Capítulo 3

Corrientes Continuas

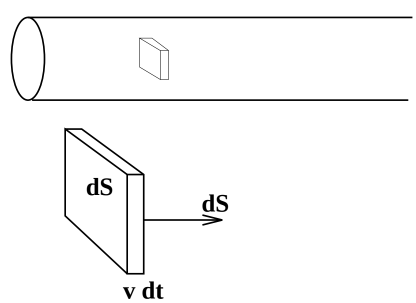
3.1 Generalidades Sobre Corrientes

En conductores se da el fenómeno de corrientes de cargas si existe una fuente que pueda mantener un campo eléctrico dentro de un conductor y provea permanentemente de cargas al sistema. Las corrientes eléctricas se caracterizan macroscópicamente por la intensidad de *corriente* eléctrica,

$$I = \frac{dQ(t)}{dt} \ [\mathrm{A}] \tag{3.1.1}$$

Como ya se ha comentado en el capítulo anterior, algunos materiales tienen la propiedad de ser conductores porque parte de las cargas que constituyen ese material puede desplazarse por él ampliamente.

Esto no significa que un material conductor por el cual circula una corriente tenga que estar cargado. Lo más típico es que un conductor, con o sin corriente circulando por él, esté neutro. Más aun, su densidad de cargas $\rho(\vec{r},t)$ puede ser nula. Esto es posible, porque junto a las cargas de conducción (típicamente electrones, pero pueden ser iones en el caso de una solución salina) hay cargas del signo opuesto que no tienen movilidad (cargas localizadas). Si se tiene un conductor con densidad de carga nula en todas partes, es que en cada elemento de volumen hay tantas cargas de conducción, que definen un ρ_C no nulo, como cargas localizadas.



Microscópicamente la corriente eléctrica puede ser descrita como un flujo de cargas debido a una densidad $\rho(\vec{r},t)$ y debido a la velocidad $\vec{v}(\vec{r},t)$

que tiene el flujo de esas cargas en cada punto y en cada instante. La cantidad de carga que atraviesa un elemento de superficie $d\vec{\mathcal{S}}$ durante un intervalo pequeño dt es la carga d^3Q contenida en un volumen de ancho $\vec{v}(\vec{r},t)\,dt$ y base $d\vec{\mathcal{S}}$ es

$$d^3Q = \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\,dt \cdot d\vec{\mathcal{S}} \qquad (3.1.2)$$

en torno a un punto $\vec{r}$ en el instante t. La *densidad de corriente* $\vec{J}$, esto es, la carga que atraviesa por unidad de sección trasversal y por unidad de tiempo se define como

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \lim_{\delta\mathcal{V}\to 0} \frac{1}{\delta\mathcal{V}} \sum_a q_a \vec{v}_a \qquad (3.1.3)$$

Cantidad que suele abreviarse como $\rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)$ pero la suma en (3.1.3) es sobre *todas* las cargas que hay en ese pequeño volumen y sin embargo, como las cargas localizadas tienen velocidad promedio nula—ya que solo se mueven en torno a su localización—se concluye que solo contribuyen las cargas de conducción.

La corriente que atraviesa una superfice $\mathcal{S}$ finita arbitraria es,

$$I = \int_{\mathcal{S}} \vec{J}(\vec{r},t) \cdot d\vec{\mathcal{S}} \qquad (3.1.4)$$

En esta expresión el signo del elemento de superficie es arbitrario, lo que hace que el signo de I sea convencional. El significado físico, sin embargo, no tiene ambigüedad. En efecto, dada una función $\vec{J}$ definida sobre una sección $\mathcal{S}$ de un conductor, la integral (3.1.4) representa la cantidad de cargas positivas por unidad de tiempo que atraviesan esa sección en la dirección en que apunta $d\vec{\mathcal{S}}$. Si la integral resulta negativa, significa que las cargas positivas están atravesando en el sentido opuesto al $d\vec{\mathcal{S}}$ escogido.

