MÉTODOS NUMÉRICOS.

ASIGNACIÓN #2.

PRESETADO POR:

ANTALCIDES OLIVO BURGOS
IRINA RUIZ BAENA.

PRESENTADO A:
DR JUAN CARLOS ORTIZ
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

UNIVERSIDAD DEL NORTE-UNIVERSIDAD
ESPECIALIZACIÓN EN FÍSICA GENERAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA.
OCTUBRE 27 del 2.003

Asignación 2

1 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

1.1 LA REGLA DEL TRAPECIO

El método de Euler aproxima la derivada en $[x_n, x_{n+1}]$ por una constante, concretamente por su valor en x_n. ¿Por qué privilegiar al punto x_n? ¿No será mejor tomar , por ejemplo, como aproximación constante de la derivada el promedio de sus valores en los extremos del intervalo? En ese caso

$$y(x_{n+1}) = y\left(x_n\right) + h\frac{f\left(x_n, y\left(x_n\right)\right) f\left(x_{n+1}, y\left(x_{n+1}\right)\right)}{2} + R_n$$

donde R_n es el error de truncación, por lo que se aproxima de la forma.

$$y_{n+1} \approx y_n + h\frac{f\left(x_n, y\left(x_n\right)\right) f\left(x_{n+1}, y\left(x_{n+1}\right)\right)}{2}$$

Esta aproximación conduce a la llamada regla del trapecio
la cual es convergente de grado dos, es decir

$$\|e_n\| \leq e^{(b-a)L/\left(1-\frac{hL}{2}\right)} \|e_0\| + \frac{Ch^2}{L}\left(e^{(b-a)L/\left(1-\frac{hL}{2}\right)} - 1\right), \text{ si } 0 \leq n \leq N$$

$$\text{donde } e_n = y\left(x_n\right) - y_n,\ \frac{hL}{2} < 1,\ C = \frac{5}{12}\max_{x\in[a,b]}\left\|y'''\left(x\right)\right\|$$

a pesar de que la regla del trapecio tiene un orden de convergencia mayor que el método de Euler. eso no significa que sea un método mejor , pues hay otra diferencia importante entre ambos métodos. el método de Euler es *explícito,* el valor de y_{n+1} viene dado explícitamente en término del valor anterior y_n y se puede calcular fácilmente mediante la evaluación de f y una pocas operaciones aritméticas. por el contrario, la regla del trapecio es un método *implícito*, para calcular y_{n+1} hay que resolver un sistema de ecuaciones no lineales, lo que en general es computacionalmente costoso. de lo que se deduce, el orden no lo es todo. Aunque en un método de orden alto en principio hay que dar menos pasos, estos pueden ser muy costosos, por lo que puede ser mejor un método de menos orden en el que a pesar de dar más pasos cada uno de ellos lleve menos trabajo computacional.

1.2 Aplicaciones

Para aplicar este método resolveremos dos problemas de física mécanica analíticamente y usando Fortran lo resolveremos computacionalmente y luego calculamos el error.

1. un objeto que pesa 48 lb se suelta desde el reposo en la parte superior de un plano inclinado metálico que tiene una inclinación de 30° respecto a la horizontal. la resistencia del aire es numéricamente igual a un medio de la velocidad (en pies por segundo), el coeficiente de rozamiento es $\frac{1}{4}$

   (a) ¿Cuál es el tiempo que tarda el objeto para adquirir una velocidad de 10.2 ft/s después de haberse soltado?

   (b) ¿Cuál es la distancia sobre el plano que ha recorrido el cuerpo, para alcanzar la velocidad de 10.2 ft/s?

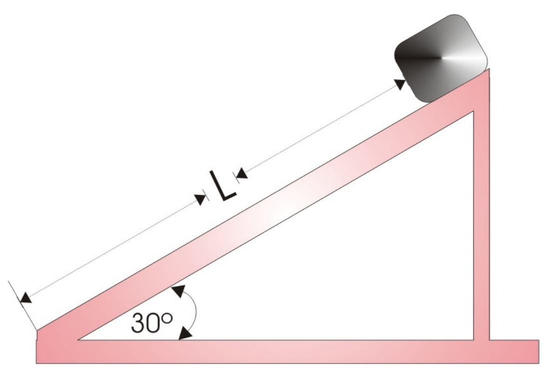


Figura1

Solución 1 *a. La línea de movimiento es a lo largo del plano, si escogemos el origen del sistema de referencia en la parte superior y el sentido positivo de las x hacia abajo del plano, entonces las*

