

Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

1. Espacio de funciones	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Sucesiones de funciones	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt	9
1.4. Coeficientes de Fourier	10
1.5. Integrales impropias (valor principal)	14
1.6. Convergencia según Cesàro	15
2. Series de Fourier	19
3. Transformada de Fourier	35
3.1. Definiciones	35
3.2. Ejemplos	36
3.3. Propiedades	41
3.4. Aplicaciones	43
4. Convolución	45
4.1. Espacio \mathcal{S}	45
4.2. Producto de convolución	46
4.3. El espacio \mathcal{S} como anillo	49
5. Distribuciones temperadas	53
5.1. Definiciones	53
5.2. Sucesión de distribuciones	61
5.3. Producto de distribuciones	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales	72
5.5. Convergencia débil	73
6. Distribuciones y transformada de Fourier	79
7. Convolución de distribuciones	87
7.1. Definiciones	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones	89
7.3. Uso de convolución en Física	91

8. La función Gamma	93
8.1. La función factorial	93
8.2. La función Gamma	94
8.3. Función Beta	96
8.4. Notación doble factorial	99
8.5. Fórmula de Stirling	99
8.6. Otras funciones relacionadas	101
9. Transformada de Laplace	103
9.1. Definición	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace	111
10. Aplicaciones de la transformada de Laplace	113
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	114
10.2. Ecuaciones integrales	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales	120
11. Polinomios ortogonales	123
11.1. Definiciones	123
11.2. Teoremas	123
11.3. Relación de recurrencia	125
12. Polinomios de Hermite	127
12.1. Definición	127
12.2. Función generatriz	127
12.3. Ortogonalidad	130
12.4. Algunos resultados interesantes	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite	131
13. Polinomios de Laguerre	133
13.1. Definición	133
13.2. Función generatriz	133
13.3. Relaciones de recurrencia	135
13.4. Ecuación de Laguerre	135
13.5. Ortogonalidad	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre	138
14. El problema de Sturm-Liouville	139
14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos	139
14.2. Operadores autohermíticos	141
14.3. Problema de autovalores	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales	143

15.Ecuaciones diferenciales con singularidades	145
15.1. Puntos singulares	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs	149
15.4. Una segunda solución	151
16.Ecuaciones diferenciales del tipo...	155
16.1. Soluciones en puntos regulares	155
16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares	159
16.3. Singularidades en infinito	167
16.4. Ejemplos	168
16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas	171
17.Funciones hipergeométricas	177
17.1. La ecuación hipergeométrica general	177
17.2. Ecuación indicial	178
17.3. Ecuación diferencial de Gauss	179
17.4. La serie hipergeométrica	181
17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente	183
18.Polinomios de Legendre	183
18.1. Función generatriz	183
18.2. Relaciones de recurrencia	185
18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$	186
18.4. Fórmula de Rodrigues	187
18.5. Ecuación diferencial de Legendre	188
18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$	188
18.7. Relación de ortogonalidad	189
18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$	190
18.9. Serie de Legendre	192
18.10 Funciones asociadas de Legendre	194
18.11 Armónicos esféricos	197
18.12 Segunda solución de la ecuación de Legendre	199
18.13 Problema de Sturm-Liouville asociado	204
19.La ecuación diferencial de Bessel	205
19.1. La ecuación diferencial de Bessel	205
19.2. Funciones de Bessel de índice no entero	206
19.3. Funciones de Bessel de índice entero	207
19.4. Función generatriz	209
19.5. Fórmulas de adición	209
19.6. Representaciones integrales	211
19.7. Relaciones de recurrencia	212
19.8. Relaciones de ortogonalidad	213

20.Diversos tipos de funciones cilíndricas	217
20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel	217
20.2. Funciones de Hankel	219

