm{d}Q_{total}(t)/\mathrm{d}t = 0$). Por tanto

   $$\frac{\mathrm{d}Q_V(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}Q_{\not V}(t)}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad Q_V(t) \equiv \int_V \mathrm{d}^3_{\vec{R}}\,\rho\left(\vec{R}, t\right)$$

   $\mathrm{d}Q_{\not V}(t)/\mathrm{d}t$ es la variación de la carga eléctrica en el espacio exterior a V y, puesto que la carga se conserva, representa la carga que fluye desde el interior de V. Se puede definir un vector densidad de corriente $\vec{\mathrm{J}}(\vec{r}, t)$ tal que

   $$\frac{\mathrm{d}Q_{\not V}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_S \vec{\mathrm{J}}\left(\vec{R}, t\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

La integración se efectua sobre la superficie del volumen V.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_V \mathrm{d}^3_{\vec{R}}\,\rho\left(\vec{R},t\right)\right]+\int_S \vec{\mathrm{J}}\left(\vec{R},t\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

Usando el *Teorema de la Divergencia de Gauss* en la segunda integral, se obtiene

$$\int_V \mathrm{d}^3_{\vec{R}}\left[\frac{\partial\rho\left(\vec{R},t\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{\mathrm{J}}\left(\vec{R},t\right)\right]=0$$

Dividiendo ambos miembros por V y tomando el límite $V\rightarrow 0$ se obtiene[10]

$$\lim_{\substack{V\rightarrow 0\\ \vec{r}\in V}}\frac{1}{V}\int_V \mathrm{d}^3_{\vec{R}}\left[\frac{\partial\rho\left(\vec{R},t\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{\mathrm{J}}\left(\vec{R},t\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial\rho\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{\mathrm{J}}\left(\vec{r},t\right)=0\,,\qquad (\text{ Ecuación de Continuidad })$$

Usamos esta expresión para derivar la densidad de corriente

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\mathrm{J}}\left(\vec{r},t\right) &= -\frac{\partial\rho\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}=-\sum_{n=0}^{N-1}q_n\left[\nabla_{\vec{r}-\vec{r}_n(t)}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_n\left(t\right)\right)\right]\cdot\frac{\mathrm{d}\left[\vec{r}-\vec{r}_n\left(t\right)\right]}{\mathrm{d}t}\\ &= \sum_{n=0}^{N-1}q_n\vec{v}_n\left(t\right)\cdot\nabla_{\vec{r}}\,\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_n\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

$\vec{v}_n\left(t\right)\equiv\mathrm{d}\vec{r}_n\left(t\right)/\mathrm{d}t$ es la velocidad de la carga n-ésima. Al proseguir la derivación en cuestion, usamos la identidad

$$\nabla\cdot\left[\phi\left(\vec{r}\right)\vec{\mathrm{A}}\left(\vec{r}\right)\right]=\left[\nabla\phi\left(\vec{r}\right)\right]\cdot\vec{\mathrm{A}}\left(\vec{r}\right)+\phi\left(\vec{r}\right)\nabla\cdot\vec{\mathrm{A}}\left(\vec{r}\right)$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\mathrm{J}}\left(\vec{r},t\right) &= \sum_{n=0}^{N-1}q_n\left\{\nabla_{\vec{r}}\cdot\left[\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_n\left(t\right)\right)\vec{v}_n\left(t\right)\right]-\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_n\left(t\right)\right)\underbrace{\nabla_{\vec{r}}\cdot\vec{v}_n\left(t\right)}_{=\,0}\right\}\\ &= \nabla_{\vec{r}}\cdot\left[\sum_{n=0}^{N-1}q_n\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_n\left(t\right)\right)\vec{v}_n\left(t\right)\right]\end{aligned}$$

Podemos identificar la sumatoria, en el segundo miembro, con la densidad de corriente:

$$\boxed{\vec{\mathrm{J}}\left(\vec{r},t\right)=\sum_{n=0}^{N-1}q_n\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_n\left(t\right)\right)\vec{v}_n\left(t\right)}\tag{4.17}$$

En realidad, la *identificación* mencionada arriba permite la adición del *rotor* de un campo vectorial arbitrario. Es decir

$$\vec{\mathrm{J}}\left(\vec{r},t\right)\quad\rightarrow\quad\vec{\mathrm{J}}\left(\vec{r},t\right)+\nabla\times\vec{\mathrm{A}}\left(\vec{r},t\right)\quad\text{puesto que}\quad\nabla\cdot\nabla\times\vec{\mathrm{A}}\left(\vec{r},t\right)=0$$

Sin embargo, el flujo que genera $\nabla\times\vec{\mathrm{A}}\left(\vec{r},t\right)$ a traves de una superficie cerrada arbitraria es nulo y se argumenta que no podría ser *separado*, por ejm… en un experimento, del resultado (4.17).

[10] Note que $\vec{r}\in V$.