

Capítulo 8

Ecuaciones de Maxwell y ondas

8.1. Ecuaciones de Maxwell y potenciales

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (8.1.1)$$

Se considerará medios homogéneos, isotrópicos y lineales:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= g \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}\end{aligned}\quad (8.1.2)$$

Hacemos notar que si se aplica el operador divergencia a ambos lados de la ecuación (8.1.1), el lado izquierdo se anula y el lado derecho es la suma de la divergencia de \vec{J} y la derivada temporal de la divergencia de \vec{D} . Pero de (8.1.1c) se sabe que

esta última divergencia es la densidad de carga. Es decir, (8.1.1a) implica directamente que

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8.1.3)$$

y que es la ley de continuidad de la carga y que ya fue vista en §3.1.

Los campos \vec{E} y \vec{B} siempre pueden ser expresados en términos de los potenciales V y \vec{A} ,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (8.1.4)$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Y ellos no cambian si los potenciales son cambiados simultáneamente utilizando una función arbitraria $\Lambda(\vec{r}, t)$ en la forma que sigue

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \Lambda \quad (8.1.5)$$

$$V \rightarrow V - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

como puede comprobarse fácilmente. Esta posibilidad de cambiar los potenciales por otros que describen la misma física se conoce como *libertad de gauge* y en particular suele ser útil escoger los potenciales de tal modo que se cumpla que

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (8.1.6)$$

Las ecuaciones de Maxwell, como ya fue visto en §6.5, permiten

obtener una expresión para la energía,

$$U = \frac{1}{2} \int (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (8.1.7)$$

que conduce a la noción de una ley de continuidad para la densidad de energía $u = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$ con una corriente de energía \vec{S} conocida como vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (8.1.8)$$

8.2. Condiciones de Borde

A cada ecuación de Maxwell se le puede asociar condiciones de borde que deben cumplirse en la vecindad inmediata a la interfaz entre dos materiales.

Ya se ha visto que la ecuación (8.1.1d) implica que

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (8.2.1)$$

y que la ecuación (8.1.1b) implica

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (8.2.2)$$

También se ha visto que (8.1.1c) conduce a

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (8.2.3)$$

La ecuación más complicada es (8.1.1a). Para estudiar el comportamiento de los campos normales a la interfaz es más fácil analizar la

ecuación de continuidad (8.1.3). En una deducción enteramente análoga a la que condujo a (1.10.5) se llega a

$$J_{1n} - J_{2n} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (8.2.4)$$

Las componentes de \vec{H} tangenciales a la interfaz satisfacen

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (8.2.5)$$

porque se puede demostrar que la corriente de desplazamiento en (8.1.1a) no interviene en este caso.

El caso en que los campos y las corrientes son sinusoidales tiene una gran importancia tanto por el interés en corrientes alternas como en las ondas electromagnéticas. Veamos entonces en forma especial el caso en que campos, densidades y corrientes tienen un factor exp

$(-i\omega t)$ suponiendo que (8.1.2) se satisface.

Las condiciones (8.2.3) y (8.2.4) pueden reescribirse

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} &= \sigma \\ g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} &= i\omega\sigma\end{aligned}\quad (8.2.6)$$

En la última ecuación se ha usado que σ tiene su dependencia temporal en un factor $\exp(-i\omega t)$. Si se elimi-

na σ de estas ecuaciones se obtiene:

$$\left(\varepsilon_1 + \frac{i g_1}{\omega}\right) E_{1n} = \left(\varepsilon_2 + \frac{i g_2}{\omega}\right) E_{2n} \quad (8.2.7)$$

La conclusión es que, si bien el campo eléctrico es en general discontinuo en la interfaz, existe esta cantidad compleja $(\varepsilon_a + \frac{i g_a}{\omega}) E_{an}$ que es continua.

8.3. Ondas electromagnéticas en medios neutros

8.3.1. La ecuación de onda

En esta sección se verá que las ecuaciones de Maxwell implican la existencia de ondas. También se verá que en un medio con conductividad g no nula la amplitud de las ondas electromagnéticas decrece exponencialmente a medida que penetra en el medio.

Para simplificar el análisis se supondrá un medio lineal, homogéneo y libre de cargas:

$$\rho(\vec{r}, t) = 0 \quad (8.3.1)$$

Las ecuaciones de Maxwell en el caso actual se reducen a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu g \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (8.3.2)$$

Hacemos notar que el último término de la última ecuación representa la corriente de desplazamiento. Si se toma el rotor de la última ecuación se llega a

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \mu g \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.3.3)$$

Similarmente, tomando el rotor de $\nabla \times \vec{E}$ se obtiene una ecuación de idéntica forma que la anterior pero que satisface el campo eléctrico,

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8.3.4)$$

El problema entonces consiste en encontrar campos \vec{B} y \vec{E} que satisfagan las ecuaciones anteriores y también las ecuaciones de Maxwell.

