Universidad Nacional de Colombia

http://www.unalmed.edu.co

El Principio Variacional De Ekeland Y Aplicaciones

Autor: GERMAN JIMENEZ BLANCO

Director: Ph. D. JORGE COSSIO BETANCUR

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al título de Magister en Matemáticas

email: `gjimenez@uninorte.edu.co`

RESUMEN

En este trabajo se estudia el Principio Variacional de Ekeland y algunas aplicaciones a la teoría de puntos críticos y a ecuaciones diferenciales parciales. Se prueba a partir del Principio Variacional de Ekeland el Teorema del Paso de la Montaña y el Teorema de Punto de Silla; también se demuestra la existencia de soluciones débiles para problemas de Dirichlet semilineales.

Principio Variacional de Ekeland -forma fuerte

Teorema 1 *Sean* (X,d) *un espacio métrico completo y* $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a* $+\infty$, *y acotada inferiormente.*
Sean $\varepsilon > 0$ *y* $\overline{u} \in X$ *tales que* $\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}$.
Entonces para cada $\lambda > 0$ *existe* $u_\lambda \in X$ *tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u}) \tag{1}$$

$$d(u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda \tag{2}$$

$$\phi(u_\lambda) < \phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, u) \quad \forall u \neq u_\lambda \tag{3}$$

Prueba Forma Fuerte

Prueba. Para $\lambda > 0$, sea $d_\lambda(x, y) := \dfrac{d(x, y)}{\lambda}$

Definamos la siguiente relación en X

$$u \leq v \Longleftrightarrow \phi(u) \leq \phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v).$$

Evidentemente esta relación es reflexiva antisimetrica y transitiva por lo tanto es un orden parcial. Partiendo de nuestro orden parcial construimos una sucesión (S_n) de conjuntos tal que

$$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \ldots\ldots$$

Demostramos que los S_n son cerrados y que $diam S_n \to 0$.

Por lo tanto existe un único elemento $u_\lambda \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}$$

Se prueba que este elemento u_λ satisface las condiciones (1), (2), (3). $\blacksquare$

Principio Variacional de Ekeland-forma débil

Teorema 2 *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a* $+\infty$*, y acotada inferiormente. Entonces dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $u_\varepsilon \in X$ *tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \phi + \varepsilon \tag{4}$$

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(u) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) \; \forall u \neq u_\varepsilon. \tag{5}$$

Prueba Forma Débil

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la definición de ínfimo existe $\overline{u} \in X$ tal que

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicando el teorema anterior con $\lambda = 1$ tenemos que existe u_ε tal que se cumplen (4) y (5) ■

Aplicación a la Teoría de Puntos Fijos.

Teorema 3 *Sean X un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una función tal que*

$$d(u, f(u)) \leq \phi(u) - \phi(f(u)) \quad \forall u \in X, \qquad (6)$$

donde $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente.
Entonces existe $v \in X$ tal que $f(v) = v$

Puntos Fijos.

Prueba.

Aplicando el Teorema 2 (forma débil) con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $v \in X$ tal que

$$\phi(v) - \phi(w) < \frac{1}{2} d(v, w) \quad \forall w \in X.$$

Tomando $w = f(v)$ en la desigualdad anterior y aplicando (6) tenemos

$$d(v, f(v)) \leq \phi(v) - \phi(f(v)) < \frac{1}{2} d(v, f(v)).$$

Por lo tanto $d(v, f(v)) = 0$. Luego $f(v) = v$ ■

Puntos Fijos .

Corolario 4 *(Punto fijo de Banach) Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $T : X \to X$ *una contracción. Entonces existe* x_0 *tal que* $T(x_0) = x_0$.

Prueba. *Se demuestra que*

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x))$$
$$donde \;\; \phi(x) = \frac{1}{1-k} d(x, T(x))$$

El resultado se sigue aplicando el Teorema 3 ∎

Aplicación a la Optimización.

