Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

Capítulo 10

Aplicaciones de la transformada de Laplace

versión preliminar 3.2-21 octubre 2002

La transformada de Laplace introducida en el Capítulo anterior tiene tres ventajas respecto a la transformada de Fourier (Cap. 3).

En primer lugar, al igual que la transformada de Fourier, nos permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas (propiedad 4, sección 9.3), con la diferencia que las condiciones iniciales quedan incorporadas de inmediato en la ecuación resultante. Utilizando transformada de Fourier también podemos convertir la ecuación diferencial en una algebraica, pero aún queda trabajo por hacer, que es resolver nuevas ecuaciones que resultan de imponer las condiciones iniciales. Así, usando transformada de Laplace economizamos recursos.

Por cierto, el punto anterior puede resultar más bien secundario, ya que ambos procedimientos deberían arrojar el mismo resultado. Un aspecto nada de secundario, sin embargo, es que, mientras la transformada de Fourier sólo se puede aplicar a funciones que decrecen rápidamente a cero (funciones en $\mathcal{S}$), o a lo sumo a funciones de crecimiento polinomial (es decir, funciones que tienen asociadas distribuciones temperadas), la transformada de Laplace está bien definida incluso para funciones de crecimiento exponencial. Puesto que en general una inestabilidad de un sistema físico está caracterizada por alguna variable que crece exponencialmente, no está garantizado que el formalismo de transformada de Fourier dé resultados con sentido en estos casos. Así, la transformada de Laplace no es sólo un formalismo alternativo, sino que en ocasiones puede ser el único adecuado.

A continuación expondremos algunos ejemplos de empleo de la transformada de Laplace para resolver algunos problemas matemáticos o físicos. En particular, estos ejemplos permiten ilustrar, por un lado, la utilidad de incorporar inmediatamente las condiciones iniciales al aplicar la transformada a ecuaciones diferenciales, y por otro, que tanto las soluciones de dichas ecuaciones como las ecuaciones mismas pueden contener términos exponencialmente crecientes, situación que impediría el empleo de transformadas de Fourier.

10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

1) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 1 \ , \qquad y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \ .$$

Para resolverla, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}, s\right\} - \mathcal{L}\{y, s\} = \mathcal{L}\{1, s\} \ ,$$

donde interpretamos la función constante 1 como 1 para $t \geq 0$ y 0 para $t < 0$. Evaluamos la transformada de la segunda derivada, usando las propiedades enunciadas en el capítulo anterior.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}, s\right\} = s^2\, Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\, Y(s) - 1 \ ,$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y, s\}$. Usando lo anterior en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 1 - Y(s) &= \frac{1}{s} \\ (s^2 - 1)Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{s}{s} = \frac{1+s}{s} \\ Y(s) = \frac{s+1}{s}\frac{1}{s^2-1} &= \frac{1}{s}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \ . \end{aligned}$$

Retransformando,

$$y(t) = e^t - 1 \ .$$

2) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = t \ , \qquad y(1) = a, \ y(2) = b \ .$$

Encontremos la solución para $y(t)$. Primero hacemos el cambio de variable $x = t - 1$ con $u(x) = y(t)$, de esta manera la ecuación nos queda

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = x + 1 \ , \qquad u(0) = y(1) = a, \ u(1) = b \ .$$

Aplicamos la transformada de Laplace. Definiendo $\mathcal{L}\{u, s\} = U(s)$ y $u'(0) = \gamma$, tenemos

$$\begin{aligned} s^2U(s) - su(0) - u'(0) - U(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \\ (s^2 - 1)U(s) &= as + \gamma + \frac{1+s}{s^2} \\ U(s) &= \frac{as}{s^2-1} + \frac{\gamma}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s-1)} \ . \end{aligned}$$

Retransformando,

$$u(x) = a\cosh(x) + \gamma\,\mathrm{senh}(x) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}, x\right\} \ .$$

Haciendo notar que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{x'}\,dx', s\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{e^t, s\right\} = \frac{1}{s}\frac{1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x dx'\int_0^{x'} e^{x''}\,dx'', s\right\} = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{x'}\,dx', s\right\} = \frac{1}{s}\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2(s-1)} \ ,$$

se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}, x\right\} = \int_0^x dx'\int_0^{x'} e^{x''}\,dx'' = \int_0^x (e^{x'}-1)\,dx' = e^x - 1 - x \ .$$

Finalmente

$$u(x) = a\cosh(x) + \gamma\,\mathrm{senh}(x) + e^x - (1+x) \ .$$

Expresando la solución en la variable original,

$$y(t) = a\cosh(t-1) + \gamma\,\mathrm{senh}(t-1) + e^{t-1} - t \ .$$

Comprobamos la condición inicial:

$$y(1) = a\cosh(0) + \gamma\,\mathrm{senh}(0) + e^0 - 1 \ ,$$
$$y(1) = a + 0 + 1 - 1 = a \ .$$

