MECANICA CLASICA

Pequeñas oscilaciones.

1. Obtener los modos normales de oscilación para la molécula de CO_2, interpretando físicamente cada uno de ellos. Escriba la solución general. Hallar las coordenadas normales utilizando argumentos de simetría.

2. Para el sistema de la figura,

   a. determine la solución general del movimiento en un entorno de la posición de equilibrio.

   b^*. En el caso $m_1 = m_2$, considere la existencia de fuerzas de rozamiento proporcionales a la velocidad aplicadas sobre las masas.

3. Deducir las ecuaciones de movimiento de dos péndulos simples conectados por un resorte lineal relativamente liviano, como se indica en la figura. Suponer que el movimiento ocurre en el plano del dibujo y calcular las frecuencias naturales de vibración para pequeños desplazamientos. Determinar a priori las coordenadas normales. Analizar el movimiento del sistema para la siguiente condición inicial: $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = \theta_0$ y $\theta_2(0) = 0$.

4. La molécula de CsOH es lineal en equilibrio. Cuando la molécula vibra aparecen 3 tipos diferentes de interacciones.

   a. $V_{\mathrm{CsO}} = 4\epsilon[(\frac{\sigma}{r})^{12} - (\frac{\sigma}{r})^6]$ donde ϵ y σ son constantes y r es la distancia entre los 2 átomos.

   b. Una interacción análoga O–H pero 15 veces más débil.

   c. Una interacción elástica de curvatura entre las uniones Cs–O y O–H con potencial $V = \frac{1}{2}kl^2(\pi - \alpha)^2$.

   Hallar: el lagrangiano de la molécula, teniendo en cuenta las 3 interacciones simultáneamente, las frecuencias características de oscilación y los modos normales correspondientes. Dibujar éstos y explicar en detalle los movimientos de la molécula para cada uno. *Sugerencia: compare los pesos atómicos.*

5. Halle las frecuencias propias, modos y coordenadas normales de un sistema que consta de dos cilindros huecos de masa m y radios r y $2r$ respectivamente, que están colocados uno dentro de otro y apoyados dentro de una superficie cilíndrica de radio $6r$. Todas las superficies ruedan sin deslizar entre sí . Hay gravedad.

6. Determinar las frecuencias de oscilación de un sistema de dos osciladores idénticos de frecuencia ω acoplados por una interacción $-axy$.

7. Dadas tres masas n, M, m, enhebradas en un anillo fijo de radio a, unidas por resortes (no enhebrados en el anillo) de constantes elásticas k y longitud en reposo l_0, hallar el lagrangiano y determinar las frecuencias y modos normales de oscilación. Repetir el problema en el caso en que $M = m$.

8. Hallar los modos y frecuencias propias de oscilación para el sistema de la figura. Considere que los discos no deslizan sobre el piso.

9. Resuelva completamente usando el formalismo de pequeñas oscilaciones, algunos problemas de la guía de ecuaciones de Lagrange.

10. Sea un sistema formado por cuatro masas idénticas enhebradas en un aro fijo de radio a que interactúan a través de resortes, también idénticos de cte. k y longitud en reposo l_0. Obtenga las frecuencias y modos normales de oscilación. Obtenga las coordenadas normales. Si llama z_2 a la coordenada normal correspondiente a la frecuencia no nula y no degenerada, escriba la solución para las siguientes condiciones iniciales: $z_1 = z_3 = z_4 = 0$, $z_2 = b$, $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z}_4 = 0$ en función de las coordenadas generalizadas originales.

11. El marco cuadrado de la figura está sostenido por cuerdas de piano tensas, de constante de torsión k_1. El disco D está igualmente sostenido en este marco por cuerdas de constante de torsión k_2, que forman un ángulo con el marco. Sea I el momento de inercia del marco; I_3, el momento de inercia del disco en la dirección perpendicular a él e I_2, el correspondiente a una dirección contenida en el plano del disco. Suponga $MS^2 = I$, $I_2 + I_3 = 2I$. Sabiendo que las fuerzas de torsión para un apartamiento θ respecto a la posición de equilibrio son de la forma $F = -k\theta$, donde k es la constante de torsión.

    a. Escriba el lagrangiano del sistema.

    b. Halle las frecuencias normales de oscilación del sistema.

    c. Halle las coordenadas normales.

    d. Escriba la solución general del movimiento del sistema.

