Capítulo 4

Convolución

versión 3.1-21 de septiembre de 2002

4.1. Espacio $\mathcal{S}$

Definición 4.1 *Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ pertenece al espacio $\mathcal{S}$ si es infinitamente diferenciable y*

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^m f^{(n)}(t) = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* \ .$$

Ejemplos

I) $e^{-\alpha t^2} p_l(t)$, $\alpha > 0$, real, con $p_l(t)$ polinomio de orden l.

II) $f(t) = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{1}{t-b} - \dfrac{1}{t-a}\right] & a \leq t \leq b \\ 0 & t \notin [a,b] \end{cases}$

Proposición 4.1 $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial.

En efecto, de la definición de $\mathcal{S}$ es inmediato mostrar que $\{\mathcal{S}, +\}$ es un grupo abeliano, y que si $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Proposición 4.2 Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $p_l(t) f^{(r)}(t) \in \mathcal{S}$, donde $p_l(t) = \sum_{k=0}^{l} a_k t^k$ es un polinomio de grado l.

También esto es claro, dada la proposicion anterior y la definición de $\mathcal{S}$.

Proposición 4.3 Si f, $g \in \mathcal{S}$, entonces

$$(\, f \mid g \,) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t)\, dt \quad \text{existe.}$$

En particular

$$\|\, f \,\|^2 = (\, f \mid f \,) = \int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t) \,|^2 \ dt \quad \text{existe.}$$

Vale decir, $\mathcal{S}$ es un espacio pre-Hilbert (ya mostramos que es un espacio vectorial).

Proposición 4.4 Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{F}\{f, \omega\} = F(\omega) \in \mathcal{S}$.

Demostración

a) Como $f \in \mathcal{S}$, entonces

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^n f(t) = 0 \ .$$

De las propiedades de las transformadas de Fourier:

$$F^{(n)}(\omega) \quad \text{existe} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego $F(\omega)$ es infinitamente diferenciable.

b) Como $f \in \mathcal{S}$, entonces $\dfrac{d^m}{dt^m}[t^n f(t)]$ existe $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$. Por las propiedades de las transformadas de Fourier:

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \omega^m \mathcal{F}\{t^n f(t), \omega\} = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$
$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \omega^m F^{(n)}(\omega) = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Luego

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f, \omega\} \in \mathcal{S} \ .$$

q.e.d.

4.2. Producto de convolución

Definición 4.2 *Producto de convolución* $*$.

$$f * g = p \Longleftrightarrow p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx \ .$$

Idea física

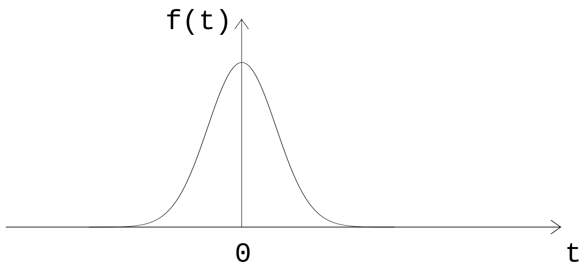
Sea $f(t)$ algún "estímulo" (fuerza en el tiempo t, densidad de carga en la posición t, etc.). Sea $g(x,t) = g(x-t)$ la respuesta en x a un estímulo en t. La dependencia en $x-t$ tiene implícita la hipótesis de que el medio es isotrópico. Si el sistema es *lineal*, la respuesta total en el punto x al estímulo global $\{f(t)|t \in \mathbb{R}\}$ será la suma de todas las contribuciones elementales $[dt\, f(t)]\, g(x,t)$, que es la convolución $p(x)$.

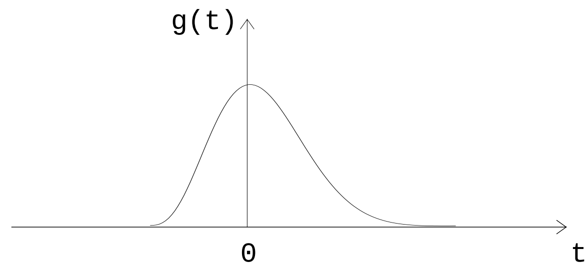
Ejemplo El potencial debido a una densidad de carga $\rho(\vec{r}\,)$ se puede escribir:

$$\phi(\vec{r}\,) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'}{|\,\vec{r} - \vec{r}\,'\,|} = \rho * g(\vec{r}\,) \ , \quad g(\vec{r}\,) = \frac{1}{|\,\vec{r}\,|} \ .$$

