

*Apuntes de un curso de*

# MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.  
José Rogan C.



# Índice

<b>1. Espacio de funciones</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones . . . . .	1
1.2. Sucesiones de funciones . . . . .	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt . . . . .	9
1.4. Coeficientes de Fourier . . . . .	10
1.5. Integrales impropias (valor principal) . . . . .	14
1.6. Convergencia según Cesàro . . . . .	15
<b>2. Series de Fourier</b>	<b>19</b>
<b>3. Transformada de Fourier</b>	<b>35</b>
3.1. Definiciones . . . . .	35
3.2. Ejemplos . . . . .	36
3.3. Propiedades . . . . .	41
3.4. Aplicaciones . . . . .	43
<b>4. Convolución</b>	<b>45</b>
4.1. Espacio $\mathcal{S}$ . . . . .	45
4.2. Producto de convolución . . . . .	46
4.3. El espacio $\mathcal{S}$ como anillo . . . . .	49
<b>5. Distribuciones temperadas</b>	<b>53</b>
5.1. Definiciones . . . . .	53
5.2. Sucesión de distribuciones . . . . .	61
5.3. Producto de distribuciones . . . . .	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales . . . . .	72
5.5. Convergencia débil . . . . .	73
<b>6. Distribuciones y transformada de Fourier</b>	<b>79</b>
<b>7. Convolución de distribuciones</b>	<b>87</b>
7.1. Definiciones . . . . .	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones . . . . .	89
7.3. Uso de convolución en Física . . . . .	91

<b>8. La función Gamma</b>	<b>93</b>
8.1. La función factorial . . . . .	93
8.2. La función Gamma . . . . .	94
8.3. Función Beta . . . . .	96
8.4. Notación doble factorial . . . . .	99
8.5. Fórmula de Stirling . . . . .	99
8.6. Otras funciones relacionadas . . . . .	101
<b>9. Transformada de Laplace</b>	<b>103</b>
9.1. Definición . . . . .	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace . . . . .	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace . . . . .	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace . . . . .	111
<b>10. Aplicaciones de la transformada de Laplace</b>	<b>113</b>
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes . . . . .	114
10.2. Ecuaciones integrales . . . . .	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales . . . . .	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales . . . . .	120
<b>11. Polinomios ortogonales</b>	<b>123</b>
11.1. Definiciones . . . . .	123
11.2. Teoremas . . . . .	123
11.3. Relación de recurrencia . . . . .	125
<b>12. Polinomios de Hermite</b>	<b>127</b>
12.1. Definición . . . . .	127
12.2. Función generatriz . . . . .	127
12.3. Ortogonalidad . . . . .	130
12.4. Algunos resultados interesantes . . . . .	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite . . . . .	131
<b>13. Polinomios de Laguerre</b>	<b>133</b>
13.1. Definición . . . . .	133
13.2. Función generatriz . . . . .	133
13.3. Relaciones de recurrencia . . . . .	135
13.4. Ecuación de Laguerre . . . . .	135
13.5. Ortogonalidad . . . . .	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre . . . . .	138
<b>14. El problema de Sturm-Liouville</b>	<b>139</b>
14.1. Operadores diferenciales auto-adjuntos . . . . .	139
14.2. Operadores autohermíticos . . . . .	141
14.3. Problema de autovalores . . . . .	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales . . . . .	143

<b>15.Ecuaciones diferenciales con singularidades</b>	<b>145</b>
15.1. Puntos singulares . . . . .	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius . . . . .	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs . . . . .	149
15.4. Una segunda solución . . . . .	151
<b>16.Ecuaciones diferenciales del tipo...</b>	<b>155</b>
16.1. Soluciones en puntos regulares . . . . .	155
16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares . . . . .	159
16.3. Singularidades en infinito . . . . .	167
16.4. Ejemplos . . . . .	168
16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas . . . . .	171
<b>17.Funciones hipergeométricas</b>	<b>177</b>
17.1. La ecuación hipergeométrica general . . . . .	177
17.2. Ecuación indicial . . . . .	178
17.3. Ecuación diferencial de Gauss . . . . .	179
17.4. La serie hipergeométrica . . . . .	181
17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente . . . . .	183
<b>18.Polinomios de Legendre</b>	<b>187</b>
18.1. Función generatriz . . . . .	187
18.2. Relaciones de recurrencia . . . . .	189
18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$ . . . . .	190
18.4. Fórmula de Rodrigues . . . . .	191
18.5. Ecuación diferencial de Legendre . . . . .	192
18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$ . . . . .	193
18.7. Relación de ortogonalidad . . . . .	193
18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$ . . . . .	194
18.9. Serie de Legendre . . . . .	196
18.10 Funciones asociadas de Legendre . . . . .	199
18.11 Problema de Sturm-Liouville asociado . . . . .	201
18.12 Armónicos esféricos . . . . .	203
18.13 Segunda solución de la ecuación de Legendre . . . . .	205
<b>19.La ecuación diferencial de Bessel</b>	<b>211</b>
19.1. La ecuación diferencial de Bessel . . . . .	211
19.2. Funciones de Bessel de índice no entero . . . . .	212
19.3. Funciones de Bessel de índice entero . . . . .	213
19.4. Comportamiento asintótico . . . . .	214
19.5. Función generatriz . . . . .	215
19.6. Fórmulas de adición . . . . .	216
19.7. Representaciones integrales . . . . .	217
19.8. Relaciones de recurrencia . . . . .	219
19.9. Relaciones de ortogonalidad . . . . .	220
19.10 Problema de Sturm-Liouville asociado . . . . .	221

<b>20. Diversos tipos de funciones cilíndricas</b>	<b>223</b>
20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel . . . . .	223
20.2. Funciones de Hankel . . . . .	226
<b>21. Aplicaciones</b>	<b>229</b>
21.1. Coordenadas rectangulares . . . . .	229
21.2. Coordenadas polares, dos dimensiones . . . . .	233
21.3. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas . . . . .	236
21.4. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas . . . . .	240
21.5. Otras aplicaciones . . . . .	243
21.6. Ecuación de difusión . . . . .	246
21.7. Difusión con creación de partículas . . . . .	248

# Capítulo 1

## Espacio de funciones

versión final 3.3-13 de enero de 2003

### 1.1. Definiciones

**Definición 1.1** Denotemos por  $\mathcal{C}_o[a, b]$  al conjunto de funciones complejas continuas de una variable real  $t \in [a, b]$ . Además, escojamos que:

$$\forall f \in \mathcal{C}_o[a, b], \quad f(a) = f(b). \quad (1.1)$$

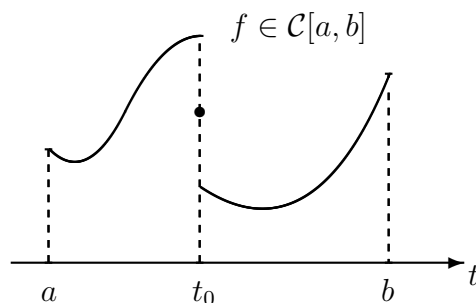
Notemos que claramente se cumple

$$\text{Si } f, g \in \mathcal{C}_o[a, b] \implies f + g \in \mathcal{C}_o[a, b] \quad (1.2a)$$

y

$$\text{si } f \in \mathcal{C}_o[a, b] \text{ y } \lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda f \in \mathcal{C}_o[a, b]. \quad (1.2b)$$

**Definición 1.2** Denotemos por  $\mathcal{C}[a, b]$  al conjunto de funciones complejas seccionalmente continuas, acotadas (o sea, con discontinuidades “mansas” o de primera especie), de una variable real  $t \in [a, b]$ .



Si  $t_0$  es un punto de discontinuidad, la función  $f$  debe estar dada, en ese punto, por

$$f(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0^+) + f(t_0^-)]. \quad (1.3)$$

Podemos afirmar que los conjuntos  $\mathcal{C}_o[a, b]$  y  $\mathcal{C}[a, b]$  forman espacios vectoriales sobre el cuerpo de los complejos. Además,  $\mathcal{C}_o[a, b] \subset \mathcal{C}[a, b]$ .

**Definición 1.3** Consideremos dos funciones  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ . Definimos su *producto escalar* como

$$(f | g) = \int_a^b f^*(t)g(t) dt \quad (1.4)$$

**Propiedades del producto escalar.** Sean  $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$(f | g) = (g | f)^* \quad (1.5a)$$

$$\begin{aligned} (f | g + h) &= (f | g) + (f | h) \\ (f + g | h) &= (f | h) + (g | h) \end{aligned} \quad (1.5b)$$

$$\begin{aligned} (\lambda f | g) &= \lambda^* (f | g) \\ (f | \lambda g) &= \lambda (f | g) \end{aligned} \quad (1.5c)$$

$$\text{Si } f \not\equiv 0 \implies (f | f) > 0. \quad (1.5d)$$

**Definición 1.4** Un espacio vectorial complejo dotado de un producto escalar con las propiedades anteriores, ecuaciones (1.5), se conoce como *espacio pre-Hilbert*.

**Definición 1.5** Sea  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ . Definimos su *norma*:

$$\|f\| = \sqrt{(f | f)} \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

**Propiedades de la norma.** Sean  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$\|f\| \geq 0 \quad (1.7a)$$

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad (1.7b)$$

$$|(f | g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad \text{Desigualdad de Cauchy-Schwartz} \quad (1.7c)$$

$$\|f \pm g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \text{Desigualdad Triangular} \quad (1.7d)$$

$$\text{Si } f(z) \not\equiv 0 \implies \|f\| > 0. \quad (1.7e)$$

**Demostración** Desigualdad de Cauchy-Schwartz, ecuación (1.7c). Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$  arbitrario.

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = (\lambda f + g | \lambda f + g) = \lambda \lambda^* \|f\|^2 + \lambda^* (f | g) + \lambda (g | f) + \|g\|^2.$$

Siendo  $\lambda$  arbitrario, tomémoslo entonces como:

$$\lambda = -\frac{(f | g)}{\|f\|^2} \implies \lambda^* = -\frac{(g | f)}{\|f\|^2},$$

luego

$$0 \leq \frac{|(f | g)|^2}{\|f\|^4} \|f\|^2 - 2 \frac{|(f | g)|^2}{\|f\|^2} + \|g\|^2 = -\frac{|(f | g)|^2}{\|f\|^2} + \|g\|^2$$



$$|(f|g)|^2 \leq \|f\|^2 \cdot \|g\|^2$$

$$|(f|g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

q.e.d.

**Demostración** Desigualdad triangular, ecuación (1.7d). De la definición de norma

$$\|f \pm g\|^2 = (f \pm g | f \pm g) = (f \pm g | f) \pm (f \pm g | g) \in \mathbb{R},$$

$$\|f \pm g\|^2 = \operatorname{Re}[(f \pm g | f) \pm (f \pm g | g)],$$

y como  $\pm \operatorname{Re}[z] \leq |z| = \sqrt{(\operatorname{Re}[z])^2 + (\operatorname{Im}[z])^2}$ , entonces:

$$\|f \pm g\|^2 \leq |(f \pm g | f)| + |(f \pm g | g)|.$$

Usando Cauchy-Schwartz,

$$\|f \pm g\|^2 \leq \|f \pm g\| \cdot \|f\| + \|f \pm g\| \cdot \|g\|,$$

$$\|f \pm g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

q.e.d.

## 1.2. Sucesiones de funciones

**Definición 1.6** Sea  $f_n(t)$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , una sucesión de funciones. Si  $\forall t_0 \in [a, b]$  fijo, y  $\forall \epsilon > 0 \exists N$  tal que

$$|f_n(t_0) - F(t_0)| < \epsilon \quad \text{para} \quad n > N, \quad (1.8)$$

entonces decimos que  $f_n(t_0)$  *converge puntualmente* a  $F(t_0)$  y se escribe  $f_n(t_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(t_0)$ . Observemos que  $N$  depende posiblemente de  $t_0$ .

**Definición 1.7** Una sucesión de funciones  $f_n(t)$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , *converge uniformemente* a  $F(t)$  si  $\forall \epsilon > 0 \exists N$  tal que

$$|f_n(t) - F(t)| < \epsilon \quad \text{para} \quad n > N \text{ y } \forall t \in [a, b]. \quad (1.9)$$

Escribiremos en tal caso  $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{unif} F(t)$ .

**Definición 1.8** La *distancia* entre dos funciones  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  se define por

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b (f - g)^*(f - g)}. \quad (1.10)$$

A partir de la definición y las propiedades de la norma, se tiene

$$\|f - g\| = 0 \iff f(t) = g(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

**Definición 1.9** Una sucesión de funciones  $f_n(t)$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , converge en la norma a  $F(t)$  si  $\forall \epsilon > 0 \exists N$  tal que

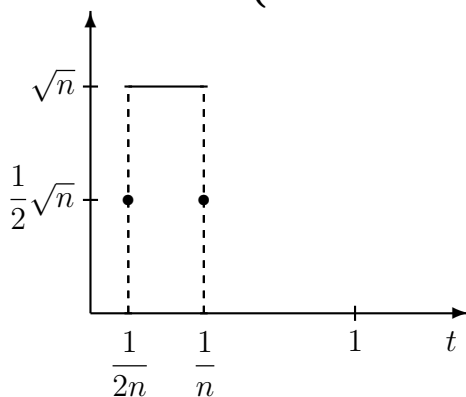
$$\|f_n - F\| < \epsilon \quad \text{para } n > N. \quad (1.11)$$

Escribiremos en tal caso  $f_n \xrightarrow{N} F$  o bien  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - F\| = 0$ .

### Ilustraciones

1) En el intervalo  $[0, 1]$  consideremos la función

$$f_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } t \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{n} & \text{si } t = \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Notemos que  $f(t)$  desarrolla un gran *peak* cerca de  $t = 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

a)  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Si  $t = 0$ ,  $f_n(t) = 0$ ,  $\forall n$ . Si  $t \neq 0$ ,  $0 < t < 1$ , tomando  $N > 1/t$ , por ejemplo  $N = 1 + \text{Entera} \left[ \frac{1}{t} \right]$ , se tiene que si  $n > N \implies t > 1/n \implies f_n(t) = 0 \forall n > N$ .

b)  $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{unif}} 0$ .

Dado  $n$ , y suponiendo que existe  $N$ , basta seleccionar  $t \in \left[ \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} \right]$  para que crezca sobre cualquier cota.

c)  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N} 0$ .

$$\|f_n - 0\|^2 = \int_0^1 dt |f_n(t)|^2 = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} dt (\sqrt{n})^2 = \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2} \quad \forall n$$

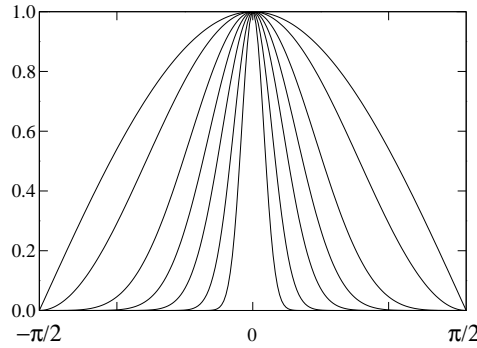
2)

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } t > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

$f_n(t)$  no puede converger a cero uniformemente, pues  $f_n(0) = 1 \neq 0$ , pero sí en la norma:

$$\|f_n - 0\|^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} dt |f_n(t)|^2 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3) Sea  $f_n(t) = \cos^n t$ , con  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Claramente  $f_n \in \mathcal{C}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .



$$f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{f}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ con } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

La función  $\bar{f}(t) \in \mathcal{C}[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Además, claramente  $f_n$  no converge uniformemente a  $\bar{f}(t)$ . Es decir, el  $N$  que debo elegir de manera que  $|f_n(t) - \bar{f}(t)|$  sea tan pequeño como se quiera,  $\forall n > N$ , depende sensiblemente del  $t$  que elija.

Por otra parte, si  $F(t) \equiv 0$ ,  $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , entonces,  $f_n(t) \xrightarrow{N} F(t)$ , es decir

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \text{ tal que } \|f_n - F\| < \epsilon \quad \text{para } n > N.$$

Considerando que  $F(t)$  es nula en todo el intervalo, tenemos para la diferencia en la norma de las dos funciones

$$\|f_n\| = \sqrt{\int_a^b \cos^{2n} t \, dt} < \epsilon.$$

Obtenemos como corolario de estos ejemplos: la convergencia en la norma no implica convergencia puntual ni convergencia uniforme.

**Proposición 1.1** Convergencia uniforme en un intervalo finito implica convergencia en la norma.

**Demostración** Sea  $\epsilon > 0 \exists N_0$  tal que

$$|f_n(t) - F(t)| < \epsilon, \quad \forall n > N_0 \text{ y } \forall t \in [a, b] ,$$

luego

$$\|f_n - F\| = \sqrt{\int_a^b |f_n(t) - F(t)|^2 dt} < \sqrt{\int_a^b \epsilon^2 dt} = \sqrt{\epsilon^2(b-a)} = \epsilon\sqrt{b-a} ,$$

lo cual nos da una cota para la norma:

$$\|f_n - F\| < \epsilon\sqrt{b-a} \quad \forall n > N_0 .$$

q.e.d.

**Teorema 1.1 de Weierstrass** (sin demostración)

Sea  $f$  continua en  $[a, b]$ , entonces se tiene que  $\forall \epsilon > 0$  existe un polinomio  $p(t)$  tal que:

$$|f(t) - p(t)| < \epsilon \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.12)$$

(Es decir,  $f$  es aproximable uniformemente por polinomios.)

**Proposición 1.2** Sea  $f \in \mathcal{C}_o[a, b]$ .  $\forall \epsilon > 0$  dado, existe un polinomio  $p$  tal que  $\|f - p\| < \epsilon$ .

**Demostración** Usando el teorema de Weierstrass, sabemos que existe un polinomio  $p(t)$  tal que

$$|f(t) - p(t)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}} \quad \forall t \in [a, b] ,$$

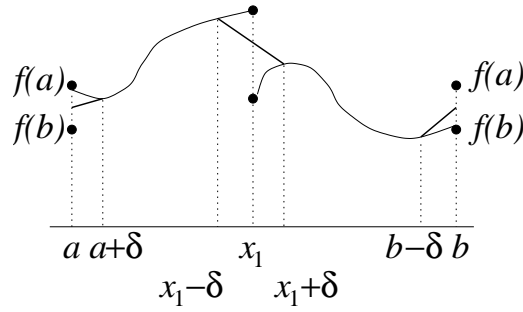
luego

$$\begin{aligned} \|f - p\| &= \sqrt{\int_a^b |f(t) - p(t)|^2 dt} < \sqrt{\int_a^b \frac{\epsilon^2}{b-a} dt} = \epsilon, \\ \|f - p\| &< \epsilon \end{aligned}$$

q.e.d.

**Proposición 1.3**  $\forall g \in \mathcal{C}[a, b]$  se puede construir una función  $f \in \mathcal{C}_o[a, b]$  tal que  $\|g - f\| < \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es arbitrario.

**Demostración** Sea  $g \in \mathcal{C}[a, b]$  con  $K$  discontinuidades en  $\{t_i\}_{i=1}^n$  dentro del intervalo  $[a, b]$  y sea  $M = \max_{a \leq t \leq b} |g(t)|$ . Consideremos una función  $f \in \mathcal{C}_o[a, b]$  definida de modo que coincida con  $g$ , salvo en una vecindad de ancho  $2\delta$ :



Tenemos que  $|f(t)| \leq M \forall t \in [a, b]$ . Usando la desigualdad triangular:

$$|g(t) - f(t)| \leq |g(t)| + |f(t)| \leq 2M,$$

con lo cual podemos acotar la distancia entre las funciones

$$\|g - f\|^2 = \int_a^b |g(t) - f(t)|^2 dt = \sum_{\nu=1}^K \int_{t_{\nu}-\delta}^{t_{\nu}+\delta} |g(t) - f(t)|^2 dt \leq 2\delta(2M)^2 \left( \sum_{\nu=1}^K 1 \right) = \epsilon.$$

Ya que  $\delta$  lo podemos hacer arbitrariamente pequeño, tenemos demostrada la proposición.

q.e.d.

Las últimas dos proposiciones conducen al siguiente teorema:

**Teorema 1.2 de Aproximación** Una función  $g \in \mathcal{C}[a, b]$  se puede aproximar en la norma por un polinomio  $p(t)$  tal que  $\|g - p\| < \epsilon$  arbitrario.

**Demostración** Sea  $f \in \mathcal{C}_o[a, b]$  tal que  $\|g - f\| < \frac{\epsilon}{2}$ . Sea  $p(t)$  un polinomio tal que  $\|f - p\| < \frac{\epsilon}{2}$ . Luego

$$\|g - p\| = \|g - f + f - p\| \leq \|g - f\| + \|f - p\| < \epsilon.$$

q.e.d.