8.3.2. La onda ideal

Consideremos primero la ecuación de la forma

$$\nabla^2 f(\vec{r}, t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (8.3.5)$$

es trivialmente satisfecha por todo $f(\vec{r}, t)$ que puede ser escrito como una función de un solo argumento Ω , con

$$\Omega = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \quad (8.3.6)$$

con

$$k^2 \equiv \vec{k} \cdot \vec{k} = \varepsilon\mu\omega^2 \quad (8.3.7)$$

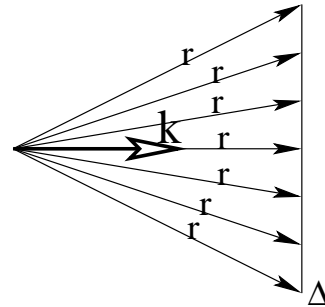
En efecto, si se escribe forma

$$f(\vec{r}, t) = F(\Omega) \quad (8.3.8)$$

con F es cualquier función continua dos veces diferenciable entonces es fácil ver que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\omega F' \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \omega^2 F'' \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= k_x F' \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= k_x^2 F'' \end{aligned}$$

lo que hace evidente la necesidad de exigir (8.3.7).



Si en la ecuación (8.3.6) se escoge un valor fijo Ω_0 y un t fijo, los vectores \vec{r} que satisfacen esa ecuación definen un plano como el que muestra la figura anterior. El plano es perpendicular al vector \vec{k} . Si se considera ahora un t algo mayor al anterior, la figura cambia porque el plano que se define está desplazado, en la dirección \vec{k} , una distancia Δ del anterior. Es cómodo escoger el eje X en la dirección de \vec{k} porque entonces $\vec{k} = (k, 0, 0)$ y la ecuación (8.3.6) se reduce a $kx = \omega t + \Omega_0$. Es decir, es satisfecha por todos los vectores \vec{r} que tengan a este x como su primera componente. Si se incrementa $t \rightarrow t + \epsilon$ entonces se satisface

$$k(x + \Delta) = \omega(t + \epsilon) + \Omega_0$$

Vacuum	1.00000
Air (STP).....	1.00029
Acetone	1.36
Alcohol	1.329
Chromium Oxide	2.705
Copper Oxide	2.705
Crown Glass	1.52
Diamond	2.417
Emerald	1.57

Ethyl Alcohol	1.36
Flourite	1.434
Fused Quartz	1.46
Glass	1.5
Ice	1.309
Iodine Crystal	3.34
Lapis Lazuli	1.61
Liquid Carbon Dioxide ...	1.20
Polystyrene	1.55
Quartz 1	1.644
Quartz 2	1.553
Ruby	1.77
Sapphire	1.77
Sodium Chloride (Salt) 1	1.544
Sodium Chloride (Salt) 2	1.644
Sugar Solution (30%)	1.38
Sugar Solution (80%)	1.49
Topaz	1.61
Water (20 C)	1.333

Índice de refracción de algunas sustancias.

de donde se desprende que

$$k\Delta = \omega \epsilon$$

lo que equivale a decir que el plano se mueve a velocidad

$$v_f = \frac{\Delta}{\epsilon} = \frac{\omega}{k} \quad (8.3.9)$$

pero $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ de donde se ve que esta solución representa una forma F caracterizada por una velocidad de fase

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (8.3.10)$$

que apunta en la dirección del vector de onda \vec{k} .

De la expresión anterior se tiene que

$$\begin{aligned} k^2 &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} \omega^2 \\ &= \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

donde el índice de refracción es

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (8.3.12)$$

y c representa la velocidad de la luz en el vacío: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. Esta definición de n permite escribir la velocidad de fase en la forma $v = \frac{c}{n}$. En vacío $v = c$.

La longitud de onda λ se obtiene de la relación $v_f = \lambda \nu$ donde ν es la frecuencia. En estos apuntes se usa ω en lugar de ν : $\omega = 2\pi \nu$, por lo tanto

$$\lambda = \frac{2\pi c}{n \omega} = \frac{2\pi}{k} \quad (8.3.13)$$

8.3.3. Longitud de penetración

A continuación se construirá una solución particular, de la forma (8.3.8) de la ecuaciones (8.3.3) y

(8.3.4). Para comenzar se plantea buscar una solución de la forma de

onda plana

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad (8.3.14)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$$

donde \vec{E}_0 y \vec{B}_0 son vectores constantes (en general complejos) que juegan el papel de amplitudes, mientras que \vec{k} apunta en la dirección de propagación de la onda.

