

*Apuntes de un curso de*

# MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.  
José Rogan C.



# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Espacio de funciones</b>                                 | <b>1</b>  |
| 1.1. Definiciones . . . . .                                    | 1         |
| 1.2. Sucesiones de funciones . . . . .                         | 3         |
| 1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt . . . . .    | 9         |
| 1.4. Coeficientes de Fourier . . . . .                         | 10        |
| 1.5. Integrales impropias (valor principal) . . . . .          | 14        |
| 1.6. Convergencia según Cesàro . . . . .                       | 15        |
| <b>2. Series de Fourier</b>                                    | <b>19</b> |
| <b>3. Transformada de Fourier</b>                              | <b>35</b> |
| 3.1. Definiciones . . . . .                                    | 35        |
| 3.2. Ejemplos . . . . .  | 36        |
| 3.3. Propiedades . . . . .                                     | 41        |
| 3.4. Aplicaciones . . . . .                                    | 43        |
| <b>4. Convolución</b>  | <b>45</b> |
| 4.1. Espacio $\mathcal{S}$ . . . . .                           | 45        |
| 4.2. Producto de convolución . . . . .                         | 46        |
| 4.3. El espacio $\mathcal{S}$ como anillo . . . . .            | 49        |
| <b>5. Distribuciones temperadas</b>                            | <b>53</b> |
| 5.1. Definiciones . . . . .                                    | 53        |
| 5.2. Sucesión de distribuciones . . . . .                      | 61        |
| 5.3. Producto de distribuciones . . . . .                      | 71        |
| 5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales . . . . .       | 72        |
| 5.5. Convergencia débil . . . . .                              | 73        |
| <b>6. Distribuciones y transformada de Fourier</b>             | <b>79</b> |
| <b>7. Convolución de distribuciones</b>                        | <b>87</b> |
| 7.1. Definiciones . . . . .                                    | 87        |
| 7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones . . . . . | 89        |
| 7.3. Uso de convolución en Física . . . . .                    | 91        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>8. La función Gamma</b>  | <b>93</b>  |
| 8.1. La función factorial . . . . .   | 93         |
| 8.2. La función Gamma . . . . .   | 94         |
| 8.3. Función Beta . . . . .   | 96         |
| 8.4. Notación doble factorial . . . . .                                       | 99         |
| 8.5. Fórmula de Stirling . . . . .  | 99         |
| 8.6. Otras funciones relacionadas . . . . .                                   | 101        |
| <b>9. Transformada de Laplace</b>   | <b>103</b> |
| 9.1. Definición . . . . .   | 103        |
| 9.2. Inversión de la transformada de Laplace . . . . .                        | 105        |
| 9.3. Propiedades de la transformada de Laplace . . . . .                      | 109        |
| 9.4. Lista de transformadas de Laplace . . . . .                              | 111        |
| <b>10. Aplicaciones de la transformada de Laplace</b>                         | <b>113</b> |
| 10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes . . . . . | 114        |
| 10.2. Ecuaciones integrales . . . . .   | 116        |
| 10.3. Ecuaciones en derivadas parciales . . . . .                             | 118        |
| 10.4. Sistema de ecuaciones lineales . . . . .                                | 120        |
| <b>11. Polinomios ortogonales</b>   | <b>123</b> |
| 11.1. Definiciones . . . . .  | 123        |
| 11.2. Teoremas . . . . .  | 123        |
| 11.3. Relación de recurrencia . . . . .                                       | 125        |
| <b>12. Polinomios de Hermite</b>  | <b>127</b> |
| 12.1. Definición . . . . .  | 127        |
| 12.2. Función generatriz . . . . .  | 127        |
| 12.3. Ortogonalidad . . . . .   | 130        |
| 12.4. Algunos resultados interesantes . . . . .                               | 131        |
| 12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite . . . . .                  | 131        |
| <b>13. Polinomios de Laguerre</b>   | <b>133</b> |
| 13.1. Definición . . . . .  | 133        |
| 13.2. Función generatriz . . . . .  | 133        |
| 13.3. Relaciones de recurrencia . . . . .                                     | 135        |