El teorema de Weierstrass se puede generalizar a funciones de más de una variable. Esto permite resultados como el siguiente.

**Proposición 1.4** Sea  $f \in \mathcal{C}_o[-\pi, \pi]$ , entonces existe un polinomio trigonométrico que aproxima a  $f$  uniformemente.

**Demostración** Sea  $f \in \mathcal{C}_o[-\pi, \pi]$ . Construimos una función  $F(r, \theta) = rf(\theta)$ . Claramente  $F(r, \theta)$  es continua en todo el plano  $x-y$ . Sea  $\tilde{F}(x, y) \equiv F(r, \theta)$ . Usando el teorema de Weierstrass tenemos que existen  $a_{\mu\nu}$  tales que

$$\left| \tilde{F}(x, y) - \sum_{\substack{\mu=0,1,\dots,n \\ \nu=0,1,\dots,n}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \right| < \epsilon \quad \forall x, y \text{ en el plano } x-y.$$

Reemplazando  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ , podemos reescribir la doble suma

$$\sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} r^{\mu+\nu} \cos^\mu(\theta) \sin^\nu(\theta).$$

Evaluemos en  $r = 1$ . Además, sabemos que un producto de la forma  $\cos^\mu \theta \sin^\nu \theta$  se puede escribir como una combinación lineal de productos de la forma  $\cos(m\theta) \sin(n\theta)$ . Tenemos entonces

$$\left| f(\theta) - \sum_{m,n} b_{mn} \cos(m\theta) \sin(n\theta) \right| < \epsilon \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi].$$

q.e.d.

**Definición 1.10** Una sucesión  $\{f_n\}$  en  $\mathcal{C}[a, b]$  se dice **sucesión de Cauchy** si  $\forall \epsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n, m \geq N$  se tiene que  $\|f_n - f_m\| \leq \epsilon$ .

La definición anterior se puede generalizar a espacios de funciones sin norma.

Es inmediato verificar que si  $\{f_n\}$  converge a una función  $f$  en la norma, entonces es de Cauchy, pues

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| ,$$

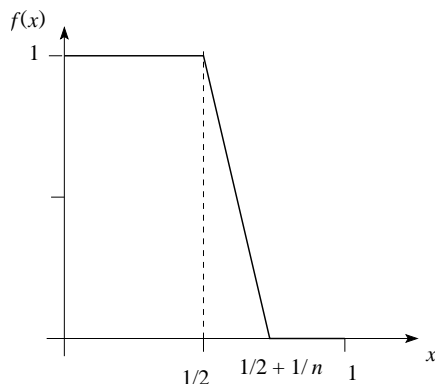
y ambos términos en el lado derecho se pueden acotar por un  $\epsilon > 0$  arbitrario. El inverso, sin embargo, es falso, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo** Consideremos el conjunto de funciones reales  $\mathcal{C}[0, 1]$ , con el producto escalar definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx .$$

Consideremos

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - (x - \frac{1}{2})n & \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} .$$



Se tiene que

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq \int_{1/2}^{1/2+1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2},$$

de modo que es una sucesión de Cauchy. Sin embargo, se puede ver que  $\{f_n\}$  “tiende” a una función discontinua, y por lo tanto no converge en  $\mathcal{C}[0, 1]$ .

**Definición 1.11** Un espacio normado es llamado *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente. A un espacio normado completo se le llama *espacio de Banach*. A un espacio pre-Hilbert que es completo se le llama *espacio de Hilbert*.

**Definición 1.12** El conjunto de funciones  $\{\varphi_n(t)\}_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$  se dice *ortonormal* si

$$(\varphi_n | \varphi_m) = \delta_{nm} \quad \forall n, m. \quad (1.13)$$

### Ilustración

Como ejemplo de funciones ortonormales tenemos las  $c_n(t) \in \mathcal{C}_o[-\pi, \pi]$  con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  que se definen como

$$c_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}.$$

Claramente:

$$(c_n | c_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = \delta_{nm} \quad \forall n, m.$$

**Definición 1.13** Un conjunto de funciones  $\{\varphi_n(t)\}_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \nu}$  se dice *linealmente dependiente* cuando

$$\sum_{n=1}^{\nu} a_n \varphi_n(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b], \quad (1.14)$$

es posible sin que todos los  $a_n$  sean nulos. En caso contrario son *linealmente independientes*.

**Proposición 1.5** Un sistema ortogonal de funciones es siempre linealmente independiente (l.i.). (Demostración como ejercicio.)

## 1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea  $\{v_\nu\}_{\nu=1,2,\dots}$  un conjunto linealmente independiente de funciones en  $\mathcal{C}[a, b]$ . Para construir un conjunto ortonormal debemos seguir los siguientes pasos:

– Construimos  $\varphi_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$  tal que  $(\varphi_1 | \varphi_1) = 1$ .

– Considerar  $\bar{\varphi}_2 = v_2 - (\varphi_1 | v_2) \varphi_1$ . Entonces

$$(\bar{\varphi}_2 | \varphi_1) = (v_2 | \varphi_1) - (\varphi_1 | v_2)^* (\varphi_1 | \varphi_1) = (v_2 | \varphi_1) - (v_2 | \varphi_1) = 0.$$

Luego, normalizando,

$$\varphi_2 = \frac{\bar{\varphi}_2}{\|\bar{\varphi}_2\|}.$$

– Ahora tomamos  $\bar{\varphi}_3 = v_3 - (\varphi_1 | v_3) \varphi_1 - (\varphi_2 | v_3) \varphi_2$ . Se puede comprobar que efectivamente  $(\bar{\varphi}_3 | \varphi_1) = (\bar{\varphi}_3 | \varphi_2) = 0$ . Finalmente, normalizando,

$$\varphi_3 = \frac{\bar{\varphi}_3}{\|\bar{\varphi}_3\|}.$$

– Y continuamos en forma análoga para el resto de los vectores.

El conjunto de funciones  $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$  construido de la manera anterior es un conjunto ortonormal.

**Ejercicio.** Para el conjunto de funciones  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  encontrar el sistema ortonormal en el intervalo  $[-1, +1]$ . Compare su resultado con los polinomios de Legendre.

## 1.4. Coeficientes de Fourier

Sea  $\{\varphi_n(t)\}_{n=1,2,\dots}$  un conjunto ortonormal de funciones tal que  $\varphi_n \in \mathcal{C}[a, b] \forall n$ . Sea  $f(t)$  una función tal que  $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ . Deseamos aproximar  $f(t)$  por una suma finita

$$S_I(t) = \sum_{n \in I} C_n \varphi_n(t) ,$$

de manera que  $\|f - S_I\|$  sea mínimo (siendo  $I$  un conjunto de índices prescrito). Es decir, el objetivo es encontrar los coeficientes  $C_n$  de modo que el error cuadrático medio:

$$M_I(f) = \|f - S_I\|^2 = \int_a^b \left| f(t) - \sum_{n \in I} C_n \varphi_n(t) \right|^2 dt ,$$

sea mínimo. Evaluemos el error cuadrático medio

$$\begin{aligned} M_I(f) &= \int_a^b |f|^2 + \sum_{n \in I} |C_n|^2 \int_a^b |\varphi_n|^2 - \sum_{n \in I} C_n \int_a^b f^* \varphi_n - \sum_{n \in I} C_n^* \int_a^b f \varphi_n^* \\ &= \|f\|^2 + \sum_{n \in I} |C_n|^2 - \sum_{n \in I} C_n (\varphi_n | f)^* - \sum_{n \in I} C_n^* (\varphi_n | f) \\ &\quad + \sum_{n \in I} |(\varphi_n | f)|^2 - \sum_{n \in I} |(\varphi_n | f)|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n \in I} |(\varphi_n | f)|^2 + \sum_{n \in I} |C_n - (\varphi_n | f)|^2 \geq 0 , \end{aligned}$$



ya que la norma es mayor igual a cero siempre. Claramente el mínimo se obtiene cuando  $C_n = (\varphi_n | f)$ . De lo anterior se desprende:

$$\sum_{n \in I} |C_n|^2 = \sum_{n \in I} |(\varphi_n | f)|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{Desigualdad de Bessel} \quad (1.15)$$

**Definición 1.14** Los coeficientes  $(\varphi_n | f)$  son llamados *los coeficientes de Fourier de  $f$  respecto del sistema ortonormal  $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$* .

**Definición 1.15** Si un conjunto de funciones  $\{\varphi_n\}$  en cierto espacio permite aproximar en la norma, con sus combinaciones lineales, cualquier función  $f$  del espacio tan bien como se quiera, i.e.

$$\left\| f - \sum_n a_n \varphi_n \right\| < \epsilon, \quad \text{para } \epsilon \text{ arbitrario,}$$

se dice que es un *conjunto completo* respecto a este espacio.

Sean  $C_n = (\varphi_n | f)$  los coeficientes de Fourier de  $f$  respecto de un conjunto ortonormal  $\{\varphi_n\}$ , entonces la completitud de este conjunto se puede expresar por

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^m C_n \varphi_n \right\| = 0,$$

lo que también podemos escribir como

$$f \stackrel{N}{=} \sum_{\{\varphi_n\}} C_n \varphi_n.$$

Lo anterior **no** implica que  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(t)$ , salvo en el caso que la serie converja uniformemente. Si

$$f \stackrel{N}{=} \sum_{\{\varphi_n\}} C_n \varphi_n$$

entonces

$$\|f\|^2 = \left\| \sum_{\{\varphi_n\}} C_n \varphi_n \right\|^2,$$

luego se cumple

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f|^2 = \sum_n |C_n|^2 \quad \text{Igualdad de Parseval} \quad (1.16)$$

**Ejemplo** El conjunto  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal completo respecto a  $[-\pi, \pi]$ .

$$f(t) \stackrel{N}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \implies \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \|f\|^2.$$

**Teorema 1.3** Si el conjunto ortonormal  $\{\varphi_n\}$  es completo respecto a  $\mathcal{C}[a, b]$ , entonces en  $\mathcal{C}$  la única función ortonormal a todo  $\varphi_n$  es  $f(t) \equiv 0$ .

**Demostración** Si  $f(t_0) \neq 0$ , la función también es no nula en una vecindad en torno a  $t_0$ , por lo tanto

$$\int_a^b |f|^2 = \|f\|^2 > 0 ,$$

pero usando la igualdad de Parseval tenemos para la norma de  $f$

$$\|f\|^2 = \sum_n |C_n|^2 = \sum_n |(\varphi_n | f)|^2 > 0 ,$$

es decir,  $f$  no es ortogonal a todos los  $\varphi$ : ¡contradicción! Luego  $f$  debe ser idénticamente nula.

q.e.d.

**Teorema 1.4** Sea  $\{S_n(t) \in \mathcal{C}_o[a, b]\}$ ; si existe  $F(t)$  tal que la sucesión  $S_n(t) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu \varphi_\nu(t)$  converge uniformemente, *i.e.*

$$S_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{unif}} F(t) ,$$

entonces  $F(t)$  es continua,  $F(t) \in \mathcal{C}_o[a, b]$ .

**Demostración**

$$\begin{aligned} |F(t) - F(t')| &= |F(t) - S_n(t) + S_n(t) - S_n(t') + S_n(t') - F(t')| \\ &\leq |F(t) - S_n(t)| + |S_n(t) - S_n(t')| + |S_n(t') - F(t')| . \end{aligned}$$

De la convergencia uniforme, existe un  $N(\epsilon)$  tal que, si  $n > N(\epsilon)$  se cumple que

$$|F(t) - S_n(t)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall t \in [a, b] ,$$

luego

$$|F(t) - F(t')| < \frac{2}{3}\epsilon + |S_n(t) - S_n(t')| .$$

Pero  $S_n(t)$  es continua. Dado  $t$  fijo, y  $\epsilon$  arbitrario,  $\exists \delta$  tal que

$$|t - t'| < \delta \implies |S_n(t) - S_n(t')| < \frac{1}{3}\epsilon \implies |F(t) - F(t')| < \epsilon .$$

q.e.d.

Este teorema asegura que una función discontinua **no puede** ser aproximada uniformemente por una familia de funciones continuas (por ejemplo, las funciones sinusoidales).

**Teorema 1.5** Si dos funciones  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  tienen igual expansión en base completa (en el sentido de aproximación en la norma), entonces  $f(t) = g(t)$ .

**Demostración** Sean

$$S(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varphi_{\nu} | f) \varphi_{\nu}(t)$$

la aproximación en la norma para  $f$  y  $g$ . Luego

$$\|f - S\| = \|g - S\| = 0.$$

Así

$$\|f - g\| = \|f - S + S - g\| \leq \|f - S\| + \|S - g\| = 0 + 0 = 0 \implies f = g.$$

q.e.d.

Notar que este teorema es falso fuera de  $\mathcal{C}[a, b]$ . Por ejemplo,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

tiene igual expansión que  $g(t) = 0$ .

**Teorema 1.6** Sea  $\{\varphi\}_{\nu=0}^{\infty}$  un conjunto ortonormal en  $\mathcal{C}[a, b]$  y  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ . Entonces la serie  $\sum_{\nu=0}^{\infty} |(\varphi_{\nu} | f)|^2$  converge. En particular,

$$(\varphi_{\nu} | f) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0.$$

**Demostración** De la desigualdad de Bessel,

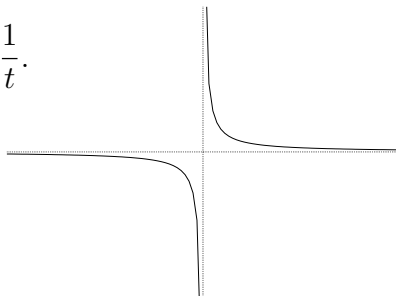
$$\sum_{n \in I} |C_n|^2 \leq \|f\|^2 = \int_a^b dt |f(t)|^2.$$

Como el lado derecho es independiente de  $I$ , la suma está acotada superiormente. Siendo todos sus términos positivos, debe converger. Luego  $(\varphi_{\nu} | f) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$ .

q.e.d.

## 1.5. Integrales impropias (valor principal)

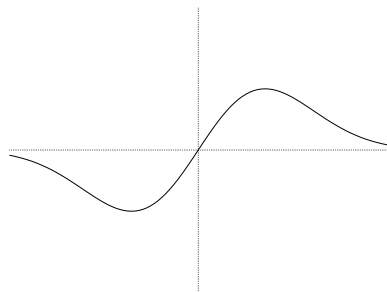
Considere la función  $f(t) = \frac{1}{t}$ .



Una integral como  $\int_{-1}^1 f(t) dt$  no está bien definida. Sin embargo, debiera ser nula simplemente por paridad. Para conciliar estos hechos, podemos entender este tipo de integrales, en intervalos simétricos en torno a la divergencia ( $t = 0$  en este caso), de la siguiente manera:

$$\oint_{-1}^1 f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{-\epsilon} f(t) dt + \int_{\epsilon}^1 f(t) dt \right\} = 0. \quad (1.17)$$

En el caso de funciones impares que son asíntotas al eje  $x$ ,



podemos definir la integral de la siguiente manera:

$$\oint_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{G \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-G}^0 f(t) dt + \int_0^G f(t) dt \right\} = 0. \quad (1.18)$$

**Definición 1.16** *Valor principal de una integral.* Sea  $t_0 \in [a, b]$ ,  $f(t)$  integrable en la unión  $[a, t_0 - \epsilon] \cup [t_0 + \epsilon, b]$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $f(t)$  singular si  $t \rightarrow t_0$ . Si existe el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{t_0 - \epsilon} f(t) dt + \int_{t_0 + \epsilon}^b f(t) dt \right] \equiv \oint_a^b f(t) dt, \quad (1.19)$$

se le llama el *valor principal de la integral*.

**Ejemplo** Sea

$$f(t) = \frac{1}{t - t_0} g(t), \quad \text{con } g(t) \text{ derivable en } t_0.$$

$$\oint_a^b f(t) dt = \oint_a^b \frac{g(t)}{t - t_0} dt = \int_a^b \left[ \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right] dt + g(t_0) \log \left( \frac{b - t_0}{t_0 - a} \right).$$

Si  $f(t)$  es integrable en todo intervalo finito de  $\mathbb{R}$ , entonces, se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(t) dt . \quad (1.20)$$

**Ejemplo** La integral  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, 1/x$  sólo existe como valor principal en torno a  $x = 0$  entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , y vale cero.

## 1.6. Convergencia según Cesàro

Considere la expansión en serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Ella converge para  $|x| < 1$ . A pesar de lo anterior evaluemos la función y su expansión en serie en  $x = -1$ :

$$\left. \frac{1}{1-x} \right|_{x=-1} = \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

¿Será posible sumar la serie de modo que ésta sí converja al valor de la función en ese punto?

Consideremos las sumas parciales:  $S_0 = 1$ ,  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 1$ ,  $S_3 = 0$  y así sucesivamente. Claramente no es convergente, sin embargo, si consideramos los promedios de las sumas parciales, encontramos que ellos sí convergen y lo hacen al valor de la función en ese punto. En efecto:

$$S_0 = 1, \quad \frac{S_0 + S_1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{S_0 + S_1 + S_2}{3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{S_0 + S_1 + S_2 + S_3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{S_0 + \dots + S_5}{5} = \frac{3}{5}, \dots \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=0}^n S_{\nu}}{n} = \frac{1}{2}.$$

**Definición 1.17** Consideremos la suma parcial

$$S_N = \sum_{\ell=0}^N T_{\ell}.$$

Definimos la suma de Cesàro de esta serie como:

$$S_{\infty}^* = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{N=0}^{M-1} S_N = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\ell}{M}\right) T_{\ell} \quad (1.21)$$

(reagrupando la suma finita).

El factor  $(1 - \ell/M)$  aparece como un factor de convergencia, que permite que los términos de orden más alto pesen menos al sumar (logrando así la convergencia de la serie), pero desapareciendo al tomar el límite  $M \rightarrow \infty$ , de modo que la suma converja al valor de la suma original.

Siguiendo con el ejemplo de la serie geométrica,

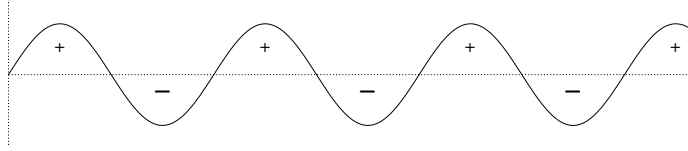
$$T_\ell = (-1)^\ell \implies S_{2N} = 1, \quad S_{2N+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{M}(1 + 0 + 1 + 0 + \dots) \simeq \frac{1}{M} \left( \frac{M}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

La convergencia ordinaria necesita que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_\nu$  exista.

La convergencia según Cesàro necesita que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu$  exista.

Problemas similares a la serie discreta anterior ofrece calcular la integral, desde cero hasta infinito, de una función oscilante, que no decrece, del tipo  $\int_0^\infty \sin(\omega x) dx$ :



En el mismo espíritu del caso discreto, proponemos la siguiente definición.

**Definición 1.18** Definimos una *integral Cesàro* de la siguiente manera:

$$\lim_{y \rightarrow \infty}^* \int_0^\infty f(t) dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left\{ \int_{x=0}^y dx \int_{t=0}^x dt f(t) \right\}. \quad (1.22)$$

Podemos encontrar una expresión alternativa para la integral de Cesàro integrando por partes la ecuación (1.22):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t) dt &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left[ \int_{x=0}^y dx \int_{t=0}^x dt f(t) \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left[ x \int_0^x f(t) dt \Big|_0^y - \int_0^y x f(x) dx \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left[ y \int_0^y f(t) dt - \int_0^y x f(x) dx \right] \\ \int_0^\infty f(t) dt &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x}{y} \right) f(x) dx. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Vemos aquí cómo el factor  $(1 - \ell/M)$  en el caso discreto (1.21) proviene simplemente de reordenar la suma. La expresión formal (1.23) permite ver la aparición de un factor de convergencia  $(1 - x/y)$ , pero no es necesariamente útil en la práctica.

Evaluemos como ejemplo la integral Cesàro de la función  $f(x) = \text{sen}(\omega x)$  con  $\omega \neq 0$ , usando la ecuación (1.22) directamente.

$$\begin{aligned}
 {}^*\int_0^\infty \text{sen}(\omega t) dt &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left[ \int_{x=0}^y dx \int_{t=0}^x dt \text{sen}(\omega t) \right] \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \int_0^y \left[ \frac{1 - \cos(\omega x)}{\omega} \right] dx \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\text{sen}(\omega y)}{y} \right] \\
 \boxed{{}^*\int_0^\infty \text{sen}(\omega t) dt = \frac{1}{\omega}} & \qquad (1.24)
 \end{aligned}$$

**Ejercicio** Evalúe  ${}^*\int_0^\infty \cos(\omega t) dt$ , con  $\omega \neq 0$ .

#### BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

Los tópicos discutidos en este capítulo son sólo una introducción a una amplia rama de las Matemáticas, el *análisis funcional*. Una típica referencia del tema es el libro de Yosida [1], el cual está claramente orientado para matemáticos. Una referencia más al gusto de un lector con interés en lo aplicado es el libro de Kreyszig [2].