La ecuación de Maxwell (8.3.2) implica directamente que

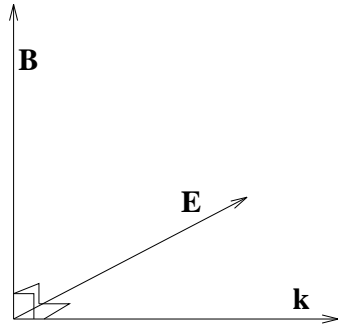
$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \quad (8.3.15)$$

y la ecuación (8.3.2d) da

$$i\vec{k} \times \vec{B}_0 = \mu(g - i\varepsilon\omega)\vec{E}_0 \quad (8.3.16)$$

que implica que

$$\vec{E}_0 = \frac{i\vec{k} \times \vec{B}_0}{\mu(g - i\omega)} \quad (8.3.17)$$



Al reemplazar esta expresión para \vec{E}_0 en la ecuación (8.3.15) se obtiene, después de algunas manipulaciones algebraicas, que

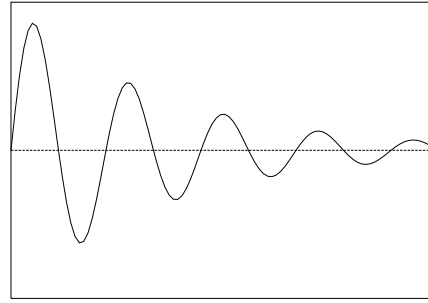
$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 + \frac{ig}{\varepsilon\omega} \right) \quad (8.3.18)$$

Puesto que k^2 es complejo entonces el vector \vec{k} mismo es complejo:

$$\vec{k} \equiv k\hat{k} = (\alpha + i\beta)\hat{k} \quad (8.3.19)$$

viéndose que los campos (8.3.14) tiene un factor exponencial de la forma

$$e^{-\beta\hat{k} \cdot \vec{r}} e^{i\alpha\hat{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad (8.3.20)$$



La amplitud de la onda disminuye exponencialmente a medida que penetra un medio conductor.

La primera de estas dos exponenciales es real y es un factor que describe la atenuación de la onda electromagnética. El inverso de β tiene dimensiones de longitud y se llama longitud de penetración:

$$\delta \equiv \frac{1}{\beta} \quad (8.3.21)$$

En general puede observarse de (8.3.17) que si β es no nulo, existe un desfase entre los dos campos.

A continuación veremos dos casos extremos: el caso de un conductor pobre (g pequeño) y el caso de un buen conductor. En ambos casos g debe compararse con $\varepsilon\omega$

En el caso de un medio conductor pobre, $k \equiv \sqrt{k^2}$ queda bien aproximado por $\omega\sqrt{\mu\varepsilon}(1 + \frac{ig}{2\varepsilon\omega})$. De aquí se extrae β y resulta directamente un factor de penetración

$$\delta = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (8.3.22)$$

En este caso la distancia de penetración no depende de la frecuencia ω y como g es chico la penetración puede ser muy grande.

En el caso de un buen conductor se debe suponer que $g \gg \varepsilon\omega$ lo que hace que la parte real de k^2 sea despreciable y se tenga aproximadamente que $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{g/(\varepsilon\omega)}\sqrt{i}$ y como $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ entonces se obtiene una distancia de penetración

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu g \omega}} \quad (8.3.23)$$

En este caso la distancia de penetración es chica y mientras más alta

sea la frecuencia más pequeña es la penetración.

Lo anterior puede obtenerse fácilmente si se observa que (8.3.18) y (8.3.19) implican que

$$\beta = \sqrt{\sqrt{\varepsilon^2\omega^2 + g^2} - \varepsilon\omega} \quad (8.3.24)$$

La distancia de penetración δ es la distancia en la que la amplitud de los campos eléctricos y magnéticos disminuyen en un factor $\frac{1}{e}$, es decir, disminuyen alrededor de un tercio. El cobre tiene una conductividad $g \approx 6 \times 10^7 \frac{1}{\text{m Ohm}}$ lo que implica que para la corriente alterna doméstica esta distancia sea de alrededor de cerca de 9mm, (casi 1cm), lo que garantiza que la corriente es muy uniforme en toda la sección de un conductor normal. En cambio para frecuencias tipo VHF, por ejemplo 50MHz, $\delta \approx 9 \times 10^{-3} \text{mm}$. Esto hace que la resistencia aumente notoriamente a estas altas frecuencias.

