

Part I

Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias

Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias es un sistema de la forma $X'(t) = AX(t)$ donde A es una matriz $n \times n$, no singular, cada uno de los a_{ij} de A puede ser un elemento de \mathbb{R} o de \mathbb{C} o elementos de un cuerpo diferencial no constante sobre \mathbb{C} .

Dada la ecuación diferencial de orden n :

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \quad (1.1)$$

mediante las transformaciones:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \end{aligned}$$

es posible escribirla como un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden, mediante estas transformaciones (1.1) se escribe en la forma

$$AX + F(t) = X'$$

con

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2} & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a manera de ejemplo, la ecuación diferencial de tercer orden

$$x''' + a_1(t)x'' + a_2(t)x' + a_3(t)x = f(t)$$

se puede escribir como el sistema 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3(t) & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

El hecho de poder escribir una ecuación diferencial de orden n como un sistema lineal $n \times n$ hará que se centre la atención en encontrar la forma de resolver estos sistemas, máxime que, la ecuación diferencial objeto de nuestro interés, es un sistema 3×3 de ecuaciones diferenciales ordinarias definidas en un cuerpo diferencial no constante.

1 La exponencial de una matriz

La ecuación lineal homogénea de primer orden $x' = ax$, a constante, tiene por solución general $x(t) = ce^{at}$ donde $c \in \mathbb{C}$. Dado que una ecuación de este tipo puede verse como un sistema 1×1 , podría, en forma análoga, intuirse, que la solución del sistema homogéneo $n \times n$, $X' = AX$ tiene por solución $X(t) = Ce^{tA}$, C un vector arbitrario de tamaño adecuado. En el Capítulo 11, "Sistemas de Ecuaciones Diferenciales" del texto de Molero, Salvador, Menarguez, Garmendia, se hace una detallada exposición de la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales mediante la exponencial de una matriz, aquí para facilitar la lectura y puntualizar en algunos aspectos se muestran algunos resultados.

Definición 1 La exponencial de una matriz A , $n \times n$, se define por

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

La definición anterior proporciona la forma de obtener la exponencial de una matriz, para efectos prácticos, esta definición es útil si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}A^k$ existe.

Si definimos $S_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}A^k$ cada una de las n^2 entradas de la matriz S_N es una sucesión, la convergencia de S_N requiere de la convergencia de cada una de las n^2 sucesiones que forman las entradas de la matriz, la convergencia está asegurada por cuanto la serie de Taylor asociada a la función exponencial converge en \mathbb{C} . En general, expresar e^A como una matriz requiere mucho trabajo, sin embargo, para algunos tipos de matrices, e^A tiene una expresión fácil.

Si A $n \times n$, es una matriz diagonal

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Si A es nilpotente de grado k ,

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}$$

Estas dos expresiones son consecuencia de la definición.

Si la matriz A $n \times n$, tiene n autovalores distintos, la matriz es diagonalizable, y puede escribirse como $A = P^{-1}DP$. Las columnas de P son los autovectores de A y D es una matriz diagonal formada con los correspondientes autovalores de A , se tiene entonces que $e^A = I_n + P^{-1}DP + \frac{1}{2!}P^{-1}D^2P + \frac{1}{3!}P^{-1}D^3P + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}P^{-1}D^kP = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}D^k \right) P = P^{-1}e^DP$

Cuando $An \times n$ tiene autovalores de multiplicidad algebraica mayor que 1, A puede representarse mediante PJP^{-1} , donde J es una matriz de Jordan.

Si λ_i es un autovalor de A de multiplicidad algebraica k , $k \leq n$, los autovectores asociados a este autovalor se pueden calcular mediante el núcleo de las transformaciones lineales representadas por las matrices $A - \lambda_i I$, $(A - \lambda_i I)^2$, $(A - \lambda_i I)^3 \dots$, este proceso se sigue hasta cuando la dimensión del espacio nulo de $(A - \lambda_i I)^l$ coincide con la multiplicidad algebraica de λ_i . $(\ker(A - \lambda_i I))^r \subset \ker(A - \lambda_i I)^{r+1}$

Los k vectores obtenidos son los autovectores asociados al autovalor λ_i . Nuevamente, P es la matriz cuyas columnas son los autovectores asociados a los autovalores y J es la matriz de Jordan cuya diagonal son los autovalores de A . Calcular la exponencial de A se reduce entonces a calcular e^J , como J es una matriz diagonal de bloques, calcular e^J equivale a calcular la matriz

$$\begin{pmatrix} e^{J_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_r} \end{pmatrix} \quad r : \text{número de bloques cuadrados}$$

y cada uno de los r bloques cuadrados es:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}_{k \times k}$$

A es una matriz que puede escribirse como la suma de una matriz diagonal y una matriz nilpotente

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}_{k \times k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}_{k \times k} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

El proceso que permite diagonalizar una matriz o representarla mediante una forma de Jordan siempre es factible ya que si A es una matriz sobre un cuerpo \mathbb{k} es posible encontrar una extensión de \mathbb{k} en la que el polinomio característico de A se factorice en factores lineales.

1.1 Propiedades de la exponencial de una matriz

Proposición 2 A y B son matrices cuadradas de orden n , I es la idéntica del mismo orden, z, t números complejos, entonces:

1. Si $\mathbf{0}$ es la matriz nula $n \times n$, $e^0 = I_n$
2. $e^{zI_n} = e^z I_n$
3. Si $AB = BA$, $e^{A+B} = e^A e^B$
4. $e^{(z+t)A} = e^{zA} e^{tA}$
5. La exponencial de una matriz cuadrada es invertible y su inversa es e^{-A}

Prueba. Las propiedades 1 y 2 son consecuencia de la definición. Para demostrar 3 se tiene que, $e^{A+B} = I_n + (A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k$ Dado que $(A+B)^k$ se puede expresar mediante la fórmula binomial, $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^{k-i} B^i$, sólo si las matrices conmutan, supuesta la conmuta-

tividad, se tendría,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^{k-i} B^i = \\
&= \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{(k-i)!} A^{k-i} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} B^i = \\
&= \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{(k-i)!} A^{k-i} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} B^i = e^A e^B
\end{aligned}$$

En 4 se tiene que $e^{(z+t)A} = e^{zA+tA}$ puesto que zA conmuta con tA se concluye lo enunciado, por último, $I_n = e^{\mathbf{0}} = e^{A-A} = e^{A+(-A)}$ y como $A(-A) = -AA$, $e^{A+(-A)} = e^A e^{-A}$. Obsérvese además que de acuerdo a la definición, el determinante de la exponencial de una matriz cuadrada, nunca puede ser cero. ■

1.2 El sistema diferencial $X' = AX$

Con los elementos expuestos, es posible resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $X' = AX$, cuando A es una matriz cuadrada constante.

Definición 3 Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^m = \begin{pmatrix} x_1^m \\ x_2^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$

Proposición 4 La matriz e^{AX} es solución del sistema $X' = AX$

Prueba. $e^{AX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (AX)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k X^k = I + AX + \frac{1}{2!} A^2 X^2 + \frac{1}{3!} A^3 X^3 + \dots$

dado que esta serie converge, la derivada de e^{Ax} se obtiene derivando término a término la serie, entonces, $\frac{d}{dx} (e^{AX}) = A + \frac{1}{2!} 2A^2 X + \frac{1}{3!} 3A^3 X^2 + \dots + \frac{1}{j!} jA^j X^{j-1} + \dots = A \left(I + \frac{1}{1!} AX + \frac{1}{2!} A^2 X^2 + \dots + \frac{1}{(j-1)!} A^{j-1} X^{j-1} + \dots \right) =$

$A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} X^{k-1} = Ae^{AX}$. Obsérvese que cuando $X = \mathbf{0}$, $e^{AX} = I$.

Sea $\mathbf{X}(t) = e^{tA} \Rightarrow [\mathbf{X}(t)]^{-1} = [e^{tA}]^{-1} \Rightarrow \mathbf{X}(t) [\mathbf{X}(t)]^{-1} = e^{tA} [e^{tA}]^{-1} = e^{tA} [e^{-tA}] = I_n \Rightarrow \det(\mathbf{X}(t) [\mathbf{X}(t)]^{-1}) = 1 = \det(\mathbf{X}(t)) \det([\mathbf{X}(t)]^{-1})$ lo que significa que $\det(\mathbf{X}(t)) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, además $\mathbf{X}'(t) = Ae^{tA} = A\mathbf{X}(t)$ entonces cada una de las columnas de la matriz $\mathbf{X}(t)$ es una solución del sistema $X' = AX$ y la solución general del sistema escrita en forma vectorial, es $\mathbf{X}(t) = e^{tA}v$ donde $v \in \mathbb{R}^n$ ■

En particular, la solución del problema de valor inicial,

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

es

$$X = e^{A(t-t_0)} X_0$$

Hay una dificultad, hay que escribir la matriz e^{tA} de tal forma que el desarrollo en serie de potencias se trunque a partir de un cierto valor de la potencia, pero esto es posible si A es una matriz diagonalizable o que pueda expresarse como la suma de una matriz diagonal y una matriz nilpotente.

Ejemplo 5 Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

para hallar la solución de este sistema se comienza encontrando los valores propios de A :

$$\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)^2$$

la matriz A tiene a $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$ como valores propios, -1 tiene multiplicidad 1 y -2 multiplicidad 2. El vector propio asociado a -1 es $v_1 = (1, 1, -2)^T$ lo que significa que una solución del sistema es

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{-t} (1, 1, -2)^T$$

Un vector propio asociado a -2 es $v_2 = (1, 0, -1)^T$ y otra solución del sistema es

$$\mathbf{X}_2(t) = e^{-2t} (1, 0, -1)^T$$

Falta hallar una tercera solución, esta puede obtenerse mediante la solución del sistema

$$(A + 2I_3)^2 (y_1, y_2, y_3)^T = 0$$

dado que la multiplicidad algebraica de λ_2 es 2 y el rango de A es 3. Resuelto este sistema, se obtiene que la solución debe tener la forma $(y_1, 0, y_3)$ este vector debe escogerse de tal manera que sea L. I. con $v_2 = (1, 0, -1)^T$, (los vectores propios v_1 y v_2 son L. I. por cuanto corresponden a valores propios distintos) una elección sería: $y_1 = 0$, $y_3 = 1$ y el vector $v_3 = (0, 0, 1)^T$ permite encontrar la última solución, esta solución se calcula mediante

$$e^{tA} v_3 = e^{-2t} \left(v_3 + t(A + 2I_3)v_3 + \frac{t^2}{2!}(A + 2I_3)^2 v_3 + \dots \right)$$

pero

$$(A + 2I_3)^2 v_3 = (0, 0, 0)^T$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3(t) &= e^{tA} v_3 = e^{-2t} (v_3 + t(A + 2I_3) v_3) = \\ &= e^{-2t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución general del sistema es $\mathbf{X}(t) = C_1 \mathbf{X}_1(t) + C_2 \mathbf{X}_2(t) + C_3 \mathbf{X}_3(t)$, $C_i \in \mathbb{R}$, estos C_i se determinan de tal manera que se satisfaga alguna condición inicial dada.

