

Universidad Nacional de Colombia

<http://www.unalmed.edu.co>



1/26

El Principio Variacional De Ekeland Y Aplicaciones

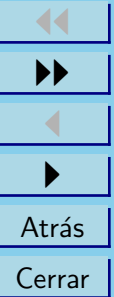
Autor: GERMAN JIMENEZ BLANCO

Director: Ph. D. JORGE COSSIO BETANCUR

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al título de Magister en Matemáticas
email: gjimenez@uninorte.edu.co

Esta presentación fue desarrollada usando pdfslide class bajo MikTeX.

Copyright©2001 Dario Castro Castro. All rights reserved. 2 de octubre de 2003



RESUMEN

En este trabajo se estudia el Principio Variacional de Ekeland y algunas aplicaciones a la teoría de puntos críticos y a ecuaciones diferenciales parciales. Se prueba a partir del Principio Variacional de Ekeland el Teorema del Paso de la Montaña y el Teorema de Punto de Silla; también se demuestra la existencia de soluciones débiles para problemas de Dirichlet semilineales.



2/26



Atrás

Cerrar





Principio Variacional de Ekeland -forma fuerte

Teorema 1 Sean (X, d) un espacio métrico completo y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a $+\infty$, y acotada inferiormente.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\bar{u} \in X$ tales que $\phi(\bar{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}$.

Entonces para cada $\lambda > 0$ existe $u_\lambda \in X$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(\bar{u}) \quad (1)$$

$$d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \lambda \quad (2)$$

$$\phi(u_\lambda) < \phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, u) \quad \forall u \neq u_\lambda \quad (3)$$

[Atrás](#)[Cerrar](#)



Prueba Forma Fuerte

Prueba. Para $\lambda > 0$, sea $d_\lambda(x, y) := \frac{d(x, y)}{\lambda}$

Definamos la siguiente relación en X

$$u \leq v \iff \phi(u) \leq \phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v).$$

Evidentemente esta relación es reflexiva antisimétrica y transitiva por lo tanto es un orden parcial. Partiendo de nuestro orden parcial construimos una sucesión (S_n) de conjuntos tal que

$$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \dots$$

[Atrás](#)[Cerrar](#)

Demostramos que los S_n son cerrados y que $\text{diam} S_n \rightarrow 0$.

Por lo tanto existe un único elemento $u_\lambda \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}$$

Se prueba que este elemento u_λ satisface las condiciones (1), (2), (3). ■



5/26



Atrás

Cerrar





Principio Variacional de Ekeland-forma débil

Teorema 2 Sean (X, d) un espacio métrico completo y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, no idénticamente igual a $+\infty$, y acotada inferiormente. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in X$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \inf_X \phi + \varepsilon \quad (4)$$

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(u) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) \quad \forall u \neq u_\varepsilon. \quad (5)$$



Atrás

Cerrar





Prueba Forma Débil

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la definición de ínfimo existe $\bar{u} \in X$ tal que

$$\phi(\bar{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicando el teorema anterior con $\lambda = 1$ tenemos que existe u_ε tal que se cumplen (4) y (5) ■

[Atrás](#)[Cerrar](#)



Aplicación a la Teoría de Puntos Fijos.

Teorema 3 Sean X un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ una función tal que

$$d(u, f(u)) \leq \phi(u) - \phi(f(u)) \quad \forall u \in X, \quad (6)$$

donde $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente.

Entonces existe $v \in X$ tal que $f(v) = v$

[Atrás](#)[Cerrar](#)

Puntos Fijos.

Prueba.

Aplicando el Teorema 2 (forma débil) con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $v \in X$ tal que

$$\phi(v) - \phi(w) < \frac{1}{2}d(v, w) \quad \forall w \in X.$$

Tomando $w = f(v)$ en la desigualdad anterior y aplicando (6) tenemos

$$d(v, f(v)) \leq \phi(v) - \phi(f(v)) < \frac{1}{2}d(v, f(v)).$$

Por lo tanto $d(v, f(v)) = 0$. Luego $f(v) = v$ ■



9/26



Atrás

Cerrar





Puntos Fijos .

Corolario 4 (*Punto fijo de Banach*) Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces existe x_0 tal que $T(x_0) = x_0$.

