

Mecánica lagrangiana

M_εCFUNN_εT

UPM



DFAII
ETSII, UPM

Resumen

Contenido

Página Inicial



Volver

Cerrar

Salir

Contenido

1	Introducción	8
2	Posición de un sistema material	9
3	Evolución de un sistema material	15
4	Identificación del tipo de un sistema	24
5	Desplazamientos virtuales	28
6	Fuerzas que actúan sobre un sistema	30
7	Ecuaciones de Lagrange	33
8	Fuerzas de ligadura	42
9	Fuerzas que derivan de un potencial	52
10	Sistemas de fuerzas lineales en las velocidades	56
11	Función lagrangiana	61
12	Principios de conservación	63
13	Principio de Hamilton	67
14	Ecuaciones de Hamilton	68



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 2 de 105



DFAII
M_εcFunN_εt

15 Transformaciones canónicas	76
16 Ecuaciones de eikonal y de Schroedinger	81
17 Corchetes de Poisson	84
18 Simetrías	88
19 Posiciones de equilibrio de un sistema material	95
20 Algunos elementos mecánicos	97

Introducción

Tras la publicación de los *Principia* en 1687, el marco conceptual de la mecánica parecía definitivamente establecido. El mundo material estaba compuesto por distribuciones de masas que interaccionaban entre sí mediante fuerzas cuyo comportamiento estaba gobernado por las tres leyes de Newton. La mecánica celeste constituía el campo de aplicación más adecuado para esta teoría que explicó satisfactoriamente el movimiento de los planetas del sistema solar. En su forma más natural, la mecánica newtoniana presupone el conocimiento de las fuerzas (de contacto o a distancia) que intercambian sistemas materiales de forma que conocida la posición y la velocidad inicial de dichos sistemas, las ecuaciones diferenciales, escritas a partir de la segunda ley de Newton, aplicadas a cada elemento de masa, determinan la evolución futura de dicho sistema. Por primera vez se disponía de un marco conceptual que reducía el comportamiento físico a un sistema de ecuaciones diferenciales capaz de dar cuenta de la evolución de todo el universo. Todo lo que la Física necesita realizar es encontrar

Título

Contenido

◀◀

▶▶

◀

▶

Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 3 de 105

el conjunto de fuerzas que actúan sobre la materia y las leyes que rigen sus módulos, direcciones y sentidos. Las consecuencias filosóficas de este marco conceptual que parecía confirmado por su aparentemente perfecta comunión con las observaciones astronómicas tuvieron su punto culminante en el mecanicismo cartesiano.

En muchos sistemas materiales existen ciertas relaciones entre las evolución de sus puntos tales que pequeñas violaciones de las mismas originan fuerzas restauradoras cuyas leyes pueden ser complicadas o incluso desconocidas, pero tan grandes, que puede asegurarse que dichas relaciones siempre se satisfacen prácticamente de forma perfecta. En este caso, la consideración de las fuerzas mediante las leyes que rigen su valor es impracticable y estas leyes pueden sustituirse por la consideración de sus *efectos*, es decir, las relaciones que fuerzan a cumplir. Estas relaciones se denominan *ligaduras*. Al plantear las ecuaciones diferenciales del movimiento aparecen fuerzas de valor desconocido que aportan nuevas incógnitas, a la vez que pueden añadirse las ecuaciones impuestas por las ligaduras. El sistema resultante puede resultar determinado o indeterminado, pero quebrando, en cualquier caso, la elegancia del planteamiento newtoniano inicial. La existencia de ligaduras y el desconocimiento inicial de los valores de las fuerzas que las imponen plantea un problema que puede solventarse mediante la producción de un sistema de ecuaciones determinado como se ha comentado antes. Sin embargo, si se pudiese enunciar un principio similar a la segunda ley de Newton en el que la evolución de los sistemas quedase determinada al margen de las fuerzas de ligadura, se dispondría de una herramienta *más práctica* para abordar los problemas de la Mecánica.

Un amplio grupo de ligaduras obedece a un modelo, llamado *ligadura*



DFAII
M_cFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 4 de 105

ideal, para cuyas fuerzas de ligadura puede enunciarse una notable característica: *sus trabajos evaluados para un cierto tipo de desplazamientos de los puntos del sistema son nulos*. A partir de aquí puede desarrollarse un nuevo principio, conocido como *principio de los trabajos virtuales*, formulado por D'Alembert en su *Traité de Dynamique* publicado en 1743, que determina la evolución de los sistemas sometidos a ligaduras ideales, sin la necesidad de considerar las fuerzas que las imponen (aunque permite el cálculo de aquéllas componentes que se desee obtener). El gráfico cuadro newtoniano empieza a volverse más analítico.

En 1788 Joseph Louis Lagrange publica su *Mecanique Analytique* en Paris. Un tratamiento matemático sistemático conduce a una nueva y elegante elaboración de la mecánica, que desde el tratado de Lagrange ha recibido el nombre de Mecánica Analítica. Se dispone de herramientas para producir muy ágilmente las ecuaciones del movimiento de los sistemas, cuyo tratamiento posterior se basa en el análisis matemático. La mecánica lagrangiana, además se ha mostrado capaz de incluir la dinámica de los campos que aparecen en Física, así como un tratamiento simple de la dinámica de medios continuos.

Ya en el siglo XIX, el irlandés William Rowan Hamilton, que había apreciado la potencia y elegancia con que Lagrange había dotado a la mecánica, emprende el trabajo de sistematización de la Óptica, con objeto de someterla a un esquema parecido al de la Mecánica. No sólo consiguió su objetivo, sino que además apreció que los sistemas ópticos y los sistemas mecánicos obedecen a un mismo principio variacional. La concepción sintética de Hamilton produjo una nueva visión de la mecánica, más *intrínseca* que la lagrangiana. La formulación hamiltoniana, desarrollada posteriormente



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 5 de 105

por Jacobi, Poisson, etc, introdujo de nuevo una geometría en el espacio de fases de los sistemas mecánicos, en la que las normas euclídeas tradicionales de los espacios ordinarios se sustituyen por las formas simplécticas; los productos escalares, por los corchetes de Poisson, etc. Gracias al estudio de esta nueva geometría, científicos del siglo XX, como Poincaré y Burns lograron resolver problemas de mecánica celeste que habían permanecido sin resolver durante mucho tiempo.

La formulación hamiltoniana sirvió de base para el desarrollo de la mecánica cuántica a comienzos del siglo XX, principalmente en los modelos de De Broglie, Schrödinger, Heisenberg, etc. Aunque no pueden deducirse las leyes de la mecánica cuántica a partir de la formulación clásica hamiltoniana, el principio de correspondencia proporciona información muy valiosa para inferir el hamiltoniano cuántico a partir del clásico (en ambos casos el hamiltoniano determina la evolución del sistema).

En este trabajo se realiza una exposición de la mecánica lagrangiana en los aspectos más interesantes para su aplicación en ingeniería, así como una breve exposición de la visión analítica. En este contexto, junto a la evolución del sistema material los valores de algunas acciones de ligadura desempeñan un papel fundamental. Por ello se desarrolla una teoría en la que las coordenadas de posición y las fuerzas de ligadura seleccionadas aparecen juntas en los sistemas de ecuaciones producidos.

Dada la importancia concedida a las ligaduras, se incluyen herramientas pocas veces presentadas en tratados de mecánica para ingenieros, como son el teorema de Fröbenius y los lemas de Poincaré. Con ellos se dispone de los recursos matemáticos necesarios para la determinación de la integrabilidad de sistemas de ligaduras cinemáticas o de sistemas de fuerzas que dependen



DFAII
M_cFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 6 de 105

de las velocidades.

Además, se introducen los temas típicos de la formulación hamiltoniana como los corchetes de Poisson o la ecuación de Hamilton-Jacobi y su relación con la ecuación de eikonal, preparando la transición de la mecánica clásica a la ecuación de Schrödinger.

Descripción de sistemas



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 7 de 105

1. Introducción

En este capítulo se van a presentar los sistemas materiales únicamente desde el punto de vista de su posicionamiento y evolución. En consecuencia, los sistemas serán descritos por un conjunto de coordenadas que pueden evolucionar en el tiempo satisfaciendo un conjunto de restricciones. El conjunto de trayectorias posibles que pueden seguir las coordenadas que describen la situación de un sistema es lo único que es relevante en este capítulo. Se hace abstracción tanto de la distribución de masas que evolucione, es decir, de los aspectos cinéticos del sistema mecánico, como de las fuerzas que determinan que el sistema siga unas trayectorias determinadas y no otras, e incluso de la relación (dinámica) entre las fuerzas, la distribución de masas y su evolución. En este sentido, puede hablarse de una *cinemática analítica*, aunque despojada de sus connotaciones euclídeas y tridimensionales habituales. El resultado final del análisis realizado en este capítulo una vez se aplique a un sistema determinado será la relación entre los valores de las coordenadas elegidas para su descripción así como las relaciones entre sus velocidades y los valores de las coordenadas, es decir, dada la evolución de algunas de ellas, describir la del resto. Además se caracterizará el conjunto de posiciones alcanzables desde una inicial determinada. Este estudio precede al de las fuerzas aplicadas sobre el sistema, que son las que le llevarán por una trayectoria o por otra, según se verá en el siguiente capítulo.



DFAII
 M_cFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 8 de 105

2. Posición de un sistema material

Los sistemas materiales están formados por distribuciones de masa que pueden ser volumínicas, superficiales, lineales o puntuales. La determinación de la posición del sistema material supone la definición de la posición de cada uno de sus puntos en un sistema de referencia. Así, si se considera un sistema formado por dos puntos materiales libres, su posición vendrá dada por la de sus dos puntos. Si se trata de un sólido rígido, la posición vendrá dada por la de todos sus puntos, que son infinitos.

Frecuentemente las posiciones de los puntos de un sistema material están relacionadas entre sí, es decir, existen restricciones en el conjunto de posiciones de sus puntos. Esto hace que especificando incompletamente las posiciones de los puntos, el cumplimiento de las restricciones suministre la información necesaria para definir la posición del sistema. Así, la posición de todos los puntos de un sólido rígido puede determinarse a partir de las coordenadas de sólo tres de sus puntos. Las posiciones de sistemas compuestos por infinitos puntos (distribuciones lineales, superficiales o volumínicas de masa) frecuentemente pueden determinarse a partir de un conjunto de parámetros menor que el de las posiciones de todos sus puntos; en muchos casos este número será incluso finito, como sucede en conjuntos de un cierto número de sólidos rígidos vinculados entre sí. El conjunto de posiciones que un sistema material puede adoptar se llama *espacio de configuración*. Por lo dicho anteriormente puede afirmarse que en general el espacio de configuración no corresponde al producto cartesiano de las coordenadas de todos los puntos del sistema material, sino que es un subconjunto de éste. El espacio de configuración es el término que



DFAII
 M_cFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 9 de 105

hace referencia al conjunto de posiciones que son posibles en un sistema, es decir, compatibles con todas las restricciones a las que dicho sistema esté sometido.

Se denominan coordenadas de un sistema material a un conjunto de m parámetros (q_1, \dots, q_m) que define la posición de dicho sistema en un instante cualquiera. Esta definición implica que para cada posición del sistema existe en cada instante t una m -erna (q_0, \dots, q_m) que determina unívocamente la posición de cada punto P del sistema o, lo que es lo mismo, que si (q_0, \dots, q_m) son las coordenadas de una posición posible del sistema en el instante t , entonces existe, para cada punto P , una función

$$\mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)$$

que establece la posición de P ¹ en algún sistema \mathcal{R} de referencia.

Por ejemplo, para un sólido rígido libre se pueden elegir las coordenadas de posición de tres de sus puntos como coordenadas, es decir 9-ernas). Es más instructivo analizar lo que la definición *no dice*: no es cierto que a toda m -erna de coordenadas le corresponda una posición del sistema material. Es decir, puede ser que existan restricciones en el conjunto de coordenadas que representen la posición del sistema. Estas restricciones reciben el nombre de *ligaduras geométricas* del sistema. Su representación matemática se realiza con ecuaciones del tipo:

$$f(q_1, \dots, q_m, t) = 0$$

¹ Sólo se consideran funciones con un grado suficiente de derivabilidad, quedando excluidas curvas como las de Peano o sus equivalentes multidimensionales



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 10 de 105

Las ligaduras que pueden representarse por ecuaciones en las que no aparezca explícitamente el tiempo ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) reciben el nombre de *ligaduras geométricas estacionarias*; en caso contrario reciben el nombre de *ligaduras geométricas variables*. En algunos casos surgen ligaduras en las que aparece el tiempo, pero éste es eliminable del conjunto de las mismas, por lo que aquellas ligaduras son estacionarias.

El espacio de configuración es, por lo tanto, el conjunto de posiciones del sistema correspondientes a las m -ernas de coordenadas que satisfacen el conjunto de ligaduras geométricas.

Para el sólido rígido libre en el que elegimos como coordenadas las de tres de sus puntos $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$, se puede comprender fácilmente que no cualquier valor de la 9-erna identifica una posición del sólido rígido, sino sólo aquéllos que satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - d_{12}^2 = 0 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - d_{13}^2 = 0 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - d_{32}^2 = 0 \end{cases}$$

Para un sistema material la elección de un conjunto de coordenadas u otro es arbitraria y determina la existencia de un conjunto de ecuaciones de ligadura u otro. ¿Es posible encontrar un sistema de coordenadas en el que el conjunto de ecuaciones de ligadura sea vacío? La respuesta es afirmativa. Cada ecuación permite reducir en una unidad el número de parámetros necesario para determinar la posición del sistema, o, lo que es lo mismo, permite expresar las m coordenadas que aparecen en ella en función de otras $m - 1$ coordenadas. De esta manera, si se tiene un sistema



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 11 de 105

cuya posición venga determinada por un conjunto de m coordenadas y g ecuaciones de ligaduras geométricas, se puede encontrar otro conjunto de $n = m - g$ coordenadas y ninguna ecuación de ligadura que posicione el mismo sistema. En este supuesto, obviamente, cualquier n -erna de valores sí determina una posición del sistema de una forma única, por lo que en este caso sí existe una biyección entre el conjunto de n -ernas y el espacio de configuración. Esto indica que el número n es propio de cada sistema y corresponde a la *dimensión del espacio de configuración del sistema* que, por lo tanto, representa el mínimo número de coordenadas necesario para la determinación de su posición. Estas n coordenadas se suelen denominar coordenadas generalizadas independientes.

Por lo tanto, puede afirmarse que para determinar la posición de un sistema es necesario disponer de un conjunto de coordenadas

$$(q_1, \dots, q_m)$$

y las ligaduras geométricas

$$f_i(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, g\}$$

que especifiquen los posibles valores de esas coordenadas, junto con un conjunto de funciones

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)$$

que posicionen cada punto del sistema.

