Capítulo 7

Corriente Alterna e Impedancias

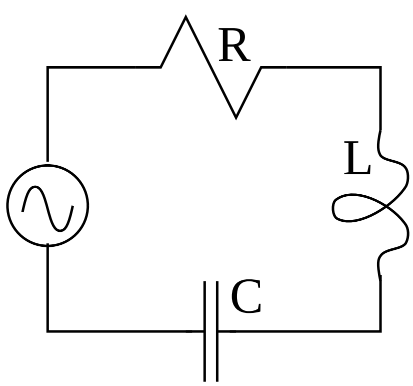
7.1. Período transitorio

Se comenzará analizando el circuito $\mathcal{E}(t)$, R, L, C en serie. La ecuación del circuito es,

$$\mathcal{E}(t) - L\frac{dI}{dt} = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \tag{7.1.1}$$

y se da como dato,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \tag{7.1.2}$$



La solución general de la ecuación anterior, que reescribimos como

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\,I = -\omega\,\mathcal{E}_0\,\sin\omega t \tag{7.1.3}$$

se obtiene buscando la solución general de la ecuación homogénea, a la que se suma una solución particular de la inhomogénea.

Para encontrar la solución general de la ecuación homogénea se debe resolver la ecuación algebriacia $L\,x^2 + R\,x + \frac{1}{C} = 0$ obteniéndose

$$x = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{L\,C}}$$

Denotando Δ la cantidad que está bajo la raíz cuadrada se debe resolver separadamanete los casos $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ y $\Delta = 0$. Las soluciones en los dos primeros casos son

$$I(t) \quad = \quad e^{-R\,t/2L}\left[I_1 e^{\sqrt{\Delta}\,t} + I_2 e^{-\sqrt{\Delta}\,t}\right]$$

$$\text{con} \quad \Delta > 0 \qquad (7.1.4)$$

$$I(t) = I_0\, e^{-Rt/2L} \cos\left(\sqrt{-\Delta}\, t + \beta_0\right)$$
$$\text{con} \quad \Delta < 0 \qquad (7.1.5)$$

En ambos casos la corriente tiende exponencialmente a cero para tiempos grandes. Esto se debe a que la ecuación homogénea corresponde al mismo circuito de arriba excepto que no está la fuente alterna. El tiempo característico en el primer caso es $\tau_+ = 1/\sqrt{\Delta}$ y en el segundo caso es $\tau_- = 1/\sqrt{-\Delta}$.

Una vez que el comportamiento transitorio se hace despreciable (esto ocurre después de un tiempo que es un multiplo pequeño de τ) el comportamiento del circuito pasa a ser dominado por la solución estacionaria o permanente que se deduce en la sección siguiente.

7.2. Impedancias

En lo que sigue se mostrará lo cómodo que es usar números complejos para describir el comportamiento de circuitos de corriente alterna una vez que el comportamiento inicial (transitorio) ha desaparecido.

Si se deriva con respecto al tiempo en (7.1.1) se tiene una ecuación para $I(t)$ que es lo que normalmente interesa. La ecuación para la corriente es,

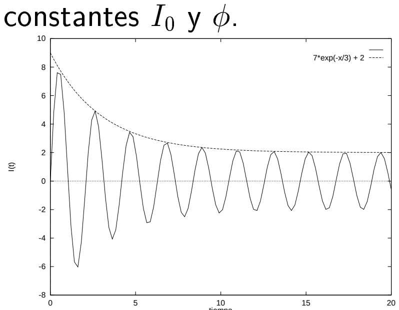
$$L\ddot{I}(t) + R\dot{I} + \frac{I}{C} = -\omega\mathcal{E}_0 \sin(\omega t) \qquad (7.2.1)$$

La solución general de esta ecuación contiene una solución general de la ecuación homogénea más alguna solución particular de la ecuación (7.2.1). La primera parte contiene una exponencial decreciente con el tiempo, y por lo tanto describe un fenómeno transitorio.