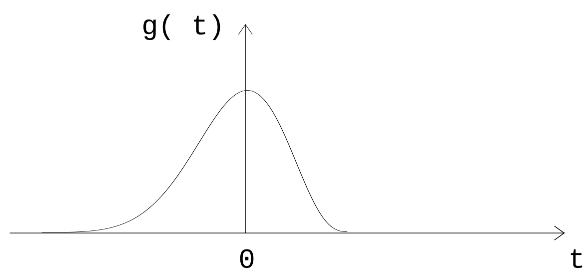
Idea matemática

Consideremos las funciones $f(t)$, $g(t)$:

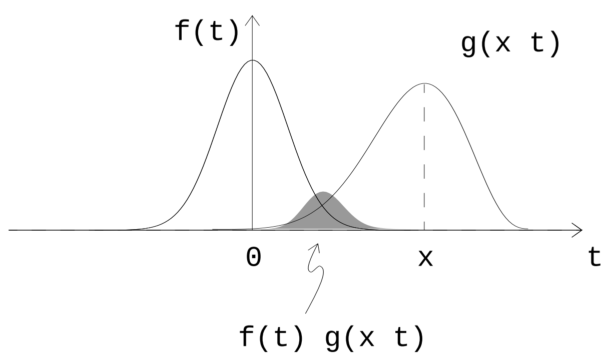




Entonces el gráfico de $g(-t)$ es:



y se tiene:



$f * g$ mide entonces el grado de *traslape* entre $f(t)$ y $g(-t)$, luego de trasladar esta función una distancia x. Si $f(t)$ y $g(t)$ decaen violentamente para $t \longrightarrow \pm\infty$, el traslape tenderá rápidamente a cero si $x \longrightarrow \pm\infty$:

$$[f * g](x) \xrightarrow[x \longrightarrow \pm\infty]{} 0 \ .$$

Proposición 4.5 Si f, $g \in \mathcal{S}$, entonces $p = f * g \in \mathcal{S}$.

Demostración

I)
$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(t-x)g(x)\,dx \ .$$
La última igualdad se tiene si existe un mayorante convergente. En efecto existe, pues si M es tal que $|\, f'(x)\,| < M \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} M\,|\, g(x)\,| < \infty$ es tal mayorante.

Luego
$$p' = f' * g$$
$$p^{(m)} = f^{(m)} * g \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$
Es decir, p es infinitamente diferenciable.

II)
$$\lim_{t\to\pm\infty} t^m p^{(n)}(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^m f^{(n)}(t-x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to\pm\infty} t^m f^{(n)}(t-x)g(x)\,dx = 0 \ ,$$
luego
$$\lim_{t\to\pm\infty} t^m p^{(n)}(t) = 0 \quad \forall n,\, m \in \mathbb{N}^* \ .$$

q.e.d.

Teorema 4.1 Sea f, $g \in \mathcal{S}$ y $F(k) = \mathcal{F}\{f, k\}$, $G(k) = \mathcal{F}\{g, k\}$, entonces
$$\boxed{\mathcal{F}\{f * g, k\} = \sqrt{2\pi} F(k) \cdot G(k)} \tag{4.1}$$

Demostración
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f * g, k\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{ikt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(t-x)g(x)e^{ikt} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t-x)e^{ikt} \right) g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ .\end{aligned}$$
Haciendo el cambio de variables $t = y + x$:
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f * g, k\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)e^{iky} \right) g(x)e^{ikx} \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x)e^{ikx} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)e^{iky} \right) \ .\end{aligned}$$
Vale decir:
$$\mathcal{F}\{f * g, k\} = \sqrt{2\pi} F(k) \cdot G(k) \ .$$

q.e.d.

4.2.1. Propiedades del producto de convolución

I) Asociatividad:
$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

II) Distributividad:
$$\begin{aligned} f * (g + h) &= f * g + f * h \\ (f + g) * h &= f * h + g * h \end{aligned}$$

III) Conmutatividad:
$$f * g = g * f$$

Ejercicio Demostrar propiedades I y II.