1.3 A es una matriz no constante

Para intentar resolver esta situación, nuevamente se recurre a la analogía, la solución de la ecuación de primer orden $y' = b(x)$ y se expresa por $y = C e^{\int b(x) dx}$ puede entonces suponerse que la solución del sistema $Y' = A(x)Y$ sea de la forma $Y = e^{\int A(x) dx} C$, esto es cierto cuando se cumple:

Proposición 6 La matriz $e^{B(x)}$, con $B(x) = \int A(x) dx$, es una solución del sistema $Y' = A(x)Y$, si $A(x)B(x) = B(x)A(x)$

Prueba. $e^{B(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (B(x))^k = I + B(x) + \frac{1}{2!} (B(x))^2 + \dots + \frac{1}{k!} (B(x))^k + \dots \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} \left(e^{B(x)} \right) \\ &= \frac{d}{dx} (I) + \frac{d}{dx} (B(x)) + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2!} (B(x))^2 \right) + \dots + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{k!} (B(x))^k \right) + \dots \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} (B(x))^2 &= B(x)B(x) \Rightarrow \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2!} (B(x))^2 \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2!} B(x)B(x) \right) = \\ &= \frac{1}{2!} (B'(x)B(x) + B(x)B'(x)) = \\ &= \frac{1}{2!} (A(x)B(x) + B(x)A(x)) \end{aligned}$$

si $A(x)B(x) = B(x)A(x)$ entonces puede afirmarse que:

$$\frac{d}{dx} \left((B(x))^2 \right) = 2B(x)B'(x)$$

y también que

$$\frac{d}{dx} \left((B(x))^k \right) = k(B(x))^{k-1} B'(x)$$

se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(e^{B(x)} \right) &= B'(x) + \frac{1}{2!} (2B(x) B'(x)) + \cdots + \frac{1}{k!} k(B(x))^{k-1} B'(x) + \cdots \\ &= B'(x) \left(I + B(x) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} (B(x))^{k-1} + \cdots \right) = \\ &= B'(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (B(x))^k = B'(x) e^{B(x)} = A(x) e^{B(x)} \end{aligned}$$

Lo cual prueba que $e^{B(x)}$ es solución del sistema $Y' = A(x)Y$ ■

Ejemplo 7 El sistema $Y' = A(x)Y$ con $A(x) = \begin{pmatrix} g(x) & f(x) \\ f(x) & g(x) \end{pmatrix}$, f, g funciones reales, tiene por solución la matriz $Ce^{\int A(x)dx}$ dado que en este caso las matrices, $A(x)$ y $B(x) = \int A(x)dx = \begin{pmatrix} \int g(x) & \int f(x) \\ \int f(x) & \int g(x) \end{pmatrix}$, conmutan

La dificultad estriba en que si la matriz A es una matriz cuadrada no constante, la matrices $B(x) = \int A(x)dx$ y $A(x)$, en general, no conmutan, la conmutatividad puede asegurarse sólo cuando $A(x)$ es una matriz simétrica de tamaño 2x2 y además los elementos de la diagonal son iguales. Lo que parecía un camino prometedor para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes no constantes está limitado a una situación muy particular.

Part II

La Teoría de Galois Diferencial

La idea central de la Teoría de Galois es relacionar un cuerpo F , extensión de un cuerpo K , con todos los automorfismos definidos en F que dejan fijo a K , estos automorfismos son grupos de permutaciones de las raíces de un polinomio irreducible sobre K , y cuyas raíces están en F , de esta forma, es posible tratar problemas propios de los polinomios y los cuerpos mediante el estudio de un grupo finito.

En un fructífero intento, E. Picard aplica estas ideas a las ecuaciones diferenciales lineales, en comunicación dirigida a la Academia de Ciencias de París escribe: "Me esforzaba en hacer la transposición de las ideas de Galois a este nuevo dominio"

Si se tienen n funciones arbitrarias y_j , de una variable, es posible formar la ecuación diferencial de orden n para la cual estas funciones son un sistema

fundamental de soluciones: la ecuación diferencial $\partial_x^{(n)} y + p_1 \partial_x^{(n-1)} y + \dots + p_n y = 0$, las p_j son funciones racionales, obtenidas de las funciones y_j y de sus derivadas de orden n , que son invariantes cuando sobre las y_j o sus derivadas, se efectúa

una transformación lineal del tipo
$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ Y_n &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$
, donde las a_{ij}

son parámetros arbitrarios, en este orden de ideas las funciones p desempeñan el mismo papel que el que desempeñan las funciones simétricas formadas con las raíces de una ecuación polinómica.

Resume estas ideas en:

Teorema 8 *Toda función racional de las y y de sus derivadas, invariable por las sustituciones del grupo lineal general, se expresa racionalmente mediante las funciones p y sus derivadas.*

Afirma también que una ecuación diferencial ordinaria homogénea con coeficientes racionales, es reducible, si tiene solución no nula que coincida con la solución no nula de otra ecuación homogénea de orden menor, además, todas las soluciones de la ecuación de orden menor lo son también de la ecuación de orden superior.

En el proceso de análisis de esta situación demuestra que si la ecuación es reducible entonces tal ecuación admite como solución una función cuya derivada logarítmica es racional, por ello, hace uso de la sustitución $u = \frac{\partial y}{y}$ que le permite transformar una ecuación de orden n en una ecuación de orden $n - 1$. En la consecución de sus objetivos Picard emplea una ecuación de Riccati y resultados que Vessiot, su alumno, expone en su tesis doctoral, *Sur l'Intégration des Équations Différentielles Linéaires*

(Sobre la Integración de las Ecuaciones Diferenciales Lineales), publicada en 1892 por la Escuela Normal Superior de París, en particular, el siguiente teorema:

Teorema 9 *Condición necesaria y suficiente para que una ecuación lineal sea resoluble por cuadraturas es que su grupo de transformaciones sea resoluble.*

Muchos de los trabajos de Vessiot siguen la misma línea de los de Picard, además del ya mencionado teorema, Vessiot, establece, en la misma tesis, los dos siguientes, ambos relacionados con la ecuación de Riccati.

Teorema 10 *Para que una ecuación lineal de segundo orden sea resoluble por cuadraturas, es necesario y suficiente que la derivada logarítmica de una de las soluciones sea racional.*

Teorema 11 *Para que la ecuación de segundo orden $\partial_x^2 v + 2p\partial_x v + qv = 0$ sea resoluble por cuadraturas, es necesario y suficiente que la transformada de Riccati $\partial_x u + u^2 + (q - p^2 - \partial_x p) = 0$ tenga una solución racional.*

La teoría de Galois Diferencial considera los siguientes aspectos, un anillo conmutativo R , una derivación ∂ en R para la cual se cumple,

$$\begin{aligned}\forall x, \forall y &\in R, \partial(x+y) = \partial(x) + \partial(y) \\ \wedge \partial(xy) &= y\partial(x) + x\partial(y)\end{aligned}$$

los elementos de R para los cuales su derivada es idénticamente cero, se les llama constantes, en el caso que R sea un dominio entero, la derivación se extiende al campo de fracciones de R mediante

$$\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\partial(x) - x\partial(y)}{y^2}$$

la $\partial(\partial(x))$ denota la derivada de la derivada de x , simbolizada como $\partial^{(2)}(x)$, en general,

$$\partial^{(n)}(x) = \partial\left(\partial^{(n-1)}(x)\right)$$

De acuerdo a la teoría de Galois, dado un polinomio P con coeficientes en un cuerpo K , existe un cuerpo F , que vía isomorfismo contiene a K , en el cual P se descompone en factores lineales, las raíces de este polinomio forman un grupo cuyos elementos son invariables bajo permutaciones. La TGD busca encontrar para un cuerpo diferencial F y un operador diferencial L que actúa sobre $y \in F$, una extensión diferencial E en la cual "vivan" las soluciones de $L(y) = 0$ y las constantes de F y sólo estas, son constantes en E , bajo estas condiciones se tiene:

Definición 12 *Extensión de Picard-Vessiot: se dice que el cuerpo diferencial $E \supseteq F$ es una extensión de Picard-Vessiot para $L \in F$ si se cumple que :*

1. E es generado sobre F como un cuerpo diferencial por las soluciones de $L = 0$ en F
2. Las constantes de E son las constantes de F
3. Si el orden de L es n , L tiene n soluciones en E que son linealmente independientes sobre las constantes.

La independencia lineal está determinada por el wronskiano, si $y_i \in F$, $1 \leq i \leq r$, se dice que son linealmente independientes sobre el cuerpo de constantes de F , si

$$W(y_1, \dots, y_r) := \det\left(\left(y_i^{(j)}\right) : 1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq r-1\right) \neq 0$$

Los campos diferenciales que se considerarán son de característica cero y el cuerpo de constantes será un cuerpo algebraicamente cerrado, en general, este cuerpo de constantes será \mathbb{C} .

Ejemplo 13 1. Si F es un cuerpo, F es un cuerpo diferencial en el que todos sus elementos son constantes.

2. Si F es un cuerpo, $F(X)$ el cuerpo de fracciones en la indeterminada X , con la derivación formal sobre fracciones, es un cuerpo diferencial.
3. El cuerpo de las funciones meromorfas definidas sobre una superficie de Riemann es también un cuerpo diferencial.

Las extensiones de Picard-Vessiot se obtienen adjuntando al campo F o una integral la cual es un elemento u tal que $u' \in E$, o la exponencial de una integral la cual es un elemento u tal que $\frac{u'}{u} \in E$.

Una *Extensión de Liouville* es el resultado de un proceso finito de extensiones, cada una de las cuales se obtiene de la anterior mediante la adjunción de una integral o de la exponencial de una integral.

Una *Extensión de Liouville generalizada* es el resultado de un proceso finito de extensiones, cada una de las cuales se obtiene de la anterior mediante la adjunción de una integral o de la exponencial de una integral o mediante una extensión algebraica finita.