Cuando se tratan problemas de mecánica de sistemas ligados, en muchas ocasiones conviene utilizar un sistema de coordenadas mínimo puesto que,



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 12 de 105

además de trabajar con un número reducido de coordenadas, éstas son independientes, es decir, no tienen que satisfacer ninguna ecuación de ligadura. Por lo tanto, si sólo se está interesado en la posición del sistema y su evolución ésta suele ser una buena elección.

Otras veces, sin embargo, puede resultar laborioso intentar eliminar coordenadas utilizando las ecuaciones de restricción geométrica. Por ejemplo, en el sistema compuesto por un cuadrilátero articulado (ver figura 2.1), los ángulos α, β, γ están relacionados geoméricamente, lo que permite expresar las posiciones de todos los puntos del sistema en función de un único parámetro, a partir de las ecuaciones

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta - c \cos \gamma = \ell \\ a \sin \alpha + b \sin \beta - c \sin \gamma = 0 \end{cases}$$

Sin embargo este proceso sería innecesariamente engorroso y la representación de las posibles posiciones del sistema se puede realizar con tres coordenadas y las ecuaciones anteriores.

En algunos problemas concretos, la utilización de un número de coordenadas $m > n$ y el método de los multiplicadores de Lagrange, dirige más rápidamente a la solución que la determinación de las expresiones que relacionan los coordenadas superfluas con las independientes.



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 13 de 105



DFAII
 $M_e c F u n N_e t$

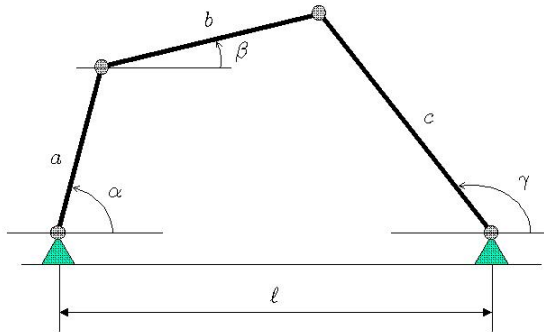


Figura 1: cuadrilátero articulado

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 14 de 105

3. Evolución de un sistema material

En la sección anterior se ha definido la forma de caracterizar la posición de un sistema. Se parte, pues, de un sistema cuya posición viene determinada por un conjunto de m coordenadas (q_1, \dots, q_m) , un conjunto de ligaduras geométricas $\{f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad j \in 1 \dots, g\}$ y un conjunto de funciones $\mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)$ que posicionan todos los puntos del sistema a partir de las coordenadas. Cuando un sistema evoluciona en el tiempo va ocupando posiciones de su espacio de configuración. Un conjunto de funciones $\{q_1(t), \dots, q_m(t)\}$ define lo que llama una *trayectoria* del sistema. Si las funciones $\{q_1(t), \dots, q_m(t)\}$ son derivables, entonces $\{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m\}$ es la m -erna *cinemática* formada con las *velocidades generalizadas*. En algunos casos *no todas las trayectorias del sistema son posibles, aunque todas sus posiciones sean compatibles con las ligaduras geométricas*. En efecto, existe un tipo de restricciones sobre las trayectorias de los sistemas que limitan las posibles velocidades que puede tomar un sistema. Estas restricciones reciben el nombre de *ligaduras cinemáticas* y se expresan como ecuaciones en las que intervienen las coordenadas generalizadas, sus derivadas respecto al tiempo y el propio tiempo. Se supondrá que esta relación es lineal y puede expresarse en la forma:

$$\sum_{i=1}^m A_i(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_i + B(q_1, \dots, q_m, t) = 0$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 15 de 105

y si existen c ligaduras de este tipo

$$\sum_{i=1}^m A_{ki}(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_i + B_k(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, c\}$$

Las ligaduras cinemáticas son *estacionarias* si pueden representarse por ecuaciones en las que no interviene explícitamente el tiempo. En caso contrario las ligaduras cinemáticas se denominan *variables*.

Las ecuaciones que debe satisfacer la m -erna cinemática $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$ son entonces g para mantener al sistema en el conjunto de posiciones posibles más c para cumplir con las ligaduras cinemáticas, por lo tanto, sólo son necesarias $\ell = m - (g + c) = n - c$ velocidades generalizadas para determinar aquella m -erna. Este número recibe el nombre de *grados de libertad* del sistema o *índice cinemático*.

En sistemas con ligaduras cinemáticas ($c > 0$), la dimensión del espacio de configuración, es decir, el de las posibles posiciones del sistema, es mayor que el número de posibles desplazamientos elementales que puede experimentar el mismo, o sea, $n > \ell$.

Por ejemplo, considérese el sistema de la figura 2.2. Una barra AB , de longitud d se encuentra en un plano Oxy . En este sistema se considera la ligadura que permite a la barra moverse sobre el plano siempre y cuando su centro de masas $C(\xi, \eta)$ tenga una velocidad \mathbf{v}_C perpendicular a la propia barra. Este caso correspondería, por ejemplo, a un bolígrafo al que se ciñese una goma tensa en su centro, la cual no puede deslizar sobre el plano correspondiente a una mesa de madera. Es decir, dicha goma equivale a una ruedecita cuyo eje tenga la dirección de la barra y que pudiese rodar



DFAII
M_cFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 16 de 105

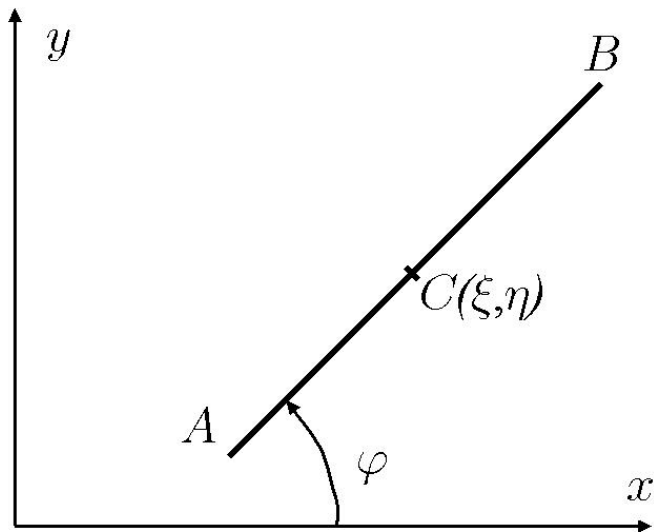


Figura 2: sistema con ligadura cinemática



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 17 de 105

y pivotar sin deslizar sobre el plano manteniendo dicho eje paralelo al mismo. En este sistema, la condición impuesta a la velocidad del centro de masas restringe las posibles evoluciones del sistema, pero no impiden que éste pueda llegar a ocupar cualquier posición desde una inicial dada. En este caso, el posicionamiento del sistema exige tres parámetros, que pueden escogerse como la terna (ξ, η, φ) donde ξ, η son las coordenadas que posicionan el centro de masas y φ un ángulo que determina la orientación de la barra. Cualquier terna $(\xi_0, \eta_0, \varphi_0)$ de valores representa una posición del sistema, pero no todas las ternas de funciones $(\xi(t), \eta(t), \varphi(t))$ representan evoluciones posibles del sistema, pues éstas deben satisfacer la restricción mencionada anteriormente, que puede representarse por la ecuación

$$\dot{\xi} \cos \varphi + \dot{\eta} \sin \varphi = 0$$

que no es integrable, pues de serlo, la integral

$$\Psi(\xi, \eta, \varphi, t) = C$$

prescribiría, dadas las condiciones iniciales, en cada instante t una superficie en el espacio ξ, η, φ contra la evidente posibilidad de libre posicionamiento del sistema.

En un vehículo automóvil que se desplaza sobre un plano horizontal sucede algo similar. La posición del vehículo se puede realizar especificando las coordenadas (ξ, η) de, por ejemplo, el centro su rueda posterior derecha, el ángulo φ que forma su eje antero-posterior con el eje x y el ángulo α que está girada la rueda anterior derecha (ver figura 2.3). El espacio de configuración tiene cuatro dimensiones, ya que cualquier cuaterna de valores



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 18 de 105

$\xi_0, \eta_0, \varphi_0, \alpha_0$ representa una posición posible del vehículo sobre el plano. Sin embargo, el vehículo (para desesperación de los conductores noveles a la hora de estacionar en una plaza estrecha) no puede evolucionar según una trayectoria cualquiera $(\xi(t), \eta(t), \varphi(t), \alpha(t))$. La evolución debe respetar las siguientes ecuaciones de acuerdo con la cinemática del movimiento del chasis y de las ruedas

$$\begin{cases} \dot{\xi} \sin \varphi - \dot{\eta} \cos \varphi = 0 \\ d \sin \varphi \dot{\varphi} + \dot{\eta} \tan \alpha = 0 \end{cases}$$

Como cualquier buen conductor conoce, no importa de qué punto del espacio de configuración se parta, se puede colocar el vehículo en cualquier posición, lo que implica la no integrabilidad de las ecuaciones anteriores.

En una rueda que cae por un plano inclinado sin deslizar, se necesitan dos coordenadas para posicionar dicha rueda; aunque, si no puede haber deslizamiento entre el plano y la rueda, sólo hace falta la velocidad de su centro para determinar el campo de velocidades de la rueda, ya que $\dot{\xi} = R\dot{\varphi}$. Sin embargo, dada la posición inicial de la rueda, ξ_0, φ_0 siempre se tendrá que $\xi - R\varphi = cte$, lo que indica que en este caso, la ligadura restringe el conjunto de posiciones del espacio de configuración para una posición inicial dada. En este caso, la ligadura cinemática es integrable, lo que supone una diferencia radical con los ejemplos anteriores, ya que la ligadura cinemática hace que la posición inicial restrinja el conjunto de posiciones alcanzables a partir de ella.

Por lo tanto, retomando la línea central del párrafo, se puede decir que la caracterización de las posibles evoluciones de un sistema material



DFAII
M_cFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 19 de 105

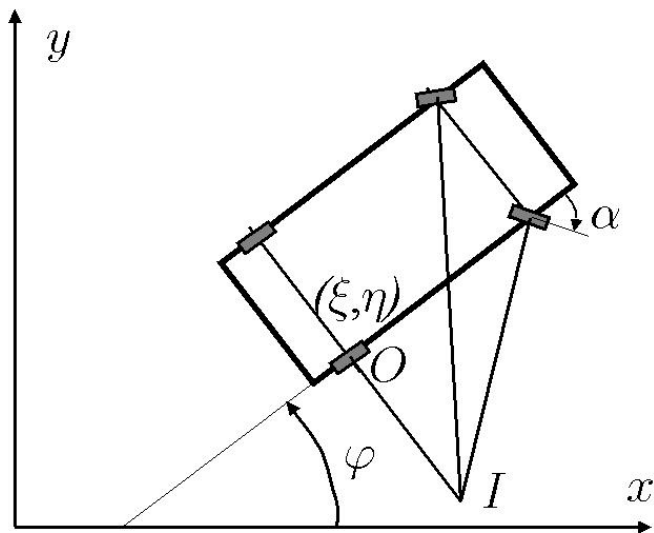


Figura 3: vehículo automóvil



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 20 de 105

viene dada por un conjunto de coordenadas

$$(q_1, \dots, q_m)$$

un conjunto de ligaduras geométricas

$$f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, g\}$$

un conjunto de ligaduras cinemáticas

$$\sum_{i=1}^n A_{ki}(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_i + B_k(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, c\}$$

y un conjunto de funciones

$$\mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)$$

que posicionan todos los puntos del sistema a partir de las coordenadas.

A partir del conjunto de ligaduras, tanto geométricas como cinemáticas, a veces es posible encontrar p integrales primeras independientes entre sí y de las ecuaciones de ligadura geométricas

$$h_i(q_1, \dots, q_m) = C_i \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}$$

tales que, dada una posición inicial del sistema, las posiciones posibles por las que puede pasar una trayectoria del mismo resultan limitadas por p restricciones adicionales. El número p se conoce como *grado de integrabilidad del sistema*. En este caso, la posición del sistema en cualquier punto de



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 21 de 105

cualquier trayectoria que pase por un punto dado podrá definirse a partir de sólo $m - g - p$ coordenadas (ya que las p restantes se pueden determinar a partir de las C_i y de las coordenadas restantes y el tiempo). Este número $\nu = m - g - p$ recibe el nombre de *índice de configuración del sistema o número efectivo de coordenadas* ($\nu = n - p$). Por lo tanto, ν es el número mínimo de coordenadas generalizadas que permiten fijar la posición de cualquier punto del sistema material siempre que se conozca alguna posición alcanzable mediante una trayectoria posible, para poder determinar las constantes C_i .

Un sistema con un índice de configuración ν , $\ell = n - c$ grados de libertad y dimensión del espacio de configuración n puede posicionarse mediante ν coordenadas, supuesto que se conozca alguna posición alcanzable mediante una trayectoria posible que suele ser la inicial del sistema.

Los sistemas materiales pueden clasificarse, a la vista de los conceptos desarrollados anteriormente, en:

- *holónomos*² cuando el índice de configuración es igual al número de grados de libertad ($\nu = \ell$).
- *anholónomos, no holónomos o heterónomos* cuando el índice de configuración es mayor que el número de grados de libertad ($\nu > \ell$).

También es clásico, atendiendo a la dependencia temporal de las ecuaciones de ligadura y de posición, clasificar los sistemas en

²del griego *νομος* que significa ley, prohibición, restricción y *ολος* que significa totalidad. Puede decirse que en un sistema holónomo todas las ligaduras se reducen a restricciones de las posibles posiciones del sistema



DFAII
M_cFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 22 de 105

- *esclerónomos*³ cuando puede expresarse el sistema de ecuaciones de ligadura y de posición sin dependencia explícita del tiempo.
- *reónomos*⁴ en caso contrario.

Para que esta última clasificación tenga sentido hay que especificar el sistema de referencia \mathcal{R} respecto al cual se definen las ecuaciones. En cualquier caso, esta clasificación no es tan importante como la anterior.

La determinación sistemática del índice de integrabilidad de un sistema se deduce en el Apéndice B (apartados B.7 y B.8).



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 23 de 105

³del griego $\sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\zeta$ que significa rígido. Aquí se interpreta como invariable en el tiempo.

