MECANICA ANALITICA

¿Por qué estudiamos Mecánica Analítica?

La mecánica analítica es la clase donde se introduce al alumno a las técnicas teóricas que son esenciales en todas las ramas de la física. La mecánica analítica además, se usa como trampolín a la física moderna, desde la estructura canónica de los Hamiltonianos en mecánica cuántica, a la teoría de Lagrangianos en la Física de Campos y Partículas, a los sistemas no integrables que dan origen al caos. Un campo muy importante hoy en día, el caos y los sistemas complejos, se estudian con modelos y técnicas desarrolladas naturalmente para el estudio de la mecánica

La idea es re-formular la mecánica Newtoniana de fuerzas en términos de minimizar un funcional $\mathcal{L}$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \pounds(t, x, \dot{x})dt \qquad \rightarrow \quad \delta L = 0$$

Entonces una trayectoria esta dada por la función única que minimiza este funcional $\mathcal{L}$. El paso a la mecánica cuántica se hace considerando que todas las trayectorias contribuyen con la amplitud

$$A \sim \sum e^{i\hbar\mathcal{L}}$$

Obviamente, la trayectoria clásica dada por el mínimo de $\mathcal{L}$ contribuye con el máximo valor, pero también otras trayectorias contribuyen dando el efecto no-local de la mecánica cuántica.

En dedicación a mi querida Carolina

Profesor	Juan A. Valdivia
Oficina	Departamento de Física
	Facultad de Ciencias
	Universidad de Chile
Email:	alejo@fisica.ciencias.uchile.cl
Web:	http://fisica.ciencias.uchile.cl/alejo/clases/

ESTRUCTURA SUGERIDA DEL CURSO

Sugerencia de Notas

Tareas	T = 50%
Examen 2	E = 30%
Presentación Final	P = 20%

Si	85% < T + E + P	Nota = 7.0
Si	75% < T + E + P < 85%	Nota = 6.0
Si	T + E + P < 75%	Nota = % 7 / 100

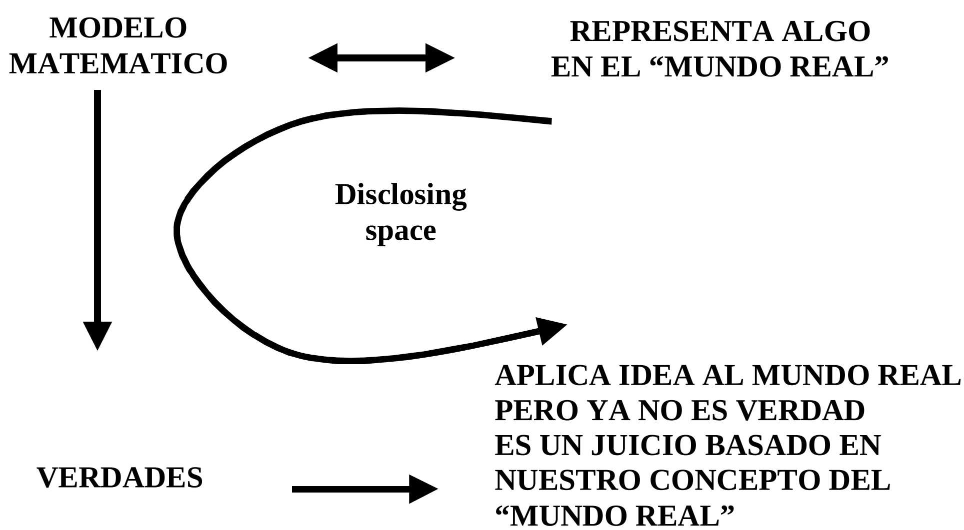
1. Apuntes son puestos en internet
2. Programas para proyectos son puestos en internet
3. Apuntes metodos de la Fisica Matematica hechos por J. Rogan.
4. Manual de C++ escrito por Víctor Muñoz
5. Manual de inicio a Mathematica, les va a ayudar mucho con las tareas y les va a simplificar la vida mucho para el futuro.

6. Tareas: Entregar una copia impresa al ayudante. Ademas, mandar una copia en PDF a Rodrigo Vicencio por email.

7. Libros: Recomendamos los siguientes libros
   - Marion, Classical Dynamics
   - Goldstein, Classical Mechanics
   - Scheck, Mechanics

¿Hacer ciencia?