Demostremos la conmutatividad (propiedad III).
$$p(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) g(x)\, dx \ .$$

Con el cambio de variable $t - x = y$:
$$p(t) = -\int_{\infty}^{-\infty} f(y) g(t - y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(t - y)\, dy = g * f(t) \ .$$

También podríamos haber procedido usando (4.1), aplicando la transformada de Fourier sobre el producto de convolución y luego invirtiendo la transformada.

4.3. El espacio $\mathcal{S}$ como anillo

En $\mathcal{S}$ hay dos operaciones binarias:

I) Adición. Si f, $g \in \mathcal{S}$, entonces $f + g \in \mathcal{S}$.

II) Convolución. Si f, $g \in \mathcal{S}$, entonces $f * g \in \mathcal{S}$.

De las propiedades de la suma y la convolución se sigue que $\{\mathcal{S}, +, *\}$ es un *anillo conmutativo*. ¿Es un anillo unitario, es decir, tiene un elemento neutro multiplicativo?

Supongamos que existe $\delta \in \mathcal{S}$ tal que $f * \delta = \delta * f = f \quad \forall f \in \mathcal{S}$, es decir:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \delta(x)\, dx = f(t) \qquad \forall f \in \mathcal{S} \ . \tag{4.2}$$

Supongamos que $\delta(t_0) > 0$. Luego $\delta > 0$ en cierto intervalo, ya que es continua. Podemos además considerar, sin pérdida de generalidad, dicho intervalo como $0 < a < b$.

Escojamos ahora $f \in \mathcal{S}$ tal que

$$f(-x) = \begin{cases} > 0 & a < -x < b \\ 0 & -x \notin \,]a, b[\end{cases} .$$

En particular, se tiene que $f(0) = 0$.

Evaluemos (4.2) en $t = 0$:

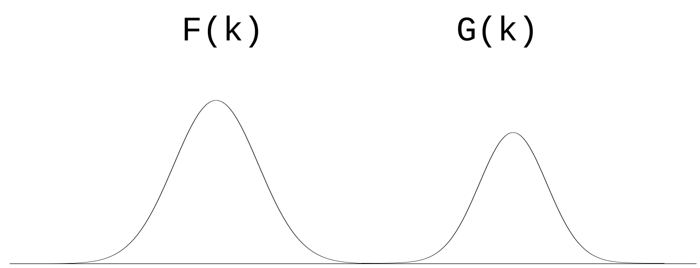
$$0 = f(t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta(x)\, dx = \int_a^b f(-x)\delta(x)\, dx > 0 \ ,$$

que es evidentemente una contradicción.

Luego el anillo conmutativo $\{\mathcal{S}, +, *\}$ no tiene elemento neutro respecto a la operación $*$.

Proposición 4.6 El anillo $\{\mathcal{S}, +, *\}$ tiene divisores del cero respecto a $*$.

Demostración En efecto, sean $F = \mathcal{F}\{f, k\}$, $G = \mathcal{F}\{g, k\} \in \mathcal{S}$ nulas fuera de cierto intervalo, tales que $F(k)G(k) = 0$. Basta considerar dos funciones con soporte finito y disjunto, como en la figura:



Invirtiendo la trasformada de Fourier [en virtud del Teorema de Reciprocidad, ecuación (**??**)]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)G(k), t\} = \mathcal{F}^{-1}\{0, t\} = 0 \ .$$

Luego tenemos $f \neq 0$ y $g \neq 0$, pero $f * g = 0$.

q.e.d.

Proposición 4.7 Si f, $g \in \mathcal{S}$, entonces

$$(\, f \,|\, g\,) = (\, F \,|\, G\,) \ . \tag{4.3}$$

Demostración Se tiene

$$h * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - x) g(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\{HG, t\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(k)G(k)e^{-ikt}\, dk \ .$$

Escojamos

$$h^*(-x) = f(x) \ ,$$

de modo que

$$\begin{aligned} H(k) = \mathcal{F}\{h(t),k\} = \mathcal{F}\{f^*(-t),k\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(-t)e^{ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\mu)e^{-ik\mu}\,d\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)e^{ik\mu}\,d\mu\right)^* = F^*(k)\ . \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(-x)g(x)\,dx = h * g(t=0)$$

o sea

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(k)G(k)\,dk \qquad \text{(Relación de Parseval)}$$

En particular, si $f = g$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,f(t)\,|^2\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\,F(k)\,|^2\ dk \qquad \text{(Identidad de Plancheret)}$$

q.e.d.