ANÁLISIS GRÁFICO

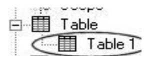
El análisis gráfico es un método que nos sirve para determinar la relación matemática entre dos o más variables, (en nuestro caso cantidades físicas) partiendo de una gráfica realizada a partir de datos experimentales tomados al azar.

En el estudio de este tema nos limitaremos a l a elaboración, obtención y análisis de gráficas utilizando las herramientas que el software Data Studio, el cual emplearemos en el laboratorio de física

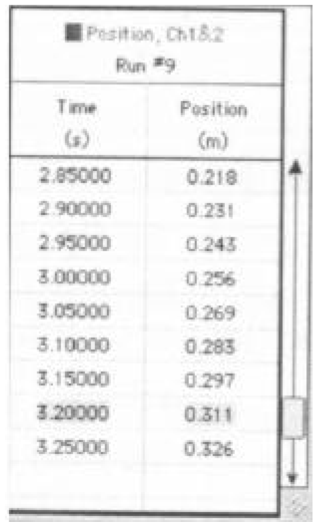
Este estudio lo vamos presentar en tres partes :
Edición de tablas y trazado de la gráfica ; escogencia de un modelo matemático y establecimiento de la relación empírica entre las variables

1. Edición de tablas y trazado de la gráfica

Generalmente en matáticas nos presentan una relación matemática la cual geralmente es una función, aprtir de ésta obtenemos una tabla de datos (coordenadas) y luego trazamos la gráfica, pero en la naturaleza nos presenta un fenómeno no una relación, por lo que tenemos que medir las magnitudes físicas que describen el fenómeno físico, obteniendo así una tabla de datos la cual la podemos introducir en computador de dos maneras:

a. Usando un sensor, por ejemplo en el caso de la clase anterior donde se uso un sensor de movimiento.
El sensor transforma su lectura en datos numéricos usando la interface como puente entre el sensor y el software , lo que quiere decir que los datos son introducidos automáticamente si hacemos click en el icono de table 

observara algo parecido a lo que muestra la fig 1



Position, Ch1&2
Run #9

Time (s)	Position (m)
2.85000	0.218
2.90000	0.231
2.95000	0.243
3.00000	0.256
3.05000	0.269
3.10000	0.283
3.15000	0.297
3.20000	0.311
3.25000	0.326

figura 1

b. En la barra de menú estándar señale experiment y haga click en new empty data table como indica la figura 2

Figura 2

luego aparece lo que se observa en la figura 3

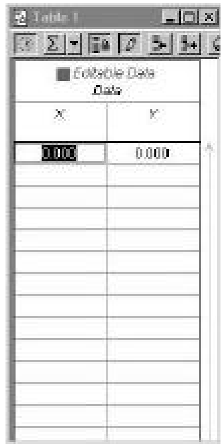
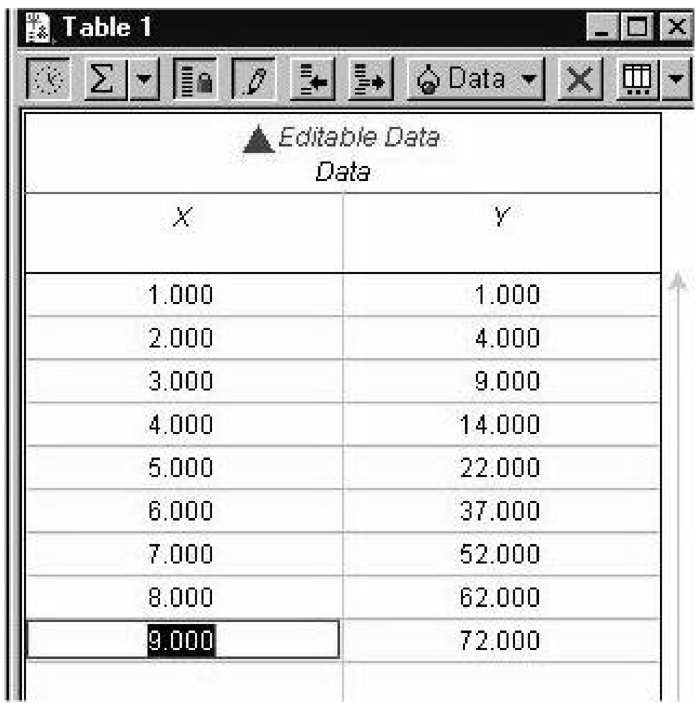


figura 3

Para poder escribir tine que activar el lápiz y desactivar el candado que aparece en la barra de herramientas del display. Usando tab puede cambiar de celda para introducir dato por dato hasta obtener algo parecido a



X	Y
1.000	1.000
2.000	4.000
3.000	9.000
4.000	14.000
5.000	22.000
6.000	37.000
7.000	52.000
8.000	62.000
9.000	72.000

figura 4

En caso de que se equivoque se puede borrar como en cualquier program, pero si se da cuenta después que hay un punto en la gráfica de más señale la fila y haga click con el botón derecho del mouse y cliquee en remove.

