

Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

1. Espacio de funciones	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Sucesiones de funciones	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt	9
1.4. Coeficientes de Fourier	10
1.5. Integrales impropias (valor principal)	14
1.6. Convergencia según Cesàro	15
2. Series de Fourier	19
3. Transformada de Fourier	35
3.1. Definiciones	35
3.2. Ejemplos	36
3.3. Propiedades	41
3.4. Aplicaciones	43
4. Convolución	45
4.1. Espacio \mathcal{S}	45
4.2. Producto de convolución	46
4.3. El espacio \mathcal{S} como anillo	49
5. Distribuciones temperadas	53
5.1. Definiciones	53
5.2. Sucesión de distribuciones	61
5.3. Producto de distribuciones	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales	72
5.5. Convergencia débil	73
6. Distribuciones y transformada de Fourier	79
7. Convolución de distribuciones	87
7.1. Definiciones	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones	89
7.3. Uso de convolución en Física	91

8. La función Gamma	93
8.1. La función factorial	93
8.2. La función Gamma	94
8.3. Función Beta	96
8.4. Notación doble factorial	99
8.5. Fórmula de Stirling	99
8.6. Otras funciones relacionadas	101
9. Transformada de Laplace	103
9.1. Definición	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace	111
10. Aplicaciones de la transformada de Laplace	113
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	114
10.2. Ecuaciones integrales	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales	120
11. Polinomios ortogonales	123
11.1. Definiciones	123
11.2. Teoremas	123
11.3. Relación de recurrencia	125
12. Polinomios de Hermite	127
12.1. Definición	127
12.2. Función generatriz	127
12.3. Ortogonalidad	130
12.4. Algunos resultados interesantes	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite	131
13. Polinomios de Laguerre	133
13.1. Definición	133
13.2. Función generatriz	133
13.3. Relaciones de recurrencia	135
13.4. Ecuación de Laguerre	135
13.5. Ortogonalidad	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre	138
14. El problema de Sturm-Liouville	139
14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos	139
14.2. Operadores autohermíticos	141
14.3. Problema de autovalores	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales	143

15.Ecuaciones diferenciales con singularidades	145
15.1. Puntos singulares	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs	149
15.4. Una segunda solución	151
16.Ecuaciones diferenciales del tipo...	155
16.1. Soluciones en puntos regulares	155
16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares	159
16.3. Singularidades en infinito	167
16.4. Ejemplos	168
16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas	171
17.Funciones hipergeométricas	177
17.1. La ecuación hipergeométrica general	177
17.2. Ecuación indicial	178
17.3. Ecuación diferencial de Gauss	179
17.4. La serie hipergeométrica	181
17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente	183
18.Polinomios de Legendre	187
18.1. Función generatriz	187
18.2. Relaciones de recurrencia	189
18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$	190
18.4. Fórmula de Rodrigues	191
18.5. Ecuación diferencial de Legendre	192
18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$	193
18.7. Relación de ortogonalidad	193
18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$	194
18.9. Serie de Legendre	196
18.10 Funciones asociadas de Legendre	199
18.11 Problema de Sturm-Liouville asociado	201
18.12 Armónicos esféricos	203
18.13 Segunda solución de la ecuación de Legendre	205
19.La ecuación diferencial de Bessel	209
19.1. La ecuación diferencial de Bessel	209
19.2. Funciones de Bessel de índice no entero	210
20.Diversos tipos de funciones cilíndricas	221
20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel	221
20.2. Funciones de Hankel	223

Capítulo 17

Funciones hipergeométricas

versión preliminar 3.2-2 diciembre 2002

17.1. La ecuación hipergeométrica general

Consideremos la ecuación diferencial

$$\Psi'' + p(z)\Psi' + q(z)\Psi = 0 , \quad (17.1)$$

con tres singularidades fuchsianas localizadas en:

$$z_1 = A , \quad z_2 = B , \quad z_3 = C ,$$

y con $z = \infty$ punto de holomorfía.