⁴ del verbo griego $\rho\epsilon\omega$ que significa correr, fluir (la corriente), es decir ligaduras que evolucionan en el tiempo



DFAII
 $M_e cFunN_e t$

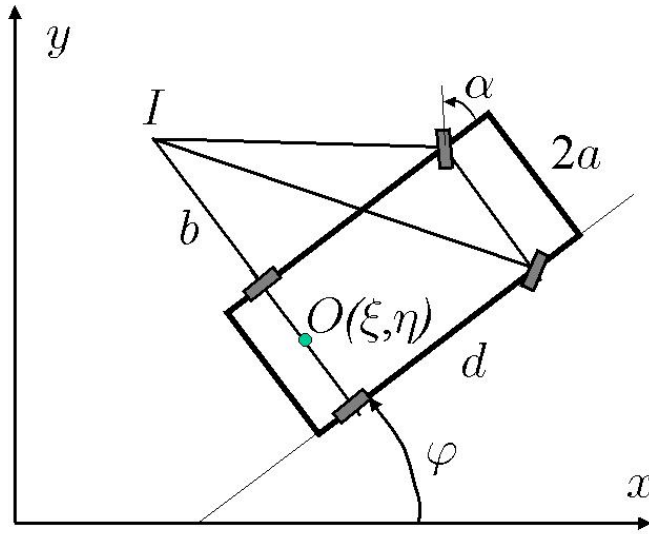


Figura 4: vehículo automóvil

4. Identificación del tipo de un sistema

4.1. Introducción: estacionamiento de un vehículo

El problema del estacionamiento de un vehículo presenta algunos rasgos curiosos.

El problema, planteado geoméricamente, se reduce a aplicar sobre la

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 24 de 105

posición $(\xi, \eta, \varphi, \alpha)$, coordenadas del centro del eje trasero, ángulo del eje del vehículo con un eje horizontal fijo y giro del volante respectivamente, la transformación o secuencia de transformaciones elementales (desplazamiento hacia delante o atrás, giro del volante) que lo lleven desde la posición inicial $(\xi_0, \eta_0, \varphi_0, \alpha_0)$ hasta la posición deseada $(\xi_1, \eta_1, \varphi_1, \alpha_1)$.

Lo singular del problema es que con sólo dos movimientos elementales (avance y giro del volante) debemos ser capaces de viajar por un espacio tetradimensional sin restricciones.

En otro tipo de sistemas la realidad es bien distinta. En una máquina medidora por coordenadas de tres dimensiones hay tres accionamientos independientes (x, y, z) para posicionar la punta del palpador en la posición deseada. Si sólo nos quedásemos con dos movimientos elementales $(x, y$, por ejemplo) el conjunto de puntos alcanzable sería un espacio bidimensional. Si incluimos otro accionamiento (giro del palpador, por ejemplo) el conjunto de puntos alcanzables sería un espacio tetradimensional.

Por lo tanto, lo que hace singular el problema del estacionamiento es el hecho de que contando con un número reducido de transformaciones elementales (grados de libertad) podemos viajar a cualquier punto de un espacio de un número mayor de dimensiones (número mínimo de coordenadas generalizadas).

Como se verá más adelante, el papel que juegan las anticonmutaciones de transformaciones elementales, que luego darán lugar a los corchetes de Poisson es fundamental, porque permiten obtener nuevas transformaciones que no son combinaciones lineales de las primeras.



DFAII
M_cFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 25 de 105

4.2. Desarrollo sistemático

Mediante la aplicación de los resultados desarrollados en el apéndice B, se puede determinar la integrabilidad de un sistema. Antes de continuar, se puede realizar un cambio de coordenada que facilite la discusión posterior. Sea b el inverso de la abscisa que posiciona el centro instantáneo de rotación I del chasis del vehículo sobre el eje de las ruedas traseras según la figura 2.4 , de modo que

$$b = \frac{1}{a + \frac{d}{\tan \alpha}}$$

En el ejemplo considerado se tiene un sistema Ω de formas lineales dado por

$$\begin{cases} \sin \varphi d\xi - \cos \varphi d\eta = 0 \\ d\varphi - b \frac{d\xi}{\cos \varphi} = 0 \end{cases}$$

y por tanto un conjunto T_Ω generado por

$$\begin{cases} A_1 = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} + b \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_2 = \frac{\partial}{\partial b} \end{cases}$$

Al hacer $[A_2, A_1]$ se tiene

$$A_3 = [A_2, A_1] = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 26 de 105

es decir, se tiene la transformación consistente en un giro en torno al eje trasero con todas las demás variables constantes. El corchete de Poisson define la transformación resultado de efectuar las correspondientes a sus factores en un orden y en el inverso, obteniendo el resultado esperado.

Si ahora se hace

$$[A_3, A_1] = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \eta}$$

se tiene un desplazamiento lateral del vehículo. Como la dimensión del subespacio vectorial generado por $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es máximo, se tiene que la dimensión mínima de la integral del sistema es cuatro, es decir, no existen integrales primeras de las ecuaciones de ligadura cinemática. Por lo tanto, el vehículo puede alcanzar cualquier posición final a partir de cualquier posición inicial.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 27 de 105

5. Desplazamientos virtuales

Dado un sistema material \mathcal{S} y una representación del mismo mediante un conjunto de coordenadas $\mathbf{r}(q_1, \dots, q_n, t)$ más un conjunto de ecuaciones de ligadura geométricas más otro de ligaduras cinemáticas, se define el conjunto de *desplazamientos elementales posibles* en el punto (q_{10}, \dots, q_{n0}) como el de todas las $(m+1)$ -ernas (dq_1, \dots, dq_n, dt) que satisfacen las $g+c$ ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)_0 dq_i + \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} \right)_0 dt = 0 \quad \text{para } j \in \{1, \dots, g\} \\ \sum_{i=1}^m (A_{ji})_0 dq_i + (B_j)_0 dt = 0 \quad \text{para } j \in \{1, \dots, c\} \end{array} \right.$$

Obviamente los desplazamientos así definidos representan los movimientos elementales que el sistema puede realizar respetando las ecuaciones de ligadura a las que está sometido. Si se dividen las m primeras componentes entre la última componente, se obtiene el conjunto de posibles velocidades generalizadas del sistema. Entre las $m+1$ componentes de los desplazamientos elementales existe una que tiene un significado especial: la última. En efecto, mientras las m primeras componentes representan desplazamientos posibles de las coordenadas de posición del sistema, la última sólo representa el tiempo que debe transcurrir para que estos desplazamientos sean realmente posibles. Es decir, a cada desplazamiento de la posición posible le corresponde un intervalo temporal en el que es realmente posible. Sin



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 28 de 105

embargo existe una clase de desplazamientos, en cierto modo privilegiados, cuya duración es nula, o lo que es lo mismo, se efectúan con velocidad infinita. Estos son los que corresponden a desplazamientos posibles en los que la última componente es nula. En este caso, la dependencia temporal de las ligaduras es obviada, al tratar desplazamientos tan rápidos que no puede llegar a manifestarse; es como si se “congelasen” dichas ligaduras. Se llega pues al concepto de *desplazamientos virtuales*, que se definen como las m -ernas $(\delta q_1, \dots, \delta q_m)$ que satisfacen las $g + c$ ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i = 0 \quad \text{para } j \in \{1, \dots, g\} \\ \sum_{i=1}^m (A_{ji})_0 \delta q_i = 0 \quad \text{para } j \in \{1, \dots, c\} \end{array} \right.$$

Obviamente el conjunto de desplazamientos virtuales tiene estructura de espacio vectorial. Sus elementos representan el conjunto de vectores “rasantes” a las ligaduras. En el caso de un sistema formado por un único punto material ligado a una superficie variable en el tiempo, representa el conjunto de vectores del plano tangente a la forma que adopta dicha superficie en t_0 .

Dinámica analítica



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 29 de 105

6. Fuerzas que actúan sobre un sistema

En las secciones anteriores se ha analizado la forma de representar la posición y la trayectoria de un sistema material sometido a un conjunto de ligaduras. Se dispone de una forma de identificar la posición de cada punto del sistema (P, q_1, \dots, q_m, t) para cada conjunto de coordenadas que satisfagan las ligaduras. En el marco newtoniano, las causas que pueden alterar el movimiento de un sistema material son las fuerzas que actúan sobre cada uno de sus puntos. Un sistema en el que sea posible cualquier posición y cualquier trayectoria de cada uno de sus puntos es un sistema totalmente libre. Cuando se restringen las posibles posiciones de un sistema deben existir fuerzas que aseguren que éste permanece en el correspondiente espacio de configuración. Estas fuerzas actúan sobre cada punto del sistema y son las que garantizan el cumplimiento de las ecuaciones de ligadura, por lo que reciben el nombre de *fuerzas de ligadura*. Además, existen otras fuerzas que actúan sobre el sistema debido a otras causas que no dependen de la existencia de un conjunto particular de ligaduras. Estas fuerzas, que reciben el nombre de *fuerzas aplicadas*, son originadas por fenómenos físicos de leyes determinadas, y se expresan, en general, en función de las posiciones, de las velocidades y del tiempo.

Dado un instante t_0 , una posición (q_1, \dots, q_m) , una velocidad $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$, un desplazamiento virtual $(\delta q_1, \dots, \delta q_n)$, se puede definir el *trabajo virtual* de las fuerzas $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ sobre los puntos del sistema como

$$\delta T = \sum_{\forall P} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 30 de 105

siendo

$$\delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)}{\partial q_i} \delta q_i$$

por lo que resulta

$$\delta \mathcal{T} = \sum_{\forall P} \mathbf{F} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)}{\partial q_i} \delta q_i$$

o bien

$$\delta \mathcal{T} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\forall P} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

por lo que llamando

$$Q_i(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) = \sum_{\forall P} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)}{\partial q_i}$$

se tiene

$$\delta \mathcal{T} = \sum_{i=1}^m Q_i \delta q_i$$

siendo frecuente abreviar las variables de Q_i en la forma

$$Q_i(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) = Q_i(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Por similitud con el caso newtoniano, el término Q_i recibe el nombre de *fuerza generalizada* del conjunto de fuerzas \mathbf{F} , correspondiente o asociada a la coordenada q_i .



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 31 de 105

Las ligaduras ideales son las que se imponen mediante fuerzas de ligadura que son “perpendiculares^a los movimientos instantáneos que permiten. Esto supone que son perpendiculares a los desplazamientos virtuales que permiten. Esta idea es la que se recoge en la definición de sistema material sometido a un *conjunto ideal de ligaduras* que es aquél cuyas fuerzas de ligadura realizan un trabajo virtual nulo sobre cada desplazamiento virtual.

Cuando en un sistema existe un motor o un generador, la acción que realiza (par motor o fuerza motora) se considera en general como una fuerza aplicada. Sin embargo, en algunas ocasiones, los motores o generadores actúan suministrando una acción (fuerza, par, presión, etc) que intente llevar al sistema hasta que verifique una cierta relación entre posiciones y velocidades. Si esta acción se sabe que es lo suficientemente vigorosa como para forzar la relación anterior, entonces la acción motora se considera una acción de ligadura. Realmente impone una nueva ligadura sobre el sistema mediante su acción motora.



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 32 de 105

7. Ecuaciones de Lagrange

Dado un sistema material sometido a un conjunto ideal de ligaduras, sobre el que actúa un conjunto de fuerzas aplicadas conocido, se van a deducir las ecuaciones que rigen la evolución temporal de dicho sistema. En este punto es necesario incluir información sobre la distribución másica. Por esto, se supone definida una función $m(P)$ que asigne a cada punto P del sistema, su masa (en algunos casos se asignará una densidad volumínica, superficial o lineal). El punto de partida es la segunda ley de Newton aplicada a cada punto del sistema material:

$$m(P)\mathbf{a}(P) = \mathbf{F}(P) + \mathbf{R}(P) \quad (1)$$

donde se asume que $\mathbf{a}(P)$ es la aceleración de P respecto a un sistema indeformable de referencia κ_P , respecto al cual está definida la fuerza \mathbf{F} , o la velocidad $\mathbf{v}(P) = \dot{\mathbf{r}}(P)$ (si el sistema no es inercial \mathbf{F} debe incluir las fuerzas de inercia). Frecuentemente se elige un sistema de referencia κ para todos los puntos del sistema. En lo que sigue se supondrá que κ es único, aunque se realizarán en su momento los comentarios pertinentes al caso de no haber elegido un único κ .

Los pasos siguientes tienen por objeto llegar a un conjunto de ecuaciones en las que hayan desaparecido las fuerzas de ligadura y el criterio que lo permitirá será la nulidad de su trabajo virtual sobre desplazamientos virtuales. En primer lugar se multiplica la segunda ley de Newton aplicada al punto P por el desplazamiento que corresponde a dicho punto en un desplazamiento virtual cualquiera del sistema material

$$m(P)\ddot{\mathbf{r}}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) = \mathbf{F}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) + \mathbf{R}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P)$$



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 33 de 105

a continuación se puede efectuar la suma de las ecuaciones anteriores para todos los puntos del sistema:

$$\sum_{\forall P} m(P) \ddot{\mathbf{r}}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) = \sum_{\forall P} \mathbf{F}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) + \sum_{\forall P} \mathbf{R}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P)$$

el último sumatorio es el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura sobre un desplazamiento virtual cualquiera del sistema y, si las ligaduras son ideales, es nulo por definición. Se llega entonces a la ecuación

$$\sum_{\forall P} m(P) \ddot{\mathbf{r}}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) = \sum_{\forall P} \mathbf{F}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) \quad (2)$$

que es válida para cualquier desplazamiento virtual del sistema. Esta formulación no es no es aún práctica en la resolución de problemas de Mecánica, puesto que hace falta adaptarla a la representación elegida del sistema. Supongamos que el sistema se representa por m coordenadas (q_1, \dots, q_m) con g ecuaciones de ligadura geométricas $f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0$

y c ecuaciones de ligadura cinemáticas $\sum_{i=1}^m A_{ki} \dot{q}_i + B_k = 0$, de forma que ex-

istan las funciones $\mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t)$ lo suficientemente suaves como para que los siguientes desarrollos sean correctos. Según se vio en el apartado anterior, los desplazamientos virtuales vienen definidos por las m -ernas



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 34 de 105

$(\delta q_1, \dots, \delta q_m)$ que satisfacen

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i = 0 & \text{para } j \in \{1, \dots, g\} \\ \sum_{i=1}^m (A_{ji})_0 \delta q_i = 0 & \text{para } j \in \{1, \dots, c\} \end{cases}$$

Si se evalúan los dos miembros de la ecuación (2) en función de las coordenadas generalizadas, expresando previamente $\delta \mathbf{r}(P)$, $\dot{\mathbf{r}}(P)$ en función de dichas coordenadas

$$\begin{cases} \delta \mathbf{r}(P) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i \\ \dot{\mathbf{r}}(P) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \end{cases}$$

se deducen dos relaciones que serán útiles más adelante. En primer lugar, derivando la segunda ecuación parcialmente respecto a \dot{q}_j se tiene:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$$

y en segundo lugar, derivando parcialmente con respecto a q_j la misma expresión, se obtiene

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial q_j}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 35 de 105

que es igual a $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}$ ya que esta derivada se expresa por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_j \partial t}$$

que por el teorema de Schwartz es igual a la primera, por lo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_j}$$

Por lo tanto, el primer miembro de (2) es

$$\begin{aligned} \sum_{\forall P} m(P) \ddot{\mathbf{r}}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) &= \sum_{\forall P} m(P) \left(\frac{d}{dt} \left\{ \dot{\mathbf{r}}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) \right\} - \dot{\mathbf{r}}(P) \cdot \frac{d \delta \mathbf{r}(P)}{dt} \right) \\ &= \sum_{\forall P} m(P) \left(\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) - \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i \right) \end{aligned}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 36 de 105

aplicando las propiedades demostradas más arriba, se tiene

$$= \sum_{\forall P} m(P) \left(\frac{d \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \cdot \dot{\mathbf{r}} \right)}{dt} - \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

agrupando e invirtiendo el orden de los sumatorios

$$= \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{\forall P} m(P) \left(\frac{d \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right)}{dt} - \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \right) \right\} \delta q_i$$

teniendo en cuenta que $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \text{nor } \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i}$ y que $\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \text{nor } \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i}$ y re colocando el sumatorio queda

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial \sum_{\forall P} \frac{1}{2} m(P) \text{nor } \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \sum_{\forall P} \frac{1}{2} m(P) \text{nor } \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \right\} \delta q_i$$



DFAII
M_cFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 37 de 105

llamando T (energía cinética) a $\sum_{\forall P} \frac{1}{2} m(P) \dot{\mathbf{r}}^2$ se tiene

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i$$

Es de notar que T , en el caso de que no se hubiese elegido un único sistema κ de referencia representa la suma de las energías cinéticas de cada punto respecto al sistema κ_P elegido para él. En cualquier caso, es interesante remarcar que la función T siempre se puede expresar mediante la suma de

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

donde T_0, T_1, T_2 son funciones homogéneas de grados cero, uno y dos en las velocidades generalizadas.