| 13.4. Ecuación de Laguerre . . . . .  | 135        |
| 13.5. Ortogonalidad . . . . .   | 136        |
| 13.6. Polinomios asociados de Laguerre . . . . .                              | 138        |
| <b>14. El problema de Sturm-Liouville</b>                                     | <b>139</b> |
| 14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos . . . . .                         | 139        |
| 14.2. Operadores autohermíticos . . . . .                                     | 141        |
| 14.3. Problema de autovalores . . . . .                                       | 141        |
| 14.4. Ejemplos de funciones ortogonales . . . . .                             | 143        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>15.Ecuaciones diferenciales con singularidades</b>               | <b>145</b> |
| 15.1. Puntos singulares . . . . .                                   | 145        |
| 15.2. Solución por serie: método de Frobenius . . . . .             | 146        |
| 15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs . . . . .           | 149        |
| 15.4. Una segunda solución . . . . .                                | 151        |
| <b>16.Ecuaciones diferenciales del tipo...</b>                      | <b>155</b> |
| 16.1. Soluciones en puntos regulares . . . . .                      | 155        |
| 16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares . . . . .      | 159        |
| 16.3. Singularidades en infinito . . . . .                          | 167        |
| 16.4. Ejemplos . . . . .  | 168        |
| 16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas . . . . . | 171        |
| <b>17.Funciones hipergeométricas</b>                                | <b>177</b> |
| 17.1. La ecuación hipergeométrica general . . . . .                 | 177        |
| 17.2. Ecuación indicial . . . . .                                   | 178        |
| 17.3. Ecuación diferencial de Gauss . . . . .                       | 179        |
| 17.4. La serie hipergeométrica . . . . .                            | 181        |
| 17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente . . . . .                | 183        |
| <b>18.Polinomios de Legendre</b>                                    | <b>183</b> |
| 18.1. Función generatriz . . . . .                                  | 183        |
| 18.2. Relaciones de recurrencia . . . . .                           | 185        |
| 18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$ . . . . .                 | 186        |
| 18.4. Fórmula de Rodrigues . . . . .                                | 187        |
| 18.5. Ecuación diferencial de Legendre . . . . .                    | 188        |
| 18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$ . . . . .                           | 188        |
| 18.7. Relación de ortogonalidad . . . . .                           | 189        |
| 18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$ . . . . .                | 190        |
| 18.9. Serie de Legendre . . . . .                                   | 192        |
| 18.10 Funciones asociadas de Legendre . . . . .                     | 194        |
| 18.11 Armónicos esféricos . . . . .                                 | 197        |
| 18.12 Segunda solución de la ecuación de Legendre . . . . .         | 199        |
| 18.13 Problema de Sturm-Liouville asociado . . . . .                | 204        |
| <b>19.La ecuación diferencial de Bessel</b>                         | <b>205</b> |
| 19.1. La ecuación diferencial de Bessel . . . . .                   | 205        |
| 19.2. Funciones de Bessel de índice no entero . . . . .             | 206        |
| 19.3. Funciones de Bessel de índice entero . . . . .                | 207        |
| 19.4. Función generatriz . . . . .                                  | 209        |
| 19.5. Fórmulas de adición . . . . .                                 | 209        |
| 19.6. Representaciones integrales . . . . .                         | 211        |
| 19.7. Relaciones de recurrencia . . . . .                           | 212        |
| 19.8. Relaciones de ortogonalidad . . . . .                         | 213        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>20. Diversos tipos de funciones cilíndricas</b>        | <b>217</b> |
| 20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel . . . . . | 217        |
| 20.2. Funciones de Hankel . . . . .                       | 219        |



