

Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

1. Espacio de funciones	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Sucesiones de funciones	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt	9
1.4. Coeficientes de Fourier	10
1.5. Integrales impropias (valor principal)	14
1.6. Convergencia según Cesàro	15
2. Series de Fourier	19
3. Transformada de Fourier	35
3.1. Definiciones	35
3.2. Ejemplos	36
3.3. Propiedades	41
3.4. Aplicaciones	43
4. Convolución	45
4.1. Espacio \mathcal{S}	45
4.2. Producto de convolución	46
4.3. El espacio \mathcal{S} como anillo	49
5. Distribuciones temperadas	53
5.1. Definiciones	53
5.2. Sucesión de distribuciones	61
5.3. Producto de distribuciones	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales	72
5.5. Convergencia débil	73
6. Distribuciones y transformada de Fourier	79
7. Convolución de distribuciones	87
7.1. Definiciones	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones	89
7.3. Uso de convolución en Física	91

8. La función Gamma	93
8.1. La función factorial	93
8.2. La función Gamma	94
8.3. Función Beta	96
8.4. Notación doble factorial	99
8.5. Fórmula de Stirling	99
8.6. Otras funciones relacionadas	101
9. Transformada de Laplace	103
9.1. Definición	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace	111
10. Aplicaciones de la transformada de Laplace	113
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	114
10.2. Ecuaciones integrales	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales	120
11. Polinomios ortogonales	123
11.1. Definiciones	123
11.2. Teoremas	123
11.3. Relación de recurrencia	125
12. Polinomios de Hermite	127
12.1. Definición	127
12.2. Función generatriz	127
12.3. Ortogonalidad	130
12.4. Algunos resultados interesantes	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite	131
13. Polinomios de Laguerre	133
13.1. Definición	133
13.2. Función generatriz	133
13.3. Relaciones de recurrencia	135
13.4. Ecuación de Laguerre	135
13.5. Ortogonalidad	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre	138
14. El problema de Sturm-Liouville	139
14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos	139
14.2. Operadores autohermíticos	141
14.3. Problema de autovalores	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales	143

15.Ecuaciones diferenciales con singularidades	145
15.1. Puntos singulares	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs	149
15.4. Una segunda solución	151

Capítulo 13

Polinomios de Laguerre

versión preliminar 3.1-28 octubre 2002

13.1. Definición

Definición 13.1 Definimos el conjunto de los polinomios de Laguerre $\{L_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ mediante una cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = (-1)^n t^n + \cdots + n! , \quad (13.1a)$$

$$L_n(t) = e^t \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \left(\frac{d^{n-\nu} t^n}{dt^{n-\nu}} \right) \frac{d^\nu e^{-t}}{dt^\nu} , \quad (13.1b)$$

$$L_n(t) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{n!}{\nu!} t^\nu = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{n! n!}{(n-\nu)! (\nu!)^2} t^\nu . \quad (13.1c)$$

Algunos de los polinomios en forma explícita:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1 \\ L_1(t) &= -t + 1 \\ L_2(t) &= t^2 - 4t + 2 \\ L_3(t) &= -t^3 + 9t^2 - 18t + 6 \\ L_4(t) &= t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24 \\ &\vdots \end{aligned}$$

13.2. Función generatriz

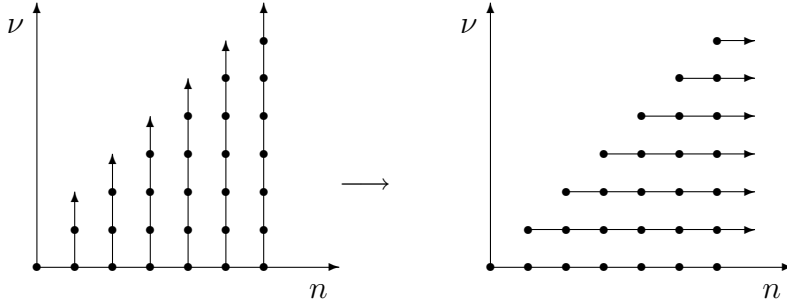
Definición 13.2 La función generatriz $\Psi(t, x)$ está definida por la siguiente relación:

$$\Psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n . \quad (13.2)$$

Usando (13.1c) obtenemos:

$$\Psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \binom{n}{\nu} t^{\nu} x^n$$

Cambiamos el orden de suma. El primer gráfico corresponde a la forma en que estábamos sumando: fijamos un n en el eje horizontal, con $n = 1, \dots, \infty$ y luego consideramos los ν variando desde 1 a n (flechas verticales hacia arriba). El segundo corresponde a la misma suma pero hecha de forma diferente: fijamos un ν en el eje vertical, con $\nu = 1, \dots, \infty$ y luego consideramos los n variando desde ν a ∞ (flechas horizontales hacia la derecha).



