

Capítulo 4

Magnetostática

4.1. Corrientes y Campo Magnético

La forma más directa de apreciar la existencia de campos magnéticos se relaciona con los imanes. Con ellos se puede atraer trozos de hierro. Una brújula es un imán de forma alargada que puede girar para alinearse con el campo magnético de la Tierra.

4.1.1. Anticipo

Es interesante observar que la ley de continuidad (3.1.6) unida a la ley de Coulomb conduce a la deducción formal que sigue. Si en (3.1.3) se reemplaza ρ por su expresión en la ley de Coulomb $\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$ se obtiene que,

$$\nabla \cdot \left[\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \right] = 0 \quad (4.1.1)$$

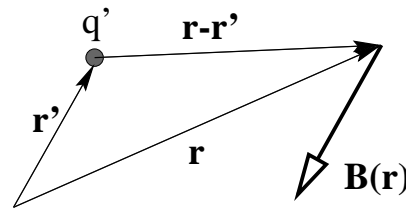
Pero si una función vectorial tiene divergencia nula en todas partes, puede escribirse como el rotor de una función

vectorial $\vec{B}(\vec{r}, t)$ como sigue

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.1.2)$$

Esta relación formal será más adelante justificada en base a leyes físicas y de tal forma que \vec{B} podrá ser interpretado como el campo magnético que se produce tanto debido a la presencia de una densidad de corriente como a la presencia de un campo eléctrico variable.

4.1.2. Dos nuevas leyes



Dos son las leyes experimentales que establecen la causa y el efecto de un campo magnético:

(a) Una carga puntual q' en posición \vec{r}' que se mueve a velocidad \vec{v}' produce en \vec{r} un campo magnético

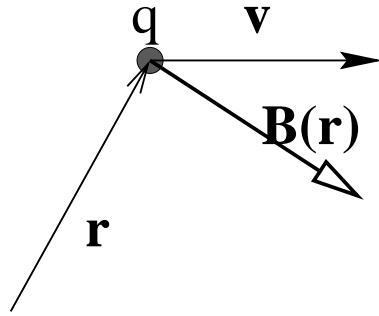
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.1.3)$$

(b) La fuerza que actúa sobre una carga puntual q ubicada en \vec{r} que se mueve con velocidad \vec{v} en presencia de un campo magnético externo $\vec{B}(\vec{r})$, es,

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.1.4)$$

la que se conoce como *fuerza de Lorentz*. Hoy día es más común llamar fuerza de Lorentz a la fuerza electromagnética total que puede actuar sobre una carga q , esto es,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

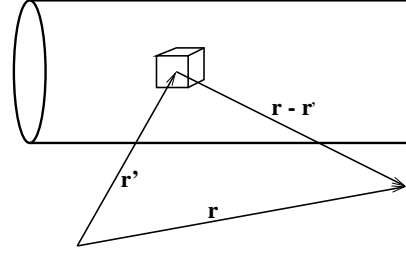


4.1.3. Campo magnético debido a corriente

La ecuación (4.1.3) puede ser extendida para escribir la contribución al campo magnético que se produce en un punto \vec{r} debido a la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}')$ que hay en un elemento de

volumen $d\mathcal{V}'$ en torno al punto \vec{r}' . Resulta ser,

$$d^3\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') d\mathcal{V}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.1.5)$$



Para obtener esta expresión se reemplazó el factor $q'\vec{v}'$ que hay en (4.1.3) por $\rho(\vec{r}')\vec{v}' d\mathcal{V}' = \vec{J}(\vec{r}') d\mathcal{V}'$. De (4.1.5) es inmediato ver que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' \quad (4.1.6)$$

Si la densidad de corriente \vec{J} está circulando por un conductor filiforme 1 y se expresa al elemento de volumen como un producto punto entre el elemento de longitud $d\vec{r}'$ a lo largo del circuito 1 y el elemento de sección $d\vec{S}'$ del conductor de este mismo circuito, entonces se puede usar (3.3.10) para reemplazar en (4.1.5) los factores $\vec{J} d\mathcal{V}'$ por $d\vec{r}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'$. Después de hacer esa sustitución se puede integrar sobre toda la sección del conductor, obteniéndose, según (3.1.4), la corriente I' que circula en el conductor,