Capítulo 9

Transformada de Laplace

versión preliminar 3.3-25 noviembre 2002

9.1. Definición

Definición 9.1 Definimos la transformada de Laplace de una función $f(t)$ por

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t), s\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt} \quad s \in \mathbb{C} . \quad (9.1)$$

Definición 9.2 Una función $f : [0, \infty) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ es de *orden exponencial* si $f(t)$ es seccionalmente continua y derivable en $0 \leq t < \infty$ y

$$|f(t)| \leq Ae^{s_0 t} \quad \forall t \geq 0 \quad A, s_0 \in \mathbb{R}. \quad (9.2)$$

Proposición 9.1 Sea f un función de orden exponencial. Entonces la transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{f\}$, existe en el semiplano $\text{Re}[s] > s_0$.

Demostración

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\{f\}| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st}| |f(t)| dt \leq A \int_0^{\infty} |e^{-st}| e^{s_0 t} dt \\ &= A \int_0^{\infty} |e^{-i \text{Im}[s]t}| e^{-(\text{Re}[s]-s_0)t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\text{Re}[s]-s_0)t} dt < \infty \quad \forall \text{Re}[s] > s_0 . \end{aligned}$$

q.e.d.

Proposición 9.2 La integral $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge uniformemente para todo s tal que $\text{Re}[s] \geq s_1 > s_0$.

Demostración Si $\epsilon > 0$, afirmamos que existe $M(\epsilon)$ independiente de s tal que

$$\left| F(s) - \int_0^M dt e^{-st} f(t) \right| = \left| \int_M^\infty dt e^{-st} f(t) \right| < \epsilon .$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left| \int_M^\infty dt e^{-st} f(t) \right| &\leq \int_M^\infty dt |e^{-st} f(t)| \leq \int_M^\infty dt A e^{-t(\operatorname{Re}[s] - s_0)} \\ &\leq \int_M^\infty dt A e^{-t(s_1 - s_0)} = \frac{A}{s_1 - s_0} e^{-M(s_1 - s_0)} < \epsilon , \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se satisface escogiendo

$$M > \frac{1}{s_1 - s_0} \ln \left[\frac{A}{\epsilon(s_1 - s_0)} \right] .$$

q.e.d.

Proposición 9.3 $F(s)$ es holomorfa (analítica) en $\operatorname{Re}[s] \geq s_1 > s_0$, es decir, la derivada $F'(s)$ existe en dicho semiplano.

Demostración En virtud de la convergencia uniforme, podemos pasar la derivada dentro de la integral:

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt ,$$

luego

$$|F'(s)| \leq \int_0^\infty |e^{-st}| t |f(t)| dt \leq A \int_0^\infty t e^{(s_0 - s_1)t} dt ,$$

y la última integral existe (es finita), independiente de s .

q.e.d.

En general, existe

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-st} dt . \quad (9.3)$$

Proposición 9.4

$$\lim_{\operatorname{Re}[s] \rightarrow \infty} F(s) = 0 . \quad (9.4)$$

Demostración

$$\lim_{\operatorname{Re}[s] \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty f(t) e^{-i \operatorname{Im}[s]t} \left(\lim_{\operatorname{Re}[s] \rightarrow \infty} e^{-\operatorname{Re}[s]t} \right) dt = 0 .$$

q.e.d.

Notemos, como consecuencia de esta proposición, que 1 , s , s^2 o cualquier polinomio, no pueden ser transformadas de Laplace de ninguna función. Sí pueden serlo, en cambio, $1/s$ o, en general, funciones racionales con el grado del denominador superior al del numerador.