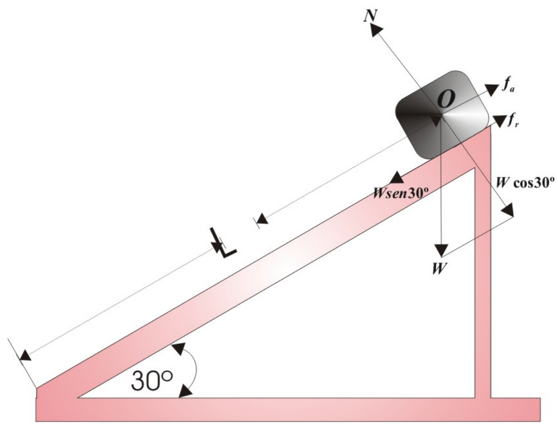


Figura 2

fuerzas que actúna sobre el objeto A son:
Su peso de 48 lb que actúa verticalmente hacia abajo.
La fuerza normal, N que ejerce el plano sobre el objeto la cual actúa en la dirección positiva y perpendicular al plano.
La resitencia del aire f_a*,que tiene un valor numérico igual a* $\frac{v}{2}$*, puesto que* $v > 0$ *esta fuerza tiene una dirección negativa en* x*.*
La fuerza de rozamiento, que tiene un valor μN *y tiene una dirección negativa en* x*.*
de la gráfica 2 y aplicando la segunda ley de Newton obtenemos

$$\begin{aligned} en\ x:\quad ma\ &= Wsen30ba - f_s - f_r \\ f_r &= \mu N \\ en\ y: 0 &= N - W\cos 30ba \end{aligned}$$

Reemplazando los valores y resolviendo el sistema de las tres ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\frac{3}{2}\frac{dv}{dt} = 24 - 6\sqrt{3} - \frac{1}{2}v$$

al separar variables se obtiene

$$\frac{dv}{48 - 12\sqrt{3} - v} = \frac{dt}{3}$$

como cuando $t = 0,\ v = 0$ *se tiene*

$$\int_0^{10.2} \frac{dv}{48 - 12\sqrt{3} - v} = \int_0^t \frac{dt}{3} \tag{1}$$

$$0.469\,66 = \frac{1}{3}t \tag{2}$$

$$t_a = 1.\,408\,99\ s \tag{3}$$

de la ecuación 1 observamos que la velocidad final debe cumplir la siguiente condición $v < 27.\,215$*, ya que de no ser así el cuerpo subiría en vez de bajar*

b. Al resolver analíticamente la ecuación 1 y despejando t *obtenemos que*

$$v = \left(48 - 12\sqrt{3}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(48 - 12\sqrt{3}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right)$$

de lo que se obtiene

$$\int_0^x dy = \int_0^{1.409} \left(48 - 12\sqrt{3}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right) dt$$

ya que $x\,(0) = 0$, $t_0 = 0$*, al integrar podemos determinar lo que nos piden, así:*

$$x_a = \left(13.\,662 - 3.\,415\,6\sqrt{3}\right) ft$$

$$x_a = 7.\,746\ ft$$

Solución 2 *a. Podemos resolver el problema numéricamente utilizando la ecuación 1 y aplicando la regla del trapecio para calcular la integral, estableciendo en el algoritmo*

$$\int_a^b t(v)\,dv \approx T_{tra} = \frac{\Delta v}{2}\left[f(v_0) + 2f(v_1) + 2f(v_2) + \cdots + 2f(v_{n-1}) + f(v_n)\right]$$

donde

$$\Delta v = (b-a)/n \quad y \quad v_i = a + i\,\Delta v$$

El error máximo del método se puede calcular:
Suponiendo $|f''(v)| \leq K$ *para* $a \leq v \leq b$. *Si* E_T *es el error del método del trapecio*

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Para utilizar este método determinaremos varios subintervalos de la velocidad.
Por ejemplo.

i. *Para* $n = 15$

$$t = 3\left(\frac{0.34}{48-12\sqrt{3}} + 0.68\sum_{i=1}^{14}\frac{1}{48-12\sqrt{3}-0.68i} + \frac{0.34}{37.8-12\sqrt{3}}\right)s$$

