

Capítulo 3

Fuerzas Específicas y Movimiento

3.1. Ley de Gravitación Universal

3.1.1. La ley

La tercera ley de Kepler dice que el cubo de la distancia media, R , de un planeta dividida por el cuadrado de su período, T , es la misma constante para todos los planetas, es decir para cualquier planeta a el cociente

$$\frac{R_a^3}{T_a^2} = k \quad (3.1.1)$$

da un valor k que no depende del planeta.

Kepler estableció que las órbitas son elipses. También estableció la ley (2.3.19) que sabemos que significa que el momento angular se conserva. Esto último sugiere que la dinámica de los planetas está gobernada por una fuerza central. Si la fuerza es central de la forma $f(r) \hat{r}$, la única aceleración que sufren los planetas es la centrípeta, descrita en (1.3.12). ¿Qué forma tiene tal ley de fuerza?

Aun cuando los planetas se mueven en órbitas elípticas, éstas son muy poco excéntricas, es decir, son casi circunferenciales. La velocidad media del planeta a es prácticamente su velocidad real todo el tiempo, y se

puede estimar dividiendo el camino recorrido en una órbita: $2\pi R_a$ por el tiempo T_a que tarda, es decir, $V_a = 2\pi R_a/T_a$. Se sabe, ver (1.3.12), que la aceleración centrípeta $a_c^{(a)}$ es de magnitud V_a^2/R_a ,

$$a_c^{(a)} = \frac{1}{R_a} \left(\frac{2\pi R_a}{T_a} \right)^2 = \frac{4\pi^2 R_a}{T_a^2} = \frac{4\pi^2 R_a^3}{R_a^2 T_a^2} = \frac{4\pi^2 k}{R_a^2} \quad (3.1.2)$$

Con la última expresión a la derecha se ha podido escribir la aceleración centrípeta en términos tan solo de la constante $4\pi^2 k$ y de la distancia al centro de fuerza (distancia al sol). Por tanto, la magnitud de la fuerza sobre el planeta a tiene que estar dada por esta aceleración multiplicada por la masa del planeta y tiene que apuntar hacia el centro:

$$\vec{F}_a = -\frac{4\pi^2 k M_a}{R_a^2} \hat{r} \quad (3.1.3)$$

El planeta Júpiter tiene muchas lunas y ese sistema se comporta como un sistema solar autónomo. Cuando se estudió si la ley de Kepler (3.1.1) se cumplía para ese sistema se obtuvo que se cumple, pero la constante k que resulta es otra. Hoy sabemos, gracias a la ley de gravitación universal de Newton, que esa constante k es proporcional a la masa del objeto masivo que crea la fuerza central (el sol en un caso y Júpiter en el otro).

El argumento dado al comienzo, en torno a (3.1.2) tiene sentido tan solo si la órbita es circunferencial o muy próxima a serlo. Pero la conclusión de ese caso particular, ayuda a entender como puede llegar a concebir la ley de validez universal que ahora se introduce.

La ley universal de gravitación enunciada por Newton dice que la fuerza de atracción que ejerce un punto material de masa m_A sobre un punto material de masa m_B es

$$\vec{F}_{\text{sobre B}} = -G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2} \hat{r} \quad (3.1.4)$$

donde \hat{r} es el vector unitario que apunta desde el centro A de fuerza hacia B .

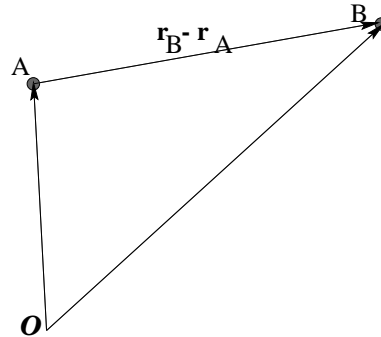
La constante universal de gravitación G vale

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{K}^2} \quad (3.1.5)$$

Esta misma ley se puede también escribir utilizando vectores posición \vec{r}_A y \vec{r}_B respecto a cualquier origen O . Ella toma la forma

$$\vec{F}_{\text{sobre B}} = -G \frac{m_A m_B}{\|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|^3} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad (3.1.6)$$

El movimiento que se deduce con esta fuerza, en particular el movimiento planetario, será discutido más adelante.



3.1.2. Aceleración de gravedad

De acuerdo a (3.1.4) la magnitud de la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m es

$$F = G \frac{M m}{(R + h)^2} \quad (3.1.7)$$

donde M es la masa de la Tierra, R es su radio al nivel del mar y h es la altura sobre el nivel del mar que está el cuerpo de masa m . Siempre se identifica esta fuerza con el producto $m g_h$, por tanto, la aceleración de gravedad resulta valer

$$\begin{aligned} g_h &= \frac{G M}{(R + h)^2} \\ &= \frac{G M}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \\ &\approx \frac{G M}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}} \\ &\approx \frac{G M}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

que depende de la altura h . En el calculo anterior se ha supuesto que la altura h es mucho menor que el radio de la Tierra, $h \ll R$. El radio de la Tierra es $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ lo que garantiza que la aproximación hecha es excelente aun si h es la altura del monte Everest ($h_{\text{Everest}} \approx 8,8 \cdot 10^3 \text{ m}$).

Se llamará g_0 a la aceleración de gravedad al nivel del mar. Puesto que la masa de la Tierra es $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$, resulta

$$g_0 = \frac{G M}{R^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (3.1.9)$$

♣ Demuestre que la aceleración de gravedad en Santiago difiere en menos del 1 % de g_0 .

3.2. Fuerza elástica ideal

3.2.1. Generalidades

El tipo de problemas que se va a abordar en esta sección tiene un grado de aplicabilidad que va mucho más allá de lo que podría aparentar. Superficialmente esta sección trata de una partícula de masa m en el extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo en un punto que se ha designado A en la figura 3.1. Lo que se estudia es cómo oscila este sistema pero los resultados que se obtiene son generalizables a todo tipo de sistemas elásticos.

La fuerza que ejerce un resorte ideal de *largo natural* D_0 sobre un cuerpo P depende linealmente de la deformación (alargamiento o acortamiento) que sufre el resorte y es proporcional a la *constante elástica* k del resorte,

$$\vec{F}_e = -k (D(t) - D_0) \hat{r} \quad (3.2.1)$$

donde, $D(t) = \|\vec{r} - \vec{r}_A\|$ es el largo actual del resorte y \hat{r} es el vector unitario en la dirección del resorte,

$$\hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_A}{\|\vec{r} - \vec{r}_A\|} \quad (3.2.2)$$

En particular si A es el origen, es decir $\vec{r}_A = 0$, y $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$. La diferencia $D(t) - D_0$ se suele denominar la *deformación*.

Un resorte se dice duro si su constante k es grande y blando en el otro extremo.

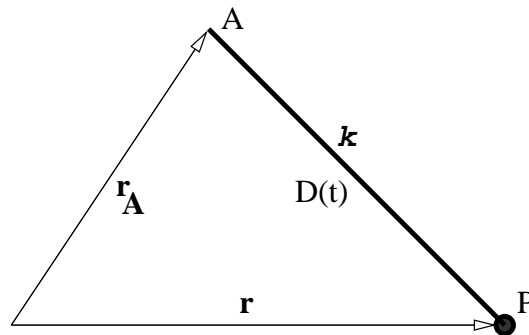


Figura 3.1: Un resorte ubicado en el punto A definido por \vec{r}_A y cuyo otro extremo tiene unido un cuerpo P de masa m y está en el punto \vec{r} .

La *ley de Hooke* se refiere a sistemas en los que, al ser sacados de su posición de reposo (o posición de equilibrio), aparece una fuerza que es proporcional a la deformación, tal como en (3.2.1). Esta ley es aplicada en los más variados contextos. Cuando una cuerda de guitarra es sacada de su posición de equilibrio (es *tañida*) aparece una fuerza que, de alguna manera, puede ser asimilada a (3.2.1). Al deformar levemente cualquier cuerpo sólido aparece una fuerza elástica para restituirlo a su posición original. Como se verá, (3.2.1) conduce a una dinámica típicamente oscilante, aunque no siempre lo es.

Un sistema oscilante normalmente pierde energía y, si está libre de influencias que le mantengan sus oscilaciones, regresa al reposo. La ley que rige esta pérdida de energía se verá más adelante cuando se trate al *oscilador amortiguado*.

Otra variante de los osciladores se refiere al caso real en que el sistema no es sacado levemente de su posición de equilibrio, sino que se aleja bastante de ella. En tales casos es muy típico que la ley (3.2.1) deje de ser válida. Puede ocurrir que la ley sea más complicada, como es el caso del péndulo, (2.3.9) versus el péndulo de pequeñas oscilaciones descrito por la ecuación (2.3.10). También esto ocurre, por ejemplo, cuando el sistema ya no sufre una deformación elástica sino una deformación plástica. Plástica es la deformación que cambian la naturaleza del material elástico como es el caso de un resorte que es estirado más allá de un cierto límite, se deforma en forma irreversible.

3.2.2. Caso unidimensional sencillo

En el caso unidimensional, en que la partícula P en el extremo del resorte—cuyo otro extremo está en el origen— se mueve siempre con $x(t) > 0$, no es necesario usar vectores y la fuerza se puede escribir como $F = -k(x - D_0)$ lo que conduce a la ecuación

$$m \ddot{x}(t) = -k [x(t) - D_0] \quad (3.2.3)$$

Se puede comprobar que la ecuación anterior tiene como solución particular trivial $x(t) = D_0$. Ella corresponde al caso en que el oscilador está en reposo en una posición especial llamada *posición de reposo* o bien *posición de equilibrio*. La solución general del problema se puede integrar fácilmente si se hace el cambio de función: $x(t) = \bar{x}(t) + D_0$, porque la ecuación queda

$$m \ddot{\bar{x}}(t) = -k \bar{x}(t) \quad (3.2.4)$$

Se define la *frecuencia angular característica* del sistema por

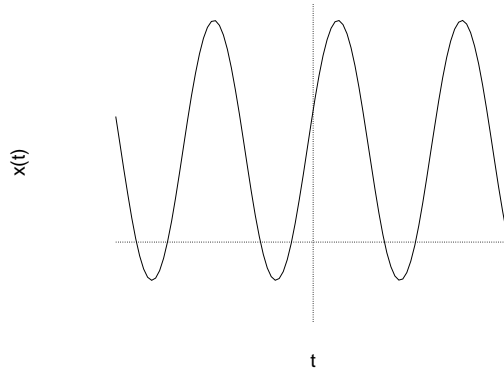


Figura 3.2: Una típica función $x(t)$ de un oscilador unidimensional.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.2.5)$$

La frecuencia propiamente tal se denota ν y se relaciona a ω_0 por $\omega_0 = 2\pi\nu$. El período de tales oscilaciones es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Se puede comprobar que la solución más general de la ecuación es $\bar{x}(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$. Volviendo a la función original $x(t)$ esta solución es

$$x(t) = D_0 + A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.6)$$

Las constantes A y B dependen de las condiciones iniciales. Por ejemplo, si $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ entonces la solución se convierte en

$$x(t) = D_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + (x_0 - D_0) \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.7)$$

(compruébelo).

