Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

Capítulo 15

Ecuaciones diferenciales con singularidades

versión preliminar 0.5-23 diciembre 2002

La ecuación de Laplace —que aparece naturalmente en problemas de electrostática o Mecánica Cuántica, por ejemplo— se puede resolver por separación de variables, y esto da, para la parte radial, la ecuación

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2R - \frac{QR}{r^2} \ ,$$

donde k y Q son constantes. Ésta es una ecuación diferencial con coeficientes que no sólo no son constantes, sino que son singulares (en $r = 0$). Muchos otros problemas dan origen a ecuaciones que son también de la forma

$$f''(z) + p(z)f'(z) + q(z)f(z) = 0 \ . \tag{15.1}$$

El problema de encontrar soluciones a este tipo de problemas es complejo. El estudio de las las singularidades de $p(z)$ y $q(z)$ es útil pues permite clasificar las ecuaciones diferenciales, e investigar la factibilidad de encontrar soluciones vía expansión en serie (Teorema de Fuchs). En este capítulo veremos nociones útiles para trabajar con este tipo de ecuaciones; los aspectos formales de esta discusión se encuentran en el capítulo siguiente.

15.1. Puntos singulares

Consideremos ecuaciones diferenciales de la forma (15.1).

Algunas definiciones útiles:

1. z_0 es un *punto ordinario* si $p(z_0)$ y $q(z_0)$ son finitas.

2. z_0 es un *punto singular* si $p(z)$ o $q(z)$, o ambas, divergen si $z \to z_0$.

3. z_0 es un punto regular o singular no esencial si $p(z)$ o $q(z)$ divergen si $z \to z_0$, pero $(z - z_0)p(z)$ y $(z - z_0)^2q(z)$ son finitas cuando $z \to z_0$.

4. z_0 es una singularidad irregular o esencial si $(z - z_0)p(z)$ o $(z - z_0)^2 q(z)$ divergen si $z \to z_0$. Es decir, si $p(z)$ diverge más rápido que $1/(z - z_0)$, o $q(z)$ diverge más rápido que $1/(z - z_0)^2$.

Estas definiciones són válidas para todo valor finito de z. El punto $z \to \infty$ se trata introduciendo el cambio de variables $s = 1/z$, y luego haciendo $s \to 0$. Con dicho cambio de variables, (15.1) queda

$$s^4 \frac{d^2\overline{f}}{ds^2} + \left[2s^3 - s^2 p\left(\frac{1}{s}\right)\right] \frac{d\overline{f}}{ds} + q\left(\frac{1}{s}\right)\overline{f} = 0 \ . \tag{15.2}$$

con $\overline{f}(s) = f(z) = f(1/s)$. Luego, el comportamiento en $z = \infty$ ($s = 0$) está dado por el comportamiento de los nuevos coeficientes

$$\overline{p}(s) = \frac{2s - p(1/s)}{s^2} \ , \quad \overline{q}(s) = \frac{q(1/s)}{s^4} \ . \tag{15.3}$$

Si son finitos, $z = \infty$ es un punto ordinario. Si divergen como $1/s$ y $1/s^2$ o más lentamente, respectivamente, $z = \infty$ es punto singular regular; si no, es un punto singular irregular o esencial.

Ejemplo La ecuación de Bessel,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \ , \tag{15.4}$$

sólo tiene una singularidad regular en $x = 0$, y una singularidad irregular o esencial en $x = \infty$.

15.2. Solución por serie: método de Frobenius

El método de expansión en serie permite encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden. Siempre será posible encontrar una solución con este método, siempre que la serie corresponda a una expansión en torno a un punto que sea ordinario o punto singular regular.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación del oscilador armónico:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \ . \tag{15.5}$$

Introduzcamos una solución de la forma

$$y(x) = x^k \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda \ , \quad a_0 \neq 0 \ . \tag{15.6}$$

Ya hicimos algo similar al estudiar las ecuaciones de Hermite y Laguerre en los capítulos anteriores. En esos casos, $k = 0$. Ahora nos interesa el caso general. De hecho, k no necesariamente es un número entero. Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda) x^{k+\lambda+1} \ ,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} \ ,$$

de modo que, reemplazando en (15.5), se tiene

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \omega^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = 0 \ . \tag{15.7}$$