12. Se tiene un péndulo de torsión como indica la figura. Los hilos AB, BC y CD son cuerdas de piano, de cte. de torsión k_1, k_2 y k_1, respectivamente. Dos masas m_1 y dos masas m_2 están unidas por sendas varillas rígidas (de masa despreciable), de longitud $2l_1$ y $2l_2$, respectivamente. Sabiendo que las cuplas producidas por las fuerzas de torsión son de la forma $N = -k\theta$, donde θ es el apartamiento angular de la posición de equilibrio y $k =$ cte. de torsión,

    a. Escriba el lagrangiano del sistema en función de los ángulos de giro de las varillas.

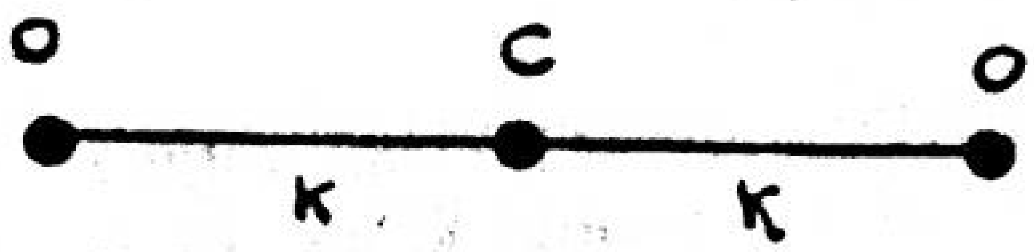
    b. Hallar las frecuencias propias de oscilación del sistema.

c. Hallar las coordenadas normales.

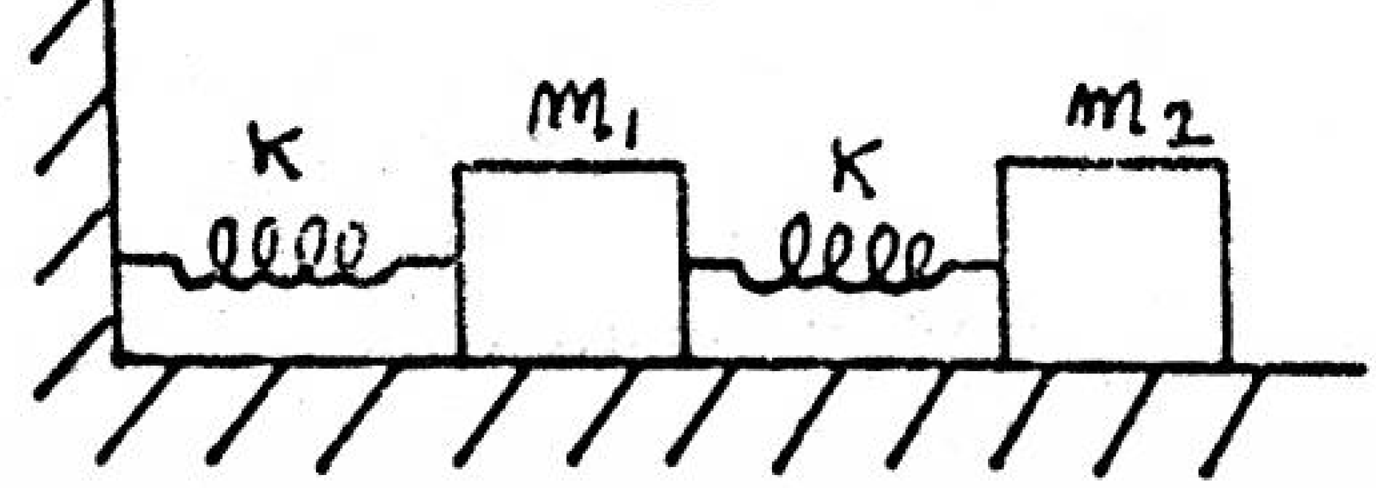
13*. Indique cuántas frecuencias nulas tiene una molécula no simétrica y describa los modos normales asociados.

14*. Indique cuántas frecuencias no nulas tiene una molécula no simétrica.