En cuanto al segundo miembro de la ecuación (2), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\forall P} \mathbf{F}(P) \cdot \delta \mathbf{r}(P) &= \\ &= \sum_{\forall P} \mathbf{F} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\forall P} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i \end{aligned}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 38 de 105

o, en función de las fuerzas generalizadas definidas anteriormente

$$\sum_{i=1}^m Q_i \delta q_i$$

con lo que la ecuación (2) queda

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = \sum_{i=1}^m Q_i \delta q_i$$

o bien

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right\} \delta q_i = 0 \quad (3)$$

para todos los desplazamientos virtuales $(\delta q_1, \dots, \delta q_m)$ que son las m -ernas que satisfacen las $g + c$ ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i = 0 & \text{para } j \in \{1, \dots, g\} \\ \sum_{i=1}^m (A_{ji})_0 \delta q_i = 0 & \text{para } j \in \{g+1, \dots, g+c\} \end{cases}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 39 de 105

Es conveniente insistir en las relaciones existentes entre los δq_i , lo que impide considerarles como independientes y, por tanto, el cumplimiento de la ecuación 3 no determina necesariamente la anulación de todos los coeficientes de los desplazamientos virtuales δq_i .

Llamando $\Phi_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i$, y considerando el espacio vectorial real R^m , diferente del espacio físico del sistema, se puede introducir el vector⁵ Φ como aquel cuyas componentes son Φ_i y el vector $\delta \mathbf{q}$ como otro de componentes δq_i , con lo que la ecuación (2) puede escribirse

$$\Phi \cdot \delta \mathbf{q} = 0$$

para todos los $\delta \mathbf{q}$ que correspondan a desplazamientos virtuales. Además, se puede definir un vector por cada ecuación de ligadura. El vector α_j es aquél de componentes $\frac{\partial f_j}{\partial q_i}$ si $j < g + 1$ y es el de componentes A_{ji} si $j > g$, con lo que los desplazamientos virtuales son las m -ernas ($\delta q_1, \dots, \delta q_m$) tales que los $\delta \mathbf{q}$ sean perpendiculares a todos los vectores α_j ($\delta \mathbf{q} \cdot \alpha_j = 0$). Por lo tanto, si Φ es perpendicular a todos los vectores perpendiculares a los α_j entonces Φ es una combinación lineal de los anteriores, es decir:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{g+c} \lambda_j \alpha_j$$

⁵Se puede demostrar que se trata de un vector covariante



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 40 de 105

es decir,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = \sum_{j=1}^{g+c} \lambda_j \alpha_{ji} \quad \text{para } i \in \{1, \dots, m\}$$

sistema de m ecuaciones que junto con las $g + c$ ecuaciones de ligadura determinan las $m + g + c$ incógnitas $(q_1, \dots, q_m, \lambda_1, \dots, \lambda_{g+c})$, en función de $2n - c = 2m - c - 2g$ constantes determinadas por las correspondientes condiciones iniciales. Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones de Lagrange*.

Es de destacar que una vez elegido κ_P , la función T así como las fuerzas generalizadas quedan determinadas y las ecuaciones de Lagrange deben proporcionar una solución independiente de la elección de κ_P . Si se elige un κ único, éste puede ser inercial o no inercial. En este segundo caso en las Q_i deben incluirse las fuerzas de inercia para el sistema κ .



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 41 de 105

8. Fuerzas de ligadura

Sea un sistema material \mathcal{S} , representado, como es habitual, por un conjunto de coordenadas (q_1, \dots, q_m) , g ecuaciones de ligaduras geométricas $f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0$, c ecuaciones de ligaduras cinemáticas $\sum_{i=1}^m A_{ki} \dot{q}_i + B_k = 0$ y las funciones $\mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t), m(P)$. Si se conoce el sistema de fuerzas aplicadas, supuestas las ligaduras ideales, las ecuaciones de Lagrange proporcionan las ecuaciones necesarias para determinar la evolución temporal de \mathcal{S} .

No es necesario admitir que todas las ecuaciones de ligadura son el resultado de fuerzas de ligadura pues pueden imaginarse ligaduras que no estén asociadas a fuerzas de ligadura; por ejemplo, la descripción del movimiento de un punto en el espacio mediante $m = 6$ coordenadas: tres cartesianas y tres esféricas. Sin embargo, sí es cierto que la presencia de fuerzas de ligadura, por ejemplo el caso de un punto ligado a una línea o a una superficie, determina la aparición de las correspondientes ecuaciones de ligadura.

Si se introduce una ligadura adicional del último tipo indicado, es decir, una nueva restricción sobre el posible movimiento de \mathcal{S} impuesta mediante un conjunto de fuerzas de ligadura que siga haciendo el sistema ideal, éstas no tienen porqué realizar un trabajo virtual nulo sobre los desplazamientos virtuales de \mathcal{S} determinados por el anterior conjunto de ligaduras del mismo. Es decir, estas fuerzas de ligadura sí aparecen en las ecuaciones de Lagrange aplicadas a \mathcal{S} , por lo que pueden utilizarse para la determinación



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 42 de 105

de dichas fuerzas de ligadura. Más concretamente, las contribuciones que intervienen en las ecuaciones de Lagrange son trabajos virtuales desarrollados por las nuevas fuerzas de ligadura sobre los desplazamientos permitidos por las antiguas; es decir, las componentes generalizadas de las fuerzas de la nueva ligadura (a veces estas componentes permiten determinar las componentes cartesianas de dichas fuerzas, pero en otras ocasiones quedarán indeterminadas). Si se obliga a que la solución de las ecuaciones de Lagrange planteadas con un nuevo conjunto de fuerzas satisfaga el conjunto de ecuaciones de las ligaduras, la solución del problema comprenderá no sólo la evolución del mismo, sino también la obtención de un sistema de fuerzas adicional, cuyo trabajo virtual es nulo, y que se encarga del mantenimiento de las ligaduras nuevas.

En general las ecuaciones de ligadura pueden ser geométricas o cinemáticas. Para fijar ideas se supone que cada ligadura se representa por una ecuación. Las fuerzas de ligadura deben realizar trabajo virtual nulo sobre los desplazamientos virtuales que permiten, es decir, llamando Q_i^L a las componentes generalizadas de las fuerzas de ligadura, y \mathbf{Q}^L a su vector asociado, de forma similar al Φ anterior, se tiene (véase la sección anterior) una posibilidad para las fuerzas de ligadura:

$$\mathbf{Q}^L = \sum_{j=1}^r \lambda_j^L \boldsymbol{\alpha}_j^L$$

que introduce una nueva incógnita λ_j $j \in \{1, \dots, r\}$ por cada ligadura, es decir, r nuevas incógnitas.

De acuerdo con esto, el sistema de ecuaciones de Lagrange visto en el



DFAII
M_cFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 43 de 105

apartado anterior, queda ampliado de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = \sum_{j=1}^{g+c} \lambda_j \alpha_{ji} + \sum_{j=1}^r \lambda_j^L \alpha_{ji}^L$$

$$f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad j \in 1 \dots, g)$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} A_{ki}(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_i + B_k(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad \forall k \in 1, \dots, c$$

más las L ecuaciones de las nuevas ligaduras, lo que proporciona un sistema de $m + g + c + r$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas.

Existen sistemas en los que las ecuaciones de ligadura no pueden asociarse a fuerzas o sistemas de fuerzas de ligadura en el sentido newtoniano. Estos se refieren a conjuntos de fuerzas que actúan sobre un sistema material determinado para obligarlo a que en su movimiento cumpla ciertas restricciones. Este sistema material existe antes de someterlo a la ligadura. En la caracterización de los sistemas presentada en este trabajo, no todas las ligaduras pueden liberarse y tener un nuevo sistema material (más libre) perfectamente definido. Existe la posibilidad de representar un sistema material elemental, como es un punto material libre, con cinco coordenadas, las tres cartesianas, el radio y el azimut cilíndricos, con el correspondiente conjunto de ligaduras.

$$\begin{cases} x - \rho \cos \varphi &= 0 \\ y - \rho \sin \varphi &= 0 \end{cases}$$



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 44 de 105

donde obviamente no se puede hablar de fuerzas de ligadura. Las ecuaciones del sistema serían

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 \\ m\ddot{y} = \lambda_2 \\ m\ddot{z} = 0 \\ 0 = -\lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi \\ 0 = \lambda_1 \rho \sin \varphi - \lambda_2 \rho \cos \varphi \end{cases}$$

que implica la solución trivial para el punto libre

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \\ \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Realmente la mecánica analítica no discrimina entre sistemas de fuerzas que desarrollen los mismos trabajos virtuales sobre los desplazamientos permitidos por las ligaduras. Las fuerzas de ligadura producen un trabajo virtual nulo sobre los desplazamientos que permiten. Cuando se quiere utilizar la mecánica analítica para hallar una fuerza de ligadura, se debe partir del sistema “liberado” de la ligadura considerada. A este sistema se le añade una fuerza de valor desconocido, pero que desarrollará trabajo virtual nulo sobre cualquier desplazamiento que permita, es decir sobre aquéllos de entre los que tiene el sistema liberado que cumplan la ecuación de la ligadura considerada. Esta condición equivale a expresar las componentes generalizadas de la fuerza de ligadura como el producto de una función escalar $\lambda(t)$ por el vector covariante del espacio de configuración **A**. Se plantean las ecuaciones de Lagrange imponiendo la ecuación de la ligadura y lo que se va a obtener son las componentes generalizadas de



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 45 de 105

la fuerza de ligadura que obligue al sistema a respetar su ecuación. Si se quiere obtener la fuerza newtoniana a partir de sus componentes generalizadas, se procederá utilizando la misma fórmula que para la operación inversa, bien entendido que en este caso, el sistema newtoniano puede estar indeterminado y será necesaria la utilización de alguna condición adicional para su cálculo.

Por ejemplo, se considera un círculo de radio R y masa m que rueda y pivota sin deslizar sobre un plano fijo x_1y_1 en el que el eje x_1 es horizontal y el eje y_1 forma 60° con el eje vertical ascendente.

Se supone que el plano del círculo se mantiene siempre perpendicular al plano x_1y_1 . En este caso, se necesitan cuatro coordenadas para posicionar el sistema, junto a dos ecuaciones de ligadura cinemática. Las coordenadas pueden ser $(\xi, \eta, \varphi, \psi)$, que representan las coordenadas (ξ, η) del centro de masa en la referencia x_1y_1 y los ángulos de precesión (φ) y rotación propia (ψ) de una referencia xyz móvil cuyo plano xy sea el del círculo. Las ecuaciones de ligadura son:

$$\begin{cases} \dot{\xi} + R\dot{\psi} \cos \varphi = 0 \\ \dot{\eta} + R\dot{\psi} \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Se puede utilizar la formulación anterior para obtener la evolución y las fuerzas de ligadura de este sistema mecánico. Para ello, se considera otro sistema que resulte de *liberar* el anterior de las ligaduras cuyos esfuerzos se pretende calcular. Si sólo se estuviese interesado en las fuerzas de rozamiento y la reacción normal en el punto de contacto, entonces el nuevo sistema consiste en un círculo que puede moverse sobre el espacio manteniéndose perpendicular al plano x_1y_1 . En este caso, en el nuevo sistema



DFAII
M_ccFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 46 de 105



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

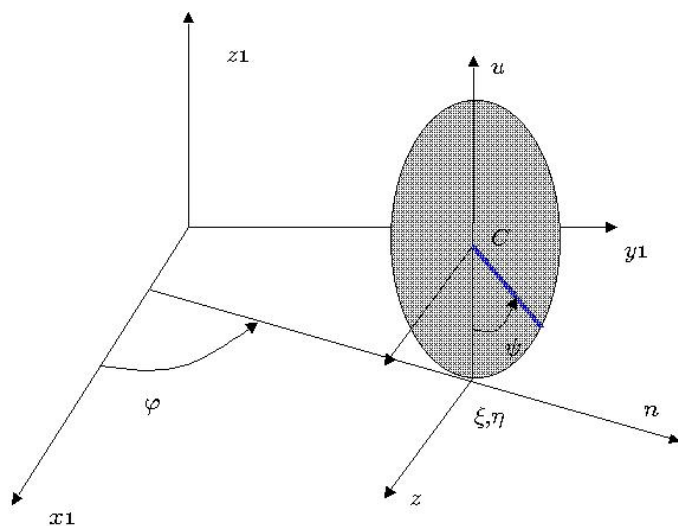


Figura 5: rueda

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 47 de 105

se necesita una nueva coordenada ζ y no son necesarias las ecuaciones 4. Para este nuevo sistema se calculan las energías cinética y potencial. La primera resulta ser:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + \frac{1}{2}R^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}R^2\dot{\varphi}^2)$$

La energía potencial es

$$U = mg(\zeta \frac{\sqrt{3}}{2} + \eta \frac{1}{2})$$

Este sistema se convierte en el anterior con las ecuaciones de ligadura

$$\begin{cases} \dot{\xi} + R\dot{\psi} \cos \varphi = 0 \\ \dot{\eta} + R\dot{\psi} \sin \varphi = 0 \\ \zeta - R = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución del sistema son