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I' d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.1.7)$$

Se hizo uso de (3.3.10) con $d\vec{r}'$ representando al elemento de un

camino Γ que coincide con una *línea de corriente* \vec{J} . En la expresión (4.1.7), donde se ha integrado sobre la sección del conductor, el vector \vec{r}' define al punto donde Γ corta a esta sección. Para obtener (4.1.7) se ha supuesto que el conductor es muy delgado, de otro modo no se podría integrar sobre la sección en forma tan sencilla.

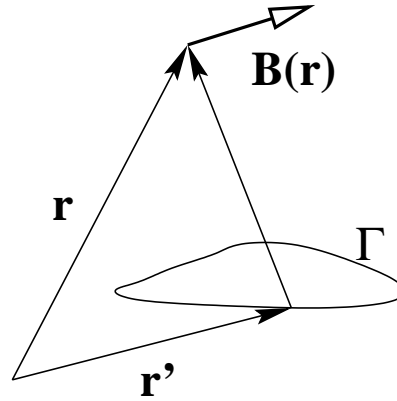
De la expresión anterior se obtiene el campo magnético total \vec{B} producido por un circuito cerrado Γ' ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{\Gamma'} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.1.8)$$

EJERCICIO 4.1-1. Con la expresión anterior demostrar que el campo producido por una corriente I que circula por un alambre rectilíneo infinito es,

$$\vec{B}(\rho, \phi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (4.1.9)$$

donde ρ es el radio de coordenadas cilíndricas.



EJERCICIO 4.1-2. Demostrar que el campo que produce una corriente I que circula por una circunferencia de radio R , a distancia z , sobre el eje de la circunferencia, es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (4.1.10)$$

EJERCICIO 4.1-3. Demostrar que el campo magnético que hay en el interior de una bobina cilíndrica, ideal, infinita con n vueltas por unidad de longitud y con corriente I en cada espira es un campo uniforme y vale

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{k} \quad (4.1.11)$$

donde \hat{k} es la dirección del eje de la bobina.

4.2. Potencial Vectorial

4.2.1. Definición usando \vec{J}

La expresión (4.1.5) puede ser escrita

$$d^3 B(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (4.2.1)$$

porque ∇ se refiere a las coordenadas sin prima. De aquí resulta que \vec{B} se

puede escribir como un rotor

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (4.2.2)$$

Lo cual quiere decir que siempre el campo magnético puede ser escrito co-

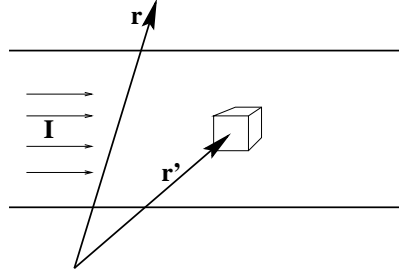
mo el rotor de una función vectorial que será denominada *potencial vectorial*: $\vec{A}(\vec{r})$, es decir,

$$B(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (4.2.3)$$

donde

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}'\|} \right) \vec{J}(\vec{r}') dV' + \nabla \Lambda(\vec{r}) \quad (4.2.4)$$

El vector \vec{r}_0 es un punto arbitrario donde se escoge que \vec{A} se anule y la función $\Lambda(\vec{r})$ también es arbitraria.



El volumen de integración sería en principio todo el espacio, pero en la práctica es el volumen de la zona en la cual la densidad de corriente es no nula, esto es, V es el volumen del conductor por el cual circula la corriente.

De (4.2.3) se desprende que,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2.5)$$

La libertad para escoger \vec{A} de entre una familia infinita de funciones conectadas por distintas funciones $\Lambda(\vec{r})$ se llama *libertad de gauge*. Tal libertad (que no tiene significado físico directo) es usada, especialmente en magnetostática, para que el potencial vectorial satisfaga,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.2.6)$$

que se conoce como *gauge de Coulomb*.