$t = 1.409\,3.s.$

ii. *Para* $n = 30$

$$t_n = \left(\frac{0.51}{48-12\sqrt{3}} + 0.34\sum_{i=1}^{29}\frac{3}{48-12\sqrt{3}-0.34i} + \frac{0.51}{37.8-12\sqrt{3}}\right)s$$

$$= 1.409\,1s$$

Para $n = 50$

$$t_n = \left(\frac{0.306}{48-12\sqrt{3}} + 0.204\sum_{i=1}^{49}\frac{3}{48-12\sqrt{3}-0.204\,i} + \frac{0.306}{37.8-12\sqrt{3}}\right)s$$

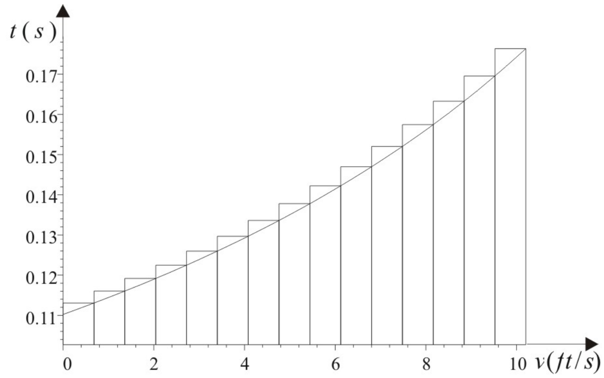
$t_n =: 1.409028s$

iii. *Para* $n = 55$

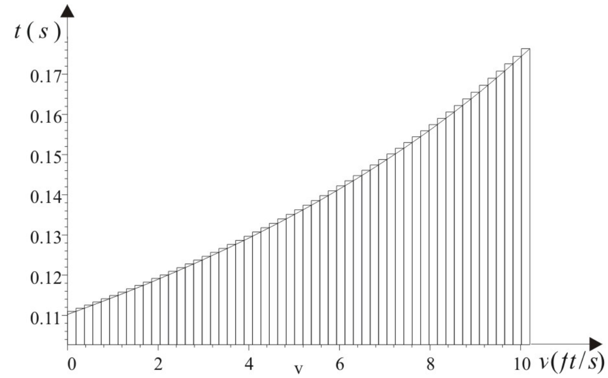
$$t_n = \left(\frac{0.278\,18}{48-12\sqrt{3}} + 0.185\,45\sum_{i=1}^{54}\frac{3}{48-12\sqrt{3}-0.185\,45i} + \frac{0.278\,18}{37.8-12\sqrt{3}}\right)s$$

$t_n = 1.409\,99s.$

Si observamos las gráficas de la función cuando $n = 15$ *y* $n = 55$ *observamos que el error debe ser menor para* $n = 55$ *el cual calcularemos analíticamente ya que conocemos* $t(v)$, *aunque también lo calcularemos de acuerdo con la fórmula de error del método*



método del trapecio n=15



Método del trapecio n=55

Para calcular el error por truncamiento debemos calcular $|f''(v)|$ la cual es

$$f'(v) = \frac{3}{\left(48 - 12\sqrt{3} - v\right)^2}$$
$$f''(v) = \frac{6}{\left(48 - 12\sqrt{3} - v\right)^3}$$
$$f'''(v) = \frac{18}{\left(48 - 12\sqrt{3} - v\right)^4}.$$

Como $f'''(v) > 0$ entonces $f''(v)$ no tiene maximo relativo, ya que es creciente por tanto tomamos como

$$K = |f''(10.2)| = \frac{6}{\left(48 - 12\sqrt{3} - 10.2\right)^3} = 1.2179 \times 10^{-3}.$$

Así tenemos que el error es

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{(1.2179 \times 10^{-3})(10.2)^3}{12n^2}$$
$$\text{si } n = 15, \quad |E_T| = \frac{1.2924}{(12)(15)^2} = 4.7867 \times 10^{-4}$$
$$\text{si } n = 55, \quad |E_T| = \frac{1.2924}{(12)(55)^2} = 3.5603 \times 10^{-5}$$

Mientras que los errores relativos para los mismos casos

$$\varepsilon\% = 100\left|\frac{(t_a - t_n)}{t_a}\right|$$

$$\text{si } n = 15, \quad \varepsilon\% = 100\left|\frac{(1.40899 - 1.409\,3)}{1.409\,0}\right| = 2.129\,2\times 10^{-2}$$

$$\text{si } n = 55, \quad \varepsilon\% = 100\left|\frac{(1.408\,99 - 1.40\,91)}{1.40\,901}\right| = 7.806\,9\times 10^{-3}$$

