Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

Capítulo 2

Series de Fourier

versión preliminar 3.2-16 de octubre de 2002

Sea f una función arbitraria en $\mathcal{C}\,[-\pi,\pi]$, i.e.

$$[-\pi,\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt < \infty \; .$$

Sea $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ un conjunto de funciones ortonormales en $\mathcal{C}\,[-\pi,\pi]$, definidas como $\varphi_\nu(t) = \dfrac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}}$.

Los *coeficientes de Fourier*, $C_\nu = (\,\varphi_\nu \,|\, f\,)$, satisfacen

$$\sum_\nu |\,C_\nu\,|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\,f\,|^2 < \infty \qquad \text{(Desigualdad de Bessel)}$$

Luego

$$\lim_{\nu\to\pm\infty} C_\nu = 0 \; . \tag{2.1}$$

Necesitaremos un par de resultados preliminares. Observemos primero que

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu\mu} &= e^{-in\mu}\left(1 + e^{i\mu} + e^{i2\mu} + \cdots + e^{i2n\mu}\right) \\
&= \frac{1}{a^{2n}}\left(1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{4n}\right) \quad \text{con } a = e^{i\mu/2} \\
&= \frac{1}{a^{2n}}\left[\frac{a^{4n+2}-1}{a^2-1}\right] = \frac{a^{2n+1} - a^{-(2n+1)}}{a - a^{-1}} \; .
\end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu\mu} = \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)\mu/2]}{\operatorname{sen}(\mu/2)} \; . \tag{2.2}$$

Por otra parte,

$$\int_0^{\pi} \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu\mu}\, d\mu = \int_0^{\pi}\left[1 + 2\sum_{\nu=1}^{n}\cos(\nu\mu)\right] d\mu = \pi \; .$$

Usando (2.2)

$$\pi = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)\mu/2]}{\operatorname{sen}(\mu/2)}\, d\mu \ .$$

Tomando $\nu = \mu/2$:

$$\pi f(t) = 2\int_0^{\pi/2} f(t)\frac{\operatorname{sen}[(2n+1)\nu]}{\operatorname{sen}\nu}\, d\nu \ . \tag{2.3}$$

Teorema 2.1 Sea $f \in \mathcal{C}\,[-\pi,\pi]$, entonces su serie de Fourier

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (\,\varphi_\nu \,|\, f\,)\, \varphi_\nu(t)$$

converge y representa a $f(t)$ (convergencia punto a punto) en todo el intervalo $[-\pi,\pi]$.

Demostración Considerar la suma parcial

$$S_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} \ .$$

Los coeficientes de Fourier son

$$C_\nu = (\,\varphi_\nu \,|\, f\,) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\nu t'}}{\sqrt{2\pi}} f(t')\, dt'$$

$$2\pi S_n(t) = 2\pi \sum_{\nu=-n}^{n} C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} = 2\pi \sum_{\nu=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\nu t'}}{\sqrt{2\pi}} f(t')\, dt' \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu(t-t')}\, dt'$$

Sea $u = t' - t$ ($du = dt'$). Se tiene:

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(u+t) \sum_{\nu=-n}^{n} e^{-i\nu u}\, du \ .$$

Puesto que $\sum_{\nu=-n}^{n} e^{-i\nu n} = \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu n}$ [ver (2.2), por ejemplo], y haciendo una extensión periódica de f a todo $\mathbb{R}$,

$$f(u \pm 2\pi) = f(u) \qquad \forall u \in \mathbb{R} \ ,$$

resulta

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u+t) \sum_{\nu'=-n}^{n} e^{i\nu' u}\, du$$

$$\pi S_n(t) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} f(t+u) \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu u}\, du + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} f(t+u) \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu u}\, du$$

Haciendo en la primera integral el cambio de variables $u = -2v$, y en la segunda el cambio $u = 2v$:

$$\pi S_n(t) = \frac{1}{2}(-2)\int_{\pi/2}^{0} f(t-2v)\sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu 2v}\,dv + \frac{1}{2}(2)\int_{0}^{\pi/2} f(t+2v)\sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu 2v}\,dv \ .$$