Para que la ecuación (17.1) tenga singularidades fuchsianas, $p(z)$ debe tener a lo más un polo simple en cada una de ellas, tomando la forma:

$$p(z) = \frac{h}{z-A} + \frac{k}{z-B} + \frac{l}{z-C} . \quad (17.2)$$

Para que $z = \infty$ sea punto de holomorfía

$$2s - p\left(\frac{1}{s}\right) = 2s - \frac{hs}{1-As} - \frac{ks}{1-Bs} - \frac{ls}{1-Cs} , \quad (17.3)$$

debe tener a lo menos un lugar nulo doble en $s = 0$. Lo anterior implica que

$$\begin{aligned} 0 = 2s - p\left(\frac{1}{s}\right) &\simeq 2s - hs(1+As) - ks(1-Bs) - ls(1-Cs) + \dots \\ &= (2-h-k-l)s + \dots , \quad s \sim 0 , \end{aligned}$$

es decir, las constantes debe satisfacer la condición $h+k+l=2$. La característica de singularidades fuchsianas impone sobre la función $q(z)$ a lo más polos dobles en las singularidades, es decir,

$$q(z) = \frac{Q(z)}{(z-A)^2(z-B)^2(z-C)^2} , \quad (17.4)$$

y para que infinito sea punto de holomorfía $q(1/s)$ debe tener a lo menos un lugar nulo cuádruple en $s = 0$. Luego a lo sumo $Q(z)$ debe ser un polinomio de grado 2. En efecto, si es así,

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{a + bz + cz^2}{(z - A)^2(z - B)^2(z - C)^2} = \frac{a + b/s + c/s^2}{(1/s - A)^2(1/s - B)^2(1/s - C)^2} , \\ &= \frac{as^2 + bs + c}{(1 - As)^2(1 - Bs)^2(1 - Cs)^2} \frac{1/s^2}{1/s^6} = s^4 \frac{as^2 + bs + c}{(1 - As)^2(1 - Bs)^2(1 - Cs)^2} . \end{aligned} \quad (17.5)$$

Esto claramente no impone nuevas restricciones sobre $q(z)$, la cual podemos escribir de forma general como:

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{Q(z)}{(z - A)(z - B)(z - C)} \left[\frac{1}{(z - A)(z - B)(z - C)} \right] \\ &= \left(\frac{H}{z - A} + \frac{K}{z - B} + \frac{L}{z - C} \right) \left[\frac{1}{(z - A)(z - B)(z - C)} \right] . \end{aligned} \quad (17.6)$$

Reemplazando la forma general de $p(z)$ y $q(z)$ dadas en (17.2) y (17.6) en (17.1) obtenemos la *ecuación hipergeométrica general*:

$$\begin{aligned} \Psi'' + \left[\frac{h}{z - A} + \frac{k}{z - B} + \frac{l}{z - C} \right] \Psi' \\ + \left(\frac{H}{z - A} + \frac{K}{z - B} + \frac{L}{z - C} \right) \left[\frac{1}{(z - A)(z - B)(z - C)} \right] \Psi = 0 , \end{aligned} \quad (17.7)$$

con $h + k + l = 2$, *i.e.* 5 constantes libres.

17.2. Ecuación indicial

Consideremos la singularidad fuchsiana en $z = A$, su ecuación indicial corresponde a:

$$\sigma(\sigma - 1) + h\sigma + \frac{H}{(A - B)(A - C)} = 0 . \quad (17.8)$$

Sean α y α' las dos soluciones de esta ecuación, entonces

$$\alpha + \alpha' = 1 - h \quad \text{y} \quad \alpha\alpha' = \frac{H}{(A - B)(A - C)} .$$

Análogamente sean β y β' y γ y γ' las soluciones respectivas de la ecuación indicial en las singularidades fuchsianas $z = B$ y $z = C$, con

$$\beta + \beta' = 1 - k , \quad \beta\beta' = \frac{K}{(B - A)(B - C)} ,$$

$$\gamma + \gamma' = 1 - l , \quad \gamma\gamma' = \frac{L}{(C - A)(C - B)} .$$

Tenemos $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 3 - k - l - h = 3 - (k + l + h) = 3 - 2 = 1$.

