Mecánica Cuántica I
Tarea Nº 3

Prof. : J. Rogan
Ayud. : V. Muñoz

Fecha de publicación: 8 de mayo de 2001.
Fecha de entrega: 15 de mayo de 2001.

1. Normalice los siguientes paquetes de onda y calcule $\langle(\Delta x)^2\rangle$ y $\langle(\Delta p)^2\rangle$:

   (a) $\psi(x) = e^{-|x|/L}$.

   (b) $\psi(x) = H_n(x/L)e^{-x^2/(2L^2)}$,
   donde H_n es el polinomio de Hermite de orden n.

2. Muestre que $\langle\Delta x\rangle$ es igual al valor de α que minimiza la expresión

$$V(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x+\alpha)x^2\psi(x+\alpha)\,dx \ ,$$

   y que este mínimo es

$$V_{\min} = \langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \ .$$

3. Considere una partícula cuya función de onda asociada, $\psi(x,t)$ en $t=0$ es

$$\psi(x,0) = (2\pi\Delta x_0^2)^{-1/4}e^{-x^2/(4\Delta x_0^2)} \ .$$

   Investigue la evolución temporal (promedios, desviaciones cuadráticas) de este paquete si, para $t>0$, la partícula se mueve bajo la acción de una fuerza constante. Interprete en términos de los resultados clásicos. Compare con los resultados obtenidos para una partícula libre.

4. Considere el Hamiltoniano $\check{H} = \check{H}_0 + \check{H}_1$ y su correspondiente operador de evolución asociado $\check{U}(t,t_0)$. Sea $\check{U}_0$ el operador de evolución asociado al término $\check{H}_0$ del Hamiltoniano. Se define el cuadro de interacción, intermedio o de Dirac, a través de los kets:

$$|\psi_I(t)\rangle = \check{U}_0^\dagger(t,t_0)|\psi_S(t)\rangle \ .$$

(a) Demuestre que ellos satisfacen la ecuación

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = \check{H}_I|\psi_I(t)\rangle \ , \quad \text{donde } \check{H}_I = \check{U}_0^\dagger \check{H}_1 \check{U}_0 \ .$$

(b) Encuentre el operador de evolución de este cuadro, $\check{U}_I(t, t_0)$ y demuestre que satisface la ecuación

$$i\hbar\frac{d}{dt}\check{U}_I(t, t_0) = \check{H}_I\check{U}_I \ .$$

(c) Demuestre que en este cuadro los operadores satisfacen la ecuación de evolución

$$i\hbar\frac{d}{dt}\check{\Omega}_I = [\check{H}_0^{(I)}, \check{\Omega}_I] + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}\check{\Omega}_S\right)_I \ , \quad \text{donde } \check{H}_0^{(I)} = \check{U}_0^\dagger \check{H}_0 \check{U}_0 \ .$$

(d) Demuestre que $\check{U}_I$ satisface la ecuación integral

$$\check{U}_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \check{H}_I(t')\check{U}_I(t', t_0)\, dt' \ .$$

5. (a) Para sistemas conservativos, muestre que si en $t = 0$ el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es un autovector del observable $\check{A}$ asociado al autovalor a, entonces, para $t > 0$, $|\psi(t)\rangle$ será un autovector del operador $\check{A}_H(-t)$ asociado al mismo autovalor a.

(b) Evalúe los conmutadores

$$[\check{p}_H(t_1), \check{x}_H(t_2)] \ , \quad [\check{p}_H(t_1), \check{p}_H(t_2)] \ , \quad [\check{x}_H(t_1), \check{x}_H(t_2)] \ .$$