Para estudiar el comportamiento a largo plazo del circuito basta con una solución particular. Es normal esperar que la solución permanente sea oscilante y oscile con la misma frecuencia que la fuente alterna, por tanto lo más general es suponer que la corriente es de la forma,

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi) \qquad (7.2.2)$$

y deben determinarse los valores de las constantes I_0 y ϕ.



Al reemplazar esta forma en (7.2.1) se obtiene una expresión donde cada término tiene ya sea un factor $\cos(\omega t)$ o un factor $\sin(\omega t)$

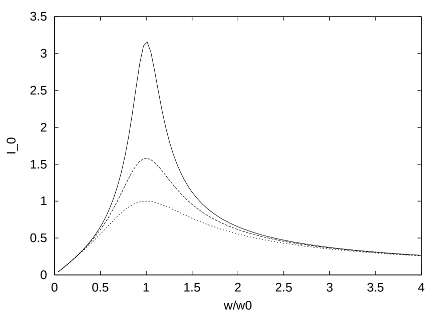
. Puesto que tal ecuación debe ser válida para todo t tienen que ser independientemente iguales los coeficientes de $\cos(\omega t)$ y de $\sin(\omega t)$. Esto conduce a dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas: I_0 y ϕ.

De ellas se despeja que,

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (7.2.3)$$

y también,

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + [\omega L - \frac{1}{\omega C}]^2}} \quad (7.2.4)$$



La función I_0 dibujada versus ω/ω_0 para tres valores de la resistencia. La curva más alta corresponde a menor resistencia y

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,. \quad (7.2.5)$$

Y así la solución (7.2.2) puede escribirse,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|}\cos(\omega t - \phi) \quad (7.2.6)$$

donde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2} \quad (7.2.7)$$

suele llamarse la *impedancia* total del circuito, y se mide en Ohm igual que las resistencias.

Si embargo será más común que se llame impedancia al número complejo

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (7.2.8)$$

como se justificará en lo que sigue.

Un número complejo cualquiera $z = x + iy$ puede siempre escribirse como una magnitud ρ y una fase ϕ en la forma:

$$z = \rho e^{i\phi} = \rho\{\cos(\phi) + i\sin(\phi)\}$$

y la fase ϕ siempre puede expresarse como,

$$\phi = \arctan\frac{\Im z}{\Re z}$$

Si se define una *fem* compleja $\tilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ la parte real coincide con la *fem* que se definió más arriba. Ahora se plantea resolver nuevamente la ecuación (7.2.1) pero con esta *fem* compleja como el término inhomogéneo. La función $\mathcal{I}(t)$ que satisface esta nueva ecuación es — en general — una función compleja. La ecuación a resolver es,

$$L\ddot{\mathcal{I}} + R\dot{\mathcal{I}} + \frac{1}{C}\mathcal{I} = \dot{\tilde{\mathcal{E}}} \quad (7.2.9)$$

y para encontrar el estado oscilante de régimen se supone que,

$$\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{i\omega t} \quad (7.2.10)$$

Esta vez resulta enteramente trivial concluir que,

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 = \left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)\mathcal{I}_0$$

esto es,

$$\mathcal{I}_0 = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0}{Z}$$

donde Z está dado por (7.2.8) y también puede escribirse como,

$$Z = |Z|e^{i\phi}$$

Se comprueba que $|Z|$ es la expresión dada en (7.2.7) y ϕ coincide con (7.2.3). La parte real de $\mathcal{I}(t)$ da la corriente física de interés. $I(t) = \Re\mathcal{I}(t) = \mathcal{E}_0\cos(\omega t - \phi)/|Z|$