De lo anterior podemos eliminar de la ecuación hipergeométrica los coeficientes h, k, l, H, K, L y escribirla en función de $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ y γ'

$$\begin{aligned} \Psi'' + \left[\frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - A} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - B} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - C} \right] \Psi' + \left[\frac{(C - A)(A - B)(B - C)}{(z - A)(z - B)(z - C)} \right] \\ \times \left(\frac{\alpha\alpha'}{(z - A)(B - C)} + \frac{\beta\beta'}{(z - B)(C - A)} + \frac{\gamma\gamma'}{(z - C)(A - B)} \right) \Psi = 0, \end{aligned} \quad (17.9)$$

con singularidades fuchsianas en $z_1 = A, z_2 = B$ y $z_3 = C$ y 5 constantes independientes, ya que tenemos la restricción de que

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

La solución más general de esta ecuación es la llamada *función P de Riemann* la cual denotamos por

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{matrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \begin{matrix} z \\ \\ \end{matrix} \right\}. \quad (17.10)$$

17.3. Ecuación diferencial de Gauss

Consideremos el caso particular $z_1 = A = 0, z_2 = B = 1$ y $z_3 = C \rightarrow \infty$. Elegimos además $\alpha' = \beta' = 0$, obteniendo

$$\Psi'' + \left[\frac{1 - \alpha}{z} + \frac{1 - \beta}{z - 1} \right] \Psi' + \frac{\gamma\gamma'}{z(z - 1)} \Psi = 0. \quad (17.11)$$

Las constantes deben satisfacer $\alpha + \beta + \gamma + \gamma' = 1$, lo cual deja sólo tres constantes independientes. La ecuación (17.11) es conocida como *ecuación diferencial de Gauss* y su solución, escrita como función P de Riemann, es:

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma' \end{matrix} \begin{matrix} z \\ \\ \end{matrix} \right\}. \quad (17.12)$$

Haciendo un cambio de notación

$$1 - \alpha = c, \quad \gamma = a, \quad \gamma' = b.$$

Podemos despejar β a partir de la condición que satisfacen las raíces de la ecuación indicial,

$$\beta = 1 - \alpha - \gamma - \gamma' = c - a - b,$$

luego, la ecuación diferencial de Gauss (17.11) queda de la forma

$$\Psi'' + \frac{(1 + a + b)(z - c)}{z(z - 1)} \Psi' + \frac{ab}{z(z - 1)} \Psi = 0. \quad (17.13)$$

Su solución, escrita como función P de Riemann

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 1-c & c-a-b & a \\ 0 & 0 & b \end{matrix} \begin{matrix} z \\ \\ \end{matrix} \right\} . \quad (17.14)$$

Busquemos soluciones de (17.13) de la forma

$$\Psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} z^{\nu} , \quad \text{con } d_0 = 1. \quad (17.15)$$

Recordemos que $z = 0$ es singularidad fuchsiana de (17.13) y las raíces de la ecuación indicial corresponden a $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = 1 - c$. Podemos reescribir (17.13) de la forma

$$z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\Psi = 0 , \quad (17.16)$$

Reemplazando la serie (17.15) en (17.16) e igualando potencias del mismo orden, obtenemos una relación de recurrencia para los coeficientes d_{ν} ,

$$d_{\nu+1} = \frac{(\nu+a)(\nu+b)}{(\nu+c)(\nu+1)} d_{\nu} , \quad \text{para } \nu = 0, 1, 2, \dots . \quad (17.17)$$

La exclusión de $c = 0, -1, -2, \dots$, no es siempre necesaria, ya que es posible que se anule el numerador.

Definición 17.1 Definimos la función hipergeométrica ${}_2F_1(a, b, c; z)$, por la siguiente serie:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \dots . \quad (17.18)$$

La serie geométrica es un caso particular de la anterior

$${}_2F_1(1, b, b; z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} .$$

El radio de convergencia de la serie hipergeométrica es igual a uno, exceptuando el caso cuando a o b son iguales a cero o a un entero negativo, en tal caso el radio de convergencia es infinito.

Afirmamos que ${}_2F_1(a, b, c; z)$ es solución de (17.13). Busquemos la otra solución linealmente independiente correspondiente a la solución de la ecuación indicial $\sigma_2 = 1 - c$. Planteamos

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= z^{1-c}\phi(z) , \quad c \neq 1 , \\ \Psi'(z) &= (1-c)z^{-c}\phi(z) + z^{1-c}\phi'(z) , \\ \Psi''(z) &= -(1-c)cz^{-c-1}\phi(z) + 2(1-c)z^{-c}\phi'(z) + z^{1-c}\phi''(z) . \end{aligned}$$

Reemplazando en (17.16)

$$z(z-1)\phi'' + [(a+b-2c+3)z - (2-c)]\phi' + (a-c+1)(b-c+1)\phi = 0 . \quad (17.19)$$