Generalmente estamos interesados en explicar algún fenómeno de la naturaleza. Este fenómeno pertenece a la “realidad” (notar las comillas). Como científicos no probamos teoremas sobre la realidad, en vez, probamos resultados en un modelo que representa esta “realidad”. Una vez que probamos un resultado en nuestro modelo o abstracción de la “realidad”, usamos este resultado para interpretar su importancia en el mundo “real”. Pero esto es solo una interpretación, tomara algún tiempo hasta que la comunidad decida si esta interpretación es utilizada o no. Pero es importante notar que la comunidad científica decide que interpretación es aceptada o no. De cierta forma hay democracia hasta en la ciencia. De cierta forma, una cosa es la “realidad” y otra cosa es nuestra idea de la “realidad”. La forma en que el mundo se nos aparece es lo que se denomina un “disclosing space” el cual depende de nuestras concepciones del mundo, …, el mundo no es “context free”, sino mas bien formado por nuestra historia y preconcepciones.



Ecuaciones de movimiento

El formalismo de Newton esta basado en el concepto de las fuerzas. Un cuerpo se mueve bajos las fuerzas F en una trayectoria

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \qquad (2.1)$$

Para el caso no-relativista tenemos que $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$. Es importante darse cuenta que esta relacion se satisface en sistemas de **coordenadas inerciales**. Un sistema de coordenadas inercial es aquel en el cual un cuerpo se mueve con la relacion $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ si no fuerzas se aplican sobre el. Es fácil probar que si un sistema de coordenadas se mueve con velocidad constante relativo a un sistema de coordenadas inercial, entonces este sistema también es inercial. La primera ley de Newton define el concepto de sistemas de coordenadas ineciales y la segunda ley de Newton relaciona las fuerzas con la dinamica. La tercera ley de Newton especifica que las acciones entre dos cuerpos son siempre iguales y opuestas en la misma linear recta.

De esta forma vemos que en general estamos interesados en ecuaciones diferenciales ordinarias. De la misma forma podemos pensar que es posible discretizar el tiempo y crear un mapa a partir de estas ecuaciones diferenciales. Esta discretización se puede lograr de varias forma:

1. integrando las ecuaciones y evaluando la función de t a t + Δt
2. usando un plano en el espacio de fase y evaluando la trayectoria cada vez que esta cruza este plano

Mapas discretos

Hay muchos modelos en Fisica y en Matematica que se basan en el concepto de mapas discretos. Uno de los mapas discretos mas celebres es la ecuacion logistica

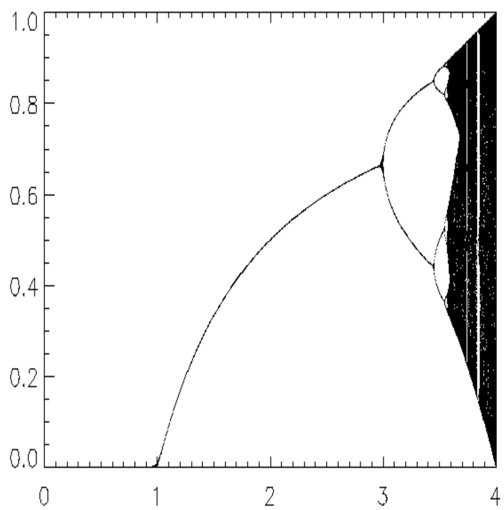
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

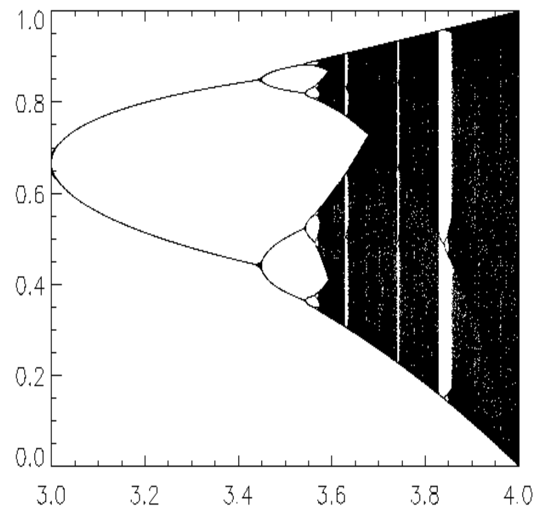
Este mapa se postulo inicialmente para modelar la evolucion en el tiempo de la poblacion de alguna especie. Este mapa no-lineal muestra una complejidad muy entretenida: caos, orden, y caos y orden interlazados.