Obtenemos

$$\Psi(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} t^{\nu} \binom{n}{\nu} x^n .$$

Haciendo el cambio de índice $m = n - \nu$:

$$\Psi(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} t^{\nu} \binom{m+\nu}{\nu} x^{m+\nu} .$$

Reordenando

$$\Psi(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} t^{\nu} x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\nu}{\nu} x^m .$$

Pero

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\nu}{\nu} x^m = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{\nu+1} \quad \text{cuando } |x| < 1 ,$$

luego

$$\Psi(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} t^{\nu} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\nu} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \left(\frac{tx}{1-x} \right)^{\nu} .$$

Finalmente

$$\boxed{\Psi(t, x) = \frac{1}{1-x} \exp \left(\frac{-tx}{1-x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n} \quad (13.3)$$

13.3. Relaciones de recurrencia

Reescribamos la definición de la función generatriz

$$\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n . \quad (13.4)$$

Derivemos respecto a x :

$$\frac{-t}{(1-x)^2} \exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(t)}{(n-1)!} x^{(n-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n .$$

Usando (13.4) y comparando coeficientes de x ,

$$\boxed{L_{n+1}(t) + (t - 2n - 1)L_n(t) + n^2 L_{n-1}(t) = 0} \quad (13.5)$$

De la misma manera, derivando (13.4) respecto a t , se obtiene

$$\boxed{L'_n(t) - n L'_{n-1}(t) + n L_{n-1}(t) = 0} \quad n \geq 1 . \quad (13.6)$$

13.4. Ecuación de Laguerre

Diferenciando dos veces (13.4) respecto a t ,

$$L''_{n+2}(t) + (t - 2n - 3)L''_{n+1}(t) + (n+1)^2 L''_n(t) + 2L'_{n+1}(t) = 0 . \quad (13.7)$$

De (13.6) tenemos

$$L'_{n+1}(t) = (n+1) [L'_n(t) - L_n(t)] , \quad (13.8)$$

de donde obtenemos, derivando nuevamente,

$$L''_{n+1}(t) = (n+1) [L''_n(t) - L'_n(t)] . \quad (13.9)$$

Cambiando $n \rightarrow n+1$,

$$L''_{n+2}(t) = (n+2) [L''_{n+1}(t) - L'_{n+1}(t)] .$$

Usando (13.8) y (13.9),

$$\begin{aligned} L''_{n+2}(t) &= (n+2)(n+1) [L''_n(t) - L'_n(t) - L'_n(t) + L_n(t)] , \\ L''_{n+2}(t) &= (n+2)(n+1) [L''_n(t) - 2L'_n(t) + L_n(t)] . \end{aligned} \quad (13.10)$$

Reemplazando (13.8), (13.9) y (13.10) en (13.7),

$$\begin{aligned} &(n+2)(n+1) [L''_n(t) - 2L'_n(t) + L_n(t)] + (t - 2n - 3)(n+1) [L''_n(t) - L'_n(t)] \\ &\quad + (n+1)^2 L''_n(t) + 2(n+1) [L'_n(t) - L_n(t)] = 0 \\ &(n+1) (n+2+t-2n-3+n+1) L''_n(t) + (n+1) (2n-4-t+2n+3+2) L'_n(t) \\ &\quad + (n+1) (n+2-2) L_n(t) = 0 \\ &(n+1) t L''_n(t) + (n+1) (1-t) L'_n(t) + (n+1)n L_n(t) = 0 . \end{aligned}$$

Dividiendo por $(n + 1)$ obtenemos

$$\boxed{t L_n''(t) + (1 - t) L_n'(t) + n L_n(t) = 0} \quad (13.11)$$

Es decir, $L_n(t)$ es una solución de la *ecuación de Laguerre*

$$\boxed{t y''(t) + (1 - t) y'(t) + n y(t) = 0} . \quad (13.12)$$

Consideremos esta ecuación, pero en una forma más general:

$$t y''(t) + (1 - t) y'(t) + \lambda y(t) = 0 .$$

Buscando soluciones del tipo

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu} ,$$

es fácil demostrar que los a_{ν} satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{\nu+1} = \frac{\nu - \lambda}{(\nu + 1)^2} a_{\nu} .$$

Lo anterior tiene varias consecuencias:

- (i) El coeficiente a_0 puede elegirse libremente, quedando a_1, a_2, \dots así determinados por a_0 . Se obtiene un espacio de soluciones de dimensión uno. Para encontrar la otra solución linealmente independiente hay que analizar ecuaciones del tipo

$$f'' + p(z)f' + q(z)f = 0 .$$

Esto se hará en el capítulo siguiente.

- (ii) Al hacer el cuociente entre los coeficientes tenemos

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \frac{1}{\nu} .$$

Esto implica radio de convergencia infinito para la serie.