Esta igualdad implica que cada coeficiente, para todas las potencias de x, debe anularse. En particular, el coeficiente de la menor potencia de x, x^{k-2}:

$$a_0 k(k-1) \ .$$

Puesto que a_0 es el menor coeficiente no nulo de la serie,

$$k(k-1) = 0 \ . \tag{15.8}$$

Esta ecuación, que proviene de anular el coeficiente de la menor potencia de x en (15.7), se denomina *ecuación indicial*. Sus raíces son de gran importancia para nuestro análisis. Para el oscilador armónico, las raíces de la ecuación indicial son

$$k = 0 \ , \qquad k = 1 \ . \tag{15.9}$$

Por otro lado, de (15.7) se sigue, al anular el coeficiente de x^{k+j}, con $j = \lambda + 2$, la relación de recurrencia

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(k+j+2)(k+j+1)} \ . \tag{15.10}$$

Como en el caso de la ecuación de Hermite, esta relación de recurrencia determina o sólo los términos pares, o sólo los impares, de modo que hay dos coeficientes arbitrarios, a_0 y a_1.

Ahora bien, volviendo a las raíces de la ecuación indicial, si $k = 0$, entonces el coeficiente de x^{k-2} en (15.7) se anula, y así $a_0 \neq 0$. Al mismo tiempo, el coeficiente de la siguiente potencia de x, x^{k-1}, es

$$a_1(k+1)k = 0 \ ,$$

que también se satisface si $k = 0$. Por tanto, en este caso ambos coeficientes son arbitrarios. Para $k = 1$, en tanto, el coeficiente de x^{k-2} es cero, pero el de x^{k-1} no es cero a menos que $a_1 = 0$. Como a_1 es arbitrario si $k = 0$, y necesariamente cero si $k = 1$, escojamos $a_1 = 0$. De este modo, todos los coeficientes impares de la serie desaparecen. (En principio podemos temer pérdida de soluciones, pero el objetivo aquí es encontrar al menos una solución; de todos modos, los términos impares reaparecerán al considerar la segunda raíz de la ecuación indicial.)

Tomando entonces $k = 0$, la relación de recurrencia queda

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+2)(j+1)} \ ,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} = -\frac{\omega^2}{2!} a_0 \ , \\
a_4 &= -a_2 \frac{\omega^2}{3 \cdot 4} = \frac{\omega^4}{4!} a_0 \ , \\
a_6 &= -a_0 \frac{\omega^2}{5 \cdot 6} = -\frac{\omega^6}{6!} a_0 \ ,
\end{aligned}$$

etc@. Podemos ver entonces (y mostrar por inducción) que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0 \ , \tag{15.11}$$

y la solución es

$$\begin{aligned}
y(x)_{k=0} &= a_0 \left[1 - \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^4}{4!} - \frac{(\omega x)^6}{6!} + \cdots \right] \\
y(x)_{k=0} &= a_0 \cos(\omega x) \ . \qquad (15.12)
\end{aligned}$$

Con $k = 1$, en tanto, la relación de recurrencia es

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+3)(j+2)} \ ,$$

es decir

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \frac{\omega^2}{2 \cdot 3} = -\frac{\omega^2}{3!} a_0 \ , \\
a_4 &= -a_2 \frac{\omega^2}{4 \cdot 5} = \frac{\omega^4}{5!} a_0 \ , \\
a_6 &= -a_0 \frac{\omega^2}{6 \cdot 7} = -\frac{\omega^6}{7!} a_0 \ ,
\end{aligned}$$

que conduce a

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0 \ . \tag{15.13}$$

Así,

$$\begin{aligned}
y(x)_{k=1} &= a_0 x \left[1 - \frac{(\omega x)^2}{3!} + \frac{(\omega x)^4}{5!} - \frac{(\omega x)^6}{7!} + \cdots \right] \\
&= \frac{a_0}{\omega} \left[(\omega x) - \frac{(\omega x)^3}{3!} + \frac{(\omega x)^5}{5!} - \frac{(\omega x)^7}{7!} + \cdots \right] \\
y(x)_{k=1} &= \frac{a_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega x) \ . \qquad (15.14)
\end{aligned}$$

Por supuesto, hemos obtenido dos soluciones linealmente independientes que no son ninguna sorpresa, pero el método de Frobenius es general y nos permite estudiar cualquier ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden. Sin embargo, obtener una solución como una expansión en serie no significa que dicha solución sea aceptable: eso depende de si converge o no, lo cual no está asegurado, y requiere un análisis separado.