Usando (2.2) y (2.3):

$$\pi\big[S_n(t) - f(t)\big] = \int_0^{\pi/2}\big[f(t-2v) + f(t+2v) - 2f(t)\big]\frac{\operatorname{sen}[(2n+1)v]}{\operatorname{sen} v}\,dv \ . \tag{2.4}$$

Definamos ahora

$$\psi_t(v) = f(t+2v) + f(t-2v) - 2f(t) \qquad v \in [0,\pi/2] \ .$$

Sea

$$g(v) = \begin{cases} \dfrac{\psi_t(v)}{\operatorname{sen} v} & v \in [0,\pi/2] \\ 0 & v \in [-\pi, 0] \\ 0 & v \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

$g(v)$ es acotada en $[-\pi,\pi]$ y, de hecho, se puede mostrar que pertenece a $\mathcal{C}\,[-\pi,\pi]$. Podemos reescribir (2.4):

$$\pi\big[S_n(t) - f(t)\big] = \int_{-\pi}^{\pi} g(v)\operatorname{sen}[(2n+1)v]\,dv = \sqrt{2\pi}\,\operatorname{Im}\left(\,\varphi_{2n+1}\,|\,g\,\right) \ .$$

Con (2.1),

$$\pi\big[S_n(t) - f(t)\big] = \sqrt{2\pi}\,\operatorname{Im}\left(\,\varphi_{2n+1}\,|\,g\,\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0 \ .$$

Luego

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n(t) = f(t) \ ,$$

o sea

$$f(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} \ .$$

q.e.d.

Sabemos, de (2.1), que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\,f(t)\,|^2\,dt < \infty \Longrightarrow \lim_{\nu\longrightarrow\infty} C_\nu = 0 \ .$$

Supongamos que $f \in \mathcal{C}_o\,[-\pi,\pi]$ y que f' es continua, tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |\,f'\,|^2 < \infty$. Entonces de la definición de los coeficientes de Fourier:

$$\sqrt{2\pi}\,C_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\nu t}\,dt \qquad \nu \in \mathbb{Z} \ .$$

Si integramos por partes:

$$\sqrt{2\pi}\, C_\nu = \left(f(t)\frac{e^{-i\nu t}}{-i\nu}\bigg|_{-\pi}^{\pi} \right) + \frac{1}{i\nu}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-i\nu t}\, dt \ .$$

Observando que el segundo término no es sino el coeficiente de Fourier de f', tenemos

$$\nu C_\nu \xrightarrow[\nu\longrightarrow\pm\infty]{} 0 \ .$$

Análogamente, si $f,\ f' \in \mathcal{C}_o\,[-\pi,\pi]$ y f'' es continua, tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |\, f''\,|^2 < \infty$, entonces

$$\nu^2 C_\nu \xrightarrow[\nu\longrightarrow\pm\infty]{} 0 \ .$$

Vale decir, cuanto más derivable es la función f, tanto más rápido tienden a cero sus coeficientes de Fourier. Más aún, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.2 (Sin demostración) Si $f \in \mathcal{C}$ y f tiene discontinuidades "mansas" (saltos finitos), entonces los coeficientes de Fourier C_ν decrecen como $1/\nu$.

Si $f \in \mathcal{C}_o$, $f' \in \mathcal{C}$ y f' tiene discontinuidades "mansas", entonces los coeficientes de Fourier C_ν decrecen como $1/\nu^2$.

Etcétera.

El teorema anterior muestra que la serie de Fourier converge más rápidamente mientras mejor comportamiento analítico tenga la función f. En el caso de funciones infinitamente derivables, los coeficientes de Fourier exhiben decaimientos más fuertes que cualquier polinomio ($C_\nu \simeq 1/\nu!$, por ejemplo).

Teorema 2.3 Si $f'' \in \mathcal{C}\,[-\pi,\pi]$ entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f.