Para editar una tabla en Data Studio haga lo siguiente

1. a. Cuando digitó los datos observe que en la parte superior derecha de la ventana aperecieron los icono que muestra la figura 5

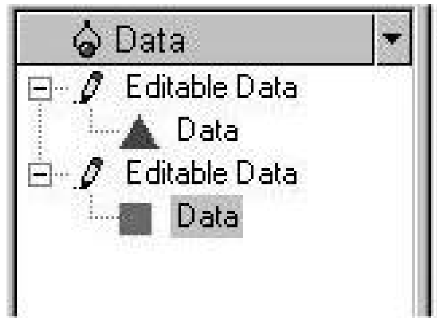


figura 5

haga doble click sobre el lápiz, luego aparece la ventana,

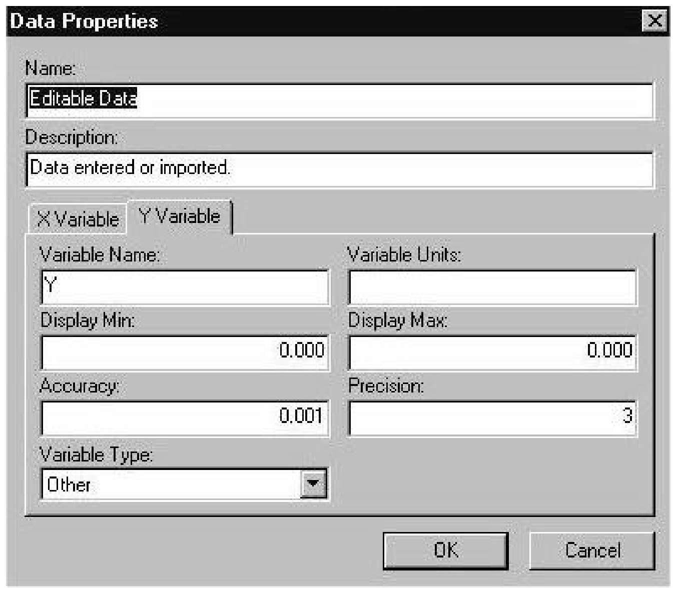


figura 6

b. Haciendo click en ylabel y xlabel para colocar en label el nombre de la variable (colocarlos en ingles si también trabaja también con sensores) , en units coloca las unidades de la variable usando el sistema internacional
c. El titulo se coloca en Measurement label, en los campos accuracy se coloca la precisión y en display precision se coloca el número de cifras decimales

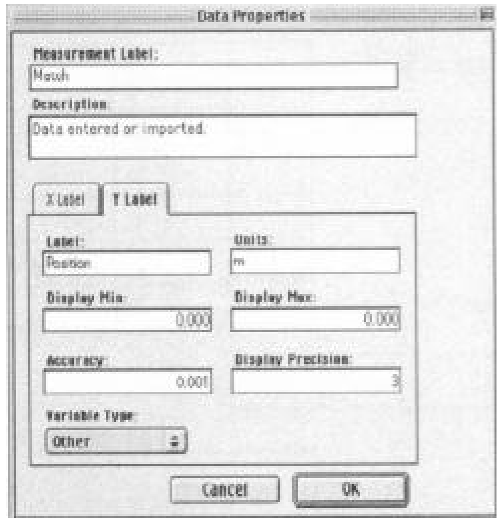


figura 8

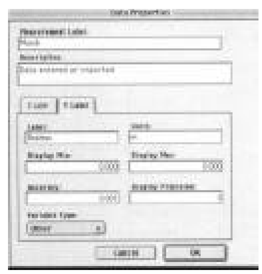


figura 7

d. Haciendo doble click sobre el triángulo o la figura que aparece debajo del lápiz (si no aparece haga click sobre el signo mas que aparece junto al lápiz) y manteniéndolo arrastrarlo hasta graph como indica la gráfica

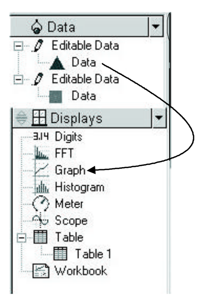


figura 9

para obtener

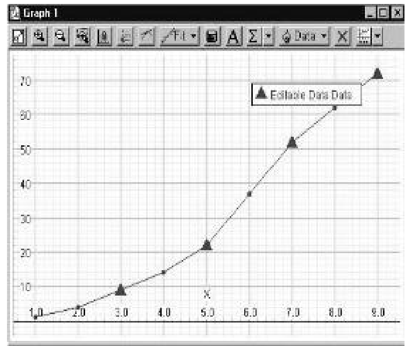


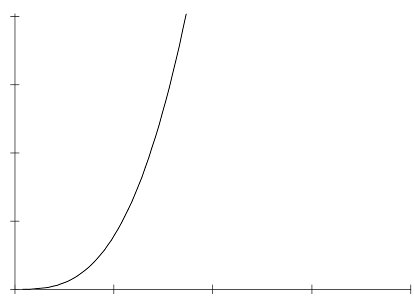
figura 10

En el caso un que usemos un sensor los pasos son los mismos, pero trabajamos con el icono que representa la magnitud estudiaday hacemos click sobre run #?