El primer concepto que veremos es la reconstrucción del atractor de la dinamica.

Atractor de la dinámica

Un atractor de un sistema esta definido como el subset del espacio de fase en el cual las trayectorias tienden asimptoticamente. Un atractor puede ser un punto en el infinito o el origen o algo mas complicado como un atractor fractal o extraño. Para el siguiente dibujo tomamos un gran numero de condiciones iniciales entre (0,1) y las iteramos en el tiempo. Luego ploteamos el valor de la trayectoria en la iteración n=5000.





Cuenca de atracción

La cuenca de atracción de un atractor esta definido por aquellas condiciones iniciales que evolucionan asymptoticamente hacia el atractor.

Diferentes condiciones iniciales evolucionan a diferentes atractores. Por ejemplo, en el caso del mapa logistico (0<r<4) los intervalos $(1, \infty)$ y $(-\infty, 0)$ evolucionan al atractor $-\infty$. Mientras que puntos en el intervalo (0,1) evolucionan a un atractor en (0,r/4). Para ciertos valores de r, este atractor es caótico, para otros es un punto fijo, etc. La siguiente figure muestra un atractor del mapa logístico.

Es interesante darse cuenta que podemos general la misma figura de la siguiente forma. Para cada valor de r asumimos x_0=0.2 e iteramos el mapa logistico 100 veces. Luego ploteamos los siguientes 1000 puntos. Estas dos formas de construir el atractor son equivalente si la dinamica es ergodica, en que los promedios espaciales y los promedios temporales infinitos son iguales para todas las condiciones iniciales.

Vemos claramente que algunas veces ese punto va a un atractor que es un punto fijo. Este punto luego bifurca y se convierte en una orbita atractora de periodo 2. Y asi sucesivamente se llega al caos a traves de una bifurcacion de "period doubling" hacia el caos.

Estime el valor de r donde sucede esta bifurcación

En el caso que tenemos mas de un punto fijo, o mas de un atractor, como uno estima la relevancia de cada uno. Una forma de “medir” un atractor es asignandole un peso en relación al tamaño de la cuenca de atracción, por ejemplo su medida de Lebesgue. Esto define rapidamente una medida de cada punto en el espacio μ(x) y en particular de un atractor. Con esta medida definimos promedios espaciales

$$\left\langle \lambda \right\rangle_x = \int \lambda(x) d\mu = \int \lambda(x)\mu(x)dx$$

y podemos por lo tanto compararlo con los promedios temporales

$$\left\langle \lambda \right\rangle_t = \underset{t->\infty}{Lim} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} \lambda(x_n)$$

Si usamos la medida natural del sistema definida por la dinámica y esta no depende de las condiciones iniciales

$$\mu(x) = \underset{t->\infty}{Lim} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} \delta(x - x_n)$$

$$\left\langle \lambda \right\rangle_x = \underset{t->\infty}{Lim} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{t} \lambda(x_n)$$

entonces los promedios temporales y espaciales dan el mismo resultado.

Definamos un punto fijo de la orbita periodica n.

$$F^n[x^*] = x^*$$

La evolución de la dinámica se puede describir en termino de las orbitas periodicas de distinto periodo y de su estabilidad

$$F^n[x^*] = x^*$$

La estabilidad de un punto fijo se describe como

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x^* + \delta_n \\ x_{n+1} &= x^* + \delta_{n+1} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad x_{n+1} = F[x^* + \delta_n] = F[x^*] + DF[x^*]\delta_n$$

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \left| DF[x^*] \right| = \max \left| \lambda_i \right|$$

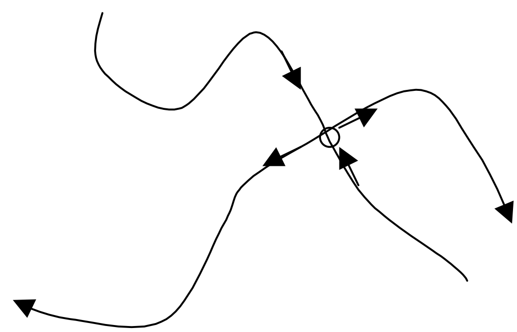
donde la norma es el máximo de los valores propios de la matriz. Por ejemplo, en el caso del mapa logistico hay dos puntos fijos

$$x^* = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = r$$

$$x^* = \frac{r-1}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = 2 - r$$

por lo tanto el punto x=0 es estable y es el atractor para r en (-1,1), Luego se vuelve un repulsor y tenemos que el atractor es el otro punto fijo de F, el cual es atractivo para r en (1,3). En el dibujo vemos que esta trayectoria pierde estabilidad y aparece una orbita de periodo 2. Por lo tanto requerimos ver la estabilidad de $F^2(x)$. Esta es la ruta de periodo doubling al caos.

