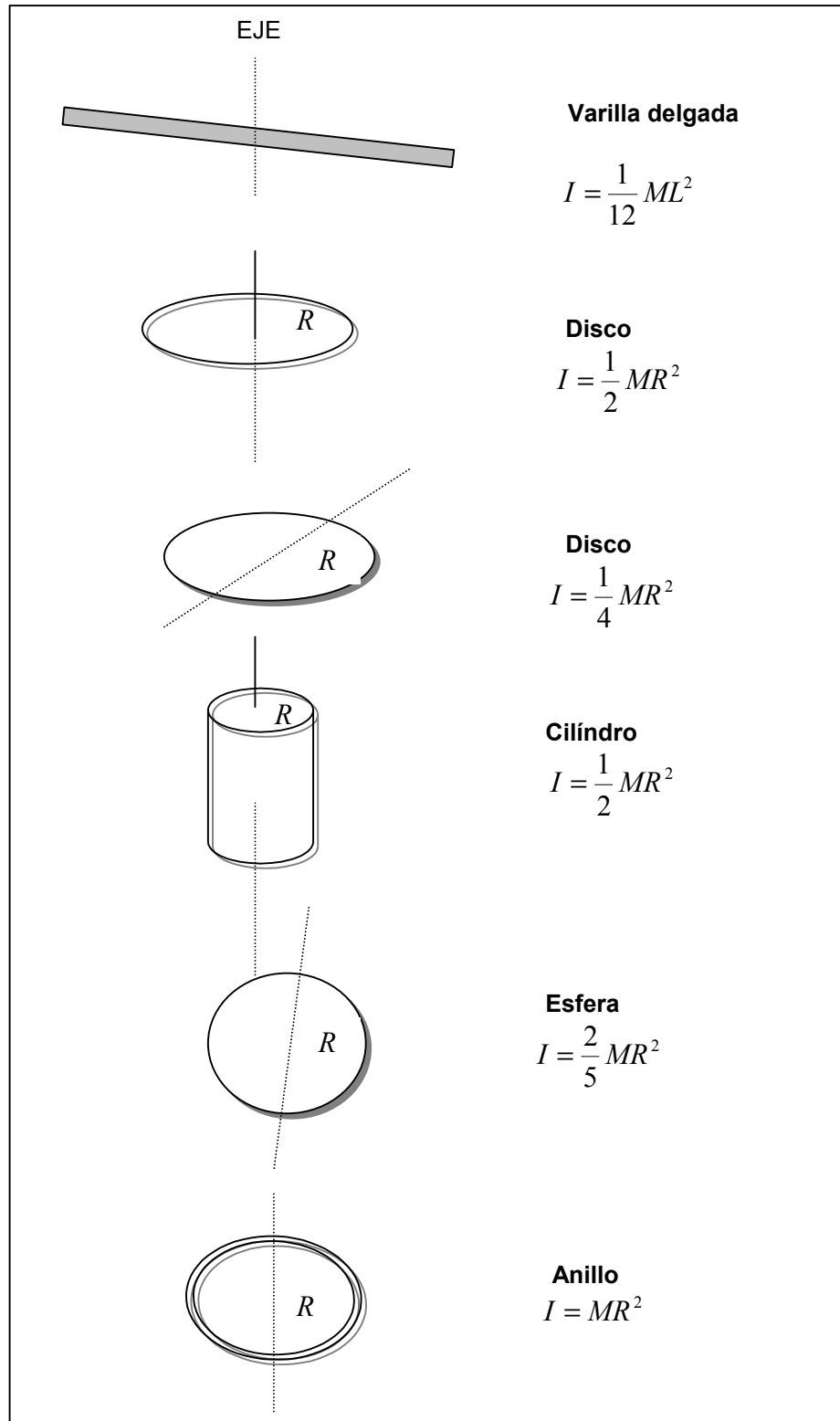


Momentos de Inercia de cuerpos sólidos:

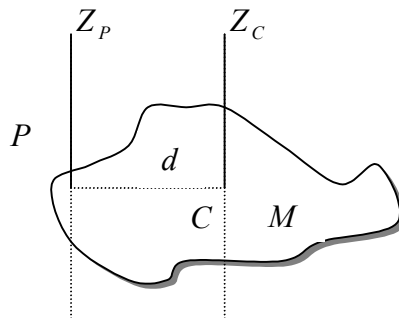


Observación:

Los momentos de inercia con respecto a ejes paralelos están relacionados por una relación muy simple. Sea Z_P un eje paralelo arbitrario que pasa por un punto P, paralelo al eje que pasan por el centro de un cuerpo representado en la tabla anterior (Z_C). Si d es la separación entre los dos ejes, la siguiente relación, denominada *Teorema de Steiner*, tiene lugar:

$$I_P = I_C + Md^2, \quad (5.18)$$

donde I_P e I_C son los momentos de inercia del cuerpo con respecto a Z y Z_C , respectivamente, y M es la masa del cuerpo.



Ecuación de la dinámica de rotación:

La ecuación, la cual es equivalente a la segunda ley de Newton en rotación es

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}. \quad (5.19)$$

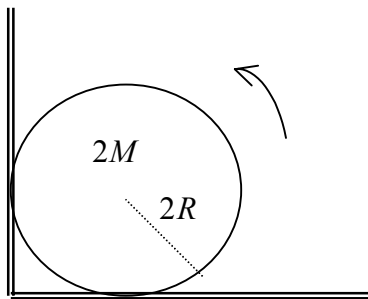
Simplemente se ha transformado la segunda ley de Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, a términos de rotación $\vec{M} = I\vec{\alpha}$. Aquí la suma de los momentos \vec{M} es análoga a la suma de las fuerzas \vec{F} , el momento de inercia I es análogo a la masa m , y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ es análoga a la aceleración lineal \vec{a} .

Para un problema en dos dimensiones, los momentos están dirigidos según el eje fijo de rotación, es decir, sobre una misma línea. Las fuerzas y los momentos son vectores, pero cuando se dirigen según una línea fija, sólo pueden tener dos sentidos. Tomando un sentido (+) y el otro como (-), podemos manejar estos vectores algebraicamente y tratar sólo con sus magnitudes.

Ejemplos:

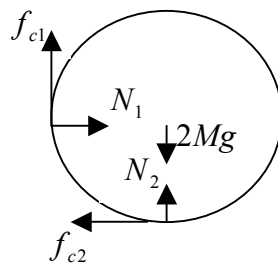
1. Un cilindro macizo homogéneo, de masa $2M$ y radio $2R$ que está girando con rapidez angular constante se coloca en una esquina, con cuya paredes tiene un coeficiente de rozamiento μ_C .
 - a. Haga un diagrama de todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro,

b. Determine la aceleración angular con que frena el cilindro.



Solución:

D.C.L. Cilindro:



Puesto que el cilindro no se traslada:

$$\sum F_X : N_1 - f_{c2} = 0, \sum F_Y : f_{c1} + N_2 - 2Mg = 0. \quad (1)$$

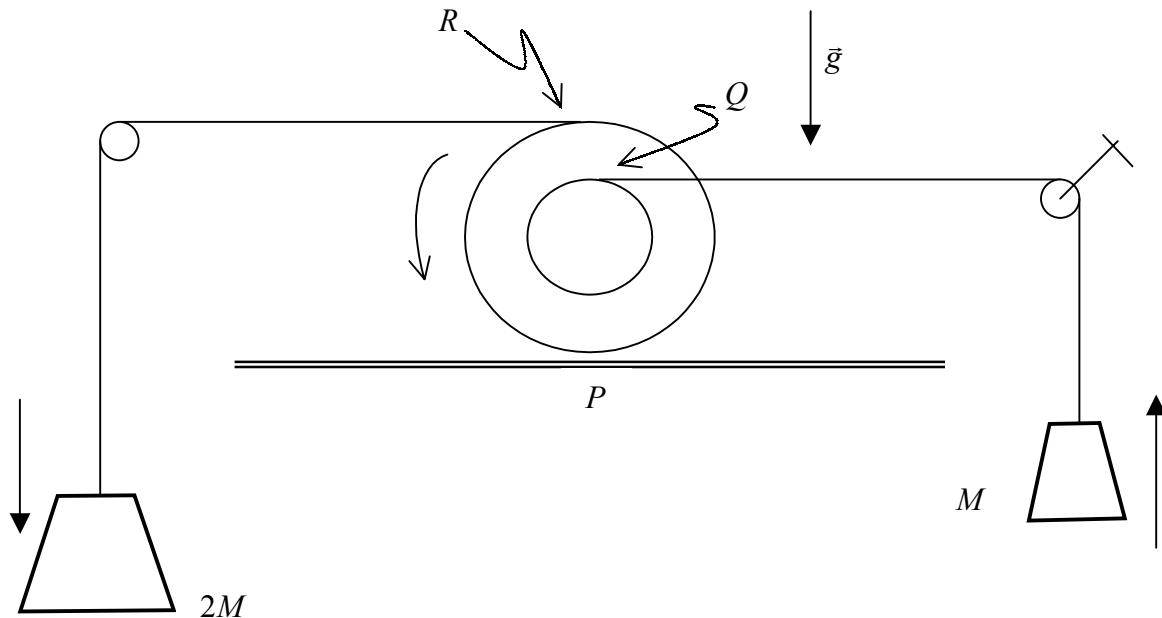
Evaluando el momento con respecto al centro del cilindro, donde $I_C = \frac{1}{2}mr^2$:

$$\sum M_C : f_{c1} \cdot 2R + f_{c2} \cdot 2R = \frac{1}{2}(2M) \cdot (2R)^2 \alpha. \quad (2)$$

De (1) y (2) y reemplazando $f_{c1} = \mu_c \cdot N_1$, $f_{c2} = \mu_c \cdot N_2$ se encuentra:

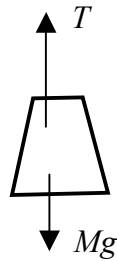
$$\alpha = \frac{g}{R} \cdot \left(\frac{\mu_c (\mu_c + 1)}{(\mu^2 + 1)} \right)$$

2. Determine el momento de inercia del carrete mostrado, respecto al punto de contacto P . El radio interno es r y externo R . La masa M sube con aceleración de magnitud $g/4$.



Solución:

i. D.C.L. Bloque M :

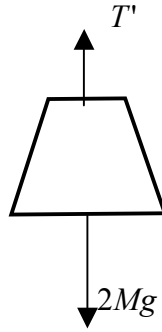


Como tal bloque sube:

$$\sum F_{\parallel} : T - Mg = M \cdot a_M = M \cdot g/4. \text{ Es decir,}$$

$$T = \frac{5}{4} Mg. \quad (1)$$

ii. D.C.L. Bloque $2M$:



$$\sum F_{//} : 2Mg - T' = 2M \cdot a_{2M} . \quad (2)$$

Por otro lado, como la aceleración con que sube el bloque de masa M es $g/4$ y esta aceleración equivale a la tangencial del carrete en el punto Q donde $a_Q = \alpha \cdot 3r$, la aceleración angular es

$\alpha = g/12r$. Como la aceleración tangencial del punto R es $a_R = \alpha \cdot 4r = \frac{g}{12r} \cdot 4r = \frac{g}{3}$, el bloque de masa $2M$ cae con dicha aceleración. Reemplazando en ecuación (1) se encuentra:

$$T' = 2Mg - 2M \cdot a_{2M} = \frac{4}{3} Mg . \quad (3)$$

iii. Evaluando el momento en el carrete, con respecto al punto P :

Las fuerzas que realizan momento son solamente T y T' donde ambas fuerzas quedan perpendiculares a las distancias, partiendo desde el punto P . Como la aceleración angular va en sentido antihorario, es decir apunta hacia fuera del plano del dibujo, el momento de T es negativo y el de T' positivo. De este modo:

$$\sum M_P : 4r \cdot T' - 3r \cdot T = I_P \cdot \alpha . \quad (4)$$

Reemplazando los valores de T , T' y α encontramos:

$$I_P = 19Mr^2 .$$

Equilibrio:

En general, el movimiento de una partícula, es un movimiento de traslación. Cuando tal partícula está en reposo o en M.R.U., su aceleración es cero. Por lo tanto la resultante de todas sus fuerzas es cero y se dice que la partícula está en equilibrio *MECANICO*. Para el caso de un cuerpo rígido, en general este presenta un movimiento de rotación y traslación. Cuando el cuerpo rígido permanece en reposo, o se mueve de manera tal que su velocidad lineal \vec{V} y angular ω son constantes, tanto su aceleración lineal \vec{a} y angular α son cero. La resultante de todas las fuerzas y de todos sus momentos que obran sobre este cuerpo son cero, y se dice que el cuerpo rígido está en equilibrio *MECANICO*. Se dice que el equilibrio es estático si el cuerpo está en reposo. La rama de la mecánica que estudia el equilibrio estático de un cuerpo rígido, es decir, cuando este no se mueve, se llama *estática de los cuerpos rígidos*. De este modo, las ecuaciones que aseguran el equilibrio estático, fuera de la observación que este está en reposo son:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}, \quad (5.20)$$

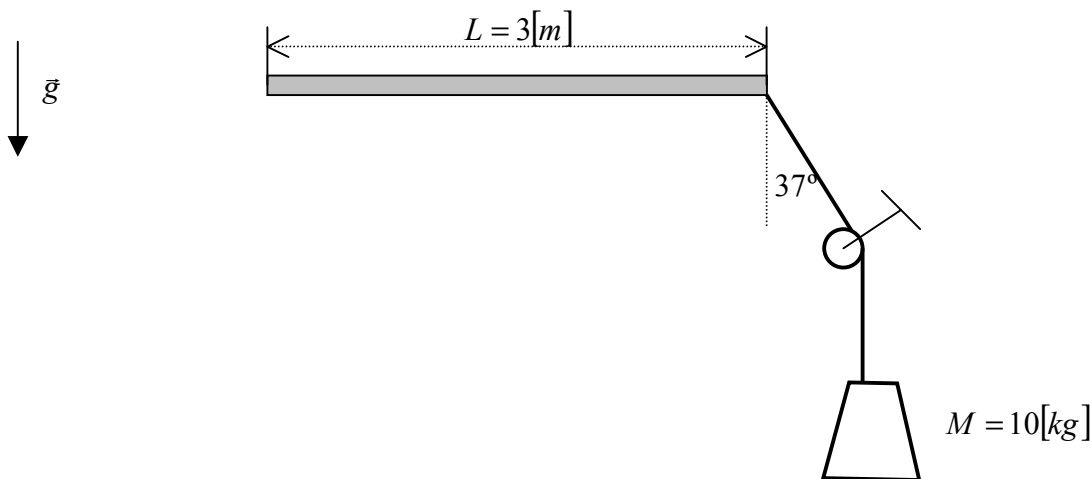
$$\sum \vec{M} = \vec{0}. \quad (5.21)$$

La ecuación (5.20), llamada equilibrio de traslación, asegura que el cuerpo no se traslade linealmente y la ecuación (5.21), denominada equilibrio de rotación, asegura que el cuerpo no se mueva angularmente.

Note que estas ecuaciones sólo aseguran que $\vec{a} = \vec{0}$ y $\alpha = 0$. Por lo tanto, si un cuerpo se traslada uniformemente con velocidad constante y/o rota con velocidad angular constante, (5.20) y (5.21) siguen siendo válidas. En esta sección sólo se estudiará el equilibrio estático.

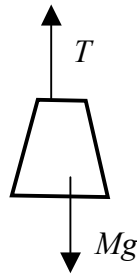
Ejemplos:

1. Para mantener en equilibrio una barra de masa $m = 5[\text{kg}]$ en la posición mostrada en la figura, ha de aplicarse una sola fuerza.
 - a. ¿Cuáles son las componentes F_x y F_y de la fuerza aplicada?.
 - b. ¿Dónde deberá aplicarse esta fuerza?.



