Problemas de Colisiones

1. **Dispersión de Rutherford**
   - Cuál es la fracción de partículas (difractadas por un campo Coulombiano) que son deflectadas en un cono diferencial en $(\theta + d\theta)$ por un blanco de N centros por unidad de área.
   - Calcular la fracción para partículas α de 5 MeV, con $\theta = \pi/2$, en un blanco de oro ($Z = 79$, $A = 197$) de 1 μm de espesor.

2. **Esfera rígida**
   Calcular la sección eficaz (clásica) de dispersión de una esfera rígida de radio R.

3. **Onda libre en 3-d**
   Comprobar que las siguiente función soluciona el Hamiltoniano de una partícula libre:
   $u_l(k,r) = B_l(k) r j_l(kr) + C_l(k) r \eta_l(kr)$
   - Comprobar analíticamente para $l = 0$ y $l = 1$
   - Comprobar numéricamente para $l = 0$ y $l = 1$
   - Chequear comportamientos asimptóticos
   - Encontrar los primeros máximos de $j_l(kr)$ para $l = 0, 1$ y 2
   - Comprobar que tambien se puede escribir:
     - $R_l(k,r) = F_l(k)(j_l(kr) - \tan\delta_l(k)\eta_l(kr))$
     - $\lim_{r\to\infty} R_l(k,r) = \frac{A_l(k)}{kr} sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k))$
     - $\lim_{r\to\infty} u_l(k,r) = \frac{A_l(k) i^l e^{-i\delta_l(k)}(-1)^l}{2i}\{(-1)(-1)^l e^{-ikr} + S_l(k)e^{ikr}\}$; $S_l(k)e^{2i\delta_l(k)}$

4. **Secciones eficaces cuánticas a bajas energías**
   - Calcular la sección eficaz de dispersión de una esfera rígida
     - Derivar la expresión para $\tan\delta_l$
     - Demostrar que para $l = 0$ se cumple: $\tan\delta_l = -\tan(kR)$
     - Mostrar que $\lim_{k\to 0}\sigma_0 = 4\pi a^2$. Comparar con el caso cuántico.
     - Obtener la expresión para la S-*wave* contribución $f_0(0)$ a la amplitud de dispersión. Verificar el teorema optico para $kR << 1$.
   - Calcular la sección eficaz de dispersión de un pozo finito a muy bajas energías.
     - variar el potencial hasta encontrar un caso en el que la sección eficaz se anula. Graficar (esquemáticamente) el largo de dispersión (*scattering length*) y el desplazamiento de fase (*phase shift*) en función del valor del potencial.
     - resolver el mismo caso numéricamente.

5. **Matriz S**
   - Construir la matriz S para dispersión de una función delta: $V(x) = -\alpha\delta(x)$.
   - Encontrar los estados ligados.

6. **Aproximación de Born** Obtener en la primera aproximación de Born las amplitudes de dispersión, y las secciones eficaces diferenciales y totales de dispersión de los siguientes potenciales:

   - Potencial de Yukawa: $U(r) = U_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$
   - Pozo de potencial (*soft sphere*): $U(r) = U_0 \quad r \leq a$
   - Repetir el caso anterior con la aproximación dada para muy bajas energías. ¿Se puede aplicar la aproximación de Born para calcular el caso de esfera rígida (*hard sphere*)? Si puede, calcule y compare con los resultados anteriores.

Soluciones

1. (a) $\frac{dN}{J_{inc}} = 2\pi N \frac{d\sigma}{d\Omega} sin\Theta d\Theta$; (b) $\frac{dN}{J_{inc}} = 2 \times 10^{-4} d\Theta$
2. $\sigma = \pi R^2$
4. $\sigma = 4\pi R^2 (\frac{tan(kR)}{kR} - 1)^2$
5. $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$
6. (a) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{U_0^2}{(\alpha^2+q^2)^2}$; (c) $\sigma = 4\pi(\frac{U_0 a^3}{3})^2$