Si se tiene una superficie cerrada y existe movimiento de cargas a través de ella, la carga total encerrada depende, en general, del tiempo,

$$Q_{\mathcal{V}}(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r},t)\,d\mathcal{V} \qquad (3.1.5)$$

Si se toma la derivada de esta ecuación con respecto al tiempo, al lado izquierdo se tiene la derivada de la carga total, derivada que obviamente es positiva si $Q_{\mathcal{V}}$ está aumentando de valor. La derivada representa a la cantidad neta de carga positiva que está ingresando al volumen por unidad de tiempo. Tal cantidad es lo que se ha llamado corriente en (3.1.1)

La carga que ingresa también puede ser descrita por medio de la densidad de corriente $\vec{J}$ haciendo uso de (3.1.4). Para describir la corriente que ingresa como una cantidad positiva (y usar los mismos signos que en el párrafo anterior), es necesario integrar $-\vec{J}\cdot d\vec{\mathcal{S}}$, ya que el elemento de superfice cerrada apunta *hacia afuera*. Por lo tanto se debe escribir la igualdad,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\mathcal{V} &= -\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{J}\cdot d\vec{\mathcal{S}} \\ &= -\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{J}\,d\mathcal{V}\end{aligned}$$

Puesto que esta igualdad vale para cualquier volumen, entonces debe satisfacerse la llamada *Ley de Continuidad*,

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (3.1.6)$$

La última ecuación establece que si la densidad de carga está variando en un punto, entonces la divergencia de la densidad de corriente es no nula. Ella expresa que la carga eléctrica es una cantidad conservada, en el sentido que al disminuir en una región, aumenta en otra.

En este capítulo no se hablará explícitamente de la polarizabilidad de un conductor, sin embargo este fenómeno está presente aun cuando a menudo representa un efecto despreciable. Si el vector de polarización $\vec{P}$ esta cambiando en el tiempo, en general la densidad de cargas de polarización ρ_P depende del tiempo. Sea $\mathcal{V}$ un volumen arbitrario y $Q_P(t)$ la carga de polarización dentro de él. Razonando en igual forma como se hizo para obtener (3.1.6), la derivada de Q_P con respecto al tiempo puede expresarse tanto en la forma $-\oint \vec{J}_P \cdot d\vec{S}$ como también en la forma,

$$\begin{aligned} \frac{dQ_P}{dt} &= \frac{d}{dt}\int \rho_P \, d\mathcal{V} \\ &= -\frac{d}{dt}\int \nabla \cdot \vec{P} \, d\mathcal{V} \\ &= -\oint \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad (3.1.7) \end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{V}$ es un volumen arbitrario se desprende que se puede hacer la identificación:

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad (3.1.8)$$

Algunas aclaraciones. Se ha hablado de las cargas que se mueven en un conductor. Antes se ha hablado de *cargas libres* y de *cargas de polarización*. Aquí se tratará de señalar el papel que juegan estos distintos tipos de carga.

Un conductor tiene *cargas de conducción*, que son las que dan origen a la densidad de carga que se usa cuando se define $\vec{J}$ en (3.1.3). Estas cargas de conducción en un metal son electrones, son negativas. La densidad de cargas de conducción es un característica del material.

Hay materiales cuya conductividad es despreciable y que llamaremos *aislantes*. Normalmente se supondrá que su conductividad es nula. Los aislantes reales, sin embargo, tiene una conductividad que no es estrictamente nula.

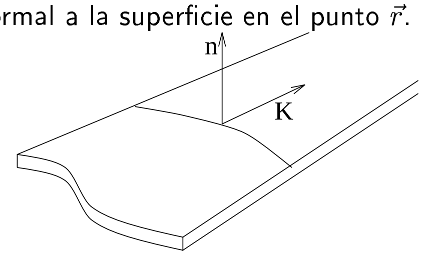
Puesto que al estudiar corrientes normalmente se trabaja con conductores neutros, entonces junto a estas cargas de conducción hay cargas positivas, los iones cristalográficos. La suma de las cargas de conducción y las cargas de los iones debe dar globalmente cero si el conductor está descargado.

Los dipolos a nivel molecular están formados por cargas positivas que tienen relativamente poco movimiento y electrones *ligados*, es decir, no se trasladan como los electrones de conducción. Sin embargo su movimiento en torno a los centros cristalográficos significa la presencia de corrientes eléctricas locales en la materia que, si bien no aportan al valor de la corriente macroscópica, sí tienen implicaciones magnéticas. Entonces también puede ser de interés en ciertos casos considerar las *corrientes de polarización* mencionadas en (3.1.8).

En ocasiones es útil considerar *corrientes de superficie*. Estas son corrientes bidimensionales y se definen a partir de densidades superficiales de corriente $\vec{K}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$, como el flujo a través de una línea ℓ que corta la superficie en cuentión, como,

$$I_\ell = \int_\ell \vec{K}(\vec{r}) \times \hat{n} \cdot d\vec{r} \qquad (3.1.9)$$

ℓ es una sección (unidimensional) de la superficie por la que fluye $\vec{K}$, y $\hat{n}$ es la normal a la superficie en el punto $\vec{r}$.