♠ *Escriba la solución anterior en la forma*

$$x(t) = D_0 + C \sin(\omega_0 t + \gamma_0) \quad (3.2.8)$$

y encuentre la relación entre (C, γ_0) y (x_0, v_0) .

La función $x(t)$ que ha quedado definida oscila en el tiempo en forma sinusoidal, tomando iguales valores en tiempos separados por un múltiplo entero de $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (T es el período de la función $x(t)$), ver figura 3.2.

♠ *Demuestre, a partir de (3.2.6), que $(x(t) - D_0)$ es una función cuyos valores máximo y mínimo son*

$$[x(t) - D_0]_{\max \min} = \pm \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.2.9)$$

Estos valores son la *amplitud* de las oscilaciones y describen cuánto se aleja la partícula oscilante de su posición de reposo.

La solución que se ha visto está caracterizada por una frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Si el resorte es duro (k grande) la frecuencia es más grande, pero si se aumenta el valor de la masa la frecuencia baja.

Este comportamiento se puede apreciar de la siguiente forma. Un vehículo diseñado para acarrear grandes cargas tiene resortes (sus amortiguadores) muy duros, de tal modo que cuando va bien cargado las vibraciones que le provoca las irregularidades del camino se convierten en frecuencias bajas (*suaves* se diría en lenguaje coloquial), pero si ese mismo vehículo va vacío (masa chica) vibrará a alta frecuencia y se sentirá *áspero*.

En la notación de (3.2.6) la función x toma valores extremos cuando $\dot{x} = 0$, lo que ocurre en $t = t_1$ si $A \cos \omega_0 t_1 = B \sin \omega_0 t_1$ lo que ocurre si

$$\tan \omega_0 t_1 = \frac{A}{B} \quad (3.2.10)$$

Al reemplazar este valor en (3.2.7) se obtiene

$$x_{\pm} = D_0 \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + (x_0 - D_0)^2} \quad (3.2.11)$$

Con signo $+$ se tiene el valor máximo de x y con el signo menos se tiene el valor mínimo. Esta expresión es equivalente a (3.2.9).

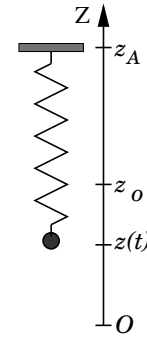
3.2.3. El oscilador armónico vertical

Si el resorte está en posición vertical (gravedad hacia abajo) y z_0 es la coordenada de P cuando el resorte está en su largo natural D_0 (donde $z_0 = z_A - D_0$) entonces la ecuación de movimiento es

$$m \ddot{z}(t) = -k(z(t) - z_0) - mg \quad (3.2.12)$$

Al exigir que en todo instante se cumpla $\ddot{z}(t) \equiv 0$ se obtiene una solución no trivial: $z_e = z_0 - \frac{mg}{k}$; éste es el punto de equilibrio (estático) del sistema. Al hacer el cambio de función $z(t) = \bar{z}(t) + z_0 - \frac{mg}{k}$ la ecuación se convierte en $m \ddot{\bar{z}}(t) = -k \bar{z}(t)$

y vuelve a ser el caso de (3.2.4) ya conocido, es decir, el sistema que forman una partícula de masa m sometida a la fuerza de un resorte vertical y a su propio peso es equivalente a un simple oscilador armónico. El punto de equilibrio en este caso está un poco más abajo que z_0 y es z_e .



El largo natural D_0 ya no es el punto de equilibrio.

3.2.4. El oscilador armónico tridimensional

La ecuación para un oscilador armónico tridimensional de largo natural nulo ubicado en el origen es

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = -k \vec{r}(t) \quad (3.2.13)$$

Se trata de un problema con fuerza central, por tanto, como el momento angular respecto al centro de fuerza se conserva, el movimiento es plano, como se discutió en la sección 2.3.4. Todo el movimiento, entonces, ocurre en un plano, el que queda determinado por las condiciones iniciales. Conviene escoger al plano XY coincidiendo con el plano del movimiento. En tal caso la ecuación anterior se separa en dos ecuaciones independientes,

$$\begin{aligned} m \ddot{x}(t) &= -k x(t) \\ m \ddot{y}(t) &= -k y(t) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Cada una de estas dos ecuaciones tiene solución del tipo (3.2.6) con constantes determinadas por las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \sin(\omega_0 t) + B_1 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) &= A_2 \sin(\omega_0 t) + B_2 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Si se da una posición inicial $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ y una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$, entonces se tiene cuatro condiciones para determinar a las cuatro constantes $A_1 \dots B_2$.

♠ *Demuestre que (3.2.15) implica que la trayectoria en el plano XY es siempre una elipse con centro en el origen.*

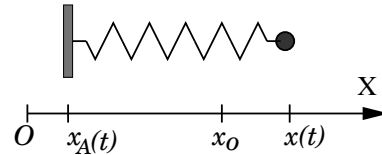
3.2.5. Oscilador forzado

Ahora se considerará el caso de un resorte unidimensional de largo natural nulo y en ausencia de gravedad, cuyo extremo A extremo oscila en torno al origen: $x_A(t) = Q \sin(\omega t)$ con frecuencia angular ω , en general, distinta a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

El resultado efectivo es que aparece un nuevo término de fuerza en la ecuación de movimiento, y es una fuerza oscilante que llamaremos *forzante*.

La ecuación es $m\ddot{x} = -k(x(t) - x_A(t))$, es decir,

$$m \ddot{x} = -k [x(t) - Q \sin(\omega t)] \quad (3.2.16)$$



El punto A se mueve oscilando en torno al origen: $x_A = Q \sin(\omega t)$.

Este tipo de ecuación lineal inhomogénea tiene la siguiente propiedad. Si dos funciones $\bar{x}(t)$ y $x(t)$ la satisfacen, entonces su diferencia,

$$y(t) \equiv x(t) - \bar{x}(t) \quad (3.2.17)$$

satisface la correspondiente ecuación homogénea

$$m \ddot{y}(t) = -k y(t) \quad (3.2.18)$$

cuya solución, como ya sabemos, es de la forma $y(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$.

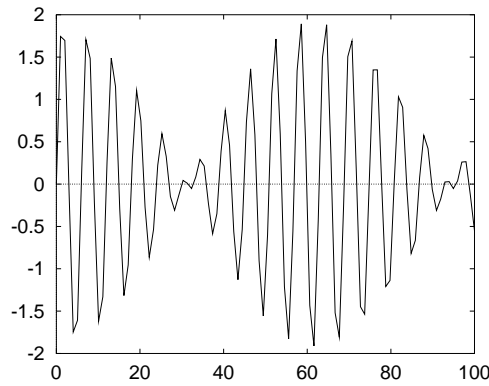


Figura 3.3: Un oscilador de frecuencia natural ω_0 forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω cercana a la frecuencia ω_0 muestra un comportamiento temporal en paquetes como se aprecia en la figura. Si dos cuerdas de guitarra se afinan a notas muy cercanas el sonido que resulta al tocarlas simultáneamente tiene esta propiedad que se llama de *batido*, claramente audible. Esta es una propiedad de la solución (3.2.21).

A continuación se verá que existe una solución de (3.2.16), que se denominará $\bar{x}(t)$, que tiene la forma

$$\bar{x}(t) = D \sin \omega t \quad (3.2.19)$$

siempre y cuando D tenga un valor muy preciso. Puesto que $\ddot{\bar{x}} = -\omega^2 D \sin \omega t$, entonces al exigir que se satisfaga (3.2.16) se deduce que

$$D = \frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.2.20)$$

y la solución $x(t)$ general resulta ser $x = y + \bar{x}$,

$$x(t) = \frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.21)$$

El primer término de la solución tiene frecuencia angular ω asociada a la *forzante* y tiene coeficiente totalmente fijo, mientras que el resto tiene la frecuencia ω_0 asociada al sistema masa-resorte (m, k) . La superposición de dos dependencias temporales con distinta frecuencia puede producir el fenómeno de *batido* que se ilustra en la figura 3.2.21: las funciones se suman y restan sucesivamente, produciendo una función con una envolvente de período mucho más largo que las funciones que lo componen.

Esta solución tiene una propiedad muy especial. El punto oscilante puede llegar a alejarse bastante de su posición de reposo debido al primer término en (3.2.21). Si se comienza a variar lentamente la frecuencia angular ω de la *forzante* acercando ω a ω_0 , el coeficiente $\frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2}$ crece indefinidamente, permitiendo que la amplitud de las oscilaciones también crezca sin límite. La amplitud $\frac{\omega_0^2 Q}{\omega_0^2 - \omega^2}$ del término resonante cambia de signo cuando se pasa de $\omega < \omega_0$ a $\omega > \omega_0$.

En un sistema real este proceso tiene un límite porque, si bien para pequeñas oscilaciones (amplitud pequeña) un sistema puede comportarse como aquel que hemos estado describiendo, para amplitudes más grandes la ley de fuerza se hace notoriamente diferente y el sistema deja de comportarse en forma puramente elástica.

El movimiento descrito por (3.2.21) es una primera forma de ver un fenómeno de enorme importancia práctica llamado *resonancia*. Cuando la frecuencia de una forzante ω coincide (o es muy parecida) a la frecuencia natural ω_0 del sistema, se produce una *resonancia*. Desde el punto de vista meramente matemático (3.2.21) es divergente si $\omega \rightarrow \omega_0$. En la práctica, como se discutirá más adelante, el sistema oscila mucho más fuertemente.