Demostración Sean $C_\nu = (\,\varphi_\nu\,|\,f\,)$ los coeficientes de Fourier de f. Como $f' \in \mathcal{C}_o$, entonces $\nu^2 C_\nu \xrightarrow[\nu\longrightarrow\pm\infty]{} 0$, luego existe un N tal que para todo $|\nu| > N$ se tiene

$$\left|\,\nu^2 C_\nu\,\right| < 1$$

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} C_\nu\varphi_\nu = \sum_{|\,\nu\,|\le N} C_\nu\varphi_\nu + \sum_{|\,\nu\,|>N} C_\nu\varphi_\nu$$

Sea

$$M = \max_{t\in[-\pi,\pi]} \sum_{|\,\nu\,|\le N} C_\nu\varphi_\nu \ .$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} C_\nu\varphi_\nu &\le \left| \sum_{|\,\nu\,|\le N} C_\nu\varphi_\nu + \sum_{|\,\nu\,|>N} C_\nu\varphi_\nu \right| \le \left| \sum_{|\,\nu\,|\le N} C_\nu\varphi_\nu \right| + \left| \sum_{|\,\nu\,|>N} C_\nu\varphi_\nu \right| \\
&\le M + \sum_{|\,\nu\,|>N} |\,C_\nu\,|\,|\,\varphi_\nu\,| = M + \sum_{|\,\nu\,|>N} |\,C_\nu\,|\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&\le M + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\,\nu\,|>N} |\,C_\nu\,| < M + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\,\nu\,|>N} \frac{1}{\nu^2}
\end{aligned}$$

Pero
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \ ,$$
donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann. Así:
$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} C_\nu \varphi_\nu < M + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \ .$$
Luego existe un mayorante convergente independiente de t, y por lo tanto hay convergencia uniforme.

q.e.d.

Proposición 2.1 (Sin demostración) Si $f \in \mathcal{C}\,[-\pi,\pi]$ y $f(t) \in \mathbb{R}$, entonces f se puede expandir en una serie trigonométrica:
$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt) \ ,$$
con los coeficientes dados por
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)\,dt \end{aligned}$$

Resultados útiles

Escribamos la serie de Fourier
$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu e^{i\nu x} \ , \quad C_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t}\,dt \ .$$

1) $f(x+2\pi) = f(x)$

   La expansión de Fourier de $f(x)$ implica su extensión periódica a $\mathbb{R}$.

2) Si $f(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$,
$$C_{-\nu} = C_\nu^* \ .$$

3) Poniendo
$$e^{\pm i\nu x} = \cos(\nu x) \pm i \operatorname{sen}(\nu x) \ ,$$
   obtenemos la expansión alternativa
$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \big[A_\nu \cos(\nu x) + B_\nu \operatorname{sen}(\nu x)\big] \ ,$$

con

$$A_\nu = C_\nu + C_{-\nu} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(\nu t)\,dt \ ,$$
$$B_\nu = i(C_\nu - C_{-\nu}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(\nu t)\,dt \ .$$

Además:

$$f(x) = f(-x) \Longrightarrow B_\nu = 0 \ ,$$
$$f(x) = -f(-x) \Longrightarrow A_\nu = 0 \ ,$$

de modo que esta forma de la expansión es útil cuando f tiene paridad definida.

4) Para expandir una función F de período L, definimos una función f de período 2π por

$$F(u) = f\left(2\pi\frac{u}{L}\right) \ .$$

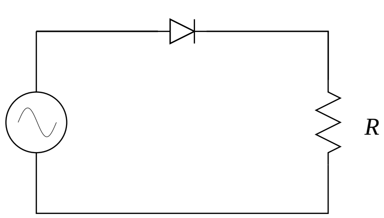
Así, $F(u+L) = F(u)$. Podemos expandir en serie de Fourier la función f, obteniéndose finalmente:

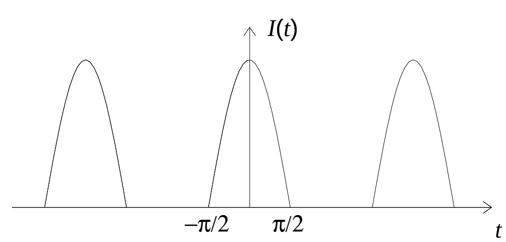
$$F(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu e^{iq_\nu u} = F(u+L) \ , \quad \text{con } q_\nu = \frac{2\pi}{L}\nu \ ,$$
$$C_\nu = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} F(t)e^{-iq_\nu t}\,dt \ .$$

Aplicaciones

1) Rectificador de “media” onda.