Solución:

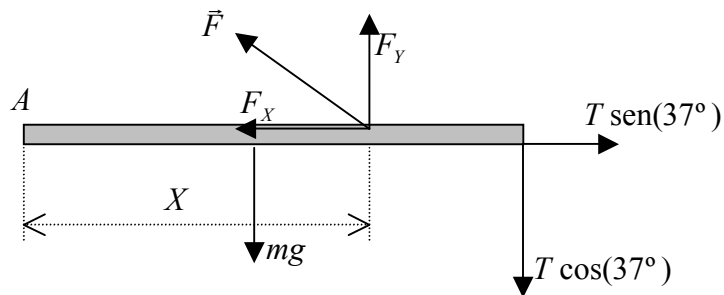
i. D.C.L. bloque $M = 10[\text{kg}]$



Como tal bloque está en reposo:

$$\sum F = 0 : T - Mg = 0, \text{ es decir, } T = Mg = 100[\text{N}]$$

ii. D.C.L. barra:



\vec{F} es la fuerza que se debe aplicar a la barra a la distancia X del extremo izquierdo (punto A) para mantener el equilibrio. Evaluando las condiciones de equilibrio, encontramos:

$$\text{Equilibrio de traslación: } \sum F_x : T \sin(37^\circ) - F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y : F_y - mg - T \cos(37^\circ) = 0. \quad (2)$$

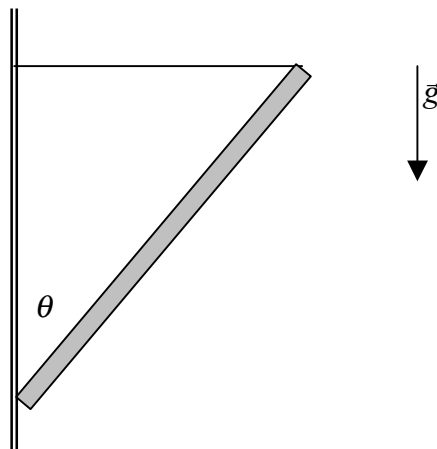
$$\text{Equilibrio de rotación: } \sum M_A : mg \cdot \frac{L}{2} + T \cdot \cos(37^\circ) \cdot L - F_y \cdot X = 0. \quad (3)$$

De ecuación (1): $F_x = T \sin(37^\circ) = 60[N]$, de ecuación (2), $F_y = mg + T \cos(37^\circ) = 130[N]$ y

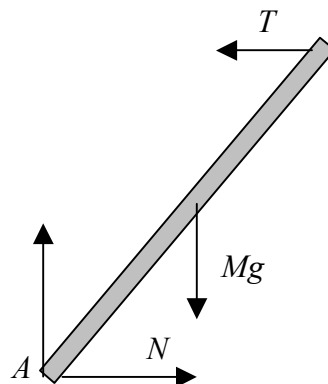
finalmente de ecuación (3), encontramos que $X = \frac{mg \cdot \frac{L}{2} + T \cos(37^\circ)}{F_y} = 2,42[m]$ Por lo tanto la

fuerza \vec{F} que mantiene el equilibrio es: $F = \sqrt{(60)^2 + (130)^2} = 143,18[N]$, la cual pasa a $2,42[m]$ del extremo izquierdo de la barra.

2. La figura muestra una barra homogénea de masa M la que se encuentra a punto de deslizar hacia abajo. Si en la pared y la barra existe roce, determine el ángulo θ de modo que el extremo inferior de la barra se encuentre a punto de deslizar.