Este fenómeno se puede ver en numerosos ejemplos de la vida cotidiana.

- Cuando el ruido de un motor acelerando llega a una ventana, el vidrio suele, en un determinado momento, vibrar fuertemente. Esto se debe a que el panel de vidrio de esa ventana tiene una frecuencia natural de vibración y el ruido que llega a través del aire (ondas de

compresión) actúa como forzante. La frecuencia del motor va variando, porque está acelerando, y en algún momento coincide con la frecuencia del panel.

- El movimiento de cabeceo de un barco tiene una frecuencia natural de oscilación. Si el barco se ve enfrentado a un oleaje suave que tiene la misma frecuencia, puede llegar a cabecear tan fuerte que podría hundirse. Hundimiento en día claro y tranquilo.
- Por lo compleja que es la estructura de un edificio, estos tienen varias frecuencias naturales de vibración. Si ocurriera que la frecuencia de un temblor coincide con alguna de las frecuencias naturales del edificio este se puede llegar a romper. Técnicas actuales permiten que esto no ocurra.
- En un camino irregular no muy duro las ruedas de los automóviles rebotan y luego golpean fuertemente al camino. La repetición de este proceso termina haciendo una superficie ondulada bastante regular que se conoce como *calamina*. Los vehículos que transitan sobre un camino calaminado pueden entrar en resonancia y deben cambiar de velocidad para evitarlo.

Los importantes casos de osciladores amortiguados serán tratados más adelante.

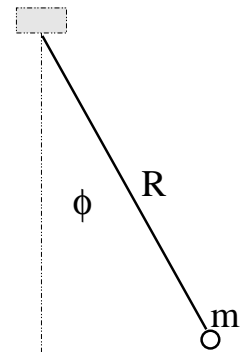
3.2.6. Otra vez el péndulo simple

Ya se obtuvo en (2.3.9) que la ecuación del péndulo simple, como en la figura adjunta, es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R} \sin \phi \quad (3.2.22)$$

Si esta ecuación se multiplica por $\dot{\phi}$, ambos lados de la ecuación son derivadas perfectas y se puede integrar desde un tiempo inicial $t = 0$ hasta t arbitrario. Si se escoge $\phi(0) = \phi_0$, $\dot{\phi}(0) = 0$ se obtiene

$$\dot{\phi}^2(t) = \frac{2g}{R} (\cos \phi(t) - \cos \phi_0) \quad (3.2.23)$$



Se ha obtenido la velocidad angular $\dot{\phi}$ como función del ángulo ϕ . El péndulo comienza desde el reposo con amplitud $\phi = \phi_0$ (ver figura adjunta) y se mueve disminuyendo ϕ , pasando por el punto más bajo que corresponde a $\phi = 0$ y luego llega a $\phi = -\phi_0$. En ese recorrido se cumple la mitad del período T .

En ese lapso $\frac{T}{2}$ la velocidad angular $\dot{\phi}$ es negativa por lo que se debe escribir

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2g}{R}} \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (3.2.24)$$

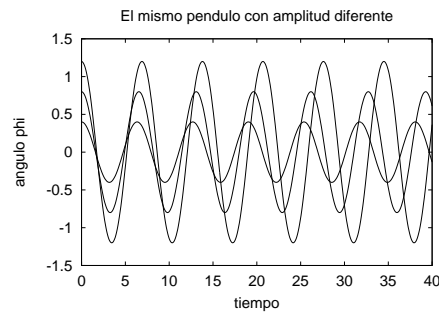
Para obtener la dependencia de ϕ en t es necesario integrar una vez más. Se integra desde $t = 0$ hasta un valor t menor a $\frac{T}{2}$ en el que ϕ toma el valor $\phi(t)$

$$\int_{\phi(t)}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} t$$

La integral al lado izquierdo pertenece a una clase de integrales llamadas *elípticas* y el resultado no puede expresarse en términos de funciones elementales.

Si en la expresión anterior se escoge $t = \frac{T}{2}$, la integral angular es desde $-\phi_0$ hasta ϕ_0 y se tiene una relación entre el período T y la amplitud de la oscilación.

En la figura anterior se muestra gráficamente el resultado de integrar numéricamente la ecuación del péndulo en tres casos que tienen el mismo valor para $\sqrt{\frac{g}{R}}$, y que parten del reposo. Difieren en el valor de $\phi(0)$.



El péndulo tiene período diferente para diferentes amplitudes. La figura da $\phi(t)$ del mismo péndulo lanzado tres veces con velocidad inicial nula desde ángulos iniciales $\phi(0) = \phi_0$ diferentes.

* * *

En general $\sin \phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 \pm \dots$, pero si el péndulo tiene oscilaciones de amplitud pequeña, el lado derecho de (3.2.22) puede aproximarse por $\sin \phi \approx \phi$ y la ecuación aproximada de movimiento es

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R}\phi \quad (3.2.25)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$. La solución de esta ecuación entonces es muy fácil de escribir.

3.3. Fuerza de roce estático y dinámico

Ya se ha dicho que si dos cuerpos están en contacto, sobre cada uno de ellos actúa una fuerza llamada *de contacto*. Esta fuerza tiene una descomposición única en una componente perpendicular a la superficie tangente al contacto, que se denomina *normal*, \vec{N} , y una componente paralela al contacto, que es la *fuerza de roce*.

Si no hay *movimiento relativo* entre las dos superficies en contacto, la fuerza paralela al contacto que actúa sobre cada uno de los dos cuerpos se llama *fuerza de roce estático*, \vec{F}_{RE} , mientras que si hay movimiento relativo, se llama *fuerza de roce dinámico*, \vec{F}_{RD} .

3.3.1. Roce estático

Al aplicar una fuerza \vec{F} sobre un cuerpo A apoyado en una superficie, puede ocurrir que A no se mueva. Esto se debe a que en la región de contacto entre A y la superficie aparece la fuerza, llamada *de roce estático*, que se opone al movimiento. Esta fuerza de roce estático anula la componente F_{\parallel} de la fuerza \vec{F} que es paralela al contacto. Si F_{\parallel} sobrepasa un cierto valor, el cuerpo ya no podrá permanecer en reposo. El valor máximo alcanzado por \vec{F}_{RE} obedece la siguiente ley, que depende del valor de la magnitud de la fuerza normal, \vec{N} presente en el contacto,

$$\|\vec{F}_{RE}\| \leq \mu_e \|\vec{N}\| \quad (3.3.1)$$

donde \vec{N} es la fuerza normal mencionada más arriba y μ_e es el llamado *coeficiente de roce estático*. Este coeficiente depende de la naturaleza de los materiales en contacto y de la calidad, por ejemplo la rugosidad, de las superficies.

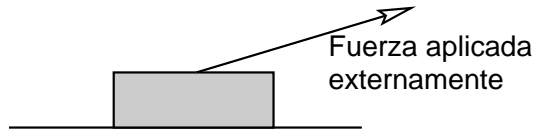


Figura 3.4: Al aplicar una fuerza externa sobre un cuerpo que está apoyado sobre una superficie puede ocurrir que este cuerpo no se mueva.

EJEMPLO: Las fuerzas sobre un vaso sobre una mesa inclinada son: su peso, $m\vec{g}$, que apunta vertical hacia abajo, la normal \vec{N} que apunta perpendicular a la mesa (dirección \hat{k} , ver figura) y la fuerza de roce estático, \vec{F}_{RE} que apunta en una dirección paralela a la mesa. Puesto que el vaso está inmóvil la aceleración es nula y por tanto la fuerza total es cero, es decir, $\vec{N} + \vec{F}_{RE} + m\vec{g} = 0$. Las fuerzas se pueden escribir:

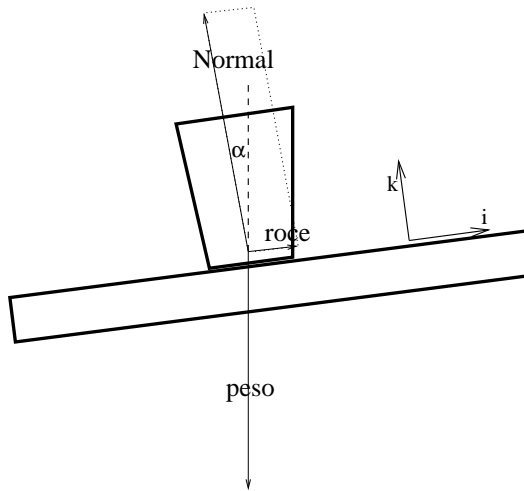


Figura 3.5: Un vaso en reposo sobre una mesa inclinada. La suma de la normal y el roce estático cancelan exactamente al peso.

$$\vec{N} = N \hat{k} \quad (3.3.2)$$

$$m\vec{g} = m g (\hat{k} \cos \alpha - \hat{i} \sin \alpha) \quad (3.3.3)$$

Puesto que estas dos fuerzas más la fuerza de roce deben sumar cero,

y la fuerza de roce por definición no tiene componente en la dirección \hat{k} , necesariamente se cumple que la fuerza de roce es paralela a \hat{i} y

$$\vec{F}_{RE} = \hat{i} m g \sin \alpha \quad (3.3.4)$$

$$\vec{N} = \hat{k} m g \cos \alpha \quad (3.3.5)$$

Como se puede apreciar, la magnitud de la fuerza de roce estático queda determinada por el valor de otras fuerzas a través de la condición de que la suma total garantice (en este ejemplo) el reposo. La condición (3.3.1) implica que $\tan \alpha \leq \mu_e$. ◀

EJEMPLO: Una cinta como la que se muestra en la figura 3.6, tiene la forma del manto de un cilindro de eje vertical y de sección circular de radio R , y gira con velocidad angular uniforme ω . En el interior de la cinta está apoyado un cuerpo de masa m como lo muestra la figura 3.6. Si se conoce el coeficiente de roce estático entre este cuerpo y la cinta, se verá que se puede determinar el mínimo valor que debe tener ω para que el cuerpo de masa m no caiga.