Consideremos el siguiente circuito eléctrico, y la forma de la corriente en función del tiempo que por él circula:





$I(t)$ es par, luego $B_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$I(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) \ ,$$

con

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} I(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{2}{\pi}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\cos(nt)\,dt = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar, } n \neq 1 \\ \dfrac{-2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2-1)} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

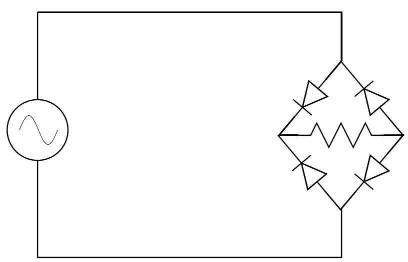
Luego

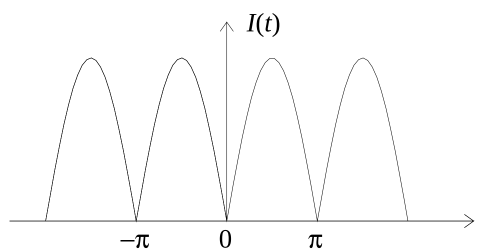
$$I(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{\cos t}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(2t)}{1\cdot 3} - \frac{\cos(4t)}{3\cdot 5} + \cdots\right]$$

$$I(0) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots\right] \tag{2.5}$$

En general, $A_n \longrightarrow 0$ como $1/n^2$, como corresponde a una función $I(t)$ cuya primera derivada tiene discontinuidades mansas.

2) Rectificador de onda completa.





En este caso, $I(t) = |\operatorname{sen} t|$ es par, y se tiene:

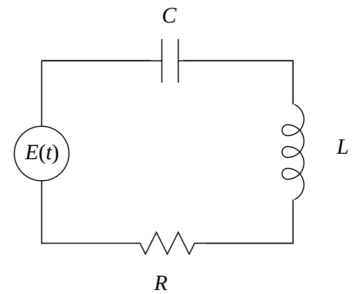
$$A_0 = \frac{4}{\pi}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} t\cos(nt)\,dt \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ \dfrac{-4}{\pi(n^2-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

e

$$I(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos(2t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4t)}{3\cdot 5} + \cdots\right]$$

3) Circuito resonante RLC.



Consideremos ahora $E(t)$ una función arbitraria pero periódica de período T. La corriente $I(t)$ satisface

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \ .$$

$E(t)$ se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n e^{in\omega t} \ , \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \ ,$$

donde

$$E_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)e^{-in\omega t}\, dt \ .$$

Estos coeficientes se pueden calcular si $E(t)$ es una función conocida. Escribiendo

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega nt} \ ,$$

encontramos, reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(-n^2\omega^2 L + in\omega R + \frac{1}{C} \right) C_n - in\omega E_n \right] e^{in\omega t} = 0 \ .$$

Siendo $\{e^{in\omega t}\}_n$ un conjunto linealmente independiente, cada coeficiente de la suma debe ser nulo, luego:

$$C_n = \frac{i\frac{n\omega}{L}}{\frac{1}{LC} - n^2\omega^2 + i\frac{n\omega R}{L}} E_n \ .$$

Aquí, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ es la frecuencia natural del sistema.

4) Conducción del calor.

Consideremos una barra de longitud L. Su temperatura es una cierta función de la distancia x a uno de sus extremos y del tiempo, $U(x,t)$. Supongamos que en los extremos la temperatura es siempre nula:

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

y que inicialmente el perfil de temperatura es:

$$U(x,0) = x(L-x) \ .$$

La ecuación que rige la evolución de la temperatura es:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \ ,$$

donde κ es la constante de conducción térmica. Al separar variables:

$$U(x,t) = X(x)T(t) \ ,$$

obtenemos las ecuaciones

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda^2 \kappa T \ ,$$
$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X \ ,$$

donde λ es una constante. Las soluciones generales de estas ecuaciones son:

$$T(t) = \bar{C} e^{-\kappa \lambda^2 t} \quad \text{y} \quad X(x) = \bar{A}\cos(\lambda x) + \bar{B}\,\text{sen}(\lambda x) \ ,$$

de modo que

$$U(x,t) = [A\cos(\lambda x) + B\,\text{sen}(\lambda x)]e^{-\kappa\lambda^2 t} \ .$$