En general, es posible usar este método expandiendo la solución en torno a un punto x_0 arbitrario, en cuyo caso (15.6) es reemplazada por

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda (x - x_0)^{k+\lambda} \ , \quad a_0 \neq 0 \ . \tag{15.15}$$

15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs

Para el oscilador armónico encontramos, mediante el método de Frobenius, las dos soluciones linealmente independientes que bastan para describir todo el espacio de soluciones. ¿Es siempre posible ello? La respuesta es no. Ya sabemos un caso en el que no es posible: la ecuación de Laguerre (Sec. 13.4). Cuando introdujimos una solución en la forma de una serie de Taylor, resultó una relación de recurrencia que determinaba todos los coeficientes en términos del primero, y por tanto el método de Frobenius en este caso permite encontrar sólo una solución. Más aún, ni siquiera está asegurado que, una vez determinados todos los coeficientes, la serie sea convergente. En el caso de la ecuación de Laguerre (13.12), a menos que la serie termine y sea en realidad un polinomio, la serie diverge.

¿Bajo qué condiciones es posible encontrar soluciones con el método de Frobenius? La respuesta a esta pregunta involucra a las raíces de la ecuación indicial y el grado de singularidad de los coeficientes en la ecuación diferencial. Consideremos, a modo de ilustración, las siguientes ecuaciones simples:

$$y'' - \frac{6}{x^2} y = 0 \ , \tag{15.16}$$

$$y'' - \frac{6}{x^3} y = 0 \ , \tag{15.17}$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{a^2}{x^2} y = 0 \ , \tag{15.18}$$

$$y'' + \frac{1}{x^2} y' - \frac{a^2}{x^2} y = 0 \ . \tag{15.19}$$

En el primer caso, la ecuación indicial es

$$k^2 - k - 6 = 0 \ ,$$

con soluciones $k = 3$, $k = -2$. El método de Frobenius no da una relación de recurrencia, de modo que las dos soluciones son simplemente x^3 y x^{-2}.

El segundo caso difiere del primero sólo en una potencia de x en el coeficiente de y, pero esto es suficiente para cambiar radicalmente la estructura del problema: la ecuación indicial resulta ser

$$-6a_0 = 0 \ ,$$

lo que es imposible pues $a_0 \neq 0$. Así, vemos que en el caso (15.16), con una singularidad regular en $x = 0$, el método de Frobenius da dos soluciones, pero simplemente no funciona para (15.17), que tiene una singularidad esencial en $x = 0$.

Si ahora agregamos un término con primera derivada en la forma (15.18), se obtiene la ecuación indicial

$$k^2 - a^2 = 0 \ ,$$

sin relación de recurrencia, de modo que las soluciones son x^a y x^{-a}.

Finalmente, si modificamos la ecuación anterior cambiando en 1 la potencia del coeficiente de y', ejemplo (15.19), se tiene la ecuación indicial

$$k = 0 \ ,$$

que arroja sólo un valor de k, y la relación de recurrencia

$$a_{j+1} = a_j \frac{a^2 - j(j-1)}{j+1} \ .$$

A menos que a sea tal que la serie se corte para algún j (es decir, si $a = \pm\sqrt{n(n-1)}$, con $n \in \mathbb{N}$), se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \lim_{j\to\infty} \frac{j(j+1)}{j+1} = \lim_{j\to\infty} \frac{j^2}{j} = \infty \ ,$$

es decir, la solución por serie diverge para todo $x \neq 0$.

Nuevamente nuestra solución tiene problemas con singularidades esenciales.

En general se puede mostrar que al menos una solución en forma de serie de potencias se puede obtener, siempre que la expansión sea en torno a un punto ordinario o un punto singular regular. Este resultado constituye el *Teorema de Fuchs*. Una demostración de este teorema se encuentra en el Capítulo 16. Se mostrará también en ese Capítulo, y parcialmente en la siguiente sección, que la obtención de una o dos soluciones a partir del método de Frobenius depende de las raíces de la ecuación indicial:

- Si las dos raíces de la ecuación indicial son iguales, se obtiene sólo una solución. (Ej.: ecuación de Laguerre.)