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} = \lambda_1 \\ m\ddot{\eta} = -mg\frac{1}{2} + \lambda_2 \\ m\ddot{\zeta} = -mg\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda_3 \\ \frac{1}{4}mR^2\ddot{\varphi} = 0 \\ \frac{1}{2}mR^2\ddot{\psi} = \lambda_1 R \cos \varphi + \lambda_2 R \sin \varphi \end{cases} \quad (6)$$

que junto con las tres ecuaciones de 5 determinan las incógnitas definidas. Para resolver el sistema de ecuaciones anterior, se empieza con la cuarta ecuación del sistema 6, que determina, eligiendo el origen de tiempo adecuadamente

$$\varphi = \omega t$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 48 de 105

y se continúa con la tercera ecuación, lo que determina

$$\zeta = 0 \wedge \lambda_3 = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$$

derivando las dos primeras ecuaciones de 5 e insertando las segundas derivadas de ξ, η en la quinta de 6, se tiene

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\psi} = \frac{1}{2}mgR \sin \omega t$$

por lo que

$$\ddot{\psi} = \frac{g}{3R} \sin \omega t$$

si inicialmente

$$\psi(0) = 0 \wedge \dot{\psi}(0) = \Omega - \frac{g}{3R\omega}$$

entonces

$$\psi(t) = -\frac{g}{3R\omega^2} \sin \omega t + \Omega t$$

sustituyendo en 5 se tiene

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= -R \left(-\frac{g}{3R\omega} \cos \omega t + \Omega \right) \cos \omega t \\ \dot{\eta} &= -R \left(-\frac{g}{3R\omega} \cos \omega t + \Omega \right) \sin \omega t \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \frac{g}{3\omega} \cos^2 \omega t - R\Omega \cos \omega t &= \frac{g}{6\omega} (1 + \cos 2\omega t) - R\Omega \cos \omega t \\ \dot{\eta} &= \frac{g}{3\omega} \cos \omega t \sin \omega t - R\Omega \sin \omega t &= \frac{g}{6\omega} \sin 2\omega t - R\Omega \sin \omega t \end{cases}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 49 de 105

e integrando

$$\begin{cases} \xi &= \frac{g}{6\omega}(1 + \frac{\sin 2\omega t}{2}) - R\frac{\Omega}{\omega} \sin \omega t \\ \eta &= -\frac{g}{12\omega^2} \cos 2\omega t + R\frac{\Omega}{\omega} \cos \omega t \end{cases}$$

Para obtener λ_1, λ_2 , se deriva la ecuación anterior dos veces y se introduce en 6

$$\begin{cases} \ddot{\xi} &= -\frac{g}{3} \sin 2\omega t + R\Omega\omega \sin \omega t \\ \ddot{\eta} &= \frac{g}{3} \cos 2\omega t - R\Omega\omega \cos \omega t \end{cases}$$

con lo que

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -\frac{mg}{3} \sin 2\omega t + Rm\Omega\omega \sin \omega t \\ \lambda_2 &= m\frac{g}{3} \cos 2\omega t - Rm\Omega\omega \cos \omega t + \frac{1}{2}mg \end{cases}$$

de forma que las componentes generalizadas de las fuerzas de ligadura son

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \\ \lambda_1 R \cos \omega t + \lambda_2 R \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Para hallar las componentes cartesianas de las fuerzas, partimos de la igualdad

$$\sum_{\forall i} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m R_j \delta q_j$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 50 de 105

En nuestro problema, el primer miembro es

$$\mathbf{F}_r \cdot \delta \mathbf{r}_P + \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{r}_P$$

teniendo en cuenta que

$$\delta \mathbf{r}_P = (\delta \xi + R \cos \varphi \delta \psi) \mathbf{i}_1 + (\delta \eta + R \sin \varphi \delta \psi) \mathbf{j}_1 + \delta \zeta \mathbf{k}_1$$

se sigue

$$\begin{aligned} F_{rx1} \delta \xi + F_{ry1} \delta \eta + N_z \delta \zeta + (F_{rx1} \cos \varphi + F_{ry1} \sin \varphi) R \delta \psi = \\ = \lambda_1 \delta \xi + \lambda_2 \delta \eta + \lambda_3 \delta \zeta + (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) R \delta \psi \end{aligned}$$

lo que concluye

$$\begin{cases} F_{rx1} &= -\frac{mg}{3} \sin 2\omega t + Rm\Omega\omega \sin \omega t \\ F_{ry1} &= m\frac{g}{3} \cos 2\omega t - Rm\Omega\omega \cos \omega t + \frac{1}{2}mg \\ N_z &= mg\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 51 de 105

9. Fuerzas que derivan de un potencial

En esta sección se va a discutir la posibilidad de que un sistema de fuerzas generalizadas $Q_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t)$ $i \in \{1, \dots, m\}$ pueda expresarse en función de un potencial $U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t)$ $i \in \{1, \dots, m\}$ de forma que:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

para ello se observa en primer lugar que el segundo miembro contendrá derivadas segundas de las coordenadas generalizadas, a no ser que la dependencia de U respecto a las velocidades generalizadas sea lineal. Por lo tanto, necesariamente U , si existe, debe ser de la forma:

$$U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) = \sum_{j=1}^m a_j(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_j + b(q_1, \dots, q_m, t)$$

con lo que

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = a_i$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial a_i}{\partial t}$$

por otra parte

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial b}{\partial q_i}$$



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 52 de 105

con lo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j - \frac{\partial b}{\partial q_i} + \frac{\partial a_i}{\partial t}$$

es decir, para que las fuerzas generalizadas Q_i deriven de un potencial, deben descomponerse en dos partes: una lineal en las velocidades c_{ij} y otra independiente de las mismas d_i de forma que

$$Q_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} \dot{q}_j + d_i$$

donde $d_i - \frac{\partial a_i}{\partial t}$ derive de un potencial (b) y c_{ij} sea la derivada exterior de una forma lineal a_i . Para identificar que se dan estas hipótesis se aplica el lema inverso de Poincaré, de forma que se tienen las condiciones sobre las fuerzas generalizadas $Q_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} \dot{q}_j + d_i$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial d_i}{\partial q_j} - \frac{\partial d_j}{\partial q_i} = \frac{\partial c_{ij}}{\partial t} \quad \forall i, j \\ \sum_{i,j} \frac{\partial c_{ij}}{\partial q_k} = 0 \quad \forall k \\ c_{ij} = -c_{ji} \quad \forall i, j \end{array} \right.$$

Como caso particular, considérese la fuerza de Lorentz en el espacio tridimensional ordinario

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v})$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 53 de 105

En componentes se tiene

$$\begin{cases} F_1 &= q(E_1 + B_{13}\dot{q}_3 - B_{21}\dot{q}_2) \\ F_2 &= q(E_2 + B_{21}\dot{q}_1 - B_{32}\dot{q}_3) \\ F_3 &= (E_3 + B_{32}\dot{q}_2 - B_{13}\dot{q}_1) \end{cases}$$

donde se ha puesto $\mathbf{B} = B_{32}\mathbf{i} + B_{13}\mathbf{j} + B_{21}\mathbf{k}$. La forma bilineal antisimétrica B_{ij} debe verificar que su derivada exterior sea nula, para que la fuerza de Lorentz derive de un potencial. En efecto, la nulidad de la derivada exterior equivale a la de la divergencia de \mathbf{B} , es decir, la primera condición es

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

La segunda condición implica que

$$\begin{cases} \frac{\partial E_2}{\partial q_3} - \frac{\partial E_3}{\partial E_1} = -\frac{\partial B_{32}}{\partial t} \\ \frac{\partial q_1}{\partial E_1} - \frac{\partial q_3}{\partial E_2} = -\frac{\partial B_{21}}{\partial t} \\ \frac{\partial q_2}{\partial E_1} - \frac{\partial q_1}{\partial E_2} = -\frac{\partial B_{13}}{\partial t} \end{cases}$$

es decir

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Las ecuaciones obtenidas

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{cases}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 54 de 105

constituyen las ecuaciones de Maxwell homogéneas y son satisfechas por el campo electromagnético siempre. Por lo tanto, existe un potencial \mathbf{A} vectorial y un potencial Φ escalar tales que el potencial de la fuerza creada por el campo electromagnético es

$$U = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \Phi$$

donde

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

y

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$



DFaII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 55 de 105

10. Sistemas de fuerzas lineales en las velocidades

Un tipo de fuerzas muy habitual son las fuerzas disipativas de tipo viscoso. Son fuerzas que dependen linealmente de las velocidades y que no se pueden derivar de un potencial en sentido amplio como se ha explicado en la sección anterior.

Consideraremos un sistema de fuerzas cuyas componentes generalizadas sean lineales en las velocidades a través de coeficientes constantes. En este caso puede considerarse una matriz de fuerzas $\overline{\mathbf{F}}$ de componentes $f_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ constantes, es decir

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{pmatrix}$$

Como es bien sabido, se puede descomponer la matriz $\overline{\mathbf{F}}$ en una parte simétrica $\overline{\mathbf{S}}$ y otra antisimétrica $\overline{\mathbf{A}}$, de forma que

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}'}}{2}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{\overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{F}'}}{2}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 56 de 105

con lo que las fuerzas \mathbf{Q} se pueden descomponer en una componente simétrica \mathbf{Q}^S y otra antisimétrica \mathbf{Q}^A

$$\mathbf{Q}^S = \overline{\overline{\mathbf{S}}} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{Q}^T = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^S + \mathbf{Q}^A$$

La componente antisimétrica se suele denominar giroscópica y la componente simétrica, si es definida negativa, se llama disipativa. La componente giroscópica puede hacerse derivar de un potencial

$$U_g = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m t_{ij} (q_i \dot{q}_j - q_j \dot{q}_i)$$

en efecto, si se procede a calcular las fuerzas generalizadas a partir del potencial anterior se deberá reproducir el conjunto original. Se reescribe el potencial U_g

$$U_g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j>i} t_{ij} q_j \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j>i} t_{ji} q_i \dot{q}_j$$

la derivada parcial de U_g respecto a \dot{q}_k es

$$\frac{\partial U_g}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{j>k} t_{kj} q_j + \frac{1}{2} \sum_{k<i} t_{ki} q_i$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 57 de 105

dado que $t_{ii} = 0$ la expresión anterior queda

$$\frac{\partial U_g}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m t_{ki} q_i$$

por otra parte, de forma similar se calcula

$$\frac{\partial U_g}{\partial q_k} = -\frac{1}{2} \sum_{j>k} t_{kj} q_j - \frac{1}{2} \sum_{k<i} t_{ki} q_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m t_{ki} q_i$$

con lo que

$$Q_k = \sum_{i=1}^m t_{ki} \dot{q}_i$$

como se quería demostrar.

Por ejemplo, en el caso de las fuerzas de inercia que aparecen sobre un punto cuando se considera el movimiento de éste respecto a un sistema no inercial, cuyo movimiento venga descrito por la rotación $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración de su origen \mathbf{a}_O , se tiene

$$\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}_O - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

En este caso, como $\boldsymbol{\omega}$ es constante, el último término (la fuerza de Coriolis) puede hacerse derivar del potencial

$$U_1 = -m(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, \mathbf{v})$$



DFAI
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 58 de 105

que también recoge el término con la derivada de la rotación. Los otros de los términos se derivan fácilmente del potencial

$$U_2 = m\mathbf{a}_O \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}m\text{nor}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

con lo que se tiene

$$U_I = -m(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, \mathbf{v}) + m\mathbf{a}_O \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}m\text{nor}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Sin embargo, la componente simétrica, en general, no deriva de un potencial, aunque permite definir una función escalar R de la forma

$$R = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}'\overline{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{q}}$$

de forma que

$$Q_i^S = \frac{\partial R}{\partial q_i}$$

y la formulación de las ecuaciones de Lagrange, una vez incorporado el potencial de las fuerzas giroscópicas es

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$$

En sistemas holónomos esclerónomos, se tiene que

$$\frac{d(T + U)}{dt} = 2R$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 59 de 105

donde si R es definida negativa, corresponde a una disminución continua de la energía mecánica, como corresponde a un sistema viscoso de fuerzas disipativas. La función R se llama *función de disipación de Rayleigh*.



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 60 de 105

11. Función lagrangiana

Si se tiene un sistema en el que se han eliminado todas las ecuaciones de ligadura, es decir, un sistema con un número mínimo de coordenadas, en el que las fuerzas aplicadas derivan de un potencial, entonces las ecuaciones de Lagrange quedan:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = 0$$

llamando *función lagrangiana* L a $T - U$ se tiene la ecuación

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

En el caso de sistemas en los que aún queden ecuaciones de ligadura puede definirse una función lagrangiana en algunas ocasiones. Las ligaduras geométricas pueden incorporarse sin problemas a la función lagrangiana. Las ligaduras cinemáticas necesitan verificar unas condiciones similares a las fuerzas para que permitan la definición de una función lagrangiana, es decir, una función cuyas variables independientes sean un conjunto de funciones



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 61 de 105

del tiempo, sus derivadas y el propio tiempo y sobre la cual, aplicada la ecuación anterior, genere las ecuaciones del movimiento. En lo que sigue se supondrá la existencia de esta función.



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 62 de 105

12. Principios de conservación

Las ecuaciones de Lagrange son ecuaciones diferenciales cuya integración puede presentar una severa dificultad en muchos casos. Por eso es interesante investigar la posibilidad de plantear integrales primeras de las mismas, a la vista del problema, antes de la generación de las ecuaciones de Lagrange. Se parte, como es habitual, de un sistema material dado por un conjunto de coordenadas

$$(q_1, \dots, q_m)$$

un conjunto de ligaduras geométricas

$$f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, g\}$$

un conjunto de ligaduras cinemáticas

$$\sum_{i=1}^n A_{ki}(q_1, \dots, q_m, t) \dot{q}_i + B_k(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, c\}$$

un conjunto de funciones

$$\mathbf{r}(P, q_1, \dots, q_m, t), m(P)$$

que posicionan todos los puntos materiales del sistema a partir de las coordenadas y un sistema de fuerzas aplicadas que pueda descomponerse en un subconjunto que derive de un potencial y otro que no lo haga y cuyas componentes generalizadas son Q_i .



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 63 de 105

Las m ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = \sum_{j=1}^{g+c} \lambda_j \alpha_{ji} \quad \text{para } i \in \{1, \dots, m\}$$

junto con las $g + c$ ecuaciones de ligadura expresan las $m + g + c$ incógnitas $(q_1, \dots, q_m, \lambda_1, \dots, \lambda_{g+c})$, en función de $2n - c = 2m - c - 2g$ constantes determinadas por las correspondientes condiciones iniciales. A continuación se analiza la posibilidad de obtención de una integral primera a partir de peculiaridades analíticas del problema. En el caso en que algunas fuerzas deriven de un potencial generalizado, se puede formar una lagrangiana parcial L que englobe dicho potencial. El resto de fuerzas generalizadas se denota por Q_k .