2. Modelos matemáticos

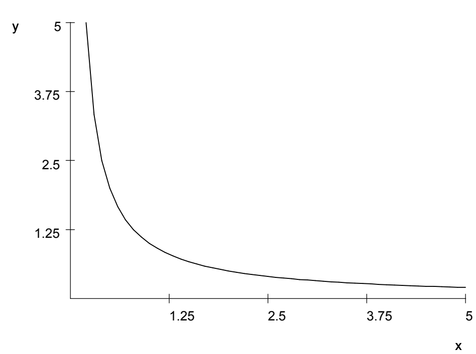
Conociendo la forma de la curva podemos suponer un modelo matemático. En esta sección presentaremos los más usados

1. $y = ax^m \quad a \in IR,\ m, a \neq 0,\ m \in IZ^+$
   a. Se le llama Potencial si tiene la forma



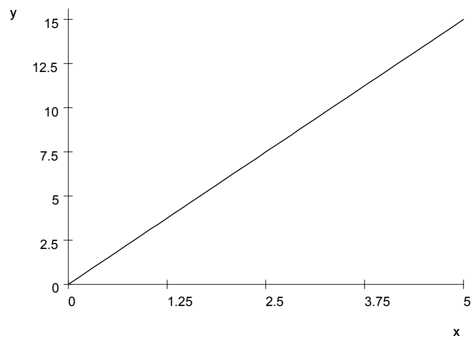
$$m \in Q^+ \ m \neq 1$$

   b. Radical a x^m



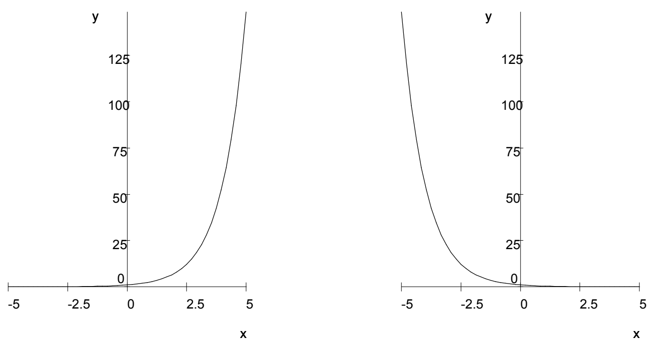
$$m \in Q^-$$

   c. Directamente proporcional

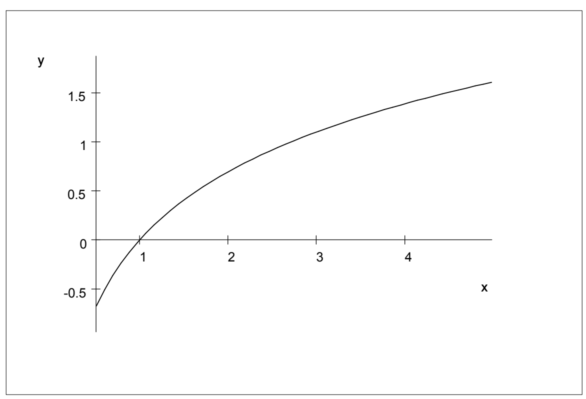


$m = 1$

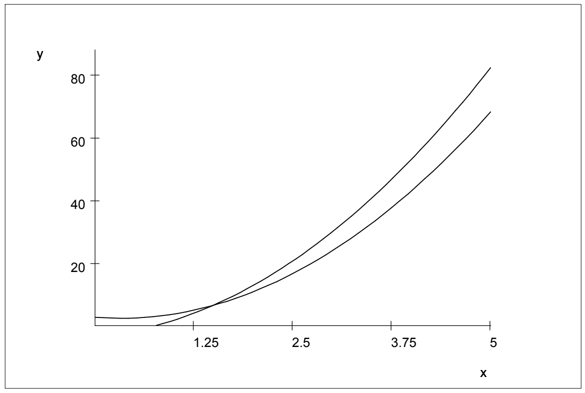
2. Se llama modelo exponencial a $y = ae^{mx}, \quad a,m \in IR,\ a,m \neq 0$