En el interesante tema de las sucesiones divergentes el libro de Hardy [3] es una de las referencias principales.

- 1 Kosaku Yosida, *Functional Analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlín 1995 (ISBN 3 540 58654 7).
- 2 Erwin O. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Application*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Nueva York 1990 (ISBN 0 47150 459 9).
- 3 G. H. Hardy, *Divergent Series*, Chelsea Publishing, Nueva York 1949 (ISBN 0 8284 0334 1).





# Capítulo 2

## Series de Fourier

versión final 3.3-13 de enero de 2003

Sea  $f$  una función arbitraria en  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , i.e.

$$[-\pi, \pi] \xrightarrow{f} \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty .$$

Sea  $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$  un conjunto de funciones ortonormales en  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , definidas como  $\varphi_\nu(t) = \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Los *coeficientes de Fourier*,  $C_\nu = (\varphi_\nu | f)$ , satisfacen

$$\sum_{\nu} |C_\nu|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty \quad (\text{Desigualdad de Bessel})$$

Luego

$$\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} C_\nu = 0 . \quad (2.1)$$

Necesitaremos un par de resultados preliminares. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu\mu} &= e^{-in\mu} (1 + e^{i\mu} + e^{i2\mu} + \dots + e^{i2n\mu}) \\ &= \frac{1}{a^{2n}} (1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{4n}) \quad \text{con } a = e^{i\mu/2} \\ &= \frac{1}{a^{2n}} \left[ \frac{a^{4n+2} - 1}{a^2 - 1} \right] = \frac{a^{2n+1} - a^{-(2n+1)}}{a - a^{-1}} . \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu\mu} = \frac{\text{sen}[(2n+1)\mu/2]}{\text{sen}(\mu/2)} . \quad (2.2)$$

Por otra parte,

$$\int_0^\pi \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu\mu} d\mu = \int_0^\pi \left[ 1 + 2 \sum_{\nu=1}^n \cos(\nu\mu) \right] d\mu = \pi .$$

Usando (2.2)

$$\pi = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)\mu/2]}{\operatorname{sen}(\mu/2)} d\mu .$$

Tomando  $\nu = \mu/2$ :

$$\pi f(t) = 2 \int_0^{\pi/2} f(t) \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)\nu]}{\operatorname{sen} \nu} d\nu . \quad (2.3)$$

**Teorema 2.1** Sea  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , entonces su serie de Fourier

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (\varphi_\nu | f) \varphi_\nu(t)$$

converge y representa a  $f(t)$  (convergencia punto a punto) en todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

**Demostración** Considerar la suma parcial

$$S_n(t) = \sum_{\nu=-n}^n C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} .$$

Los coeficientes de Fourier son

$$C_\nu = (\varphi_\nu | f) = \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-i\nu t'}}{\sqrt{2\pi}} f(t') dt'$$

$$2\pi S_n(t) = 2\pi \sum_{\nu=-n}^n C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} = 2\pi \sum_{\nu=-n}^n \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-i\nu t'}}{\sqrt{2\pi}} f(t') dt' \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi}^\pi f(t') \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu(t-t')} dt'$$

Sea  $u = t' - t$  ( $du = dt'$ ). Se tiene:

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(u+t) \sum_{\nu=-n}^n e^{-i\nu u} du .$$

Puesto que  $\sum_{\nu=-n}^n e^{-i\nu n} = \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu n}$  [ver (2.2), por ejemplo], y haciendo una extensión periódica de  $f$  a todo  $\mathbb{R}$ ,

$$f(u \pm 2\pi) = f(u) \quad \forall u \in \mathbb{R} ,$$

resulta

$$2\pi S_n(t) = \int_{-\pi}^\pi f(u+t) \sum_{\nu'=-n}^n e^{i\nu' u} du$$

$$\pi S_n(t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 f(t+u) \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu u} du + \frac{1}{2} \int_0^\pi f(t+u) \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu u} du$$

Haciendo en la primera integral el cambio de variables  $u = -2v$ , y en la segunda el cambio  $u = 2v$ :

$$\pi S_n(t) = \frac{1}{2}(-2) \int_{\pi/2}^0 f(t-2v) \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu 2v} dv + \frac{1}{2}(2) \int_0^{\pi/2} f(t+2v) \sum_{\nu=-n}^n e^{i\nu 2v} dv .$$

Usando (2.2) y (2.3):

$$\pi [S_n(t) - f(t)] = \int_0^{\pi/2} [f(t-2v) + f(t+2v) - 2f(t)] \frac{\text{sen}[(2n+1)v]}{\text{sen } v} dv . \quad (2.4)$$

Definamos ahora

$$\psi_t(v) = f(t+2v) + f(t-2v) - 2f(t) \quad v \in [0, \pi/2] .$$

Sea

$$g(v) = \begin{cases} \frac{\psi_t(v)}{\text{sen } v} & v \in [0, \pi/2] \\ 0 & v \in [-\pi, 0] \\ 0 & v \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

$g(v)$  es acotada en  $[-\pi, \pi]$  y, de hecho, se puede mostrar que pertenece a  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ . Podemos reescribir (2.4):

$$\pi [S_n(t) - f(t)] = \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \text{sen}[(2n+1)v] dv = \sqrt{2\pi} \text{Im} (\varphi_{2n+1} | g) .$$

Con (2.1),

$$\pi [S_n(t) - f(t)] = \sqrt{2\pi} \text{Im} (\varphi_{2n+1} | g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = f(t) ,$$

o sea

$$f(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_\nu \frac{e^{i\nu t}}{\sqrt{2\pi}} .$$

q.e.d.

Sabemos, de (2.1), que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \implies \lim_{\nu \rightarrow \infty} C_\nu = 0 .$$

Supongamos que  $f \in \mathcal{C}_o[-\pi, \pi]$  y que  $f'$  es continua, tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 < \infty$ . Entonces de la definición de los coeficientes de Fourier:

$$\sqrt{2\pi} C_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt \quad \nu \in \mathbb{Z} .$$

Si integramos por partes:

$$\sqrt{2\pi} C_\nu = \left( f(t) \frac{e^{-i\nu t}}{-i\nu} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) + \frac{1}{i\nu} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-i\nu t} dt .$$

Observando que el segundo término no es sino el coeficiente de Fourier de  $f'$ , tenemos

$$\nu C_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \pm\infty} 0 .$$

Análogamente, si  $f, f' \in \mathcal{C}_o[-\pi, \pi]$  y  $f''$  es continua, tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} |f''|^2 < \infty$ , entonces

$$\nu^2 C_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \pm\infty} 0 .$$

Vale decir, cuanto más derivable es la función  $f$ , tanto más rápido tienden a cero sus coeficientes de Fourier. Más aún, se puede demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 2.2 (Sin demostración)** Si  $f \in \mathcal{C}$  y  $f$  tiene discontinuidades “mansas” (saltos finitos), entonces los coeficientes de Fourier  $C_\nu$  decrecen como  $1/\nu$ .

Si  $f \in \mathcal{C}_o$ ,  $f' \in \mathcal{C}$  y  $f'$  tiene discontinuidades “mansas”, entonces los coeficientes de Fourier  $C_\nu$  decrecen como  $1/\nu^2$ .

Etcétera.

El teorema anterior muestra que la serie de Fourier converge más rápidamente mientras mejor comportamiento analítico tenga la función  $f$ . En el caso de funciones infinitamente derivables, los coeficientes de Fourier exhiben decaimientos más fuertes que cualquier polinomio ( $C_\nu \simeq 1/\nu!$ , por ejemplo).

**Teorema 2.3** Si  $f'' \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$  entonces la serie de Fourier de  $f$  converge uniformemente a  $f$ .

**Demostración** Sean  $C_\nu = (\varphi_\nu | f)$  los coeficientes de Fourier de  $f$ . Como  $f' \in \mathcal{C}_o$ , entonces  $\nu^2 C_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \pm\infty} 0$ , luego existe un  $N$  tal que para todo  $|\nu| > N$  se tiene

$$\begin{aligned} |\nu^2 C_\nu| &< 1 \\ \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_\nu \varphi_\nu &= \sum_{|\nu| \leq N} C_\nu \varphi_\nu + \sum_{|\nu| > N} C_\nu \varphi_\nu \end{aligned}$$

Sea

$$M = \max_{t \in [-\pi, \pi]} \sum_{|\nu| \leq N} C_\nu \varphi_\nu .$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_\nu \varphi_\nu &\leq \left| \sum_{|\nu| \leq N} C_\nu \varphi_\nu + \sum_{|\nu| > N} C_\nu \varphi_\nu \right| \leq \left| \sum_{|\nu| \leq N} C_\nu \varphi_\nu \right| + \left| \sum_{|\nu| > N} C_\nu \varphi_\nu \right| \\ &\leq M + \sum_{|\nu| > N} |C_\nu| |\varphi_\nu| = M + \sum_{|\nu| > N} |C_\nu| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &\leq M + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\nu| > N} |C_\nu| < M + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\nu| > N} \frac{1}{\nu^2} \end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} ,$$

donde  $\zeta(x)$  es la función zeta de Riemann. Así:

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_{\nu} \varphi_{\nu} < M + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} .$$

Luego existe un mayorante convergente independiente de  $t$ , y por lo tanto hay convergencia uniforme.

q.e.d.

**Proposición 2.1 (Sin demostración)** Si  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$  y  $f(t) \in \mathbb{R}$ , entonces  $f$  se puede expandir en una serie trigonométrica:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt) ,$$

con los coeficientes dados por

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

## Resultados útiles

Escribamos la serie de Fourier

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_{\nu} e^{i\nu x} , \quad C_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt .$$

1)  $f(x + 2\pi) = f(x)$

La expansión de Fourier de  $f(x)$  implica su extensión periódica a  $\mathbb{R}$ .

2) Si  $f(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$C_{-\nu} = C_{\nu}^* .$$

3) Poniendo

$$e^{\pm i\nu x} = \cos(\nu x) \pm i \sin(\nu x) ,$$

obtenemos la expansión alternativa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [A_{\nu} \cos(\nu x) + B_{\nu} \sin(\nu x)] ,$$

con

$$A_\nu = C_\nu + C_{-\nu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(\nu t) dt ,$$

$$B_\nu = i(C_\nu - C_{-\nu}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(\nu t) dt .$$

Además:

$$f(x) = f(-x) \implies B_\nu = 0 ,$$

$$f(x) = -f(-x) \implies A_\nu = 0 ,$$

de modo que esta forma de la expansión es útil cuando  $f$  tiene paridad definida.

4) Para expandir una función  $F$  de período  $L$ , definimos una función  $f$  de período  $2\pi$  por

$$F(u) = f\left(2\pi \frac{u}{L}\right) .$$

Así,  $F(u+L) = F(u)$ . Podemos expandir en serie de Fourier la función  $f$ , obteniéndose finalmente:

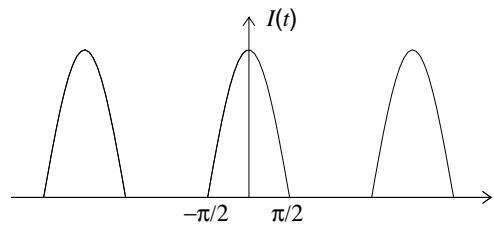
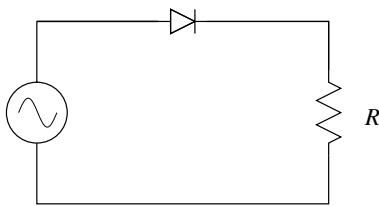
$$F(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu e^{iq_\nu u} = F(u+L) , \quad \text{con } q_\nu = \frac{2\pi}{L} \nu ,$$

$$C_\nu = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(t) e^{-iq_\nu t} dt .$$

## Aplicaciones

1) Rectificador de “media” onda.

Consideremos el siguiente circuito eléctrico, y la forma de la corriente en función del tiempo que por él circula:



$I(t)$  es par, luego  $B_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ :

$$I(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) ,$$

con

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} I(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \frac{2}{\pi}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos(nt) dt = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar, } n \neq 1 \\ \frac{-2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2 - 1)} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

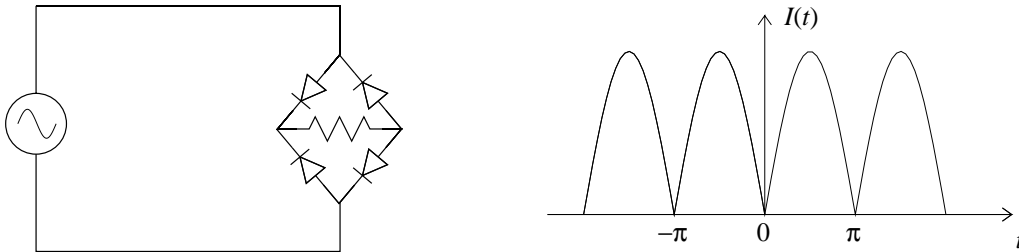
Luego

$$I(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{\cos t}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(2t)}{1 \cdot 3} - \frac{\cos(4t)}{3 \cdot 5} + \dots \right]$$

$$I(0) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots \right] \quad (2.5)$$

En general,  $A_n \rightarrow 0$  como  $1/n^2$ , como corresponde a una función  $I(t)$  cuya primera derivada tiene discontinuidades mansas.

2) Rectificador de onda completa.



En este caso,  $I(t) = |\sin t|$  es par, y se tiene:

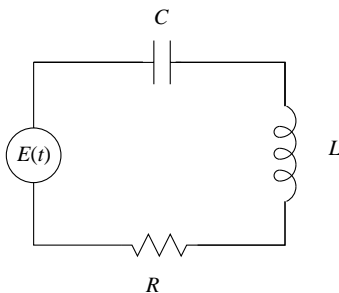
$$A_0 = \frac{4}{\pi}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cos(nt) dt \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ -4 & n \text{ par} \\ \frac{-4}{\pi(n^2 - 1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

e

$$I(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos(2t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4t)}{3 \cdot 5} + \dots \right]$$

3) Circuito resonante  $RLC$ .



Consideremos ahora  $E(t)$  una función arbitraria pero periódica de período  $T$ . La corriente  $I(t)$  satisface

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt} .$$

$E(t)$  se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n e^{in\omega t} , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

donde

$$E_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-in\omega t} dt .$$

Estos coeficientes se pueden calcular si  $E(t)$  es una función conocida. Escribiendo

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} ,$$

encontramos, reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left( -n^2 \omega^2 L + in\omega R + \frac{1}{C} \right) C_n - in\omega E_n \right] e^{in\omega t} = 0 .$$

Siendo  $\{e^{in\omega t}\}_n$  un conjunto linealmente independiente, cada coeficiente de la suma debe ser nulo, luego:

$$C_n = \frac{i \frac{n\omega}{L}}{\frac{1}{LC} - n^2 \omega^2 + i \frac{n\omega R}{L}} E_n .$$

Aquí,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  es la frecuencia natural del sistema.

#### 4) Conducción del calor.

Consideremos una barra de longitud  $L$ . Su temperatura es una cierta función de la distancia  $x$  a uno de sus extremos y del tiempo,  $U(x, t)$ . Supongamos que en los extremos la temperatura es siempre nula:

$$U(0, t) = U(L, t) = 0$$

y que inicialmente el perfil de temperatura es:

$$U(x, 0) = x(L - x) .$$



La ecuación que rige la evolución de la temperatura es:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} ,$$

donde  $\kappa$  es la constante de conducción térmica. Al separar variables:

$$U(x, t) = X(x)T(t) ,$$

obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\lambda^2 \kappa T , \\ \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\lambda^2 X , \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es una constante. Las soluciones generales de estas ecuaciones son:

$$T(t) = \bar{C} e^{-\kappa \lambda^2 t} \quad \text{y} \quad X(x) = \bar{A} \cos(\lambda x) + \bar{B} \sin(\lambda x) ,$$

de modo que

$$U(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] e^{-\kappa \lambda^2 t} .$$

Imponiendo la condición de borde  $U(0, t) = 0$ :

$$A = 0 .$$

De  $U(L, t) = 0$ , en tanto,

$$\begin{aligned} \sin(\lambda L) &= 0 , \\ \lambda_m &= \frac{m\pi}{L} , \quad m \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$

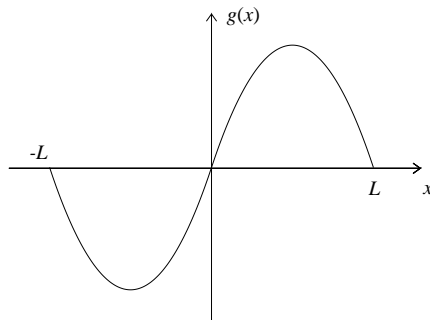
La solución más general es entonces:

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-\kappa \lambda_m^2 t} \sin(\lambda_m x) .$$

Ahora consideramos las condiciones iniciales:

$$U(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = x(L - x) .$$

Como esta serie es una función impar, consideramos la extensión periódica impar de la función  $g(x)$  al intervalo  $[-L, L]$ , de modo que los coeficientes  $B_m$  correspondan a los coeficientes de Fourier de  $g(x)$ :



$$B_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = 2 \int_0^L x(L-x) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = \frac{4L^2}{m^3\pi^3} (-1)^{m+1}$$

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{4L^2}{\pi^3} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) e^{-\frac{\kappa m^2 \pi^2 t}{L^2}} .$$

En particular,

$$U(x, t) \xrightarrow[t \gg t_0 = \frac{L^2}{\kappa \pi^2}]{} \frac{4L^2}{\pi^3} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) e^{-t/t_0} .$$

5) Resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

para el interior del círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ , con la condición de borde  $U(\rho = 1, \phi) = \psi(\phi)$ .

La solución a (2.6) se puede plantear como

$$U(x, y) = \operatorname{Re}\{f(z)\},$$

donde  $f(z)$  es una función holomorfa en  $\mathbb{C}$ . Por tanto, podemos escribir

$$f(z) = f(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ,$$

y consideremos

$$c_n = a_n - ib_n .$$

Cada término de la expansión anterior satisface (2.6). En efecto,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z^n &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (x + iy)^n \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [n(x + iy)^{n-1}] + \frac{\partial}{\partial y} [in(x + iy)^{n-1}] \\ &= n(n-1)(x + iy)^{n-2} - n(n-1)(x + iy)^{n-2} = 0 . \end{aligned}$$

Escribamos  $U(x, y)$  en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n) r^n e^{in\phi} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n) r^n (\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [a_n \cos(n\phi) + b_n \operatorname{sen}(n\phi)] . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Imponiendo la condición de borde:

$$\psi(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi) .$$

Por lo tanto,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier de  $\psi(\phi)$ . Vale decir, la solución de una ecuación de Laplace en dos dimensiones se puede escribir en términos de una expansión de Fourier.

### Fenómeno de Gibbs

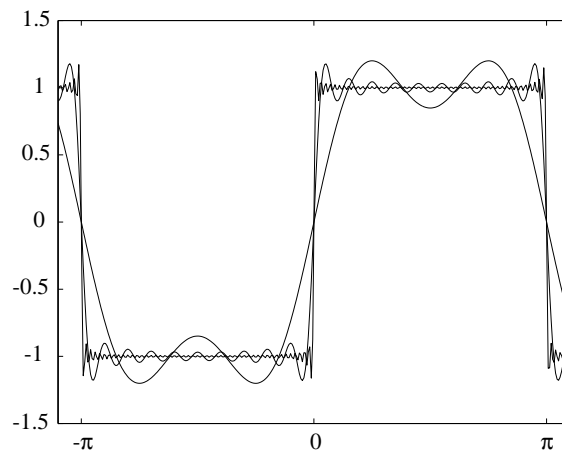
Consideremos la onda cuadrada

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0, \pm\pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Su expansión en serie de Fourier se obtiene fácilmente, encontrándose:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sin[(2l+1)x] .$$

Observamos que los coeficientes decaen como  $b_n \simeq 1/n$ , en concordancia con el teorema demostrado anteriormente (pág. 22). En la siguiente figura presentamos la función  $f(x)$  y su aproximación por sumas parciales de Fourier, con  $n = 2$ ,  $n = 10$  y  $n = 50$  términos.