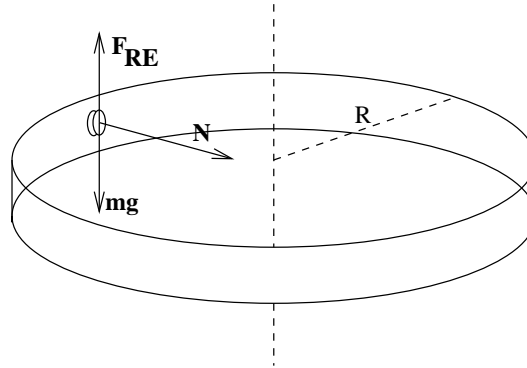


Figura 3.6: Una cinta circular gira con velocidad angular uniforme ω en torno a un eje vertical. En el interior de la cinta se mantiene fijo un objeto gracias al roce estático.

Usando coordenadas cilíndricas, la fuerza normal, que actúa sobre el cuerpo tiene que apuntar perpendicular a la superficie de la cinta: $\vec{N} = -N \hat{\rho}$, pero el valor del escalar N aun no se conoce. El peso es $m\vec{g} = -m g \hat{k}$. Se puede adivinar que la fuerza de roce \vec{F}_{RE} apunta en la dirección \hat{k} : $\vec{F}_{RE} = F \hat{k}$. Esta vez la suma de todas las fuerzas debe ser igual

al producto de la masa por la aceleración del cuerpo que tiene movimiento circular con velocidad angular uniforme. Esta aceleración, de acuerdo a (1.2.4), en este caso es $-R\omega^2 \hat{\rho}$. Todo esto conduce entonces a dos relaciones escalares:

$$F = mg \quad \text{y} \quad N = m R \omega^2 \quad (3.3.6)$$

Pero la ley (3.3.1) de roce estático exige que $F \leq \mu_e m R \omega^2$, con lo que finalmente se obtiene que

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_e R}} \quad (3.3.7)$$

Si la velocidad angular tuviera un valor menor que éste, el cuerpo no podría tener roce estático y cae. ◀

♠ *Resuelva el problema de la cinta que aparece en el texto principal, pero esta vez la velocidad angular de la cinta no es uniforme sino que $\omega = \Omega - \alpha_0 t$. La velocidad angular inicial Ω satisface la desigualdad (3.3.7).*

♠ *Considere un carro, como el de la figura 3.7, que tiene un movimiento horizontal uniformemente acelerado, aceleración \vec{a} . Sobre el carro hay un bloque de masa m y el coeficiente de roce estático entre el bloque y el carro es μ_e . Determine el valor máximo que puede tener la magnitud de la aceleración \vec{a} para*



Figura 3.7: Un carro tiene aceleración constante \vec{a} y sobre él hay un bloque. Se trata de determinar las condiciones para que el bloque no deslice.

que el bloque no deslice sobre el carro.

♠ *Sobre una superficie que corresponde al interior de un cono vertical con vértice abajo está apoyado un cuerpo de masa m . Cuerpo y superficie giran con velocidad angular ω constante, en torno al eje vertical, sin que el cuerpo deslice. Encuentre las condiciones para que esto ocurra. Al analizar este problema debe cuidadosamente analizar diversos casos. Por ejemplo, se debe separar los casos en que $(g \cos \theta - \rho \omega^2 \sin \theta)$ es positivo o negativo. Aquí θ es el ángulo entre la vertical y una generatriz del cono, g es la aceleración de gravedad y ρ es la distancia entre el cuerpo y el eje de rotación.*

3.3.2. Roce dinámico

El roce dinámico existe cuando hay movimiento relativo entre las superficies en contacto. La fuerza de roce en este caso depende de la velocidad relativa entre el cuerpo que se estudia y la superficie con la que está en contacto: $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}_s$, donde \vec{v} es la velocidad del cuerpo y \vec{v}_s es la velocidad de la superficie. La ley de roce dinámico es

$$\vec{F}_{RD} = -\mu_d N \hat{v}_{\text{rel}} \quad (3.3.8)$$

donde μ_d es un coeficiente que depende de la naturaleza de las superficies en contacto, $N = \|\vec{N}\|$ es la magnitud de la fuerza normal sobre el cuerpo que desliza y $\hat{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{rel}}/\|\vec{v}_{\text{rel}}\|$ es el vector unitario que apunta en la dirección de la velocidad relativa entre ambas superficies. Es muy notable que esta fuerza no depende de la magnitud de la superficie de contacto.

El contacto entre dos cuerpos, entonces, está caracterizado en general por dos coeficientes de roce, el coeficiente de roce estático y el coeficiente de roce dinámico. Siempre se cumple que

$$\mu_e \geq \mu_d \quad (3.3.9)$$

EJEMPLO: Consideremos un péndulo de largo R apoyado en un plano inclinado. El plano forma un ángulo α con el plano horizontal. Se escoge

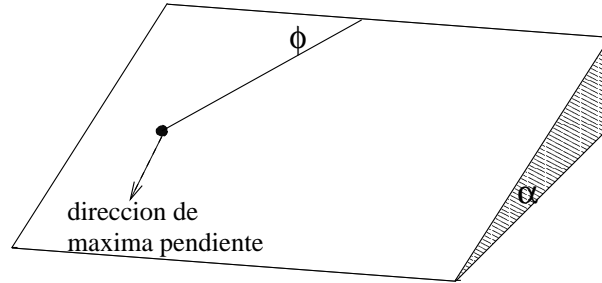


Figura 3.8: Un péndulo apoyado en un plano que produce roce.

coordenadas cilíndricas con eje que pasa por el punto fijo del hilo y con eje Z perpendicular al plano inclinado. Entonces la coordenada ρ siempre vale R y la coordenada z siempre es nula. Para describir el estado del

péndulo basta el ángulo ϕ que se indica en la figura 3.8. El vector posición es $\vec{r} = R \hat{\rho}$.

Se da como condiciones iniciales $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 0$. Además se sabe que se detiene en $\phi = \phi_1$ sin haber retrocedido nunca. Veremos que estos datos determinan el valor del coeficiente de roce μ_d . La fuerza normal

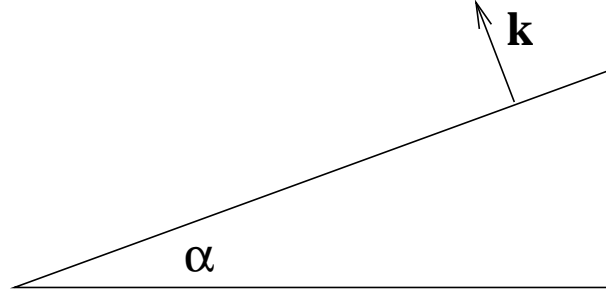


Figura 3.9: La situación de la figura anterior pero vista en forma trasversal. El vector unitario \hat{k} se escoge perpendicular al plano inclinado.

es $\vec{N} = N \hat{k}$, la tensión del hilo es $\vec{T} = -T \hat{\rho}$, la fuerza de roce es $\vec{F}_{RD} = -\mu_d N \hat{\phi}$, el peso es $m\vec{g} = m g (-\hat{k} \cos \alpha + \sin \alpha (\hat{\phi} \cos \phi + \hat{\rho} \sin \phi))$. La fuerza total entonces vale

$$\vec{F} = (m g \sin \alpha \sin \phi - T) \hat{\rho} + (m g \sin \alpha \cos \phi - \mu_d N) \hat{\phi} + (N - m g \cos \alpha) \hat{k} \quad (3.3.10)$$

pero como no hay movimiento en la dirección \hat{k} la correspondiente componente de la fuerza tiene que ser nula, lo que implica que

$$N = m g \cos \alpha \quad (3.3.11)$$

El torque es $\vec{\tau} = R \hat{\rho} \times \vec{F}$, por tanto el torque tiene sólo componente a lo largo de \hat{k} .

De (1.2.4) se obtiene que la velocidad y la aceleración están dadas, en el caso actual, por

$$\vec{v} = R \dot{\phi} \hat{\phi} \quad \vec{a} = -R \dot{\phi}^2 \hat{\rho} + R \ddot{\phi} \hat{\phi} \quad (3.3.12)$$

Entonces el momento angular vale

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= m (R \hat{\rho}) \times (R \dot{\phi} \hat{\phi}) \\ &= m R^2 \dot{\phi} \hat{k} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

y de aquí

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m R^2 \ddot{\phi} \hat{k} \quad (3.3.14)$$

que es consistente con que el torque también apunta en la dirección \hat{k} . La ecuación dinámica que resulta es

$$R \ddot{\phi} = g \sin \alpha \cos \phi - \mu_d g \cos \alpha \quad (3.3.15)$$

Si esta ecuación es multiplicada por $\dot{\phi}$ se puede integrar fácilmente y se obtiene

$$\frac{1}{2} R \dot{\phi}^2 = (\sin \alpha \sin \phi - \mu_d \phi \cos \alpha) g \quad (3.3.16)$$

Si en este resultado se reemplaza por el valor ϕ_1 para el cual el péndulo se detiene, se debe tener que el lado izquierdo sea nulo y entonces

$$0 = (\sin \alpha \sin \phi_1 - \mu_d \phi_1 \cos \alpha) g \quad (3.3.17)$$

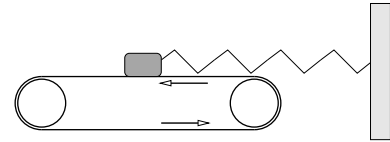
que implica

$$\mu_d = \frac{\sin \phi_1}{\phi_1} \tan \alpha. \quad \blacktriangleleft \quad (3.3.18)$$

♠ Considere el sistema que se muestra en la figura. Se trata de un bloque de masa m sobre una cinta sin fin que se mueve con rapidez uniforme v_0 .

El bloque está además unido a un resorte de constante elástica k y largo natural D_0 . El bloque tiene coeficientes de

roce estático y dinámico μ_e y μ_d con la cinta. Haga un análisis exhaustivo del tipo de movimiento que tiene el bloque según el valor de v_0 cuando los demás parámetros están fijos. Puede darse las condiciones iniciales que estime conveniente.



Un bloque apoyado en una cinta sin fin está también unido a un resorte. Puede haber momentos en que hay roce estático.