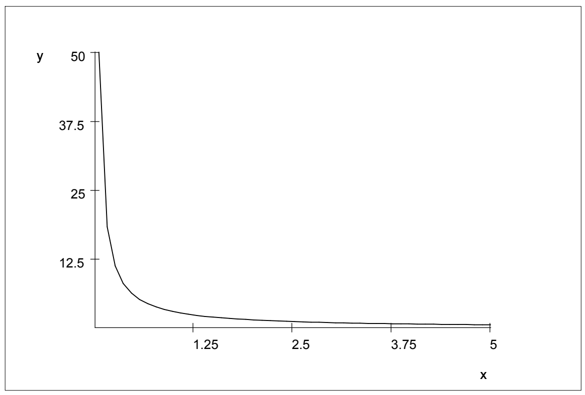
3. Modelo logarítmico $y = \frac{1}{m}\ln x \ m \in IR,\ m \neq 0 \quad x \geq 0$



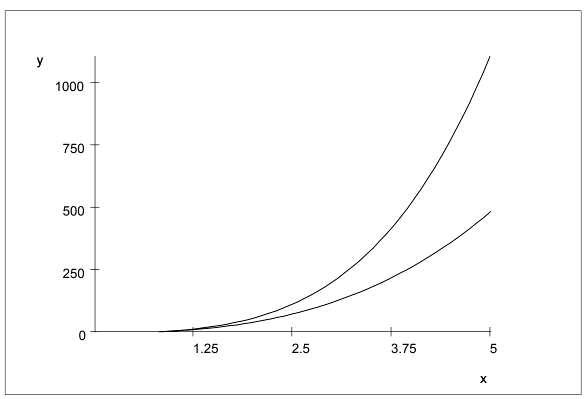
4. Modelo lineal $y = mx + b \quad m,b \in \ ,\ m \neq 0$
5. Cuadrático $y = ax^2 + bx + c,\ \ a,b,c \in \ ;\ \ a \neq 0$



6. Inversamente proporcional $y = ax^{-1}, \quad a, x \in IR$



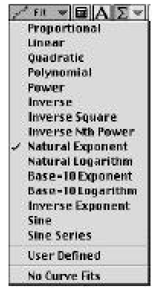
7. Polinomico $y = \Sigma_{i=0}^{n} a_i x^i \;\; \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n \;\; a_i \in IR,$ por lo menos un $a_i \neq 0 \quad 3x^3 + 2x + 4x^2 - 6$



3. Ajuste de la curva

Al observar las gráficas notamos que muchas se parecen y a veces es díficil estar seguro si el modelo que escogemos es adecuado, es más no conocemos todos los modelos. en esta sección explicaremos tres métodos para ayudarnos a escoger un modelo que se aproxime de buena forma a los datos.

1. Usando Data Studio es fácil realizar el ajuste
   Se selecciona la región de la curva que nos interesa y luego se va a fit en la barra de herramientas del display de la gráfica y se escoge el modelo adecuado de acuerdo con los siguientes parámetros:



a. Si se escoge el modelo lineal obtenemos un display parecido a

Linear Fit	
m (Slope)	9.45000
b (Y Intercept)	-16.91667
r	0.97834
Standard Deviation m	0.75569
Standard Deviation b	4.25252

y se dice que los datos se ajustan de buena forma si $r^2 > 0.95$, en nuestro caso no se ajusta de buena manera por lo que tendríamos que escoger otro.

b. Si se escoge otro modelo obtendremos un display parecido

Quadratic Fit	
A	0.76948
B	1.75519
C	-2.80952
Mean Squared Error	6.38701
Root MSE	2.52725

el modelo se ajusta de buena forma si el rootmse es muy pequeño es decir casi cero, ya que este es el error absoluto del modelo. (Utilice esta teoría para decidir)

Utilizando el ejemplo representado por la figura 10 podemos considerar cuatro modelos posibles , de los cuales ya vimos dos. Ahora consideraremos dos más

Proportional Fit	
A (Scale Factor)	6.77895
Mean Squared Error	86.89708
Root MSE	9.32186

Power Fit	
A (Scale Factor)	1.61248
n (Power)	1.75872
B (Y Offset)	-1.93769
Mean Squared Error	5.86681
Root MSE	2.42215

De acuerdo con los resultados obtenidos podemos considerar que el modelo que mejor se ajusta es el potencial por que su Rootmse es 2.4 y es el menor

Relación matemática

Luego de escoger los modelos que mejor se ajustan a los datos y se analizan los parámetros que aparecen en el display interpretando físicamente sus magnitudes , luego se escoge el modelo para el cual estos parámetros tengan significado físico.