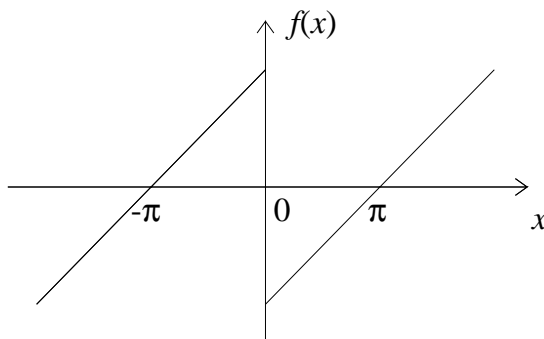


Se observa que hay buena convergencia con 10 términos, y el resultado es casi perfecto con 50, salvo ciertas oscilaciones en los puntos de discontinuidad, oscilaciones que *no* se amortiguan cuando el número de términos va a infinito. Sin embargo, como la suma parcial  $S_N(x)$  converge punto a punto al valor esperado  $f(x)$ , las oscilaciones no amortiguadas deben necesariamente limitarse a una vecindad cada vez menor en torno a los puntos de discontinuidad, de modo que cualquier  $x \neq l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , quede fuera de tal vecindad para  $N$  suficientemente grande.

Este fenómeno se conoce como *fenómeno de Gibbs*, y es consecuencia de la imposibilidad de aproximar uniformemente por funciones continuas una función discontinua.

Para estudiarlo con más detalle, consideremos la función “diente de sierra”:

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0 \\ x + \pi & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$



Su expansión de Fourier es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) .$$

Y la suma de los  $N$  primeros términos:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) .$$

Si  $x \rightarrow 0$ , los primeros términos de la suma se hacen despreciables. Para valores grandes de  $n$ , en tanto, el sumando varía lentamente, y se puede reemplazar la suma por una integral. Por lo tanto, en el límite  $N \gg 1$ ,  $x \ll 1$  podemos escribir

$$f_N(x) \simeq \int_0^N dn \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) = 2 \int_0^{Nx} dt \frac{\operatorname{sen} t}{t} .$$

Definiendo la función *seno integral*

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x dt \frac{\operatorname{sen} t}{t} , \quad (2.9)$$

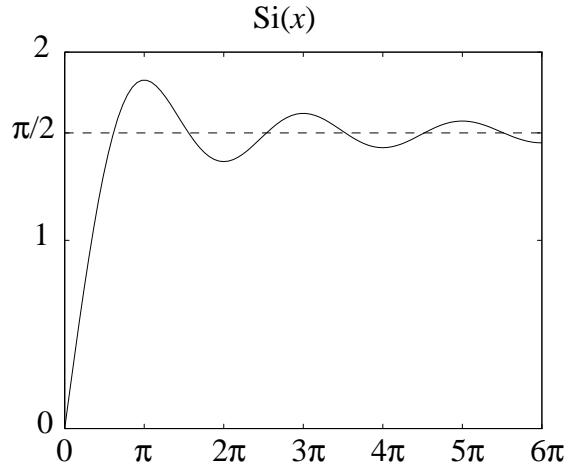
se sigue que

$$f_N(x) = 2 \operatorname{Si}(Nx) .$$

Es claro de (2.9) que  $\operatorname{Si}(0) = 0$  y  $\operatorname{Si}(\infty) = \pi/2$ . Además,  $\operatorname{Si}(x)$  posee extremos dados por

$$0 = \frac{\partial \operatorname{Si}}{\partial x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ x = n\pi$$

Así, como  $\sin t/t$  oscila amortiguándose para  $t \rightarrow \infty$ , se espera que  $\text{Si}(x)$  igualmente oscile cuando  $x$  crece, pero convergiendo a  $\pi/2$ . Sus extremos en  $x = (2n+1)\pi$  deben ser máximos (contribuciones de área positiva de  $\sin t/t$ ), y sus extremos en  $x = 2n\pi$  deben ser mínimos (contribuciones de área negativa de  $\sin t/t$ ). El primer máximo, en  $x = \pi$ , es el máximo absoluto (ver figura).



Algunos valores característicos:

$$\begin{aligned} \text{Si}(\pi) &\simeq 1.852 \quad (\text{Primer máximo, absoluto}) \\ \text{Si}(2\pi) &\simeq 1.418 \quad (\text{Primer mínimo}) \\ \text{Si}(3\pi) &\simeq 1.675 \quad (\text{Segundo máximo}) \end{aligned}$$

De estos resultados se desprende que:

- a)  $f_N(0) = 0$
- b)  $f_N(x) \xrightarrow{x \gg 1/N} \pi \simeq 3.14159$
- c)  $f_N(x)$  tiene máximos en  $(2n+1)\pi/N$ , por ejemplo:

$$\begin{aligned} f_N\left(\frac{\pi}{N}\right) &\simeq 3.704 \quad (\text{Primer máximo, absoluto}) \\ f_N\left(\frac{3\pi}{N}\right) &\simeq 3.350 \quad (\text{Segundo máximo}) \end{aligned}$$

- d)  $f_N(x)$  tiene mínimos en  $2n\pi/N$ :

$$f_N\left(\frac{2\pi}{N}\right) \simeq 2.836 \quad (\text{Primer mínimo})$$

De este modo, la función  $f_N(x)$  oscila en tanto se tenga  $x \simeq O(1/N)$ . El primer máximo implica sobrepasar el valor límite en un 18 %, y el segundo sólo en un 7 %. Toda esta estructura está en una pequeña vecindad de  $x = 0$ , vecindad cuyo ancho va a cero si  $N \rightarrow \infty$ .

Esto explica el fenómeno de Gibbs. Aun cuando hemos considerado la función (2.8), es fácil convencerse de que nuestros razonamientos son generales, y que podemos aplicarlos a cualquier función en torno a una discontinuidad finita de la misma.

### Integración de series de Fourier

Sea  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$  y

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) .$$

Sea

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt .$$

Entonces  $F(x)$  es continua y acotada. Además es periódica si  $F(-\pi) = F(\pi)$ , i.e.

$$0 = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \pi a_0 ,$$

es decir,

$$a_0 = 0 .$$

Siendo  $F$  periódica, es expandible en serie de Fourier:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx) ,$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx \\ &= F(x) \frac{\operatorname{sen} nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n\pi} F'(x) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = -\frac{b_n}{n} , \end{aligned} \quad n \neq 0 .$$

Si  $n = 0$ ,

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = x F(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) dx .$$

Análogamente,

$$B_n = \frac{a_n}{n} .$$

Tenemos pues el siguiente teorema:

**Teorema 2.4** Sea  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$  con un desarrollo de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

( $a_0 = 0$ ). Entonces

$$\int_{-\pi}^x f(x) dx = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} nx - \frac{b_n}{n} \cos nx,$$

con

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) dx .$$

Si  $a_0 \neq 0$ , basta considerar  $g(x) = f(x) - a_0/2$ .

#### BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

La bibliografía sobre el tema es muy amplia, pero claramente la primera referencia es el libro de Fourier (de 1822) [1]. Para los que tengan interés por cuestiones teóricas, una de las referencias más autorizadas es [2]. Una breve referencia de entre las muchas dedicadas a las aplicaciones es [3].

- 1 Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Editions Jacques Gabay, París, 1988 (ISBN 2 87647 046 2).
- 2 A. Zygmund, *Trigonometric Series*, vol. 1–2, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1988 (ISBN 0 52135 885 X).
- 3 James Ward Brown and Ruel V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill Company, Nueva York, 2000 (ISBN 0 07232 570 4).





# Capítulo 3

## Transformada de Fourier

versión final 3.3-13 de enero de 2003

### 3.1. Definiciones

Sea  $f \in \mathcal{C}[-L, L]$ . Entonces

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad \text{con } -L \leq x \leq L, \quad (3.1)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Tomemos el límite cuando  $L \rightarrow \infty$ . Si definimos  $k = \pi n/L$ , vemos que, en este límite,  $k$  se vuelve continuo. Por otra parte,

$$\Delta k = \frac{\Delta n \pi}{L} = \frac{\pi}{L}, \quad \text{pues } \Delta n = 1.$$

Definimos

$$C_L(k) = \frac{L}{\pi} C_n.$$

Usando las anteriores definiciones en las ecuaciones (3.1) y (3.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{Lk/\pi=-\infty}^{\infty} C_L(k) \frac{\pi}{L} e^{ikx} \left( \frac{\Delta k L}{\pi} \right) = \sum_{Lk/\pi=-\infty}^{\infty} C_L(k) e^{ikx} \Delta k, \\ C_L(k) &= \frac{L}{\pi} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Al hacer  $L \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx} dk, \\ C(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Definimos ahora  $C(k)$  como la *transformada de Fourier*  $F(k)$  de la función  $f(x)$ . La relación entre  $f$  y  $F$  está dada por el *teorema de reciprocidad*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.3a)$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \equiv \mathcal{F}\{f, k\}. \quad (3.3b)$$

**Definición 3.1** Si  $f$  es tal que

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty,$$

entonces se dice que  $f \in L^1$ .

De la definición anterior, se sigue que  $f \in L^1$  si y sólo si  $|f| \in L^1$ . Por otro lado, si  $f \in L^1$ , entonces  $|e^{ikx} f(x)| \in L^1$ , luego  $e^{ikx} f(x) \in L^1$ . Por tanto, la transformada de Fourier está bien definida.

**Teorema 3.1 (Riemann-Lebesgue. Sin demostración.)**

Si  $f \in L^1$  entonces la transformada de Fourier  $F(k) = \mathcal{F}\{f, k\}$  existe y  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} F(k) = 0$ .

## 3.2. Ejemplos

a) Una gaussiana,  $f(x) = Ne^{-\alpha x^2}$ . Su transformada de Fourier es:

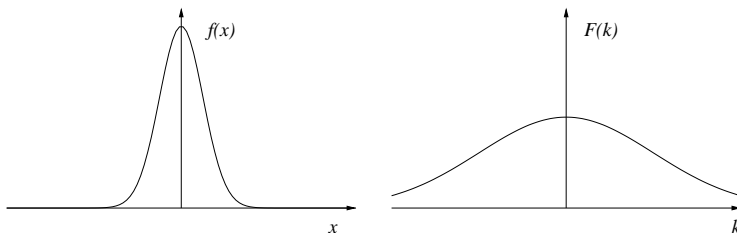
$$F(k) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{ikx} dx = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x - ik/2\sqrt{\alpha})^2} e^{-k^2/4\alpha} dx.$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \sqrt{\alpha}x - ik/2\sqrt{\alpha}$ , obtenemos

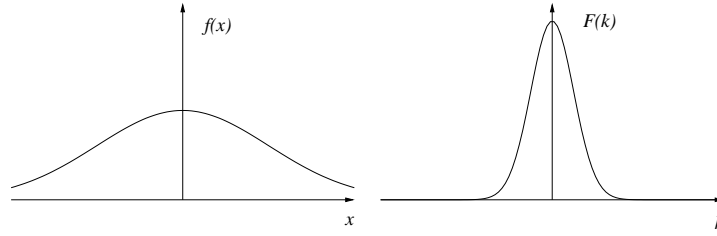
$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N}{\sqrt{\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \int_{-\infty - ik/2\sqrt{\alpha}}^{\infty - ik/2\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} du = \frac{N}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$F(k) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \sqrt{\pi} = \frac{N}{\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha},$$

otra gaussiana. Si  $\alpha$  es “grande”:



Si  $\alpha$  es “pequeño”:

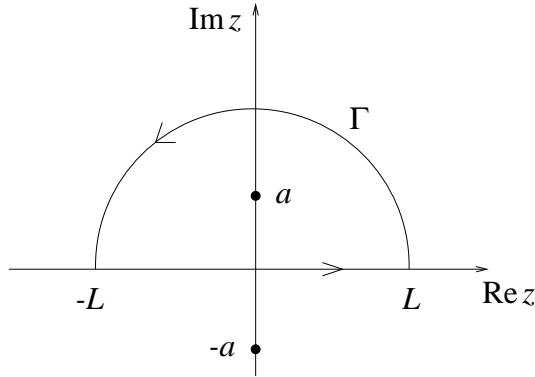


Los anchos de la función y de su transformada están en razón inversa.

- b) Una función Lorentziana  $f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$  con  $a > 0$ . La transformada de Fourier:

$$F(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x + ai)(x - ai)} dx .$$

Haciendo una prolongación analítica al plano complejo de la función  $f(x)$  y luego considerando el contorno cerrado de integración  $\Gamma$ , para el caso  $k > 0$ , podemos aplicar el teorema del residuo:



$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{ikz}}{(z + ai)(z - ai)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} = 2\pi i (z - ai) \frac{e^{ikz}}{(z + ai)(z - ai)} \Big|_{z=ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ka} .$$

Podemos separar el contorno en dos tramos, un semicírculo y un tramo horizontal entre  $-L$  y  $L$  sobre el eje real. Al tomar el límite  $L \rightarrow \infty$  es fácil mostrar que la integral sobre el semicírculo tiende a cero y la integral entre  $-L$  y  $L$  tiende a una integral real entre  $-\infty$  y  $\infty$ , es decir

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{ikz}}{(z + ai)(z - ai)} dz \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x + ai)(x - ai)} dx = \frac{\pi}{a} e^{-ka} .$$

Finalmente, nuestra transformada de Fourier resulta

$$F(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{a} e^{-ka} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ka} \quad \text{para } k > 0 .$$

Análogamente, podemos mostrar, considerando el polo en el semiplano inferior y un contorno de integración que lo contenga, que

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ka} \quad \text{para } k < 0 .$$

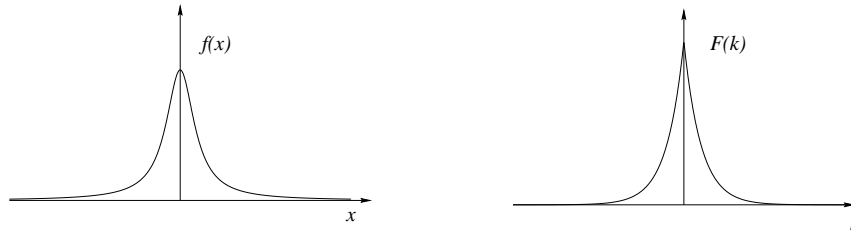
Para  $k = 0$ :

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Reuniendo los resultados para los diferentes  $k$  tenemos

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|a}.$$

Gráficamente:



Nuevamente, como en el caso de la Gaussiana, mientras más ancha es la función, más angosta es su transformada, y viceversa. Observamos que:

- |   |  |
|---|--|
| i) $f(x) \xrightarrow{ x  \rightarrow \infty} 0$ como $\frac{1}{x^2}$ | $F'(k)$ discontinua en cero                      |
| ii) $f(x)$ infinitamente diferenciable                                | $F(k)$ decrece más rápido que cualquier potencia |

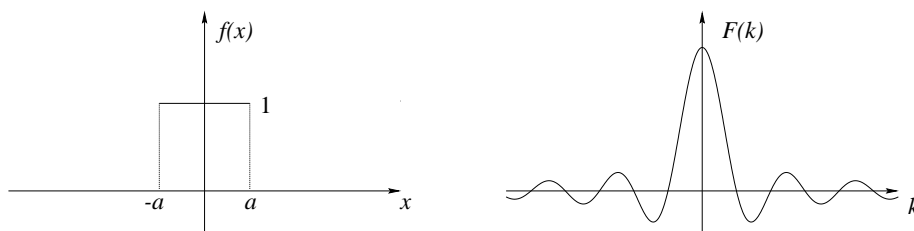
Esto coincide con los resultados generales sobre los coeficientes de Fourier del capítulo 2. Más adelante, en la sección 3.3, demostraremos el teorema análogo para transformadas de Fourier.

c) Consideremos la función, con  $a > 0$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}.$$

Su transformada de Fourier

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(ka)}{k}$$



Se observa, como en los ejemplos anteriores:

$f(x)$ ancha	$F(k)$ angosta
$f(x)$ angosta	$F(k)$ ancha
$f(x)$ discontinua	$F(k) \xrightarrow{ k  \rightarrow \infty} 0$ como $\frac{1}{k}$
$f(x) \xrightarrow{ x  \rightarrow \infty} 0$ más rápido que cualquier potencia	$F(k)$ infinitamente diferenciable

**Ejercicio** Para el caso anterior, evaluar  $\mathcal{F}^{-1}\{F, x\}$ , y mostrar que  $f(x = \pm a) = \frac{1}{2}$ .

d) Si  $g(x) \in \mathbb{R}$  y es impar, *i.e.*  $g(-x) = -g(x)$ , entonces

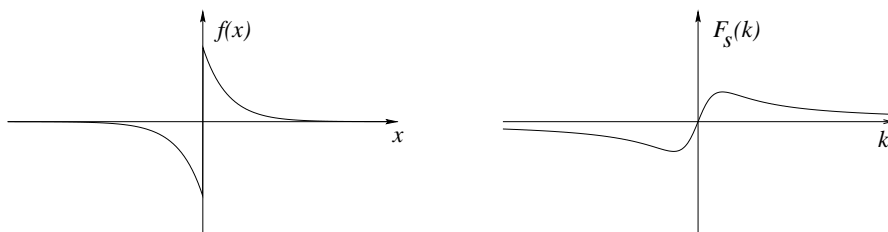
$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \operatorname{sen}(kx) dx \equiv iG_S(k),$$

donde  $G_S$  es conocida como la *transformada seno de Fourier* de la función  $g(x)$ , y viene definida por

$$G_S(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \operatorname{sen}(kx) dx \quad (3.4)$$

Como ilustración de la definición anterior, sea  $f(x) = \operatorname{sgn}(x) e^{-\alpha|x|}$ . Evaluemos su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} F(k) &= iF_S(k) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \left( \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - ik)x} dx - \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + ik)x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left. \frac{-1}{\alpha - ik} e^{-(\alpha - ik)x} \right|_0^{\infty} - \left. \frac{-1}{\alpha + ik} e^{-(\alpha + ik)x} \right|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\alpha - ik} - \frac{1}{\alpha + ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2ik}{\alpha^2 + k^2} \\ F(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ik}{\alpha^2 + k^2}. \end{aligned}$$



$f(x)$  discontinua

$$F(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0 \text{ como } \frac{1}{k}$$

$f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$  más rápido que  
cualquier potencia

$F(k)$  infinitamente  
diferenciable

Notemos que  $F \in L^1$ , pero su integral entre  $-\infty$  y  $\infty$  resulta impropia,  $\oint F = 0$ .

Análogamente a la definición de la *transformada seno de Fourier*, si  $g(x) \in \mathbb{R}$  y es par, i.e.  $g(-x) = g(x)$ , entonces

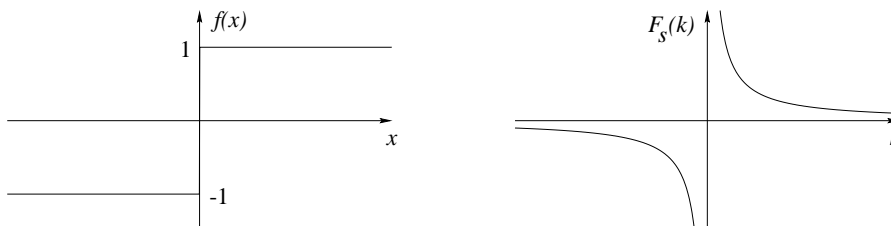
$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos(kx) dx \equiv G_C(k),$$

donde  $G_C$  es conocida como la *transformada coseno de Fourier* de la función  $g(x)$ , y viene definida por

$$G_C(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos(kx) dx \quad (3.5)$$

e) Consideremos ahora una función  $f(x) \notin L^1$ . Sea  $f(x) = \text{sgn}(x)$ .  $f(x) \notin L^1$ , ya que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  diverge. Intentemos de todas maneras evaluar la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(x) e^{ikx} dx \\ &= i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \text{sen}(kx) dx \quad (\text{integral Cesàro}) \\ &= \begin{cases} \frac{i}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



### 3.3. Propiedades

Algunas propiedades de la transformada de Fourier. Sean  $f, g \in L^1$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

$$\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g, k\} = \alpha \mathcal{F}\{f, k\} + \beta \mathcal{F}\{g, k\} \quad \mathcal{F} \text{ es lineal} \quad (3.6a)$$

$$\mathcal{F}\{f(x - a), k\} = e^{ika} \mathcal{F}\{f, k\} = e^{ika} F(k) \quad (3.6b)$$

$$\mathcal{F}\{f, -k\} = (\mathcal{F}\{f, k\})^* \quad \text{si } f \in \mathbb{R} \quad (3.6c)$$

$$\mathcal{F}\{e^{ax} f(x), k\} = \mathcal{F}\{f, k - ai\} = F(k - ai) \quad (3.6d)$$

$$\mathcal{F}\{e^{iax} f(x), k\} = \mathcal{F}\{f, k + a\} = F(k + a) \quad (3.6e)$$

$$\mathcal{F}\{f(\alpha x), k\} = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}\left\{f(x), \frac{k}{\alpha}\right\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{k}{\alpha}\right) \quad (3.6f)$$

**Teorema 3.2** Cuanto más derivable es  $f(x)$  tanto más rápido decrece  $F(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0$ .