Teorema 5 *Sean* X *un espacio de Banach y* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *una función semicontinua inferiormente, acotada inferiormente y Gateaux-diferenciable* $\forall x \in X$. *Entonces para cada* $\varepsilon > 0$ *y* $\overline{u} \in X$ *tales que*

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \varepsilon \tag{7}$$

existe $u_\varepsilon \in X$ *tal que*

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(\overline{u}) \tag{8}$$

$$\|\overline{u} - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{9}$$

$$\|\phi'(u_\varepsilon)\|_{X^*} \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{10}$$

Palais-Smale

Definición 6 *Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Decimos que ϕ satisface la condición de Palais-Smale si toda sucesión (u_n) en X que satisface*

$$\begin{aligned} |\phi(u_n)| &\leq k, \text{ para algun } k \in \mathbb{R} \\ \phi'(u_n) &\to 0 \text{ en } X^* \end{aligned}$$

tiene una subsucesión convergente en X.

Teorema 7 *Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 que satisface la condición de Palais-Smale y tal que ϕ está acotado inferiormente. Entonces existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\inf_X \phi = \phi(u_0) \quad \text{y} \quad \phi'(u_0) = 0.$$

Es decir, el ínfimo de ϕ se asume en $u_0 \in X$ y u_0 es un punto crítico de ϕ.

Teoremas de Minimax.

Teorema 8 *(Teorema de Minimax) Sean K un espacio métrico compacto, $K_0 \subset K$ un subconjunto cerrado de K, X un espacio de Banach, $\chi \in C(K_0, X)$ y M definido por*

$$M = \{g \in C(K, X) / g(s) = \chi(s) \quad \forall s \in K_0\}.$$

$$Sea \;\; \phi \in C^1(X, R). \quad c = \inf_{g \in M} \max_{s \in K} \phi(g(s)) \quad y \quad c_1 = \max_{\chi(K_0)} \phi.$$

Si $c > c_1$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada $f \in M$ tales que

$$\max_{s \in K} \phi(f(s)) \leq c + \varepsilon,$$

existe $v \in X$ tal que

$$c - \varepsilon \leq \phi(v) \leq \max_{s \in K} \phi(f(s)) \tag{11}$$

$$dist(v, f(K)) \leq \sqrt{\varepsilon} \quad y \quad \left\| \phi'(v) \right\| \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{12}$$

Prueba. Definamos la función $\Psi : M \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\Psi\left(g\right) = \max_{S \in K} \phi\left(g\left(s\right)\right)$$

Sea $f \in M$ tal que

$$\Psi\left(f\right) = \max_{S \in K} \phi\left(f\left(s\right)\right) \leq c + \varepsilon.$$

Aplicando el Principio Variacional de Ekeland-forma fuerte, existe $h \in M$ tal que

$$\Psi\left(h\right) \leq \Psi\left(f\right) \leq c + \varepsilon \tag{13}$$

$$d(h, f) \leq \sqrt{\varepsilon} \tag{14}$$

$$\Psi\left(h\right) < \Psi\left(g\right) + \sqrt{\varepsilon} d\left(h, g\right), \quad \forall g \in M,\ g \neq h. \tag{15}$$

Posteriormente demostramos que existe $s \in K$ tal que

$$c - \varepsilon \leq \phi\left(h\left(s\right)\right) \quad y \quad \left\|\phi'\left(h\left(s\right)\right)\right\| \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{16}$$

A partir de (16) se sigue la conclusión del teorema. ■

Teoremas de Minimax.

Corolario 9 *Sean K, K_0, X, χ, M, ϕ, c y c_1 definidas como en el teorema anterior y supongamos que existe $S \subset X$ tal que*

$$g(K) \cap S \neq \emptyset \text{ para todo } g \in M$$
$$\text{y sea } c_0 = \inf_S \phi.$$

Si $c_1 < c_0$ entonces $c > c_1$ y por lo tanto se tienen todas las conclusiones del teorema anterior.

Corolario 10 *Supongamos las mismas hipótesis del Teorema 8. Si ϕ satisface la condición de Palais-Smale entonces c es un valor crítico de ϕ.*

Teoremas de Minimax.

Escogencias adecuadas de K, K_0 y χ en el Teorema 8 y corolario 9 nos proporcionan los dos teoremas siguientes, que son muy importantes en la teoría de puntos críticos.

Teorema del Paso de Montaña.