8.4. Ondas planas en medios aislantes y neutros

8.4.1. Polarización

En este caso las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en forma muy sencilla,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.4.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

y tienen soluciones (8.3.14) que describen ondas planas con

$$k = \frac{n\omega}{c} \quad (8.4.2)$$

Y por lo visto en la sección anterior se debe cumplir que

$$\vec{B}_0 = \frac{n}{c} \hat{k} \times \vec{E}_0 \quad (8.4.3)$$

$$\vec{E}_0 = -\frac{c}{n} \hat{k} \times \vec{B}_0$$

lo que formalmente establece que los tres vectores involucrados \vec{E}_0 , \vec{B}_0 y \hat{k} forman un triedro de vectores mutuamente ortogonales.

En general tanto \vec{E}_0 como \vec{B}_0 son vectores complejos. Conviene entonces definir una base (\hat{p}, \hat{s}) de vectores unitarios (y reales) perpendiculares al vector \hat{k} que indica la dirección de propagación. Con esta base real $(\hat{p}, \hat{s}, \hat{k})$ se puede escribir

$$\vec{E}_0 = \hat{p}E_p e^{i\phi_p} + \hat{s}E_s e^{i\phi_s} \quad (8.4.4)$$

con amplitudes reales E_p y E_s . Puesto que el vector campo eléctrico (complejo) completo es $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$, entonces el vector físico, que es la parte real, es

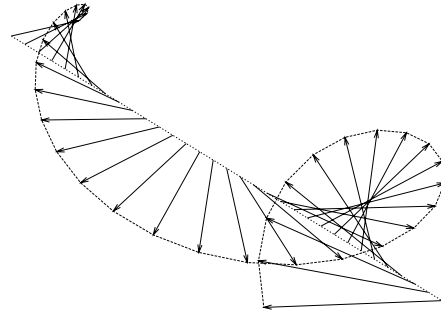
$$\begin{aligned} & \hat{p}E_p \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_p) \\ & + \hat{s}E_s \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_s) \end{aligned}$$

Sin embargo, basta escoger apropiadamente el origen del tiempo para lograr que una de estas fases ϕ_k sea nula. Lo convencional es tomar

$\phi_s = 0$, lo que no resta generalidad al formalismo. En tal caso, el campo eléctrico físico es entonces

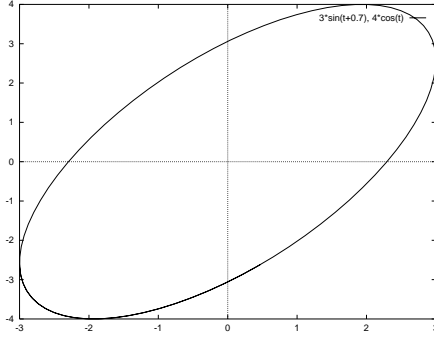
$$\begin{aligned} \vec{E}^{\text{fís}} = & \hat{p}E_p \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_p) \\ & + \hat{s}E_s \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

Al haber un desfase entre las componentes \hat{s} y \hat{p} del campo eléctrico, “la punta” del campo eléctrico describe, en el plano (\hat{s}, \hat{p}) una elipse como describen las figuras adjuntas. En este caso general se dice que la onda tiene “polarización elíptica”. Hay casos particulares, como por ejemplo, $\phi_p = 0$ en que se tiene *polarización lineal* y si se da que tanto $\phi_p = \frac{\pi}{2}$ como que $E_p = E_s$ la *polarización en circunferencial*.



El campo eléctrico de la onda que avanza en general va girando.

En el caso general la elipse tiene una excentricidad que está directamente ligada a E_p/E_s y a ϕ_p . Si la elipse degenera en una línea se tiene polarización lineal pero la polarización general es elíptica.



El vector campo eléctrico describe, en el caso general, una elipse en el plano $\hat{s} \hat{p}$ ortogonal a \hat{k} .

8.4.2. Energía y flujo de ella

La densidad media de energía de la onda se obtiene calculando $\bar{u} = \frac{1}{2} \left(\epsilon \bar{E}^2 + \frac{1}{\mu} \bar{B}^2 \right)$, donde la barra indica promedio en el tiempo. Puesto que el promedio temporal de $\sin^2(a + bt)$ es $\frac{1}{2}$, se obtiene que

$$\overline{(E^{\text{fis}})^2} = \frac{1}{2} (E_p^2 + E_s^2)$$

De la expresión (8.4.5) para \vec{E}^{fis} se puede construir $\vec{B}^{\text{fis}} = \frac{n}{c} \hat{k} \times \vec{E}^{\text{fis}}$ que conduce a

$$\overline{(B^{\text{fis}})^2} = \left(\frac{n}{c} \right)^2 \overline{(E^{\text{fis}})^2}$$