- Si las dos raíces difieren en un número no entero, se obtienen dos soluciones linealmente independientes. (Ej.: ecuación de Hermite.)

- Si las dos raíces difieren en un número entero, la mayor de ellas da una solución. La otra puede o no dar una solución dependiendo del comportamiento de los coeficientes. Para el oscilador armónico se obtienen dos soluciones; para la ecuación de Bessel (15.4), sólo una (Cap. 19).

En la siguiente sección desarrollaremos un método para encontrar una segunda solución linealmente independiente en el caso que el método de Frobenius no nos la proporcione.

15.4. Una segunda solución

15.4.1. Forma integral

Para una ecuación diferencial de segundo orden, el espacio de soluciones es un espacio vectorial de dimensión dos. Dos soluciones y_1 y y_2 serán linealmente dependientes si

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0 \ , \tag{15.20}$$

con k_i no todos cero. Inversamente, si $k_1 = k_2 = 0$ es la única solución, entonces las soluciones son linealmente independientes. Derivando (15.20) (y_i es solución de una ecuación de segundo orden, así que al menos es una vez diferenciable):

$$k_1 y_1' + k_2 y_2' = 0 \ . \tag{15.21}$$

(15.20) y (15.21) son un conjunto de ecuaciones lineales, donde los coeficientes k_i son desconocidos. Este sistema tiene solución no nula si

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{15.22}$$

$W(x)$ se denomina el *Wronskiano* de las funciones y_i. Si el Wronskiano es distinto de cero, entonces las funciones y_i son linealmente independientes. Si el Wronksiano es cero en un cierto intervalo, entonces las funciones y_i son linealmente dependientes en ese intervalo.

Así pues, supongamos que, por el método de Frobenius u otro, tenemos una solución $y_1(x)$. El problema es ahora encontrar una segunda solución $y_2(x)$ tal que el Wronskiano de ambas sea distinto de cero. Primero es fácil mostrar (ver Cap. 16) que si la ecuación diferencial tiene la forma general

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \ ,$$

entonces el Wronskiano de dos soluciones y_1, y_2 es

$$W' = -p(x)W \ , \tag{15.23}$$

que podemos reescribir

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx \ ,$$

lo que tiene sentido pues deseamos que $W \neq 0$. Integrando en un intervalo $[a, x]$, para cierto a,

$$\ln \frac{W(x)}{W(a)} = -\int_a^x p(x_1)\, dx_1 \ ,$$

o

$$W(x) = W(a) e^{-\int_a^x p(x_1)\, dx_1} \ . \tag{15.24}$$

Por otro lado,

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \ , \tag{15.25}$$

de modo que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = W(a)\frac{1}{y_1^2} e^{-\int_a^x p(x_1)\, dx_1} \ .$$

Integrando ahora en $[b, x]$, para cierto b,

$$y_2(x) = y_1(x) W(a) \int_b^x \frac{1}{[y_1(x_2)]^2} e^{-\int_a^{x_2} p(x_1)\, dx_1}\, dx_2 + y_1(x) \frac{y_2(b)}{y_1(b)} \ .$$

El segundo término, no entrega nueva información, pues es proporcional a la solución conocida, y no nos sirve para encontrar una linealmente independiente. Lo eliminamos entonces. Además, $W(a)$ es una constante, y como de todos modos $y_1(x)$ está determinada salvo una constante de normalización, ponemos $W(a) = 1$, quedando entonces

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{1}{[y_1(x_2)]^2} e^{-\int^{x_2} p(x_1)\, dx_1}\, dx_2 \ . \tag{15.26}$$

Ésta es la segunda solución, linealmente independiente, que buscamos. Observemos que hemos omitido la evaluación en el límite inferior de las integrales. Al igual que antes, mantener el límite inferior contribuye con un término proporcional a la solución conocida $y_1(x)$.