**Demostración** Sea  $f(x)$  continua en  $-\infty < x < \infty$ . Si  $f, f' \in L^1$ , entonces

$$F(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0 ,$$

pero también

$$kF(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0 ,$$

ya que

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \stackrel{\text{ipp}}{=} f(x) \frac{e^{ikx}}{ik\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{ik\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{ikx} dx = -\frac{1}{ik} \mathcal{F}\{f', k\} ,$$

o sea

$$-ikF(k) = \mathcal{F}\{f', k\} \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0 ,$$

pues  $f' \in L^1$ .

Sean ahora  $f, f', f'', f''', \dots, f^{(n-1)} \in L^1$  continuas en  $-\infty < x < \infty$ . Sea  $f^{(n)} \in L^1$ , entonces integrando  $n$  veces por partes obtenemos

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}, k\} = (-ik)^n F(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0 ,$$

lo cual demuestra lo enunciado en el teorema.

q.e.d.

**Teorema 3.3** Cuanto más rápido  $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ , tanto más derivable es  $F(k)$ .

**Demostración** Sea  $f \in L^1$ . Entonces  $F(k)$  es continua. En efecto,

$$\begin{aligned}\Delta F(k) &= F(k+h) - F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \{e^{i(k+h)x} - e^{ikx}\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} e^{ihx/2} \{e^{ihx/2} - e^{-ihx/2}\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} e^{ihx/2} 2i \sin\left(\frac{hx}{2}\right) dx .\end{aligned}$$

Que  $f \in L^1$  dice que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty$ , luego  $\forall \epsilon > 0 \exists A$  suficientemente grande, tal que  $\int_A^{\infty} |f| < \epsilon$ ,  $\int_{-A}^{-\infty} |f| < \epsilon$ . Además, se tiene que

$$\left| \sin\left(\frac{hx}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} |hx| \leq \frac{hA}{2} \quad \text{para } x \in [-A, A] .$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores podemos acotar  $|\Delta F|$ , a saber

$$\begin{aligned}|\Delta F| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left| \sin\left(\frac{hx}{2}\right) \right| dx \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-A} |f(x)| dx + \int_A^{\infty} |f(x)| dx + \int_{-A}^A |f(x)| \frac{hA}{2} dx \right\} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \epsilon + \epsilon + \frac{hA}{2} \int_{-A}^A |f(x)| dx \right\} ,\end{aligned}$$

lo cual es tan pequeño como se quiera. Lo anterior implica que  $F(k)$  es continua.

Sea ahora  $f(x)$  y  $xf(x) \in L^1$ , entonces afirmamos que  $F(k)$  es derivable. En efecto

$$\frac{d}{dk} [\sqrt{2\pi} F(k)] = \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k} [f(x) e^{ikx}] dx = i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{ikx} dx .$$

El intercambio entre la integral y la derivada queda legitimado ya que hay convergencia uniforme porque la última de las integrales tiene un mayorante convergente:  $\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| < \infty$  pues  $xf(x) \in L^1$ . De lo anterior tenemos que

$$F'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ix f(x) e^{ikx} dx = \mathcal{F}\{ix f(x), k\} .$$

Finalmente, si  $f(x), xf(x), \dots, x^n f(x) \in L^1$ , entonces, de una forma análoga al caso anterior, podemos probar que la derivada de la transformada de Fourier existe, porque  $F^{(n)}(k) = \mathcal{F}\{(ix)^n f(x), k\}$ .

q.e.d.

También se puede probar que, en general, mientras más ancha es una función, más angosta es su transformada de Fourier y viceversa, como ya observamos en los ejemplos de la sección 3.2.



**Definición 3.2** Sea  $f(x)$  tal que  $x |f(x)|^2, x^2 |f(x)|^2 \in L^1$ . Definimos la *posición media de la distribución*  $|f(x)|^2$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx , \quad (3.7)$$

con

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx ,$$

y el *ancho de la distribución*  $|f(x)|^2$

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} , \quad (3.8)$$

**Teorema 3.4 (Principio de incerteza)**

Sea  $\Delta x$  el ancho medio asociado a una función  $f(x) \in L^1$ . Sea  $F(k) = \mathcal{F}\{f(x), k\}$  la transformada de Fourier de  $f$ , con ancho  $\Delta k$ . Entonces se cumple

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2} .$$

La igualdad se consigue sólo si  $f(x)$  es una gaussiana.

## 3.4. Aplicaciones

a) Consideremos la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 .$$

Busquemos soluciones para  $y \geq 0$  que satisfagan las condiciones de contorno

$$\Phi(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad \Phi(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 .$$

**Solución**

Realicemos separación de variables, *i.e.* escribimos  $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ . Al introducir esta forma para  $\Phi(x, y)$  en la ecuación diferencial obtenemos

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\alpha^2 ,$$

donde  $\alpha > 0$  es la constante de separación. Las soluciones de las respectivas ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \alpha^2 X(x) = 0 &\longrightarrow X(x) = \overline{A}e^{i\alpha x} + \overline{B}e^{-i\alpha x} , \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \alpha^2 Y(y) = 0 &\longrightarrow Y(y) = \overline{C}e^{-\alpha y} + \overline{D}e^{\alpha y} . \end{aligned}$$

Al aplicar la condición de contorno  $\Phi(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$  concluimos que  $\overline{D} = 0$ .

Planteamos la solución más general superponiendo sobre todos los valores posibles de la constante de separación  $\alpha$ :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [A(\alpha)e^{i\alpha x} + B(\alpha)e^{-i\alpha x}] e^{-\alpha y} d\alpha .$$

Imponiendo la condición de borde para  $y = 0$ :

$$\Phi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [A(\alpha)e^{i\alpha x} + B(\alpha)e^{-i\alpha x}] d\alpha = f(x) .$$

Al definir  $A(-\alpha) = B(\alpha)$  podemos compactar las dos integrales en sólo una:

$$\Phi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty A(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha = f(x) .$$

Identificamos los coeficientes,  $A(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x), \alpha\}$ , y reemplazamos en la solución general,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}\{f(x), \alpha\} e^{i\alpha x} e^{-|\alpha|y} d\alpha ,$$

obteniendo la solución del problema de contorno.

- b) Consideremos la ecuación diferencial del oscilador armónico amortiguado y forzado por una fuerza externa:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t) .$$

### Solución

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación diferencial, obtenemos

$$(-i\omega)^2 \mathcal{F}\{x(t), \omega\} + 2\alpha(-i\omega) \mathcal{F}\{x(t), \omega\} + \omega_0^2 \mathcal{F}\{x(t), \omega\} = \mathcal{F}\{f(t), \omega\} \equiv F(\omega) .$$

Despejando para la transformada de Fourier de la solución:

$$\mathcal{F}\{x(t), \omega\} = \frac{F(\omega)}{-\omega^2 - 2\alpha i\omega + \omega_0^2} .$$

Tomando la antitransformada obtenemos la solución

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{F(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2\alpha i\omega} e^{-i\omega t} d\omega .$$

El procedimiento anterior resulta útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

### BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

De la enorme literatura sobre el tema recomendamos [1] para quienes tengan interés en la teoría.

- 1 Elias M. Stein y Guido Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Mathematical Series 32, Princeton University Press, Princeton 1971 (ISBN 0 691 08078 X).

# Capítulo 4

## Convolución

versión 3.2 final-13 de enero de 2003

### 4.1. Espacio $\mathcal{S}$

**Definición 4.1** Una función  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  pertenece al espacio  $\mathcal{S}$  si es infinitamente diferenciable y

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^m f^{(n)}(t) = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* .$$

A  $\mathcal{S}$  se le llama *espacio de Schwartz*.

#### Ejemplos

I)  $e^{-\alpha t^2} p_l(t)$ ,  $\alpha > 0$ , real, con  $p_l(t)$  polinomio de orden  $l$ .

$$\text{II) } f(t) = \begin{cases} \exp \left[ -\frac{1}{t-b} - \frac{1}{t-a} \right] & a \leq t \leq b \\ 0 & t \notin [a, b] \end{cases}$$

**Proposición 4.1**  $\mathcal{S}$  es un espacio vectorial.

En efecto, de la definición de  $\mathcal{S}$  es inmediato mostrar que  $\{\mathcal{S}, +\}$  es un grupo abeliano, y que si  $f, g \in \mathcal{S}$ , entonces  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

**Proposición 4.2** Si  $f \in \mathcal{S}$ , entonces  $p_l(t) f^{(r)}(t) \in \mathcal{S}$ , donde  $p_l(t) = \sum_{k=0}^l a_k t^k$  es un polinomio de grado  $l$ .

También esto es claro, dada la proposición anterior y la definición de  $\mathcal{S}$ .

**Proposición 4.3** Si  $f, g \in \mathcal{S}$ , entonces

$$(f | g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt \quad \text{existe.}$$

En particular

$$\|f\|^2 = (f|f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad \text{existe.}$$

Vale decir,  $\mathcal{S}$  es un espacio pre-Hilbert (ya mostramos que es un espacio vectorial).

**Proposición 4.4** Si  $f \in \mathcal{S}$ , entonces  $\mathcal{F}\{f, \omega\} = F(\omega) \in \mathcal{S}$ .

### Demostración

a) Como  $f \in \mathcal{S}$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^n f(t) = 0.$$

De las propiedades de las transformadas de Fourier:

$$F^{(n)}(\omega) \quad \text{existe} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego  $F(\omega)$  es infinitamente diferenciable.

b) Como  $f \in \mathcal{S}$ , entonces  $\frac{d^m}{dt^m} [t^n f(t)]$  existe  $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ . Por las propiedades de las transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \omega^m \mathcal{F}\{t^n f(t), \omega\} &= 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \omega^m F^{(n)}(\omega) &= 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Luego

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f, \omega\} \in \mathcal{S}.$$

q.e.d.

## 4.2. Producto de convolución

**Definición 4.2** *Producto de convolución  $*$ .*

$$f * g = p \iff p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx.$$

### Idea física

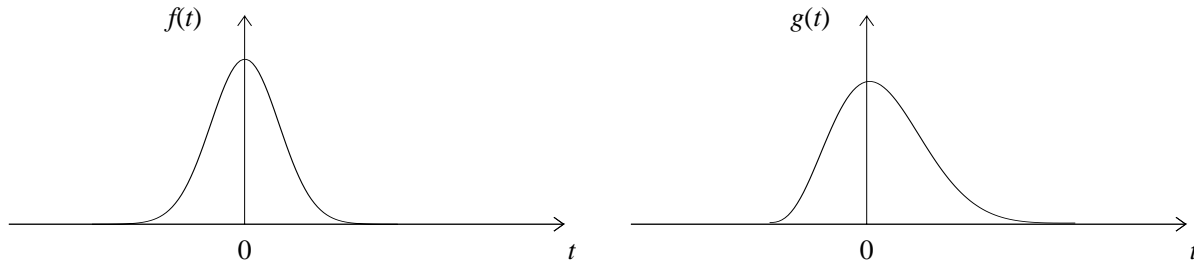
Sea  $f(t)$  algún “estímulo” (fuerza en el tiempo  $t$ , densidad de carga en la posición  $t$ , etc.). Sea  $g(x, t) = g(x - t)$  la respuesta en  $x$  a un estímulo en  $t$ . La dependencia en  $x - t$  tiene implícita la hipótesis de que el medio es isotrópico. Si el sistema es *lineal*, la respuesta total en el punto  $x$  al estímulo global  $\{f(t)|t \in \mathbb{R}\}$  será la suma de todas las contribuciones elementales  $[dt f(t)] g(x, t)$ , que es la convolución  $p(x)$ .

**Ejemplo** El potencial debido a una densidad de carga  $\rho(\vec{r})$  se puede escribir:

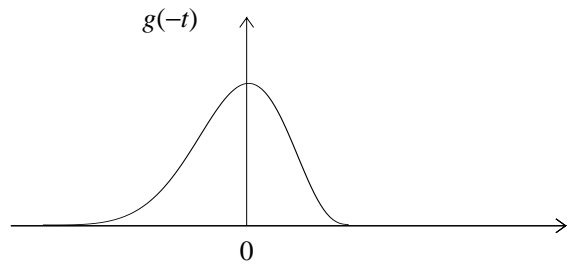
$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \rho * g(\vec{r}) , \quad g(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|} .$$

### Idea matemática

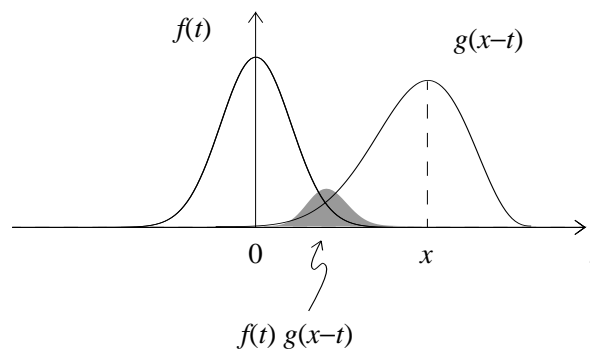
Consideremos las funciones  $f(t)$ ,  $g(t)$ :



Entonces el gráfico de  $g(-t)$  es:



y se tiene:



$f * g$  mide entonces el grado de *traslape* entre  $f(t)$  y  $g(-t)$ , luego de trasladar esta función una distancia  $x$ . Si  $f(t)$  y  $g(t)$  decaen violentamente para  $t \rightarrow \pm\infty$ , el traslape tenderá rápidamente a cero si  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$[f * g](x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0 .$$

**Proposición 4.5** Si  $f, g \in \mathcal{S}$ , entonces  $p = f * g \in \mathcal{S}$ .

**Demostración**

I)

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(t-x)g(x) dx .$$

La última igualdad se tiene si existe un mayorante convergente. En efecto existe, pues si  $M$  es tal que  $|f'(x)| < M \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , entonces  $\int_{-\infty}^{\infty} M |g(x)| < \infty$  es tal mayorante.

Luego

$$\begin{aligned} p' &= f' * g \\ p^{(m)} &= f^{(m)} * g \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Es decir,  $p$  es infinitamente diferenciable.

II)

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^m p^{(n)}(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^m f^{(n)}(t-x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^m f^{(n)}(t-x)g(x) dx = 0 ,$$

luego

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^m p^{(n)}(t) = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^* .$$

q.e.d.

**Teorema 4.1** Sea  $f, g \in \mathcal{S}$  y  $F(k) = \mathcal{F}\{f, k\}$ ,  $G(k) = \mathcal{F}\{g, k\}$ , entonces

$$\boxed{\mathcal{F}\{f * g, k\} = \sqrt{2\pi} F(k) \cdot G(k)} \quad (4.1)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f * g, k\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{ikt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx f(t-x)g(x) e^{ikt} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t-x) e^{ikt} \right) g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables  $t = y + x$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f * g, k\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{iky} \right) g(x) e^{ikx} \\ &= \sqrt{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) e^{ikx} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{iky} \right) . \end{aligned}$$

Vale decir:

$$\mathcal{F}\{f * g, k\} = \sqrt{2\pi} F(k) \cdot G(k) .$$

q.e.d.

### 4.2.1. Propiedades del producto de convolución

I) Asociatividad:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

II) Distributividad:

$$\begin{aligned} f * (g + h) &= f * g + f * h \\ (f + g) * h &= f * h + g * h \end{aligned}$$

III) Conmutatividad:

$$f * g = g * f$$

**Ejercicio** Demostrar propiedades I y II.

Demostremos la conmutatividad (propiedad III).

$$p(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx .$$

Con el cambio de variable  $t-x=y$ :

$$p(t) = - \int_{\infty}^{-\infty} f(y)g(t-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y) dy = g * f(t) .$$

También podríamos haber procedido usando (4.1), aplicando la transformada de Fourier sobre el producto de convolución y luego invirtiendo la transformada.

## 4.3. El espacio $\mathcal{S}$ como anillo

En  $\mathcal{S}$  hay dos operaciones binarias:

I) Adición. Si  $f, g \in \mathcal{S}$ , entonces  $f + g \in \mathcal{S}$ .

II) Convolución. Si  $f, g \in \mathcal{S}$ , entonces  $f * g \in \mathcal{S}$ .

De las propiedades de la suma y la convolución se sigue que  $\{\mathcal{S}, +, *\}$  es un *anillo conmutativo*. ¿Es un anillo unitario, es decir, tiene un elemento neutro multiplicativo?

Supongamos que existe  $\delta \in \mathcal{S}$  tal que  $f * \delta = \delta * f = f \quad \forall f \in \mathcal{S}$ , es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\delta(x) dx = f(t) \quad \forall f \in \mathcal{S} . \quad (4.2)$$

Supongamos que  $\delta(t_0) > 0$ . Luego  $\delta > 0$  en cierto intervalo, ya que es continua. Podemos además considerar, sin pérdida de generalidad, dicho intervalo como  $0 < a < b$ .

Escojamos ahora  $f \in \mathcal{S}$  tal que

$$f(-x) = \begin{cases} > 0 & a < -x < b \\ 0 & -x \notin ]a, b[ \end{cases} .$$

En particular, se tiene que  $f(0) = 0$ .

Evaluemos (4.2) en  $t = 0$ :

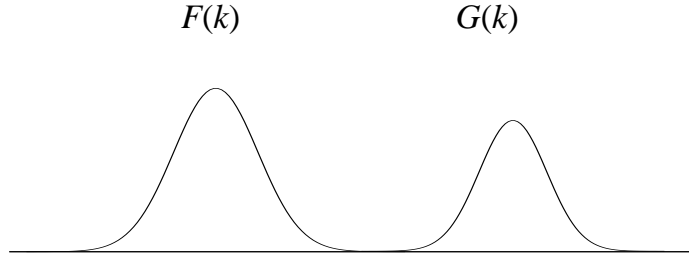
$$0 = f(t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta(x) dx = \int_a^b f(-x)\delta(x) dx > 0 ,$$

que es evidentemente una contradicción.

Luego el anillo conmutativo  $\{\mathcal{S}, +, *\}$  no tiene elemento neutro respecto a la operación  $*$ .

**Proposición 4.6** El anillo  $\{\mathcal{S}, +, *\}$  tiene divisores del cero respecto a  $*$ .

**Demostración** En efecto, sean  $F = \mathcal{F}\{f, k\}$ ,  $G = \mathcal{F}\{g, k\} \in \mathcal{S}$  nulas fuera de cierto intervalo, tales que  $F(k)G(k) = 0$ . Basta considerar dos funciones con soporte finito y disjunto, como en la figura:



Invirtiendo la trasformada de Fourier [en virtud del Teorema de Reciprocidad, ecuación (3.3)]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)G(k), t\} = \mathcal{F}^{-1}\{0, t\} = 0 .$$

Luego tenemos  $f \neq 0$  y  $g \neq 0$ , pero  $f * g = 0$ .

q.e.d.

**Proposición 4.7** Si  $f, g \in \mathcal{S}$ , entonces

$$(f | g) = (F | G) . \quad (4.3)$$

**Demostración** Se tiene

$$h * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-x)g(x) dx = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}\{HG, t\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(k)G(k)e^{-ikt} dk .$$

Escojamos

$$h^*(-x) = f(x) ,$$



de modo que

$$\begin{aligned} H(k) &= \mathcal{F}\{h(t), k\} = \mathcal{F}\{f^*(-t), k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-t) e^{ikt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\mu) e^{-ik\mu} d\mu = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{ik\mu} d\mu \right)^* = F^*(k) . \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(-x)g(x) dx = h * g(t=0)$$

o sea

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(k)G(k) dk \quad (\text{Relaci3n de Parseval})$$

En particular, si  $f = g$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \quad (\text{Identidad de Plancheret})$$

q.e.d.



# Capítulo 5

## Distribuciones temperadas

versión final 3.3-13 de enero de 2003

### 5.1. Definiciones

**Definición 5.1** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo de los  $\mathbb{C}$  con dimensión finita. Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ . Existen funciones lineales sobre  $V$ ,  $u(\vec{x})$ , tal que

$$V \xrightarrow{u} \mathbb{C} ,$$

donde  $u$  satisface linealidad, i.e.

$$u(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha u(\vec{x}) + \beta u(\vec{y}) , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} .$$

Estas funciones forman el *dual* de  $V$ , el cual denotamos por  $V^*$ .

**Definición 5.2** Un elemento del espacio dual es llamado un *covector*. La acción de un covector  $u \in V^*$  sobre un vector  $\vec{x} \in V$  la denotamos por

$$\langle u, \vec{x} \rangle = u(\vec{x}) \in \mathbb{C} . \quad (5.1)$$

Consideremos el espacio vectorial de Schwartz  $\mathcal{S}$  de funciones infinitamente diferenciables y rápidamente decrecientes, el cual es de dimensión infinita. Sus vectores son funciones  $x(t), y(t), \dots \in \mathcal{S}$ .