Si además hubiese una densidad de corriente de superficie $\vec{K}(\vec{r}')$ la expresión (4.2.4) tiene un término extra.

En (4.1.8) se estableció que el campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ debido a un circuito Γ por el que circula una corriente I es,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.2.7)$$

donde \vec{r}' es el vector que recorre la fuente, es decir el circuito Γ . La expresión anterior es equivalente a

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} d\vec{r}' \times \nabla_r \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (4.2.8)$$

que es

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla_r \times \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (4.2.9)$$

Nuevamente se ve que el campo magnético, esta vez debido a un circuito, puede escribirse como el rotor de un *potencial vectorial* \vec{A} ,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}'\|} \right) d\vec{r}' + \nabla \Lambda(\vec{r}) \quad (4.2.10)$$

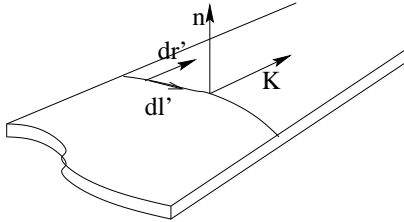
Para circuitos ideales *infinitos* \vec{r}_0 no puede ser tomado de magnitud infinita. magnético análoga a (4.1.5) y que es (usando $\vec{\Delta} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$)

Más adelante se verá que la noción de *flujo magnético* Φ a través de una superficie \mathcal{S} es físicamente interesante,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\mathcal{S}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\mathcal{S}} \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{\Gamma=\partial\mathcal{S}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Es muy fácil demostrar que el flujo magnético no depende de $\Lambda(\vec{r})$, es decir, se obtiene el mismo Φ con \vec{A} y con \vec{A}' ya que $\oint \nabla \Lambda \cdot d\vec{r} \equiv 0$.

Al tomar el rotor de (4.2.4) se obtiene (4.1.6).



4.2.2. Potencial vectorial a partir de \vec{K}

Veamos el efecto de una densidad de corriente superficial. En tal caso existe una contribución al campo

$$\begin{aligned} d^2 \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma' d\mathcal{S}' \vec{v}' \times \vec{\Delta}}{\Delta^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \vec{\Delta} (d\vec{\ell}' \times d\vec{r}') \cdot \hat{n}}{\Delta^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{r}' \times \vec{\Delta} [d\vec{\ell}' \times \vec{K} \cdot \hat{n}]}{\Delta^3} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

donde se obtuvo la segunda línea identificando $\sigma' \vec{v}'$ con \vec{K} y el elemento escalar de superficie con $(d\vec{\ell}' \times d\vec{r}') \cdot \hat{n}$. Aquí $d\vec{\ell}'$ es el elemento de camino transversal tal como el que se usó en (3.1.9). La tercera línea surge de intercambiar las ubicaciones de \vec{K} con el elemento de camino $d\vec{r}'$. Finalmente, integrando sobre el camino transversal se obtiene la corriente total de superficie e integrando a lo largo del camino de corriente se obtiene el campo total debido a la corriente superficial:

$$\vec{B}_S = \frac{\mu_0}{4\pi} I_S \oint \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.2.13)$$

Por otro lado también se puede escribir

$$\begin{aligned} \vec{B}_S &= \int \vec{K}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{S}' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{K} \times \nabla_r \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{S}' \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_r \times \int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS' \quad \text{que implica que la contribución al po-} \\ (4.2.14) \quad \text{tencial vectorial de la densidades de} \\ \text{corriente de superficie es}$$

$$\vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_0 - \vec{r}'\|} \right) \vec{K}(\vec{r}') dS' \quad (4.2.15)$$

4.2.3. Ejemplo

Dada la corriente I a lo largo de un alambre recto infinito se puede calcular \vec{A} usando (4.2.10). El elemento de camino es $\hat{k} dz$ y se debe calcular

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + z^2}} \right) dz \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

4.3. Ley Circuital de Ampère

En lo que sigue se demostrará que de \mathcal{V} .
en régimen permanente (es decir con $\nabla \cdot \vec{J} = 0$),

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad (4.3.1)$$

Previamente es necesario hacer dos demostraciones.