En lo que sigue se suprime el índice. La energía media es

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\epsilon}{2} \left(\overline{E^2} + \frac{1}{\epsilon \mu} \overline{B^2} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \left(\overline{E^2} + \frac{c^2}{n^2} \overline{B^2} \right) \\ &= \frac{\epsilon}{2} \left(\overline{E^2} + \overline{E^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \epsilon \overline{E^2} \quad (8.4.6)$$

El vector de Poynting, que da la magnitud y dirección del flujo de energía electromagnética es

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \\ &= \frac{n}{\mu c} \vec{E} \times (\hat{k} \times \vec{E}) \\ &= \frac{n}{\mu c} E^2 \hat{k} \end{aligned}$$

De donde se desprende que el flujo promedio de energía es

$$\bar{\vec{S}} = \frac{n}{2\mu c} (E_p^2 + E_s^2) \hat{k} \quad (8.4.7)$$

8.5. Reflexión y refracción

8.5.1. Ángulos

Consideremos el paso de una onda electromagnética plana de un medio '1' a un medio '2'. La onda incidente (\vec{E}_1, \vec{B}_1) implica dos ondas emergentes: una onda reflejada y otra refractada.

Se escogerá ejes coordenados de modo que el plano XY coincida con la interfaz. Suponemos que la onda incidente se propaga en la dirección \hat{k}_1 , vector contenido en el plano XZ . El plano interfacial lo identificamos con el plano $[XY, z = 0]$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad (8.5.1)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} \hat{k}_1 \times \vec{E}_1$$

La onda refractada se caracteriza por

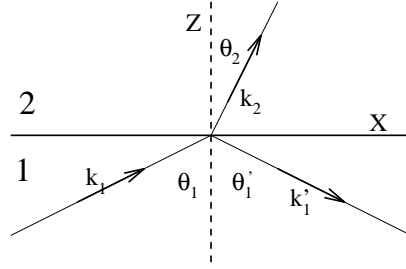
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad (8.5.2)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{n_2}{c} \hat{k}_2 \times \vec{E}_2$$

y la onda reflejada es descrita con

$$\vec{E}'_1 = \vec{E}'_{10} e^{i\vec{k}'_1 \cdot \vec{r} - i\omega t} \quad (8.5.3)$$

$$\vec{B}'_1 = \frac{n_1}{c} \hat{k}'_1 \times \vec{E}'_1$$



El plano de incidencia contiene al vector \vec{k}_1 y a la normal a la interfaz. En esta figura se escogió $\theta_2 < \theta_1$ lo que corresponde a $n_1 < n_2$.

El subíndice indica el medio en el cual se propaga la onda. Los tres vectores \vec{k}_a implicados están en un mismo plano que se denomina *plano de incidencia*. En la figura anterior coincide con el plano del papel y es el plano XZ.

Para que las condiciones de borde se puedan cumplir en todo instante, la frecuencia angular ω debe ser común a todas las ondas.

Para que las condiciones de borde se puedan cumplir en todo el plano interfacial $[XY, z = 0]$ es necesario que

$$(\vec{k}_1 \cdot \vec{r})_{z=0} = (\vec{k}_2 \cdot \vec{r})_{z=0} = (\vec{k}'_1 \cdot \vec{r})_{z=0} \quad (8.5.4)$$

lo que equivale a decir que los vectores de onda \vec{k}_a tienen igual proyección en el plano XY,

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 = k'_1 \sin \theta'_1 \quad (8.5.5)$$

Pero cada uno de estos \vec{k}_a tiene magnitud $\frac{n_a \omega}{c}$ con el índice de refracción n_a del medio que se trate (ver (8.3.11)), lo que implica la ley de Snell para la reflexión

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (8.5.6)$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

La ley anterior establece que el ángulo de reflexión θ'_1 es igual al de incidencia, mientras que el ángulo de refracción θ_2 queda determinado por el de incidencia y el cociente entre los índices de refracción.

Reflexión total

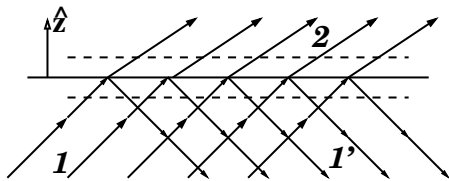
Un caso especial puede ocurrir cuando $n_1 > n_2$ porque se da la posibilidad que el ángulo θ_2 pueda alcanzar el valor $\pi/2$, es decir, si $n_1 > n_2$ entonces existe un valor crítico θ_1^c

$$\sin \theta_1^c = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.5.7)$$

tal que $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Para todo $\theta_1 > \theta_1^c$ se produce reflexión total. Este caso se puede presentar para luz que proviene de una fuente bajo el agua ($n_{\text{agua}} > n_{\text{aire}}$): si la luz llega a la superficie con un ángulo mayor al ángulo crítico, la superficie refleja totalmente, como si fuera un espejo perfecto. En efecto, $n_{\text{agua}}(20^\circ\text{C}) = 1,333$ mientras que $n_{\text{aire}} = 1,0003$. Una utilización práctica de la reflexión total recién descrita es la fibra óptica.