**Definición 5.3** Un *funcional lineal* sobre  $\mathcal{S}$  es una función  $\varphi$  que actúa sobre las funciones  $x(t), y(t), \dots \in \mathcal{S}$ , tal que

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$$

y

$$\langle \varphi, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle \varphi, x \rangle + \beta \langle \varphi, y \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } \forall x, y \in \mathcal{S} .$$

**Definición 5.4** Sean  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  una sucesión de funciones en  $\mathcal{S}$ . Se dice que esta sucesión *converge fuertemente* a cero si

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} t^m x_n^{(k)}(t) = 0 \quad \forall k, m = 0, 1, 2, \dots} \quad (5.2)$$

uniformemente en  $-\infty < t < \infty$ . En tal caso escribimos

$$x_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} 0 .$$

Si la sucesión  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  converge fuertemente a  $x(t)$ , i.e.

$$x_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} x(t) ,$$

significa que

$$y_n(t) \equiv x_n(t) - x(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} 0 .$$

### Ejemplos

1) Si  $f(t) \in \mathcal{S}$ , entonces  $x_n(t) = \frac{f(t)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} 0$

2) Un ejemplo de no convergencia fuerte. Consideremos

$$x_n(t) = \frac{1}{n^s} e^{-t^2/n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 .$$

Entonces

$$t^m x_n(t) = \left(\frac{t}{n}\right)^s \frac{1}{t^{s-m}} e^{-t^2/n^2} .$$

Tomamos  $m > s$  y  $t = n$ .  $t$  varía con  $n$  (si hay convergencia uniforme, la expresión anterior debe converger a cero para todo  $t$ ). Entonces

$$t^m x_n(t) = t^{m-s} e = n^{m-s} e \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty .$$

No hay convergencia fuerte. Observamos que si hubiéramos tomado  $t$  fijo, es decir el límite puntual, el límite es cero.

**Definición 5.5** Un funcional lineal  $\varphi$  sobre  $\mathcal{S}$  es una *distribución temperada* si es continua en el sentido

$$y_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} y(t) \implies \langle \varphi, y_n \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{en } \mathbb{C}} \langle \varphi, y \rangle .$$

**Definición 5.6** La suma de dos distribuciones  $\psi$  y  $\varphi$  se define como el funcional  $\psi + \varphi$  tal que:

$$\langle \psi + \varphi, x \rangle = \langle \psi, x \rangle + \langle \varphi, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{S} . \quad (5.3)$$

**Definición 5.7** El producto de un escalar  $\lambda$  por una distribución  $\psi$  se define como el funcional lineal  $\lambda\psi$  tal que:

$$\langle \lambda\psi, x \rangle = \lambda \langle \psi, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{S} \text{ y } \forall \lambda \in \mathbb{C} . \quad (5.4)$$

Es inmediato mostrar que  $\psi + \varphi$  y  $\lambda\psi$  son funcionales lineales y que además son distribuciones temperadas. Luego el conjunto de las distribuciones temperadas sobre  $\mathcal{S}$ , forma un espacio vectorial denotado  $\overline{\mathcal{S}}^*$ .  $\overline{\mathcal{S}}^*$  **no** es el espacio dual de  $\mathcal{S}$ .

### Ejemplos

1)  $\langle \delta, x \rangle = x(0)$ ,  $\forall x \in \mathcal{S}$ . Mostremos que  $\delta \in \overline{\mathcal{S}}^*$ . Claramente  $\delta$  es funcional lineal sobre  $\mathcal{S}$ ,

$$\langle \delta, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha x(0) + \beta y(0) = \alpha \langle \delta, x \rangle + \beta \langle \delta, y \rangle .$$

Sean  $\{y_n(t)\}$  una sucesión de funciones que convergen fuertemente a  $y(t)$ , es decir,

$$y_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} y(t) .$$

Consideremos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(0) = y(0) = \langle \delta, y \rangle .$$

Por lo anterior tenemos que  $\delta \in \overline{\mathcal{S}}^*$ .

2)  $\langle \delta_a, x \rangle = x(a)$ ,  $\forall x \in \mathcal{S}$ . De la misma forma anterior, podemos demostrar que  $\delta_a \in \overline{\mathcal{S}}^*$ .

3)  $\langle \delta', x \rangle = -x'(0)$   $\forall x \in \mathcal{S}$ . Demostremos que  $\delta' \in \overline{\mathcal{S}}^*$ . Linealidad:

$$\langle \delta', \alpha x + \beta y \rangle = -\alpha x'(0) - \beta y'(0) = \alpha \langle \delta', x \rangle + \beta \langle \delta', y \rangle .$$

Sea

$$y_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} y(t) .$$

Tomemos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta', y_n \rangle = -\lim_{n \rightarrow \infty} y_n'(0) = -y'(0) = \langle \delta', y \rangle .$$

Concluimos, de lo anterior, que  $\delta' \in \overline{\mathcal{S}}^*$ .

4)  $\langle \varphi, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ .

Linealidad

$$\langle \varphi, \alpha x + \beta y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha x(t) + \beta y(t)] dt = \alpha \langle \varphi, x \rangle + \beta \langle \varphi, y \rangle .$$

Sea

$$y_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} y(t) ,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = \langle \varphi, y \rangle ,$$

luego  $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ .

**Definición 5.8** Una función  $f(t)$  se dice de *crecimiento lento* si

$$|f(t)| < A(1+t^2)^m \quad \text{para ciertos } A \text{ y } m. \quad (5.5)$$

Esto significa que  $f(t)$  tiene crecimiento polinomial, no exponencial. Quedan también excluidas funciones singulares como  $1/t$ .

**Definición 5.9** Sea una función  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de crecimiento lento, seccionalmente continua y con discontinuidades “mansas”. Definimos el **funcional**  $\bar{f}$  asociado a la función  $f(t)$  de la siguiente manera:

$$\langle \bar{f}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t) dt. \quad (5.6)$$

**Proposición 5.1** El funcional  $\bar{f} \in \bar{\mathcal{S}}^*$ .

**Demostración** Consideremos el funcional actuando sobre una combinación lineal de funciones:

$$\begin{aligned} \langle \bar{f}, \alpha x + \beta y \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\alpha x(t) + \beta y(t)] dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t) dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f(t)y(t) dt = \alpha \langle \bar{f}, x \rangle + \beta \langle \bar{f}, y \rangle. \end{aligned}$$

Luego  $\bar{f}$  es un funcional lineal.

Por otra parte, sea

$$y_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} y(t).$$

Entonces

$$|\langle \bar{f}, y_n - y \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [y_n(t) - y(t)] dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |y_n(t) - y(t)| dt.$$

Como es de crecimiento lento,

$$|\langle \bar{f}, y_n - y \rangle| \leq \int_{-\infty}^{\infty} A(1+t^2)^m |y_n(t) - y(t)| dt, \quad \text{para ciertos } A, m.$$

La convergencia fuerte de  $y_n(t)$  a  $y(t)$  significa que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} t^q [y_n^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)] \quad \forall k, q, t.$$

En particular,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+t^2)^{m+1} [y_n(t) - y(t)] \quad \forall t,$$

lo cual significa que para un  $\epsilon > 0$  arbitrario se tiene que

$$[y_n(t) - y(t)] (1+t^2)^{m+1} < \epsilon,$$

de cierto  $n$  en adelante, independiente de  $t$ . Luego existe un  $N$  tal que

$$|\langle \bar{f}, y_n - y \rangle| \leq \int_{-\infty}^{\infty} A(1+t^2)^m \frac{\epsilon}{(1+t^2)^{m+1}} dt \quad \text{para } \epsilon \text{ arbitrario y } \forall n > N.$$

Finalmente

$$|\langle \bar{f}, y_n - y \rangle| \leq A\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = A\epsilon\pi .$$

La penúltima desigualdad se cumple desde un cierto  $n$  en adelante, siendo el resultado final tan pequeño como se quiera. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \bar{f}, y_n \rangle = \langle \bar{f}, y \rangle \implies \bar{f} \in \bar{\mathcal{S}}^* .$$

q.e.d.

Es importante hacer notar que lo que hemos hecho es construir una distribución a partir de una función, y que demostramos que toda función de crecimiento lento tiene una distribución asociada. Sin embargo, no todas las distribuciones provienen de funciones. Pero ciertas propiedades de las distribuciones asociadas a funciones nos servirán para inspirar definiciones y mostrar propiedades válidas para toda distribución.

**Teorema 5.1** Sean  $f, g \in \mathcal{S}$ , seccionalmente continuas y de crecimiento lento. Sean  $\bar{f}, \bar{g}$  sus correspondientes distribuciones temperadas. Entonces

$$\bar{f} = \bar{g} \implies f = g .$$

### Demostración

$$\bar{f} = \bar{g} \implies \langle \bar{f}, x \rangle = \langle \bar{g}, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{S} .$$

Supongamos que  $f \neq g$  en un punto, por ejemplo  $f(t_0) > g(t_0)$ . Por continuidad de  $f(t)$  y  $g(t)$  tenemos que  $f(t) > g(t)$  en una vecindad  $(a, b)$  en torno a  $t_0$ . Si  $t_0$  fuera justo un punto de discontinuidad de  $f$  o  $g$  (recordemos que son seccionalmente continuas) no hay problema. Siempre podemos correr  $t_0$  en un intervalo vecino.

Tomemos una función de prueba  $x(t)$ , tal que  $x(t) > 0$  si  $t \in (a, b)$  y  $x(t) = 0$  si  $t \notin (a, b)$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - g(t)] x(t) dt = \int_a^b [f(t) - g(t)] x(t) dt \neq 0 .$$

Esto dice que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t) dt \neq \int_{-\infty}^{\infty} g(t)x(t) dt \implies \bar{f} \neq \bar{g} ,$$

lo cual contradice la hipótesis. Luego  $f = g$ .

q.e.d.

Sean  $f, f'$  dos funciones de crecimiento lento, continuas en  $-\infty < t < \infty$ . Sean  $\bar{f}, \bar{f}'$  las distribuciones correspondientes. Definimos la derivada de la distribución  $\bar{f}$  como

$$\bar{f}' = \overline{f'} .$$

Con ello,

$$\langle \bar{f}', x \rangle = \langle \overline{f'}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)x(t) dt = f(t)x(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x'(t) dt = -\langle \bar{f}, x' \rangle . \quad (5.7)$$

Observemos cómo este resultado, y por lo tanto la definición (5.7), es consistente con el ejemplo 3 de este capítulo.

A la luz de este resultado, proponemos la siguiente definición.

**Definición 5.10** Si  $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}^*$  definimos *la derivada de la distribución*,  $\varphi'$ , de la siguiente manera:

$$\boxed{\langle \varphi', x \rangle = -\langle \varphi, x' \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{S} . \quad (5.8)$$

**Proposición 5.2**  $\varphi'$  así definida pertenece a  $\bar{\mathcal{S}}^*$ .

**Demostración** Consideremos la derivada del funcional actuando sobre una combinación lineal de funciones:

$$\langle \varphi', \alpha x + \beta y \rangle = -\langle \varphi, \alpha x' + \beta y' \rangle = -\alpha \langle \varphi, x' \rangle - \beta \langle \varphi, y' \rangle = \alpha \langle \varphi', x \rangle + \beta \langle \varphi', y \rangle .$$

Se cumple entonces la linealidad. Por otra parte, sea

$$y_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} y(t) ,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi', y_n \rangle = -\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, y'_n \rangle = -\langle \varphi, y' \rangle = \langle \varphi', y \rangle .$$

La penúltima igualdad es consecuencia de que  $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}^*$ , y que  $y'_n(t)$  converge fuertemente a  $y'(t)$ , siendo la conclusión final que  $\varphi' \in \bar{\mathcal{S}}^*$ .

q.e.d.

Una consecuencia de lo anterior es que

$$\varphi^{(n)} \in \bar{\mathcal{S}}^* \quad \forall \varphi \in \bar{\mathcal{S}}^* ,$$

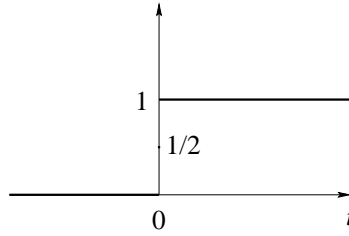
donde

$$\langle \varphi^{(n)}, x \rangle = (-1)^n \langle \varphi, x^{(n)} \rangle \quad \forall x \in \mathcal{S} . \quad (5.9)$$

**Ejemplo** Función escalón de Heaviside:

$$h(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn} t}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$





Tomamos  $h(t)$  como funcional, *i.e.* consideramos el funcional asociado  $\bar{h}$ , definido por

$$\langle \bar{h}, x \rangle = \int_0^\infty x(t) dt \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Evaluemos su derivada

$$\langle \bar{h}', x \rangle = -\langle \bar{h}, x' \rangle = -\int_0^\infty x'(t) dt = -x(t) \Big|_0^\infty = x(0) = \langle \delta, x \rangle,$$

luego

$$\boxed{\bar{h}' = \delta} \quad (5.11)$$

Este resultado es importante. Hemos logrado *en algún sentido* diferenciar una función discontinua. El espacio de las distribuciones aparece como una generalización del espacio de funciones, en el cual la derivada existe incluso para funciones discontinuas. Sin embargo, esta analogía, que puede sernos útil de modo informal, no debe ser tomada como rigurosa. No es la función discontinua la que estamos derivando, sino el funcional asociado a ella. Sí es cierto que, mientras en el espacio de funciones las derivadas no siempre están definidas, en el espacio de distribuciones siempre lo están, y, por ejemplo, como muestra (5.9), toda distribución es infinitamente diferenciable.

**Proposición 5.3** Para distribuciones la diferenciación es lineal, es decir,

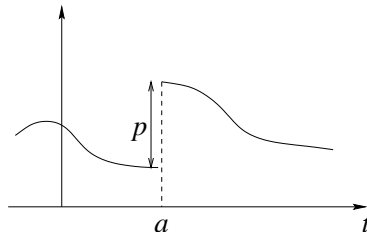
$$(\alpha\varphi + \beta\psi)' = \alpha\varphi' + \beta\psi'. \quad (5.12)$$

**Demostración** Sea  $x \in \mathcal{S}$  arbitrario.

$$\langle (\alpha\varphi + \beta\psi)', x \rangle = -\langle \alpha\varphi + \beta\psi, x' \rangle = -\alpha \langle \varphi, x' \rangle - \beta \langle \psi, x' \rangle = \alpha \langle \varphi', x \rangle + \beta \langle \psi', x \rangle.$$

q.e.d.

Generalicemos el ejemplo de la función escalón de Heaviside. Sea  $f(t)$  una función diferenciable a tramos con una sola discontinuidad en  $t = a$ .



Sea  $p = f(a^+) - f(a^-)$ . Por hipótesis  $f'$  existe para todo  $t \neq a$ . Escribamos  $Df$  en lugar de  $f'$ . Claramente, para  $t = a$   $Df$  no existe. Consideremos ahora el funcional  $\overline{f}$  asociado a  $f$  y tomemos su derivada  $\overline{f'}$ . Para ello sea  $x \in \mathcal{S}$  arbitrario:

$$\begin{aligned} \langle \overline{f'}, x \rangle &= -\langle \overline{f}, x' \rangle = -\int_{-\infty}^{a^-} f(t)x'(t) dt - \int_{a^+}^{\infty} f(t)x'(t) dt \\ &= -f(t)x(t) \Big|_{-\infty}^{a^-} + \int_{-\infty}^{a^-} Df(t)x(t) dt - f(t)x(t) \Big|_{a^+}^{\infty} + \int_{a^+}^{\infty} Df(t)x(t) dt \\ &= [f(a^+) - f(a^-)] x(a) + \langle \overline{Df}, x \rangle \\ &= \langle \overline{Df}, x \rangle + px(a) = \langle \overline{Df}, x \rangle + p \langle \delta_a, x \rangle . \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el espacio de las distribuciones temperadas se satisface:

$$\boxed{\overline{f'} = \overline{f'} = \overline{Df} + p\delta_a} \quad (5.13)$$

**Proposición 5.4** Si  $f$  tiene discontinuidades con saltos finitos de tamaños  $p_k$  en  $t = a_k$  para  $k = 1, \dots, n$  y si  $f'$  es continua fuera de los  $a_k$ , entonces

$$\boxed{\overline{f'} = \overline{Df} + \sum_{k=1}^m p_k \delta_{a_k}} \quad (5.14)$$

De la proposición anterior se desprende el siguiente resultado:

**Proposición 5.5** Si  $f$  tiene una discontinuidad finita en  $a$ , entonces

$$\begin{aligned} \overline{f'} &= \overline{Df} + p_0 \delta_a , \\ \overline{f''} &= \overline{D^2 f} + p_0 \delta'_a + p_1 \delta_a , \\ &\dots \\ \overline{f^{(n)}} &= \overline{D^n f} + p_0 \delta_a^{(n-1)} + p_1 \delta_a^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} \delta_a , \end{aligned}$$

donde  $p_k$  es el salto en el punto  $a$  de la función  $f^{(k)}$ .

La demostración es similar a la de la proposición 5.4, integrando por partes  $n$  veces.

Hemos enfatizado que las distribuciones no son funciones. Pero dadas las fuertes analogías, y aun cuando no todas las distribuciones son funcionales asociados a funciones, las siguientes definiciones nos permiten emplear un lenguaje similar para distribuciones y funciones.

**Definición 5.11** La distribución  $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$  tiene un **valor nulo** en  $(a, b)$  si  $\langle \varphi, x \rangle = 0, \forall x \in \mathcal{S}$ , que sea nula fuera de  $(a, b)$ . En tal caso se escribe  $\varphi(t) = 0$  para  $a < t < b$ .

Si el funcional  $\overline{f}$  asociado a  $f$  tiene un lugar nulo en  $(a, b)$  esto nos dice que  $f(t) = 0$  en  $a < t < b$ .

**Ejemplo** Sea  $(a, b)$  un intervalo abierto que no contiene el cero. Sea  $\delta$  la distribución definida por

$$\langle \delta, x \rangle = x(0) \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Sea  $y(t) \in \mathcal{S}$  tal que  $y(t) \neq 0$  sólo para  $t \in (a, b)$ . En tal caso

$$\langle \delta, y \rangle = y(0) = 0, \quad \text{ya que } 0 \notin (a, b).$$

De acuerdo a nuestra convención, se escribe  $\delta(t) = 0$  si  $t \neq 0$ .

Para una función  $f$ , se define el soporte de  $f$  como la clausura de  $\{x | f(x) \neq 0\}$ , es decir, el menor conjunto cerrado fuera del cual  $f$  es cero. Podemos extender esta definición a distribuciones:

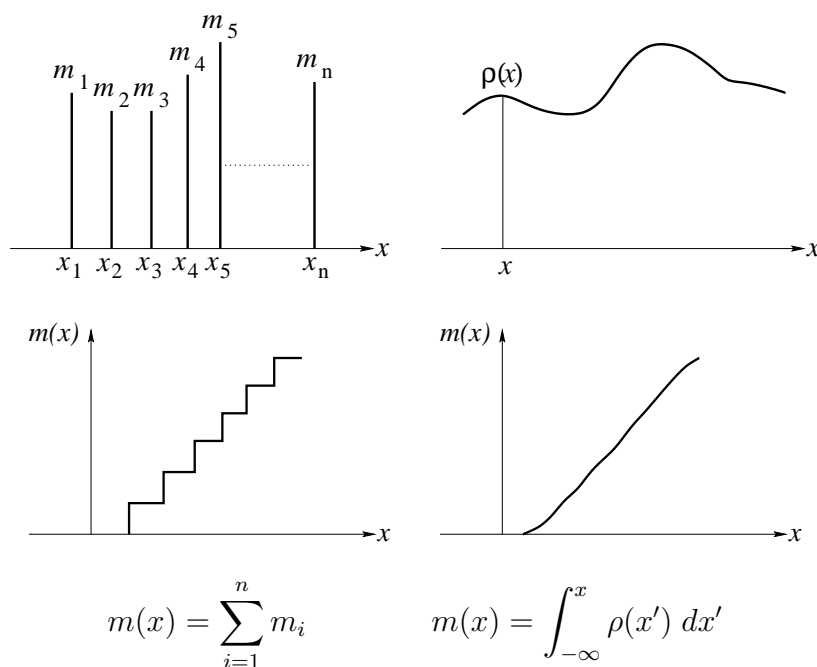
**Definición 5.12** El soporte de una distribución  $\varphi$  es el menor conjunto cerrado fuera del cual  $\varphi$  tiene valor nulo.

**Ejemplo** De acuerdo a nuestra definición  $\delta$  tiene soporte  $\{0\}$  y  $\delta_a$  tiene soporte  $\{a\}$ .

**Definición 5.13** La distribución temperada  $\varphi \in \mathcal{S}$  tiene valores  $g(t)$  en  $(a, b)$  si  $\varphi - \bar{g}$  tiene valor nulo en  $(a, b)$ .