Ejemplo Para el oscilador armónico, $d^2y/dx^2 + y = 0$, una solución es $y_1 = \operatorname{sen} x$, obteniéndose

$$y_2(x) = \operatorname{sen} x \int^x \frac{dx_2}{\operatorname{sen}^2 x_2} = \operatorname{sen} x(-\cot x) = -\cos x \ .$$

15.4.2. Expansión en serie

Podemos reescribir la segunda solución obtenida (15.26) usando expansiones en serie para $y_1(x)$ y $p(x)$. De acuerdo al teorema de Fuchs, es posible encontrar una solución por serie $y_1(x)$, si $x = 0$ no es singularidad esencial, y es de la forma

$$y_1(x) = x^\alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda \ , \tag{15.27}$$

con α la mayor de las raíces de la ecuación indicial. Por su parte, este teorema exige que, a lo sumo, $p(x)$ diverja como $1/x$, y $q(x)$ como $1/x^2$, en $x = 0$, luego

$$p(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i \ , \tag{15.28}$$

$$q(x) = \sum_{i=-2}^{\infty} q_i x^i \ . \tag{15.29}$$

La ecuación indicial resulta ser:

$$k^2 + (p_{-1} - 1)k + q_{-2} = 0 \ . \tag{15.30}$$

Ésta tiene dos raíces, que podemos escribir

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha \ , \\ k_2 &= \alpha - n \ , \end{aligned} \tag{15.31}$$

con n entero (el único caso problemático es cuando las raíces difieren en un número entero). Entonces

$$(k-\alpha)(k-\alpha+n)=0\ , \tag{15.32}$$

Igualando coeficientes de k en (15.30) y (15.32), tenemos

$$p_{-1}-1=n-2\alpha\ . \tag{15.33}$$

Reemplazando ahora (15.27) en (15.26),

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x \frac{e^{-\int_a^{x_2}\sum_{i=-1}^{\infty}p_i x_1^i\,dx_1}}{x_2^{2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x_2^\lambda\right)^2}\,dx_2\ . \tag{15.34}$$

En el término exponencial aparece la integral

$$\int_a^{x_2}\sum_{i=-1}^{\infty}p_i x_1^i\,dx_1=p_{-1}\ln x_2+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}x_2^{k+1}+f(a)\ ,$$

con f cierta función. Luego

$$\exp\left(-\int_a^{x_2}\sum_{i=-1}^{\infty}p_i x_1^i\,dx_1\right)=e^{-f(a)}x_2^{-p_{-1}}\exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}x_2^{k+1}\right)\ .$$

El denominador en (15.34) se puede reescribir en general:

$$\left[x_2^{2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x_2^\lambda\right)^2\right]^{-1}=x_2^{-2\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\infty}b_\lambda x_2^\lambda\ ,$$

para ciertos coeficientes b_λ. Así, despreciando factores constantes que pueden ser absorbidos en $W(a)$, $y_2(x)$ queda de la forma

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x x_2^{-p_{-1}-2\alpha}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda x_2^\lambda\right)dx_2\ ,$$

es decir, con (15.33),

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x x_2^{-n-1}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda x_2^\lambda\right)dx_2\ ,$$

de modo que

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x\left(c_0x_2^{-n-1}+c_1x_2^{-n}+c_2x_2^{n+1}+\cdots+c_nx_2^{-1}+\cdots\right)dx_2\ . \tag{15.35}$$

Se aprecia entonces que la segunda solución es de la forma $y_1(x)s(x)$, con $s(x)$ una función que tiene dos partes:

- Una serie de potencias, partiendo con x^{-n}.

- Un término logarítmico, proveniente de integrar x^{-1}.

El término logarítmico proviene del término con $\lambda = n$ está presente sólo si $\lambda = n$ en (15.4.2), de modo que aparece sólo si n es un entero, a menos que c_n, por casualidad, resulte ser cero.

Puesto que la menor potencia de $y_1(x)$ es $x^\alpha = x^{k_1}$, se sigue que, obviando el término logarítmico, la menor potencia de y_2 es $x^{\alpha-n} = x^{k_2}$ (independiente de si n es entero o no). Así, podemos escribir la segunda solución (absorbiendo el coeficiente c_0 en la normalización de $y_1(x)$), en la forma

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x^{k_2}\sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda x^\lambda \ . \tag{15.36}$$

En otras palabras, si las dos raíces de la ecuación indicial difieren en un número no entero, las dos soluciones de la ecuación diferencial están dadas por el Ansantz del método de Frobenius, determinadas por las dos raíces de la ecuación indicial [(15.27) y (15.36), sin el término logarítmico]. Si las raíces difieren en un número entero, una primera solución está dada por el método de Frobenius, con la mayor de las raíces, y a la segunda solución se le agrega un término $y_1(x)\ln(x)$.