La moraleja que se debe aprender de este ejercicio matemático es que es mucho más sencillo resolver ecuaciones complejas como (7.2.9) que ecuaciones reales como (7.2.1). Además se observa que cada elemento del circuito contribuye en forma muy sencilla a la impedancia total:

$$\begin{array}{lcl} R & \Rightarrow & R \\ L & \Rightarrow & i\omega L \\ C & \Rightarrow & -\dfrac{i}{\omega C}. \end{array}$$

En cada elemento del circuito hay una caída de potencial que se describe como un número complejo: $R\mathcal{I}$, $\omega L\mathcal{I}e^{i\pi/2}$, $\frac{1}{\omega C}\mathcal{I}e^{-i\pi/2}$. La caída de potencial en una resistencia está en fase con la corriente, la caída de potencial en una inductancia está adelantada en $\pi/2$ respecto a la corriente y en un condensador está retrasada en la misma cantidad.

Por razones enteramente análogas a las ya conocidas con resistencias y con capacidades, se demuestra que:

1) Un conjunto de impedancias conectadas en serie son equivalentes a una sola impedancia,

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots \qquad (7.2.11)$$

2) Un conjunto de impedancias conectadas en paralelo son equivalentes a una sola impedancia,

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots \qquad (7.2.12)$$

Estas dos ecuaciones solo valen cuando se trabaja con las impedancias complejas. Este sea tal vez el argumento más contundente que debiera convencer de la enorme simplificación en los cálculos que se obtiene al trabajar con las cantidades complejas que se ha definido.

Para resolver un circuito complicado se aplica nuevamente las leyes de Kirchhoff tanto para nodos como para caminos cerrados. La importante diferencia es que se deben aplicar para las corrientes y caídas de potencial complejos asociados a cada impedancia o fuente en el circuito.

Sin embargo se debe advertir que el uso de las leyes de Kirchhoff en corriente alterna es posible tan solo si las frecuencias del circuito son bajas. No debe olvidarse que la primera ley de Kirchhoff proviene de $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ que en el caso actual no es válida ya que $\partial\rho/\partial t$. Y la segunda ley de Kircchoff proviene de $\nabla \times \vec{E} = 0$ que, a su vez, implica que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Sabemos que esto no es cierto cuando los campos cambian en el tiempo.

Si en un solo circuito hubiese fuentes alternas con diferente frecuencia lo dicho en este capítulo se debe aplicar separadamente para cada frecuencia.

7.3. Potencia disipada en corriente alterna

El circuito RLC en serie tiene $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ y $I(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \phi)/|Z|$. Por lo tanto la potencia consumida es,

$$\begin{aligned} P(t) &= \mathcal{E}(t)I(t) \\ &= \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|}\cos(\omega t)\cos(\omega t - \phi) \\ &= \frac{\mathcal{E}_0^2}{|Z|}(\cos\phi + \cos(2\omega t - \phi)) \end{aligned}$$

Se ve que esta potencia oscila en el tiempo e incluso toma valores negativos en algunos momentos (devuelve energía). Este resultado es general en el sentido que siempre se va a tener para un circuito que la *fem* y la corriente van a estar con algún desfase ϕ.

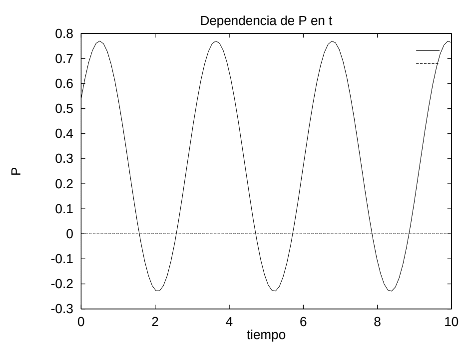
Las oscilaciones de la potencia tienen un período $T = 2\pi/\omega$, y el promedio se define:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \qquad (7.3.1)$$

que resulta ser,

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos\phi \qquad (7.3.2)$$

Las oscilaciones son en torno a este valor promedio $\overline{P}$ y tienen una cierta amplitud $|P_{\mathsf{max}} - \overline{P}| = \overline{P}/\cos\phi$. Normalmente se desea que el consumo oscile lo menos posible, lo que requiere que esta amplitud sea mínima, es decir $\cos\phi = 1$, en cuyo caso $\overline{P} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0$.