3.4. Roce viscoso

Cualquiera que haya tratado de correr con el agua hasta la cintura sabe que el paso de un cuerpo a través de un medio fluido encuentra una re-

sistencia al movimiento. A esta fuerza la llamaremos *fuerza de roce viscoso*. Este fenómeno es complejo porque depende de muchos parámetros. Por ejemplo depende de la forma del sólido, pero además—dada una forma—depende del ángulo con que el cuerpo enfrenta al fluido. Depende además de la naturaleza de la superficie (suave, áspera ..), depende de la forma específica como el fluido se relaciona con la superficie sólida (por ejemplo, importa si un líquido moja o no moja a ese sólido), depende de la temperatura etc.

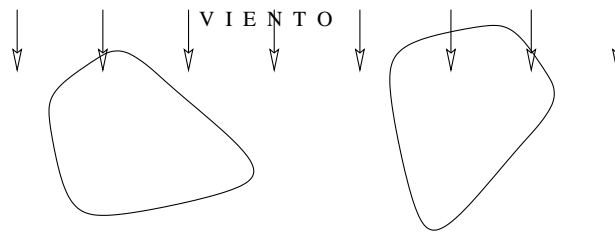


Figura 3.10: El roce viscoso depende de la forma del objeto y también del ángulo entre esa forma y la velocidad relativa al medio fluido.

Simplificando mucho el fenómeno se puede decir que hay dos regímenes: el fluido rodea al sólido en forma suave (se dice, flujo *laminar*), o bien el fluido forma turbulencias. En el primer caso la ley de roce queda bien descrita por una ley lineal (ver más abajo en 3.4.1) o, si es turbulento, por una ley cuadrática, en 3.4.2.

3.4.1. Roce viscoso lineal

La ley de roce viscoso lineal establece que esta fuerza es proporcional a la velocidad relativa entre el sólido y el fluido y el coeficiente de proporcionalidad es negativo

$$\vec{F}_{rvl} = -c \vec{v} \quad (3.4.1)$$

donde $c > 0$, y c , como ya se ha dicho depende de una gran cantidad de parámetros particulares a cada caso.

EJEMPLO: Consideremos el lanzamiento de un proyectil tomando en cuenta el roce viscoso del aire, el cual supondremos que es de tipo lineal. La

ecuación de movimiento es

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -c \frac{d\vec{r}}{dt} + m \vec{g} \quad (3.4.2)$$

En coordenadas cartesianas con eje Z vertical, y escogiendo la orientación del eje X tal que la velocidad inicial conocida sea $\vec{v}_0 = \hat{i}v_{x0} + \hat{k}v_{z0}$, todo el movimiento transcurre en el plano XZ y la ecuación se puede escribir por componentes en la forma

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -c v_x \\ m \frac{dv_z}{dt} &= -c v_z - m g \end{aligned}$$

que son dos ecuaciones independientes.

La segunda ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{\frac{dv_z}{dt}}{v_z + \frac{mg}{c}} = -\frac{c}{m} \quad \text{o bien} \quad \frac{dv_z}{v_z + \frac{mg}{c}} = -\frac{c}{m} dt \quad (3.4.3)$$

Recordando que la primitiva asociada a integrar sobre v_z al lado izquierdo es

$$\ln \left(v_z + \frac{mg}{c} \right)$$

y la primitiva al integra sobre t al lado derecho es t mismo entonces, integrando entre $t = 0$ y t a la derecha y, correspondientemente, entre v_{z0} y $v_z(t)$ a la izquierda, se obtiene

$$v_z(t) = v_{z0} e^{-ct/m} - \frac{mg}{c} (1 - e^{-ct/m}) \quad (3.4.4)$$

En particular, se puede ver que cuando $t \rightarrow \infty$, $v_z \rightarrow -\frac{mg}{c}$. En la figura 3.11 se muestra la evolución de v_z con diversos valores iniciales v_{z0} . Puesto que la velocidad asintótica en este ejemplo, es negativa se puede observar que si el valor inicial es positivo, en algún momento se anula. Esto quiere decir que el proyectil está inicialmente subiendo $v_z(0) > 0$, en algún momento t^* su velocidad vertical se anula $v_z(t^*) = 0$ para finalmente comenzar a descender, $v_z(t) < 0$.

♠ Demuestre que la función $z(t)$ que surge de lo anterior es

$$z(t) = z_0 + \frac{m}{c} (v_{z0} - g t) + \frac{m^2 g}{c^2} - \frac{m}{c} \left(\frac{mg}{c} + v_{z0} \right) e^{-ct/m} \quad (3.4.5)$$

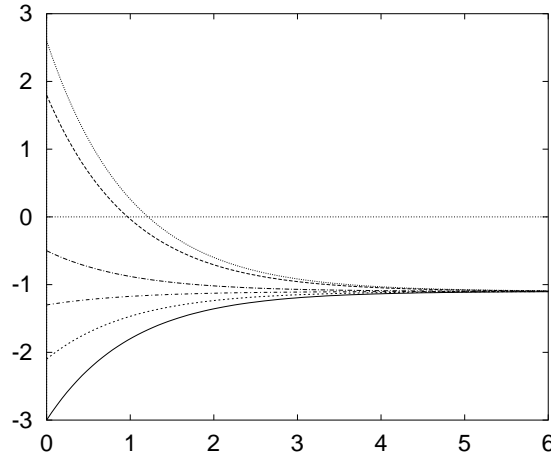


Figura 3.11: Cualquiera que sea la condición inicial para v_z esta componente de la velocidad, con el transcurso del tiempo $v_z(t)$ se acerca siempre a un mismo valor asintótico.

Una trayectoria balística con este tipo de viscosidad se obtiene usando (3.4.5) y una expresión similar para $x(t)$. La única diferencia es que en la dirección X se debe eliminar los términos que contienen g ,

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{c} v_{x0} - \frac{m}{c} v_{x0} e^{-c t/m} \quad (3.4.6)$$

Combinando (3.4.5) y (3.4.6) se obtiene trayectorias como la que se muestra en la figura 3.12.

Marginalmente se hace notar que de (3.4.6) se puede despejar t para utilizar esa forma en (3.4.5) lo que da a z como función de x . En efecto

$$t = \frac{m}{c} \ln \left[1 - \frac{c(x - x_0)}{m v_{x0}} \right] \quad (3.4.7)$$

y entonces

$$z(x) = z_0 + \frac{m g}{c v_{x0}} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}} (x - x_0) + \frac{m^2 g}{c^2} \ln \left[1 - \frac{c(x - x_0)}{m v_{x0}} \right] \quad (3.4.8)$$

es la trayectoria del lanzamiento balístico con roce viscoso lineal.

♠ Se sabe que en lanzamiento balístico sin roce viscoso desde un punto a otro a igual altura, el alcance máximo se obtiene cuando la velocidad inicial forma

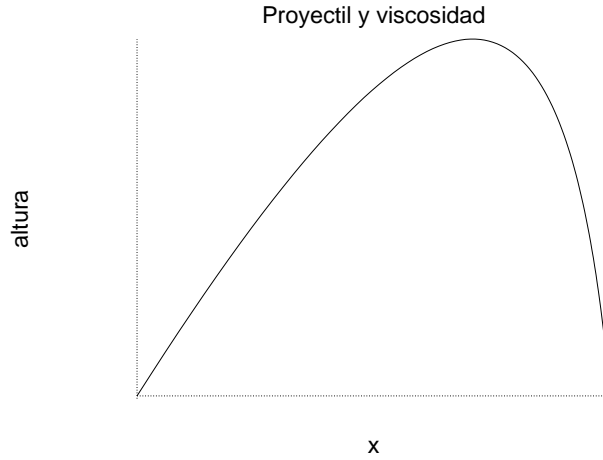


Figura 3.12: Trayectoria de un proyectil para el cual la viscosidad del aire tiene un efecto apreciable. Para calcular esta curva se utiliza la ley de roce viscoso lineal siguiendo el método que se indica bajo (3.4.5)

un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con respecto a la vertical. Obtenga la expresión para el alcance máximo en una situación similar pero cuando el roce viscoso lineal es tomado en cuenta.

Tanto la solución (3.4.4) y (3.4.5) parecen ser singulares para $c = 0$, ya que c aparece en denominadores. Esto, sin embargo, es solo aparente. Si se analiza, por ejemplo, el caso de (3.4.4), el primer término sencillamente tiende a v_{z0} mientras que el paréntesis en el último término contiene $(1 - \exp[-ct/m]) = 1 - 1 + \frac{ct}{m} - \frac{c^2 t^2}{2m^2} + \dots$. Si esta expresión se multiplica por mg/c y se hace el límite $c \rightarrow 0$ se obtiene gt y el resultado neto es $v_z(t; c = 0) = v_{z0} - gt$ que es la solución conocida en el caso sin roce viscoso.

3.4.2. Roce viscoso cuadrático

En el caso del roce viscoso cuadrático la fuerza de roce es

$$\vec{F}_{\text{rvc}} = -\eta \|\vec{v}\| \vec{v} \quad (3.4.9)$$

Sin gravedad: Como primer ejemplo resolvamos el sencillo caso en que ésta es la única fuerza y el movimiento es en una sola dirección. Supondremos que

$v > 0$ todo el tiempo, entonces

$$m\dot{v} = -\eta v^2$$

que se resuelve primero escribiendo la ecuación anterior en la forma

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\eta}{m} dt$$

Si el lado derecho se integra entre $t = 0$ y un valor arbitrario de t , el lado derecho debe integrarse entre el valor de v en $t = 0$, que se denotará v_0 y un valor arbitrario $v(t)$. Se obtiene entonces

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -\frac{\eta t}{m}$$

que da

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{\eta v_0}{m} t} \quad (3.4.10)$$

Se puede notar que la velocidad inicial es realmente v_0 y que la velocidad decrece monótonamente con el tiempo acercándose cada vez más a cero.

Con gravedad: Ahora se analizará un caso en que además hay gravedad. Este caso es intrínsecamente mucho más complicado que el caso de viscosidad lineal y solo se estudiará el movimiento rectilíneo. Se supondrá que el eje Z es vertical hacia arriba y que hay una fuerza constante $-mg$.

La fuerza de roce viscoso apunta hacia arriba si la partícula desciende y apunta hacia abajo si va ascendiendo, es decir,

$$m\ddot{z}(t) = -\eta |\dot{z}(t)| \dot{z} - mg \quad (3.4.11)$$

Como siempre, la aceleración es $\ddot{z} = \dot{v}$ y la velocidad es $\dot{z} = v$.