Si $E \supseteq F$ es una extensión de Picard-Vessiot para $L \in F$, el grupo de Galois diferencial para el operador diferencial L se define: $DGal(E/F) = DAut_F E$

conjunto de automorfismos que dejan fijo a F . Si $\varphi \in DAut_F E$ y $\{y_1, \dots, y_n\}$ es

un conjunto fundamental de soluciones de $L(y) = 0$, entonces $\varphi(y_j) = \sum_{i=1}^n c_{ij} y_i$, $c_{ij} \in C_F$. A φ se le asocia la matriz $n \times n$ (c_{ij}) que pertenece al grupo lineal general de tamaño n con entradas en el cuerpo de constantes de F . el grupo de Galois diferencial para L es un subgrupo del grupo lineal general.

2 Algoritmo de Kovacic

Part III

Métodos Numéricos

Los métodos numéricos son procedimientos por medio de los cuales se encuentran soluciones, casi siempre aproximadas, de problemas de las matemáticas, la física, la química y otras áreas del conocimiento en las cuales se emplean procesos de cálculo o se hacen mediciones con el fin de obtener información útil y necesaria. La solución de estos problemas mediante las técnicas y procedimientos propios del análisis, el algebra, el cálculo diferencial o integral, es supremamente difícil o incluso imposible.

Al solucionar un problema mediante métodos numéricos se implementa una serie finita de pasos en los cuales se realizan cálculos de caracter puramente

aritmético, al finalizar el proceso se obtiene o bien una solución numérica que es una aproximación a la solución real o bien un mensaje.

El conjunto de instrucciones mediante los cuales se realizan los cálculos que permiten alcanzar una solución es un algoritmo. La calidad de la solución obtenida depende de la eficiencia del algoritmo, y ésta depende a su vez de la sencillez de diseño de los pasos. Por supuesto las características de los instrumentos de cálculo usados (computadores) influyen sobre la calidad de la solución. Siempre que se emplean instrumentos de cálculo se introducen errores llamados de redondeo, estos errores son producto de la forma como el computador maneja los números reales y las operaciones, que es en general distinto a como se hacen estas manualmente.

Un buen método numérico debe ser exacto, en el sentido que el valor calculado o medido se acerque lo más posible al valor real y preciso, lo que significa que un valor calculado o medido se encuentre lo suficientemente cercano a los otros valores.

En todo método numérico hay errores, esto no significa equivocación sino, en principio, la diferencia existente entre el valor que se supone cierto y el valor obtenido mediante los procesos algorítmicos empleados, como no siempre se conoce el valor real, es necesario diseñar procedimientos que permitan obtener una cota o nivel de tolerancia del error.

3 Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales surgieron en forma explícita hacia el siglo XVII, la búsqueda de soluciones a problemas muy específicos motivaron su aparición y ulterior desarrollo, por ejemplo, en 1638 el problema de la tractriz, un problema de tangentes a una curva, fue propuesto por René Descartes a Fermat, quien al no contar con las herramientas que provee el cálculo diferencial no pudo resolverlo, fue resuelto, inicialmente, por Leibniz en 1674 y posteriormente, en forma independiente, en 1690 por Jakob Bernoulli, las soluciones obtenidas fueron posibles gracias al desarrollo del cálculo diferencial que hicieron Newton y Leibniz. Estas dos ramas de las matemáticas tuvieron comienzos casi simultáneos y con necesarios y estrechos contactos.

Si bien hoy se encuentran bien establecidos métodos generales mediante los cuales es posible resolver varios tipos de ecuaciones diferenciales, muy temprano, casi desde el mismo momento del surgimiento de los primeros problemas que las generaron, se hizo evidente, que en muchos casos, no es posible encontrar métodos generales para la resolución de todos los tipos de ecuaciones diferenciales, se

idearon entonces métodos ingeniosos para resolver algunas clases de ecuaciones diferenciales, pero faltaba determinar condiciones rigurosas bajo las cuales estos métodos eran aplicables, se hacía necesario fijar condiciones de existencia y unicidad de las soluciones.

El historiador matemático E. T. Bell considera cinco etapas en el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales: la primera se iniciaría con los trabajos de Leibniz, alrededor de 1690, y se extendería hasta 1820, año en el que Cauchy publicó su teorema de existencia de soluciones, lo que marcaría el inicio de la etapa del rigor, durante 50 años se formalizaron resultados y se depuraron procesos desarrollados con mucho ingenio e inventiva, pero no igual rigor, en la etapa anterior. La tercera etapa comienza en 1870 con los trabajos de M. S. Lie en donde aplica la teoría de los grupos continuos a las ecuaciones diferenciales, en 1880 E. Picard marca el comienzo de la cuarta etapa con su teorema de existencia y el tratamiento que hace de las ecuaciones diferenciales mediante una teoría análoga a la de Galois para las ecuaciones algebraicas, la última etapa comienza hacia 1930, está marcada por la generalización, aun cuando ya en 1908 E. H. Moore había estudiado ecuaciones con un número infinito numerable de variables, lo que caracteriza a esta última etapa es el estudio de ecuaciones diferenciales de dimensión infinita.

La colección de métodos iterativos conocidos como métodos de Runge-Kutta, utilizados para resolver en forma numérica ecuaciones diferenciales, fueron desarrollados y formalizados en forma conjunta por los matemáticos germanos Carl David Tolmé Runge, (1856-1927) y Martín Wilhelm Kutta, (1867-1944), alrededor del año 1901. Runge se doctoró en Berlín, en 1880 y fue condiscípulo de Karl Weierstrass. Desde 1904 hasta 1925 fue profesor en la Universidad de Gotinga.

Kutta nació en la Alta Silesia, hoy Polonia, se formó como matemático en la universidad de Breslau y desde 1890 hasta 1894 permaneció en Munich, perfeccionando sus estudios, en 1911 se convirtió en profesor de la Universidad de Stuttgart, plaza que ocupó hasta su retiro en 1935.

Picard, (1856- 1941), matemático galo, fue profesor de la Sorbonne desde 1879 y de la prestigiosa École Normale Supérieure. Mediante el método de las aproximaciones sucesivas estableció condiciones para establecer la existencia de soluciones de una EDO n -dimensional de primer orden.

Ernest Vessiot (1865-1952), nació en Francia, estudió en la École Normale Supérieure, a partir de 1910 se desempeñó como profesor de mecánica analítica y mecánica celeste, en la Universidad de París, examinador de la Escuela Politécnica, director de la École Normale Supérieure hasta 1935, y miembro de la Academia de Ciencias desde 1943

La teoría de Picard-Vessiot fue desarrollada por estos matemáticos de 1903 a 1904.

4 Condiciones de existencia y unicidad de la solución del sistema $\partial_x \mathbf{Y} = A\mathbf{Y}$

Se abordará ahora la solución del sistema $Y' = AY$, cuando A es una matriz no constante, aplicando dos tipos de métodos numéricos, el método de Runge-Kutta de cuarto orden y el método de diferencias finitas, previamente se establecerán condiciones de existencia y unicidad de estas soluciones.

En otras palabras, dado un problema de valores iniciales,

$$\begin{cases} \partial_x \mathbf{Y} = f(x, \mathbf{Y}) \\ \mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases}$$

¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes que permiten asegurar la existencia de soluciones? Si éstas existen, ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplirse para garantizar la unicidad?

Las funciones \mathbf{Y} y \mathbf{Y}' están definidas en un intervalo de números reales y toman valores en \mathbb{R}^n , mientras que f es una función definida de \mathbb{R}^{n+1} en \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(x) &= (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ f(x, \mathbf{Y}) &= (f_1(x, \mathbf{Y}), f_2(x, \mathbf{Y}), \dots, f_n(x, \mathbf{Y})) \\ \partial_x \mathbf{Y} &= f(x, \mathbf{Y}) \\ x &\in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

Los dos teoremas que se enuncian a continuación establecen las condiciones de existencia y unicidad de las soluciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden. Los espacios métricos sobre los cuales se establecerán estas condiciones son: \mathbb{R}^n con la métrica

$$\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$$

y el espacio de las funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R}^n con la métrica definida por

$$\partial(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \max \{|y_1(x) - z_1(x)| + |y_2(x) - z_2(x)| + \dots + |y_n(x) - z_n(x)|\}$$

Teorema 14 Sea $f = f(x, \mathbf{Y})$ una función continua, acotada, y que satisface una condición de Lipschitz con constante de Lipschitz β en una región \mathfrak{R} de \mathbb{R}^{n+1} y sea (x_0, \mathbf{Y}_0) un punto cualquiera de \mathfrak{R} , entonces, el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{Y} &= f(x, \mathbf{Y}) \\ \mathbf{Y}(x_0) &= \mathbf{Y}_0 \end{aligned}$$

tiene solución única sobre el intervalo $[a, b]$ y la gráfica de esta solución se encuentra en \mathfrak{R} .

El siguiente teorema hace menos rigurosas las condiciones de existencia y unicidad, las funciones deben ser continuas y satisfacer una condición de Lipschitz pero no necesitan ser acotadas.

Teorema 15 Sea f una función continua en $S = \{(x, \mathbf{Y}) / x \in I \subset \mathbb{R}\}$, lipschitziana en $S_1 \subset S$, S_1 determinado por un intervalo cerrado subconjunto de I . entonces si (x_0, \mathbf{Y}_0) es un punto cualquiera de S , el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{Y} &= f(x, \mathbf{Y}) \\ \mathbf{Y}(x_0) &= \mathbf{Y}_0 \end{aligned}$$

tiene solución única en I

4.1 Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son todos aquellos métodos numéricos que pueden escribirse de la forma:

$$\begin{cases} k_i = f\left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) \\ y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \end{cases} \quad (3.1)$$

cada uno de los k_i es una etapa, h representa el tamaño del paso.