Tanto los errores de truncamiento como los errores relativos son pequeños

Para el caso de la distancia recorrida no realizaremos el análisis, realizaremos el estudio utilizando fortran 77

```
c Este programa utiliza la regla del trapecio para
c determinar el tiempo que tarda un cuerpo en deslizarse
c desde la parte mas alta de un plano partiendo del reposo
c hasta alcanzar una velocidad v.
c En este problema se considera la resistencia del aire y la
c friccion del plano sobre el cuerpo
program trapeciom
real v0,vf,d,suma,h,Tn,Ta,et,X,sum,Ln,La,el,e,Y
integer i,j,n,res
res =1
30 if (res.eq.1)then
write(*,*)'*****************************************************'
write(6,*)'Integracion numerica'
write(6,*)'Regla del Trapecio'
write(6,*)'*****************************************************'
write(6,*)'Ingrese el valor de v0 entre (0 , 27.215)'
read(*,*) v0
write(6,*)'Ingrese el valor de vf mayor que v0 y menor que 27.215'
read(*,*) vf
write(6,*)'Ingrese el tama?o de la particion N, N menor de 60'
read(*,*) n
c Empieza el algoritmo para calcular la integral usando N subintervalos
d=(vf-v0)/n
suma=F(vf)+F(v0)
X=v0
```

```
do 10 i=2,n
X=X+d
suma=suma+2*F(X)
10 continue
Tn=(d/2.)*suma
c Ahora calculamos la distancia recorrida
h=Tn/n
sum=R(Tn)+R(0)
Y=0
do 20 j=2,n
Y=Y+h
sum=sum+2*R(Y)
20 continue
Ln=(h/2.)*sum
Ta=g(vf)-g(v0)
et=abs((Tn-Ta)/Ta)*100
La=P(Tn)-P(0)
el=abs((Ln-La)/La)*100
e=s(vf)/(12*n**2)
write(6,*)'***************************************************'
write(6,*)'Resultado para N=',N,':'
WRITE(*,'(3(T3,A/),3(T3,A/T3,(3(A,1PE13.6))/))')
&' ? Valor numerico? Valor analit. ? ',
&' ? estimado de la? de la integral? Diferencia ',
&' ? integral ? ? en % ',
&'?????????????????????????????????????????????????????????????',
&'Tiempo ? ' ,Tn , ' ? ' ,Ta , ' ? ',et ,
&'?????????????????????????????????????????????????????????????',
&'Dista. ? ' ,Ln , ' ? ' ,La , ' ? ',el
write(6,*) ' Error = ',e
write(6,*)'***************************************************'
WRITE(6,*)'El programa termino!'
print*, 'Si quiere continuar digie 1 si no cero'
read*, res
goto 30
ENDIF
open(10,file='trapeciom.txt',status='old')
write(10,200)'Resultado para N=',N,':'
```

```
write(10,201)'***************************************************'
write(10,202) ' Resultado de la Integral numerica para t: ',Tn
write(10,203) ' Resultado de la Integral analitica para t: ',Ta
write(10,204) ' Diferencia = ',et,'%'
write(10,205) ' Resultado de la Integral numerica para L: ',Ln
write(10,206) ' Resultado de la Integral analitica para L: ',La
write(10,207) ' Diferencia = ',el,'%'
write(10,208) ' Error = ',e
write(10,209)'***************************************************'
200 format(a20,i4,a2)
201 format(a50)
202 format(a45,f8.6)
203 format(a45,f8.6)
204 format(a15,f8.6,a2)
205 format(a45,f8.6)
206 format(a45,f8.6)
207 format(a15,f8.6,a2)
208 format(a10,D8.3)
209 format(a50)
end
c Declaracion de funciones
function F(x)
real x
F= 3./(48-(12*(sqrt(3.)))-x)
end
function g(x)
real x
g= 3*(3.3038-log(48.-(12*(sqrt(3.)))-x))
end
function R(x)
real x
R= (48.-12.*(sqrt(3.)))*(1.-exp(-(x/3.)))
END
function P(x)
real x
P= (48.-12.*(sqrt(3.)))*(x+3.*exp(-(x/3.))-3.)
END
function s(x)
```

```
real x
s=6./(48.-(12.*(sqrt(3.)))-x)**3
end
```