Para determinar $\gamma = u'(0)$ usamos $y(2) = b$:

$$y(2) = a\cosh(1) + \gamma\,\mathrm{senh}(1) + e - 2 = b$$
$$\gamma = \frac{2 + b - e - a\cosh(1)}{\mathrm{senh}(1)} \ .$$

En general, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \alpha\frac{d}{dt}x(t) + \beta x(t) = f(t)h(t) \ ,$$

donde $h(t)$ corresponde a la función escalón de Heaviside, tiene por solución:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\xi, t\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} ds\, e^{st}\xi(s) \ ,$$

con

$$\xi(s) = \mathcal{L}\left\{x, s\right\} = \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta}\left[\mathcal{L}\left\{f(t), s\right\} + (\alpha + s)x(0) + x'(0)\right] \ .$$

10.2. Ecuaciones integrales

Sea la ecuación integral para $f(x)$

$$g(x) = \lambda f(x) + \int_0^x f(\alpha) K(x - \alpha)\, d\alpha \ , \tag{10.1}$$

donde $g(x)$ y $K(x)$ son funciones dadas. Busquemos la solución aplicando la transformada

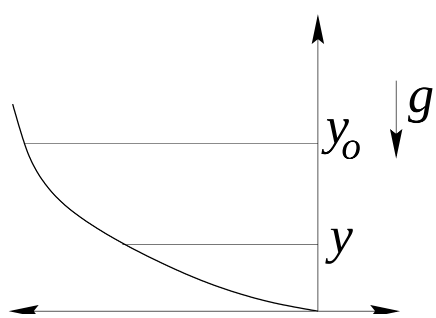
$$\mathcal{L}\{g(x), s\} = \lambda \mathcal{L}\{f(x), s\} + \mathcal{L}\{f * K(x), s\} = \lambda \mathcal{L}\{f(x), s\} + \mathcal{L}\{f(x), s\} \mathcal{L}\{K(x), s\} \ .$$

Despejando,

$$\mathcal{L}\{f(x), s\} = \frac{\mathcal{L}\{g(x), s\}}{\lambda + \mathcal{L}\{K(x), s\}} \ . \tag{10.2}$$

Retransformando se obtiene $f(x)$.

Como ilustración de situaciones físicas que involucran ecuaciones integrales revisaremos el problema de la *tautócrona*: una partícula de masa m resbala, sin roce, sobre una curva bajo el efecto de la gravedad. Queremos la forma de la curva de modo que el tiempo que se demore la partícula en "llegar abajo" sea independiente del punto de lanzamiento.



Debido a la conservación de la energía se satisface para todo y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= mg(y_0 - y) \\ v &= \sqrt{2g}\sqrt{y_0 - y} \ , \end{aligned}$$

donde y_0 es la altura inicial. Podemos evaluar el tiempo de descenso

$$\int \frac{ds}{v} = \int_{y_0}^{0} \frac{1}{v}\frac{ds}{dy}\, dy = -\int_0^{y_0} f(y)(y_0 - y)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2g}}\, dy \ ,$$

donde hemos definido $f(y) = ds/dy$. Con este resultado podemos escribir la condición de que la curva sea tautócrona de la siguiente manera:

$$\int_0^{y_0} f(y)(y_0 - y)^{-1/2}\, dy = C_0, \qquad \text{constante independiente de } y_0.$$

Esta ecuación integral es de la forma (10.1), con $\lambda = 0$, $g(x) = C_0$ y $K(x) = x^{-1/2}$, por tanto tiene solución de la forma (10.2):

$$\mathcal{L}\{f(x), s\} = \frac{C_0/s}{\mathcal{L}\{x^{-1/2}, s\}} \ .$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}\left\{x^{-1/2}, s\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} \ ,$$

luego

$$\mathcal{L}\{f(x), s\} = \frac{C_0}{s}\frac{\sqrt{s}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{C_0}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{1}{\sqrt{s}} \ .$$

Retransformando,

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \frac{C_0}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2} y^{-1/2} = C y^{-1/2} \ .$$

A partir de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \ ,$$

despejamos

$$dx = \sqrt{ds^2 - dy^2} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}dy\right)^2 - dy^2} \ ,$$

$$dx = \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 dy^2 - dy^2} = \left[\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1\right]^{1/2} dy \ .$$

Como conocemos ds/dy, tenemos

$$dx = \left[\frac{C^2}{y} - 1\right]^{1/2} dy \ . \tag{10.3}$$

Haciendo el cambio de variable

$$y = C^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{C^2}{2}\left[1 - \cos(\phi)\right] \ .$$

Diferenciando,

$$dy = \frac{C^2}{2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \ .$$

Reemplazando en (10.3) obtenemos

$$dx = \left[\csc^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1\right]^{1/2} \frac{C^2}{2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi$$

$$dx = \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{C^2}{2} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \, d\phi$$

$$dx = C^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \, d\phi = \frac{C^2}{2}(1 + \cos\phi) \, d\phi \ .$$

Integrando esta última ecuación y agregando el cambio de variable podemos expresar la curva resultante en forma paramétrica:

$$x = \frac{C^2}{2}(\phi + \operatorname{sen}\phi)$$
$$y = \frac{C^2}{2}(1 - \cos\phi) \; .$$

Esta es la ecuación de una cicloide.