Si en ejemplo que estamos observando consideramos que esos datos representan el cambio de posición de un carrito que se mueve sobre una mesa liza, En este caso desde el punto de vista físico existen tres posibilidades:

que el movimiento sea uniforme uniformemente ecelerado o variado como escogimos el modelo potencial la relación matemática sería

$$x = (1,6t^{1,76} - 1,94)m$$

entonces cua les son las magnitudes de A. analicemos

$$A[T]^{1,76} = [L]$$

$$A = \frac{[L]}{[T]^{1,76}}$$

el cual no representa ninguna magnitud física conocida por nosotros, lo que implique que este es el mejor modelo, pero no tiene significado físico, en cambio el modelo cuadrático

$$x = (0.79t^2 + 1,76t - 1,81)m$$

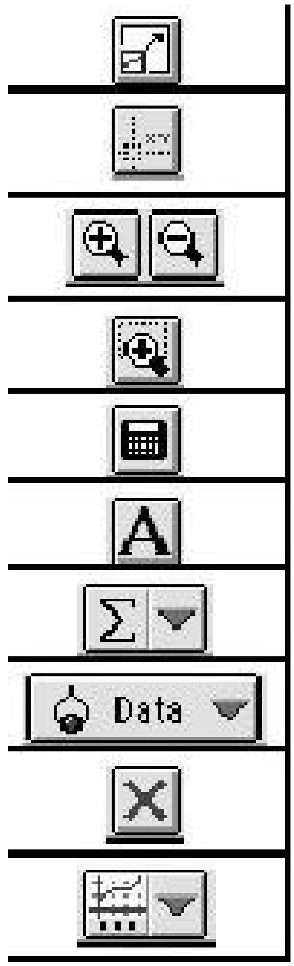
tiene un rootmse de 2,53 el cual es muy parecido a 2,42, ahora si analizamos las dimensiones de A, B y C comprobaremos que representarián la aceleración , la velocidad inicial y la posición, lo que nos daría

$$x = at^2 - v_o t + x_0$$

la cual es la ecuación de un movimiento uniformente acelerado.

De esta manera concluimos que el modelo con significado físico que mejor se ajusta al fenomeno es el cuadrático y que el carro se mueve con un movimiento uniformemente ecelerado con un error absoluto de 2,53 el cual podemos disminuir si aumentamos el número de datos.

Para finalizar daremos una pequeña explicación sobre los botones del display de la gráfica el cual enumeraremos de arriba hacia abajo



botones

1. Con este boto podemos ampliar la parte de la gráfica seleccionada se llama auto escala
2. Sirve para determinar las coordenadas de un punto que estamos indicando con el cursor
3. estos dos botones llamados zoom se usan para ampliar o disminuir el tamaño de la gráfica
4. Es otro zoom explorelo
5. Invocamos la calculadora científica del programa
6. Para escribir algo sobre el área donde se traza la gráfica
7. Este botón es muy importante aparecen operaciones y valores importantes, por ejemplo si la gráfica nos representa una linea horizontal esto nos indica que lavariable es aproximadamente constante, por lo que no determinaremos un modelo si no que escogemos mean, y con esto obtendremos el valor medio o promedio de todos los datos
8. Los otros botones los explicaremos cuando los usemos aunque nos falto uno que nos sirve para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto indicado por el cursor.

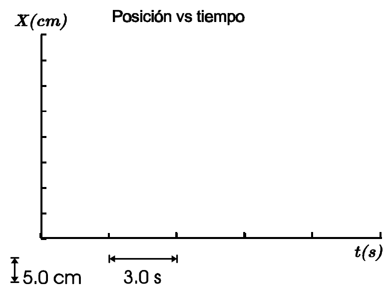
OPCIONAL

En esta sección presentaremos una introducción al análisis gráfico si el uso de un software, si no con regla, compás y calculadora

Presentación de la gráfica

para que la gráfica tenga una buna presentación y además podamos aprovechar toda la información que ella representa debemos seguir los siguientes pasos

1. Titulo: El titulo lo colocamos en la parte superior así
   (nombre de la variable en el eje *Y*) VS (nombre de la variable en el eje *X*).
2. En los ejes se colocan las letras que representan a las variables y a sus unidades, luego se indican las escalas las cuales deben ser números decimales múltiplos de 2 o 5 , como indica la gráfica



el objetivo de esto es que la gráfica se dibuje en toda el área de la hoja.

trazado de la curva

Si no contamos con un computador se grafican los puntos siguiendo alguno de los siguientes métodos

1. a. Se grafican los puntos y a continuación se intercala la gráfica entre los puntos, teniendo en cuenta que la curva sea suave (es decir que no tenga vértices) y que la misma cantidad de puntos quede a un lado que al otro de la curva. por ejemplo