Sustituyendo

$$c \rightarrow 2 - c, \quad a \rightarrow a - c + 1, \quad b \rightarrow b - c + 1,$$

se obtiene la ecuación hipergeométrica de Gauss, por lo tanto la solución para $\phi(z)$ en (17.19) es:

$$\phi(z) = {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z), \quad \text{con } c \neq 2,$$

luego la otra solución de (17.13) es

$$\Psi(z) = z^{1-c} {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z). \quad (17.20)$$

Hagamos un resumen de los resultados anteriores. La ecuación diferencial de Gauss

$$z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\Psi = 0, \quad (17.19)$$

bajo la condición de que $c \notin \mathbb{Z}$ tiene como base de soluciones con centro en cero:

$$\Psi_1 = {}_2F_1(a, b, c; z), \quad (17.21a)$$

$$\Psi_2 = z^{1-c} {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z). \quad (17.21b)$$

Si $c = 1$ las soluciones Ψ_1 y Ψ_2 coinciden, en ese caso se debe plantear

$$\Psi_2(z) = \Psi_1(z) \ln(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}.$$

Derivando y reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos una relación de recurrencia para los c_{ν} .

17.4. La serie hipergeométrica

Analicemos en más detalle la serie hipergeométrica

$${}_2F_1(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!}, \quad (17.18)$$

tenemos para el coeficiente $n+1$

$$f_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n)b(b+1)(b+2) \cdots (b+n)}{c(c+1)(c+2) \cdots (c+n)},$$

$$f_{n+1} = \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(c+n+1)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-b)} \right).$$

Reescribamos la serie hipergeométrica usando el anterior resultado:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)} \Gamma(a+\nu) \frac{z^{\nu}}{\nu!},$$

pero

$$\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)} = B(c-b, b+\nu) ,$$

con

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} , \quad \text{para } m > 0 \text{ y } n > 0 .$$

Reescribimos la serie, usando la expresión integral de la función beta,

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} \frac{t^\nu z^\nu}{\nu!} dt ,$$

con $\text{Re}[c] > \text{Re}[b] > 0$.

Ahora como

$$(1-tz)^{-a} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)\nu!} t^\nu z^\nu .$$

La forma integral de la función hipergeométrica es:

$$\boxed{{}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt ,} \quad (17.22)$$

con $\text{Re}[c] > \text{Re}[b] > 0$, $|z| < 1$ y donde t es una variable compleja.

Proposiciones

$$\text{a) } {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right).$$

$$\text{b) } {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{1}{(1-z)^b} {}_2F_1\left(c-a, b, c; \frac{z}{z-1}\right).$$

$$\text{c) } {}_2F_1(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

$$\text{d) } {}_2F_1(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b, c; z).$$

Demostraciones

a)

$$\frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1} \left(1 - \frac{tz}{z-1}\right)^{-a} \frac{1}{(1-z)^a} dt ,$$

haciendo el cambio de variable $1-t = t'$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t'^{b-1}(1-t')^{c-b-1} \\ &\quad \times \left[(1-z) \left(1 - \frac{(1-t')z}{z-1} \right) \right]^{-a} dt' , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt, \\ &= {}_2F_1(a, b, c; z). \end{aligned}$$

b) Directo usando a) y la relación de simetría

$${}_2F_1(a, b, c; z) = {}_2F_1(b, a, c; z).$$

c) y d) Tarea.

Consideremos la expansión en serie de la función $\ln(1+z)$ con centro en $z=0$:

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots, \quad \text{para } |z| < 1, \\ \ln(1+z) &= z \left(1 + \frac{1 \times 1}{2 \times 1!}(-z) + \frac{1 \times 2 \times 1 \times 2}{2 \times 3 \times 2!}(-z)^2 + \frac{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4 \times 3!}(-z)^3 + \cdots \right), \\ \ln(1+z) &= z {}_2F_1(1, 1, 2; -z) = \frac{z}{1+z} {}_2F_1\left(1, 1, 2; \frac{z}{1+z}\right). \end{aligned}$$