La aplicación del teorema del valor medio y del teorema fundamental del cálculo integral al problema de valores iniciales,

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{Y} &= f(x, \mathbf{Y}) \\ \mathbf{Y}(x_n) &= \mathbf{Y}_n \end{aligned}$$

lleva a

$$\mathbf{Y}(x_n + h) = \mathbf{Y}(x_n) + h \int_0^1 \mathbf{Y}'(x_n + \lambda h) d\lambda \quad (3.2)$$

donde $\int_0^1 \mathbf{Y}'(x_n + \lambda h) d\lambda$ se aproxima mediante una fórmula de cuadratura del tipo $\int_0^1 g(x) dx \approx \sum_{i=1}^m b_i g(\alpha_i)$. Para el caso en que g es constante, la fórmula de cuadratura debe ser exacta, por tanto,

$$\int_0^1 k dx = k = k \sum_{i=1}^m b_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m b_i = 1. \quad (3.3)$$

Aplicando estas ideas a 3.1,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(x_n + h) &= \mathbf{Y}(x_n) + h \sum_{i=1}^m b_i \mathbf{Y}'(x_n + c_i h) = \\ &= \mathbf{Y}(x_n) + h \sum_{i=1}^m b_i f(x_n + c_i h, \mathbf{Y}(x_n + c_i h))\end{aligned}$$

los valores de $\mathbf{Y}(x_n + c_i h)$ son desconocidos para $h \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(x_n + c_i h) &= \mathbf{Y}(x_n) + h \int_0^{c_i} \mathbf{Y}'(x_n + h\lambda) d\lambda \\ 0 &\leq \lambda \leq c_i\end{aligned}$$

nuevamente, mediante una fórmula de cuadratura: $\int_0^{c_i} g(x) dx = \sum_{j=1}^s a_{ij} g(\alpha_j)$,

la cual debe resultar exacta para g constante, lo que implica la condición

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} \quad (3.4)$$

se obtiene:

$$\mathbf{Y}(x_n + c_i h) = \mathbf{Y}(x_n) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} g(\alpha_j), 0 \leq \alpha_j \leq 1$$

para no tener una cadena indefinida de valores desconocidos, se hace que los nodos de la fórmula de cuadratura coincidan con los c_i

$$g(\alpha_j) = f\left(x_n + c_i h, \mathbf{Y}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right)$$

Este desarrollo muestra el porqué los métodos de Runge-Kutta se pueden escribir como en 3.1

Teniendo en cuenta que mientras se respeten las condiciones 3.3 y 3.4 se pueden hacer diferentes elecciones para los a_{ij} , es usual representar los diferentes métodos de Runge-Kutta, mediante su *Tablero de Butcher*:

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

Los métodos de Runge-Kutta pueden ser implícitos o explícitos, es explícito cuando $a_{ij} = 0$ para $i \leq j$. En el caso que el método sea explícito los a_{ij} para $i \leq j$ no se escriben en el tablero.

Una característica propia de la familia de métodos de Runge-Kutta es la facilidad con la que puede hacerse el cambio de tamaño del paso, pero, es muy difícil determinar el momento adecuado para la realización de este cambio. El costo computacional aconseja que si la función solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene cambio lento en un intervalo, se use un tamaño de paso grande, por el contrario si el cambio que experimenta la función es rápido, es aconsejable tomar un tamaño de paso menor, pero, no se conoce la función, y con los métodos de un paso no es posible predecir en que momento hacer cambios en el tamaño del paso.

Una manera de abordar el problema que se presenta cuando es necesario hacer cambios en el tamaño del paso, es usar los llamados pares encajados, que básicamente son la combinación de dos métodos tipo Runge-Kutta, mientras uno de ellos permite el avance al paso siguiente, el otro controla el error, adecuando el tamaño del paso a la situación específica. Esto permite reducir el costo computacional sin sacrificar la precisión.

La idea de los pares encajados la desarrolló Merson hacia el año de 1957, consiste básicamente en elegir dos métodos, uno de orden p y el otro de orden $p + 1$, la estimación del error de truncamiento se obtiene mediante la diferencia entre el valor calculado en el mismo punto con cada uno de los métodos.

Los pares encajados usan los mismos coeficientes k_i para ambos métodos lo que permite controlar el error global mediante el control del error de truncamiento, sin añadir coste computacional, ya que sólo varían los valores de los b_i por los cuales se multiplican los k_i .

Uno de estos métodos es el de Dormand y Prince, DOPRI5(4), que permite avanzar con un orden de consistencia 5 y controla con orden de consistencia 4. Fue desarrollado en 1980 por Dormand y Prince, se combinan 2 métodos, cada uno de siete etapas, uno orden de convergencia cuatro y el otro de orden de convergencia cinco, tiene la característica de que la última fila de la matriz A coincide con los b_i^* . A este tipo de métodos se les denomina "primero igual al último"

Los valores de la función en cada uno de los puntos x_n son calculados simultáneamente y su diferencia se toma como estimación del valor del error de truncamiento para el método de orden 4, esta estimación se utiliza a su vez para adecuar el tamaño del paso al comportamiento de la función. Su tablero

de Butcher es:

	0								
	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$							
	$\frac{10}{4}$	$\frac{40}{44}$	$\frac{9}{-56}$						
	$\frac{3}{2}$	$\frac{45}{19372}$	$\frac{15}{-25360}$	$\frac{32}{64448}$	$\frac{-212}{-212}$				
	9	$\frac{6561}{9017}$	$\frac{2187}{-355}$	$\frac{6561}{46732}$	$\frac{729}{49}$	$\frac{-5103}{18656}$			
	1	$\frac{3168}{35}$	$\frac{33}{0}$	$\frac{5247}{500}$	$\frac{176}{125}$	$\frac{11}{84}$			
	1	$\frac{384}{5197}$	0	$\frac{1113}{7571}$	$\frac{192}{393}$	$\frac{84}{-92097}$			
5° orden: b_i	$\frac{57600}{35}$	0	0	$\frac{16695}{500}$	$\frac{640}{125}$	$\frac{339200}{-2187}$	$\frac{187}{11}$	$\frac{1}{40}$	
4° orden: b_i^*	$\frac{384}{384}$	0	0	$\frac{1113}{1113}$	$\frac{192}{192}$	$\frac{6784}{6784}$	$\frac{84}{84}$	0	

Este es uno de los métodos del tipo Runge-Kutta, que se utiliza para calcular en MatLab, soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 16 La función $\phi_f(x_n, \gamma_n; h) = \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, \gamma_n; h)$ es la función de incremento.

En la definición anterior el subíndice pone de manifiesto la dependencia de la función de incremento con la función $\gamma' = f(x, \gamma)$. Obsérvese que si la función f es de Lipschitz en γ , la función de incremento también será de Lipschitz en γ .

4.1.1 Consistencia

Definición 17 Un método de Runge-Kutta es consistente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias si y sólo si $\phi_f(x, \gamma; 0) = f(x, \gamma)$, con $x \in [a, b]$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$

Definición 18 Un método de Runge-Kutta es consistente de orden p si el error por cada paso o iteración es del orden $O(h^p)$ y el error acumulado del orden $O(h^{p+1})$.

Definición 19 Se dice que $\phi_f(x, \gamma; h)$ satisface la hipótesis de continuidad si ϕ_f depende de forma continua de sus $n + 2$ argumentos escalares en $R = \{(x, \gamma_1, \dots, \gamma_n; h) : a \leq x \leq b, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}, 0 \leq h \leq h_0\}$

4.1.2 Estabilidad

Definición 20 Región de Estabilidad: Dado el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \partial_x y &= \lambda y, \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

y un método numérico para EDO's, si y_n denota la solución numérica del problema, obtenida mediante la aplicación del método, con paso constante $h > 0$, la región de estabilidad del método, se define como:

$$\mathfrak{R} = \left\{ \lambda h \in \mathbb{C} : y_n \rightarrow 0 \right\}_{n \rightarrow \infty}$$

Definición 21 *A-Estabilidad:* Un método numérico es A-estable si el conjunto de los números complejos con parte real negativa está contenido en la región de estabilidad $\mathbb{C}^- = \{z : R_e(Z)\} \subseteq \mathbb{R}$

Definición 22 Dado el problema de valor inicial $\begin{matrix} \partial_x \gamma = & f(x, \gamma) \\ \gamma(x_n) = & \gamma_n \end{matrix}$ se define el error global de discretización en el punto $x_n + ch$, como $\gamma(x_n + ch) - \gamma_{n+ch}$, donde γ_{n+ch} se obtiene mediante la aplicación de un método numérico para EDO's

4.1.3 Convergencia

Definición 23 *Convergencia:* Un método numérico es convergente si para todo problema de valor inicial el error global de discretización tiende a cero, cuando el tamaño del paso tiende a cero

4.2 Método de Runge- Kutta clásico

El método de Runge-Kutta clásico es un método explícito de orden 4, se representa mediante el tablero:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

A continuación se estudiará la consistencia, convergencia y estabilidad del método.

De acuerdo a la definición de consistencia se requiere que el incremento coincida con el valor de las funciones que determinan el sistema de ecuaciones diferenciales cuando el incremento es idénticamente 0. Dado que los k_{li} , $1 \leq l \leq 3$ vienen dados por:

$$k_{l,i} = f_l \left(x_n + c_i h, \gamma_{1n} + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_{1j}, \gamma_{2n} + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_{2j}, \gamma_{3n} + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_{3j}, \right)$$

si $h = 0$, $k_{li} = f_l(x_n, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \gamma_{3n}) = f_l(x_n, \gamma)$

Cuando $h = 0$ la función de incremento,

$$\phi_{f_l}(x_n, \gamma_n; h) = \sum_{i=1}^s b_i k_{li}(x_n, \gamma_n; h)$$

es

$$\begin{aligned}
\phi_{f_l}(x_n, \gamma_n; 0) &= \sum_{i=1}^s b_i k_{li}(x_n, \gamma_n; 0) = \\
&= \left(\sum_{i=1}^s b_i \right) f_j(x_n, \gamma) = f_j(x_n, \gamma) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^s b_i = 1
\end{aligned}$$

Luego el método es consistente si y sólo si $\sum_{i=1}^s b_i = 1$.

Para un problema de valor inicial, la diferencia entre el valor de la función en el punto $(x_{n+1}, \gamma(x_{n+1})) = (x_n + h, \gamma(x_n + h))$, y el valor γ_{n+1} se expresa por

$$\begin{aligned}
\gamma(x_{n+1}) - \gamma_{n+1} &= \gamma(x_{n+1}) - \left[\gamma(x_n) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i(x_n, \gamma(x_n); h) \right] = \\
&= \gamma(x_{n+1}) - [\gamma(x_n) + h \phi_f(x_n, \gamma_n; h)] \\
\text{con: } (x_n, \gamma(x_n)) &= (x_n, \gamma_n)
\end{aligned}$$

El teorema que se enuncia a continuación pone de manifiesto que el método de Runge -Kutta clásico tiene un orden de consistencia de a lo sumo 4.