Ejemplo Sea $f(t) = \cos at$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos at, s\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cos(at) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} (e^{iat} - e^{-iat}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia} \right) \quad (\text{si } \operatorname{Re}[s] > 0) \\ &= \frac{s}{a^2 + s^2}.\end{aligned}$$

9.2. Inversión de la transformada de Laplace

Sea f una función de orden exponencial, tal que $f(t) = 0$ si $t < 0$. Sean $F(s) = \mathcal{L}\{f, s\}$ y $\sigma > s_0$. Observemos que

$$g(t) = f(t)e^{-\sigma t} \quad (9.5)$$

es módulo integrable:

$$\int_{-\infty}^\infty |g| < \infty,$$

luego la transformada de Fourier de $g(t)$ existe. Se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t), u\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(t)e^{itu} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t)e^{-(\sigma - iu)t} dt \\ \mathcal{F}\{g(t), u\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}\{f(t), \sigma - iu\}.\end{aligned} \quad (9.6)$$

Usando el teorema de reciprocidad de la transformada de Fourier:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}\{g(t), u\} e^{-iut} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}\{f, \sigma - iu\} e^{-iut} du.$$

Con el cambio de variable $s = \sigma - iu$,

$$g(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\sigma+i\infty}^{\sigma-i\infty} \mathcal{L}\{f, s\} e^{(s-\sigma)t} ds = \frac{e^{-\sigma t}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{L}\{f, s\} e^{st} ds.$$

Finalmente

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{L}\{f, s\} e^{st} ds. \quad (9.7)$$

Por lo tanto, si la transformada de Laplace de una función $f(t)$ está dada por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t), s\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \text{Re } s > s_0,$$

entonces $f(t)$ viene dada por la antitransformada de Laplace:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s), t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad \sigma > s_0. \quad (9.8)$$

La expresión (9.8) se conoce como la *integral de inversión de Mellin*.

Observemos que σ es arbitrario, en tanto sea mayor que s_0 . ¿Cómo es posible que la integral de Mellin [igual a $f(t)$] sea independiente de σ ? Para verificarlo, necesitamos la siguiente proposición:

Proposición 9.5

$$\lim_{\text{Im}[s] \rightarrow \pm\infty} F(s) = 0. \quad (9.9)$$

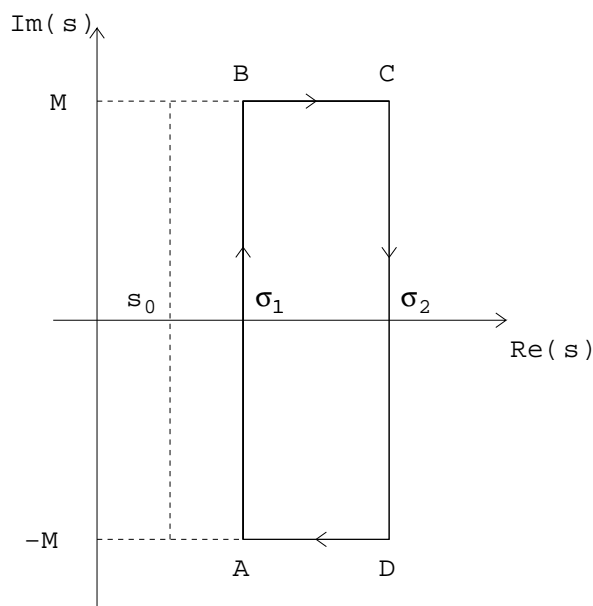
Demostración Sea $s = s_R + i\omega$. Entonces, por (9.6),

$$\mathcal{L}\{f, s\} = \mathcal{L}\{f, s_R + i\omega\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{fe^{-s_R t}, -\omega\} \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} 0,$$

donde el último límite se sigue de las propiedades de la transformada de Fourier. Luego hemos demostrado la proposición.

q.e.d.

Ahora podemos discutir la independencia de σ de la integral de Mellin. En efecto, consideremos el circuito de integración:



El contorno $ABCD$ no encierra singularidades, y las integrales a lo largo de CB y AD se van a cero cuando $M = \text{Im}[s] \rightarrow \infty$ [ver (9.9)]. Luego, por el teorema de Cauchy,

$$\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} ds e^{ts} F(s) = \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} ds e^{ts} F(s) , \quad \sigma_1, \sigma_2 > s_0,$$

lo que muestra la independencia en σ .