- a) Se demostrará que la integral de volumen del Laplaciano de $1/r$ calculada en cualquier volumen *que contenga al origen* vale -4π . Para comprender esta demostración es necesario tener claro que el Laplaciano de $1/r$ es nulo en todas partes, excepto el origen. Por lo tanto la integral que se va a estudiar no depende de la forma del volumen \mathcal{V} considerado, solo depende de si el origen está o no dentro

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \frac{1}{r} dV &= \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) dV \\ &= \oint_{\partial \mathcal{V}} \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{\partial \mathcal{V}} \left(-\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \cdot \hat{r} r^2 d\Omega \\ &= -4\pi \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Arriba $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido. El ángulo sólido que subtiende una superficie cerrada que no contiene al origen es cero y el de una superficie que contiene al origen es 4π . Se usó el elemento de superficie de una esfera centrada en el origen aprovechando que el resultado no depende de la forma del volumen.

- b) Se demostrará que $\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = 0$ en régimen estacionario aun cuando no se use el gauge de Coulomb (4.2.6). Se usa la forma (4.2.4) de \vec{A} ,

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi}{\mu_0} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) &= \nabla_r \int_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) d\mathcal{V}' \\
 &= -\nabla_r \int_{\mathcal{V}} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla_{r'} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) d\mathcal{V}' \\
 &= -\nabla_r \left(\int_{\mathcal{V}} \nabla_{r'} \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) d\mathcal{V}' - \int \frac{\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \right) \\
 &= -\nabla_r \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Explicación: en el primer paso hay un cambio de signo porque se cambia un gradiente con respecto a las componentes de \vec{r} por otro con respecto a las componentes de \vec{r}' . En el paso que sigue $\vec{J} \cdot \nabla \frac{1}{\Delta r}$ se escribe como la divergencia de $\vec{J}/\Delta r$ menos $\nabla \cdot \vec{J}/\Delta r$. Este último término es idénticamente nulo en régimen estacionario, (3.2.2). El primer término es la integral de volumen de una divergencia y por lo tanto es escrito como una integral sobre la superficie del volumen \mathcal{V} . Pero el volumen es aquel del conductor, y la superficie es la superficie del conductor. Después de (3.2.11) se señaló que \vec{J} es tangencial a la superficie del conductor, por lo tanto el producto punto que aparece en el numerador del integrando es idénticamente nulo.

Es fácil calcular,

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\
 &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
 \end{aligned}$$

Se demostró en (b) que el primer

término de la derecha es nulo. Para escribir el segundo término se usa (4.2.4) y por lo tanto,

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = -\nabla_r^2 \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V} \tag{4.3.4}$$

Se ingresa el Laplaciano a la integral y como éste actúa solo sobre el denominador, que es el único que depende de las coordenadas de \vec{r} , se obtiene un integrando que es nulo en todas partes excepto en el punto singular en que $\vec{r} = \vec{r}'$. Esto quiere decir que *solo un punto del integrando contribuye* y en ese único punto la corriente vale $\vec{J}(\vec{r})$, mientras el resto de la integral, como se vió en (a), vale -4π , de modo que efectivamente se concluye que (4.3.1) vale.

Si se integra la relación (4.3.1) sobre una sección S parcial de un conductor por el que circula la densidad $\vec{J}(\vec{r})$, se tiene, por el teorema de Stokes, que

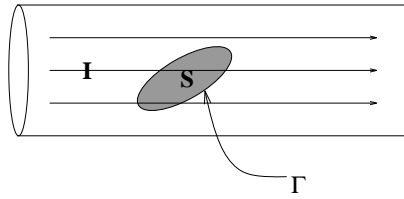
el lado izquierdo puede ser escrito como la integral sobre un camino cerrado Γ que corresponde al borde de la sección S , entonces,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.3.5)$$

esto es,

$$\oint_{\Gamma=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_S \quad (4.3.6)$$

que se conoce como la forma integral de la *ley circuital de Ampère*. I_{Γ} es la corriente que corta a *cualquier superficie* S cuyo borde es Γ .



