

Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

1. Espacio de funciones	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Sucesiones de funciones	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt	9
1.4. Coeficientes de Fourier	10
1.5. Integrales impropias (valor principal)	14
1.6. Convergencia según Cesàro	15
2. Series de Fourier	19
3. Transformada de Fourier	35
3.1. Definiciones	35
3.2. Ejemplos	36
3.3. Propiedades	41
3.4. Aplicaciones	43
4. Convolución	45
4.1. Espacio \mathcal{S}	45
4.2. Producto de convolución	46
4.3. El espacio \mathcal{S} como anillo	49
5. Distribuciones temperadas	53
5.1. Definiciones	53
5.2. Sucesión de distribuciones	61
5.3. Producto de distribuciones	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales	72
5.5. Convergencia débil	73
6. Distribuciones y transformada de Fourier	79
7. Convolución de distribuciones	87
7.1. Definiciones	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones	89
7.3. Uso de convolución en Física	91

8. La función Gamma	93
8.1. La función factorial	93
8.2. La función Gamma	94
8.3. Función Beta	96
8.4. Notación doble factorial	99
8.5. Fórmula de Stirling	99
8.6. Otras funciones relacionadas	101
9. Transformada de Laplace	103
9.1. Definición	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace	111
10. Aplicaciones de la transformada de Laplace	113
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	114
10.2. Ecuaciones integrales	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales	120
11. Polinomios ortogonales	123
11.1. Definiciones	123
11.2. Teoremas	123
11.3. Relación de recurrencia	125
12. Polinomios de Hermite	127
12.1. Definición	127
12.2. Función generatriz	127
12.3. Ortogonalidad	130
12.4. Algunos resultados interesantes	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite	131
13. Polinomios de Laguerre	133
13.1. Definición	133
13.2. Función generatriz	133
13.3. Relaciones de recurrencia	135
13.4. Ecuación de Laguerre	135
13.5. Ortogonalidad	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre	138
14. El problema de Sturm-Liouville	139
14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos	139
14.2. Operadores autohermíticos	141
14.3. Problema de autovalores	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales	143

15.Ecuaciones diferenciales con singularidades	145
15.1. Puntos singulares	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs	149
15.4. Una segunda solución	151

Capítulo 14

El problema de Sturm-Liouville

versión preliminar 1.0-28 octubre 2002

Una gran cantidad de problemas físicos están descritos por ecuaciones diferenciales en las que interviene un operador Laplaciano (la ecuación de Laplace, la ecuación de onda, la ecuación de Schrödinger, etc.). Matemáticamente, estas ecuaciones corresponden a casos particulares del *problema de Sturm-Liouville*, vale decir, ecuaciones de autovalores para un operador diferencial autoadjunto. Las propiedades que demostramos en general para los polinomios ortogonales (Cap. 11), y reencontramos en dos casos particulares (Caps. 12 y 13), son en realidad propiedades generales de las soluciones de problemas de Sturm-Liouville, como veremos en este capítulo.

14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos

Consideremos el operador diferencial \mathcal{L} de la forma:

$$\mathcal{L}u(x) = \left[p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_2(x) \right] u(x) , \quad (14.1)$$

donde $u(x)$ es una función compleja dos veces diferenciable, y los $\{p_j(x)\}$ son funciones reales que cumplen:

- $p_0''(x)$, $p_1'(x)$, $p_2(x)$ existen y son continuas en $[a, b]$.
- $p_0(x)$ no tiene ceros en (a, b) .

$p_0(x)$ puede (y suele) tener ceros en los extremos del intervalo, y el intervalo $[a, b]$ podría ser semi-infinito o infinito.