10.3. Ecuaciones en derivadas parciales

Consideremos la ecuación unidimensional de conducción del calor

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \; , \tag{10.4}$$

donde $u(x,t)$ corresponde a la temperatura en la posición x y a tiempo t. Elegimos, por simplicidad, la constante $c^2 = K/\sigma\rho = 1$, donde K es la conductividad térmica, σ el calor específico y ρ la densidad.

El problema específico a abordar es el de una varilla seminfinita con condición inicial $u(x,0) = 0$, $\forall\, x > 0$, y condiciones de borde $u(0,t) = A$ y $u(\infty,t) = 0$.

Si tomamos la transformada de Laplace respecto de x en (10.4), encontramos que la transformada de u debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$s^2 \mathcal{L}\left\{u(x,t), s\right\} - s u(0,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}, s\right\} \; .$$

La anterior ecuación resulta no ser de coeficientes constantes, además, es inhomogénea y uno de sus términos, $\partial u/\partial x(0,t)$ no lo conocemos, así que la solución no es directa. Pero si tomamos la transformada de Laplace respecto a t de la ecuación de conducción, y definiendo

$$U(x,s) = \mathcal{L}\left\{u(x,t), s\right\} = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\, dt \; ,$$

obtenemos

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} = s\, U(x,s) - u(x,0) \; .$$

Utilizando la condición inicial $u(x,0) = 0$, nos queda una ecuación diferencial en donde s es un parámetro,

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - s\, U(x,s) = 0 \; ,$$

con solución

$$U(x,s) = C_1 e^{x\sqrt{s}} + C_2 e^{-x\sqrt{s}} \; .$$

Aplicamos la transformada de Laplace sobre las condiciones de borde:

$$\mathcal{L}\left\{u(\infty,t), s\right\} = U(\infty,s) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0 \; ,$$
$$\mathcal{L}\left\{u(0,t), s\right\} = U(0,s) = \mathcal{L}\left\{A, s\right\} = \frac{A}{s} \Longrightarrow C_2 = \frac{A}{s} \; .$$

La solución es

$$U(x,s) = \frac{A}{s} e^{-x\sqrt{s}} \ , \qquad \text{para } \mathrm{Re}[s] > 0.$$

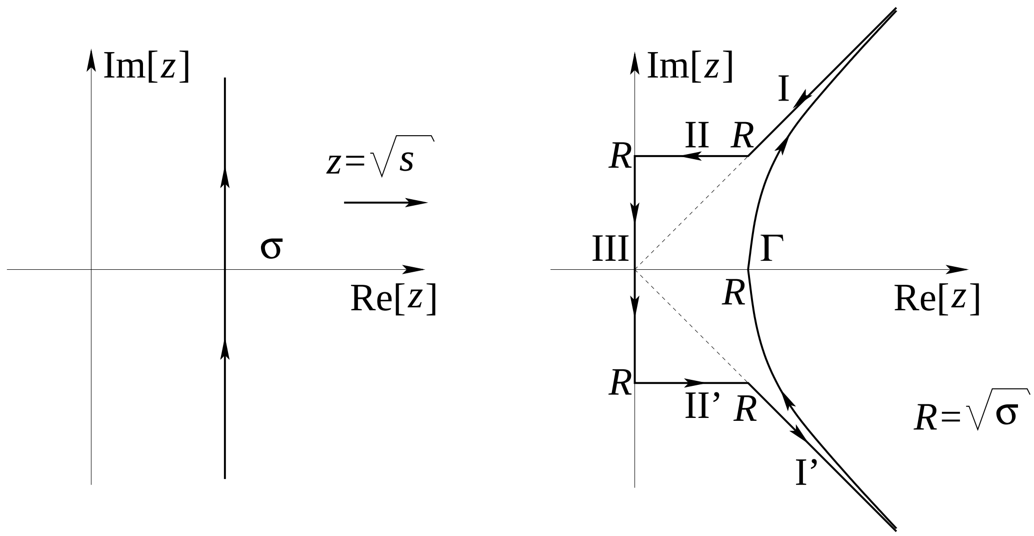
Retransformando,

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{A}{s} e^{-x\sqrt{s}}, t \right\} = A \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-x\sqrt{s}}, t' \right\} dt' \ .$$