EL DESCENSO, $v(t) < 0$. En este caso $|\dot{z}| = -v$ y entonces la ecuación es

$$m\dot{v} = \eta v^2 - mg \quad (3.4.12)$$

Existe una solución en que la velocidad vale $v = -\sqrt{mg/\eta}$ todo el tiempo, ya que con ella el lado derecho de la ecuación anterior es nulo. A esta velocidad (negativa) tan particular la llamaremos $-v_\infty$, con

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\eta}} \quad (3.4.13)$$

que es una cantidad positiva.

Para hacer más transparente el método de solución se hará el cambio de función $v(t) = -V(t)$ y como se trata del caso $v < 0$ entonces $V > 0$. La ecuación dinámica con esta nueva variable es

$$m \dot{V} = -\eta V^2 + m g \quad \text{o bien} \quad \dot{V} = -\frac{\eta}{m} (V^2 - v_\infty^2) \quad (3.4.14)$$

y se puede escribir como una relación diferencial,

$$\frac{dV}{V^2 - v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} dt \quad (3.4.15)$$

Que, al lado izquierdo, se integra desde V_1 que es el valor inicial ($t = 0$) de $V(t)$

$$\int_{V_1}^{V(t)} \frac{dV}{V^2 - v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^t dt' = -\frac{\eta}{m} t \quad (3.4.16)$$

La integral del lado izquierdo solo tiene sentido si el denominador en el integrando no se anula en el rango de la integración. Veremos que este denominador nunca se anula.

La primitiva de la integral a la izquierda es

$$\frac{1}{2v_\infty} \ln \left(\frac{v_\infty - V(t)}{v_\infty + V(t)} \right)$$

y del lado derecho es $-\eta t/m$. Al integrar se obtiene entonces

$$\frac{1}{2v_\infty} \ln \left(\frac{v_\infty - V(t)}{v_\infty + V(t)} \cdot \frac{v_\infty + V_1}{v_\infty - V_1} \right) = -\frac{\eta t}{m}$$

Si para algún instante finito ocurriera que $V(t) = v_\infty$ el argumento del logaritmo se anularía lo que implicaría un lado izquierdo igual a $-\infty$ que contradice que se trate de un instante finito. Por tanto $V(t) \neq v_\infty$ para todo t finito.

El lado izquierdo se anula cuando $V(t) = V_1$ que es lo que se debe esperar ya que V_1 es la velocidad cuando $t = 0$. La solución explícita es

$$V(t) = \frac{V_1 \cosh \left(\frac{g t}{v_\infty} \right) + v_\infty \sinh \left(\frac{g t}{v_\infty} \right)}{v_\infty \cosh \left(\frac{g t}{v_\infty} \right) + V_1 \sinh \left(\frac{g t}{v_\infty} \right)} v_\infty \quad (3.4.17)$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ la fracción tiende a 1 y se obtiene v_∞ como debe ser mientras que si se toma $t = 0$ los senos hiperbólicos se anulan mientras los cosenos

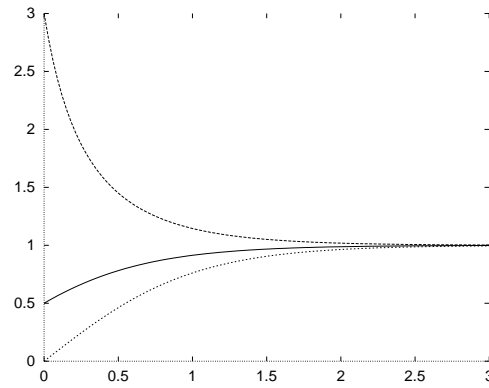


Figura 3.13: Se puede apreciar el comportamiento de $V(t)$ dado en (3.4.17) para diversas velocidades iniciales y un v_∞ común.

hiperbólicos se hacen 1 y se obtiene $V(0) = V_1$. Esta función es monótona entre $t = 0$ y $t = \infty$.

En el caso especial $V_1 = 0$ el resultado es

$$V(t; V_1 = 0) = v_\infty \tanh\left(\frac{g t}{v_\infty}\right) \quad (3.4.18)$$

Otro caso especial de (3.4.17) es aquel en que no hay gravedad. Lo más sencillo resolver la ecuación desde el comienzo con velocidad inicial V_1 y $g = 0$ pero ya aquí sencillamente tomamos el límite de (3.4.17) cuando $v_\infty \rightarrow 0$. Se obtiene

$$V(t; g = 0) = \frac{V_1}{1 + \frac{\eta V_1}{m} t} \quad (3.4.19)$$

que es el resultado ya visto (3.4.10).

Ahora se deducirá la velocidad v_f que tiene un cuerpo, que comienza a caer desde el reposo y altura $z = D$, al llegar al punto $z = 0$. Cuando no hay roce un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba, regresa al punto de partida con una velocidad igual a la de partida escepto por el signo. Con viscosidad se verá que eso no es cierto.

La forma más cómoda de llegar a este resultado se consigue desde (3.4.15) retomando que $V = -v$ y por tanto $dV = -dv$

$$\frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{g dt}{v_\infty^2} \quad (3.4.20)$$

Al multiplicar esta relación por v , en el numerador de la izquierda aparece $v dv = \frac{1}{2} dv^2$ y al derecho $\dot{v} dt = dz$

$$\frac{1}{2} \int_0^{v_f} \frac{dv^2}{v^2 - v_\infty^2} = \int_D^0 \frac{g dz}{v_\infty^2} \quad (3.4.21)$$

Lo que se acaba de escribir es que la velocidad varía desde cero a v_f mientras la posición va desde $z = D$ hasta $z = 0$. Al integrar se obtiene

$$D = -\frac{v_\infty^2}{2g} \ln \left(1 - \frac{v_f^2}{v_\infty^2} \right) \quad (3.4.22)$$

o bien,

$$v_f = \sqrt{1 - \exp \left[-\frac{2g D}{v_\infty^2} \right]} v_\infty \quad (3.4.23)$$

♠ *Haga el límite de (3.4.23) cuando el coeficiente de roce viscoso η se anula.*

EL ASCENSO, $v > 0$. La ecuación es

$$m \dot{v}(t) = -\eta v^2 - m g \quad \text{o bien} \quad \dot{v}(t) = -\frac{\eta}{m} (v^2 + v_\infty^2) \quad (3.4.24)$$

Puesto que $v > 0$ esta ecuación representa una partícula P moviéndose en dirección opuesta a la fuerza constante $-m g$, lo que permite adivinar que P acabará por detenerse. Seguidamente comenzará a moverse en la dirección opuesta pero ese es el otro caso ya estudiado $v < 0$. De (3.4.24) se obtiene que

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2 + v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^t dt' \quad (3.4.25)$$

que conduce a

$$\frac{1}{v_\infty} \left[\arctan \left(\frac{v(t)}{v_\infty} \right) - \arctan \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right) \right] = -\frac{\eta}{m} t \quad (3.4.26)$$

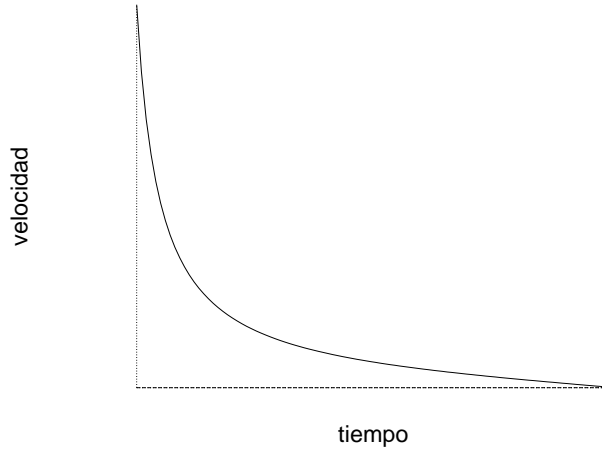


Figura 3.14: Forma como decrece $v(t)$ en un movimiento ascendente, según (3.4.27), por efecto del peso y de una viscosidad cuadrática.

que puede ser reescrito como

$$v(t) = \tan \left(\arctan \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right) - \frac{g t}{v_\infty} \right) v_\infty \quad (3.4.27)$$

Esta expresión que tiene una apariencia algo complicada está representada en la figura 3.14, vale v_0 cuando $t = 0$ y luego decrece monótonamente hasta anularse en un tiempo finito t_1 . Si se toma el límite $g \rightarrow 0$ da el límite correcto descrito por (3.4.10).

La solución se hace cero cuando el argumento de la función tangente se anula, lo que ocurre en el instante t_1 tal que

$$t_1 = \frac{v_\infty}{g} \arctan \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right) \quad (3.4.28)$$

La distancia D que recorre desde la posición inicial hasta el la posición de máxima altura en el instante t_1 en que el cuerpo se detiene se puede obtener a partir de multiplicar los integrandos de la ecuación inicial (3.4.24) por $v(t)$

$$\int_{v_0}^0 \frac{v dv}{v^2 + v_\infty^2} = -\frac{\eta}{m} \int_0^D dz \quad (3.4.29)$$

que lleva a

$$D = \frac{m}{2\eta} \ln \left(\frac{v_0^2}{v_\infty^2} + 1 \right) \quad (3.4.30)$$

Si esta expresión se iguala con la que se obtuvo en (3.4.22) se despeja

$$v_f^2 = \frac{v_0^2}{1 + \frac{v_0^2}{v_\infty^2}} \quad (3.4.31)$$

que claramente muestra que $v_f^2 < v_0^2$. La igualdad se da tan solo si $\eta = 0$.