Teorema 24 *Un método de Runge-Kutta explícito de s etapas no puede tener orden mayor que s*

Prueba. *El método se aplicará al problema de valor inicial $y'(x) = y(x)$, con $x \in (0, b) \wedge y(0) = 1$. La solución exacta es $y(x) = e^x$. Se define*

$$F(h) = e^{x_n+h} \wedge G(h) = e^{x_n} + h \sum_{i=1}^n b_i k_i(x_n, e^{x_n}, h)$$

\Rightarrow

$$\partial_h^p F(0) = \partial_h^p e^{x_n+0} = e^{x_n} = y(x_n)$$

\wedge

$$\partial_h^p G(0) = p \sum_{j_1=1}^s b_{j_1} k_{j_1}^{(p-1)}(x_n, e^{x_n}; 0) + 0 \sum_{j_1=1}^s b_{j_1} k_{j_1}^{(p)}(x_n, e^{x_n}; 0)$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
k_{j_1}^{(p-1)}(x_n, e^{x_n}, 0) &= (p-1) \sum_{j_2=1}^s a_{j_1 j_2} k_{j_2}^{(p-2)}(x_n, e^{x_n}, 0) = \\
&= (p-1)(p-2) \sum_{j_2, j_3=1}^s a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} k_{j_3}^{(p-3)}(x_n, e^{x_n}, 0) = \\
&= \cdots (p-1)! \sum_{j_2, j_3, \dots, j_p=1}^s a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_{p-1} j_p} k_{j_p}^{(p-p)}(x_n, e^{x_n}, 0)
\end{aligned}$$

Cuando $h = 0$, $k_{j_p}^{(p-p)}(x_n, e^{x_n}, 0) = e^{x_n} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{d^{(p)}G}{dh^p}(0) &= p \sum_{j_1=1}^s b_{j_1} k_{j_1}^{(p-1)}(x_n, e^{x_n}, 0) = \\
&= \left(p \sum_{j_1=1}^s b_{j_1} \right) (p-1)! \sum_{j_2, j_3, \dots, j_{p-1}, j_p=1}^s a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_{p-1} j_p} e^{x_n} = \\
&= p! \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^s b_{j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_{p-1} j_p} e^{x_n} = e^{x_n}
\end{aligned}$$

luego, para que el método sea de orden p es necesario que

$$p! \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^s b_{j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_{p-1} j_p} = 1$$

Si el método es explícito, $a_{ij} = 0$ cuando $i \leq j$. Por tanto, si para la sucesión de enteros $j_1, j_2, \dots, j_p \in \{1, 2, \dots, s\}$ se tiene que $j_1 < j_2 < \cdots < j_p \Rightarrow \sum_{j_1, j_2, j_3, \dots, j_p}^s b_{j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_{p-1} j_p} = 0$ y la condición necesaria no podría cumplirse, por tanto dicha sucesión de enteros sólo puede existir si $p \leq s$

■

De acuerdo a lo anterior se concluye que el método de Runge-Kutta explícito de 4 etapas, tiene un orden de consistencia que es a lo sumo 4.

Teorema 25 Un método de Runge-Kutta es consistente, si y sólo si, es convergente

Prueba. Sea la ecuación diferencial $y'(x) = 1$ con la condición inicial $y(0) = 0$, si el método es convergente, lo será en particular para esta ecuación, cuya solución exacta es $y(x) = x$. Para este problema los $k_i = f\left(c_i h, h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) =$

1 luego, $y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j$ partiendo de $y_0 = 0$ se tiene que $y_m = mh \sum_{j=1}^s b_j = x_m \sum_{j=1}^s b_j \Rightarrow y(x_m) - y_m = x_m \left(1 - \sum_{j=1}^s b_j\right)$ entonces y_m converge a $y(x_m)$ si y sólo si $\left(1 - \sum_{j=1}^s b_j\right)$ converge a 0, pero esto implica que debe cumplirse la condición de consistencia. ■

Ejemplo 26 Sea la ecuación diferencial escalar ordinaria $\partial_x y = \lambda y$, cuya solución exacta es $y = e^{\lambda x + c}$, $c \in \mathbb{R}$, si se aplica el método de Runge-Kutta clásico a esta ecuación diferencial, con condiciones iniciales $(0, e^c)$, tamaño de paso h , se tiene que $k_1 = \lambda e^c$, $k_2 = \frac{\lambda e^c}{2} (2 + \lambda h)$, $k_3 = \frac{\lambda e^c}{4} (4 + 2\lambda h + \lambda h^2)$, $k_4 = \frac{\lambda e^c}{4} (4 + 4\lambda h + 2\lambda h^2 + \lambda h^3)$ la función de incremento es: $\frac{1}{6}\lambda e^c + \frac{1}{3}\frac{\lambda e^c}{2} (2 + \lambda h) + \frac{1}{3}\frac{\lambda e^c}{4} (4 + 2\lambda h + \lambda h^2) + \frac{1}{6}\frac{\lambda e^c}{4} (4 + 4\lambda h + 2\lambda h^2 + \lambda h^3)$, que cuando $h \rightarrow 0$ tiende a λe^c .

Ejemplo 27 A continuación se aplicará el método de Runge-Kutta clásico al problema de valores iniciales $\begin{aligned} \partial_t \mathbf{X} &= f(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(0) &= (-2, 1, 0) \end{aligned}$,

$$f(t, \mathbf{X}) = (t, f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) = \partial_t x_1(t) \\ f_2(t) &= -x_2(t) = \partial_t x_2(t) \\ f_3(t) &= -x_1(t) - 3x_2(t) - 3x_3(t) = \partial_t x_3(t) \\ 0 &\leq t \leq b \\ x_1(0) &= -2; x_2(0) = 1; x_3(0) = 0 \end{aligned}$$

Se evaluará f_l en $N+1$ valores uniformemente espaciados, en el intervalo $[0, b]$

$$\begin{aligned} k_{l,i} &= f_l \left(0 + c_i h, -2 + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} k_{1j}, 1 + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} k_{2j}, 0 + h \sum_{j=1}^4 a_{ij} k_{3j}, \right) \\ 1 &\leq l \leq 3, 1 \leq i \leq 4 \end{aligned}$$

Argumentos extremos $0, b$; número de ecuaciones: 3
de entrada: entero N , condiciones iniciales: $(-2, 1, 0)$
Salida: Aproximaciones u_1 a $x_1(t)$, u_2 a $x_2(t)$, u_3 a $x_3(t)$
en los $N+1$ valores de t

Paso 1	Tomar $h = \frac{b}{N}$	$t = 0$
Paso 2	Para $l = 1, 2, 3$	$u_l = x_l$
Paso 3	Para $i = 1, 2, \dots, N$	hacer los pasos 4 al 10
Paso 4	Para $l = 1, 2, 3$	$k_{l,1} = f_l(0, -2, 1, 0,)$
Paso 5	Para $l = 1, 2, 3$	$k_{l,2} = f_l\left(\frac{h}{2}, -2 + 2h, 1 - \frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right)$
Paso 6	Para $l = 1, 2, 3$	$k_{l,3} = f_l\left(\frac{h}{2}, -2 + 2h - \frac{7h^2}{4}, 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}, -h + h^2\right)$
Paso 7	Para $l = 1, 2, 3$	$k_{l,4} = f_l\left(h, -2 + 4h - 4h^2 + \frac{13h^3}{4}, 1 - h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}, -h + \frac{5h^2}{2} - 2h^3\right)$
Paso 8	Para $l = 1, 2, 3$	$u_l = u_l + \frac{h}{6}(k_{l,1} + 2k_{l,2} + 2k_{l,3} + k_{l,4})$
Paso 9	Tomar $t = ih$	
Paso 10	Salida	(t, u_1, u_2, u_3)
Paso 11	Parar	

Dado que la solución exacta del sistema, bajo las condiciones iniciales

$$x_1(0) = -2; \quad x_2(0) = 1; \quad x_3(0) = 0$$

es

$$e^{-t}(1, 1, -2)^T - 3e^{-2t}(1, 0, -1)^T - e^{-2t}(t, 0, 1 - t)^T$$

El error por paso para cada función x_l y $t = 0 + ih \leq b$ se puede calcular, para cada función x_l , mediante:

$$\begin{aligned} \text{para } x_1 & e^{-ih} - 3e^{-2ih} - ihe^{-2ih} + 2 - \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) \\ \text{para } x_2 & e^{-ih} + 1 - \frac{h}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) \\ \text{para } x_3 & -2e^{-ih} + 3e^{-2ih} - e^{-2ih} + ihe^{-2ih} - \frac{h}{6}(k_{3,1} + 2k_{3,2} + 2k_{3,3} + k_{3,4}) \end{aligned}$$

5 Método de diferencias finitas

En cualquier método numérico, el conjunto infinito y continuo, correspondiente al dominio de la función desconocida que debe satisfacer una determinada ecuación diferencial con condiciones iniciales o condiciones de frontera, es sustituido por un conjunto finito y discreto de datos, obtenidos mediante métodos iterativos, a partir de las condiciones iniciales o de frontera.

El método de diferencias finitas aproxima la primera derivada de una función mediante aproximación en *diferencias hacia adelante*, *diferencias hacia atrás* o *diferencias centrales*. El sustento de estas aproximaciones se encuentran en la posibilidad de desarrollar en Serie de Taylor cualquier función que tenga derivadas de cualquier orden.

Una función que tenga derivadas de cualquier orden puede desarrollarse en Serie de Taylor alrededor de un punto x_n , $T(h, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_n)}{k!} h^k$, este

desarrollo permite una aproximación al valor de f en el punto $x_n + h$, mediante el polinomio $T_m(h, x_n) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_n)}{k!} h^k$, la calidad de esta aproximación depende del error que se comete al truncar la serie en m , el error puede calcularse mediante $E_m(h) = \frac{1}{m!} \int_{x_n}^{x_n+h} (h-t)^m f^{(m+1)}(t) dt$ o, en forma equivalente, $E_m(h) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} h^{m+1}$ para algún c entre x_n y $x_n + h$.

Para $m = 1$ la Serie de Taylor, lleva a:

$$f(x_n + h) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}h^2$$

y teniendo en cuenta que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} = f'(x_n)$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} &\approx f'(x_n) \\ \wedge |E_2(h)| &= \left| \frac{f^{(2)}(c)}{2!}h \right| \end{aligned}$$

La fórmula $\frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$ es la aproximación en *diferencias hacia adelante*.

Si la aproximación se calcula alrededor del punto $x_n - h$, el polinomio de aproximación es $\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k f^{(k)}(x_n)}{k!} h^k$ y el desarrollo hasta $m = 1$, arroja:

$$f(x_n - h) = f(x_n) - f'(x_n)h + \frac{f^{(2)}(d)}{2!}h^2$$

$x_n - h < d < x_n$, entonces $\frac{f(x_n) - f(x_n - h)}{h}$ es una aproximación a $f'(x_n)$ por medio de las *diferencias hacia atras*, y el error de truncamiento es del mismo orden que el que se comete en las *diferencias hacia adelante*.