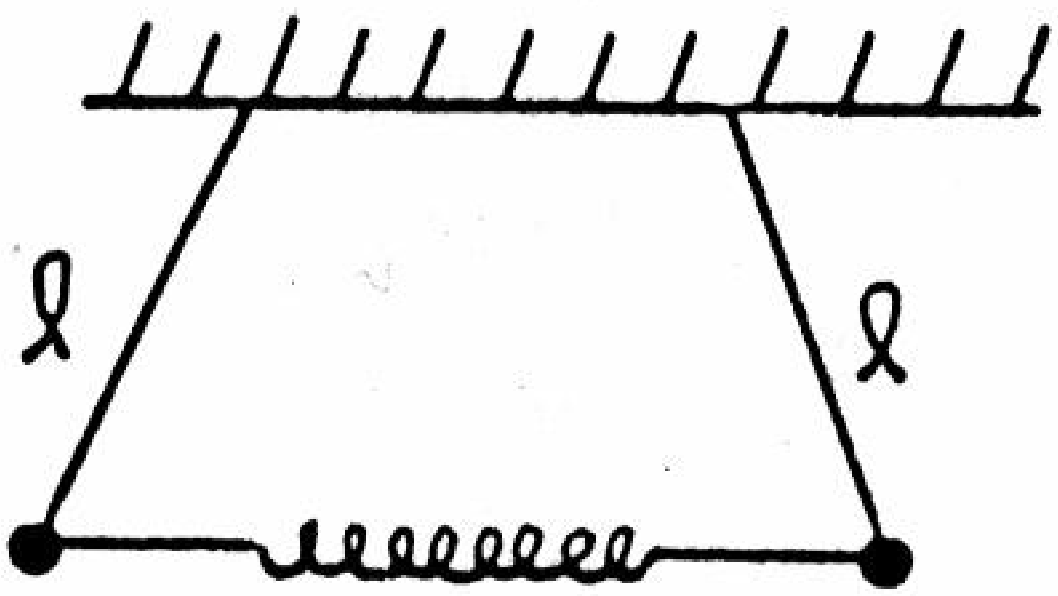
1


o
c
o
k
k

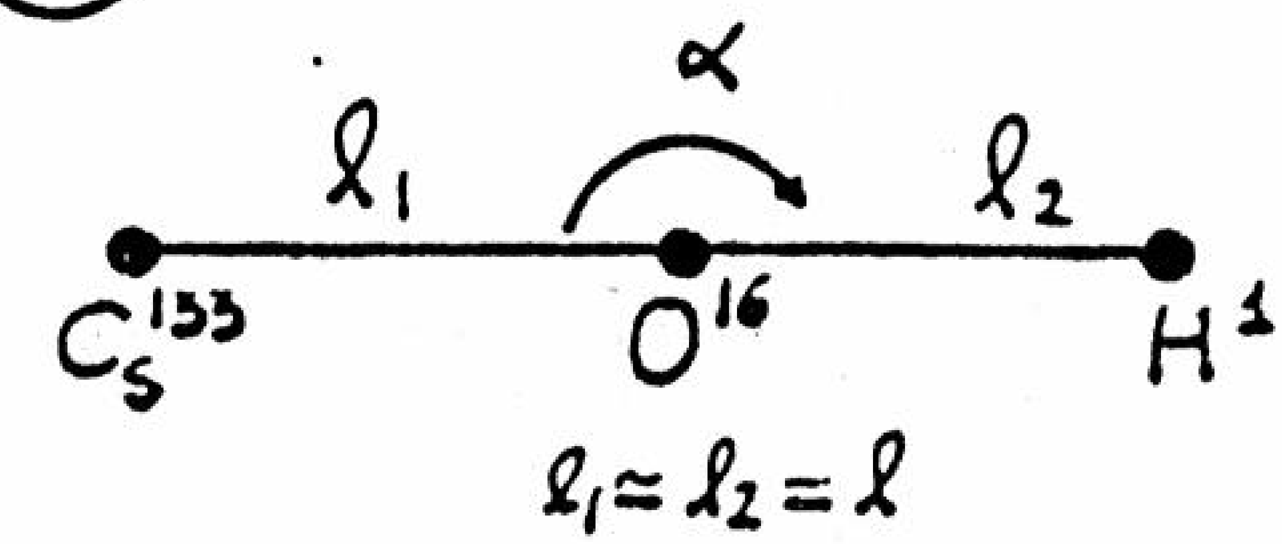
2


k
m1
k
m2