♠ Deduzca que el viaje de regreso tarda un tiempo Δ ,

$$\Delta = \frac{v_\infty}{g} \arctan \left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v_\infty^2}} \right) \quad (3.4.32)$$

3.5. Oscilador, amortiguación y forzamiento

3.5.1. Oscilador amortiguado

$$m \ddot{x}(t) = -k x(t) - c \dot{x}(t) \quad (3.5.1)$$

o equivalentemente

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (3.5.2)$$

Para resolver este tipo de ecuaciones primero se plantea la ecuación algebraica $z^2 + \frac{c}{m} z + \omega_0^2 = 0$, cuyas raíces son $-\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$, que pueden ser complejas. En efecto, la naturaleza de las soluciones de (3.5.2) depende del signo de

$$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2 \quad (3.5.3)$$

Caso $\Delta > 0$: Este caso, denominado *caso sobreamortiguado*, la solución se puede escribir en general en la forma

$$x(t) = \left(A_1 e^{t \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} + A_2 e^{-t \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\frac{c}{2m} t} \quad (3.5.4)$$

El factor exponencial que está fuera del paréntesis domina y la función $x(t)$ decrece exponencialmente cuando el tiempo crece. Las constantes A_1 y

A_2 se determinan cuando se conoce las condiciones iniciales. Compruebe que se cumple que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x_0}{2} + \frac{cx_0}{4m\sqrt{\Delta}} + \frac{v_0}{2\sqrt{\Delta}} \\ A_2 &= \frac{x_0}{2} - \frac{cx_0}{4m\sqrt{\Delta}} - \frac{v_0}{2\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

A pesar de su nombre, este sistema no oscila porque el efecto de la amortiguación es muy fuerte.

Caso $\Delta < 0$: En este caso los efectos de la amortiguación son menos intensos y el sistema oscila. La solución podría escribirse prácticamente en la misma forma que antes

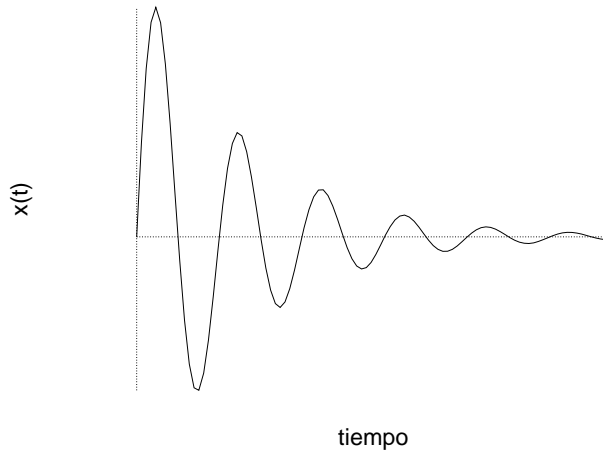


Figura 3.15: Las oscilaciones de un oscilador amortiguado van decreciendo con el tiempo, manteniendo su frecuencia tal como se describe en (3.5.6).

$$x(t) = \left(A_1 e^{i t \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} + A_2 e^{-i t \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \right) e^{-\frac{c}{2m} t}$$

pero como la solución debe ser real para que tenga sentido, entonces las constantes A_1 y A_2 deben ser complejas. Al exigir que $x = x^*$ para todo t se deduce que $A_1 = A_2^*$. Para hacer explícita esta propiedad se cambia de notación,

$$A_1 = \frac{D}{2} e^{i\beta} \quad A_2 = \frac{D}{2} e^{-i\beta}$$

y entonces

$$x(t) = D e^{-\frac{c}{2m}t} \cos \left(t \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} + \beta \right) \quad (3.5.6)$$

solución que está representada por la figura 3.15.

Se aprecia que la frecuencia angular de oscilación en este sistema es

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (3.5.7)$$

que es una frecuencia menor que ω_0 . Si el coeficiente de viscosidad c aumenta la frecuencia ω_c disminuye aun más, es decir el período de oscilación $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$ aumenta si c aumenta.

En este caso las dos constantes que deben ser fijadas una vez que se tiene las condiciones iniciales son D y β .

3.5.2. Oscilador forzado y amortiguado

$$m \ddot{x}(t) = -k x(t) - c \dot{x}(t) + k Q \sin \omega t$$

que se escribe equivalentemente como

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 Q \sin \omega t \quad (3.5.8)$$

El último término es el que describe a la *forzante* periódica.

Tal como se comentó en la sección 3.2.5 estas ecuaciones lineales inhomogéneas tiene una solución general que se obtiene de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (en este caso la del oscilador amortiguado sin forzar) más una solución particular de la ecuación inhomogénea.

Puesto que ya se conoce la solución general del oscilador amortiguado sin forzar solo resta calcular una solución de la ecuación inhomogénea (3.5.8). Ésta será obtenida a partir de suponer que existe solución $x(t)$ de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t - \delta) \\ &= A (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta) \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

De donde es directo obtener que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\omega (\cos \omega t \cos \delta + \sin \omega t \sin \delta) \\ \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 (\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta)\end{aligned}\quad (3.5.10)$$

En lo que sigue se va a usar un parámetro q para describir el amortiguamiento, en lugar de c . La relación, por definición es

$$q = \frac{c\omega}{m}$$

Al reemplazar estas expresiones en (3.5.8) se obtiene una ecuación que se factoriza en dos partes, una proporsional a $\cos \omega t$ y otra proporsional a $\sin \omega t$. Puesto que esta ecuación debe ser válida para todo tiempo, cada una de estas dos partes debe ser nula independientemente y se obtiene

$$q \cos \delta = (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta \quad (3.5.11)$$

$$\omega_0^2 Q = A [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + q \sin \delta] \quad (3.5.12)$$

De la primera de estas ecuaciones se despeja inmediatamente que

$$\tan \delta = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.5.13)$$

y entonces

$$\sin \delta = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q^2}}, \quad \cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q^2}} \quad (3.5.14)$$

Si el coeficiente de roce viscoso c se anula, es decir, $q = 0$, entonces el seno se anula y el coseno vale 1.

De (3.5.12) resulta (comparar con (3.2.20))

$$A = \frac{\omega_0^2 Q}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + q \sin \delta} \quad (3.5.15)$$

y ahora se ve que el primer término en el denominador es siempre positivo tal como el segundo término. Entonces la amplitud A nunca es divergente.

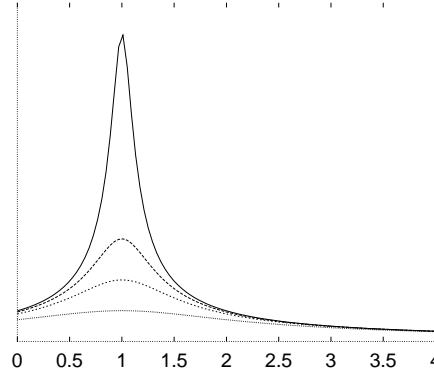


Figura 3.16: La amplitud $A(\omega)$, dada en (3.5.15), de un oscilador de frecuencia natural ω_0 , amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω (la *forzante*) muestra para diversos valores del parámetro de amortiguación q un máximo en $\omega = \omega_r$ (definido en (3.5.16)). Mientras menor el amortiguamiento mayor es la amplitud A

Su forma, como función de ω , se muestra en la figura 3.16. La función A tiene un máximo cuando

$$\omega^2 = \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2 \left(\frac{c}{2m} \right)^2 \quad (3.5.16)$$

Esto contrasta con lo que ocurre con el oscilador forzado sin amortiguación donde la amplitud que resulta matemáticamente es divergente en la resonancia.

El valor de A en el punto $\omega = \omega_r$ es

$$A = \frac{\omega_0 Q}{c} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{4m^2}}} \quad (3.5.17)$$

que diverge en el caso de un oscilador forzado y no amortiguado, es decir, cuando $c \rightarrow 0$.

La solución general de la ecuación del oscilador forzado y amortiguado se expresa como la solución general de la ecuación homogénea más la solución particular recién obtenida. Suponiendo que no hay sobreamortiguación esta solución es

$$x(t) = D \cos \left(t \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m} \right)^2} + \beta \right) \exp \left[-\frac{c}{2m} t \right]$$

$$+ \frac{\omega_0^2 Q}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + \frac{\omega c}{m} \sin \delta} \sin(\omega t - \delta) \quad (3.5.18)$$

La primera parte de esta expresión, que proviene de la ecuación lineal homogénea (oscilador no forzado), decrece con el tiempo en forma exponencial. A tiempos largos, entonces, la solución que domina sin competencia es la parte proporcional a $\sin(\omega t - \delta)$. A largo plazo la forzante impone totalmente la frecuencia de oscilación.

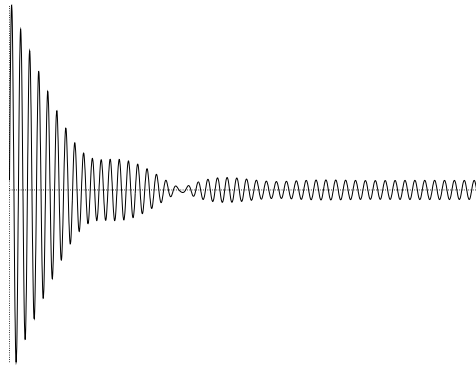


Figura 3.17: La función $x(t)$ de un oscilador de frecuencia natural ω_0 , amortiguado y forzado por una fuerza periódica con frecuencia ω (la *forzante*) muestra un comportamiento inicial transitorio donde las dos frecuencias compiten, pudiendo haber batido en esta etapa. A tiempos largos el comportamiento es oscilatorio simple con la frecuencia ω de la forzante como se desprende de (3.5.18).

3.6. Integración numérica de ecuaciones de movimiento

En esta sección se presenta en forma breve el método de Verlet para integrar algunas ecuaciones de movimiento. Este algoritmo es extraordinariamente confiable si se lo usa correctamente.

Se ilustra el método para un caso bidimensional en que la ecuación de

movimiento se lleva a la forma

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{A}(\vec{r}, t) \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x(x, y, t) \\ A_y(x, y, t) \end{pmatrix}$$

Si se desea integrar entre $t = 0$ y $t = t_1$, se troza este intervalo en N partes iguales $\epsilon = \frac{t_1}{N}$, a $x(n\epsilon)$ se le designa x_n y lo mismo con y . Una excelente aproximación a la segunda derivada \ddot{x} es

$$\ddot{x}(n\epsilon) \approx \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\epsilon^2}$$

relación que se utiliza para calcular x_{n+1} cuando ya se sabe los valores de x_n y de x_{n-1} , es decir, en lugar de usar como datos iniciales $x(0)$ y $v(0)$ es mejor usar $x_0 = x(0)$ y $x_1 = x(dt) \approx x_0 + dt v_0$:

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + \epsilon^2 A_x(x_n, y_n, t_n)$$

Algoritmo de Verlet para caso bidimensional:

Se denota con índices 0 y 1 a los datos anteriores y con 2 al que se calcula a tiempo t .