Lo visto en este capítulo permite calcular campos magnéticos en diversas situaciones. En casos muy simétricos es posible calcular campos magnéticos haciendo uso de la ley circuital de Ampère. En otros hay que conformarse con (4.2.7) o con un cálculo del potencial.

EJERCICIO 4.3-1. *Demostrar que el campo que hay en el interior de una bobina toroidal de N vueltas y corriente I en cada vuelta depende tan solo de la distancia ρ al eje del toro y del vector unitario $\hat{\phi}$,*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho} \hat{\phi} \quad (4.3.7)$$

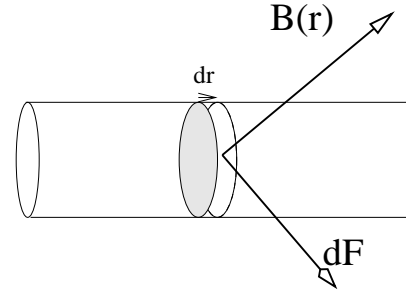
4.4. Fuerza magnética

De (4.1.4) se desprende que la fuerza de Lorentz $d^3\vec{F}$ que actúa sobre un elemento de volumen $d\mathcal{V}$ de un conductor debido a un campo magnético externo $\vec{B}(\vec{r})$ es,

$$\begin{aligned} d^3\vec{F} &= \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d\mathcal{V} \\ &= d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

El segundo paso se logró haciendo uso de (3.3.10). Si se integra sobre la sección del conductor se obtiene la fuerza $d\vec{F}$ que actúa sobre un elemento de largo $d\vec{r}$ de un conductor debido a un campo magnético externo $\vec{B}(\vec{r})$,

$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.4.1)$$



Si se intergra la expresión anterior sobre todo el circuito se obtiene la fuerza total

$$\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.4.2)$$

que actúa sobre el circuito debido a la presencia de un campo magnético externo \vec{B} . Esta fuerza no está localizada,

es decir, no actúa sobre un punto del circuito sino que sobre cada elemento infinitesimal del circuito actúa una pequeña fuerza y la suma total de esas fuerzas, que están actuando en diferentes puntos, dan (4.4.2).

EJERCICIO 4.1-4. Si se tiene un circuito cerrado por el que circula una corriente I , demostrar que la fuerza neta que actúa sobre el circuito, por efecto de la presencia de un campo magnético externo uniforme, es nula.

La fuerza por metro, entre dos alambres infinitos paralelos, separados por 1 metro, cada uno llevando una corriente de 1 Ampère, es aproximadamente de 2×10^{-7} newtons

Se puede reescribir esta relación tomando, en lugar de un campo externo \vec{B} , el elemento de campo magnético $d\vec{B}$ que se obtuvo en (4.1.7). De tal manera se obtiene la fuerza $d^2\vec{F}$ que actúa sobre el elemento $d\vec{r}$ de un conductor debido a la parte del campo magnético que produce el elemento $d\vec{r}'$ del conductor "prima", que lleva a la Ley de Ampère,

$$d^2\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I' I \frac{d\vec{r} \times (d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.4.3)$$

Integrando se obtiene la fuerza neta que actúa sobre el circuito Γ debido al circuito Γ' :

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} I' I \oint_{\Gamma'} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{r} \times (d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.4.4)$$

EJERCICIO 4.1-6. Demostrar que la fuerza (4.4.4) obedece el principio de acción y reacción.