Consideremos una segunda función derivable dos veces, $v(x)$. Definimos

$$\langle v | \mathcal{L} | u \rangle \equiv \langle v, \mathcal{L}u \rangle = \int_a^b dx v^*(x) \mathcal{L}u(x) . \quad (14.2)$$

Integrando por partes y usando la continuidad de $p_0'(x)$ y $p_1(x)$,

$$\int_a^b dx v^*(x) p_1(x) u'(x) = \left. v^*(x) u(x) p_1(x) \right|_a^b - \int_a^b dx u(x) [v^*(x) p_1(x)]' ,$$

y

$$\begin{aligned} \int_a^b dx v^*(x) p_0(x) u''(x) &= \left. v^*(x) u'(x) p_0(x) \right|_a^b - \int_a^b dx u'(x) [v^*(x) p_0(x)]' \\ &= \left. \{v^*(x) u'(x) p_0(x) - u(x) [v^*(x) p_0(x)]'\} \right|_a^b + \int_a^b dx u(x) [v^*(x) p_0(x)]'' . \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle v | \mathcal{L} | u \rangle &= \int_a^b dx u(x) \overline{\mathcal{L}} v^*(x) \\ &+ \left. \{u(x) v^*(x) [p_1(x) - p_0'(x)] + p_0(x) [u'(x) v^*(x) - u(x) v^{*'}(x)]\} \right|_a^b , \end{aligned} \quad (14.3)$$

donde

$$\overline{\mathcal{L}} u(x) = \frac{d^2}{dx^2} [p_0(x) u(x)] - \frac{d}{dx} [p_1(x) u(x)] + p_2(x) u(x) , \quad (14.4a)$$

$$\overline{\mathcal{L}} u(x) = \left\{ p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + [2p_0'(x) - p_1(x)] \frac{d}{dx} + [p_2(x) - p_1'(x) + p_0''(x)] \right\} u(x) \quad (14.4b)$$

es el *operador adjunto* a \mathcal{L} .

Si

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} , \quad (14.5)$$

decimos que \mathcal{L} es *autoadjunto*.

Comparando (14.1) y (14.4), se sigue que \mathcal{L} es autoadjunto si y sólo si

$$2p_0'(x) - p_1(x) = p_1(x)$$

y

$$[p_1(x) - p_0'(x)]' = 0 ,$$

es decir, si

$$p_0'(x) = p_1(x) . \quad (14.6)$$

Muchos problemas interesantes corresponden a operadores autoadjuntos; por ejemplo, el oscilador armónico simple, mientras que otros, como las ecuaciones de Hermite y Laguerre, no. Sin embargo la teoría de operadores diferenciales autoadjuntos de segundo orden es completamente general, pues cualquier operador de segundo orden puede ser transformado a una forma autoadjunta. En efecto, puesto que $p_0(x)$ no tiene ceros en (a, b) , consideremos

$$h(x) = \frac{1}{p_0(x)} \exp \left[\int_{x_0}^x dt \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right] ,$$

y definamos

$$\begin{aligned} \overline{p}_0(x) &= h(x) p_0(x) , \\ \overline{p}_1(x) &= h(x) p_1(x) . \end{aligned}$$

Entonces

$$\overline{p_0}'(x) = \frac{d}{dx} \exp \left[\int_{x_0}^x dt \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right] = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \exp \left[\int_{x_0}^x dt \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right] = \overline{p_1}(x) ,$$

es decir, $h(x)\mathcal{L}$ es autoadjunto.

Usando (14.6), y definiendo $A(x) = p_0(x)$, $B(x) = p_2(x)$, se sigue que todo operador autoadjunto se puede escribir en la forma:

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + B(x)u(x) . \quad (14.7)$$

Además, para operadores autoadjuntos (14.3) queda

$$\langle v | \mathcal{L} | u \rangle = \int_a^b dx u(x) \overline{\mathcal{L}v^*(x)} + A(x) [u'(x)v^*(x) - u(x)v^{*'}(x)] \Big|_a^b . \quad (14.8)$$

14.2. Operadores autohermíticos

Limitémonos ahora a un subespacio \mathcal{H} de nuestro espacio de funciones, en el cual se cumple

$$A(x) \frac{du(x)}{dx} v^*(x) \Big|_{x=a} = A(x) \frac{du(x)}{dx} v^*(x) \Big|_{x=b} , \quad \forall u, v \in \mathcal{H} . \quad (14.9)$$

Es inmediato mostrar que \mathcal{H} es un espacio vectorial.