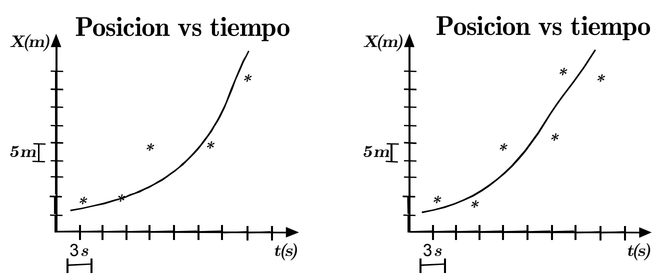


Figura 1

No se deba trazar así:

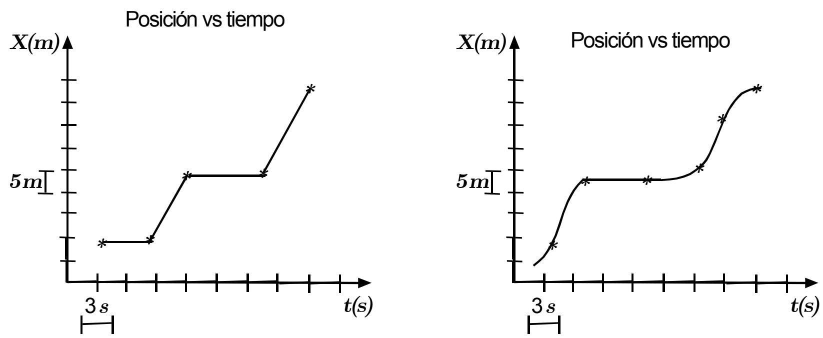


Figura 2

En las figura 1 observamos que se pueden trazar infinitas gráficas que cumplen las condiciones establecidas, mientras la figura 2 se muestran dos maneras incorrectas de trazar las curvas.

Lo que nos indica que la gráfica que trazamos no es la gráfica real, ésta sólo nos indica su forma.

b. Si al tomar los datos podemos fijar cada medida de una variable Por ejemplo: fijamos cada medida x_i de X entonces realizamos varios ensayos para determinar cada valor y_i de la variable Y, obteniendo la media $\bar{y}_i$ para cada medida, luego graficamos para cada medida los puntos $(x_i, \bar{y}_i), (x_i, y_{Máx})$ y $(x_i, y_{mín})$ como indica la figura

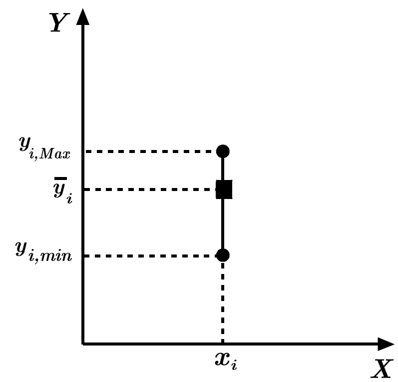


Figura 3

Luego con una serie de datos trazamos una gráfica que pase por la mayoría de los puntos medios o que toque todos los segmentos, así:

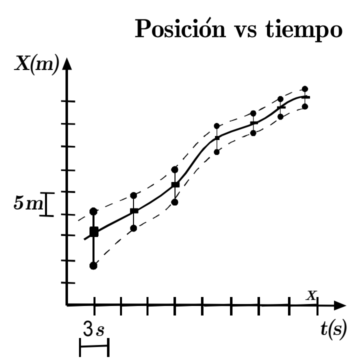


Figura 4

observemos que los segmentos indican la variabilidad de cada medida, es decir la medida real puede ser cualquier valor sobre el segmento, lo que nos indica que la curva real es una de las infinitas que podemos trazar entre las gráficas punteadas, lo que este método me determina la forma de la curva real.

c. Si cada medida (x_i, y_i) la obtenemos al realizar varios ensayos, entonces graficamos cada punto $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ tal que este en la intersección de las diagonales del rectángulo formado por los lados de longitudes $\Delta x_i, \Delta y_i$ como indica la figura 5

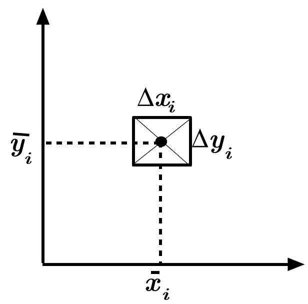


Figura 5

Con una serie de datos la curva debe pasar por todos los rectángulos como indica la figura 6.