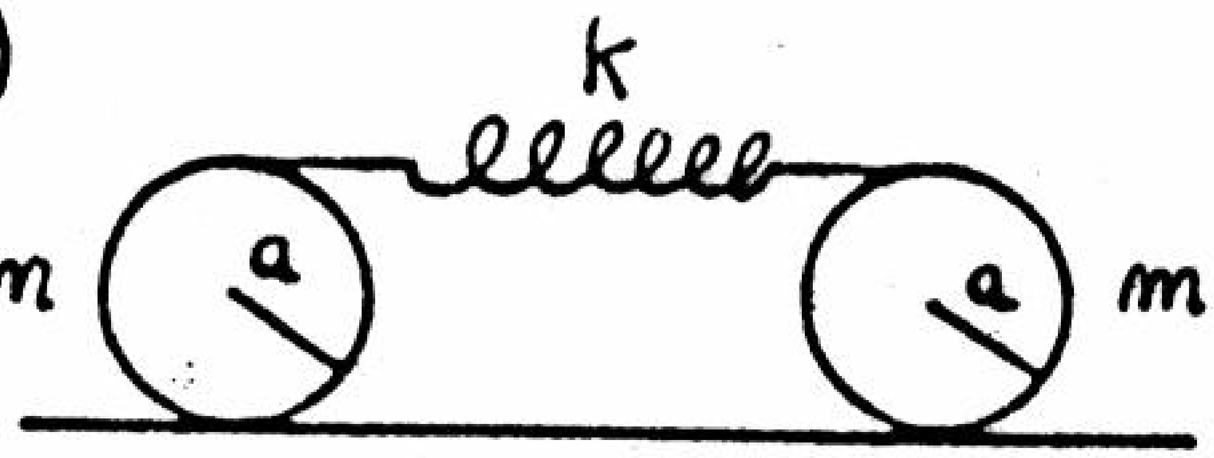
3


l
l

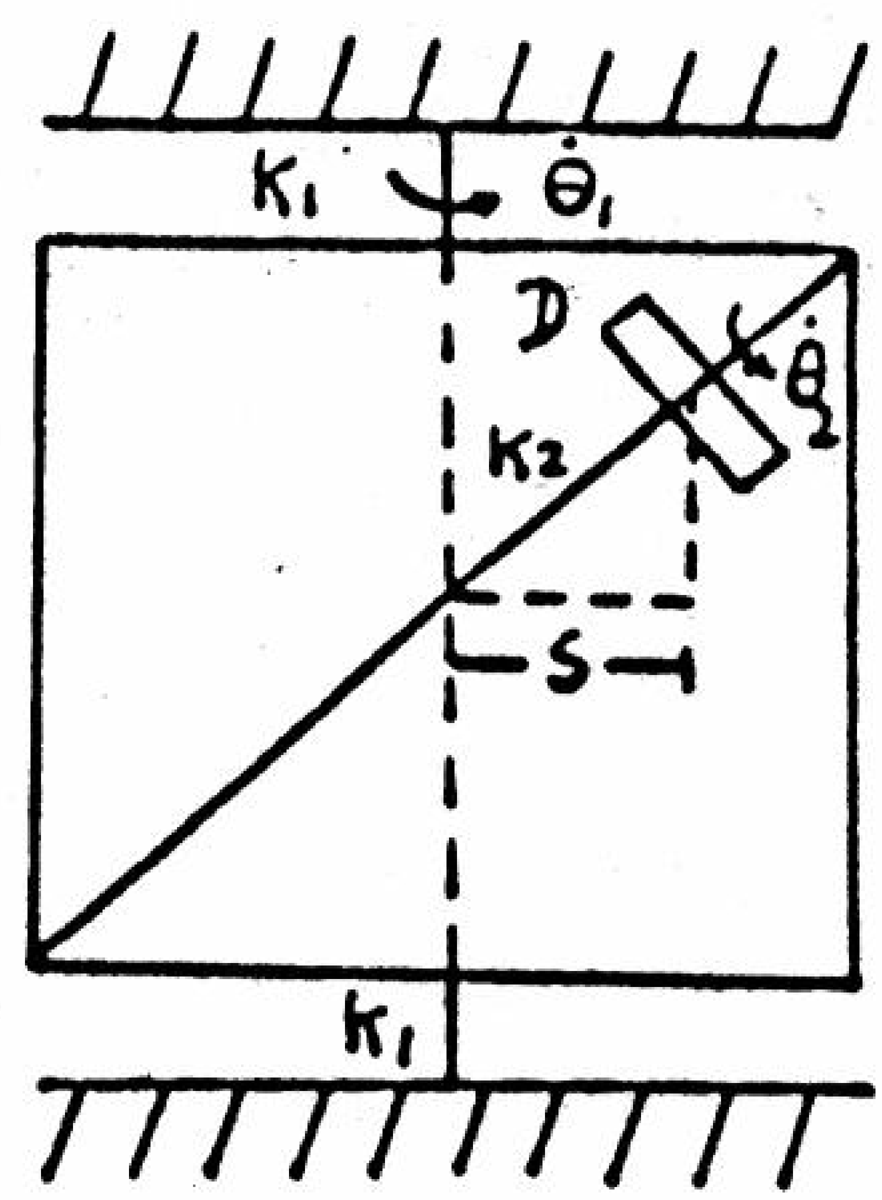
4


α
l1
l2
Cs133
O16
H1
l1 ≃ l2 = l