D.C.L. (barra):



Condiciones de equilibrio:

$$\sum F_x : N - T = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_y : f_e - Mg = 0, \quad (2)$$

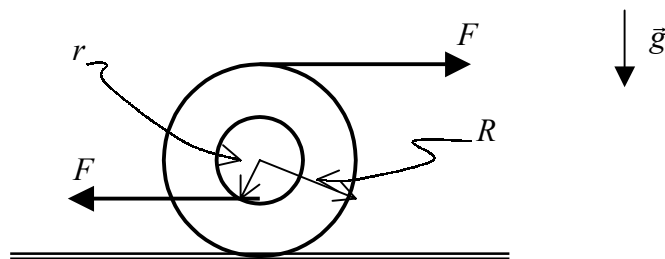
$$\sum M_A : Mg \cdot \frac{L}{2} \sin(\theta) - T \cdot L \cos(\theta) = 0. \quad (3)$$

Como $f_e = \mu_e N$, de ecuación (1) $N = T$ y de ecuación (2) $N = \frac{Mg}{\mu_e}$, reemplazando en (3) y al despejar θ resulta:

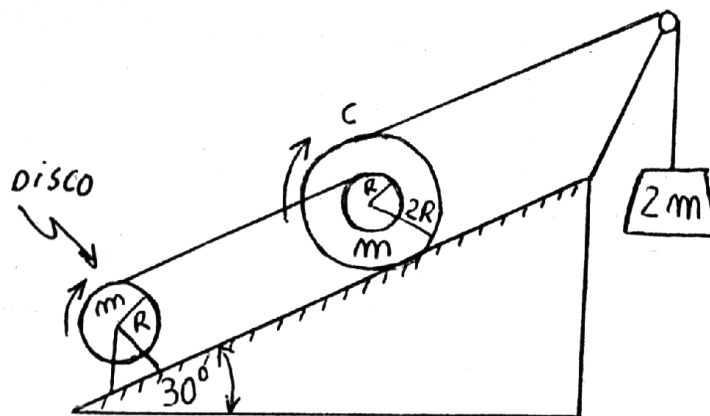
$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2}{\mu_e}.$$

EJERCICIOS

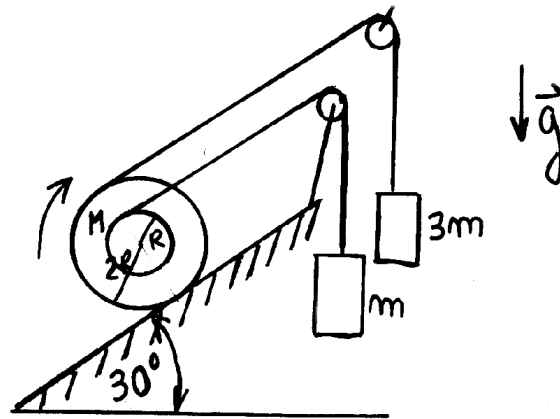
1. Un cuerpo rígido de masa total M , consiste de dos discos homogéneos concéntricos que tienen enrolladas dos cuerdas ideales (inextensibles). Se tira de éstas cuerdas como se indica en la figura, con fuerzas de magnitud $F = Mg/3$, de modo que el cuerpo rueda sin resbalar.
 - a. ¿En que sentido rota el cuerpo?. Justifique.
 - b. Calcule la aceleración del centro del cuerpo.
 - c. Calcule el mínimo coeficiente de roce estático para que el cuerpo no deslice.
 Datos: $I_0 = MR^2/3$, $R = 2r$.



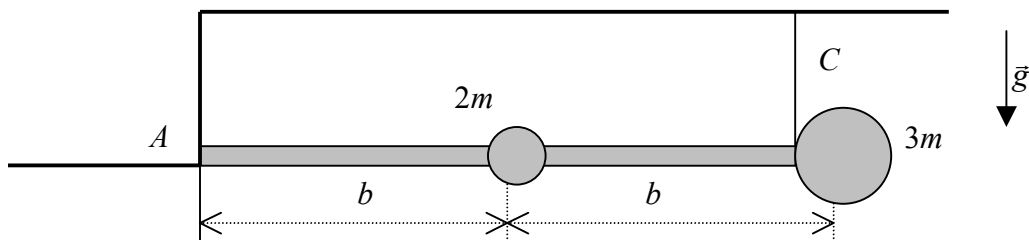
2. Calcule el momento de inercia del carrito C, si la masa $2m$ cae con aceleración de magnitud $g/4$.