Una consecuencia del teorema de inversión de la transformada de Laplace es que si dos funciones son distintas, entonces sus transformadas de Laplace también lo son.

Ejemplo Consideremos la función escalón de Heaviside

$$h(t) = \frac{1 + \text{sgn}(t)}{2} .$$

Su transformada de Laplace es

$$H(s) = \mathcal{L}\{h, s\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} .$$

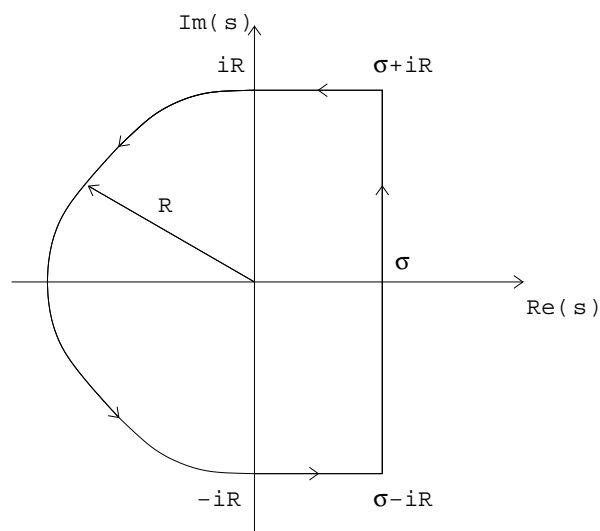
Observemos que $h(t)$ es de crecimiento exponencial con $s_0 = 0$ y, consistentemente, $H(s)$ es holomorfa en el semiplano $\text{Re}[s] > 0$.

Invirtiéndola la transformada de Laplace, deberíamos tener

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s}, t \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds .$$

¿Será cierto? Comprobarlo exigirá un poco de trabajo al integrar en el plano complejo.

i) $t > 0$. Consideremos el siguiente camino de integración:



Sobre los segmentos horizontales:

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s} ds \right| = \left| \int_0^\sigma \frac{e^{t(x \pm iR)}}{x \pm iR} dx \right| \leq \int_0^\sigma \frac{|e^{tx}| |e^{itR}|}{|x \pm iR|} dx \leq \frac{\sigma e^{t\sigma}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad t > 0.$$

Sobre el segmento circular, se tiene

$$z = iRe^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Luego

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s} ds \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{tz}(-Re^{i\varphi})}{iRe^{i\varphi}} d\varphi \right| \leq \int_0^\pi e^{-tR \sin \varphi} d\varphi \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{tR\varphi}{2}} d\varphi.$$

La última desigualdad se sigue del hecho de que

$$\sin \varphi \geq \frac{\varphi}{2} \quad \text{si } 0 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

de modo que, si $t > 0$,

$$-tR \sin \varphi \leq -tR \frac{\varphi}{2}.$$

Por tanto,

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s} ds \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{tR\varphi}{2}} d\varphi = \frac{4}{tR} \left(1 - e^{-\frac{tR\pi}{4}} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad t > 0.$$