8.5.2. Conservación de la energía

La figura que sigue representa una onda plana 1 que llega desde un medio 1 a la interfaz plana con un medio 2. Parte de la onda se refleja (1') y la otra se refracta (2). Estas son las ondas planas descritas por (8.5.1), (8.5.2) y (8.5.3). Puesto que ellas se propagan en medios aislantes ($g = 0$), son ondas permanentes (porque permanecen en el tiempo) y se extienden por todo el espacio. Esto hace que la energía media que ellas tienen en cada elemento de volumen sea uniforme y constante.



Si la ecuación de energía

(6.5.11): $\partial u / \partial t + \nabla \cdot \vec{S} = 0$ se integra en el volumen que encierran dos planos paralelos a la interfaz se obtiene, puesto que $dU/dt = 0$ que $\int_{\text{Vol}} \nabla \cdot \vec{S} dV = \oint_{\text{Sup}} \vec{S} \cdot d\vec{S}$. La última integral es sobre las dos superficies representadas por las líneas a trazos en la figura y los elementos de superficie apunta: en la de abajo hacia abajo ($-\hat{z}$) y en la de arriba hacia arriba (\hat{z}). Esto da que el flujo por unidad de área sea

$$(\vec{S}_1 - \vec{S}_{1'}) \cdot \hat{z} = \vec{S}_2 \cdot \hat{z}$$

Puesto que los vectores de Poynting tienen la forma $\vec{S}_a = \frac{n_a}{\mu_0 c} E^2 \hat{k}_a$, y puesto que los \hat{k}_a están dados por

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= \hat{n} \cos \theta_1 + \hat{i} \sin \theta_1 \\ \hat{k}'_1 &= -\hat{n} \cos \theta_1 + \hat{i} \sin \theta_1 \\ \hat{k}_2 &= \hat{n} \cos \theta_2 + \hat{i} \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (8.5.8)$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$n_1 (E_{10}^2 - E_{10'}^2) \cos \theta_1 = n_2 E_2^2 \cos \theta_2 \quad (8.5.9)$$

que veremos que se satisface en los dos casos genéricos que se estudian a continuación en §8.5.3.

8.5.3. Amplitudes

La ley de Snell (8.5.6) nada dice sobre cuánto de la onda se refleja y cuánto se refracta. Tales proporciones están dadas por las amplitudes E_{a0} con $a = 1, 1', 2$ en la forma que se verá a continuación.

Para poder determinar la relación entre las amplitudes de la onda reflejada y refractada es necesario tomar en cuenta las condiciones de borde estudiadas en §8.2.

Lo primero que hay que comprender es la forma de imponer las condiciones de borde definidas en §8.2 que deben satisfacer los campos en la vecindad inmediata de la interfaz '1'-'2'. Nótese que si \hat{n} es el vector unitario normal a la interfaz en un punto dado, entonces $\hat{n} \times \vec{E}$ es un vector paralelo al plano interfacial, es decir, es la parte tangencial del campo. De acuerdo a la figura al comienzo de esta sección el campo en el medio '1' es una superposición del campo incidente y del campo reflejado. Por lo tanto la forma de imponer la condición sobre las componentes tangenciales E_t , (8.2.2), es

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_1') = \hat{n} \times \vec{E}_2 \quad (8.5.10)$$

Similarmente (8.2.5) para el caso actual (sin corrientes) se convierte en

$$\frac{1}{\mu_1} \hat{n} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_1') = \frac{1}{\mu_2} \hat{n} \times \vec{B}_2 \quad (8.5.11)$$

Para imponer las condiciones sobre las componentes normales sencillamente se considera el producto escalar con el vector normal. Así (8.2.1) es

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_1') = \hat{n} \cdot \vec{B}_2 \quad (8.5.12)$$

y, cuando no hay cargas en la interfaz, (8.2.3) es

$$\varepsilon_1 \hat{n} \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_1') = \varepsilon_2 \hat{n} \cdot \vec{E}_2 \quad (8.5.13)$$

En las condiciones (8.5.12) y (8.5.13) se debe reemplazar al campo magnético usando (8.5.1), (8.5.2) y (8.5.3) de modo que las cuatro ecuaciones anteriores se pueden expresar como condiciones sobre el campo eléctrico. (Naturalmente que se puede hacer lo inverso y expresar todo en función del campo magnético.)