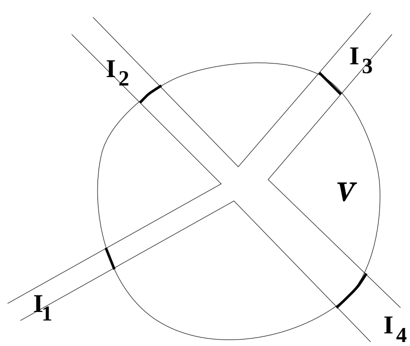


Como toda corriente $\vec{K}$ tiene un signo que depende del signo convencional de la normal $\hat{n}$ y del signo con que se recorre el camino trasversal.

3.2 Corrientes Continuas y Ley de Ohm

En el caso de *corrientes continuas* se debe considerar un *régimen estacionario* para el cual se cumple que

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ \rho &= \rho(\vec{r}) \qquad (3.2.1) \\ \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) &= 0\,. \qquad (3.2.2) \end{aligned}$$



La primera relación es equivalente a $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. Nótese que la condición de rotor nulo del campo eléctrico continúa siendo válida en el caso de corrientes continuas. Esto permite que pueda seguir usándose la noción de potencial eléctrico en el mismo sentido que se utilizó en electrostática.

En régimen estacionario el balance de corriente que entra y sale de cualquier nodo de un circuito suma cero. Para verlo basta con tomar un volumen rodeando al nodo de modo que su superficie corte a los conductores en secciones arbitrarias como en la figura. Al hacer una integral de la divergencia (que es nula por (3.2.2)), se obtiene,

$$0 = \int_V \nabla \cdot \vec{J} d\mathcal{V}$$

$$
\begin{aligned}
&= \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{J}\cdot d\vec{\mathcal{S}} \\
&= \sum_k I_k \qquad (3.2.3)
\end{aligned}
$$

A esta última relación se la conoce como *primera ley de Kirchhoff* y será utilizxada más adelante.

Argumento intuitivo sobre conductividad eléctrica. Cuando existe una diferencia de potencial V entre los extremos de un hilo conductor, hay una corriente I constante en el tiempo. Ella se debe al campo eléctrico que aparece dentro del conductor, el cual también es constante en el tiempo. La presencia de este campo implica que sobre cada carga q de conducción existe permanentemente una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$. A primera vista puede resultar paradojal que haya una corriente constante si hay una fuerza permanente sobre las cargas, ya que tal fuerza debiera dar un movimiento constantemente acelerado. Lo que ocurre es que las cargas q avanzan intercambiando momento lineal y energía con los átomos, lo que tiene un efecto neto semejante a la viscosidad. Un cuadro sencillo que ayuda a la intuición es imaginarse que los electrones van chocando con los átomos (la viscosidad misma es un efecto promedio de colisiones dentro de un fluido). Si τ es el tiempo promedio entre cada choque de una carga q particular, entonces la velocidad final — justo previa al próximo choque — es $\tau qE/m$. La velocidad media con que avanzan las cargas es justo la mitad de eso, $v = q\tau E/2m$. Por otro lado, puede tomarse como valor de la densidad de corriente $J = \rho v$, ver (3.1.3), lo que permite eliminar v y obtener que $J = (\rho q\tau/2m)E$. Este sencillo cuadro permite además comprender que el paso de una corriente eléctrica calienta a un conductor, ya que los múltiples choques aumentan la energía de vibración de los átomos del material.

Aun cuando la descripción anterior es poco rigurosa, da una idea del fenómeno de la resistencia eléctrica. Mucho antes que se supiera de la existencia de átomos y electrones, Ohm estableció la ley experimental que lleva su nombre,

$$
\vec{J}(\vec{r}) = g\vec{E}(\vec{r}) \qquad (3.2.4)
$$

donde g es la *conductividad* del medio. Su recíproco, $\eta = 1/g$ se llama *resistividad*.

En un circuito eléctrico normalmente existen baterías u otras fuentes de poder que entregan la energía a través de crear una diferencia de potencial y por lo tanto un campo eléctrico. El campo eléctrico normalmente tiene un valor no trivial en una amplia zona del espacio, pero la conductividad g es no nula solamente en los conductores, por lo que al estudiar corrientes solo interesa el campo eléctrico, o bien la diferencia de potencial entre puntos de un conductor.