Imponiendo la condición de borde $U(0,t) = 0$:

$$A = 0 \ .$$

De $U(L,t) = 0$, en tanto,

$$\text{sen}(\lambda L) = 0 \ ,$$
$$\lambda_m = \frac{m\pi}{L} \ , \qquad m \in \mathbb{N} \ .$$

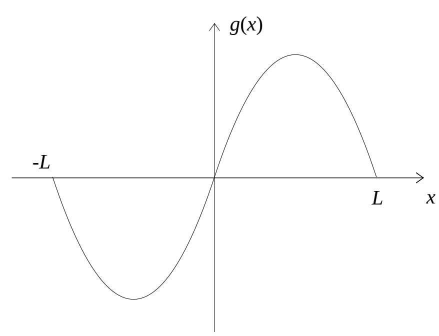
La solución más general es entonces:

$$U(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-\kappa\lambda_m^2 t}\,\text{sen}(\lambda_m x) \ .$$

Ahora consideramos las condiciones iniciales:

$$U(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \,\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = x(L-x) \ .$$

Como esta serie es una función impar, consideramos la extensión periódica impar de la función $g(x)$ al intervalo $[-L, L]$, de modo que los coeficientes B_m correspondan a los coeficientes de Fourier de $g(x)$:



$$B_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx = 2\int_0^L x(L-x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{4L^2}{m^3\pi^3}(-1)^{m+1}$$

$$U(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{4L^2}{\pi^3}\frac{1}{m^3}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)e^{-\frac{\kappa m^2\pi^2 t}{L^2}} \ .$$

En particular,

$$U(x,t) \xrightarrow[t\gg t_0=\frac{L^2}{\kappa\pi^2}]{} \frac{4L^2}{\pi^3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{-t/t_0} \ .$$

5) Resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{2.6}$$

para el interior del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, con la condición de borde $U(\rho = 1, \phi) = \psi(\phi)$.

La solución a (2.6) se puede plantear como

$$U(x,y) = \operatorname{Re}\{f(z)\},$$

donde $f(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, podemos escribir

$$f(z) = f(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ ,$$

y consideremos

$$c_n = a_n - ib_n \ .$$

Cada término de la expansión anterior satisface (2.6). En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z^n &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x+iy)^n \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[n(x+iy)^{n-1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[in(x+iy)^{n-1}\right] \\
&= n(n-1)(x+iy)^{n-2} - n(n-1)(x+iy)^{n-2} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Escribamos $U(x,y)$ en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - ib_n)r^n e^{in\phi}\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - ib_n)r^n(\cos n\phi + i\operatorname{sen} n\phi)\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[a_n\cos(n\phi) + b_n\operatorname{sen}(n\phi)\right] \ .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Imponiendo la condición de borde:

$$\psi(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \operatorname{sen}(n\phi) \ .$$

Por lo tanto, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de $\psi(\phi)$. Vale decir, la solución de una ecuación de Laplace en dos dimensiones se puede escribir en términos de una expansión de Fourier.

Fenómeno de Gibbs

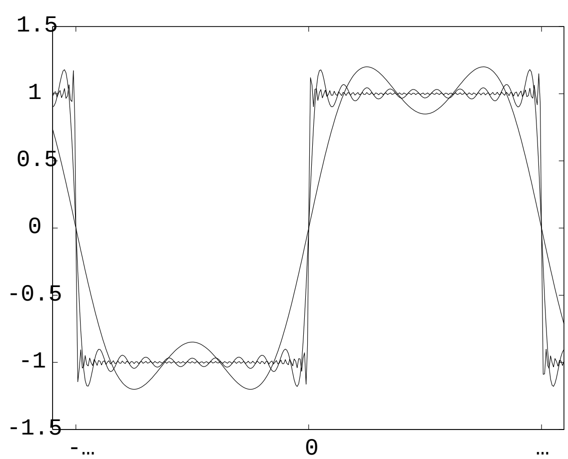
Consideremos la onda cuadrada

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0, \pm\pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Su expansión en serie de Fourier se obtiene fácilmente, encontrándose:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \operatorname{sen}[(2l+1)x] \ .$$

Observamos que los coeficientes decaen como $b_n \simeq 1/n$, en concordancia con el teorema demostrado anteriormente (pág. 22). En la siguiente figura presentamos la función $f(x)$ y su aproximación por sumas parciales de Fourier, con $n = 2$, $n = 10$ y $n = 50$ términos.