Las salidas de este programa para los casos estudiados son:

```
   Resultado para N=  15 :
**************************************************
   Resultado de la Integral numerica para t: 1.409236
  Resultado de la Integral analitica para t: 1.408993
  Diferencia = 0.017268 %
   Resultado de la Integral numerica para L: 7.746278
  Resultado de la Integral analitica para L: 7.748781
  Diferencia = 0.032295 %
  Error = .451E-06
**************************************************

   Resultado para N=  30 :
**************************************************
   Resultado de la Integral numerica para t: 1.409054
  Resultado de la Integral analitica para t: 1.408993
  Diferencia = 0.004332 %
   Resultado de la Integral numerica para L: 7.746294
  Resultado de la Integral analitica para L: 7.746920
  Diferencia = 0.008076 %
  Error = .113E-06
**************************************************
   Resultado para N=  50 :
**************************************************
   Resultado de la Integral numerica para t: 1.409015
  Resultado de la Integral analitica para t: 1.408993
  Diferencia = 0.001591 %
   Resultado de la Integral numerica para L: 7.746302
  Resultado de la Integral analitica para L: 7.746526
  Diferencia = 0.002893 %
  Error = .406E-07
**************************************************

   Resultado para N=  55 :
```

```
**************************************************
   Resultado de la Integral numerica para t: 1.409011
  Resultado de la Integral analitica para t: 1.408993
  Diferencia = 0.001294 %
   Resultado de la Integral numerica para L: 7.746296
  Resultado de la Integral analitica para L: 7.746485
  Diferencia = 0.002444 %
  Error = .336E-07
**************************************************
```

Vemos que los errores son menores ahora, pero eso era de esperar ya que cuando utilizamos el métodos analítico cometimos errores de redondeo que son mucho menores cuando se usa el computador.

1.2.1 METODO DE BISECCION

Si f es una función continua en el intervalo $[a.b]$ y si $f(a)\,f(b) < 0$, entonces f debe tener un cero en (a, b). Esta es una consecuencia del teorema del valor intermedio para funciones continuas.

El método de bisección explota esta idea de la siguiente manera , si $f(a)\,f(b) < 0$, se calcula $c = 1/2(a + b)$ y se averigua si $f(a)\,f(c) < 0$, si lo es, entonces f tiene un cero en $[a, c]$. A continuación se renombra c como b y se comienza una vez mas con elintervalo $[a, b]$, cuya longitud es igual a la mitad de la longitud del intervalo original.

Si $f(a)\,f(c) > 0$, entoonces $f(a)\,f(b) < 0$,y en este caso se renombra c como a , en ambos casos se ha generado un nuevo intervalo que contiene un cero de f y el proceso puede repetirse.Claro está que si $f(a)\,f(c) = 0$, entonces $f(c) = 0$ y con ello se ha encontrado un cero . Sin embargo por los errores de redondeo es poco factible que $f(c) = 0$, así el criterio para concluir no deberá depender de que $f(c)$ sea cero . Se debe permitir una tolerancia razonable tal como $f(c) < 10^{-5}$. Si hay varios ceros en el intervalo dado, el método de la bisección encuentra uno cada vez. Este método también se conoce como el método de la bipartición.

A la hora de programar es conveniente contar con varios criterios que detengan el programa, uno es máximo número de pasos que se permitiran, esto reduce las posibilidades de que el programa se quede en un ciclo infinito.

Por otra parte la ejecución del programa se puede detener ya sea cuando el error sea lo suficientemente pequeño o cuando lo sea el valor de $f(c)$.

ANALISIS DE ERRORES

Si $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ...,$[a_n, b_n]$ son los intervalos que resultan del proceso, se pueden hacer las siguientes observaciones:

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n \quad (1)$$
$$b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant ... \geqslant b_1 \quad (2)$$
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \qquad (n \geqslant 0) \quad (3)$$

La sucesión $[a_n]$ converge debido a que es creciente y está acotada superiormente , la sucesión $[b_n]$ también converge por razones analogas .Si se utiliza (3) repetidamente se llega a que :

$$b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$$

Así

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n (b_0 - a_0) = 0$$

Si se escribe

$$r = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

entonces tomando límite en la desigualdad $0 \geqslant f(a_n) f(b_n)$, entonces se obtiene $0 \geqslant [f(r)]^2$, y por tanto $f(r) = 0$.

Supóngase que en cierta etapa del proceso se ha definido el intervalo $[a_n, b_n]$. Si se detiene el proceso en este momento, la raiz se encontrará en este intervalo, en esta etapa la mejor estimación de la raiz es el punto medio del intervalo.