- (iii) Los valores $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$ son excepcionales: dan soluciones polinomiales.
- (iv) Si $\lambda \notin \mathbb{N}^0$ todos los coeficientes de índice suficientemente grande son positivos o negativos. Esto implica un crecimiento muy rápido.

13.5. Ortogonalidad

Consideremos

$$I = \int_0^{\infty} t^m L_n(t) e^{-t} dt , \quad \text{con } m < n .$$

Sea $m > 0$, entonces

$$I = \int_0^\infty t^m \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) dt ,$$

integrando por partes,

$$t^m \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^n e^{-t}) \Big|_0^\infty - m \int_0^\infty t^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^n e^{-t}) dt .$$

Integrando n veces por partes se obtiene entonces

$$I = (-1)^n m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} (t^n e^{-t}) dt .$$

Si $m < n$,

$$I = (-1)^n m! \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} (t^n e^{-t}) \Big|_0^\infty = 0 ,$$

luego

$$\int_0^\infty L_n(t) L_m(t) e^{-t} dt = 0 \quad \text{si } m < n .$$

Por simetría la integral va a ser nula siempre que $m \neq n$.

Si $m = n$,

$$\int_0^\infty L_n^2(t) e^{-t} dt = (-1)^n (-1)^n n! \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = (n!)^2 .$$

Resumiendo ambos casos,

$$\boxed{\int_0^\infty L_n(t) L_m(t) e^{-t} dt = (n!)^2 \delta_{nm}} \quad (13.13)$$

Basados en la relación de ortogonalidad (13.13) podemos definir un conjunto de funciones

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t) e^{-t/2} . \quad (13.14)$$

Claramente

$$\int_0^\infty \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \delta_{nm} .$$

Es decir, el conjunto $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ corresponde a un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $[0, \infty)$.

A partir de (13.14) podemos despejar los polinomios de Laguerre

$$L_n(t) = n! e^{t/2} \varphi_n(t) ,$$

y usando la ecuación diferencial (13.11) que satisfacen, encontramos la ecuación para las funciones $\varphi_n(t)$:

$$t \varphi_n''(t) + \varphi_n'(t) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right) \varphi_n(t) = 0 . \quad (13.15)$$

Además, $\varphi_n(t)$ satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_n(t) < \infty .$$

13.6. Polinomios asociados de Laguerre

Al diferenciar m veces la ecuación (13.11) obtenemos

$$t L_n^{(m+2)}(t) + (m+1-t) L_n^{(m+1)}(t) + (n-m) L_n^{(m)}(t) = 0 .$$

Podemos definir un nuevo conjunto de polinomios

$$\boxed{L_n^m(t) = \frac{d^m}{dt^m} L_n(t)} \quad \text{para } n \geq m , \quad (13.16)$$

conocidos como los *polinomios asociados de Laguerre*. Los cuales son soluciones de la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{t y''(t) + (m+1-t) y'(t) + (n-m) y(t) = 0 .} \quad (13.17)$$

Algunos de los primeros polinomios son:

$$\begin{aligned} L_1^1 &= -1 , \\ L_2^1 &= -4 + 2t , & L_2^2 &= 2 , \\ L_3^1 &= -18 + 18t - 3t^2 , & L_3^2 &= 18 - 6t , & L_3^3 &= -6 . \end{aligned}$$

La función generatriz

$$\boxed{\Psi_m(t, x) = (-1)^m x^m \exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x)^{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{L_n^m(t)}{n!} x^n .} \quad (13.18)$$

Utilizando esta ecuación podemos obtener las relaciones de recurrencia

$$\frac{d}{dt} L_n^m(t) = L_n^{m+1}(t) , \quad (13.19)$$

$$L_{n+1}^m(t) + (t-2n-1)L_n^m(t) + m L_n^{m+1}(t) + n^2 L_{n-1}^m(t) = 0 , \quad (13.20)$$

$$L_n^m(t) - n L_{n-1}^m(t) + n L_{n-1}^{m-1}(t) = 0 . \quad (13.21)$$

Finalmente, en forma análoga a lo que hicimos con los polinomios de Laguerre podemos definir las funciones ortogonales a partir de los polinomios asociados de Laguerre de la siguiente forma:

$$R_{n\ell}(t) \equiv e^{-t/2} t^\ell L_{n+\ell}^{2\ell+1}(t) . \quad (13.22)$$

Estas funciones satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dy(t)}{dt} - \left(\frac{1}{4} - \frac{n}{t} + \frac{\ell(\ell+1)}{t^2} \right) y(t) = 0 . \quad (13.23)$$

Esta ecuación aparece en Mecánica Cuántica al resolver el átomo de Hidrógeno. Específicamente, corresponde a la ecuación radial de Schrödinger para la función de onda del átomo de Hidrógeno.