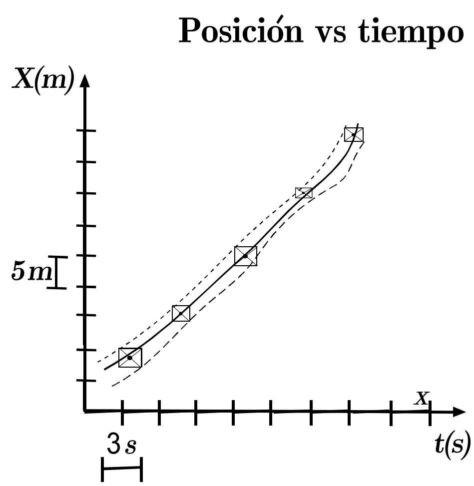


Figura 6

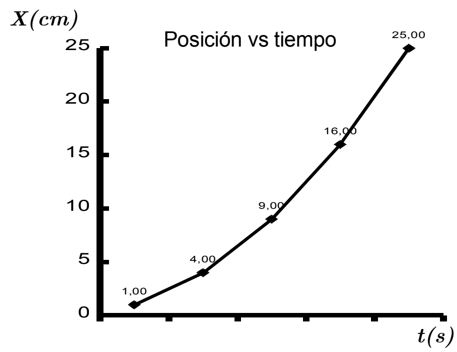
De la figura observamos lo mismo que en los dos métodos anteriores, que la gráfica que podemos trazar no es única,

Linealización :

Este método consiste en encontrar dos relaciones $h(y)$ y $f(x)$ tales que al graficar $h(y)$ vs $f(x)$ se obtenga una linea recta, es decir si esto sucede el modelo es satisfactorio.

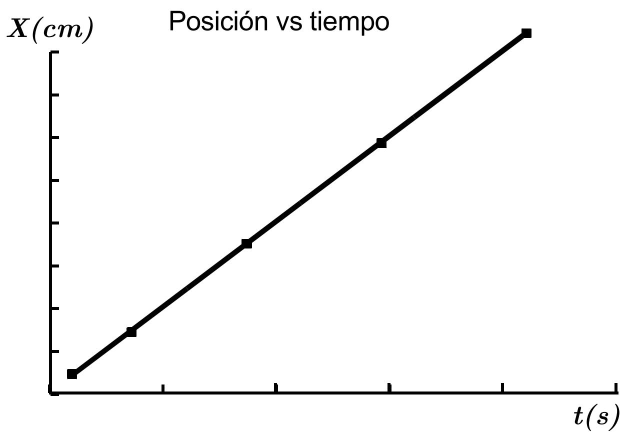
Por ejemplo si tenemos los datos

$y(cm)$	1	4	9	16	25
$x(s)$	1	2	3	4	5



De acuerdo con la forma el modelo es $y = ax^m$, pero si analizamos los datos ellos nos hacen sospechar que $m = 2$, por lo que podríamos hacer $h(y) = y$ y $f(x) = x^2$ de lo que obtenemos la siguiente tabla

$h(y)$	1	4	9	16	25
$f(x)$	1	4	9	16	25



Como se obtuvo una recta podemos decir que el modelo es aceptable y al determinar la ecuación de la recta tomamos dos puntos cualesquiera

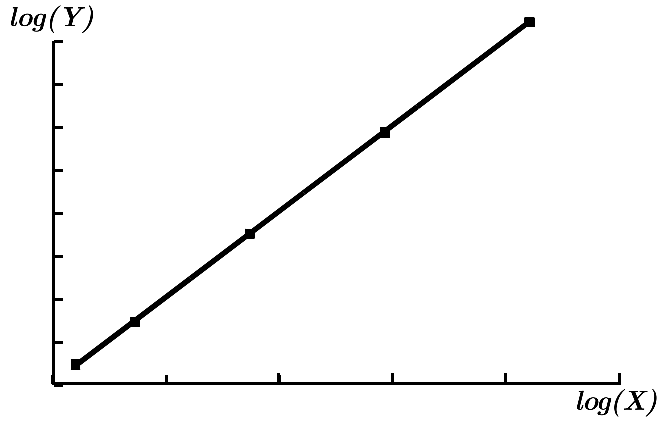
$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{16 - 9}{16 - 9} = 1$$

como la relación matemática es $h(y) = af(x)$, entonces queda $y = x^2$.
Este método no es práctico en el sentido de que si no sospechamos nada acerca de la relación matemática es casi imposible determinar $h(y)$ y $f(x)$, afortunadamente para los modelos planteados ya existen estas relaciones

1. a. Para el modelo $y = ax^m$ son

$$h(y) = \log y, \; f(x) = \log x$$

al obtener la recta



$$\log Y = m \log X + b, a = 10^b$$

podemos encontrar

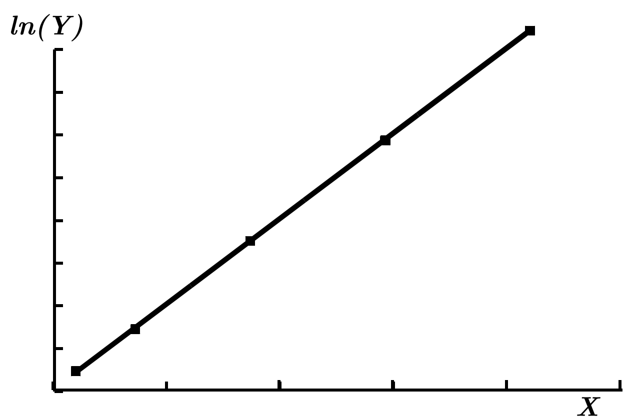
$$m = \frac{\log y_i - \log y_j}{\log x_i - \log x_j}$$
$$a = \frac{y_i}{x_i^m}.$$