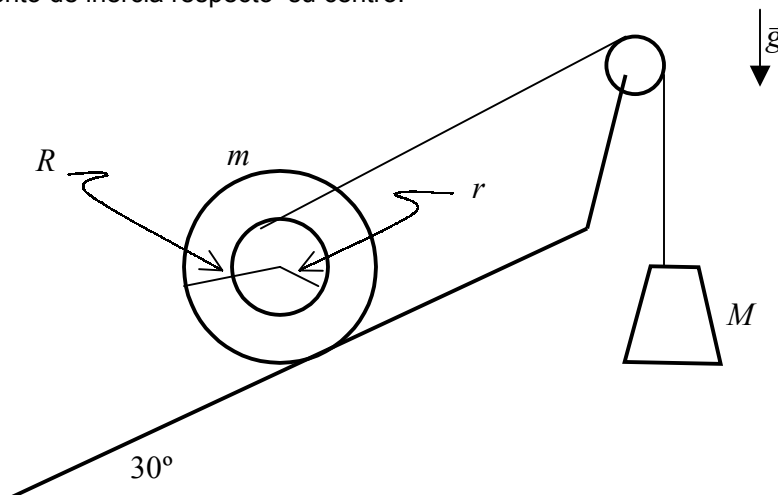
3. La figura muestra un carrito de masa M , conectado a dos bloques de masas $3m$ y m , el cual sube por un plano inclinado rotando sin deslizar. Si la tensión en la cuerda que conecta a $3m$ es $20[N]$, encuentre:
 - a. La aceleración con que baja el bloque de masa m ,
 - b. El momento de inercia del carrito respecto a su centro.
 Considere: $m = 2[kg]$, $M = 1[kg]$, $R = 0,5[m]$, $g = 10[m/s^2]$.



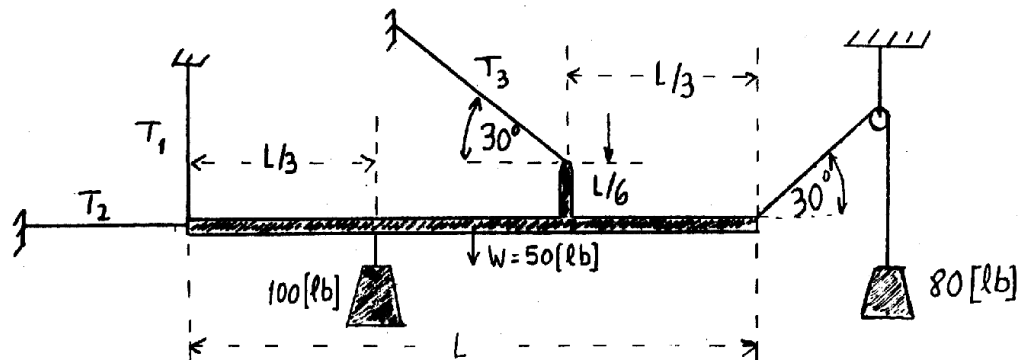
4. El péndulo doble de la figura está articulado en A, y está compuesto por una varilla de masa despreciable y dos masas puntuales $2m$ y $3m$. Si se corta el hilo C, calcule:
- La aceleración angular en el instante que se corta el hilo,
 - La fuerza en la articulación A, cuando el péndulo cruza la vertical.



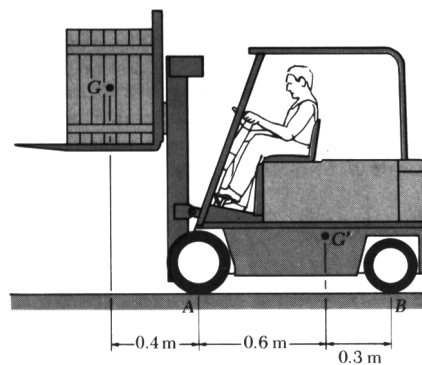
5. El carrete mostrado en la figura tiene enrollada una cinta delgada ligera. La cinta pasa por una polea fija, de masa despreciable y se conecta a un cuerpo de masa 2 [kg] que baja verticalmente con aceleración de magnitud $5 \text{ [m/s}^2]$. Si la masa del carrete es $m = 1 \text{ [kg]}$ y $R = 2r$, determine:
- La aceleración angular del carrete,
 - Su momento de inercia respecto su centro.