Se da valores iniciales x_0, y_0, x_1, y_1 y epsilon se denota h

Se ingresa a un ciclo desde $n=0$ hasta $n=n_{\max}$:

```
t      = h*n;
x2     = 2x1 - x0 + h^2*Ax(x1,y1,t);
y2     = 2y1 - y0 + h^2*Ay(x1,y1,t);
Guardar en archivo valores de (t x1 y1);
x0     = x1; y0 = y1;
x1     = x2; y1 = y2;
```

fin del ciclo cuando n toma el valor $n=n_{\max}$

El resultado es un archivo con tres columnas: t, x y y .

El método que aquí se ha explicado se debe usar con N suficientemente grande para tener precisión. Para que los archivos de datos no salgan tan grandes se puede dar la instrucción de guardar datos solo uno de cada K veces con, por ejemplo, $K = 10$. Este método de Verlet no es trivialmente aplicable cuando la fuerza (\vec{A} arriba) depende de la velocidad.

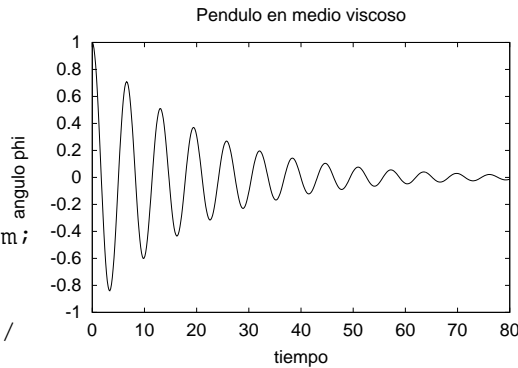
A continuación, a modo de ejemplo, se da un programa completo en C usando una variante del algoritmo anterior, en el cual la velocidad aparece

linealmente en el término de fuerza. Se trata del caso de un péndulo simple en presencia de fuerza viscosa: $\ddot{\phi} = -\sqrt{\frac{R}{g}} \sin \phi - \eta \dot{\phi}$ con coeficiente de roce viscos $\eta = 0,1$.

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#define h 0.008
#define h2 h*h
#define largo 10001
#define eta 0.1
FILE *archivo;
double phi[2];
double t,vx,phi0,phiDD,denom;
void Inic()
{ phi[0] = phi0;
  vx = 0.0; /*del reposo*/
  phi[1] = phi[0] + h*vx;
}
void Verlet()
{ double x0,x1;
  x0 = phi[0];
  x1 = phi[1];
  phiDD = -sin(x1);
  phi[2] = (4.0*x1-2.0*x0+2*h2*phiDD+h*eta*x0)/denom; }

void Itera()
{ int ii;
  for(ii=0;ii<largo;ii++)
  { t = h*ii;
    if(ii%20==0)
      fprintf(archivo,"%14.11lf %14.11lf\n",t,phi[1]);
    Verlet();
    phi[0] = phi[1];
    phi[1] = phi[2];
  }
}

main()
{denom = 2.0+h*eta;
  archivo = fopen("pend_eta","wt");
  phi0 = 1.0;
  Inic();
  Itera();
  fclose(archivo);
  printf(" F I N ultimo phi0=%f\n",phi0);
}
```

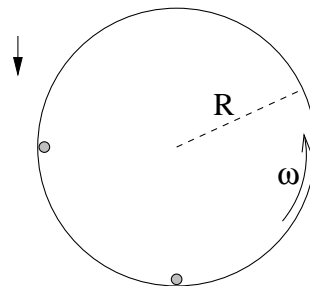


La amplitud de oscilación de un péndulo en un medio viscoso va disminuyendo como muestran los valores que surgen de programa adjunto. El período también va variando con el tiempo.

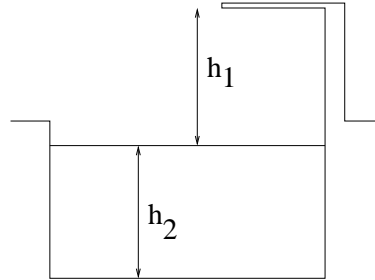
3.7. Problemas

Este capítulo tiene varios problemas propuestos en medio del texto. Ellos están señalados con el signo ♠. Aquí se ofrece otros más.

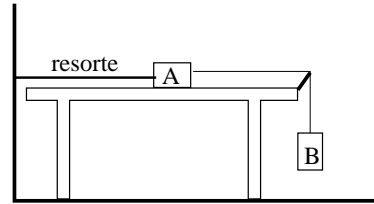
- 3.1 Cuando comienza a girar un disco horizontal con aceleración angular $\ddot{\phi} = d\omega/dt = \alpha_0$ una hormiga se encuentra durmiendo a distancia R del centro de rotación. Cuando la velocidad angular alcanza el valor ω_0 la hormiga comienza a deslizar. Obtenga el valor de coeficiente de roce estático hormiga-disco.
- 3.2 Sobre una superficie horizontal hay un cuerpo de masa m unido a un resorte horizontal de constante elástica k y longitud natural D_0 . El coeficiente de roce dinámico entre el cuerpo y la superficie es μ . Si desde el reposo el cuerpo es liberado cuando el resorte está estirado un largo $D(0) = D_0 + d$ discuta cuantas veces el cuerpo alcanza a oscilar antes de detenerse. Analice distintas situaciones.
- 3.3 Un anillo desliza, en ausencia de gravedad y con coeficiente de roce μ en un riel circunferencial de radio R . Si en $t = 0$, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, determine $\phi(t)$.
- 3.4 Un cilindro de radio R y eje horizontal rota sobre su eje a velocidad angular constante ω . En el instante $t = 0$ están moviéndose solidariamente con el cilindro dos cuerpos de masa m , el primero está a la misma altura que el eje, en la zona descendiente y el segundo está en la parte más baja. Determine los valores posibles para el coeficiente de roce estático para que estos cuerpos no deslicen en ese instante. Analice qué puede ocurrir en momentos posteriores.



- 3.5 Un cuerpo en reposo se deja caer al agua desde una altura h_1 por sobre la superficie. Desprecie las fuerzas de roce que pudiera haber con el aire. Cuando el cuerpo penetra el agua aparecen dos fuerzas, la de roce viscoso, $\vec{F}_{rvt} = -c\vec{v}$ y una fuerza llamada empuje, vertical hacia arriba de magnitud $\lambda m g$. Determine el valor máximo que puede tomar h_1 para que el cuerpo no toque el fondo, que está a distancia h_2 de la superficie.

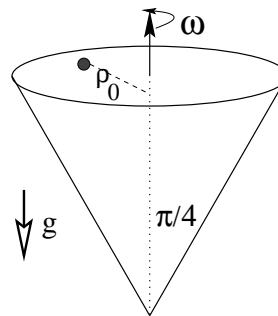


- 3.6 Un cuerpo A de masa m está sobre una mesa, unido a la pared por un resorte de constante elástica k y largo natural D_0 . De A sale un hilo tirante horizontal que pasa por un apoyo ideal (sin roce) y luego de este hilo cuelga un cuerpo B que también tiene masa m .

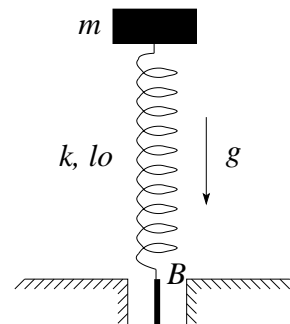


Se conoce los coeficientes $\mu_e < 1$ y μ_d de A con la mesa y el sistema se suelta desde el reposo en el momento en que el resorte tiene su largo natural. **a** Determine el largo máximo que alcanza el resorte; **b** encuentre el valor máximo que toma la rapidez desde el instante inicial hasta el momento del estiramiento máximo; **c** ¿cuál es el valor mínimo de μ_d para que los bloques queden en reposo en el momento del estiramiento máximo?

- 3.7 Se tiene una superficie cónica que gira con velocidad angular constante ω en torno a su propio eje de simetría, que se mantiene vertical. El ángulo entre el eje y una generatriz es $\frac{\pi}{4}$. En la superficie interna está apoyado un cuerpo de masa m , a distancia ρ_0 del eje, el cual, debido al roce con coeficiente μ_e , no desliza a pesar de su peso. **a** Obtenga la velocidad angular $\omega = \omega_c$ necesaria para que tal fuerza sea exactamente nula. **b** Suponga que ahora $\omega > \omega_c$ y obtenga el máximo valor que puede tener ω para que el cuerpo no deslice.



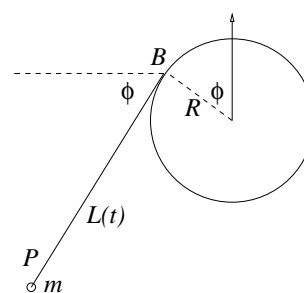
- 3.8 Considere una partícula de masa m que está apoyada sobre un resorte de constante k y largo natural l_0 , bajo la acción de la gravedad. El punto B de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t = 0$ al nivel de la mesa. **a** Encuentre la altura de equilibrio de la masa. **b** En $t = 0$, cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $\vec{r}_B(t) = A_0 \sin(\omega t) \hat{j}$.



Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa. **c** Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas. **d** Manteniendo la amplitud A_0 fija, considere que la frecuencia ω es menor que la frecuencia de resonancia. ¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?

- 3.9 Hay un hilo enrollado alrededor de un cilindro de radio R . En la punta del hilo hay un cuerpo de masa m que se suelta, cuando $\phi(0) = 0$, con velocidad inicial \vec{v}_0 perpendicular al hilo, lo que determina que el hilo se comienza a enrollar.

La distancia inicial entre el cuerpo y el punto B de tangencia del hilo con el cilindro es L_0 (ver figura). **a** Determine la ecuación de movimiento. **b** Obtenga la velocidad angular $\dot{\phi}$ en función de ϕ . **c** Suponiendo que el hilo se corta si la tensión sobrepasa el valor T_{\max} obtenga el valor de ϕ en el momento del corte.



Indicación: Puede convenir tomar el origen en el eje del cilindro y escribir el vector posición del cuerpo en función de vectores unitarios $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ asociados al punto B de tangencia del hilo. Es decir, el vector posición del cuerpo masivo es suma de los vectores posición del punto B y el vector que apunta en la dirección del hilo y que es tangente al cilindro, en la dirección $\hat{\phi}$.