Una variable q_k es cíclica, si y sólo si

- La lagrangiana parcial L señalada anteriormente no es función explícita de q_k .
- Las ecuaciones de ligadura geométricas no son funciones explícitas de q_k .
- Las ecuaciones de ligadura cinemáticas no son funciones explícitas de \dot{q}_k , aunque sí pueden serlo de q_k .
- La componente generalizada Q_k es nula

Si una variable q_k es cíclica, entonces su momento canónico conjugado

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$



DFAII
M_cFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 64 de 105

es constante.

La dependencia temporal de las expresiones de la lagrangiana y de las ligaduras también propician la obtención inmediata de una integral primera. En efecto, si se parte de la Lagrangiana L de un sistema y se investiga su variación con el tiempo, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^m \left(\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

por lo que

$$\dot{L}_2 - \dot{L}_0 + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \left(Q_i + \sum_{j=1}^{g+c} \lambda_j \alpha_{ji} \right) \dot{q}_i$$

donde L_2, L_1, L_0 son las componentes homogéneas de grados dos, uno y cero de L , de forma análoga a la descomposición de la energía cinética. Si las ecuaciones de ligadura geométrica no dependen del tiempo y las ecuaciones de ligadura cinemática no contienen término independiente, entonces los dos últimos términos desaparecen.

$$\dot{L}_2 - \dot{L}_0 + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{i=1}^m Q_i \dot{q}_i$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 65 de 105

Si además, las fuerzas generalizadas que no se han incluido en la lagrangiana son giroscópicas, entonces

$$\dot{L}_2 - \dot{L}_0 + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

y, por último, si L no depende explícitamente de t , entonces

$$\frac{d(L_2 - L_0)}{dt} = 0 \Rightarrow L_2 - L_0 = \text{cte}$$

Esta variable se conoce como integral de Painlevé, P

$$P = L_2 - L_0$$

y se conserva, según se ha deducido anteriormente, cuando:

- a) la función lagrangiana no depende explícitamente del tiempo
- b) las ligaduras geométricas no dependen explícitamente del tiempo
- c) el término independiente de las ligaduras cinemáticas es nulo
- d) las fuerzas generalizadas no incluidas en la función lagrangiana son giroscópicas

La conservación de la integral de Painlevé es una generalización de las condiciones de conservación de la energía en la mecánica newtoniana.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 66 de 105

13. Principio de Hamilton

En el caso en que exista una función lagrangiana, las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = 0$$

recuerdan a la solución del problema de cálculo de las funciones que hagan estacionaria la integral

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^t L(q_1(\tau), \dots, q_m(\tau), \dot{q}_1(\tau), \dots, \dot{q}_m(\tau), \tau) d\tau$$

para unos valores dados de las coordenadas generalizadas en t_0, t . La integral \mathcal{A} se conoce como *acción* y permite reformular las leyes de la dinámica, en el caso en que exista función lagrangiana, de la siguiente manera:

Principio de Hamilton: la evolución que sigue un sistema material es aquella que hace la acción estacionaria entre dos instantes cualesquiera de dicha evolución

La existencia de una integral de acción permite realizar un tratamiento nuevo de la Mecánica, que será abordado a continuación.



DFAII
M_cFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 67 de 105

14. Ecuaciones de Hamilton

En sistemas lagrangianos holónomos, es decir en aquellos sistemas holónomos posicionados por m coordenadas generalizadas independientes q_1, \dots, q_m en los que el movimiento viene determinado por las m ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

es posible reformular la dinámica de una manera más elegante.

La evolución de un sistema mecánico viene determinada, junto a las ecuaciones de Lagrange, por las condiciones iniciales $q_{10}, \dots, q_{m0}, \dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{m0}$. El conjunto de los posibles valores de las $2m$ -ernas constituye el *espacio de fases*. Estas $2m$ coordenadas evolucionan en el tiempo satisfaciendo las ecuaciones dinámicas correspondiente, trazando una familia de curvas que llenan el espacio de fases sin cortarse unas a otras (congruencia de curvas). En este espacio de fases se pueden utilizar diferentes sistemas de coordenadas. Si se elige el sistema de coordenadas $q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m$ donde

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7)$$

entonces se llega a una formulación de la mecánica mucho más potente (en el sentido que luego se precisará) que la basada en las ecuaciones de Lagrange.



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 68 de 105

Sea la *función hamiltoniana* o *hamiltoniano*

$$H(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m, t) = -L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t) + \sum_{i=1}^m p_i \dot{q}_i \quad (8)$$

donde en el segundo miembro las \dot{q}_j son las funciones de $q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m, t$ obtenidas del sistema 7. A continuación se van a demostrar tres propiedades que relacionan la función lagrangiana con la hamiltoniana

- $\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$ En efecto, si se tiene en cuenta que en la ecuación 8 las \dot{q}_i realmente representan funciones de q_j, p_j, t , se sigue

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k}$$

de donde, teniendo en cuenta la ecuación 7, se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}$$

como se quería demostrar.

- $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ en este caso, partiendo de la definición del hamiltoniano y derivando respecto a p_k teniendo en cuenta que en la ecuación 8 las \dot{q}_i realmente representan funciones de q_j, p_j, t , se puede escribir

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} + \dot{q}_k + \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 69 de 105

e insertando 7 se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = - \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} + \dot{q}_k + \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

que es el resultado buscado.

- $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$ En efecto, si se tiene en cuenta que en la ecuación 8 las \dot{q}_i realmente representan funciones de q_j, p_j, t , se sigue

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t}$$

de donde, teniendo en cuenta la ecuación 7, se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

como se quería demostrar.

Partiendo de las ecuaciones del movimiento se tienen las *ecuaciones de Hamilton*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{array} \right. \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (9)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 70 de 105

que determinan la evolución del sistema en el espacio de fases. Las ecuaciones de Lagrange también definían la trayectoria del sistema en el espacio de fases, pero existen algunas diferencias entre el sistema de ecuaciones de Hamilton y el de ecuaciones de Lagrange:

1. las ecuaciones de Lagrange son m ecuaciones y las de Hamilton son $2m$ ecuaciones.
2. las ecuaciones de Lagrange tienen m incógnitas $q_1(t), \dots, q_m(t)$, en tanto que las ecuaciones de Hamilton tienen $2m$ incógnitas $q_1(t), \dots, q_m(t), p_1(t), \dots, p_m(t)$
3. las ecuaciones de Lagrange son de segundo orden en sus incógnitas, es decir, se necesita conocer dos datos por incógnita para fijar las constantes arbitrarias (posición y velocidad inicial, por ejemplo); las ecuaciones de Hamilton son de primer orden en sus incógnitas, es decir, se necesita conocer un dato por incógnita para fijar las constantes arbitrarias (posición inicial, por ejemplo)

Además, las ecuaciones de Hamilton son tan *sencillas* en su formato que algunos autores las distinguen como más *elegantes* que las de Lagrange. Subyaciendo bajo los aspectos estéticos, puede decirse que la forma de las ecuaciones de Hamilton sugiere que los papeles de posición y momento pueden intercambiarse dejando la forma de las ecuaciones sin variación. De hecho, el conjunto de cambios de variables que pueden realizarse en las ecuaciones de Hamilton sin alterarlas, es decir la variedad de perspectivas desde las que se pueden contemplar y por tanto la cantidad de simetrías que se pueden utilizar es infinitamente más grande que en las ecuaciones de



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 71 de 105

Lagrange y en esto radica su mayor potencia. Realmente el marco hamiltoniano es el más amplio bajo el que se pueden contemplar los sistemas que evolucionan satisfaciendo un principio variacional que en mecánica se identifica con el *principio de Hamilton* obtenido en el epígrafe anterior.

La formulación de Hamilton es más potente que la de Lagrange según el criterio citado en el párrafo anterior y se emplea con preferencia cuando se trata de resolver cuestiones sobre la existencia de integrales primeras de un sistema, periodicidad de trayectorias, comportamientos estables, caóticos, etc; no obstante, para la resolución de problemas elementales de mecánica, donde el objetivo sea la obtención del sistema de ecuaciones diferenciales, aporta frecuentemente un camino más largo que el lagrangiano. En el siguiente ejemplo se muestra la obtención de las ecuaciones del movimiento de un punto material de masa m que se mueve sobre el eje horizontal x de un sistema cartesiano unido al origen mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural nula.

El lagrangiano de este problema es

$$L = T - U$$

la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

el potencial es

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

con lo que

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 72 de 105

el momento canónico p es

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

el hamiltoniano es

$$H = p\frac{p}{m} - \left(\frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} \dot{q}_k &= \frac{p}{m} \\ \dot{p}_k &= -kx \end{cases}$$

o bien, eliminando p

$$m\ddot{x} = -kx$$

ecuación obtenible asimismo utilizando la formulación lagrangiana directamente a partir de la función L hallada anteriormente.

En el formalismo hamiltoniano la existencia de una variable cíclica se traduce en la constancia del momento canónico conjugado. En efecto, a partir de la primera propiedad demostrada en este epígrafe, se tiene

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

y a partir de la segunda ecuación de Hamilton para q_k se deduce

$$\dot{p}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = \text{cte}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 73 de 105

Asímismo, cuando la función lagrangiana no sea función explícita del tiempo, entonces, por la propiedad tercera, el hamiltoniano tampoco lo será, ya que

$$0 = \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

y se deduce la conservación de la integral de Painlevé-Jacobi (como ya se ha visto). Esta integral coincide precisamente con la función hamiltoniana, ya que

$$H = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2L_2 + L_1 - (L_0 + L_1 + L_2) = L_2 - L_0 = P$$

lo que implica que si un hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, entonces se conserva. Además, esta identidad implica que en sistemas holónomos esclerónomos en los que exista función lagrangiana, la función hamiltoniana coincide con la energía. Este resultado también se obtiene directamente

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}$$

teniendo en cuenta las ecuaciones de Hamilton 9, se tiene

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

de donde

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 74 de 105

lo que implica que *si un hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, entonces es una constante del movimiento*. El principio del que se pueden derivar las ecuaciones de Hamilton es la estacionariedad de la integral

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^m p_i \dot{q}_i - H \right) dt$$

En efecto, las ecuaciones de Euler -Lagrange proporcionan

$$\begin{cases} \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \\ \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \end{cases}$$

donde no es necesario considerar la relación 7.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 75 de 105

15. Transformaciones canónicas

La perspectiva hamiltoniana es tan general que permite la máxima multiplicidad en el cambio de coordenadas. Sean (q_i, p_i) las coordenadas en las que el hamiltoniano es H y sean (Q_i, P_i) otras coordenadas en las que el hamiltoniano es K . Si se parte del principio de Hamilton, debe respetarse que las trayectorias que hagan estacionaria la integral

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^m p_i \dot{q}_i - H \right) dt$$

deben hacer estacionaria la integral

$$A' = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^m P_i \dot{Q}_i - K \right) dt$$

lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^m p_i dq_i - H dt = \lambda \left(\sum_{i=1}^m P_i dQ_i - K dt + \frac{dF}{dt} dt \right) \quad (10)$$

las transformaciones que siguen la ecuación 10 se denominan *transformaciones canónicas extensas*. Aquéllas en las que λ , es un factor de escala, es la unidad, reciben el nombre de *transformaciones canónicas propiamente dichas* o, en adelante, *transformaciones canónicas*. F es una función de las coordenadas del espacio fásico y del tiempo. Supóngase que se consideran



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 76 de 105

las transformaciones

$$\begin{cases} p_i &= p_i(q_j, P_j, t) \\ Q_i &= Q_i(q_j, P_j, t) \end{cases}$$

y se parte de la ecuación 10 ligeramente transformada

$$\sum_{i=1}^m p_i dq_i - H dt = - \sum_{i=1}^m Q_i dP_i - K dt + \frac{dF + \sum_{i=1}^m Q_i P_i}{dt} dt \quad (11)$$

Sea $S = F + \sum_{i=1}^m Q_i P_i$ otra función del espacio de fases y el tiempo expresada en función de q_i, P_i, t , es decir, $S = S(q_i, P_i, t)$. Entonces, la ecuación 11 se escribe

$$\sum_{i=1}^m \left(p_i - \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) dq_i - \left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right) dt = - \sum_{i=1}^m \left(Q_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} \right) dP_i - K dt$$

de donde

$$\begin{cases} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ Q_i &= -\frac{\partial S}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial S}{\partial t} \end{cases}$$

es decir, cualquier transformación canónica tiene una S y ésta define la transformación. La función S se conoce como *generadora* de la transformación. En este punto, puede preguntarse sobre la transformación de coordenadas S que haga nulo el nuevo hamiltoniano, es decir,

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 77 de 105

o bien

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

ecuación que recibe el nombre de *ecuación de Hamilton-Jacobi*. Si se encuentra una solución $S(q_i, P_i, t)$ donde P_i sean m constantes, entonces

$$\begin{cases} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} = f(q_i, P_{i0}, t) \\ Q_{i0} &= -\frac{\partial S}{\partial P_i} = g(q_i, P_{i0}, t) \end{cases}$$

el segundo conjunto de m ecuaciones permite despejar las m q_i en función del tiempo y de las $2m$ constantes Q_i, P_i (su hamiltoniano es nulo). EL primer conjunto de ecuaciones determina los momentos en función del tiempo y las $2m$ constantes.

Por lo tanto, una solución particular en función de m constantes independientes (sin considerar la constante aditiva que siempre se puede introducir) de la ecuación de Hamilton-Jacobi (lo que se conoce como una solución completa de la misma), determina la solución general de las ecuaciones de Hamilton. La función S recibe el nombre de *función principal de Hamilton*.

Por ejemplo, para un sistema formado por un punto material libre obligado a moverse sobre un eje vertical en un campo gravitatorio, se tiene

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 78 de 105

la ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + mgz + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

como H, K son constantes, entonces

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

y queda

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = E - mgz$$

con lo que

$$\frac{\partial S}{\partial z} = m\sqrt{2g}\sqrt{\left(\frac{E}{mg} - z\right)}$$

integrando

$$S = -\frac{2}{3}m\sqrt{2g}\left(\frac{E}{mg} - z\right)^{3/2} - Et$$

con lo que, si A es una consante arbitraria,

$$A = -\sqrt{2/g}\sqrt{\frac{E}{mg} - z} - t$$

con lo que

$$z = C + Dt - t^2g/2$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 79 de 105

como debía suceder.