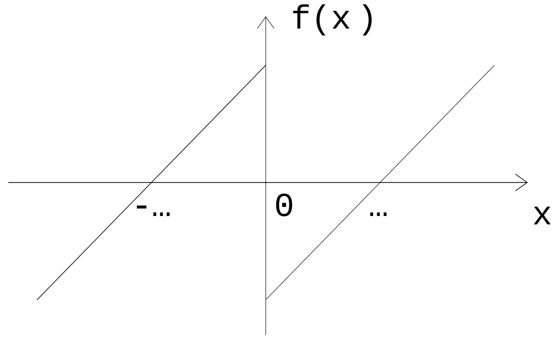


Se observa que hay buena convergencia con 10 términos, y el resultado es casi perfecto con 50, salvo ciertas oscilaciones en los puntos de discontinuidad, oscilaciones que *no* se amortiguan cuando el número de términos va a infinito. Sin embargo, como la suma parcial $S_N(x)$ converge punto a punto al valor esperado $f(x)$, las oscilaciones no amortiguadas deben necesariamente limitarse a una vecindad cada vez menor en torno a los puntos de discontinuidad, de modo que cualquier $x \neq l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, quede fuera de tal vecindad para N suficientemente grande.

Este fenómeno se conoce como *fenómeno de Gibbs*, y es consecuencia de la imposibilidad de aproximar uniformemente por funciones continuas una función discontinua.

Para estudiarlo con más detalle, consideremos la función "diente de sierra":

$$f(x) = \begin{cases} x-\pi & 0<x<\pi \\ 0 & x=0 \\ x+\pi & -\pi<x<0 \end{cases} \tag{2.8}$$



Su expansión de Fourier es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \ .$$

Y la suma de los N primeros términos:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \ .$$

Si $x \longrightarrow 0$, los primeros términos de la suma se hacen despreciables. Para valores grandes de n, en tanto, el sumando varía lentamente, y se puede reemplazar la suma por una integral. Por lo tanto, en el límite $N \gg 1$, $x \ll 1$ podemos escribir

$$f_N(x) \simeq \int_0^N dn\, \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) = 2\int_0^{Nx} dt\, \frac{\operatorname{sen} t}{t} \ .$$

Definiendo la función *seno integral*

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x dt\, \frac{\operatorname{sen} t}{t} \ , \tag{2.9}$$

se sigue que

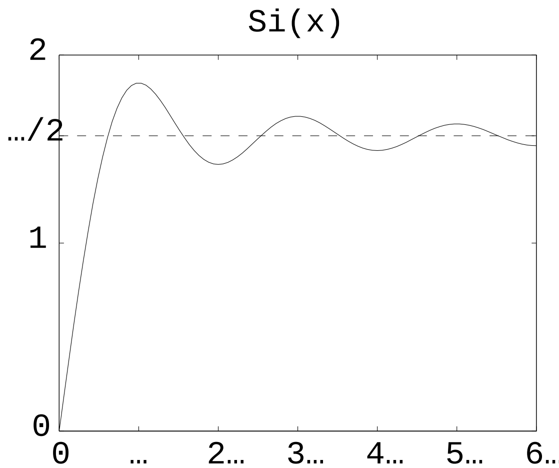
$$f_N(x) = 2\operatorname{Si}(Nx) \ .$$

Es claro de (2.9) que $\operatorname{Si}(0)=0$ y $\operatorname{Si}(\infty)=\pi/2$. Además, $\operatorname{Si}(x)$ posee extremos dados por

$$0 = \frac{\partial \operatorname{Si}}{\partial x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$x = n\pi$$

Así, como $\operatorname{sen} t/t$ oscila amortiguándose para $t \longrightarrow \infty$, se espera que $\operatorname{Si}(x)$ igualmente oscile cuando x crece, pero convergiendo a $\pi/2$. Sus extremos en $x = (2n+1)\pi$ deben ser máximos (contribuciones de área positiva de $\operatorname{sen} t/t$), y sus extremos en $x = 2n\pi$ deben ser mínimos (contribuciones de área negativa de $\operatorname{sen} t/t$). El primer máximo, en $x = \pi$, es el máximo absoluto (ver figura).