Se puede aplicar (4.4.1) en forma muy sencilla para calcular el torque que actúa sobre un circuito debido a la interacción entre la corriente que circula por él y un campo magnético externo. Puesto que

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = I \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) \quad (4.4.5)$$

se obtiene que el torque que actúa sobre un circuito filiforme completo es

$$\vec{\tau} = I \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})) \quad (4.4.6)$$

A modo de ejemplo se encontrará una forma diferente de expresar el torque que actúa sobre un circuito debido a la presencia de un campo magnético externo uniforme \vec{B}_0 . En este caso la integral (4.4.6) para el torque se reduce a

$$\vec{\tau} = I \oint (\vec{r} \cdot \vec{B}_0 d\vec{r} - \vec{r} \cdot d\vec{r} \vec{B}_0) \quad (4.4.7)$$

pero como $\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r})$ es una diferencial exacta, entonces no contribuye a la integral sobre un camino cerrado, de modo que la integral anterior proviene tan solo del primer término en el integrando.

Por otro lado notemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint d(\vec{r} \cdot \vec{B}_0 \vec{r}) \\ &= \oint d(\vec{r} \cdot \vec{B}_0 d\vec{r} + d\vec{r} \cdot \vec{B}_0 \vec{r}) \end{aligned}$$

por lo cual el torque ahora se puede escribir

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau} &= \frac{1}{2} I \oint \left\{ \vec{r} \cdot \vec{B}_0 d\vec{r} - d\vec{r} \cdot \vec{B}_0 \vec{r} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} I \oint (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}_0 \\
 &= \frac{1}{2} I \vec{S} \times \vec{B}_0 \\
 &= \vec{m} \times \vec{B}_0
 \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

El vector \vec{S} tiene magnitud de superficie; en el caso que la curva Γ sea

plana, coincide con la superficie encerrada por dicha curva. Más en general \vec{S} tiene como primera componente $S_x = S_{YZ}$ a la superficie encerrada por la proyección de la curva Γ sobre el plano YZ . En forma cíclica se definen las otras componentes. El producto

$$\vec{m} = I \vec{S} \tag{4.4.9}$$

tendrá importancia más adelante. Se lo llama el *momento dipolar magnético* del circuito.

4.5. Una Partícula en un Campo Magnético Uniforme

Como ya se dijo en (4.1.4), una partícula cargada que se mueve en presencia de un campo magnético está sometida a la fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.5.1}$$

Si no hay más fuerzas sobre la partícula, la ecuación de movimiento para ella es,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.5.2}$$

Si se multiplica a ambos lados de la ecuación escalarmente por \vec{v} se obtiene que $m\vec{v} \cdot (d\vec{v}/dt) = 0$, lo que equivale a afirmar que,

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \text{constante} \tag{4.5.3}$$

La energía cinética de la partícula no cambia en el tiempo. Por lo tanto la fuerza de Lorentz en este caso no efectúa trabajo. La velocidad mantiene su magnitud.

Si se multiplica la ecuación (4.5.2) punto \vec{B} se obtiene,

$$m\vec{B} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \tag{4.5.4}$$

Todo lo anterior vale para cualquier campo magnético externo.

Si el campo magnético no depende del tiempo entonces (4.5.4) implica inmediatamente que la derivada de $\vec{v} \cdot \vec{B}$ es constante.

Puesto que $\|\vec{v}\|$ es constante, lo anterior implica que la proyección de \vec{B} a la dirección de la velocidad es una constante.

En particular, si \vec{B} es además uniforme, el ángulo α entre la velocidad y \vec{B} permanece constante.

Se estudiará con más detalle este particularísimo caso. Conviene escoger el eje Z paralelo a \vec{B} , esto es, $\vec{B} = B\hat{k}$. La velocidad en la dirección de Z es constante porque no hay fuerza en esa dirección, lo que implica que $v_1^2 + v_2^2 = \text{constante}$. Si se denota por v_h^2 a esa constante, entonces,

$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_h \cos \phi \\
 v_2 &= v_h \sin \phi
 \end{aligned}$$

Al reemplazar esta forma en la ecuación de movimiento se obtiene inmediatamente que,

$$\omega = \dot{\phi} = -\frac{qB}{m} \tag{4.5.5}$$

que implica que la velocidad angular es constante.