Si se tiene un hilo conductor homogéneo de largo ℓ al que se le aplica una diferencia de potencial V entre sus extremos, entonces el campo eléctrico en su interior es aproximadamente

$$\vec{E} \approx \frac{V}{\ell}\hat{k} \tag{3.2.5}$$

y la corriente por él es

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = g \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \approx \frac{gVA}{\ell} \tag{3.2.6}$$

donde A es la sección del hilo conductor.

En general se define la *resistencia* eléctrica R de un conductor a través de la Ley de Ohm,

$$V = RI \tag{3.2.7}$$

por lo cual, en el ejemplo anterior, se ve que la resistencia de un hilo es

$$R = \frac{\ell}{Ag} \qquad \left[\text{Ohm} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}}\right] \tag{3.2.8}$$

La resistencia de un hilo conductor aumenta con su largo, disminuye si la sección es mayor y es inversamente proporcionalidad a la conductividad g del material del cual está hecho el hilo. Cuando el conductor es de forma más irregular la expresión del campo eléctrico puede ser muy complicada, pero siempre se puede usar (3.2.7).

A continuación se dará un argumento de carácter general para ver (3.2.7) a partir de (3.2.4). Se argumentará que el cuociente $R = V/I$ entre la diferencia de potencial $V = V_A - V_B$ aplicada entre los extremos A, B de un conductor y la corriente que pasa por él no depende de V. Para ver esto se debe recordar que el potencial dentro del conductor se obtiene resolviendo la ecuación de Laplace para $V(\vec{r})$ usando como condiciones de borde que V en un extremo vale V_A y en el otro vale V_B. Esta función V determina al campo eléctrico $\vec{E} = -\nabla V$ que a su vez determina la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}) = g\,\vec{E}(\vec{r})$ que determina la corriente. Si se aplicara una diferencia de potencial diferente, λV, entonces el campo eléctrico sería $\lambda\vec{E}(\vec{r})$ y finalmente la corriente total sería λI, de modo que el nuevo cuociente sería $\lambda V/\lambda I = V/I$. Es decir, el cuociente no cambia porque se aplica una diferencia de potencial diferente. La resistencia es una propiedad intrínseca de la conección AB del conductor que se trate.

Pero más sencillo es observar que la resistencia es

$$R = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{r}}{g \int \vec{E} \cdot d\vec{S}} \tag{3.2.9}$$

y por lo tanto al cambiar $\vec{E} \to \lambda\vec{E}$ no cambia el valor de R.

Las ecuaciones que rigen el flujo de corriente continua son:

a) $\vec{E} = -\nabla V$

b) $\vec{J} = g\vec{E}$

c) $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Para el caso de conductores homogéneos ($g =$ uniforme), las ecuaciones anteriores permiten deducir que,

d) $\nabla^2 V = 0$.

A esto hay que agregar las condiciones de borde:

e) V es continuo en todos los puntos donde el campo eléctrico es finito;

f) en las superficies de contacto con la fuente (electrodos) se tiene $V =$ constante, lo que muestra, de (a) y (b) que $\vec{J}$ nace perpendicular a los electrodos y naturalmente ahí se puede calcular,

g) $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$

El resto de las condiciones de borde se dan a continuación. Tal como en el estudio de condiciones de borde con dieléctricos, se deduce la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico,

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad (3.2.10)$$

que también es,

$$g_2 J_{1t} = g_1 J_{2t} \qquad (3.2.11)$$

que implica que en estas superficies, $\nabla \times \vec{J} \neq 0$.

Para estudiar las componentes normales se considera una densidad de corriente $\vec{J}$ que fluye cruzando una superficie de contacto entre conductores de distinta conductividad g. Si se hace una integral de la divergencia (nula) de $\vec{J}$ en el volumen de un cilindro infinitesimal con eje normal a la superficie, $\int \nabla \cdot \vec{J} d\mathcal{V}$, se obtiene inmediatamente que,

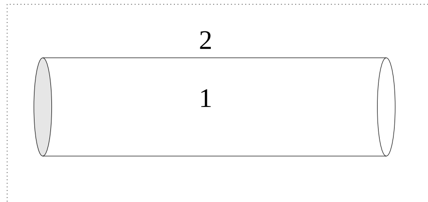
$$J_{1n} = J_{2n} \qquad (3.2.12)$$

y por lo tanto

$$g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n} \qquad (3.2.13)$$

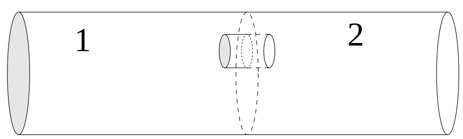
De las condiciones de borde recién descritas se puede obtener varias consecuencias sencillas.