Los vectores propios de la matriz definen direcciones estables e inestables en el espacio de fase. Si continuamos estas direcciones en forma no-lineal podemos definir las variedades estables e inestables ("stable and unstable manifolds") respectivamente es estos puntos fijos. La dinámica de estas variedades de cada posible orbita periodica da origen al caos y a los fractales que hemos visto y que veremos mas adelante.



Los valores propios de la matriz DF también nos permiten definir el exponente de Lyapunov

$$DF[x_n]\delta_i^{(n)} = \theta_i^{(n)}\delta_i^{(n)}$$

$$e^{\lambda_i} = |\theta_i| \quad \rightarrow \quad \lambda = \underset{n \to \infty}{Lim} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\max_j \left|\theta_j^{(i)}\right|\right]$$

Es importante notar que en principio podriamos tener que este promedio temporal es diferente al promedio espacial del exponente,

$$\lambda(x) = \ln\left[\max_j \left|\theta_j(x)\right|\right] \quad \rightarrow \quad \langle \lambda \rangle = \int \lambda(x)\, d\mu$$

pero para un sistema ergodigo el limite temporal infinito (n –> ∞) y el espacial da el mismo resultado. Es posible definir también un espectro de exponentes pero hay que tener cuidado ya que el sistema de coordenadas va rotando en el tiempo y hay que hacer una descomposición DF=QR para incluir este efecto.

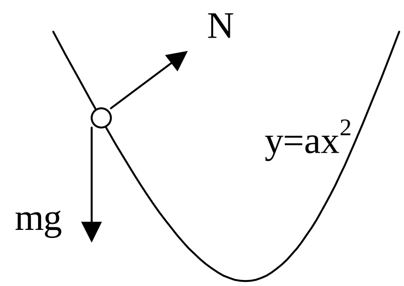
Complicaciones

Resolver las ecuaciones de Newton en la mayoria de los casos resulta extrememadamente tedioso, como lo son para situaciones en que el movimiento tiene varias restricciones ya que esto implica resolver las fuerzas de restricción. El mejor ejemplo es el movimiento de un cuerpo bajo la fuerza de gravedad restringida en una superficie dada.

Las fuerzas son

$$\mathbf{F_N} = N\frac{[-2ax,1]}{\sqrt{1+4a^2x^2}} \qquad \mathbf{F_g} = mg\,[0,-1]$$

```
y[t_] = a x[t]^2;
e1 = m*y''[t] == n/Sqrt[1 + 4*a^2 x[t]^2] - m*g;
e2 = m*x''[t] == -2 a x[t] n/Sqrt[1 + 4*a^2 x[t]^2];
Solve[{e1, e2}, {x''[t], n}]
```



y la ecuación de movimiento es por lo tanto

$$\left\{\left\{x''[t] \to -\frac{2\,a\,x[t]\,(g+2\,a\,x'[t]^2)}{1+4\,a^2\,x[t]^2},\; n \to \frac{g\,m+2\,a\,m\,x'[t]^2}{\sqrt{1+4\,a^2\,x[t]^2}}\right\}\right\}$$

Pero es relevante darse cuenta que estas fuerzas de restricción, aunque muy complicadas, no hacen trabajo. La solución a este problema es reformulando la mecanica clasica en termino de funcionales como veremos en el capitulo 2, lo que implica todo una reinterpretación filosófica del significado del movimiento en general y de nuestra concepción del mundo en particular. Ademas esta reformulación implica que existe una teoria de campo asociada a las ecuaciones de movimiento, y veremos mas adelante que esta teoria de campo es la ecuación de Shroedinger usanda en la mecanica cuántica. Esta dualidad es observa tambien en la electrodinamica entre las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de un rayo (“ray equation”).