Recopilando lo ya obtenido la velocidad puede escribirse como,

$$\vec{v} = v_h [\hat{i} \cos(\omega t) + \hat{j} \sin(\omega t)] + \hat{k} v_3 \tag{4.5.6}$$

Toda la dependencia en el tiempo ha sido escrita en forma explícita. Es obvio también que si se denomina v_0 a la magnitud de la velocidad, entonces,

$$\begin{aligned} v_z &= v_0 \cos \alpha \\ v_h &= v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Y las ecuaciones para determinar el movimiento son,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \sin \alpha \cos(\omega t) \\ \dot{y} &= v_0 \sin \alpha \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\dot{z} = v_0 \cos \alpha \quad (4.5.7)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \sin(\omega t) \\ y(t) &= y_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin \alpha \cos(\omega t) \\ z(t) &= z_0 + v_0 t \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

La proyección del movimiento al plano XY es una circunferencia de radio

$$R = \frac{m}{qB} v_0 \sin \alpha \quad (4.5.9)$$

4.6. Dipolos Magnéticos

En esta sección se comenzará calculando el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ evaluado en un punto lejano \vec{r} asociado a un circuito pequeño ubicado en un punto \vec{r}' . Cuando se dice “lejano”, se quiere decir, “a una distancia mucho mayor que el tamaño del circuito”.

Comencemos recordando que si $\|\Delta\| \ll \|\vec{r}''\|$ entonces

$$\frac{1}{\|\vec{\Delta} - \vec{r}''\|} \approx \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{\vec{r}'' \cdot \vec{\Delta}}{\Delta^2} \right) \quad (4.6.1)$$

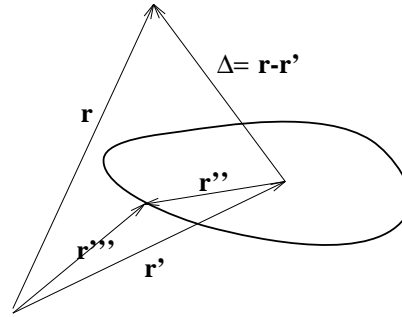
Nuestro punto de partida es la expresión (4.2.10) con una notación levemente diferente y en el caso $\vec{r}_0 = \infty$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{R}}{\|\vec{r} - \vec{R}\|} \quad (4.6.2)$$

que se reescribe haciendo el cambio de variables que sugiere la figura, donde \vec{r}' es un vector que señala algún punto que pueda razonablemente representar al centro del circuito y \vec{r}'' es la nueva variable de integración y su mag-

nitud máxima describe el tamaño del circuito. Entonces la expresión anterior queda

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{r}''}{\|\vec{\Delta} - \vec{r}''\|} \quad (4.6.3)$$



donde $\Delta = \vec{r} - \vec{r}'$. Nótese que este vector $\vec{\Delta}$ no depende de la variable de integración. Al hacer el reemplazo (4.6.1) nos damos cuenta que la primera integral es nula ($\oint d\vec{r}'' = 0$) y solo nos queda la segunda contribución, llamada aproximación *dipolar magnética*

$$\vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{r}'' \cdot \vec{\Delta}}{\Delta^3} d\vec{r}'' \quad (4.6.4)$$

No es difícil demostrar, siguiendo pasos análogos a los que se utilizó al deducir (4.4.8), que la integral anterior puede ser transformada en

$$\vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r}'' \times d\vec{r}'' \right) \times \frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3} \quad (4.6.5)$$

La cantidad encerrada entre paréntesis redondos, que tiene la forma ya conocida $I\vec{S}$, será llamada *momento dipolar magnético* \vec{m} ,

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r}'' \times d\vec{r}'' \quad (4.6.6)$$

Entonces se obtiene finalmente que

$$\vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.6.7)$$

y se refiere al potencial vectorial en \vec{r} de un *dipolo magnético* ubicado en \vec{r}' .