Para obtener la fórmula de *diferencias centrales*, se aproxima f en los puntos $x_n + h$ y $x_n - h$ hasta $m = 2$,

$$f(x_n + h) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f^{(2)}(x_n)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}h^3$$

y

$$f(x_n - h) = f(x_n) - f'(x_n)h + \frac{f^{(2)}(x_n)}{2!}h^2 - \frac{f^{(3)}(d)}{3!}h^3$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} f(x_n + h) - f(x_n - h) &= 2f'(x_n)h + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}h^3 + \frac{f^{(3)}(d)}{3!}h^3 \\ &\Rightarrow \frac{f(x_n + h) - f(x_n - h)}{2h} \approx f'(x_n) \end{aligned}$$

y un error de aproximación de:

$$\left| \frac{f^{(3)}(u)}{6} h^2 \right|, x_n - h < u < x_n + h$$

Si se desarrolla f hasta $m = 3$ alrededor de los puntos $x_n + h$ y $x_n - h$ se obtiene la *diferencia para la segunda derivada*:

$$f(x_n + h) = f(x_n) + \partial_x f(x_n) h + \frac{\partial_x^2 f(x_n)}{2!} h^2 + \frac{\partial_x^3 f(x_n)}{3!} h^3 + \frac{\partial_x^4 f(c)}{4!} h^4$$

\wedge

$$f(x_n - h) = f(x_n) - \partial_x f(x_n) h + \frac{\partial_x^2 f(x_n)}{2!} h^2 - \frac{\partial_x^3 f(x_n)}{3!} h^3 + \frac{\partial_x^4 f(d)}{4!} h^4$$

sumando $f(x_n + h)$ y $f(x_n - h)$ se tiene,

$$f(x_n + h) + f(x_n - h) = 2f(x_n) + \partial_x^2 f(x_n) h^2 + \frac{\partial_x^4 f(c)}{4!} h^4 + \frac{\partial_x^4 f(d)}{4!} h^4$$

luego,

$$\frac{f(x_n + h) + f(x_n - h) - 2f(x_n)}{h^2} = \partial_x^2 f(x_n) + \frac{\partial_x^4 f(c)}{4!} h^2 + \frac{\partial_x^4 f(d)}{4!} h^2$$

\Rightarrow

$$\frac{f(x_n + h) + f(x_n - h) - 2f(x_n)}{h^2} \approx \partial_x^2 f(x_n)$$

y error de aproximación:

$$\left| \frac{\partial_x^4 f(u)}{12} h^2 \right|, x_n - h < u < x_n + h$$

Ejemplo 28 Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ \text{sea } x_1' &= x_2, \text{ como } x_2' = -x_2, \\ x_2' &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2x_2 + x_3 = -x_1 - 2x_2' + x_2' = -x_1 - x_2' \\ \Rightarrow x_1' &= -x - x'' \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}x'_3 &= -x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -x_1 - 3(-x'_2) - 3x'_2 = -x_1 \\ \Rightarrow x'_3 &= -x_1 \Rightarrow x'_3 = -x\end{aligned}\quad (3.2)$$

combinando 3.1 y 3.2 se tiene: $x'_1 + x'' = -x = x'_3$ pero $x' = x'_1 \Rightarrow x' + x'' = -x = x'_3 \Rightarrow x'' + x' + x = 0$ es la ecuación homogénea de segundo orden equivalente al sistema, la solución general de esta ecuación es:

$$\begin{aligned}e^{\frac{-t}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \\ C_1 = -2, C_2 = 1.3255\end{aligned}$$

se tiene que para $t = 0$, $x = -2$, para $t = 1$, $x = \frac{e-4}{e^2} = -0.17346$. Para resolver esta ecuación aplicando el método de diferencias finitas, se aplicarán las fórmulas de discretización: $\frac{f(x_n+h) + f(x_n-h) - 2f(x_n)}{h^2} \approx \partial_x^2 f(x_n)$ y $\frac{f(x_n+h) - f(x_n-h)}{2h} \approx \partial_x f(x_n)$ reemplazando en la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{f(t_n+h) + f(t_n-h) - 2f(t_n)}{h^2} + \frac{f(t_n+h) - f(t_n-h)}{2h} + f(t_n) &= 0 \\ \Rightarrow (2+h)f(t_n+h) + (2-h)f(t_n-h) + (2h^2-4)f(t_n) &= 0\end{aligned}$$

aproximando:

$$f(t_n+h) = f_{n+1}, \quad f(t_n-h) = f_{n-1}, \quad f(t_n) = f_n$$

se tiene:

$$(2+h)f_{n+1} + (2-h)f_{n-1} + (2h^2-4)f_n = 0$$

\Rightarrow para

$$\begin{aligned}i=1 \quad (2+h)f_2 + (2-h)f_0 + (2h^2-4)f_1 &= 0 \\ i=2 \quad (2+h)f_3 + (2-h)f_1 + (2h^2-4)f_2 &= 0 \\ i=3 \quad (2+h)f_4 + (2-h)f_2 + (2h^2-4)f_3 &= 0\end{aligned}$$

usando las condiciones de frontera $f_0 = x_0 = -2$ y $f_4 = -0.17346$ el sistema de ecuaciones se representa como:

$$\begin{pmatrix} 2h^2-4 & 2+h & 0 \\ 2-h & 2h^2-4 & 2+h \\ 0 & 2-h & 2h^2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2h \\ 0 \\ \frac{(4-e)(2+h)}{e^2} \end{pmatrix}$$

con $t_n \in [0, 1]$ y $h = 0.25$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} -3.875 & 2.25 & 0 \\ 1.75 & -3.875 & 2.25 \\ 0 & 1.75 & -3.875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0.390 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4727 \\ -0.9808 \\ -0.5436 \end{pmatrix}$$

Calculando los valores de: $e^{\frac{-t}{2}} \left(-2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + 1.3255 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$ en los nodos 0.25, 0.5, 0.75 se tiene:

$$\begin{aligned} e^{\frac{-0.25}{2}} \left(-2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} 0.25 + 1.3255 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} 0.25 \right) &= -1.4725 \\ e^{\frac{-0.5}{2}} \left(-2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} 0.5 + 1.3255 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} 0.5 \right) &= -0.98068 \\ e^{\frac{-0.75}{2}} \left(-2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} 0.75 + 1.3255 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} 0.75 \right) &= -0.5437 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -1.4727 \\ -0.9808 \\ -0.5436 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.4725 \\ -0.98068 \\ -0.5437 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -2 \times 10^{-4} \\ -1.2 \times 10^{-4} \\ -1.0 \times 10^{-4} \end{vmatrix} \text{ el orden del error es inferior a } 10^{-3}$$

Part IV

Movimiento de un sólido rígido y la ecuación diferencial objetivo

6 Movimiento de un sólido rígido

Un sólido rígido es un conjunto de puntos del espacio que conservan la distancia entre ellos, bajo la acción de fuerzas aplicadas. Un movimiento de un sólido rígido es un movimiento rígido. Los movimientos rígidos pueden ser traslaciones o rotaciones.

En una traslación, dos puntos cualesquiera del conjunto de puntos se mueven siguiendo una trayectoria paralela. Una rotación se realiza alrededor de un eje que bien puede pasar por puntos del sólido o por puntos que no forman parte del mismo, dos puntos cualesquiera que se encuentren sobre el mismo vector, cuyo origen es un punto del eje de rotación se mueven con la misma velocidad angular, en general, el movimiento de un sólido rígido es una combinación de rotación y traslación.

Todo movimiento rígido es una isometría y por tanto puede ser descrito mediante transformaciones algebraicas, si V y W son espacios vectoriales, cada uno con un producto interno y d_V es la métrica asociada al producto interno en V y d_W es la métrica asociada al producto interno en W , una isometría ϕ es una función de V en W tal que

$$\forall (v_1, v_2) \in V \times V, d_V(v_1, v_2) = d_W(\phi(v_1), \phi(v_w))$$

Un movimiento de un sólido rígido en el espacio tridimensional se puede describir mediante un grupo de isometrías uniparamétricas, eligiendo como parámetro el tiempo.

Sea $\vec{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función analítica, I un intervalo en \mathbb{R} , la longitud de arco entre los puntos a y b de I se define como

$$s = \int_a^b \left\| \vec{\gamma}'(t) \right\| dt$$

El vector tangente unitario de la curva γ en \mathbb{R}^3 cuando esta ha sido parametrizada por su longitud de arco es,

$$\vec{\mu}(s) = \vec{\gamma}'(s)$$

La función de curvatura de γ es

$$\kappa(s) = \left\| \vec{\mu}'(s) \right\|$$

El vector normal principal de $\vec{\gamma}(s)$ es

$$\vec{\eta}(s) = \frac{\vec{\mu}'(s)}{\left\| \vec{\mu}'(s) \right\|}$$

y el vector binormal de $\vec{\gamma}(s)$ es

$$\vec{b}(s) = \vec{\mu}(s) \times \vec{\eta}(s)$$

Además, existe una función escalar $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada la torsión de γ , tal que $\vec{b}'(s) = -\tau(s) \vec{\eta}(s)$.

Si e_1, e_2, e_3 son vectores unitarios ortogonales dos a dos, y $p \in \mathbb{R}^3$, un sistema ortonormal de coordenadas con origen en p se simboliza como: (p, e_1, e_2, e_3) y es un sistema de referencia en p .

Los vectores $\vec{\mu}(s)$, $\vec{\eta}(s)$, $\vec{b}(s)$, son vectores unitarios, ortogonales entre sí, y junto con $\vec{\gamma}(s)$ forman un sistema de referencia para la curva $\vec{\gamma}$ conocido como sistema de referencia de Frenet para la curva.

El siguiente teorema enuncia que es posible especificar una curva si se conoce su función de curvatura y su torsión:

Teorema 29 Teorema Fundamental de Curvas: *Dadas dos funciones diferenciables $\kappa(s) > 0, \tau(s)$, $s \in I$, existe una curva regular $\vec{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s es la longitud de arco, $\kappa(s)$ es la curvatura y $\tau(s)$ es la torsión de γ . Además, si otra curva $\vec{\chi}$ satisface las mismas condiciones, esta difiere de $\vec{\gamma}$ por un movimiento rígido, esto es, existe una transformación lineal y ortogonal T con determinante positivo y un vector \vec{c} tal que $\vec{\chi} = T \vec{\gamma} + \vec{c}$*

Para encontrar la curva se resuelve el sistema

$$\partial_s \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ b \end{pmatrix}$$

y luego se encuentra $\vec{\gamma}$ por medio de $\vec{\gamma}(s) = \int_0^s \vec{\mu}(\zeta) d\zeta$

En \mathbb{C}^3 una ecuación de movimientos rígidos se describe mediante el sistema diferencial

$$\partial_z \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(z) & \rho(z) \\ -\kappa(z) & 0 & \tau(z) \\ -\rho(z) & -\tau(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ b \end{pmatrix}$$

en donde $\kappa(z)$, $\rho(z)$, $\tau(z)$ son funciones analíticas en algún dominio complejo. Si las funciones μ , η , b , son soluciones del sistema, entonces $\mu^2 + \eta^2 + b^2$ es constante (basta derivar esta expresión para comprobar que su derivada vale cero para todo $z \in \mathbb{C}$), luego, para cualquier valor de la constante las soluciones se encontrarán sobre esferas de radios igual al valor de la constante, se tendrían esferas de radio positivo, negativo o imaginario.