## 5.2. Sucesión de distribuciones

Consideremos ciertas distribuciones discretas de masa y la distribución continua asociada.



Podríamos decir que una “sucesión” de distribuciones discretas “tiende” a una distribución continua, usando los términos entre comillas sin mayor precisión. Para formalizar esta idea, pasemos a definir qué vamos a entender por convergencia de una sucesión de distribuciones.

**Definición 5.14** *Convergencia de una sucesión de distribuciones*

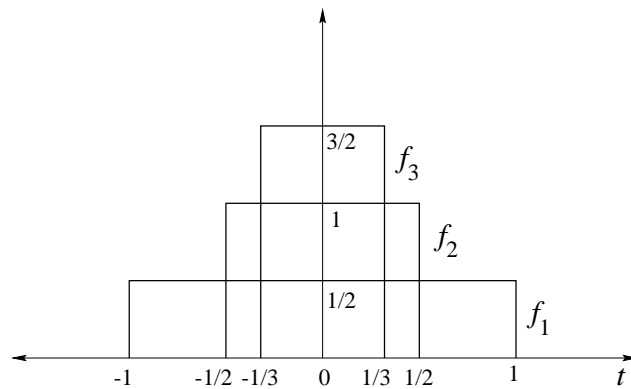
Una sucesión de distribuciones  $\{\varphi_n\}$  converge a una distribución  $\varphi$  si y sólo si  $\forall x \in \mathcal{S}$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n - \varphi, x \rangle = 0$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n, x \rangle = \langle \varphi, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{S} . \quad (5.15)$$

**Ejemplo**

1) Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } |t| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{n} \end{cases} .$$



Consideremos ahora los respectivos funcionales asociados y veamos cómo actúa uno de ellos sobre una función  $x$  cualquiera. Usando el teorema del valor medio:

$$\langle \overline{f_n}, x \rangle = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2} x(t) dt = \frac{n}{2} \frac{2}{n} x(\tau) , \quad \text{con } -\frac{1}{n} < \tau < \frac{1}{n} ,$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{f_n}, x \rangle = x(0) = \langle \delta, x \rangle ,$$

es decir, en términos de distribuciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \delta .$$

El ejemplo anterior es un caso particular de la siguiente proposición:

**Proposición 5.6** Sea  $g(t)$  una función seccionalmente continua, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 1 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty .$$

$g(t)$  no es necesariamente simétrica. Formemos la sucesión

$$f_n(t) = n g(nt) .$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \delta .$$

**Demostración** Consideremos la distribución asociada a  $f_n$  y veamos cómo actúa sobre una función  $x$  cualquiera.

$$\langle \overline{f_n}, x \rangle = n \int_{-\infty}^{\infty} g(nt) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) x\left(\frac{u}{n}\right) du .$$

Interesa el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ . Busquemos una mayorante. Sea  $M > \max_{-\infty < t < \infty} \{|x(t)|\}$ , entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(u) x\left(\frac{u}{n}\right) du \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \left| x\left(\frac{u}{n}\right) \right| du < M \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du < \infty .$$

Vemos que hay convergencia uniforme y podremos intercambiar el límite con la integral.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{f_n}, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) x\left(\frac{u}{n}\right) du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \lim_{n \rightarrow \infty} x\left(\frac{u}{n}\right) du = x(0) \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = x(0) ,$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \delta .$$

q.e.d.

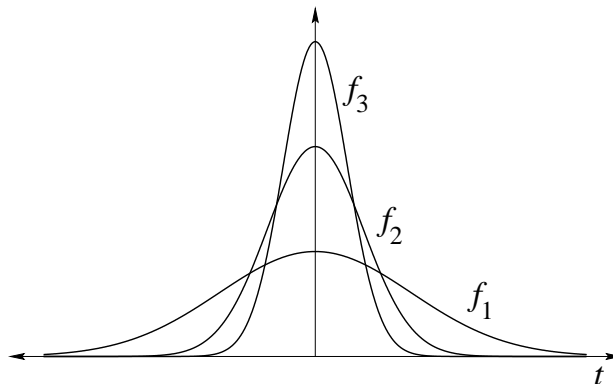
## Ejemplos

1) Una ilustración del caso anterior.

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} , \quad \text{de modo que } \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 1 .$$

Formemos la sucesión

$$f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} .$$



Obtenemos de acuerdo a la conclusión del caso anterior

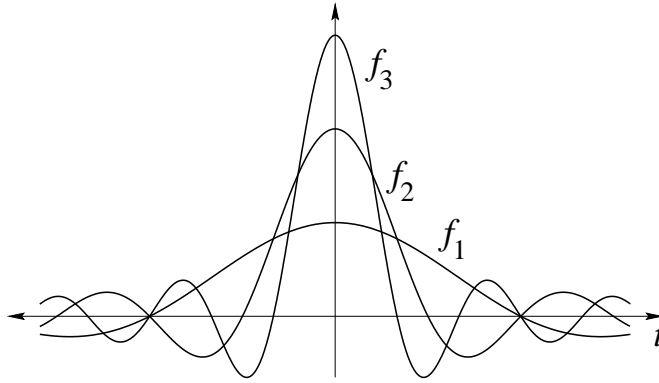
$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2} = \delta(t)} \quad (5.16)$$

2) Otra ilustración.

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(t)}{t}, \quad \text{de modo que } \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 1 .$$

La sucesión asociada es:

$$f_n(t) = \frac{n}{\pi} \frac{\sin(nt)}{nt} .$$



Nuevamente obtenemos, a partir de la conclusión anterior, el resultado para el límite:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nt)}{\pi t} = \delta(t)} \quad (5.17)$$

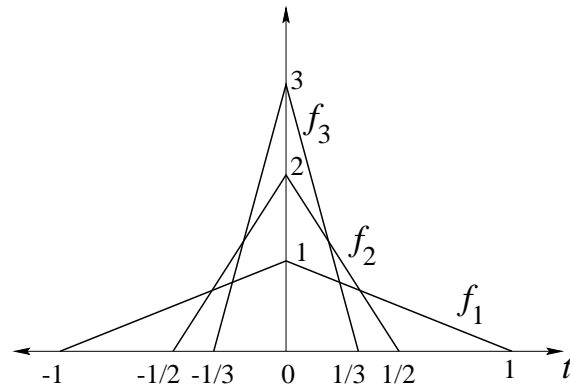
Ésta se conoce como la representación de Dirichlet de la  $\delta$ .

3) Sea

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > 1 \\ t+1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases} .$$

La sucesión, usando  $f_n = ng(nt)$ , tenemos

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > 1/n \\ n^2 t + n & \text{si } -1/n < t < 0 \\ -n^2 t + n & \text{si } 0 < t < 1/n \end{cases} .$$



En el límite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \delta .$$

4) Lorentziana

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} ,$$

la sucesión

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+(nt)^2} = \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\left[\frac{1}{n^2} + t^2\right]} .$$

Luego, con  $\eta = 1/n$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \overline{\frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + t^2}} = \delta .$$

5) Una generalización del ejemplo 2. Toda sucesión de funciones tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{-\Delta} |f_n(x)| dx + \int_{\Delta}^{\infty} |f_n(x)| dx \right] = 0 , \quad \forall \Delta > 0 \text{ fijo}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\Delta}^{\Delta} f_n(x) dx = 1 , \quad \forall \Delta > 0 \text{ fijo}$$

cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \delta .$$

Demostración: Ejercicio.

**Teorema 5.2** Si la sucesión de distribuciones  $\{\varphi_n\}$  converge a la distribución  $\varphi$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces la sucesión de derivadas  $\{\varphi'_n\}$  converge a  $\varphi'$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \right)' = \varphi' . \quad (5.18)$$

**Demostración**

$$\langle \varphi'_n, x \rangle = - \langle \varphi_n, x' \rangle .$$

El lado izquierdo tiende a  $-\langle \varphi, x' \rangle = \langle \varphi', x \rangle$ , pues  $\varphi_n$  converge a  $\varphi$ . Entonces, para todo  $x$  se tiene que

$$\langle \varphi'_n, x \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \varphi', x \rangle ,$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n = \varphi' .$$

q.e.d.

**Teorema 5.3** Toda serie convergente de sucesiones puede ser derivada término a término dentro de la sumatoria.

**Demostración** En efecto, supongamos que la serie  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu}$  es convergente. Sea

$$\Phi_n = \sum_{\nu=0}^n \varphi_{\nu} .$$

Se tiene

$$\left( \sum_{\nu=0}^n \varphi_{\nu} \right)' = \sum_{\nu=0}^n \varphi'_{\nu} .$$

Como  $\Phi_n$  converge, definamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu} \equiv \Phi .$$

Por el teorema anterior,

$$\Phi' = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi'_n ,$$

es decir,

$$\Phi' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n \varphi'_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi'_{\nu} .$$

q.e.d.

## Aplicaciones

1) En el espacio de distribuciones, una serie trigonométrica puede converger aun cuando sus coeficientes  $a_k$  crezcan polinomialmente cuando  $k \rightarrow \infty$  (en contraste a lo que ocurre con funciones, donde si una serie converge sus términos deben anularse para  $k \rightarrow \infty$ ; por ejemplo, los coeficientes de Fourier).



Consideremos coeficientes  $a_k$  tales que  $a_k < C|k|^\alpha$ , con  $C$  constante y  $\alpha > 0$ , cuando  $|k| \rightarrow \infty$ . Definimos la función

$$f(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{a_k}{(2i\pi k)^{\beta+2}} e^{2i\pi kx},$$

donde  $\beta \geq \alpha$ . Como el término general de esta serie está acotado por  $C'/|k|^2$  cuando  $|k| \rightarrow \infty$ , vemos que la serie es uniformemente convergente, de modo que  $f$  no sólo está bien definida, sino que es continua.

Consideramos ahora la distribución asociada  $\bar{f}$ . (5.9) dice que  $\bar{f}$  es infinitamente diferenciable. En particular,

$$\bar{f}^{(\beta+2)}(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_k e^{2i\pi kx}.$$

Esta serie existe como distribución, no como función porque no convergería. Agregar un término con  $k = 0$  no afecta la convergencia de la serie, obteniéndose finalmente que la serie trigonométrica

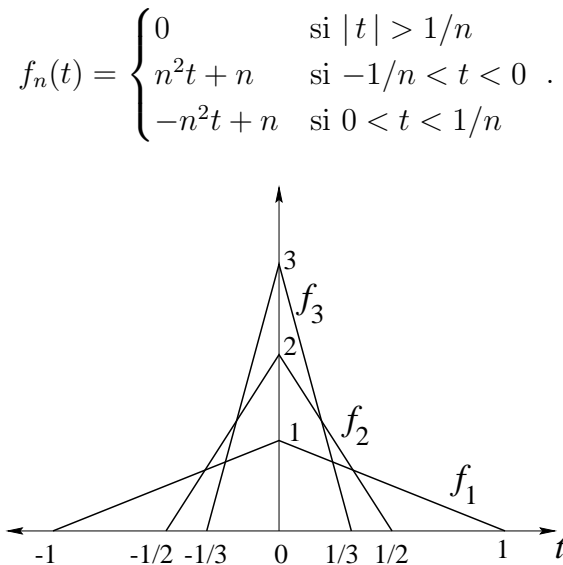
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2i\pi kx}$$

es sumable en  $\bar{\mathcal{S}}^*$ . Es más, esta serie trigonométrica es una distribución de período 1, siendo la suma de  $a_0$  y de la derivada (como distribución) de una función periódica y continua.

2) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \delta$ , entonces

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n' = \delta'. \quad (5.19)$$

Una ilustración de lo anterior.

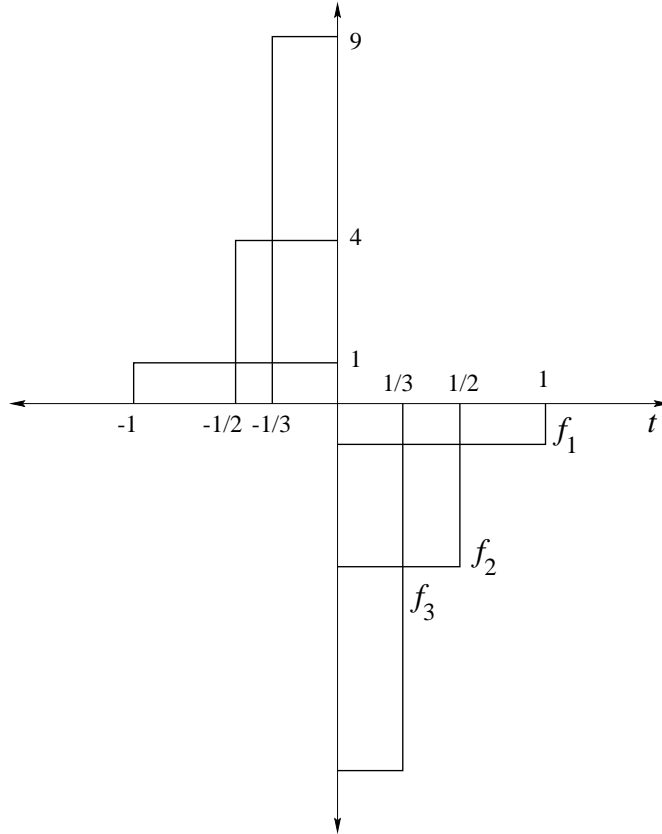


El límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \delta .$$

Su derivada:

$$f'_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > 1/n \\ n^2 & \text{si } -1/n < t < 0 \\ -n^2 & \text{si } 0 < t < 1/n \end{cases} ,$$



Y su límite será, de acuerdo al resultado anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f'_n} = \delta' .$$

**Definición 5.15** *Paridad en distribuciones*

Decimos que  $\varphi$  es una *distribución par* si

$$\langle \varphi, x(t) \rangle = \langle \varphi, x(-t) \rangle . \quad (5.20)$$

Decimos que  $\varphi$  es una *distribución impar* si

$$\langle \varphi, x(t) \rangle = - \langle \varphi, x(-t) \rangle . \quad (5.21)$$

**Ejemplos**

Sea  $x(t) \in \mathcal{S}$  arbitraria. Definimos  $y(t) = x(-t)$ .

1)  $\delta$  es una distribución par. Demostración:

$$\langle \delta, x(-t) \rangle = \langle \delta, y(t) \rangle = y(0) = x(0) = \langle \delta, x(t) \rangle .$$

2)  $\delta'$  es una distribución impar. Demostración:

$$\langle \delta', x(-t) \rangle = \langle \delta', y(t) \rangle = -\langle \delta, y'(t) \rangle = -y'(0) = x'(0) = -\langle \delta, x(t) \rangle ,$$

ya que si  $y(t) = x(-t)$  esto implica que  $y'(t) = -x'(-t)$ .

3) Si  $f$  es una función de crecimiento lento con paridad definida, entonces la distribución asociada  $\bar{f}$  tiene la misma paridad de  $f$ . (Demostración como ejercicio.)

### Notación usada

En muchos textos de Física se generaliza la definición (5.6) para distribuciones que no provienen de funciones:

$$\langle \varphi, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x(t) dt ,$$

aun cuando  $\varphi(t)$  no es una función y no tiene sentido estricto la integral. Es sólo una notación útil, y la utilizaremos frecuentemente. En particular, con esta notación podemos reescribir la condición de paridad de una distribución. Si  $\varphi$  es par,

$$\langle \varphi, x(-t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x(-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-t')x(t') dt' ,$$

es igual a

$$\langle \varphi, x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x(t) dt ,$$

Si  $\varphi$  es impar, análogamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-t)x(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)x(t) dt .$$

Esto justifica la notación:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(-t) , & (\text{distribución par}) \\ \varphi(t) &= -\varphi(-t) , & (\text{distribución impar}) . \end{aligned} \tag{5.22}$$

Esta notación de distribuciones como si fueran funciones se utiliza también para la delta. Con ella, algunas de las propiedades ya demostradas para esta distribución toman la forma:

1)

$$\langle \delta, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t) dt = x(0) .$$

II)

$$\langle \delta_a, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) x(t) dt = x(a) .$$

Observemos la conveniencia de la notación  $\delta_a = \delta(t-a)$ , que permite que la expresión  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) x(t) dt$  pueda ser considerada como el límite continuo de la relación discreta en términos de la delta de Kronecker  $x_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_{ij} x_j$ .

III)

$$\langle \delta, 1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 .$$

IV)  $\delta(t) = \delta(-t)$ ,  $\delta$  es par.V)  $\delta'(t) = -\delta'(-t)$ ,  $\delta'$  es impar.VI)  $\delta'(t-a) = -\delta'(a-t)$ .

VII) La notación anterior nos permite demostrar fácilmente la siguiente importante relación:

$$\boxed{\delta(kt) = \frac{1}{|k|} \delta(t)} \quad (5.23)$$

**Demostración** Sea  $\delta(kt)$  con  $k \neq 0$ . Consideremos la delta actuando sobre una función  $x \in \mathcal{S}$  cualquiera:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(kt) x(t) dt &= \text{sgn}(k) \int_{-\text{sgn}(k)\infty}^{\text{sgn}(k)\infty} \delta(u) x\left(\frac{u}{k}\right) \frac{du}{|k|} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) x\left(\frac{u}{k}\right) \frac{du}{|k|} = \frac{1}{|k|} x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{|k|} x(t) dt . \end{aligned}$$

q.e.d.

VIII) Si  $f$  es una función continua, analítica y diferenciable, con ceros simples en  $t_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , entonces

$$\boxed{\delta(f(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t-t_i)} . \quad (5.24)$$

**Demostración** Consideremos  $\delta(f(t))$  con  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  y  $f \in \mathcal{S}$ , es decir,  $f$  continua, analítica y diferenciable. Supongamos que  $f$  tiene ceros simples en  $t_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $f(t_i) = 0 \forall i$ .

$$\langle \delta(f(t)), x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(t)) x(t) dt .$$

El soporte de  $\delta(f(t)) = \{t_i\}_{i=1}^n$ . En la vecindad de estos puntos  $f$  puede expandirse en serie:

$$f(t) \simeq f(t_i) + f'(t_i)(t - t_i) = f'(t_i)(t - t_i) ,$$

luego

$$\delta(f(t)) = \sum_{i=1}^n \delta(f'(t_i)(t - t_i)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i) .$$

q.e.d.

## 5.3. Producto de distribuciones

**Definición 5.16** *Producto de dos distribuciones asociadas a funciones*

Sean  $f, g$  continuas y derivables a tramos con discontinuidades “mansas” y de crecimiento lento. Sean  $\bar{f}, \bar{g}$  sus distribuciones asociadas, entonces definimos el producto de  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  por

$$\langle \bar{f} \cdot \bar{g}, x \rangle \equiv \langle \bar{g}, fx \rangle . \quad (5.25)$$

**Proposición 5.7**

$$\bar{f} \cdot \bar{g} = \bar{g} \cdot \bar{f} . \quad (5.26)$$

**Demostración**

$$\langle \bar{f} \cdot \bar{g}, x \rangle = \langle \bar{g}, fx \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)x(t) dt = \langle \bar{f}, gx \rangle = \langle \bar{g} \cdot \bar{f}, x \rangle ,$$

luego

$$\bar{f} \cdot \bar{g} = \bar{g} \cdot \bar{f} .$$

q.e.d.

**Definición 5.17** *Multipliación de una distribución arbitraria por polinomio*

Sea  $p(t)$  un polinomio y sea  $\bar{p}(t) \in \bar{\mathcal{S}}^*$  su funcional asociado. Sea, además  $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}^*$  arbitrario, entonces  $\bar{p}\varphi$  se define por

$$\langle \bar{p}\varphi, x \rangle \equiv \langle \varphi, px \rangle . \quad (5.27)$$

**Proposición 5.8** La distribución  $\bar{p}\varphi \in \bar{\mathcal{S}}^*$  si  $p(t)$  es un polinomio.

Demostración: Ejercicio.

**Ejemplos**

1) Si  $p$  es un polinomio, entonces

$$\bar{p} \delta = p(0) \delta .$$

En efecto,

$$\langle \bar{p} \delta, x \rangle = \langle \delta, px \rangle = p(0)x(0) = \langle p(0) \delta, x \rangle .$$

En particular,

$$\bar{t} \delta = \bar{0} .$$

En los libros se suele encontrar la notación  $t \delta(t) = 0$ . Ésta parece una igualdad de funciones. Si se considera a la delta de Dirac como una función nula en todas partes, salvo en cero donde es infinito, la igualdad anterior es muy natural para  $t \neq 0$  pero no para  $t = 0$ . Éste es un ejemplo de que la anterior es sólo una notación, que puede ser útil, pero que tiene sus límites.