El campo magnético asociado

$$\vec{B}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) \quad (4.6.8)$$

se puede calcular derivando y se puede demostrar que es

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) &= -\mu_0 \nabla \left(\frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) \\ &= -\mu_0 \nabla \varphi_{\text{dipolo}}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

donde $\varphi(\vec{r})$ es el *potencial escalar* asociado al campo magnético lejano de un

circuito,

$$\varphi_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (4.6.10)$$

También es posible definir formalmente un potencial escalar asociado al campo magnético de un circuito filiforme Γ cualquiera por el cual circula una corriente I . El circuito se *cuadrícula* en circuitos muy pequeños, es decir, una superficie que se apoya en Γ es parcelada en sectores infinitesimales $d\vec{S}'$, por cuyo perímetro se supone ficticiamente que circula una corriente I , de tal modo que la frontera entre dos de estas subdivisiones tiene corriente neta nula, entonces se puede ver que el potencial escalar magnético asociado es:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int \frac{d\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

donde se ha usado (4.4.9), es decir, $d\vec{m} = Id\vec{S}'$.

Más en general la corriente I debería ser reemplazada por una integral de \vec{J} y no debe perderse de vista que esta definición da el campo neto (4.6.11) solo para aquellos puntos \vec{r} en los cuales la densidad de corriente es nula.

Este resultado cobrará especial importancia cuando se discuta magnetismo en materia.

4.7. Problemas

- 4.1 Calcular el campo magnético que produce un conductor cilíndrico infinito de radio a por el cual circula una densidad de corriente uniforme \vec{J}_0 .
- 4.2 Calcule el potencial vectorial asociado a al campo magnético debido a una corriente I que circula por un alambre recto infinito usando directamente la expresión integral para \vec{A} y demuestre que es
- 4.3 Calcule la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre un alambre recto infinito por el cual circula una corriente I_1 si a distancia a de él hay un alambre recto infinito y paralelo al primero, por el cual circula una corriente I_2 .
- 4.4 Una densidad de corriente $\vec{J} = J_0 \hat{\phi}$ circula por el volumen de un cilindro metálico recto de radio externo b y radio interno a . Determine el campo magnético: para $\rho < a$; para $a \leq \rho \leq b$; y para $\rho > b$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \hat{k} \quad (4.7.1)$$

Capítulo 5

Propiedades Magnéticas de la Materia

5.1. Magnetización y el potencial \vec{A}_M

La materia reacciona ante la presencia de campos magnéticos porque los electrones – en una muestra de cualquier tipo de materia atómica – en sus orbitales constituyen pequeños circuitos con corriente sometido a fuerzas y torques. A nivel atómico existen normalmente momentos magnéticos \vec{m} . Ante la presencia de un campo magnético \vec{B} estos momentos magnéticos están sometidos a torques (4.4.8) que tienden a alinearlos con el campo magnético. No es fácil saber si el campo magnético que domina a nivel atómico es aquel producido por orbitales de electrones cercanos a un campo magnético aplicado externamente. Estas consideraciones más otras que escapan a una teoría clásica de la materia hacen bastante complejo predecir qué tipo de compuestos químicos reaccionan de tal o cual manera

frente a un campo magnético externo.

Simplificando bastante el cuadro se puede decir que hay dos grupos muy importante de materiales: aquellos que tienen un \vec{m} nulo en ausencia de un campo magnético externo y los que tienen siempre un \vec{m} no nulo. En el primer tipo de materiales el efecto dominante de un campo magnético externo es reorientar los orbitales atómicos de tal modo que estos aparecen imitando corrientes inducidas y por lo tanto creando campos magnéticos que se oponen al campo magnético aplicado (corrientes inducidas es un concepto que se ve más adelante). El campo magnético total dentro de este tipo de materia resulta menor al campo magnético aplicado. Tales materiales se denominan *diamagnéticos*. La gran mayoría de las sustancias que existen en la naturaleza