La función S tiene un significado especial. Si se recuerda la expresión de la integral de acción

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^m p_i \dot{q}_i - H \right) dt$$

y se estudia su variación al cambiar las coordenadas del punto de llegada y su tiempo, se tiene

$$dA = \left(\sum_{i=1}^m p_i \dot{q}_i - H \right) dt$$

de forma que $p_i = \frac{\partial A}{\partial q_i}$, con lo que

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -H(q_i, \frac{\partial A}{\partial q_i}, t)$$

es decir, A satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi. De hecho, cualquier solución completa de esta ecuación representa la acción correspondiente a cada punto desde una superficie origen determinada.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 80 de 105

16. Ecuaciones de eikonal y de Schroedinger

La ecuación de ondas para longitud $\lambda = 2\pi/k$ es

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -k^2 U$$

determina la propagación ondulatoria del escalar U . Si se efectúa el cambio

$$U = A \exp(i\varphi)$$

se tiene entonces el par de ecuaciones

$$\frac{1}{A} \nabla^2 A - (\nabla \varphi)^2 = -k^2$$

$$\frac{2}{A} \nabla A \cdot \nabla \varphi + \nabla^2 \varphi = 0$$

la primera de ellas, en las zonas en que la función A varía poco en una longitud de onda, se traduce en la ecuación *eikonal*⁶

$$(\nabla \varphi)^2 = k^2$$

que rige la distribución espacial fase de la onda cuando se satisfacen las condiciones de la óptica geométrica (λ es muy pequeña en comparación con las dimensiones típicas del problema, como las longitudes de variabilidad de k , dimensiones de los objetos, etc). Esta ecuación representa la propagación

⁶del griego *εικων* imagen, retrato



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 81 de 105

de un campo con una velocidad k constante en el sentido que asigna a cada punto, la longitud desde una superficie arbitraria, multiplicada por k . Refleja la imagen de Huyghens del comportamiento de un frente de ondas esféricas en el que cada punto se convierte asimismo en el centro de una nueva onda, determinando una forma de propagación en la que el tiempo necesario para alcanzar un punto desde una superficie inicial es φ/ω .

La forma que tiene la ecuación eikonal

$$(\nabla\varphi)^2 = k^2$$

y la de Hamilton-Jacobi, para un punto material en un campo potencial cuando se usan coordenadas cartesianas en un sistema de energía E es

$$(\nabla S)^2 = 2m(E - U)$$

lo que evoca la similitud de las ecuaciones de la mecánica y la óptica, como fue puesto de manifiesto por Hamilton. Si la similitud entre las ecuaciones entre la mecánica del sólido y la óptica es válida para longitudes de onda pequeñas sin más que cambiar k^2 por $\frac{8\pi^2m(E-U)}{h}$ y la ecuación ondulatoria rige el comportamiento de la óptica cuando se desea mayor precisión, es lógico pensar que la ecuación de ondas puede regir también la evolución más fina de sistemas mecánicos que evolucionen en espacios reducidos. Esta reflexión llevó al físico austriaco Erwin Schroedinger a proponer la ecuación ondulatoria de la mecánica

$$\nabla^2\Psi = -\frac{8\pi^2m(E - U)}{h^2}\Psi$$



DFAI
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 82 de 105

donde se ha utilizado la relación propuesta por De Broglie $\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} = p/h = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{h}$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 83 de 105

17. Corchetes de Poisson

Si se considera el espacio de $2m + 1$ dimensiones consistente en el espacio de fases ampliado con la dimensión temporal, la forma lineal

$$\omega = p_i dq_i - H dt \quad (13)$$

no es un invariante canónico, a la vista de la ecuación 10. Sin embargo, su derivada exterior sí lo es, considerando las transformaciones en las que $\lambda = 1$. En efecto, por el lema de Poincaré, $ddF = 0$. La restricción de $d\omega$ al espacio de fases $2m$ dimensional también será un invariante, con lo que la forma

$$\sum_{i=1}^m dq_i \wedge dp_i$$

es un invariante canónico y define una estructura *simpléctica* en el espacio de fases. Esta forma, según se ha visto en el apéndice B, asigna a cada tangente del espacio de fases una forma lineal y a la inversa, asigna a cada forma lineal, un vector tangente. Esto implica que se define una operación que a cada dos formas lineales le asigna un escalar. Esta operación, que es, como se ha dicho, un invariante canónico, puede aplicarse a cualquier función (a sus gradientes) del espacio de fases y del tiempo. Esta operación bilineal se conoce como *corchetes de Poisson* y se denota $[f, g]$. Se evalúa, obviamente, mediante la siguiente fórmula

$$[f, g] = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 84 de 105

Es importante reivindicar el carácter intrínseco de esta operación, para lo que se presentará un símil con otra operación bien conocida. En un espacio vectorial euclídeo en el que se realice un estudio geométrico, la formulación de teoremas, leyes, etc utilizando coordenadas cartesianas en una referencia determinada exige la comprobación rigurosa de la invarianza frente a cambios de referencia; sin embargo, si se formulan utilizando operaciones intrínsecas como el producto escalar, esta comprobación no es necesaria, además de simplificar las expresiones dado que el lenguaje utilizado es más próximo a las características *intrínsecas* del sistema. Pues bien, Dado el carácter intrínseco del corchete de Poisson entre funciones del espacio de fases, las leyes formuladas utilizándolo, gozarán de validez en cualquier sistema canónico de coordenadas.

Por ejemplo, dada una función del espacio de fases $F = F(q_i, p_i, t)$ y del tiempo, las ecuaciones de Hamilton [9](#) permiten calcular su derivada temporal a lo largo de una trayectoria cualquiera que satisfaga dichas ecuaciones

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

es decir

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] \quad (14)$$



DFAII
M_ccFunN_t

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 85 de 105

La mecánica cuántica, que contiene a la mecánica clásica como límite cuando $\hbar \rightarrow 0$, se formula con leyes que son transcribibles a la formulación hamiltoniana con corchetes de Poisson. La ecuación que rige la evolución de los estados mecánica cuántica es

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle$$

y para un observable F , definido por un operador hermítico, se tiene, por definición

$$\frac{dF}{dt} = D$$

si y sólo si para todo par de estados $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle$

$$\frac{d\langle\Phi|F|\Psi\rangle}{dt} = \langle\Phi|D|\Psi\rangle$$

de modo que

$$\frac{d\langle\Phi|F|\Psi\rangle}{dt} = \langle\frac{d\Phi}{dt}|F|\Psi\rangle + \langle\Phi|\frac{\partial F}{\partial t}|\Psi\rangle + \langle\Phi|F|\frac{d\Psi}{dt}\rangle$$

con lo que

$$\frac{d\langle\Phi|F|\Psi\rangle}{dt} = -\left(i\hbar\right)^{-1} \langle\Psi|HF|\Psi\rangle + \langle\Phi|\frac{\partial F}{\partial t}|\Psi\rangle + \left(i\hbar\right)^{-1} \langle\Phi|FH|\Psi\rangle$$

y se puede escribir

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 86 de 105

que recuerda a la ecuación 14. En efecto, se puede enunciar el principio de correspondencia entre el anticonmutador de los operadores cuánticos A, B y el corchete de Poisson de sus contrapartidas clásicas a, b

$$[A, B] \Rightarrow i \frac{h}{2\pi} [a, b]$$

Por ejemplo, $[Q, P] = ih/(2\pi)$ representa la imposibilidad de conocer simultáneamente la posición y velocidad de un punto *principio de indeterminación de Heisenberg*, que, si $h = 0$, desaparece. De hecho, toda la mecánica clásica formulada con los corchetes de Poisson puede formularse a partir de la cuántica , con la correspondencia citada y haciendo $h \rightarrow 0$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 87 de 105

18. Simetrías

Un grupo especial de transformaciones canónicas lo constituyen las transformaciones canónicas infinitesimales. Sea S_α la función generatriz de una familia de parámetro α de transformaciones canónicas. Para el valor α se pasa de las coordenadas Q_i, P_i a las coordenadas q_i, p_i y para el valor $\alpha + \Delta\alpha$ a $q_i + \Delta q_i, p_i + \Delta p_i$. Considerando que $\Delta\alpha$ es infinitesimal, se tiene

$$\sum_{i=1}^m P_i dQ_i - p_i dq_i = dS(q_i, Q_i, \alpha, t)$$

$$\sum_{i=1}^m P_i dQ_i - (p_i + \Delta p_i) d(q_i + \Delta q_i) = dS(q_i + \Delta q_i, Q_i, \alpha + \Delta\alpha, t)$$

$$S(q_i + \Delta q_i, Q_i, \alpha + \Delta\alpha, t) = S(q_i, Q_i, \alpha, t) + \sum_{i=1}^m p_i \Delta q_i + \frac{\partial S}{\partial \alpha} \Delta\alpha$$

restando queda

$$\sum_{i=1}^m \Delta p_i dq_i - \Delta q_i dp_i = d \frac{\partial S}{\partial \alpha} \Delta\alpha$$

expresando $G = -\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ en función de q_i, p_i, α, t , se tiene

$$\Delta q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i} \Delta\alpha$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 88 de 105

$$\Delta p_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i} \Delta \alpha$$

Sea $F = F(q_i, p_i, t)$ una función a la que se desea aplicar la transformación canónica elemental G . Se tiene entonces

$$\Delta F = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \Delta p_i$$

$$\Delta F = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) d\alpha$$

$$\Delta F = [F, G] d\alpha$$

expresión canónica que representa una transformación infinitesimal aplicada a cualquier función del espacio de fases.

Dada una transformación infinitesimal definida por la función generatriz $G(q_i, p_i)$ ésta determina un conjunto de transformaciones con estructura de grupo. La función $G(q_i, p_i)$ es la generatriz del grupo. Un sistema hamiltoniano es simétrico respecto a un grupo G cuando su hamiltoniano es insensible a las transformaciones del grupo. Por ejemplo, en un sistema formado por un electrón que se mueve en un campo eléctrico constante, el hamiltoniano es invariante frente al grupo de translaciones perpendiculares a la dirección del campo y por lo tanto este sistema es simétrico respecto a dicho grupo.

Si un sistema presenta simetría frente al grupo de transformaciones $G(q_i, p_i)$ entonces la función generatriz es una constante del movimiento.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 89 de 105

En efecto, por hipótesis, para una transformación infinitesimal se tiene

$$\Delta H = 0$$

por lo que

$$[G, H] = 0$$

lo que implica que

$$\frac{dG}{dt} = 0$$

La búsqueda de constantes del movimiento es equivalente a la búsqueda de simetrías de un sistema mecánico. Las más importantes son las de translación y rotación. Las translaciones forman un grupo de simetrías formado por tres grupos más simples (las translaciones según tres direcciones no coplanarias del espacio). Cada una de ellas viene representada por las funciones

- eje x : p_x
- eje y : p_y
- eje z : p_z

La simetría de un sistema frente a translaciones según una dirección x origina la conservación del momento p_x . La simetría frente a una translación cualquiera determina la conservación de las tres cantidades p_x, p_y, p_z , es decir, lo que en mecánica newtoniana constituye la cantidad de movimiento.

Igualmente, las rotaciones están representadas por tres grupos elementales



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 90 de 105

- eje x : $y p_z - z p_y$
- eje y : $z p_x - x p_z$
- eje z : $x p_y - y p_x$

La simetría de un sistema frente a rotaciones en torno a un punto eje z determina la conservación de $x p_y - y p_x$ que en mecánica newtoniana equivale al momento cinético áxico. Si la simetría es respecto a cualquier rotación en torno al origen de coordenadas, se deduce la conservación de las cantidades

- $y p_z - z p_y$
- $z p_x - x p_z$
- $x p_y - y p_x$

es decir, lo que en mecánica newtoniana representa el momento cinético. Es inmediato comprobar que el corchete de Poisson es antisimétrico y que

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (15)$$

es decir

$$[f, [g, h]] = [[f, g], h] - [[f, h], g]$$

lo que nos dice que el corchete de Poisson representa el anticonmutador de las transformaciones infinitesimales representadas por sus funciones generadoras correspondientes. La ecuación 15 se conoce como *identidad de Jacobi*. Existen numerosas operaciones binarias antisimétricas que verifican



DFAll
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 91 de 105

la identidad de Jacobi, tales como los anticonmutadores, el producto vectorial, etc. Estas operaciones definen estructuras conocidas como Álgebras de Lie, importantes en los modelos abstractos de la mecánica.

De esta forma, se sigue que la búsqueda de simetrías es una herramienta fundamental en la resolución de los problemas de dinámica de sistemas hamiltonianos. En este punto, la mecánica clásica y la cuántica transcurren por caminos formalmente idénticos, siendo transvasables los resultados de una a la otra.

De hecho, en la mecánica cuántica un operador F que represente un observable realiza una transformación elemental en las funciones de onda

$$d|\Psi\rangle = (i\frac{h}{2\pi})^{-1}F|\Psi\rangle d\alpha$$

que lleva aparejado un cambio en un observable cualquiera G que viene dado por

$$dG = (i\frac{h}{2\pi})^{-1}[G, F]d\alpha$$

Si la transformación equivalente en mecánica clásica viene dada por la función f , entonces, para una función g cualquiera del espacio de fases, se tiene

$$dg = [g, f]d\alpha$$

Si se toman G, F como dos transformaciones, entonces $(i\frac{h}{2\pi})^{-1}[G, F]$ representa su anticonmutador, es decir, el resultado, en el límite, de la diferencia entre las transformaciones compuestas en un orden y el inverso. Este anticonmutador es otra transformación. Algunas transformaciones en



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 92 de 105

mecánica cuántica tienen su análogo en la mecánica clásica (traslaciones, rotaciones sin espín, etc). Si establecemos una relación entre las funciones clásicas y los observables cuánticos consistente en representar la misma transformación, entonces necesariamente se tiene que si F, G corresponden a las funciones clásicas f, g , entonces $(i\frac{h}{2\pi})^{-1}[F, G]$ corresponde a $[f, g]$, por motivos puramente geométricos ya que son los anticonmutadores de las transformaciones respectivas. Por ejemplo, la relación

$$p_y = [p_x, \ell_z]$$

donde $\ell_z = xp_y - yp_z$ representa una rotación elemental en torno al eje z significa que una traslación elemental paralela al eje x , seguida de una rotación elemental alrededor del eje z , una traslación elemental opuesta a la primera (según el nuevo eje x) y una rotación opuesta a la anterior, resulta en una traslación elemental según el eje y , que es lo que representa p_y . Obviamente, esta relación geométrica debe preservarse en el formalismo cuántico, de modo que

$$i\frac{h}{2\pi}P_y = [P_x, L_z]$$

Por esta razón, la correspondencia entre observables cuánticos y funciones clásicas lleva, de manera intrínseca (geoméricamente hablando), a la relación entre anticonmutadores y corchetes de Poisson⁷.

Los corchetes de Poisson de las coordenadas canónicas (las transformaciones dadas por sus anticonmutaciones)

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \quad , \quad [q_i, q_j] = 0 \quad , \quad [p_i, p_j] = 0$$

⁷Esta correspondencia se matiza con algunas ideas de mecánica cuántica que en este texto, por razones obvias, no se han presentado.