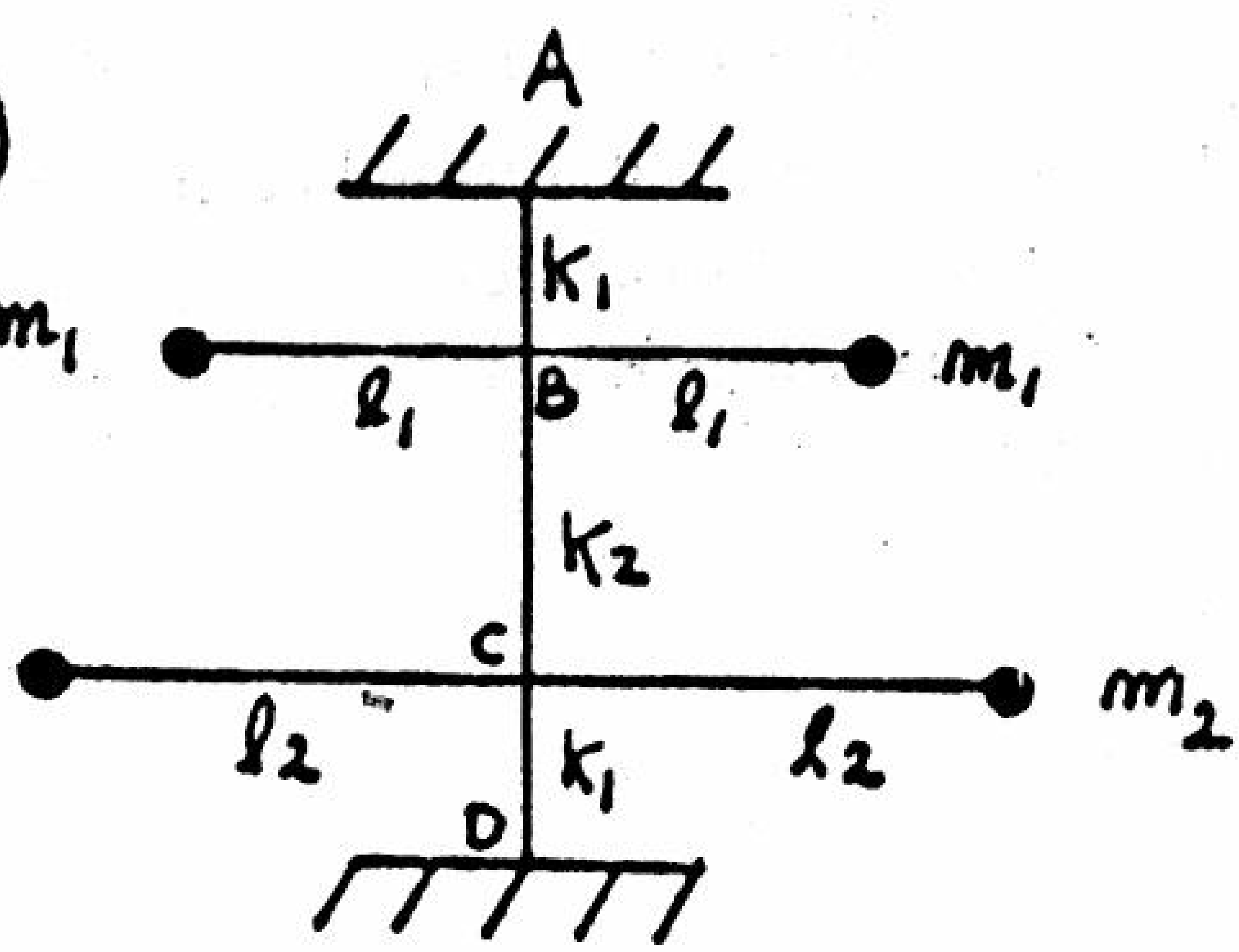
8


k
m
a
a
m

11


k1
θ̇1
D
θ̇2
k2
s
k1

12


A
k1
m1
m1
l1
B
l1
k2
m2
c
m2
l2
k1
l2
D