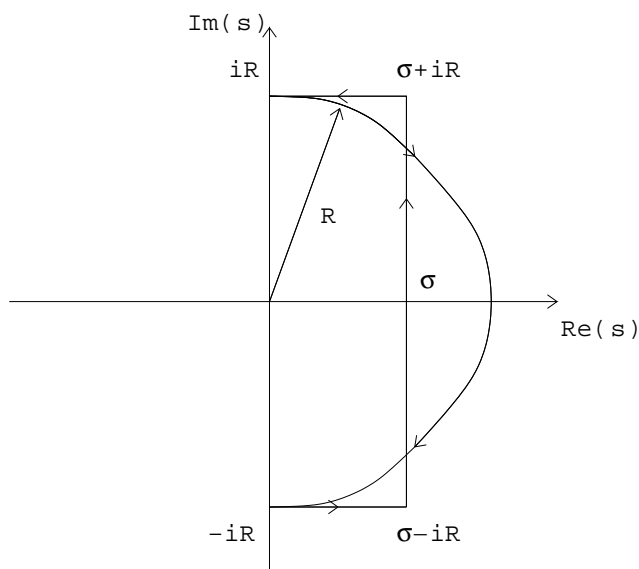
Así, por el teorema del residuo,

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{ts}}{s} ds = 2\pi i \frac{e^{ts}}{s} \Big|_{s=0} = 2\pi i,$$

vale decir

$$h(t) = 1, \quad t > 0.$$

- II) Sea $t < 0$. En este caso es fácil convencerse, a partir de lo visto en el caso anterior, que el camino de integración conveniente es:



Y en tal caso,

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{ts}}{s} ds = \int_{\Gamma} \frac{e^{ts}}{s} ds = 0 ,$$

pues no hay polos dentro del circuito de integración Γ . Entonces

$$h(t) = 0 , \quad t < 0 .$$

III) Caso $t = 0$.

La integral queda simplemente

$$\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} \frac{ds}{s} = \ln(\sigma + ir) \Big|_{r=-R}^{r=R} = \ln(\sqrt{\sigma^2 + r^2}) + i \arctan\left(\frac{r}{\sigma}\right) \Big|_{r=-R}^{r=R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} i\pi ,$$

de modo que

$$h(0) = \frac{1}{2} .$$

Por lo tanto, al invertir la transformada de Laplace hemos reobtenido la función escalón de Heaviside $h(t)$.

9.3. Propiedades de la transformada de Laplace

En lo sucesivo, el símbolo $\circ \longrightarrow \bullet$ significará “tiene como transformada de Laplace”. Además, $f(t)$ y $g(t)$ serán funciones de crecimiento exponencial, con $f(t) = g(t) = 0$ si $t < 0$. Finalmente, definimos $F(s) = \mathcal{L}\{f, s\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g, s\}$.

1) Si $a, b \in \mathbb{C}$, entonces

$$af(t) + bg(t) \circ \longrightarrow \bullet aF(s) + bG(s) .$$

(La transformada de Laplace es lineal.)

2) Si $\alpha > 0$, entonces

$$f(\alpha t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) .$$

3)

$$\int_0^t f(t') dt' \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{s} F(s) , \quad \text{Re}(s) > s_0 .$$

Demostración

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du, s\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u) du dt .$$

Integrando por partes,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du, s\right\} = -\frac{e^{-st}}{s} \left[\int_0^t f(u) du\right] \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s} F(s) .$$

4)

$$f'(t) \circ \longrightarrow \bullet sF(s) - f(0) , \quad \operatorname{Re}(s) > s_0 .$$

Demostración Integrando por partes:

$$\mathcal{L}\{f', s\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0) .$$

Análogamente,

$$f^{(n)}(t) \circ \longrightarrow \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) .$$

5)

$$t^n f(t) \circ \longrightarrow \bullet (-1)^n F^{(n)}(s) .$$

6) Desplazamiento en el eje t . Sea $\beta > 0$. Entonces

$$f(t - \beta) \circ \longrightarrow \bullet e^{-\beta s} F(s) .$$

7) Desplazamiento en el plano s . Sea $c \in \mathbb{C}$. Entonces

$$e^{ct} f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s - c) .$$

Demostración

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t), s\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t) dt = F(s - c) .$$

8) Convolución. De la definición de producto de convolución, y puesto que $f(t)$ y $g(t)$ son nulas si sus argumentos son menores que cero, se sigue que

$$p(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t - u) g(u) du .$$

Y se puede mostrar que

$$f * g(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s) G(s) .$$

Demostración Ejercicio.