El error se acota de la siguiente forma:

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

Resumiendo lo anterior se tiene el siguiente

TEOREMA:

Si $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ...,$[a_n, b_n]$,..., denotan los intervalos en el método de la bisección, entonces los límites $\lim_{n\to\infty} b_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n$, existen, son iguales y representan un cero de f. Si $r = \lim_{n\to\infty} c_n$ y $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, entonces:

\begin{equation*}

\left|r-c_{n}\right|\leq 2^{-\left(n+1\right) }\left(b_{0}-a_{0}\right)

\end{equation*}

En el siguiente ejemplo muestra un programa que resuelve una ecuación cuadrática introducida por un usuario.

```
c **Este programa halla las raices de una ecuaci?n cuadr?tica por el
c m?todo de la secante**
program biseccion
c **Declaraci?n de variables**
real G,H,I,D,R,u,v,w,a,b,c,e,dis
integer n,j,resp,k
D=0.00001
R=0.00001
n=300
resp=1
do while(resp.EQ.1)
print*, 'Este programa resuelve una ecuacion cuadratica:'
print*, 'ax**2 + bx +c '
Print*, 'Digite el coeficiente a'
read*, G
Print*, 'Digite el coeficiente b'
read*, H
Print*, 'Digite c'
read*, I
dis=(H**2)-(4*G*I)
if(dis.GT.0)then
Print*, 'Digite el l?mite inferior del intervalo'
read*, a
Print*, 'Digite el l?mite superior del intervalo'
read*, b
write(*,*)'La funcion es : ',G,'x**2 ',H,'x ', I
u= (G*(a**2))+(H*a)+I
v= (G*(b**2))+(H*b)+I
```

```
if(u.EQ.0)then
print*,'La raiz es',a
else
if(v.EQ.0)then
print*,'La raiz es',b
else
k=1
do while((v*u.GE.0).and.(k.LT.30))
k=k+1
a=a+0.1
u= (G*(a**2))+(H*a)+I
v= (G*(b**2))+(H*b)+I
enddo
e=b-a
j=1
if((u*v).LT.0)then
do while(j.LT.n)
j=j+1
e=e/2
c=a+e
w=(G*(c**2))+(H*c)+I
if(abs(e).GE.D)then
if(abs(w).GE.R)then
if((u*w).LT.0)then
b=c
v=w
else
a=c
u=w
endif
else
j=n
endif
else
j=n
endif
enddo
write(*,*)'********************************************'
```

```
print*, 'El numero de iteraciones es',j
print*, 'La raiz es',c
print*, 'El error es',e
write(*,*)'*********************************************'
else
print*, 'No existen raices en el intervalo dado,'
print*,'o el la longitud del intervalo es muy grande'
endif
endif
endif
else
print*,'Esta ecuaci?n no tiene raices reales'
endif
open(10,file='biseccion.txt',status='unknown')
write(10,201)'****************************************************'
write(10,200)'La funcion es : ',G,'x**2 ',H,'x ', I
write(10,202) ' El numero de iteraciones es : ',j
write(10,203) ' La raiz es: ',c
write(10,204) ' El error es ',e
write(10,205)'****************************************************'
201 format(a50)
200 format(a15,f8.6,a5,f8.3,a2,2f8.3)
202 format(a25,i4)
203 format(a15,f8.6)
204 format(a15,f8.6,a2)
205 format(a50)
print*,'Si desea continuar digite 1, sino digite 0'
read*,resp
enddo
end
```

Utlizaremos el programa para calcular la raíz que se encuentra entre $[0, 3]$ de la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$. en la gráfica se presenta como trabaja más o menos el programa

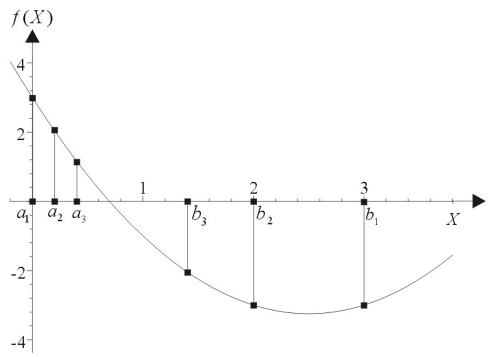


Figura5 . Método de bisección

y la salida es la siguiente

```
**************************************************
La funcion es :1.000000x**2   -5.000x    3.000
 El numero de iteraciones 300
   La raiz es: 0.697226
   El error es 0.000006
**************************************************
```