Algunos valores característicos:

$$
\begin{array}{lcll}
\operatorname{Si}(\pi) & \simeq & 1.852 & \text{(Primer máximo, absoluto)} \\
\operatorname{Si}(2\pi) & \simeq & 1.418 & \text{(Primer mínimo)} \\
\operatorname{Si}(3\pi) & \simeq & 1.675 & \text{(Segundo máximo)}
\end{array}
$$

De estos resultados se desprende que:

a) $f_N(0) = 0$

b) $f_N(x) \xrightarrow[x \gg 1/N]{} \pi \simeq 3{,}14159$

c) $f_N(x)$ tiene máximos en $(2n+1)\pi/N$, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
f_N\left(\frac{\pi}{N}\right) &\simeq 3.704 \quad \text{(Primer máximo, absoluto)} \\
f_N\left(\frac{3\pi}{N}\right) &\simeq 3.350 \quad \text{(Segundo máximo)}
\end{aligned}
$$

d) $f_N(x)$ tiene mínimos en $2n\pi/N$:

$$
f_N\left(\frac{2\pi}{N}\right) \simeq 2.836 \quad \text{(Primer mínimo)}
$$

De este modo, la función $f_N(x)$ oscila en tanto se tenga $x \simeq O(1/N)$. El primer máximo implica sobrepasar el valor límite en un 18 %, y el segundo sólo en un 7 %. Toda esta estructura está en una pequeña vecindad de $x = 0$, vecindad cuyo ancho va a cero si $N \longrightarrow \infty$.

Esto explica el fenómeno de Gibbs. Aun cuando hemos considerado la función (2.8), es fácil convencerse de que nuestros razonamientos son generales, y que podemos aplicarlos a cualquier función en torno a una discontinuidad finita de la misma.

Integración de series de Fourier

Sea $f \in \mathcal{C}\,[-\pi, \pi]$ y

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \ .$$

Sea

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt \ .$$

Entonces $F(x)$ es continua y acotada. Además es periódica si $F(-\pi) = F(\pi)$, i.e.

$$0 = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \pi a_0 \ ,$$

es decir,

$$a_0 = 0 \ .$$

Siendo F periódica, es expandible en serie de Fourier:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx) \ ,$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx)\, dx \\ &= F(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{n\pi} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n\pi} F'(x)\, dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{b_n}{n} \ , \qquad\qquad n \neq 0 \ . \end{aligned}$$

Si $n = 0$,

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, dx = xF(x) \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x)\, dx \ .$$

Análogamente,

$$B_n = \frac{a_n}{n} \ .$$

Tenemos pues el siguiente teorema:

Teorema 2.4 Sea $f \in \mathcal{C}\,[-\pi, \pi]$ con un desarrollo de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$(a_0 = 0)$. Entonces

$$\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} nx - \frac{b_n}{n} \cos nx,$$

con

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x)\,dx\ .$$

Si $a_0 \neq 0$, basta considerar $g(x) = f(x) - a_0/2$.

Bibliografía Adicional

La bibliografía sobre el tema es muy amplia, pero claramente la primera referencia es el libro de Fourier (de 1822) [1]. Para los que tengan interés por cuestiones teóricas, una de las referencias más autorizadas es [2]. Una breve referencia de entre las muchas dedicadas a las aplicaciones es [3].

1 Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Editions Jacques Gabay, París, 1988 (ISBN 2 87647 046 2).

2 A. Zygmund, *Trigonometric Series*, vol. 1–2, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1988 (ISBN 0 52135 885 X).

3 James Ward Brown and Ruel V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill Company, Nueva York, 2000 (ISBN 0 07232 570 4).