# Capítulo 12

## Polinomios de Hermite

versión preliminar 3.4-25 noviembre 2002

### 12.1. Definición

Definimos los polinomios de Hermite por:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} . \quad (12.1)$$

$\{H_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  son polinomios de grado  $n$ . Se tiene que:

$$H_n(-t) = (-1)^n H_n(t) , \quad (12.2)$$

es decir,  $H_n$  es par si  $n$  es par, e impar si  $n$  es impar.

Los primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 \\ H_1(t) &= 2t \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2 \\ H_3(t) &= 8t^3 - 12t \\ H_4(t) &= 16t^4 - 48t^2 + 12 \end{aligned}$$

### 12.2. Función generatriz

Consideremos la función

$$\psi(t, x) = e^{t^2} e^{-(t-x)^2} = e^{2tx-x^2} . \quad (12.3)$$

Su desarrollo en serie de Taylor será:

$$\psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t)}{n!} x^n , \quad A_n(t) = \left. \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \right|_{x=0} .$$



Como

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(t-x)}(-1) ,$$

se tiene

$$A_n(t) = e^{t^2} \frac{\partial^n}{\partial(t-x)^n} e^{-(t-x)^2} \Big|_{x=0} (-1)^n = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} = H_n(t) ,$$

luego

$$e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n . \quad (12.4)$$

Se dice que  $e^{2tx-x^2}$  es la *función generatriz* de los polinomios de Hermite, vale decir, es aquella función de dos variables tal que su desarrollo de Taylor en una de las variables tiene como coeficientes precisamente los polinomios de Hermite.

A partir de (12.4) se pueden encontrar relaciones entre los polinomios de Hermite. La estrategia para hallarlas (para ésta o cualquier otra función generatriz de otros polinomios) es típica: derivar parcialmente respecto a alguna de las variables y luego comparar potencias de  $x$  en los desarrollos en Taylor resultantes.

1) Derivando respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2x\psi .$$

Usando (12.4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{d}{dt} H_n(t) \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} 2x^{n+1} .$$

Reordenando la suma en el lado izquierdo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(t)}{n!} x^{n+1} = H'_0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H'_{m+1}(t)}{(m+1)!} x^{m+1} .$$

Comparando los coeficientes de las potencias de  $x$  en cada serie encontramos:

$$\begin{aligned} H'_0(t) &= 0 , \\ 2H_n(t) &= \frac{1}{n+1} H'_{n+1}(t) , \end{aligned}$$

lo cual puede ser reescrito en la forma

$$2nH_{n-1}(t) = H'_n(t) , \quad n \geq 0 . \quad (12.5)$$

Observemos que, si bien sólo tiene sentido considerar polinomios de Hermite con índice positivo, la expresión (12.5) puede ser extendida a  $n = 0$ , aunque ello haga aparecer un factor  $H_{-1}$ . En general, las relaciones de recurrencia que obtendremos pueden considerarse válidas

para cualquier índice entero, adoptando la convención de que los polinomios con subíndices negativos tienen algún valor adecuado, por ejemplo, cero.

La relación (12.5) expresa un polinomio de Hermite en términos de un operador (en este caso la derivada) aplicado sobre el polinomio de Hermite inmediatamente superior. Un operador que tiene tal propiedad se denomina *operador de bajada*. En este caso, el operador de bajada de los polinomios de Hermite es  $(2n)^{-1}d_t$ .

2) Derivando respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = (2t - 2x)\psi .$$

Con (12.4):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(t)}{(n-1)!} x^{n-1} &= 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^{n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(t)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2tH_n(t)}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_{n-1}(t)}{(n-1)!} x^n \end{aligned}$$

Comparando potencias de  $x$ :

$$\begin{aligned} H_1(t) &= 2tH_0(t) , \\ H_{n+1}(t) &= 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) , \quad n \geq 1 . \end{aligned}$$

O bien

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) , \quad n \geq 0 . \quad (12.6)$$

3) Podemos utilizar las dos relaciones de recurrencia (12.5) y (12.6) para obtener una tercera:

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H'_n(t) . \quad (12.7)$$

Hemos pues encontrado el *operador de subida* para los polinomios de Hermite, a saber,  $2t - d_t$ .