La última igualdad corresponde a la propiedad a) probada anteriormente. Tenemos que para $|z| < 1$ sirve la primera expresión $z {}_2F_1(1, 1, 2; -z)$ y no la segunda, para $|z| > 1$ la primera expresión no nos sirve y sí la segunda. Probemos, en forma explícita, la última relación,

$$\begin{aligned} \frac{z}{1+z} {}_2F_1\left(1, 1, 2; \frac{z}{1+z}\right) &= \frac{z}{1+z} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z}{1+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{1+z} \right)^2 + \cdots \right), \\ &= \frac{z}{1+z} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1+z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{1+z} \right)^3 + \cdots, \\ &= -\ln\left(1 - \frac{z}{1+z}\right) = -\ln\left(\frac{1}{1+z}\right) = \ln(1+z). \end{aligned}$$

17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente

Consideremos la ecuación diferencial de Gauss con singularidades fuchsianas en $z=0$, $z=1$ y $z \rightarrow \infty$

$$z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\Psi = 0.$$

Al reemplazar $z = \frac{u}{b}$ nos queda

$$\frac{u}{b} \left(\frac{u}{b} - 1 \right) \frac{d^2}{dz^2} \Psi \left(\frac{u}{b} \right) + \left[(a+b+1) \frac{u}{b} - c \right] \frac{d}{dz} \Psi \left(\frac{u}{b} \right) + ab \Psi \left(\frac{u}{b} \right) = 0. \quad (17.23)$$

Definimos $\bar{\Psi}(u) = \Psi\left(\frac{u}{b}\right)$ y evaluamos las derivadas

$$\frac{d\Psi}{du} = \frac{d}{dz} \Psi \left(\frac{u}{b} \right) \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \frac{d}{dz} \Psi \left(\frac{u}{b} \right), \quad \frac{d^2\Psi}{du^2} = \frac{1}{b^2} \frac{d^2}{dz^2} \Psi \left(\frac{u}{b} \right).$$

Dividiendo (17.23) por $-b$,

$$u \left(1 - \frac{u}{b}\right) \frac{1}{b^2} \frac{d^2}{dz^2} \Psi \left(\frac{u}{b}\right) - \left[\frac{a+1}{b} + u - c\right] \frac{1}{b} \frac{d}{dz} \Psi \left(\frac{u}{b}\right) - a \Psi \left(\frac{u}{b}\right) = 0 ,$$

$$u \left(1 - \frac{u}{b}\right) \frac{d^2 \bar{\Psi}}{du^2} - \left[\frac{a+1}{b} + u - c\right] \frac{d \bar{\Psi}}{du} - a \bar{\Psi} = 0 .$$

Simplificando la notación, cambiamos la variable de u a z y la función de $\bar{\Psi}$ a Ψ . Además, haciendo tender $b \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$\boxed{z \Psi''(z) + (c - z) \Psi'(z) - a \Psi(z) = 0 .} \quad (17.24)$$

La anterior es conocida como *la ecuación hipergeométrica confluyente* y su solución se denota por ${}_1F_1(a, c; z)$. Esta ecuación tiene una singularidad fuchsiana en $z = 0$ y una singularidad esencial en $z = \infty$. Una de las soluciones en torno a $z = 0$ es:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1 \left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{abz}{1c b} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \times 2 \times c(c+1)} \frac{z^2}{b^2} + \dots\right] ,$$

$${}_1F_1(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots . \quad (17.25)$$

Esta serie es conocida como *la serie hipergeométrica confluyente*. Tiene radio de convergencia infinito siempre que $c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$. La otra solución de la ecuación diferencial es:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{b}\right)^{1-c} {}_2F_1 \left(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; \frac{z}{b}\right) = z^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c; z) , \quad (17.26)$$

con $c \neq 1, 2, 3, \dots$

Proposiciones

- a) $e^z = {}_1F_1(a, a; z)$.
- b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(z) = z {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z^2\right)$.
- c) ${}_1F_1(a, c; z) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} e^{zt} dt$.
- d) ${}_1F_1(a, c; z) = e^z {}_1F_1(c-a, c; -z)$.

Demostraciones

a) Directa a partir de la definición dada en (17.26).

b)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(z) &= \int_0^z e^{-t^2} dt = \int_0^z \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \dots\right) dt , \\ &= z - \frac{z^3}{3 \times 1!} + \frac{z^5}{5 \times 2!} - \frac{z^7}{7 \times 3!} + \dots , \\ &= z \left(1 - \frac{1/2}{3/2} \frac{z^2}{1!} + \frac{1/2 \times 3/2}{3/2 \times 5/2} \frac{z^4}{2!} + \dots\right) , \\ &= z {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z^2\right) . \end{aligned}$$

c) y d) Tarea.