- Si la conductividad del medio 2 es nula (2 es aislante) entonces $\vec{J}_2 = 0$. De (3.2.12) se obtiene que $J_{1n} = 0$, es decir, $\vec{J}_1$ muy cerca de la interfaz es paralela (tangencial) a la interfaz.



- En la situación de la figura de más abajo, si se dibuja un pequeño cilindro, de sección A, de manto perpendicular a la interfaz entre dos conductores 1 y 2 de constantes dieléctricas y conductividades (ε_1, g_1) y (ε_2, g_2) respectivamente, se debe tener que

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_\ell(\mathcal{V}) = A\,\sigma_\ell$$



El valor de esta integral proviene solo de la contribución de las tapas e implica

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_\ell$$

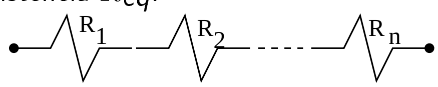
que ya había sido vista en (1.10.4)

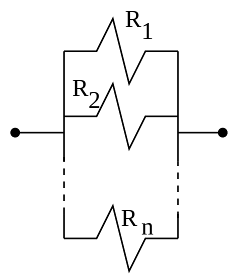
Esta relación puede ser reescrita como $\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_\ell$ y también en la forma

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{g_2} - \frac{\varepsilon_1}{g_1}\right) J_n = \sigma_\ell\,. \qquad (3.2.14)$$

donde J_n es la componente normal de la densidad de corriente, proyectada sobre la normal $\hat{n}$ que apunta del medio 1 al medio 2. La conclusión es que el paso de corriente de un medio conductor a otro produce una densidad de carga superficial dada por (3.2.14).

EJERCICIO 3.2-1. *Demostrar que si se conecta en serie n resistencias, el sistema es equivalente a tener una sola resistencia R_{eq}:*





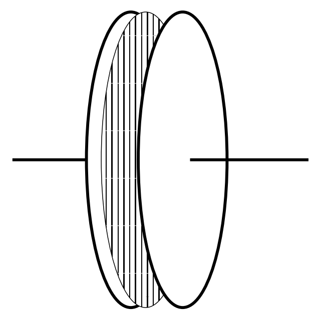
$$R_{\mathsf{eq}} = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{3.2.15}$$

y si se conectan en paralelo la resistencia equivalente es

$$\frac{1}{R_{\mathsf{eq}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \tag{3.2.16}$$

En un condensador de capacidad C cuyo medio dieéctrico es imperfecto porque tiene cierta conductividad g además de una constante dieléctrica ε se puede ver que el producto entre su capacidad y su resistencia R es $RC = \frac{\varepsilon}{g}$. Para demostrarlo notamos que

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\int \vec{D}\cdot d\vec{S}}{\int \vec{E}\cdot d\vec{r}} = \frac{\varepsilon \int \vec{E}\cdot d\vec{S}}{\int \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$



Se integra sobre una superficie S muy cercana a una de las placas.

donde la integral que reemplazó a Q es la integral de superfice de σ_ℓ en la cara del conductores positivo de los dos conductores enfrentados y

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int \vec{E}\cdot d\vec{r}}{\int \vec{J}\cdot d\vec{S}} = \frac{\int \vec{E}\cdot d\vec{r}}{g\int \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

3.3 Fuerza Electromotriz y Efecto Joule

Una *fuente de potencial* es un dispositivo que crea entre sus contactos A, B una diferencia de potencial. Los ejemplos más típicos son las baterías y los dínamos. A estas fuentes se les asocia varias características, entre las que se destacan: la resistencia interna R_i y la *fuerza electromotriz* o f.e.m. (que se mide en *Volts*), la que produce una discontinuidad en el campo eléctrico.

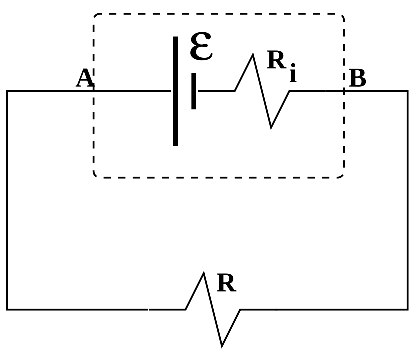
La f.e.m. representa una diferencia de potencial intrínseco de la fuente y se designa con el símbolo $\mathcal{E}$.