DFAII
M_cFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 93 de 105

originan bien la transformación anulante o bien la identidad. Esta misma transformación ha de resultar de la anticonmutación de las correspondientes transformaciones canónicas.

$$[Q_i, P_j] = \delta_{ij} i \frac{h}{2\pi} \quad , \quad [Q_i, Q_j] = 0 \quad , \quad [P_i, P_j] = 0$$

Existe una formulación canónica de la mecánica cuántica, que partiendo de las relaciones de anticonmutación anteriores, su bilinealidad, antisimetría y la identidad de Jacobi [15](#), se desarrolla hasta la formulación dinámica de sus problemas. Esta formulación, no obstante, se escapa del ámbito de este trabajo.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página **94** de **105**

19. Posiciones de equilibrio de un sistema material

Según lo desarrollado en los epígrafes anteriores, consideramos un sistema material posicionado por m coordenadas $\{q_1, \dots, q_m\}$ sujetas a g ligaduras geométricas

$$f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, g\}$$

y c ecuaciones de ligaduras cinemáticas

$$\sum_{i=1}^m A_{ki} \dot{q}_i + B_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, c\}$$

cuya evolución en el tiempo viene determinada por la solución de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = \sum_{j=1}^{g+c} \lambda_j \alpha_{ji} \quad \text{para } i \in \{1, \dots, m\}$$

y las de ligadura. Una posición $\{q_{10}, \dots, q_{m0}\}$ es un *punto de equilibrio* del sistema si las funciones $q_1(t) = q_{10}, \dots, q_m(t) = q_{m0}$ son una solución del sistema. Es decir, si inicialmente el sistema se encuentra en la posición de equilibrio, la mantiene indefinidamente. Obviamente, para que tenga lugar el equilibrio, las velocidades generalizadas han de ser siempre nulas y, por tanto, lo deben ser en el instante inicial. Nótese que esta definición de equilibrio depende de la elección de coordenadas que se haya realizado



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 95 de 105

para posicionar el sistema. Lo único que requiere es que las coordenadas se mantengan constantes, lo que permite estudiar situaciones de equilibrio relativo en sentido amplio.

Para encontrar las posiciones de equilibrio se suponen $\dot{q}_i = 0; \ddot{q}_i = 0$. Con lo que las ecuaciones anteriores quedan

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_j(q_1, \dots, q_m, t) = 0 & \forall j \in \{1, \dots, g\} \\ B_k = 0 & \forall k \in \{1, \dots, c\} \\ \frac{\partial T_{1i}}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} - Q_i(q_j, 0, t) - \sum_{j=1}^{g+c} \lambda_j \alpha_{ji} = 0 & \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right.$$

que son $m + g + c$ ecuaciones para las $m + g + c$ incógnitas q_i, λ_j .

Es muy habitual el caso en que se tiene un sistema material \mathcal{S} del que se precisa estudiar el equilibrio respecto a un sistema de referencia κ siendo el sistema material holónomo y esclerónomo respecto a κ y no dependiendo las fuerzas del tiempo. En este caso, las ecuaciones de equilibrio se reducen a

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_j(q_1, \dots, q_m) = 0 & \forall j \in \{1, \dots, g\} \\ -Q_i(q_j) + \sum_{j=1}^{g+c} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0 & \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right.$$

o lo que es equivalente

$$\sum Q_i \delta q_i = 0$$

para cualquier desplazamiento virtual compatible con las ligaduras. Este resultado se conoce como *principio de los trabajos virtuales en estática*.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 96 de 105

20. Algunos elementos mecánicos

En términos generales, puede decirse que un motor es un dispositivo capaz de proporcionar energía a un sistema mecánico. El origen de esta energía puede ser diverso: eléctrico (motores de corriente alterna o continua), químico (motores de explosión y turbomáquinas), mecánico (molinos), etc. Generalmente la energía se suministra sobre un sólido rígido con eje fijo (motores rotatorios) o sobre un sólido que puede desplazarse sobre una trayectoria rectilínea (motores de émbolo o pistón).

En el primer caso, se tienen dos sistemas rígidos llamados estátor y rotor. El rotor puede girar respecto al estátor en torno a un eje (eje del motor) fijo respecto a ambos. Del sistema de fuerzas intercambiado entre estátor y rotor, sólo la componente axial del momento produce trabajo virtual. Este par, llamado par motor actúa con sentidos opuestos sobre rotor y estátor, aunque se retiene la denominación de par motor al que actúa sobre el rotor. La potencia que realiza es el producto del momento por la rotación del rotor respecto al estátor.

$$P = M\omega_{r/e}$$

y el trabajo virtual es, pues

$$\delta\mathcal{T} = M\delta\varphi$$

donde φ representa el ángulo girado por el rotor respecto al estátor.

En el caso de los motores de émbolo, la única componente del sistema de fuerzas que intercambian el cilindro y el pistón que da trabajo virtual



DFAII
M_cFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 97 de 105

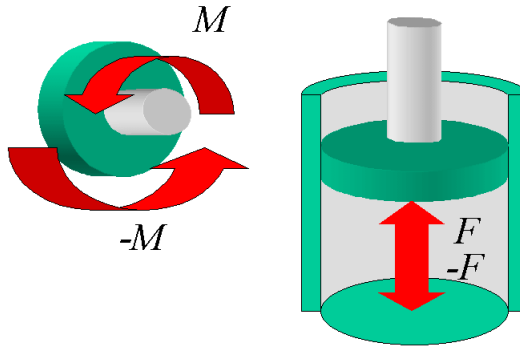
es la fuerza axial. La potencia producida es el producto de esta fuerza por la velocidad axial del émbolo respecto al cilindro.

$$P = Fv_{e/c}$$

y el trabajo virtual es pues

$$\delta\mathcal{T} = F\delta\xi$$

donde ξ representa el desplazamiento del émbolo respecto al cilindro.



A continuación se presentan las características mecánicas más elementales de algunos tipos de motores.

1. Motores síncronos

Este tipo de motores corresponde al tipo rotativo. Son alimentados por una corriente alterna n -fásica y el estátor se bobina formando



DFAII
 $M_e c F u n N_e t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 98 de 105



DFAII
M_εcFunN_εt

p polos. Su velocidad síncrona de rotación es $\Omega = np\omega$, donde ω es la pulsación de la corriente alterna de alimentación. Se caracteriza porque el par motor es directamente proporcional al ángulo que forme el eje magnético del rotor con el vector campo rotatorio, que gira con velocidad Ω . Es decir, si φ es el ángulo que posiciona el rotor respecto al estator, el par motor que recibe el rotor es

$$M = K(\Omega t - (\varphi - \varphi_0))$$

y la potencia motora

$$P = K(\Omega t - (\varphi - \varphi_0))\dot{\varphi}$$

Estos motores se utilizan siempre para una régimen de giro del rotor respecto al estator de velocidad media Ω y variaciones en torno a la misma que no lleguen a permitir un retraso significativo entre el campo magnético y el rotor.

2. Motores asíncronos

Este segundo tipo de motores eléctricos rotatorios es el de motores asíncronos o de jaula de ardilla. El estator se devana en n polos y se alimenta con una corriente n -fásica de pulsación ω . El campo creado en el interior del motor gira respecto al estator a una velocidad $\Omega = np\omega$. El rotor presenta un circuito sobre el que circula una corriente debido a la inducción del campo magnético. Si φ es el ángulo que posiciona el rotor respecto al estator, el par motor que recibe el rotor es

$$M = K(\Omega - \dot{\varphi})$$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 99 de 105

y la potencia motora

$$P = K(\Omega t - \dot{\varphi})\dot{\varphi}$$

Estos motores se utilizan siempre para una régimen de giro del rotor respecto al estator de velocidad próxima a Ω .

3. Motores de corriente continua

Los motores de corriente continua se alimentan con tensión U y funcionan proporcionando el par necesario para que la velocidad de giro del rotor respecto al estator sea igual a un factor constante por la tensión aplicada. Es decir

$$\dot{\varphi} = kU$$

aunque existe un valor máximo del par M_M que no se puede superar, de forma que si la velocidad de rotación es menor que kU , el par motor es M_M .

4. Motores neumáticos e hidráulicos lineales

En este caso, se tienen pistones que pueden efectuar un recorrido rectilíneo impulsados por la liberación a un lado del pistón de un gas o un líquido a presión. La fuerza ejercida sobre el pistón suele considerarse constante e igual al producto de la diferencia de presiones a ambos lados multiplicada por el área de dicho pistón.

La potencia suministrada es

$$P = F\dot{\ell}$$

donde ℓ representa el desplazamiento del émbolo o piistón respecto al recipiente.



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

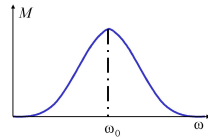
Cerrar

Salir

Página 100 de 105

5. Motores de explosión

Aunque el par y la potencia desarrollados por estos motores distan de ser constantes en cada ciclo de funcionamiento de los mismos, se suelen considerar los valores medios obtenidos tras considerar un número elevado de vueltas. Se definen las curvas de par $M = M(\dot{\varphi})$, que suelen tener forma acampanada en torno a un valor de par máximo, obtenido para un régimen determinado.



6. Turbinas

En este tipo de máquinas la diferencia de presiones de un gas (turbinas de gas) o de un líquido (turbinas hidráulicas) a los dos lados de los álabes de una turbina hacen que ésta gire. La curva de par motor suele presentar una forma acampanada en torno a un valor central de par motor máximo, como en el caso anterior.

7. Reactores

Este tipo de motores obtiene su energía a partir de la reacción entre un combustible y el oxígeno del aire cuya expansión, al incidir sobre una parte del motor lo impulsa en una dirección determinada. El gas, a su vez, recibe una impulso de sentido contrario que hace que sea expulsado del motor.



DFAII
 $M_e c F u n N_e t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 101 de 105

Mediante mecanismos de transmisión y sistemas de ligadura adecuados, se puede adaptar la acción de un motor a las características que se deseen del mismo. Se puede, por ejemplo, multiplicar el par reduciendo la velocidad de giro (multiplicadores de par). También se puede cambiar la dirección en la que se ejerce un par (junta Cardan) o una fuerza e incluso distribuir esas acciones entre dos ejes (diferenciales). Sin embargo, si estos sistemas no presentan la posibilidad de absorber o disipar energía significativamente, no alterarán las ecuaciones del trabajo.

En algunos sistemas mecánicos en los que existe un motor se conoce la expresión del par, la presión, el empuje lineal, etc, en función de parámetros geométricos y sus derivadas. Esta situación es la que puede describirse aquélla en la que se conocen las fuerzas generalizadas en función de la posición y la velocidad generalizada del sistema. En el tratamiento analítico se comportan como el resto del sistema de fuerzas aplicadas.

En otros casos se conoce la ley temporal que mediante un motor se impone al conjunto de coordenadas y velocidades generalizadas. En este caso, el motor impone una ligadura geométrica o cinemática al problema. Entonces, la acción del motor se comporta como el resto de las acciones de ligadura.

Otro tipo de sistemas mecánicos muy frecuente lo constituyen los convertidores de par. Suelen ser sistemas cuya masa se desprecia y en los que mediante dispositivos cinemáticos como trenes epicicloidales o sistemas de engranajes, se multiplica o divide una velocidad de rotación. Aplicando el principio de los trabajos virtuales a estos sistemas de masa despreciable se obtiene una división o multiplicación del par que es el inverso del realizado en las velocidades. Por ejemplo, si en la caja epicicloidal de la figura se



DFAII
 $M_c \text{Fun} N_t$

Título

Contenido



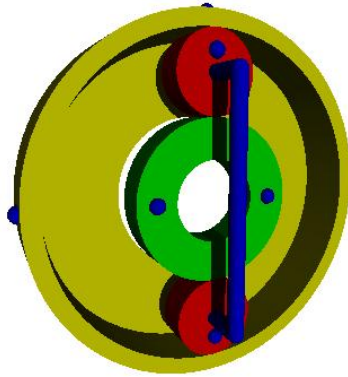
Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 102 de 105

inmoviliza la corona, se tiene la relación entre las velocidades de giro del portasatélites y del planetario (si el radio de la corona es igual al diámetro del planetario)



$$\omega_p = 3\omega_{ps}$$

con lo que los ángulos girados verifican

$$\dot{\alpha}_p - 3\dot{\alpha}_{ps} = 0$$

las ecuaciones de Lagrange, suponiendo despreciable la masa de los elementos de la caja resultan en

$$\begin{cases} 0 &= M_p + \lambda \\ 0 &= M_{ps} - 3\lambda \end{cases}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

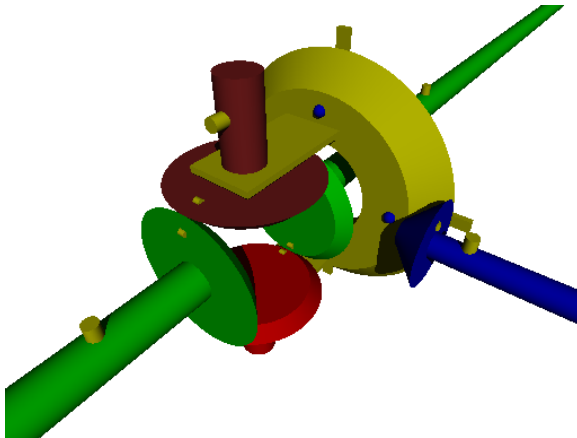
Salir

Página 103 de 105

es decir,

$$M_{ps} = -3M_p$$

En los distribuidores de par, se distribuye un par entre dos o más ejes y se realiza mediante diferenciales cónicos o epicicloidales. Son sistemas formados por varios ejes cuyas rotaciones están ligadas mediante relaciones lineales (ligaduras cinemáticas). Asumiendo una masa despreciable, su funcionamiento está regido por las ecuaciones de la estática que permiten determinar un conjunto de relaciones entre los momentos respectivos. Por ejemplo, en el diferencial de la figura, los giros de la corona y de los dos planetarios están relacionados por la ecuación



$$2\omega_c - \omega_1 - \omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\dot{\alpha} - \dot{\beta} - \dot{\gamma} = 0$$

con lo que las ecuaciones de Lagrange, suponiendo despreciable la inercia



DFAIL
M_cFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 104 de 105

de los elementos del diferencial dan

$$\begin{cases} 0 &= M_1 + 2\lambda \\ 0 &= M_2 - \lambda \\ 0 &= M_1 - \lambda \end{cases}$$

lo que proporciona

$$M_2 = M_3 = -\frac{M_1}{2}$$

es decir, un reparto igualitario del par duplicado a la corona entre los planetarios.

Otros dispositivos comunes lo constituyen los amortiguadores viscosos en los que se desarrolla siempre una fuerza generalizada proporcional y de sentido contrario a la velocidad generalizada correspondiente.

Por último es frecuente introducir sistemas en los que se establece una fuerza como una función de las coordenadas de posición y de velocidad, pero que no suelen considerarse motores, porque su trabajo virtual en un ciclo es nulo. Estas fuerzas incluyen las fuerzas elásticas, electromagnéticas o gravitatorias.



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 105 de 105