Estas condiciones determinan totalmente las amplitudes reflejada y refractada en función de los datos de la onda incidente y de ambos índices de refracción. Pero la respuesta debe darse en forma separada para dos casos diferentes: \vec{E}_1 es perpendicular al plano de incidencia (**caso s**) y \vec{E}_1 es paralelo al plano de incidencia (**caso p**). Los nombres "s" y "p" se deben a que en el estudio de reflexión y refracción se acostumbra a tomar al vector \hat{s} perpendicular al plano de incidencia mientras que \hat{p} está contenido en el plano de incidencia. El nombre del caso especifica al vector (\hat{s} o \hat{p}) al cual es paralelo \vec{E} . Con los distintos \hat{k}_a se forman triédros ortonormales que satisfacen

$$\hat{p}_a = \hat{k}_a \times \hat{s} \quad (8.5.14)$$

El caso general tiene polarización elíptica y es una superposición de

los dos casos anteriores. Esto significa que un \vec{E}_1 , debe descomponerse en una suma de un vector como en que es mezcla lineal de \hat{p} y \hat{s} y las dos partes sufren efectos diferentes. Los resultados que siguen (restringidos al caso $\mu_1 = \mu_2$) se expresan en términos de los ángulos θ_1 y θ_2 , pero el segundo se puede despejar de

la ley de Snell (8.5.6).

Puesto que para una gran cantidad de materias la permeabilidad magnética es muy cercana a la del vacío: μ_0 , entonces en lo que sigue se supondrá que en efecto, $\mu = \mu_0$. De otro modo surgen expresiones algo más complicadas.

Caso s

En la tabla que sigue se escribe los campos \vec{E}_a y \vec{B}_a de cada una de las tres ondas (incidente, reflejada y refractada).

	\hat{k}_a	\vec{E}_a	$\vec{B}_a = \frac{n_a}{c} \hat{k}_a \times \vec{E}_a$
1	$\hat{n} \cos \theta_1 + \hat{i} \sin \theta_1$	$\hat{s} E_1$	$\frac{n_1}{c} [-\hat{i} \cos \theta_1 + \hat{n} \sin \theta_1] E_1$
1'	$-\hat{n} \cos \theta_1 + \hat{i} \sin \theta_1$	$-\hat{s} E'_1$	$\frac{n_1}{c} [-\hat{i} \cos \theta_1 - \hat{n} \sin \theta_1] E'_1$
2	$\hat{n} \cos \theta_2 + \hat{i} \sin \theta_2$	$\hat{s} E_2$	$\frac{n_2}{c} [-\hat{i} \cos \theta_2 + \hat{n} \sin \theta_2] E_2$

En esta tabla se ha dado amplitudes arbitrarias a los campos, pero en lo que sigue se muestra que, dada la magnitud E_1 , las otras amplitudes son fijadas por las condiciones de borde.

Las condiciones de borde $E_{1t} = E_{2t}$ conduce en este caso a

$$E_1 - E'_1 = E_2$$

y la condición $B_{1t} = B_{2t}$ lleva a

$$n_1 \cos \theta_1 (E_1 + E'_1) = n_2 \cos \theta_2 E_2$$

Estas dos condiciones (y no hay otras) permiten deducir en pocos pasos algebraicos que

$$E'_1 = \frac{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2 + n_1 \cos \theta_1} E_1 \quad (8.5.15)$$

y

$$E_2 = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2 + n_1 \cos \theta_1} E_1 \quad (8.5.16)$$

El caso particular de incidencia normal, es decir, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, implica

$$E'_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_1, \quad E_2 = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_1 \quad (\text{incidencia normal})$$

que muestra, en particular, que la reflexión desaparece si $n_1 = n_2$ (la interfaz desaparece realmente).

Si $\sin \theta_2 \neq 0$ se puede proceder a eliminar n_2 gracias a la ley de Snell: $n_2 = \frac{n_1 \sin \theta_1}{\sin \theta_2}$, que permite reducir las expresiones anteriores a

$$\begin{aligned} E'_1 &= \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} E_1 \\ E_2 &= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} E_1 \end{aligned} \quad (8.5.17)$$

Caso p

En este caso el campo eléctrico está contenido en el plano de incidencia y el campo magnético es perpendicular a él. La tabla que se debe usar para tener los campos antes de imponer las condiciones de borde es:

	\hat{k}_a	\hat{p}_a	\vec{E}_a	$\vec{B}_a = \frac{n_a}{c} \hat{k} \times \vec{E}_a$
1	$\hat{n} \cos \theta_1 + \hat{i} \sin \theta_1$	$-\hat{i} \cos \theta_1 + \hat{n} \sin \theta_1$	$\hat{p}_1 E_1$	$-\frac{n_1}{c} \hat{s} E_1$
1'	$-\hat{n} \cos \theta_1 + \hat{i} \sin \theta_1$	$\hat{i} \cos \theta_1 + \hat{n} \sin \theta_1$	$\hat{p}'_1 E'_1$	$-\frac{n_1}{c} \hat{s} E'_1$
2	$\hat{n} \cos \theta_2 + \hat{i} \sin \theta_2$	$-\hat{i} \cos \theta_2 + \hat{n} \sin \theta_2$	$\hat{p}_2 E_2$	$-\frac{n_2}{c} \hat{s} E_2$

Las condiciones de borde ahora son

$$\begin{aligned} (-E_1 + E'_1) \cos \theta_1 &= -E_2 \cos \theta_2 \\ n_1 (E_1 + E'_1) &= n_2 E_2 \end{aligned}$$

que conducen a

$$\begin{aligned} E'_1 &= \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} E_1 \\ E_2 &= \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} E_1 \end{aligned} \quad (8.5.18)$$

Eliminando n_2 ellas se reducen a

$$\begin{aligned} E_1' &= \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} E_1 \\ E_2 &= \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} E_1 \end{aligned} \quad (8.5.19)$$

Caso p especial: refracción total

Hay varios casos especiales de los cuales se menciona uno. Si $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ la ecuación (8.5.19b) implica que $E_1' = 0$ de modo que *no hay onda reflejada*, toda la energía es pasada al segundo medio. La condición anterior define un ángulo especial, el *ángulo de Brewster*

$$\tan \theta_1^B = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.5.20)$$

para el cual toda la onda pasa al medio 2.

Si una onda electromagnética plana con polarización elíptica incide sobre un plano interfacial justo con el ángulo de Brewster, se obtiene una onda reflejada solo por la componente del caso **s** para el que no existe un ángulo especial. Esa onda reflejada tiene una polarización lineal correspondiente al caso **s**.

8.5.4. Reflexión total en una superficie conductora perfecta

El campo eléctrico en un conductor perfecto es nulo: $\vec{E}_2 = 0$ y, de

(8.5.2), esto implica $\vec{B}_2 = 0$, es decir, en este caso no hay onda en el medio 2, la onda es totalmente reflejada.

La condición (8.5.13) implica que $\vec{E}_1' \cdot \hat{n} = -\vec{E}_1 \cdot \hat{n}$ y la condición (8.5.10) implica $\vec{E}_1' \times \hat{n} = -\vec{E}_1 \times \hat{n}$. Ambas condiciones juntas implican que

$$\vec{E}_1' = -\vec{E}_1 \quad (8.5.21)$$

El campo eléctrico se invierte en la reflexión total: no hay componentes privilegiadas, no ha polarización.

Ejemplo

Consideremos el caso de una onda electromagnética plana entre dos placas planas paralelas y conductoras separadas por una distancia a . Escogiendo al eje Z perpendicular a las placas, y ellas en $z = 0$ y $z = a$, se debe imponer que el campo se anule para ambos valores de z .

Puesto que

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_0 e^{i(kx \cos \theta + z k \sin \theta - \omega t)} \\ \vec{E}_1' &= -\vec{E}_0 e^{i(kx \cos \theta - z k \sin \theta - \omega t)} \end{aligned}$$

el campo total es la suma de ambos,

$$\vec{E}_1^{\text{tot}} = \vec{E}_0 e^{i(kx \cos \theta - \omega t)} 2i \sin(2z \sin \theta) \quad (8.5.22)$$

Exigir que el campo se anule en $z = 0$ y $z = a$ equivale a imponer que $\sin(ak \sin \theta) = 0$, es decir, $ak \sin \theta = n\pi$ lo que finalmente da

$$\sin \theta = \frac{n\pi}{ka}$$

Dado k , es decir, dada la frecuencia (o equivalentemente la longitud de onda), hay sólo algunos ángulos permitidos para que la onda se pueda propagar rebotando en ambas paredes.

Cuando luz blanca (mezcla de ondas electromagnéticas de un amplio espectro de frecuencias) incide con cierto ángulo sobre una delgada capa de aceite que flota en agua, parte de las ondas se refleja múltiples veces en el interior de la capa de aceite antes de volver a salir al aire (otra parte se va hacia el agua). Por lo que se ha visto más arriba, si θ está fijo, esos botes solo se pueden dar para algunos valores fijos de k , es decir sólo para algunas longitudes de onda (colores). El resultado final es que en la luz reflejada se puede detectar bandas de diversos colores.