Prueba. Se demuestra que

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x))$$
$$\text{donde } \phi(x) = \frac{1}{1-k} d(x, T(x))$$

El resultado se sigue aplicando el Teorema 3 ■

[Atrás](#)[Cerrar](#)

Aplicación a la Optimización.

Teorema 5 Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente, acotada inferiormente y Gateaux-diferenciable $\forall x \in X$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $\bar{u} \in X$ tales que

$$\phi(\bar{u}) \leq \inf_X \phi + \varepsilon \quad (7)$$

existe $u_\varepsilon \in X$ tal que

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \phi(\bar{u}) \quad (8)$$

$$\|\bar{u} - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon} \quad (9)$$

$$\|\phi'(u_\varepsilon)\|_{X^*} \leq \sqrt{\varepsilon} \quad (10)$$



11/26



Atrás

Cerrar





12/26

Palais-Smale

Definición 6 Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Decimos que ϕ satisface la condición de Palais-Smale si toda sucesión (u_n) en X que satisface

$$\begin{aligned} |\phi(u_n)| &\leq k, \text{ para algun } k \in \mathbb{R} \\ \phi'(u_n) &\rightarrow 0 \text{ en } X^* \end{aligned}$$

tiene una subsucesión convergente en X .



Atrás

Cerrar





13/26

Teorema 7 Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 que satisfaga la condición de Palais-Smale y tal que ϕ está acotado inferiormente. Entonces existe $u_0 \in X$ tal que

$$\inf_X \phi = \phi(u_0) \quad \text{y} \quad \phi'(u_0) = 0.$$

Es decir, el ínfimo de ϕ se asume en $u_0 \in X$ y u_0 es un punto crítico de ϕ .



Atrás

Cerrar



Teoremas de Minimax.

Teorema 8 (*Teorema de Minimax*) Sean K un espacio métrico compacto, $K_0 \subset K$ un subconjunto cerrado de K , X un espacio de Banach, $\chi \in C(K_0, X)$ y M definido por

$$M = \{g \in C(K, X) / g(s) = \chi(s) \quad \forall s \in K_0\}.$$

$$\text{Sea } \phi \in C^1(X, R). \quad c = \inf_{g \in M} \max_{s \in K} \phi(g(s)) \quad \text{y} \quad c_1 = \max_{\chi(K_0)} \phi.$$

Si $c > c_1$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ y cada $f \in M$ tales que

$$\max_{s \in K} \phi(f(s)) \leq c + \varepsilon,$$

existe $v \in X$ tal que

$$c - \varepsilon \leq \phi(v) \leq \max_{s \in K} \phi(f(s)) \quad (11)$$

$$\text{dist}(v, f(K)) \leq \sqrt{\varepsilon} \quad \text{y} \quad \|\phi'(v)\| \leq \sqrt{\varepsilon} \quad (12)$$



14/26



Atrás

Cerrar



Prueba. Definamos la función $\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\Psi(g) = \max_{S \in K} \phi(g(s))$$

Sea $f \in M$ tal que

$$\Psi(f) = \max_{S \in K} \phi(f(s)) \leq c + \varepsilon.$$

Aplicando el Principio Variacional de Ekeland-forma fuerte, existe $h \in M$ tal que

$$\Psi(h) \leq \Psi(f) \leq c + \varepsilon \quad (13)$$

$$d(h, f) \leq \sqrt{\varepsilon} \quad (14)$$

$$\Psi(h) < \Psi(g) + \sqrt{\varepsilon} d(h, g), \quad \forall g \in M, g \neq h. \quad (15)$$

Posteriormente demostramos que existe $s \in K$ tal que

$$c - \varepsilon \leq \phi(h(s)) \quad y \quad \left\| \phi'(h(s)) \right\| \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad (16)$$

A partir de (16) se sigue la conclusión del teorema. ■



15/26



Atrás

Cerrar





Teoremas de Minimax.

Corolario 9 Sean K , K_0 , X , χ , M , ϕ , c y c_1 definidas como en el teorema anterior y supongamos que existe $S \subset X$ tal que

$$g(K) \cap S \neq \emptyset \text{ para todo } g \in M$$
$$\text{y sea } c_0 = \inf_S \phi.$$

Si $c_1 < c_0$ entonces $c > c_1$ y por lo tanto se tienen todas las conclusiones del teorema anterior.

Corolario 10 Supongamos las mismas hipótesis del Teorema 8. Si ϕ satisface la condición de Palais-Smale entonces c es un valor crítico de ϕ .