Si se mide la diferencia de potencial $V = V_A - V_B$ entre los bornes de una fuente y no hay corriente circulando a través de ella, el resultado es $\mathcal{E}$. En cambio si los bornes A, B se conectan a una resistencia R circula una corriente I. La caida de potencial V en R en tal caso es

$$V = RI = V_A - V_B > 0 \qquad (3.3.1)$$

Pero también puede pensarse que existe una diferencia de potencial $\mathcal{E}$ y dos resistencias en serie,

$$\mathcal{E} = (R + R_i)I \qquad (3.3.2)$$



que se combina con la relación previa y da,

$$V = \mathcal{E} - R_i I \qquad (3.3.3)$$

El trasporte de cargas a través de una resistencia significa trabajo y por tanto pérdida de energía del sistema batería-resistencia. Si en un lapso Δt una carga Δq va de A a B,

$$\Delta q = I\Delta t \qquad (3.3.4)$$

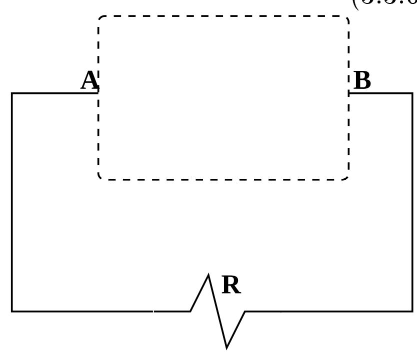
entonces la energía inicial asociada a Δq es $U_{\mathsf{in}} = V_A \Delta q$ y la energía final es $U_{\mathsf{fin}} = V_B \Delta q$.

La energía que el sistema pierde en la resistencia R por este efecto es disipada como calor. Si P es la potencia disipada en R (energía disipada por unidad de tiempo), entonces

$$U_{\mathsf{in}} = V_A \Delta q = V_B \Delta q + P\Delta t, \qquad (3.3.5)$$

que se reduce a,

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \left[\text{Watt}=\frac{\text{Joule}}{\text{seg}}\right] \qquad (3.3.6)$$

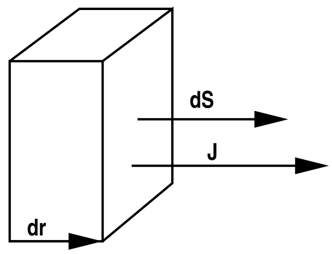


Esta producción de calor debida al paso de una corriente se denomina *efecto Joule*.

EJERCICIO 3.3-1. *Demostrar que un circuito formado por una batería y una resistencia R entrega el máximo de potencia a R cuando $R = R_i$.*

Ahora se estudiará el efecto Joule desde un punto de vista local. Se toma un elemento de cúbico volumen, $d\mathcal{V}$ con cuatro aristas paralelas a la densidad de corriente $\vec{J}$ en ese punto. La diferencia de potencial entre las caras opuestas es $dV = \vec{E} \cdot d\vec{r}$, mientras que la corriente que pasa por esas caras es $dI = \vec{J} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$. Entonces la potencia que se disipa en $d\mathcal{V}$ es

$$dP = dV\,dI = \vec{J} \cdot d\vec{\mathcal{S}}\;\; \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad (3.3.7)$$



Pero como el elemento de camino $d\vec{r}$ es paralelo a $\vec{J}$, por elección del elemento de volumen, entonces el lugar de estos dos vectores puede ser intercambiado en la expresión anterior,

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{J}\;\; d\vec{r} \cdot d\vec{\mathcal{S}} \qquad (3.3.8)$$

pero $d\vec{r} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$ es el elemento de volumen $d\mathcal{V}$ sobre el cual se integra, obteniéndose,

$$P = \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E}\, d\mathcal{V} \qquad (3.3.9)$$

Esta es la expresión general de la potencia disipada. La expresión (3.3.6) en cambio, tiene sentido solo en los casos particulares cuando existe una única diferencia de potencial en el problema.

En la deducción anterior se hizo el intercambio de posición de dos vectores:

$$d\vec{r} \longleftrightarrow \vec{J} \qquad (3.3.10)$$

y el mismo procedimiento va a ser usado varias veces en el futuro.

3.4 Circuitos y Leyes de Kirchhoff

Un circuito puede pensarse como una malla de resistencias, baterías, condensadores etc, unidos por conductores *perfectos*.