Entonces, de (14.8) se sigue que, si $u(x), v(x) \in \mathcal{H}$, y si \mathcal{L} es autoadjunto, entonces

$$\langle v, \mathcal{L}u \rangle = \int_a^b dx u(x) \mathcal{L}v(x) = \langle \mathcal{L}v, u \rangle . \quad (14.10)$$

Se dice entonces que \mathcal{L} es *autohermítico* en \mathcal{H} .

14.3. Problema de autovalores

Sea $w(x)$ una función real positiva, la cual a lo más puede tener ceros aislados en $[a, b]$ (*función de peso*). Consideremos la ecuación

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0 , \quad \lambda \in \mathbb{C} , \quad (14.11)$$

con determinadas condiciones de borde (en este caso, nos interesarán las condiciones que determinan el subespacio \mathcal{H}). Las soluciones de (14.11), debido precisamente a las condiciones de borde, no existen para todo λ , sino para cierto número discreto $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, asociados a ciertas funciones $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Los λ_i se denominan *autovalores* y las funciones asociadas u_i , *autofunciones*.

Se pueden mostrar las siguientes propiedades:

Proposición 14.1 Los autovalores de un operador autohermítico son reales.

Demostración Sean λ_j, λ_k autovalores asociados a autofunciones $u_j(x), u_k(x)$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_j(x) + \lambda_j w(x)u_j(x) &= 0, \\ \mathcal{L}u_k^*(x) + \lambda_k^* w(x)u_k^*(x) &= 0.\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $u_k^*(x)$ e integrando en $[a, b]$:

$$\langle u_k, \mathcal{L}u_j \rangle + \lambda_j \int_a^b dx u_k^*(x)w(x)u_j(x) = 0.$$

Haciendo algo similar con la segunda ecuación, pero multiplicando por $u_j^*(x)$,

$$\langle \mathcal{L}u_k, u_j \rangle + \lambda_k \int_a^b dx u_j(x)w(x)u_k^*(x) = 0.$$

Restando ambas expresiones, y usando (14.10),

$$(\lambda_j - \lambda_k^*) \int_a^b u_k^*(x)w(x)u_j(x) = 0. \quad (14.12)$$

Ahora, si $j = k$,

$$0 = (\lambda_j - \lambda_j^*) \int_a^b |u_j(x)|^2 w(x).$$

Como $w(x) \geq 0$, existen soluciones $u_j(x)$ no triviales si sólo si

$$\lambda_j = \lambda_j^*,$$

es decir, $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

q.e.d.

Proposición 14.2 Las autofunciones de un operador autohermítico se pueden elegir ortogonales entre sí.

Demostración Si escogemos ahora $\lambda_j \neq \lambda_k$, entonces de (14.12) se sigue que

$$0 = \int_a^b dx u_k^*(x)w(x)u_j(x),$$

es decir $u_k(x)$ y $u_j(x)$ son ortogonales con función de peso $w(x)$. (Incidentalmente, vemos que la generalización del producto interno introducida en (11.1) emerge naturalmente al considerar el problema de autovalores de un operador autohermítico.)

Por lo tanto, autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales. Sin embargo, puede ocurrir que más de una autofunción esté asociada al mismo autovalor, es decir, que un

autovalor sea *degenerado*. Es fácil mostrar que las funciones asociadas a un mismo autovalor forman un espacio vectorial. En efecto, si $u_{j,1}(x)$, $u_{j,2}$ están asociadas al autovalor λ_j , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_{j,1} + \lambda_j w(x)u_{j,1} &= 0 , \\ \mathcal{L}u_{j,2} + \lambda_j w(x)u_{j,2} &= 0 .\end{aligned}$$

Entonces una combinación lineal de ellas también es autofunción de \mathcal{L} con el mismo autovalor:

$$\mathcal{L} \sum_{\alpha=1,2} u_{j,\alpha} + \lambda_j w(x) \sum_{\alpha=1,2} u_{j,\alpha} = \sum_{\alpha=1,2} [\mathcal{L}u_{j,\alpha} + \lambda_j w(x)u_{j,\alpha}] = 0 .$$

Por lo tanto, es posible encontrar una base ortogonal del subespacio asociado a λ_j (vía Gram-Schmidt). Procediendo así con todos los subespacios de degeneración, podemos finalmente construir una base ortogonal para el espacio de funciones completo.

q.e.d.