[Atrás](#)[Cerrar](#)



17/26

Teoremas de Minimax.

Escogencias adecuadas de K , K_0 y χ en el Teorema 8 y corolario 9 nos proporcionan los dos teoremas siguientes, que son muy importantes en la teoría de puntos críticos.



Atrás

Cerrar



Teorema del Paso de Montaña.

Teorema 11 Sean X un espacio de Banach y $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Supongamos que existen $u_0 \in X$, $u_1 \in X$ y una vecindad acotada Ω de u_0 tal que $u_1 \in (X - \overline{\Omega})$ y

$$\inf_{\partial\Omega} \phi > \max(\phi(u_0), \phi(u_1)).$$

Sean $\Gamma = \{g \in C([0, 1], X) \mid g(0) = u_0, g(1) = u_1\}$ y

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{s \in [0, 1]} \phi(g(s)).$$

Si ϕ satisface la condición de Palais-Smale entonces c es un valor crítico de ϕ y

$$c > \max(\phi(u_0), \phi(u_1))$$

Es decir, existe $u \in X$ tal que $\phi(u) = c$ y $\phi'(u) = 0$.



18/26



Atrás

Cerrar





Teorema del Punto de Silla.

Teorema 12 Sean X un espacio de Banach y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que $X = V \oplus W$, donde V y W son subespacios cerrados, con $\dim V < \infty$. Sean

$$S_R = \{u \in V \mid \|u\| = R\}, \quad \overline{B_R} = \{u \in V \mid \|u\| \leq R\},$$

$$M = \{g \in C(\overline{B_R}, X) \mid g(s) = s \text{ si } s \in S_R\} \quad \text{y}$$

$$c = \inf_{f \in M} \max_{s \in \overline{B_R}} \phi(f(s))$$

Si $\inf_W \phi > \max_{S_R} \phi$ entonces c es un valor crítico de ϕ .



Atrás

Cerrar





Aplicaciones a las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (17)$$

Por una **solución clásica** de (17) entendemos una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface (17).

Una **solución débil** de (17) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u) v \quad \forall v \in H_0^1. \quad (18)$$

Sea $\phi : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x, u). \quad (19)$$

[Atrás](#)[Cerrar](#)

Supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$|f(x, s)| \leq c |s|^{p-1} + b(x), \quad b(x) \in L^{p'}, \quad 1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2} \quad (20)$$

Entonces ϕ es continuamente Fréchet Diferenciable y

$$\langle \phi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u) v \quad \forall v \in H_0^1. \quad (21)$$

De (18) y (21) se sigue que u es una solución débil del problema (17) si y sólo si u es un punto crítico de ϕ .



21/26



Atrás

Cerrar





Aplicación Utilizando El Principio Variacional de Ekeland

Teorema 13 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(s)}{s} = a \quad y \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = b,$$

con a y $b \in (0, \lambda_1)$. Entonces el problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (22)$$

tiene una solución débil.

[Atrás](#)[Cerrar](#)



Aplicación utilizando el Teorema de Punto de silla.

Teorema 14 (Dolph). Supongamos que $h \in C(\overline{\Omega})$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que existen constantes α y $\beta \in \mathbb{R}$ con $\lambda_k < \alpha, \beta < \lambda_{k+1}$,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(s)}{s} = \alpha \quad y \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = \beta. \quad (23)$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + h(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (24)$$

tiene una solución débil.

[Atrás](#)[Cerrar](#)



Aplicación Utilizando El Teorema del Paso de la Montaña

Teorema 15 (A. Ambrosetti y P. Rabinowitz). Supongamos que f satisface las siguientes condiciones

$$|f(x, s)| \leq c |s|^{p-1} + b(x), \text{ donde } c > 0, b(x) \in L^{p'}, 1 \leq p < \frac{2N}{N-2}$$

y supongamos que existen

$$\theta > 2 \text{ y } s_0 > 0 \text{ tales que } 0 < \theta F(x, s) \leq s f(x, s) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall |s| \geq s_0$$

Adicionalmente supongamos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x, s)}{s} < \lambda_1 \quad (25)$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (26)$$



Atrás

Cerrar



tiene una solución débil no trivial.



25/26



Atrás

Cerrar





26/26

¡GRACIAS!

gjimenez@uninorte.edu.co



Atrás

Cerrar