Para estudiar la esfera compleja, $S = \{(\mu, \eta, b) \in \mathbb{C}^3 : \mu^2 + \eta^2 + b^2 = r^2\}$, los espacios proyectivos son una herramienta idónea ya que es posible representar formas cuadráticas mediante un polinomio homogéneo de grado 2.

7 La ecuación objetivo

El sistema diferencial lineal objeto de nuestro interés es:

$$\begin{aligned} \partial_x \gamma_1 &= -\frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \gamma_3 \\ [A] := \partial_x \gamma_2 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \gamma_3 \\ \partial_x \gamma_3 &= \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \gamma_1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \gamma_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \gamma_1 \\ \partial_x \gamma_2 \\ \partial_x \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \\ 0 & 0 & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} & -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

con matriz de coeficientes antisimétrica. De acuerdo a lo expuesto, este sistema describirá el movimiento de un cuerpo rígido en el espacio vectorial \mathbb{C}^3 o en un espacio afín, con $\kappa(x) = 0$, $\rho(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}}$, $\tau(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. La curva que describe el movimiento del sólido rígido se obtiene al solucionar este sistema.

7.1 Algebrización y cambio Hamiltoniano de variable

La teoría de Galois establece que es posible encontrar las raíces de un polinomio p , definido sobre un cuerpo \mathbb{k} , realizando operaciones aritméticas y radicaciones con sus coeficientes, siempre y cuando el grupo de Galois del polinomio sea resoluble, esto es, exista una cadena finita de subgrupos normales, $\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft Gal_p(F/\mathbb{k})$. El grupo de Galois de un polinomio está formado por los homomorfismos que al actuar sobre las raíces del polinomio producen también raíces.

La teoría de Galois diferencial establece proposiciones análogas para las ecuaciones diferenciales: permite decidir cuándo una ecuación diferencial se puede resolver a partir de sus coeficientes encontrando el correspondiente grupo resoluble.

Para determinar este grupo, es necesario desarrollar un proceso de algebrización de la ecuación diferencial, el cual consiste en expresar las funciones coeficientes de la ecuación diferencial como funciones racionales, el proceso de algebrización es posible mediante el procedimiento llamado *cambio hamiltoniano de variable*.

Definición 30 *Cambio Hamiltoniano de variable: (T. P., pag. 63) Un cambio de variable $x = x(t)$ es un cambio Hamiltoniano de variable, si y sólo si $(x(t), \partial_t x(t))$ es una solución del sistema autónomo clásico Hamiltoniano con un grado de libertad, $H = H(x, p) = \frac{p^2}{2} + V(x)$, para algún V , elemento de un cuerpo diferencial con coeficientes en \mathbb{C} .*

Si un cambio de variable es Hamiltoniano, existe α tal que $(\partial_t x)^2 = \alpha(x)$ y por tanto, $\widehat{\partial}_t = \sqrt{\alpha} \partial_t$ define una derivación para la nueva variable. Puede verificarse que:

$$\begin{aligned}\widehat{\partial}_t(f + g) &= \widehat{\partial}_t f + \widehat{\partial}_t g \\ \widehat{\partial}_t(f \times g) &= g \times \widehat{\partial}_t f + f \times \widehat{\partial}_t g \\ \widehat{\partial}_t\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \times \widehat{\partial}_t f - f \times \widehat{\partial}_t g}{g^2}\end{aligned}$$

y la regla de la cadena:

$$\widehat{\partial}_t(f \circ g) = \partial_g f \circ g \times \widehat{\partial}_t(g)$$

En efecto,

$$\widehat{\partial}_t(f + g) = \sqrt{\alpha} \partial_t(f + g) = \sqrt{\alpha}(\partial_t f + \partial_t g) = \sqrt{\alpha} \partial_t f + \sqrt{\alpha} \partial_t g = \widehat{\partial}_t f + \widehat{\partial}_t g$$

$$\begin{aligned}\widehat{\partial}_t(f \times g) &= \sqrt{\alpha} \partial_t(f \times g) = \sqrt{\alpha}(g \times \partial_t f + f \times \partial_t g) \\ &= g \times \sqrt{\alpha} \partial_t f + f \times \sqrt{\alpha} \partial_t g = g \times \widehat{\partial}_t f + f \times \widehat{\partial}_t g\end{aligned}$$

De manera análoga para el cociente.

Para la regla de la cadena se tiene:

$$\begin{aligned}\widehat{\partial}_t(f \circ g) &= \sqrt{\alpha} \partial_t(f \circ g) = \sqrt{\alpha} \partial_t f(g(t)) \times \partial_t g \\ &= \partial_t f(g(t)) \times \sqrt{\alpha} \partial_t g = \partial_t f(g(t)) \widehat{\partial}_t g = \partial_g f \circ g \times \widehat{\partial}_t g\end{aligned}$$

(Teorema T. P.):

Teorema 31 *Dados los sistemas de ecuaciones diferenciales $[A]$ y $[\widehat{A}]$ con $\partial_x Y = -AY$, $\widehat{\partial}_z \widehat{Y} = -\widehat{A}\widehat{Y}$, $A = [a_{ij}]$, $\widehat{A} = [\widehat{a}_{ij}]$, $Y = [y_{i1}]$, $\widehat{Y} = [\widehat{y}_{i1}]$ donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $a_{ij}(x) = \widehat{a}_{ij}(z(x))$ y $y_{i1}(x) = \widehat{y}_{i1}(z(x))$. Sea φ la tran-*

$$\text{formación dada por } \varphi : \begin{cases} x \rightarrow z \\ a_{ij} \rightarrow \widehat{a}_{ij}, a_{ij} \in \mathbb{k} = \mathbb{C}(z(x), \partial_x(z(x))) \\ \widehat{a}_{ij} \in \mathbb{C}(z) \subseteq \widehat{\mathbb{k}} = \mathbb{C}(z, \sqrt{\alpha}) \\ y_{i1}(x) \rightarrow \widehat{y}_{i1}(z(x)) \\ \partial_x = \widehat{\partial}_z \end{cases} \quad \text{entonces}$$

las siguientes afirmaciones son válidas:

$$\begin{aligned}\mathbb{k} &\simeq \widehat{\mathbb{k}}, (\mathbb{k}, \partial_x) \simeq (\widehat{\mathbb{k}}, \widehat{\partial}_z) \\ DGal_{\mathbb{k}}([A]) &\simeq DGal_{\widehat{\mathbb{k}}}([\widehat{A}]) \subset DGal_{\mathbb{C}(z)}([\widehat{A}]) \\ (DGal_{\mathbb{C}(z)}([A]))^0 &\simeq (DGal_{\mathbb{C}(z)}([\widehat{A}]))^0\end{aligned}$$

Mediante el cambio hamiltoniano de variable $e^x = z$, las funciones transcendentales del sistema diferencial objetivo se transforman en funciones racionales, lo que permite la algebrización del proceso de solución del sistema diferencial, en efecto:

$$\begin{aligned}\partial_x z = e^x = z = \sqrt{\alpha} &\Rightarrow \alpha = (\partial_x z)^2 = z^2 \in \mathbb{C}(z) \\ \partial_x z = z \partial_x &= e^x \partial_x = \sqrt{\alpha} \partial_x \gamma_i(x) = \widehat{\partial}_z \widehat{\gamma}_i(z)\end{aligned}$$

además,

$$e^x + e^{-x} = \frac{z^2 + 1}{z} \wedge e^x - e^{-x} = \frac{z^2 - 1}{z}$$

entonces, el sistema se transforma en:

$$\begin{aligned}\partial_z \widehat{\gamma}_1 &= -\frac{2\sqrt{2}}{z^2 + 1} \widehat{\gamma}_3 \\ [\widehat{A}] := \partial_z \widehat{\gamma}_2 &= \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 1)} \widehat{\gamma}_3 \\ \partial_z \widehat{\gamma}_3 &= \frac{2\sqrt{2}}{z^2 + 1} \widehat{\gamma}_1 - \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 1)} \widehat{\gamma}_2\end{aligned}$$

cuya forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} \partial_z \hat{\gamma}_1 \\ \partial_z \hat{\gamma}_2 \\ \partial_z \hat{\gamma}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} \\ 0 & 0 & \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} \\ \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} & -\frac{z^2-1}{z(z^2+1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \hat{\gamma}_3 \end{pmatrix}$$

Una vez se ha algebrizado el sistema y dado que éste representa un movimiento rígido se hará uso de las *coordenadas simétricas de Darboux* (T. S. C.) para la esfera compleja : $x^2 + y^2 - z^2 = u^2$, estas coordenadas son:

$$u = \frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy}$$

$$v = \frac{z-1}{x-iy} = \frac{x+iy}{-(1+z)}$$

Identificando x con $\hat{\gamma}_1$, y con $\hat{\gamma}_2$, z con $\hat{\gamma}_3$ se tiene:

$$u = \frac{\hat{\gamma}_1(z) + i\hat{\gamma}_2(z)}{1 - \hat{\gamma}_3(z)} = \frac{1 + \hat{\gamma}_3(z)}{\hat{\gamma}_1(z) - i\hat{\gamma}_2(z)}$$

$$v = \frac{\hat{\gamma}_3(z) - 1}{\hat{\gamma}_1(z) - i\hat{\gamma}_2(z)} = \frac{\hat{\gamma}_1(z) + i\hat{\gamma}_2(z)}{-(1 + \hat{\gamma}_3(z))}, z \in \mathbb{C}$$