Proposición 14.3 Las autofunciones de un operador autohermítico forman una base del espacio \mathcal{H} .

Demostración (Discusión)

La completitud de un conjunto de funciones usualmente se determina comparando con una serie de Laurent. Por ejemplo, para polinomios ortogonales, es posible encontrar una expansión polinomial para cada potencia de z :

$$z^n = \sum_{i=0}^n a_i P_i(z) ,$$

donde $P_i(z)$ es el i -ésimo polinomio. Una función $f(z)$ se puede entonces expandir en una serie de Laurent, y en definitiva en una combinación lineal de los polinomios $P_i(z)$. Así, podemos mostrar que la expansión polinomial existe y que es única. La limitación de este desarrollo en serie de Laurent es que $f(z)$ debe ser analítica. Las funciones pueden ser más generales que eso (recordemos la expansión de la función “dientes de sierra” en series de Fourier, por ejemplo). Una demostración de que nuestras autofunciones de problemas de Sturm-Liouville son completas aparece en el libro de Courant y Hilbert [R. Courant y D. Hilbert, “*Metodos de la Física Matemática*”, Vol. 1, Cap. 6, Sec. 3].

q.e.d.

14.4. Ejemplos de funciones ortogonales

Distintas elecciones del operador diferencial \mathcal{L} (es decir, de las funciones $A(x)$ y $B(x)$ en (14.7), de la función de peso $w(x)$ en el problema de autovalores asociado, y del intervalo $[a, b]$ que determina las condiciones de borde (14.9), generan diversas funciones especiales. Algunas de ellas, de interés en problemas físicos, aparecen en la siguiente tabla:

Función	$A(x)$	$B(x)$	$w(x)$	a	b	λ	Fórmula generatriz
Legendre (polinomios)	$1 - x^2$	0	1	-1	1	$l(l+1)$	$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l$
Legendre (asociados)	$1 - x^2$	$\frac{-m^2}{1-x^2}$	1	-1	1	$l(l+1)$	$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x)$
Chebyshev I (polinomios)	$\sqrt{1 - x^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	-1	1	n^2	$T_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1 - x^2)^{n-\frac{1}{2}}$
Chebyshev II (polinomios)	$(1 - x^2)^{3/2}$	0	$\sqrt{1 - x^2}$	-1	1	$n(n+2)$	$U_n(x) = \frac{(n+1)}{(2n+1)!! \sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}$
Gegenbauer (ultraesféricas)	$(1 - x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}$	0	$(1 - x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$	-1	1	$n(n+2\alpha)$	$C_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}+n)(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^n n! \Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(2\alpha+n)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1 - x^2)^{\alpha+n-\frac{1}{2}}$
Laguerre (polinomios)	xe^{-x}	0	e^{-x}	0	∞	n	$L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x})$
Laguerre (asociados)	$x^{k+1} e^{-x}$	0	$x^k e^{-x}$	0	∞	$n - k$	$L_n^{(m)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m L_n(x)$
Hermite (polinomios)	e^{-x^2}	0	e^{-x^2}	$-\infty$	∞	$2n$	$H_n(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$
Bessel ^a	x	$-\frac{\alpha}{x}$	x	0	1	a_ν^2	$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\frac{1}{2}x}{\alpha+\frac{1}{2}}\right)^\alpha \int_{-1}^1 dt (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)$

^aLas relaciones de ortogonalidad de las funciones de Bessel son atípicas: debemos reemplazar $J_\alpha(x)$ por $J_\alpha(xa_\nu)$ en la ecuación diferencial, con $J_\alpha(a_\nu) = 0$, cumpliéndose

$$\int_0^1 dx x J_\alpha(a_\mu x) J_\alpha(a_\nu x) = \text{cte.} \cdot \delta_{a_\mu, a_\nu}.$$

Ver capítulo (??).