Evaluamos, primero,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-x\sqrt{s}}, t \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} e^{-x\sqrt{s}} \, ds \ .$$

Usando el cambio de variable $z = \sqrt{s}$, el camino de integración se modifica como muestra la figura:



y la integral nos queda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-x\sqrt{s}}, t \right\} = \frac{2}{2\pi i} \int_\Gamma e^{z^2 t} e^{-zx} z \, dz \ .$$

Analicemos la integral sobre los tramos que cierran el camino, partiendo por el tramo I:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathrm{I}} z e^{z^2 t - zx} \, dz \right|_{z=(1+i)y} &= \frac{1}{\pi} \left| \int_R^\infty (1+i)^2 y e^{(1+i)^2 y^2 t - (1+i) yx} \, dy \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_R^\infty y e^{-yx} \, dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \ . \end{aligned}$$

El tramo II:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathrm{II}} z e^{z^2 t - zx} \, dz \right|_{z=iR+y} &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^R (iR+y) e^{(iR+y)^2 t - (iR+y)x} \, dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R |\, iR + y \,| \, e^{(y^2 - R^2)t - yx} \, dy \\ &\leq \frac{e^{-R^2 t}}{\pi} \sqrt{2} R \int_0^R e^{y^2 t - yx} \, dy \end{aligned}$$

El integrando $f(y) = e^{y^2t-yx}$ es acotado en el intervalo $[0, R]$, siendo su máximo $f(0) = 1$ ó $f(R)$ (dentro del intervalo hay sólo un punto con derivada nula, $y = x/2$, y resulta ser un mínimo). Si R es suficientemente grande, el máximo es $f(R)$. de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\left|\int_{\mathrm{II}} ze^{z^2t-zx}\,dz\right|_{z=iR+y} &\leq \frac{e^{-R^2t}}{\pi}\sqrt{2}R\int_0^R e^{R^2t-Rx}\,dy \\ &= \frac{e^{-Rx}}{\pi}\sqrt{2}R^2 \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\ .\end{aligned}$$

Notamos que dentro del circuito no hay polos, entonces al utilizar el teorema del residuo podemos concluir que la integral sobre el circuito cerrado es nula. Ya hemos demostrado que las integrales sobre los tramos I y II tienden a cero cuando $R \to \infty$. En forma equivalente se puede mostrar que se anularán, en el mismo límite, las integrales sobre los tramos I' y II'. Por lo tanto, la integral sobre el camino Γ más la integral sobre el tramo III deben cancelarse en el límite $R \to \infty$, o lo que es lo mismo, la integral sobre el camino Γ, que es la que nos interesa, es igual a menos la integral sobre el tramo III. Parametrizamos por $z = iy$, y nos queda

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-x\sqrt{s}}, t\right\} = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathrm{III}} e^{z^2t-zx}z\,dz = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2t-iyx}y\,dy = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-x^2/4t}\ .$$

Podemos escribir la solución

$$u(x,t) = A\int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{t'^{3/2}}e^{-x^2/4t'}\,dt'\ .$$

Hacemos el cambio de variable $\alpha^2 = x^2/4t'$, lo que implica $dt' = -x^2/2\alpha^3 d\alpha$, y obtenemos finalmente

$$u(x,t) = \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = A\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right]\ .$$

10.4. Sistema de ecuaciones lineales

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} y_1' + 2y_2' + y_1 - y_2 &= 25 \\ 2y_1' + y_2 &= 25e^t\ ,\end{aligned}$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = 0$ e $y_2(0) = 25$. Apliquemos la transformada de Laplace, con las definiciones

$$Y_{1,2} = \mathcal{L}\left\{y_{1,2}(t), s\right\}\ .$$

Obtenemos para el sistema:

$$\begin{aligned} sY_1 - y_1(0) + 2sY_2 - 2y_2(0) + Y_1 - Y_2 &= \frac{25}{s}\ , \\ 2sY_1 - 2y_1(0) + Y_2 &= \frac{25}{s-1}\ .\end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} sY_1 + 2sY_2 - 50 + Y_1 - Y_2 &= \frac{25}{s} \ , \\ 2sY_1 + Y_2 &= \frac{25}{s-1} \ . \end{aligned}$$

Despejando,

$$Y_1(s) = \frac{25}{4s(s-1)^2(s+1/4)} = \frac{25}{s} - \frac{9}{s-1} + \frac{5}{(s-1)^2} - \frac{16}{(s+1/4)} \ .$$

Retransformando,

$$y_1(t) = 25 - 9e^t + 5te^t - 16e^{-t/4} \ .$$

Análogamente

$$y_2(t) = 33e^t - 10te^t - 8e^{-t/4} \ .$$