Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

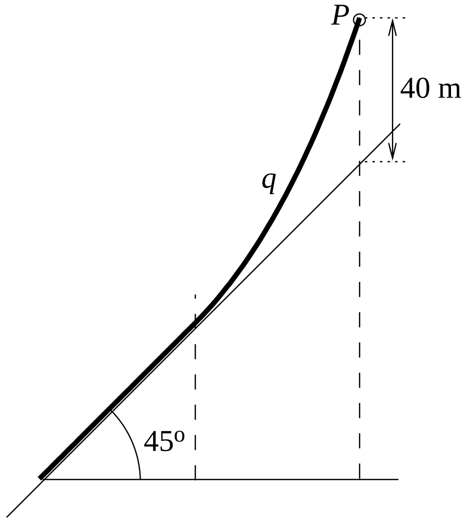
Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL Y EXAMEN FINAL ORDINARIO (6 de Junio de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

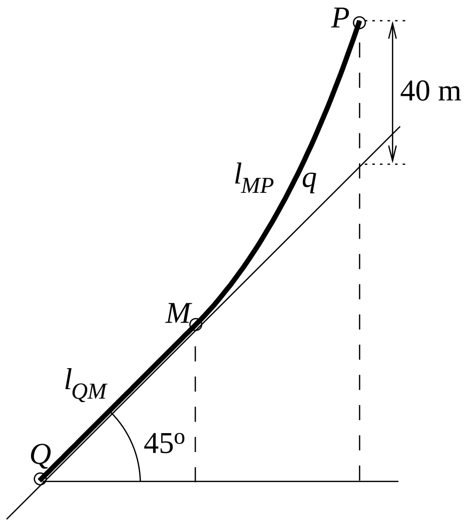
Ejercicio 3.º (parcial) ó 5.º (final) (puntuación: 10/25 ó 10/45) Tiempo: 60 min.

Un hilo homogéneo de peso q por unidad de longitud está fijo a un punto P por un extremo, mientras que el resto cuelga libremente apoyándose además sobre un plano inclinado liso que pasa por debajo de P a una distancia vertical de 40 m. La longitud total del hilo es de 200 m y el plano inclinado forma 45° con la horizontal, con longitud suficiente para que el resto del hilo esté apoyado sobre él. Se pide:



1. Expresar las ecuaciones algebraicas que permiten obtener la configuración de equilibrio, indicando claramente las incógnitas a resolver, y reducir estas ecuaciones a su forma más simplificada posible;
2. Resolver dichas ecuaciones para obtener la configuración de equilibrio;
3. Determinar la tensión máxima en el hilo, así como la longitud del mismo que se apoya sobre el plano.

1.— Denominamos Q al extremo inferior del hilo, y M al punto donde se levanta del plano. El hilo forma una catenaria entre M y P, de la cual conocemos de entrada la tangente en M:



$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{sh}\frac{x_M}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_M}{a} = \alpha_M = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}) \ ,$$

donde empleamos la notación $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x/a$ para simplificar la escritura en lo sucesivo. Por otra parte, la tensión en M procede del trozo de hilo l_{QM} apoyado:

$$q l_{QM}\frac{\sqrt{2}}{2} = qa \operatorname{ch}\alpha_M = qa\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad l_{QM} = 2a \ .$$

Para conocer la configuración del hilo nos faltan por determinar el parámetro a y la abscisa x_P, o bien $\alpha_P = x_P/a$. Para ello necesitamos dos ecuaciones, en primer lugar la diferencia de ordenadas entre M y P:

$$\begin{gathered} a \operatorname{ch}\alpha_P - a\operatorname{ch}\alpha_M = (x_P - x_M)\operatorname{tg} 45° + 40 \\ \Downarrow \\ \operatorname{ch}\alpha_P - \operatorname{ch}\alpha_M = (\alpha_P - \alpha_M) + \frac{40}{a} \ . \end{gathered} \tag{1}$$

Por otra parte, conocemos la longitud del hilo entre M y Q:

$$\begin{gathered} a\,\mathrm{sh}\,\alpha_P - a\,\mathrm{sh}\,\alpha_M = 200 - l_{QM} \\ \Downarrow \\ \mathrm{sh}\,\alpha_P - \mathrm{sh}\,\alpha_M = \frac{200}{a} - 2\ . \end{gathered} \tag{2}$$

Las dos ecuaciones (1) y (2) permiten resolver el problema, ya que α_M es conocida. Podemos combinar ambas eliminando $40/a$ de (1), para obtener finalmente una ecuación en función de α_P:

$$f(\alpha_P) = \mathrm{sh}\,\alpha_P - 5\,\mathrm{ch}\,\alpha_P + 5\alpha_P + \underbrace{\left[5\sqrt{2} - 1 - 5\ln(1+\sqrt{2}) + 2\right]}_{=3{,}6642} = 0\ . \tag{3}$$

2.— Para obtener la solución de (3) podemos proceder numéricamente, mediante iteraciones con el método de Newton. Para ello expresamos en primer lugar la derivada,

$$f'(\alpha_P) = \mathrm{ch}\,\alpha_P - 5\,\mathrm{sh}\,\alpha_P + 5\ , \tag{4}$$

mediante la cual las sucesivas aproximaciones a la solución se obtienen como

$$f'(\alpha_n)\Delta\alpha_n = -f(\alpha_n) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}\ .$$

Debemos escoger un valor α_0 para comenzar las iteraciones. Para ello observamos que debe ser $\alpha_P > \alpha_M = 1$, por lo cual $\alpha_0 = 2$ puede ser un valor razonable. Realizando las operaciones,

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = 2; && \Delta\alpha_0 = -\frac{-1{,}5199}{-9{,}3721} = -0{,}16217; \\ &\alpha_1 = 1{,}8378; && \Delta\alpha_1 = -\frac{-0{,}18988}{-7{,}0882} = -2{,}6789\cdot 10^{-2}; \\ &\alpha_2 = 1{,}81104; && \Delta\alpha_2 = -\frac{-0{,}0046416}{-6{,}74311} = -6{,}8835\cdot 10^{-4}; \\ &\alpha_3 = 1{,}81035; && \Delta\alpha_3 = -\frac{-3{,}01389\cdot 10^{-6}}{-6{,}73436} = -4{,}4754\cdot 10^{-7}; \end{aligned}$$

Vemos que a partir de la tercera iteración las cifras significativas no varían por lo que adoptamos este valor como solución, $\alpha_P = 1{,}81035$. Entrando con este valor en (2) se obtiene $a = 50{,}2936$ m, con lo cual queda resuelta la configuración del hilo.

3.— La tensión máxima se obtiene en el punto más alto (P):

$$T_P = qa\,\mathrm{ch}\,\alpha_P = 157{,}8256q\ .$$

Por último, la longitud apoyada es

$$l_{QM} = 2a = 100{,}5872\,\mathrm{m}\ .$$