9.4. Lista de transformadas de Laplace

Se supone en lo que sigue que todas las funciones que aparecen a la izquierda del símbolo $\circ \text{---} \bullet$ son tales que $f(t) = 0$ si $t < 0$.

a)

$$\begin{array}{l} 0 \circ \text{---} \bullet 0 \\ 1 \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s} \\ c \circ \text{---} \bullet \frac{c}{s} \end{array}$$

b) Sea $\alpha > 0$.

$$\mathcal{L}\{t^\alpha, s\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Luego

$$\begin{array}{l} t^\alpha \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1), \quad \alpha > 0. \\ t^n \circ \text{---} \bullet \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \sqrt{t} \circ \text{---} \bullet \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} e^{ct} \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s-c}, \quad c \in \mathbb{C}. \\ t^n e^{ct} \circ \text{---} \bullet \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}. \end{array}$$

En efecto,

$$\mathcal{L}\{e^{ct}, s\} = \mathcal{L}\{e^{ct} \cdot 1, s\} = \mathcal{L}\{1, s-c\} = \frac{1}{s-c},$$

y

$$\mathcal{L}\{t^n e^{ct}, s\} = (-1)^n [\mathcal{L}\{e^{ct}, s\}]^{(n)} = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}.$$

d) Si $s > 0$, $\omega > 0$,

$$\begin{array}{l} \cos \omega t \circ \text{---} \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \operatorname{sen} \omega t \circ \text{---} \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \circ \text{---} \bullet \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha} \right) \\ \cosh(\alpha t) \circ \text{---} \bullet \frac{s}{s^2 - \alpha^2} \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \sinh(\alpha t) \circ \text{---} \bullet \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2} \end{array}$$

e)

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t} \cos(\omega t) &\circ \longrightarrow \bullet \frac{\gamma + s}{(s + \gamma)^2 + \omega^2} \\ e^{-\gamma t} \sen(\omega t) &\circ \longrightarrow \bullet \frac{\omega}{(s + \gamma)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} te^{-\gamma t} \cos(\omega t) &\circ \longrightarrow \bullet \frac{(\gamma + s)^2 - \omega^2}{[(s + \gamma)^2 + \omega^2]^2} \\ te^{-\gamma t} \sen(\omega t) &\circ \longrightarrow \bullet \frac{2\omega(\gamma + s)}{[(s + \gamma)^2 + \omega^2]^2} \end{aligned}$$

g) Si se desea encontrar la antitransformada de una función racional $P(s)/Q(s)$, con el grado de P menor que el grado de Q , la estrategia será descomponerla en fracciones parciales, de la forma

$$\sum \frac{A_n}{(s - c)^n} .$$

Por ejemplo, de este modo podemos mostrar que

$$\frac{as^2 + bs + c\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \bullet \longrightarrow \circ \frac{a - c}{2} t \cos(\omega t) + \frac{a + bt + c}{2\omega} \sen \omega t .$$

h) Sea $q(t)$ la función escalón desplazada en t_0 hacia la derecha:

$$q(t) = h(t - t_0) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(t - t_0)] , \quad t_0 > 0 .$$

Entonces, de las propiedades de la transformada de Laplace,

$$q(t) = h(t - t_0) \circ \longrightarrow \bullet e^{-t_0 s} \frac{1}{s} .$$

Entonces

$$\overline{q(t)}' = \delta(t - t_0) \circ \longrightarrow \bullet s\mathcal{L}\{\overline{q(t)}, s\} - \overline{q(0)} = se^{-t_0 s} \frac{1}{s} - 0 = e^{-t_0 s} .$$

Suponiendo entonces que es lícito evaluar la transformada de Laplace de distribuciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &\circ \longrightarrow \bullet e^{-t_0 s} \\ \delta'(t - t_0) &\circ \longrightarrow \bullet se^{-t_0 s} \\ \delta^{(n)}(t - t_0) &\circ \longrightarrow \bullet s^n e^{-t_0 s} \end{aligned}$$