Se llama *nodo* de un circuito a un punto al que convergen más de dos conductores. Si por estos conductores vienen corrientes I_k hacia un nodo entonces, en régimen estacionario, se debe cumplir que,

$$\sum_k I_k = 0 \qquad (3.4.1)$$

relación que se conoce como la primera ley de Kirchhoff y se comentó con más detalle al obtener (3.2.3).

Se dice que dos nodos son consecutivos si existe un camino por el circuito que los une sin pasar por otro nodo. Cada camino entre dos nodos consecutivos se llama *rama*.

Normalmente en un circuito es posible definir un camino que parte y termina en un cierto nodo A sin que se pase dos veces por la misma rama. Tal camino se llama *cerrado*.

Dado un circuito siempre es posible determinar la corriente que pasa por cada rama y la caída de potencial que hay en ella resolvbiendo un sistema lineal acoplado de ecuaciones para las corrientes. Para resolver este problema se debe escoger tantos caminos cerrados como sea necesario. A cada camino cerrado se le asocia arbitrariamente un sentido arbitrario de circulación y a cada rama del circuito se le asigna una corriente incógnita con un sentido también arbitrario.

La segunda ley de Kirchhoff da la relación matemática que debe escribirse por cada camino cerrado — y proviene de la condición de irrotacionalidad (ver (3.2.2)) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ — y se define como sigue:

- a) La caída de potencial en cada resistencia R por la que pasa una corriente I (incógnita) cuyo signo coincide con el sentido de circulación del camino cerrado, es $+RI$, de lo contrario es $-RI$.

- b) Si los polos de una batería son atravesados de $+$ a $-$ por el sentido de circulación, se tiene una caída $+\mathcal{E}$.

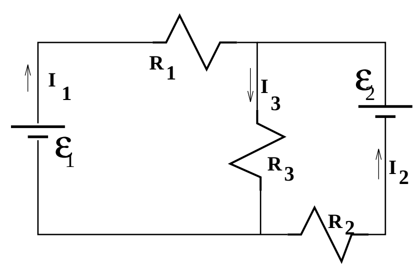
- c) La suma de las caídas de potencias en cada rama del camino cerrado debe ser cero.

Para resolver un circuito de corriente continua se cuenta con las ecuaciones de nodo (primera ley de Kirchhoff) y ecuaciones por cada camino cerrado (segunda ley de Kirchhoff) diferente que exista. Si un circuito tiene n nodos y r ramas se pueden plantear $n-1$ ecuaciones de nodo independientes y $r-n+1$ ecuaciones de camino cerrado independientes. El total da r ecuaciones independientes para encontrar las r corrientes que circulan por las r ramas del circuito.

Ejemplo: el circuito de la figura tiene tres resistencias R_k $(k = 1..3)$ conocidas, y dos baterías caracterizadas por sus $\mathcal{E}_k$ $(k = 1, 2)$. De la figura se ve que el número de nodos es $n = 2$ y el número de ramas es $r = 3$. La única ecuación de nodo en este caso es

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{3.4.2}$$

Y las dos ecuaciones de camino cerrado que escribimos son



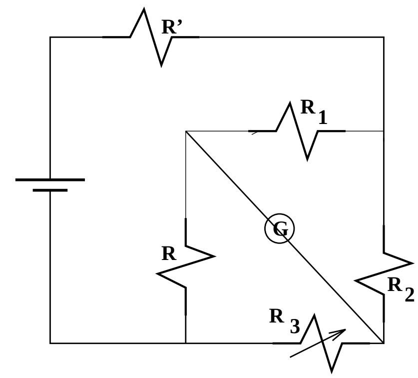
$$\begin{aligned} I_1R_1 + I_3R_3 - \mathcal{E}_1 &= 0 \\ -I_3R_3 + \mathcal{E}_2 - R_2I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Estas son tres ecuaciones lineales inhomogéneas para tres incógnitas I_k cuya solución es

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mathcal{E}_1(R_2+R_3) - \mathcal{E}_2R_3}{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}_2(R_1+R_3) - \mathcal{E}_1R_3}{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3} \\ I_3 &= \frac{\mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_1}{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3} \end{aligned}$$

A continuación se representa dos circuitos clásicos y se entrega la solución. La forma de obtener estas soluciones se deja como ejercicio.