La potencia instantánea $P(t)$ puede toma valores negativos que, en una red urbana pueden ser molestos. Es potencia que el circuito (por ejemplo, una industria que usa considerable electricidad) devuelve *momentáneamente a la red, produciendo oscilaciones en el vecindario. Una industria puede ser multada si se detecta que su "$\cos\phi$" (al que se llama factor de potencia) no es mayor que un cierto estándar.*

En general si se compara (7.3.1) con (3.3.6) se ve que la diferencia es tanto el factor 1/2 como el factor $\cos\phi$. Es costumbre definir los valores efectivos asociados a corrientes y potenciales alternos:

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}} &= \frac{|\mathcal{E}_0|}{\sqrt{2}} \\ I_{\text{ef}} &= \frac{|I_0|}{\sqrt{2}} \end{aligned} \qquad (7.3.3)$$

Cuando se habla de una línea de 220 Volts se quiere decir que $V_{\text{ef}} = 220$ Volts y entonces $\mathcal{E}_0 = 312{,}4$ Volts.

Es general que $\mathcal{E}_0 = |Z| I_0$, y entonces, $\overline{P} = I_{\text{ef}}^2 |Z| \cos\phi$. La presencia de $\cos\phi$ no debe llamar la atención ya que las impedancias asociadas a inductancias y condensadores son puramente imaginarias y en esos elementos no se disipa energía electromagnética. La parte real de Z es precisamente $|Z|\cos\phi$. En efecto, de la definicón de ϕ se deduce que $\cos\phi = R/|Z|$ y por lo tanto

$$\overline{P} = R\, I_{\text{ef}}^2 \qquad (7.3.4)$$

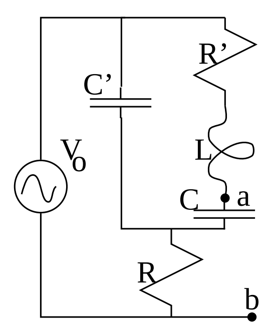
El circuito RLC tiene una impedancia que depende de la frecuencia de la fuente. Tal impedancia tiene un mínimo cuando la frecuencia cumple:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (7.3.5)$$

Para tal frecuencia la corriente $I = \Re\mathcal{I}$ tiene amplitud máxima y el ángulo de fase ϕ es nulo, es decir, $\cos\phi = 1$. Si la resistencia es pequeña en comparación a $\sqrt{L/C}$ el máximo es bastante agudo.

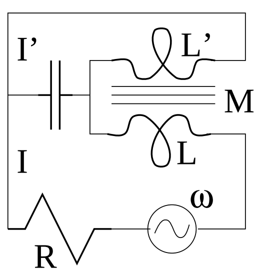
7.4. Problemas

7.1 Considere el circuito eléctrico de la figura el cual se encuentra alimentado por una fuente de voltaje alterna $V_0 \cos(\omega\, t)$. Determine relaciones entre los elementos del circuito para que la diferencia de potencial entre los puntos a y b sea nula.



7.2 El circuito de la figura

está conectado a una fuente alterna de frecuencia ω y en régimen permanente. (a) Escriba las ecuaciones para las corrientes I e I' en el circuito superior y en el circuito inferior respectivamente. (b) Encuentre el valor de ω para el cual la corriente por el circuito superior sea nula y (c) encuentre el valor de ω para el cual la corriente por el circuito inferior sea nula.



7.3 El generador del circuito de la figura, alimentado por una fuente $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, tiene una resistencia y una inductancia en serie y un condensador en paralelo, como se aprecia en la figura. Encuentre una relación entre ω, R, L y C para que el desfase entre la *fem* y la corriente entregada por la fuente sea mínimo.