Derivando (12.7):

$$H'_{n+1} = 2H_n + 2tH'_n - H''_n .$$

Con (12.5),

$$2(n+1)H_n = 2H_n + 2tH'_n - H''_n ,$$

o sea,

$$H''_n - 2tH'_n + 2nH_n = 0 .$$

Es decir, los polinomios  $H_n$  son una solución de la *ecuación de Hermite*:

$$y''(t) - 2ty'(t) + 2ny(t) = 0 . \quad (12.8)$$

### 12.3. Ortogonalidad

Evalúemos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt .$$

Sin pérdida de generalidad, sea  $n \geq m$ . Podemos escribir

$$I = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} dt .$$

Integrando por partes:

$$I = (-1)^{n+1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-t^2} dt .$$

Integrando por partes  $m$  veces:

$$I = (-1)^m (-1)^n 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(t) \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} e^{-t^2} dt .$$

Si  $m < n$ , entonces

$$I = (-1)^{n+m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} e^{-t^2} dt = (-1)^{n+m} 2^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 .$$

Si  $n = m$ ,

$$I = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} .$$

Resumiendo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} . \quad (12.9)$$

Podemos expresar este resultado diciendo que los polinomios de Hermite son ortogonales, pero con una *función de peso*  $p(t) = e^{-t^2}$ .

Si definimos las funciones

$$\varphi_n(t) = \frac{H_n(t) e^{-t^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} , \quad (12.10)$$

es claro que  $\{\varphi_n\}_n$  es un conjunto ortonormal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \delta_{nm} . \quad (12.11)$$

## 12.4. Algunos resultados interesantes

- (a) Es fácil demostrar que las funciones  $\varphi_n$  definidas en (12.10) satisfacen la ecuación diferencial

$$y'' - t^2 y = -(2n + 1)y \quad (12.12)$$

[con la condición de borde  $y(\pm\infty) = 0$ ], que es precisamente la *ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico*.

- (b) Sea  $\Phi_n(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_n(t), \omega\}$ . Dado que se cumple

$$\varphi_n'' + (2n + 1 - t^2)\varphi_n = 0 ,$$

se puede demostrar que  $\Phi_n(\omega)$  satisface

$$\Phi_n''(\omega) + (2n + 1 - \omega^2)\Phi_n(\omega) = 0 , \quad (12.13)$$

es decir, la misma ecuación diferencial que  $\varphi_n(t)$ . En otras palabras, la transformada de Fourier de  $\varphi_n(t)$  es esencialmente ella misma.

## 12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite

Consideremos la ecuación de Hermite (12.8), pero generalicémosla ligeramente:

$$y'' - 2ty' + 2\beta y = 0 . \quad (12.14)$$

Busquemos soluciones con un cierto desarrollo de Taylor:

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu} . \quad (12.15)$$

Reemplazando en (12.14):

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [a_{\nu+2}(\nu+2)(\nu+1) - 2a_{\nu}\nu + 2\beta a_{\nu}] t^{\nu} = 0 ,$$

$$2\beta a_{\nu} - 2\nu a_{\nu} + a_{\nu+2}(\nu+1)(\nu+2) = 0 , \quad \nu \geq 0 ,$$

es decir, obtenemos una relación de recurrencia para los coeficientes de la serie:

$$a_{\nu+2} = \frac{2(\nu - \beta)}{(\nu+1)(\nu+2)} a_{\nu} . \quad (12.16)$$

Se desprenden las siguientes consecuencias:

- a) Hay dos series independientes, la de coeficientes con índice par, que depende sólo de  $a_0$ , y la de coeficientes con índice impar, que depende sólo de  $a_1$ . Por tanto, hay dos coeficientes arbitrarios,  $a_0$  y  $a_1$ , y por ende dos soluciones linealmente independientes.

b)

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu}} = \frac{2(\nu - \beta)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \simeq \frac{2}{\nu} \quad \text{si } \nu \gg 1,$$

lo cual significa que el radio de convergencia de la serie es infinito. Vale decir, las soluciones no tienen singularidades en el plano.

- c) La ecuación tiene por solución un polinomio sólo si  $\beta \in \mathbb{N}^*$ . Si  $\beta$  es par, hay que tomar  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 = 0$ . Si  $\beta$  es impar, hay que tomar  $a_0 = 0$  y  $a_1 \neq 0$ .
- d) Si  $\beta \notin \mathbb{N}^*$ , y si la solución es par o impar, entonces  $(\nu - \beta)/[(\nu + 1)(\nu + 2)] > 0$  desde cierto  $\nu_0$  en adelante, de modo que los  $a_{\nu}$  tienen todos el mismo signo para  $\nu > \nu_0$ . Esto es, la serie tiene un crecimiento rápido cuando  $t \rightarrow \infty$ .