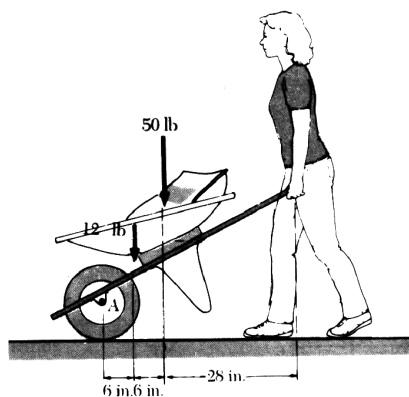
6. La varilla con la pequeña pestaña de la figura es homogénea y está en equilibrio en la posición mostrada. Encuentre los valores de las tensiones $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$ si su peso es de $50[lb]$.



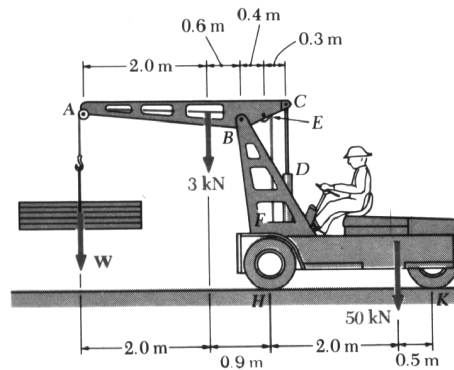
7. Con un elevador de horquilla de masa $2800 [kg]$ cuyo peso pasa por el punto G' se levanta una caja de $1500 [kg]$, cuyo peso pasa por el punto G . Determine las reacciones en cada una de las dos
- ruedas delanteras A
 - ruedas traseras B.



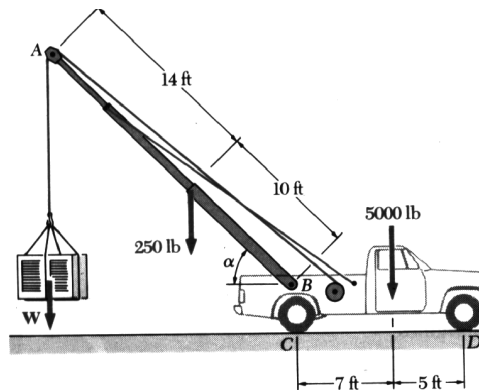
8. Un jardinero utiliza una carretilla de $12 [lb]$ para transportar una bolsa de fertilizante de $50 [lb]$. ¿Qué fuerza deberá ejercer sobre cada manilla?



9. Una carga de madera de peso $w = 25000$ [N] va a ser levantada con una grúa móvil. El peso de la pluma ABC y el peso combinado del carro y del chofer son los indicados en la figura. Determine las reacciones en cada una de las dos:
- ruedas delanteras H
 - ruedas traseras K



10. Refiérase al dibujo del problema anterior. Una carga de madera de peso $w = 25000$ [N] va a ser levantado con una grúa móvil. Sabiendo que la tensión es de 25000 [N] en todas las partes del cable AEF y que el peso de la pluma ABC es de 3000 [N], determine:
- la tensión en la barra CD,
 - la reacción en el perno B.
11. Se usa una grúa montada en un camión para levantar un compresor de 750 [lb]. Los pesos de la pluma AB y del camión son los indicados y el ángulo que forma la pluma con la horizontal es $\alpha = 40^\circ$. Determine las reacciones en cada una de las dos:
- ruedas traseras C
 - ruedas delanteras D.



12. Refiérase al dibujo del problema anterior. Determine el valor mínimo de α necesario para que el camión no se vuelque al cargar un peso $w = 3000$ [lb].