El Puente de Wheatstone. El circuito de la figura tiene tres resistencias R_k conocidas, un galvanómetro



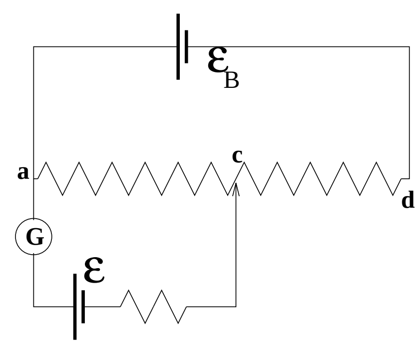
representado por **G**, una batería y una resistencia caracterizadas por magnitudes $\mathcal{E}$ y R' cuyos valores no importan y una resistencia R cuyo valor se desea medir. Un galvanómetro es un instrumento de resistecia despreciable y muy sencible al paso de corriente. La resistecia R_3 es una resistencia variable propia del *puente* y está muy bien calibrada. Se determina R haciendo varias R_3 hasta conseguir que **G** indique un paso nulo de corriente. Demuestre que en tal situación:

$$R = \frac{R_1 R_3}{R_2} \tag{3.4.3}$$

Conviene demostrar primero que $V_{AB} = 0$.

Potenciómetro. En este caso se trata de un instrumento que nuevamente hace uso de un galvanómetro **G**. Esta vez se determina la $\mathcal{E}$ de una batería a partir de una batería estándar $\mathcal{E}_B$ y de una resistencia variable de tres puntas y cuya resistencia máxima es R_{ad}. El punto c intermedio es variable. Demuestre que cuando se logra corriente nula a través de **G** se cumple que

$$\mathcal{E} = \frac{R_{ac}}{R_{ad}} \mathcal{E}_B \tag{3.4.4}$$



3.5 Problemas

3.1 Dos trozos de material conductores imperfectos (ε_1, g_1 y ε_2, g_2) de igual geometría (paralelepípedo rectangular) están unidos por una de sus caras (de área A_0). Las respectivas caras opuestas a las caras de contacto son mantenidas con una diferencia de potencial V_0 y la arista perpendicular a estas caras es de largo b en cada material. Determine la carga libre en la superficie de contacto.

3.2 Se tiene dos mantos cilíndricos concéntricos de la misma altura h, de radios a y b que son conductores "perfectos". El espacio entre ellos está lleno con dos materiales caracterizados por sus constantes diléctricas y conductividades: (ε_1, g_1) y (ε_2, g_2) respectivamente. Si se mantiene una diferencia de potencial V_0 entre los conductores determine (a) el campo eléctrico en cada punto en la zona entre los dos conductores perfectos y (b) la resistencia R del sistema y la potencia P que se disipa entre los dos cilindros. Desprecie los efectos de los bordes.

3.3 Un conductor esférico de radio a está rodeado por un conductor concéntrico de radio $b > a$. El espacio entrelos conductores está lleno con un medio cuya conductividad varía con el radio: $g = \frac{c}{r}$. Si la esfera exterior se mantiene a un potencial V_0 y una corriente total I fluye radialmente entre los conductores determine: • el potencial eléctrico a una distancia $r > a$ desde el centro y • la potencia disipada en el medio.

3.4 Se sabe que la atmósfera tiene una conductividad (causada principalmente por los rayos cósmicos) que depende de la alturade la siguiente manera:

$$g(z) = (3+0.5z^2)\,10^{-14} \quad [\Omega m]^{-1} \tag{3.5.1}$$

donde z es la distancia vertical sobre el suelo. Se ha encontrado además un campo eléctrico vertical, dirigido hacia el suelo, que en la superficie de la tierra vale:

$$\vec{E} = -100\hat{k} \quad [\mathrm{V/m}] \tag{3.5.2}$$

el siguiente modelo de la atmósfera: Una capa conductora paralela a la superficie, situada a una distancia de $15[\mathrm{Km}]$ sobre el suelo; entre esta capa y la tierra se encuentra la atmósfera, con la conductividad y el campo eléctrico indicados más arriba. El radio de la tierra es $R_T = 6400[\mathrm{Km}]$. (a) Calcule el campo eléctrico y el potencial en la atmósfera, en función de la altura z. (b) Calcule la corriente total que fluye entre la capa superior conductora y la tierra. (c) Calcule la densidad de carga superficial en la superficie de la tierra y la densidad de carga en la atmósfera. Sugerencia: aproveche la condición: $z \ll R_T$ con lo cual se pueden considerar las superficies son planas.