Teorema 11 *Sean* X *un espacio de Banach y* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Supongamos que existen* $u_0 \in X$*,* $u_1 \in X$ *y una vecindad acotada* Ω *de* u_0 *tal que* $u_1 \in \left(X - \overline{\Omega}\right)$ *y*

$$\inf_{\partial\Omega} \phi > \max\left(\phi\left(u_0\right),\ \phi\left(u_1\right)\right).$$

$$Sean\ \ \Gamma = \{g \in C\left([0,1], X\right)\ /\ g(0) = u_0, g(1) = u_1\}\ \ y$$

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} \phi\left(g\left(s\right)\right).$$

Si ϕ *satisface la condición de Palais-Smale entonces* c *es un valor crítico de* ϕ *y*

$$c > \max\left(\phi\left(u_0\right), \phi\left(u_1\right)\right)$$

Es decir, existe $u \in X$ *tal que* $\phi(u) = c$ *y* $\phi'(u) = 0$*.*

Teorema del Punto de Silla.

Teorema 12 *Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que $X = V \oplus W$, donde V y W son subespacios cerrados, con dim$V < \infty$. Sean*

$$
\begin{aligned}
S_R &= \{u \in V \ / \ \|u\| = R \ \}, \quad \overline{B_R} = \{u \in V \ / \ \|u\| \leq R\}, \\
M &= \left\{g \in C(\overline{B_R}, X) \quad / \ g(s) = s \text{ si } s \in S_R\right\} \quad y \\
c &= \inf_{f \in M} \max_{s \in \overline{B_R}} \phi\left(f\left(s\right)\right)
\end{aligned}
$$

Si $\inf_W \phi > \max_{S_R} \phi$ entonces c es un valor crítico de ϕ.

Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

$$\begin{cases} -\Delta u & = f(x,u) \quad \text{en} \quad \Omega \\ \quad u & = 0 \qquad\quad\;\; \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{17}$$

Por una **solución clásica** de (17) entendemos una función $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ que satisface (17).

Una **solución débil** de (17) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega f(x,u)\, v \quad \forall v \in H_0^1. \tag{18}$$

Sea $\phi : H_0^1 \longrightarrow R$ el funcional definido por

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u)\,. \tag{19}$$

Atrás
Cerrar

Supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq c\,|s|^{p-1} + b(x)\,,\;\; b(x) \in L^{p'},\; 1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2} \qquad (20)$$

Entonces ϕ es continuamente Fréchet Diferenciable y

$$\left\langle \phi'(u)\,, v \right\rangle = \int_\Omega \nabla u . \nabla v - \int_\Omega f(x,u)\, v \quad \forall v \in H_0^1. \qquad (21)$$

De (18) y (21) se sigue que u es una solución débil del problema (17) si y sólo si u es un punto crítico de ϕ.

Aplicación Utilizando El Principio Variacional de Ekeland

Teorema 13 *Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una función continua tal que*

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{f(s)}{s}=a \quad \textit{y} \quad \lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}=b,$$

con a *y* $b\in(0,\lambda_1)$. *Entonces el problema*

$$\begin{cases} \Delta u+f(u)=0 & \textit{en} \quad \Omega \\ u=0 & \textit{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{22}$$

tiene una solución débil.

Aplicación utilizando el Teorema de Punto de silla.

Teorema 14 *(Dolph). Supongamos que* $h \in C(\overline{\Omega})$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua tal que existen constantes* α *y* $\beta \in R$ *con* $\lambda_k < \alpha, \beta < \lambda_{k+1}$,

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} = \alpha \quad \text{y} \qquad \lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s} = \beta. \tag{23}$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) + h(x) \quad \text{en} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad\quad\;\; \text{en} \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{24}$$

tiene una solución débil.

Aplicación Utilizando El Teorema del Paso de la Montaña

Teorema 15 *(A. Ambrosetti y P. Rabinowitz). Supongamos que f satisface las siguientes condiciones*

$$|f(x,s)| \leq c\,|s|^{p-1} + b(x)\,,\ donde\ c > 0,\ b(x) \in L^{p'},\ 1 \leq p < \frac{2N}{N-2}$$

y supongamos que existen

$$\theta > 2\ y\ s_0 > 0\ \ tales\ que\ \ 0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad \forall\,|s| \geq s_0$$

Adicionalmente supongamos que

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 \tag{25}$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \textit{en} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad\quad\quad\ \ \textit{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{26}$$

tiene una solución débil no trivial.

¡Gracias!

gjimenez@uninorte.edu.co