Si se deriva a u con respecto a z , se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_z u &= \frac{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} + i\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}\right) \hat{\gamma}_3 (1 - \hat{\gamma}_3)}{(1 - \hat{\gamma}_3)^2} + \\ &+ \frac{-(\hat{\gamma}_1 + i\hat{\gamma}_2) \left(\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} \hat{\gamma}_1 + \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} \hat{\gamma}_2\right)}{(1 - \hat{\gamma}_3)^2} = \\ &= \frac{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} + i\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}\right) \hat{\gamma}_3 (1 - \hat{\gamma}_3)}{(1 - \hat{\gamma}_3)^2} + \\ &+ \frac{-u (1 - \hat{\gamma}_3) \left(\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} \hat{\gamma}_1 + \frac{z^2-1}{z(z^2+1)} \hat{\gamma}_2\right)}{(1 - \hat{\gamma}_3)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} + i\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}\right)\hat{\gamma}_3 - u\left(\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\hat{\gamma}_1 + \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}\hat{\gamma}_2\right)}{1-\hat{\gamma}_3} \\
&= \frac{\hat{\gamma}_3}{1-\hat{\gamma}_3} \left(i\frac{z^2-1}{z(z^2+1)} - \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right) + \\
&\quad -u\frac{1}{1-\hat{\gamma}_3} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\hat{\gamma}_1 + \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}\hat{\gamma}_2\right) \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
\frac{u+v}{u-v} &= \hat{\gamma}_3, 1-\hat{\gamma}_3 = \frac{-2v}{u-v}, \frac{\hat{\gamma}_3}{1-\hat{\gamma}_3} = -\frac{u+v}{2v} \\
\frac{1-uv}{u-v} &= \hat{\gamma}_1, \frac{1+uv}{u-v}i = \hat{\gamma}_2
\end{aligned}$$

La expresión 4.2 se transforma en

$$\begin{aligned}
&-\frac{u+v}{2v} \left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i - \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right) + \\
&-u\frac{v-u}{2v} \left(\frac{1}{u-v}\right) \left(\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i - \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right) + uv\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i + \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right)\right) \\
&= -\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i - \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right) \frac{u+v}{2v} + \\
&\quad + \frac{u}{2v} \left(\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i - \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right) + uv\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i + \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right)\right) \\
&= -\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i - \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right) \frac{u+v}{2v} + \\
&\quad + \frac{u}{2v} \left(\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i - \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right) + uv\left(\frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i + \frac{2\sqrt{2}}{z^2+1}\right)\right) \\
&= \frac{u^2}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} + \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} - \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i\right)
\end{aligned}$$

El sistema se ha transformado en una Riccati:

$$\partial_z u = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} + \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i\right) u^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{z^2+1} - \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}i\right) \tag{4.3}$$

Esta misma ecuación, sin algebrizar es:

$$\partial_z u = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x(e^x + e^{-x})}i \right) u^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x(e^x + e^{-x})}i \right)$$

Ahora, mediante el cambio $u = \varepsilon \frac{\partial_z y}{y} = \varepsilon \partial_z (\ln y)$, donde ε es una función de z a determinar, se transformará la ecuación 4.3 en una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

$$\text{Sea } \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{z^2 + 1} + \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 1)}i \right), \text{ luego}$$

$$\partial_z u = \alpha u^2 + \bar{\alpha} = \partial_z \varepsilon \frac{\partial_z y}{y} + \varepsilon \left(\frac{\partial_z^2 y}{y} - \left(\frac{\partial_z y}{y} \right)^2 \right)$$

\Rightarrow

$$\alpha \left(\varepsilon \frac{\partial_z y}{y} \right)^2 + \bar{\alpha} = \partial_z \varepsilon \frac{\partial_z y}{y} + \varepsilon \left(\frac{\partial_z^2 y}{y} - \left(\frac{\partial_z y}{y} \right)^2 \right)$$

que puede escribirse como:

$$\partial_z^2 y + \left(\frac{\partial_z \varepsilon}{\varepsilon} \right) \partial_z y - \frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon} y - (1 + \alpha \varepsilon) \frac{(\partial_z y)^2}{y} = 0 \quad (4.4)$$

Para que 4.4 sea una ecuación diferencial *lineal* de segundo orden es necesario que $1 + \alpha \varepsilon = 0$, por tanto $\varepsilon = \frac{-1}{\alpha} \wedge \partial_z \varepsilon = \frac{\partial_z \alpha}{\alpha^2}$ lo que finalmente conduce a:

$$\partial_z^2 y - \frac{\partial_z \alpha}{\alpha} \partial_z y + \alpha \bar{\alpha} y = 0 \quad (4.5)$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Es posible solucionar esta última ecuación diferencial mediante el Algoritmo de Kovacic. Una vez determinada la función y será posible determinar las funciones u y v y a partir de estas, las funciones $\widehat{\gamma}_1(z)$, $\widehat{\gamma}_2(z)$, $\widehat{\gamma}_3(z)$ y las funciones $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, $\gamma_3(x)$.

7.2 Solución mediante métodos numéricos

Ahora se probará que la función vectorial,

$$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \gamma_3(x), \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \gamma_3(x), \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \gamma_1(x) - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \gamma_2(x) \right)$$

cumple las condiciones establecidas en el Teorema 14, Capítulo 3, numeral 4, y por tanto es posible solucionar el sistema 4.1 mediante las técnicas propias de los métodos numéricos. En este caso la solución numérica se obtendrá mediante la aplicación de los métodos Runge-Kutta y el método de diferencias finitas.

7.2.1 La función es de Lipschitz en γ

La función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida mediante,

$$\begin{pmatrix} \partial_x \gamma_1 \\ \partial_x \gamma_2 \\ \partial_x \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \\ 0 & 0 & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} & -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

es de Lipschitz en su segunda variable, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$, en efecto, sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \\ 0 & 0 & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} & -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \left\| A \begin{pmatrix} \gamma_1^* \\ \gamma_2^* \\ \gamma_3^* \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} &= \left\| A \begin{pmatrix} \gamma_1^* - \gamma_1 \\ \gamma_2^* - \gamma_2 \\ \gamma_3^* - \gamma_3 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\ &\leq \|A\|_{\infty} \left\| \begin{pmatrix} \gamma_1^* - \gamma_1 \\ \gamma_2^* - \gamma_2 \\ \gamma_3^* - \gamma_3 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \wedge \\ \sum_{j=1}^3 |a_{1j}| &= \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}}, \\ \sum_{j=1}^3 |a_{2j}| &= \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}}, \\ \sum_{j=1}^3 |a_{3j}| &= \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} + \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} \\ \Rightarrow \|A\|_{\infty} &= \frac{2\sqrt{2} + |e^{-x} - e^x|}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

Sea $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq e^{-x} \wedge |e^{-x} - e^x| = e^x - e^{-x}$ entonces,

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty &= \frac{2\sqrt{2} + |e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 2\sqrt{2}e^x - 1}{e^{2x} + 1} = \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^{2x} + 1}\end{aligned}$$

Como $e^{2x} + 1 > 0 \wedge e^{2x} + 1 \geq e^{2x} - 1 \Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \leq 1$ La función $h(x) = \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^{2x} + 1}$ es mayor que cero para todo $x \in \mathbb{R}$, alcanza su único máximo relativo en 0 y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^{2x} + 1} = 0$, se concluye que $0 < \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^{2x} + 1} \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^{2x} + 1} \leq 1 + \sqrt{2}$ Para $x \geq 0, \|A\|_\infty \leq 1 + \sqrt{2}$

Sea $x < 0, |e^{-x} - e^x| = e^{-x} - e^x$ entonces,

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty &= \frac{2\sqrt{2} + |e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} = \frac{2\sqrt{2}e^x + 1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^{2x} + 1} + \frac{1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1} \leq \sqrt{2} + 1\end{aligned}$$

La norma infinito de la matriz A está acotada por $1 + \sqrt{2}$, luego

$$\|A\|_\infty \left\| \begin{pmatrix} \gamma_1^* - \gamma_1 \\ \gamma_2^* - \gamma_2 \\ \gamma_3^* - \gamma_3 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq (1 + \sqrt{2}) \left\| \begin{pmatrix} \gamma_1^* - \gamma_1 \\ \gamma_2^* - \gamma_2 \\ \gamma_3^* - \gamma_3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisface una condición de Lipschitz en la variable γ con constante de Lipschitz $1 + \sqrt{2}$ en una región

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \{(x, \gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x)) : x \in \mathbb{R}\} \\ \mathfrak{R} &\subseteq \mathbb{R}^{3+1}\end{aligned}$$

y cada una de las funciones $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son funciones acotadas en \mathbb{R}

El punto $(0, \gamma_0)^T = (0, 0, 0.5, -0.5)^T$ es un punto de \mathfrak{R} , entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \partial_x \gamma_1 \\ \partial_x \gamma_2 \\ \partial_x \gamma_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \\ 0 & 0 & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} & -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \\ (0, \gamma_0)^T &= (0, 0, 0.5, -0.5)^T\end{aligned}$$

tiene solución única en \mathfrak{R} .

Para encontrar la solución numérica de

$$\begin{pmatrix} \partial_x \gamma_1 \\ \partial_x \gamma_2 \\ \partial_x \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} \\ 0 & 0 & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{e^x + e^{-x}} & -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

y de la forma algebrizada del mismo, se usará el *método de Runge-Kutta explícito de Dormand y Prince, DOPRI 5(4)*.

Para encontrar la solución numérica de

$$\partial_z^2 y - \frac{\partial_z \alpha}{\alpha} \partial_z y + \alpha \bar{\alpha} y = 0$$

obtenida mediante el proceso de algebrización, aplicación de las coordenadas simétricas de Darboux y el cambio de variable $u = \varepsilon \frac{\partial_z y}{y}$ al sistema en mención, se aplicará el método de *diferencias finitas para la segunda derivada*.

Por el método de diferencias finitas, se tiene que:

$$\begin{aligned} \partial_z y(z_n) &\approx \frac{y(z_n + h) - y(z_n)}{h} \\ \partial_z^2 y(z_n) &\approx \frac{y(z_n + h) + y(z_n - h) - 2y(z_n)}{h^2} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\frac{y(z_n + h) + y(z_n - h) - 2y(z_n)}{h^2} - \frac{\partial_z \alpha}{\alpha} \frac{y(z_n + h) - y(z_n)}{h} + \alpha \bar{\alpha} y = 0$$

Para la condición inicial, $z_n = 1$, se tiene:

$$\frac{y(1 + h) + y(1 - h) - 2y(1)}{h^2} - \frac{\partial_z \alpha(1)}{\alpha(1)} \frac{y(1 + h) - y(1)}{h} + \alpha(1) \bar{\alpha}(1) y(1) = 0$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} y(1 + h) - y(1 - h) &= \frac{\alpha(1) y(1) (2 - h^2 \alpha(1) \partial_z \alpha(1))}{\alpha(1) - h \partial_z \alpha(1)} \\ \alpha(1) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \partial_z \alpha(1) = \frac{1}{2} (-\sqrt{2} + i), \quad y(1) \approx \\ \Rightarrow y(1 + h) - y(1 - h) &= \frac{y(1) \sqrt{2} (8 + 2h^2 - h^2 i)}{4\sqrt{2} (1 + h) - hi} \end{aligned}$$