En la práctica debido a los errores al tomar diferentes parejas (x_i, y_i) los valores de m y a no son constantes, por lo que hay que determinarlos varias veces y promediar los resultados, así la relación matemática queda $y = \hat{a}x^{\bar{m}}$

b. Para el modelo $y = ae^{mx}$ se escogen las relaciones

$$h(y) = \ln y,\ f(x) = x$$

y si obtenemos la recta



$$\ln Y = mX + b;\ \ a = e^b$$

podemos utilizar

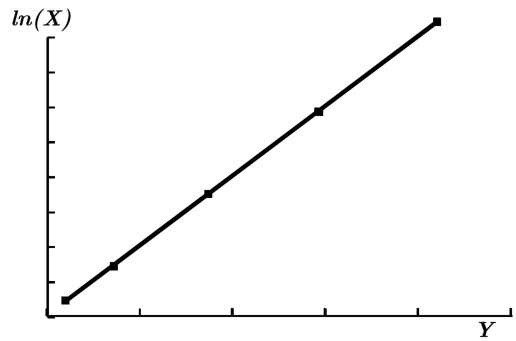
$$m = \frac{\ln y_i - \ln y_j}{x_i - x_j}$$
$$a = \frac{y_i}{e^{mx_i}}.$$

y calculamos varios valores de m y a para promediarlos y obtener la relación matemática $y = \hat{a}e^{\bar{m}x}$

c. Si el modelo es $y = \frac{1}{m}\ln x$ las relaciones son

$$h(y) = y,\ f(x) = \ln x$$

si la gráfica $f(x)$ *vs* $h(y)$ es lineal como se muestra en la figura



podemos usar

$$m = \frac{\ln x_i - \ln x_j}{y_i - y_j}$$

calculamos m varias veces y obtenemos $y = \frac{1}{m}\ln x$.

d. El modelo lineal es trivial por lo que dejamos de tarea al lector

Ajuste lineal

El ajuste lineal es un método estadístico, parecido al anterior, pero usando herramientas diferentes.
En este caso no explicaremos mucho , sólo plantearemos algunas fórmulas e interpretaremos los resultados
Si tenemos dos conjuntos de datos

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$$

definiremos la

1. a. Media aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

b. Varianza

$$S_{xx}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$S_{yy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

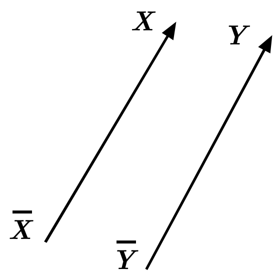
c. Covarianza

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

d. Coeficiente de correlación

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}^2 S_{yy}^2}}$$

Cuando estudiamos dos variables X y Y, en realidad estas variables estas variables tienen desde el punto de vista geométrico el comportamiento de dos vectores (rayos con dirección). Y se dice que existe un ajuste lineal si los vectores representados por las desviaciones están alineados o son paralelos.
Para determinar si esto sucede podemos utilizar la trigonometría para determinar el ángulo entre los vectores representados en la figura



Utilizando una rama de las matemáticas llamada algebra lineal se puede comprobar que si θ es el ángulo entre los vectores entonces

$$\cos\theta = r$$

Es decir este coeficiente determina la relación lineal entre las desviaciones de las variables y esta dependencia es perfecta cuando $r = \pm 1$ existe el ajuste lineal en la practica esto no sucede debido a los errores pero decimos que el ajuste es aceptable si $r^2 > 0.95$.
Si el ajuste existe deben existir dos relaciones $h(y)$ y $f(x)$ tal que el modelo

$$h(y) = mf(x) + b$$

debe tener un r adecuado y se puede calcular

$$r = \frac{n\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i)h(y_j) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\sum_{j=1}^{n} h(y_i)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{2} f(x_i)^2\right)\right]\left[n\sum_{j=1}^{n} h^2(y_j) - \left(\sum_{j=1}^{2} h(y_j)^2\right)\right]}}$$

$$m = \frac{n\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i)h(y_j) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\sum_{j=1}^{n} h(y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{2} f(x_i)^2\right)}$$

$$b = \frac{\sum_{j=1}^{n} h(y_j) - m\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

donde a se obtiene

- $a = 10^b$ en el modelo $y = ax^m$
- $a = e^b$ en el modelo $y = ae^{mx}$