2) Si  $p$  es un polinomio,

$$\bar{p} \delta' = p(0) \delta' - p'(0) \delta .$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \bar{p} \delta', x \rangle &= \langle \delta', px \rangle = -(px)'(0) \\ &= -p(0)x'(0) - p'(0)x(0) \\ &= \langle p(0) \delta' - p'(0) \delta, x \rangle . \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} \bar{t} \delta' &= -\delta , \\ \bar{t}^2 \delta' &= 0 . \end{aligned}$$

No existe una extensión obvia a las definiciones (5.25) y (5.27) para el caso de dos distribuciones arbitrarias  $\varphi_1, \varphi_2$ , *i.e.* en general no tiene sentido hablar de  $\varphi_1 \varphi_2$ . Por ejemplo,  $[\delta(t)]^2$  o  $\delta(t) \delta'(t)$  son **objetos sin sentido**.

## 5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales

Consideremos la ecuación diferencial

$$t \frac{df}{dt} = 0 .$$

Las soluciones son

$$f(t) = \begin{cases} C_1 = \text{cte.} & t > 0 \\ C_2 = \text{cte.} & t < 0 \end{cases} ,$$

donde  $C_1 = C_2$  si deseamos que  $f$  sea función ordinaria, *i.e.*, continua (de otro modo no sería diferenciable). Pero si admitimos distribuciones como soluciones, no es necesario que  $C_1 = C_2$ , pues ya sabemos que dentro del espacio de distribuciones, “funciones” discontinuas son diferenciables. Intentemos pues una solución del tipo:

$$f(t) = C_1 + (C_2 - C_1) h(t) , \quad \text{donde} \quad h(t) = \frac{1 + \text{sgn}(t)}{2} .$$

Entonces

$$\bar{t} \bar{f}'(t) = \bar{t} (C_2 - C_1) \bar{h}(t)' = (C_2 - C_1) \bar{t} \delta = 0 ,$$

es decir,  $\bar{f}$  es solución.

Una consecuencia importante de haber construido el espacio de distribuciones es que podamos extender el espacio de soluciones de ecuaciones diferenciales y, por ende, el conjunto de ecuaciones diferenciales que somos capaces de resolver.

#### Teorema 5.4

$$(\bar{f} \bar{g})' = \bar{f}' \bar{g} + \bar{f} \bar{g}' , \quad (5.28a)$$

o bien

$$(\bar{p} \varphi)' = \bar{p}' \varphi + \bar{p} \varphi' . \quad (5.28b)$$

#### Demostración

$$\langle (\bar{p} \varphi)', x \rangle = - \langle \bar{p} \varphi, x' \rangle = - \langle \varphi, p x' \rangle .$$

Por otro lado,

$$\langle \bar{p}' \varphi + \bar{p} \varphi', x \rangle = \langle \bar{p}' \varphi, x \rangle + \langle \bar{p} \varphi', x \rangle = \langle \varphi, p' x \rangle + \langle \varphi', p x \rangle = \langle \varphi, p' x \rangle - \langle \varphi, (p x)' \rangle = - \langle \varphi, p x' \rangle .$$

Comparando,

$$(\bar{p} \varphi)' = \bar{p}' \varphi + \bar{p} \varphi' .$$

q.e.d.

## 5.5. Convergencia débil

La definición (5.15) introdujo el concepto de convergencia de una sucesión de distribuciones. Es posible definir también la convergencia de una sucesión de distribuciones provenientes de funciones.

#### Definición 5.18 Convergencia débil

Una sucesión de funciones  $f_n(t)$  continuas y derivables por tramos con discontinuidades mansas y de crecimiento lento, se dice que converge débilmente a  $f$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \bar{f} \in \bar{\mathcal{S}}^* \text{ existe.} \quad (5.29)$$

Una sucesión que converge débilmente, no significa necesariamente que converge en algún sentido usual: uniformemente, puntualmente o en la norma. Además, el límite anterior es como **distribuciones**, no como funciones. Puede darse o no que además  $f_n(t)$  converja a cierta función  $g(t)$  puntualmente, o en la norma o uniformemente. Sin embargo, la convergencia uniforme asegura convergencia débil, como afirma la siguiente proposición.

**Proposición 5.9** Una sucesión de funciones  $f_1, \dots, f_n$  continuas, derivables por tramos y de crecimiento lento con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \xrightarrow{\text{unif}} f(t) ,$$

tiene convergencia débil.

**Demostración** Consideremos

$$\langle \overline{f_n} - \overline{f}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(t) - f(t)] x(t) dt ,$$

para  $x \in \mathcal{S}$ . Elijamos un  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Tenemos:

$$\langle \overline{f_n} - \overline{f}, x \rangle = \int_{-\infty}^{-A} [f_n(t) - f(t)] x(t) dt + \int_{-A}^A [f_n(t) - f(t)] x(t) dt + \int_A^{\infty} [f_n(t) - f(t)] x(t) dt .$$

Elegimos  $A$  tan grande que se satisfagan, simultáneamente, las dos condiciones siguientes:

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} [f_n(t) - f(t)] x(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \left| \int_A^{\infty} [f_n(t) - f(t)] x(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Este  $A$  existe pues  $f_n - f$  crece a lo más como potencias, mientras que  $x$  decae más rápido que cualquier potencia. Como  $f_n - f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{unif}} 0$  en el intervalo  $[-A, A]$ , se tiene que para cierto  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{6AM} , \quad \forall n > N ,$$

donde  $M > |x(t)|$  en el intervalo  $-A < t < A$ . Haciendo uso de lo anterior podemos acotar la integral en el intervalo central, es decir,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-A}^A [f_n(t) - f(t)] x(t) dt \right| &\leq \int_{-A}^A |f_n(t) - f(t)| |x(t)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{6AM} \int_{-A}^A |x(t)| dt = \frac{\varepsilon}{6AM} 2AM = \frac{\varepsilon}{3} , \quad \forall n > N . \end{aligned}$$

Con este resultado podemos acotar la integral completa

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(t) - f(t)] x(t) dt \right| = |\langle \overline{f_n} - \overline{f}, x \rangle| < \varepsilon , \quad \forall n > N .$$

Finalmente podemos escribir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \overline{f}$ , por lo tanto,  $f_n$  converge débilmente a  $f$ .

q.e.d.

## Ejemplos

1) Sea  $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ . Se tiene

$$\langle \overline{f_n}, x \rangle = \mathcal{F}\{x, n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 , \quad \forall x \in \mathcal{S} ,$$



pues la transformada de Fourier se anula en  $\pm \infty$ .

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}} \right) = \bar{0} .$$

$f_n$  converge a cero débilmente, en el sentido de distribución. Por otro lado,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$  no existe, salvo en  $t = 2\pi\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}$ . Luego en este caso no hay convergencia de  $f_n$  en ningún otro sentido.

2) Sea

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 , & \text{si } t \notin [1/n, 2/n] \\ n , & \text{si } t \in [1/n, 2/n] \end{cases} .$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) dt = 1$ , y  $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  puntualmente.

Pero además:

$$\begin{aligned} \langle \overline{f_n}, x \rangle &= n \int_{1/n}^{2/n} x(t) dt = n x(t_n) \int_{1/n}^{2/n} dt , \quad \text{algún } t_n \in [1/n, 2/n] \\ \langle \overline{f_n}, x \rangle &= x(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x(0) = \langle \delta, x \rangle . \end{aligned}$$

Luego

$$\overline{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta ,$$

con lo cual  $f_n$  converge débilmente, pero no a una función. Sin embargo,  $f_n$  sí converge a la función 0, de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{f_n}, x \rangle \neq \left\langle \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n}, x \right\rangle = \langle \bar{0}, x \rangle = 0 .$$

El problema es que la convergencia a 0 no es uniforme.

3) Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(t) = \begin{cases} n/2 , & \text{si } |t| < 1/n \\ 0 , & \text{si } |t| > 1/n \end{cases} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

El límite de la sucesión es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} .$$

No hay convergencia puntual, sin embargo,  $f_n(t)$  converge débilmente, pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \delta$ .

4) Consideremos las siguientes sucesiones:

$$f_n(t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-nt) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-nt}^{\infty} e^{-u^2} du \quad \text{y} \quad g_n(t) = e^{-e^{-nt}} .$$

Ambas sucesiones convergen débilmente.

**Demostración** Consideremos el límite de las  $f_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{f_n}, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)x(t) dt .$$

Podemos acotar la integral:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)x(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)| |x(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty ,$$

ya que  $|f_n(t)| < 1 \forall f_n, \forall n, \forall t$ . Luego existe mayorante convergente y podemos intercambiar el límite con la integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)x(t) dt .$$

Pero el límite de  $f_n$  es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} ,$$

lo cual corresponde a la definición de la función escalón de Heaviside  $h(t)$ . Tenemos entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{f_n}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t) dt = \langle \overline{h}, x \rangle .$$

Entonces  $f_n$  converge débilmente, pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = \overline{h} .$$

Análogamente, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{g_n}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t)x(t) dt ,$$

pero el límite de  $g_n$  es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/e & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} .$$

Excepto en  $t = 0$ , coincide con la función escalón  $h(t)$ . Un solo punto no es importante en la integración, luego

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{g_n}, x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t) dt = \langle \overline{h}, x \rangle \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{g_n} &= \overline{h} , \end{aligned}$$

de modo que  $g_n$  también converge débilmente a  $h$ .

q.e.d.

## BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

El primer libro sobre teoría de distribuciones es el de Schwartz [1]; la primera publicación —en dos tomos— es de 1950–51.

Otra referencia importante, pero de un estilo un poco diferente a la referencia anterior, son los primeros tres tomos del libro de Gel'fand y Shilov [2–4] (en total son 5 tomos).

En el amplio tema de la aplicación de la teoría de distribuciones a las ecuaciones diferenciales, una de las referencias más importantes es el primer tomo del libro de Hörmander [5] (en total son 4 tomos).

Finalmente, una referencia más al estilo y contenidos de este curso es [6].

- 1 Lauren Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, París, 1998 (ISBN 2 70565 551 4).
- 2 Israil M. Gel'fand y G. E. Shilov, *Generalized Functions I: Properties and Operations*, Academic Press, Nueva York, 1964 (ISBN 0 12 279501 6).
- 3 Israil M. Gel'fand y G. E. Shilov, *Generalized Functions II: Spaces of Fundamental and Generalized Functions*, Academic Press, Nueva York, 1968 (ISBN 0 12 279502 4).
- 4 Israil M. Gel'fand y G. E. Shilov, *Generalized Functions III: Some Problems in the Theory of Differential Equations*, Academic Press, Nueva York, 1967 (ISBN 0 12 279503 2).
- 5 Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 25, Springer-Verlag, Berlín, 1990 (ISBN 0 38752 343 X).
- 6 Lauren Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, París, 1998 (ISBN 2 70565 213 2).



# Capítulo 6

## Distribuciones y transformada de Fourier

versión final 3.2-13 enero 2003

Sea  $f \in \mathcal{S}$ . Sabemos que  $\mathcal{F}\{f, k\} \in \mathcal{S}$ .

**Definición 6.1** *Transformada de Fourier de un funcional.*

Sea  $\bar{f} \in \bar{\mathcal{S}}^*$  el funcional asociado a  $f$ . Definimos  $\mathcal{F}\{\bar{f}\} \in \bar{\mathcal{S}}^*$  por:

$$\mathcal{F}\{\bar{f}, k\} = \overline{\mathcal{F}\{f, k\}} .$$

**Proposición 6.1**  $\langle \overline{\mathcal{F}\{f\}}, x \rangle = \langle \bar{f}, \mathcal{F}\{x\} \rangle$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathcal{F}\{f\}}, x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{F}\{f, k\} x(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{ikt} x(k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk x(k) e^{ikt} = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \mathcal{F}\{x, t\} \\ &= \langle \bar{f}, \mathcal{F}\{x\} \rangle . \end{aligned}$$

q.e.d.

Esta proposición motiva la siguiente definición.

**Definición 6.2** *Transformada de Fourier de una distribución.* Sea  $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}^*$  y  $x \in \mathcal{S}$  arbitrario. Definimos

$$\boxed{\langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}\{x\} \rangle} \quad (6.1)$$

**Proposición 6.2** Si  $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}^*$ , entonces  $\mathcal{F}\{\varphi\} \in \bar{\mathcal{S}}^*$ .

**Demostración**

a) Linealidad.

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{\varphi\}, \alpha x + \beta y \rangle &= \langle \varphi, \mathcal{F}\{\alpha x + \beta y\} \rangle = \alpha \langle \varphi, \mathcal{F}\{x\} \rangle + \beta \langle \varphi, \mathcal{F}\{y\} \rangle \\ &= \alpha \langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x \rangle + \beta \langle \mathcal{F}\{\varphi\}, y \rangle .\end{aligned}$$

b) Sea  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} x$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x_n - x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, \mathcal{F}\{x_n - x\} \rangle .$$

Puesto que  $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$  y  $\mathcal{F}\{x_n - x\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{!} 0$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x_n - x \rangle &= \left\langle \varphi, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{x_n - x\} \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_n(t) - x(t)] e^{i\omega t} dt \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n(t) - x(t)] e^{i\omega t} dt \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, \mathcal{F}\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) \right\} \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}\{\varphi\}, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) \right\rangle .\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{F}\{\varphi\} \in \overline{\mathcal{S}}^*$ .

q.e.d.

**Ejemplos**

1) La delta  $\delta$ . Sea  $x \in \mathcal{S}$  arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{\delta\}, x \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}\{x\} \rangle = \left\langle \delta, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} x(t) dt \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x(t) dt = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, x \right\rangle .\end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{F}\{\delta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \quad (6.2)$$

2) La derivada de la delta  $\delta'$ . Sea  $x \in \mathcal{S}$  arbitrario.

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{F}\{\delta'\}, x \rangle &= \langle \delta', \mathcal{F}\{x\} \rangle = \left\langle \delta', \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} x(t) dt \right\rangle \\
 &= - \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} x(t) dt \right] \Big|_{s=0} = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\partial}{\partial s} e^{ist} dt \Big|_{s=0} \\
 &= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) it e^{ist} \Big|_{s=0} dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) it dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-it}{\sqrt{2\pi}} x(t) dt = \left\langle \frac{-it}{\sqrt{2\pi}}, x \right\rangle .
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{F}\{\delta'\} = \frac{\overline{(-it)}}{\sqrt{2\pi}} . \quad (6.3)$$

3) En general,

$$\mathcal{F}\{\delta^{(n)}\} = \frac{\overline{(-it)^n}}{\sqrt{2\pi}} . \quad (6.4)$$

**Definición 6.3** *Antitransformada de Fourier en  $\overline{\mathcal{S}}^*$ . Definimos la antitransformada de Fourier de una distribución  $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$  como*

$$\boxed{\langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, x \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\{x\} \rangle} \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad (6.5)$$

**Proposición 6.3** Si  $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ , entonces

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{\varphi\} = \varphi . \quad (6.6)$$

(Vale decir, se tiene un teorema de reciprocidad, análogamente al que encontramos en el espacio de funciones  $\mathcal{S}$ .)

**Demostración**

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, x \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, \mathcal{F}\{x\} \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{x\} \rangle = \langle \varphi, x \rangle .$$

q.e.d.

Como en el caso de funciones en  $\mathcal{S}$ , se cumplen las siguientes dos proposiciones.

**Proposición 6.4** Si  $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$  es una distribución par, entonces

$$\mathcal{F}\{\varphi\} = \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\} . \quad (6.7)$$

**Demostración**

$$\langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, x \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\{x\} \rangle = \left\langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-i\omega t} \right\rangle .$$

Siendo  $\varphi$  par podemos cambiar  $\omega$  por  $-\omega$ :

$$\langle \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}, x \rangle = \left\langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{i\omega t} \right\rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}\{x\} \rangle = \langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x \rangle ,$$

de modo que

$$\mathcal{F}\{\varphi\} = \mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}$$

si  $\varphi$  es una distribución par.

q.e.d.

Notemos entonces que si  $\varphi$  es una distribución par,

$$\mathcal{F}\{\varphi + \mathcal{F}\{\varphi\}\} = \mathcal{F}\{\varphi\} + \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}\} = \mathcal{F}\{\varphi\} + \varphi ,$$

lo cual nos dice que, para cualquier distribución par  $\varphi$ , la distribución  $\varphi + \mathcal{F}\{\varphi\}$  es igual a su transformada.

**Proposición 6.5** Si  $\varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$  es una distribución impar, entonces

$$\mathcal{F}\{\varphi\} = -\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\} .$$

**Demostración** Ejercicio.

**Ejemplo** Sea  $f(t) = 1$ .  $f(t)$  es de crecimiento lento, luego  $\overline{f} = \overline{1}$  existe.

Consideremos  $\mathcal{F}\{\overline{f}\} = \mathcal{F}\{\overline{1}\}$ . Sabemos que, por ser  $\delta$  una distribución par,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta\} = \mathcal{F}\{\delta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ,$$

luego

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{\overline{1}\} = \delta .$$

Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{\overline{1}, \omega\} = \delta(\omega) , \tag{6.8}$$

$$\mathcal{F}\{\delta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \tag{6.9}$$



Y puesto que de modo puramente *simbólico* escribimos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\bar{1}, \omega\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} dt , \\ \mathcal{F}\{\delta\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t} dt ,\end{aligned}$$

obtenemos las expresiones (en rigor incorrectas):

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt , \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \quad (6.11)$$

Observemos, sin embargo, que aun cuando la integral en el lado derecho de (6.10) no existe en el sentido ordinario, uno puede escribir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega t + i \sin \omega t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t dt ,$$

donde hemos usado el valor principal de la integral de  $\sin \omega t$ :

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t dt = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K \sin \omega t dt = 0 .$$

Y como la integral de Cesàro de  $\cos \omega t$  es

$$* \int_0^{\infty} \cos \omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{si } \omega = 0 \end{cases} ,$$

encontramos una cierta consistencia con el resultado (6.10).

Análogamente a lo que ocurre en el espacio de funciones, se tiene el siguiente par de proposiciones para derivadas de distribuciones:

**Proposición 6.6** Sea  $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}^*$ . Entonces

$$(\mathcal{F}\{\varphi\})^{(n)} = \mathcal{F}\{\overline{(it)^n} \varphi\} . \quad (6.12)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}\langle (\mathcal{F}\{\varphi\})^{(n)}, x \rangle &= (-1)^n \langle \mathcal{F}\{\varphi\}, x^{(n)} \rangle = (-1)^n \langle \varphi, \mathcal{F}\{x^{(n)}\} \rangle \\ &= (-1)^n \langle \varphi, (-it)^n \mathcal{F}\{x\} \rangle = \langle \overline{(it)^n} \varphi, \mathcal{F}\{x\} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}\{\overline{(it)^n} \varphi\}, x \rangle .\end{aligned}$$

Así

$$(\mathcal{F}\{\varphi\})^{(n)} = \mathcal{F}\{\overline{(it)^n} \varphi\} \in \bar{\mathcal{S}}^* .$$

q.e.d.

**Proposición 6.7**

$$\mathcal{F}\{\varphi^{(n)}\} = \overline{(-i\omega)^n} \mathcal{F}\{\varphi\} . \quad (6.13)$$

**Demostración** Ejercicio.

Observemos que si  $f$  es una función de crecimiento lento, entonces  $\mathcal{F}\{\bar{f}\}$ , considerada como una función, no lo es necesariamente. Por ejemplo,  $f(t) = 1$  es de crecimiento lento, pero  $\mathcal{F}\{\bar{1}\} = \sqrt{2\pi} \delta$  no lo es.

Por otra parte, en general, las funciones  $1, t, t^2, \dots$ , no tienen transformada de Fourier (no existe  $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ ). Sin embargo, sí la tienen  $\bar{1}, \bar{t}, \bar{t^2}, \dots$ , a saber:

$$\mathcal{F}\{\bar{it^n}\} = (\mathcal{F}\{\bar{1}\})^{(n)} = \sqrt{2\pi} \delta^{(n)} .$$

Vale decir, ¡hemos ampliado (en algún sentido) el espacio de funciones que tienen transformada de Fourier!

Consideremos ahora la distribución  $\delta_a$  tal que  $\langle \delta_a, x(t) \rangle = x(a)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\{\delta_a\}, x \rangle &= \langle \delta_a, \mathcal{F}\{x, \omega\} \rangle = \left\langle \delta_a, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{iat} dt = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iat}, x \right\rangle , \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{F}\{\delta_a\} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iat}} . \quad (6.14)$$

Sustituyendo  $a$  por  $-a$ :

$$\mathcal{F}\{\delta_{-a}\} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iat}} .$$

Luego

$$\mathcal{F}\{\delta_a + \delta_{-a}\} = \overline{\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cos(at)}$$

y

$$\mathcal{F}\{\delta_a - \delta_{-a}\} = \overline{\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sen}(at)} .$$

En consecuencia,

$$\mathcal{F}\{\overline{\cos(at)}\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta_a + \delta_{-a}) = \mathcal{F}^{-1}\{\overline{\cos(at)}\} , \quad (6.15)$$

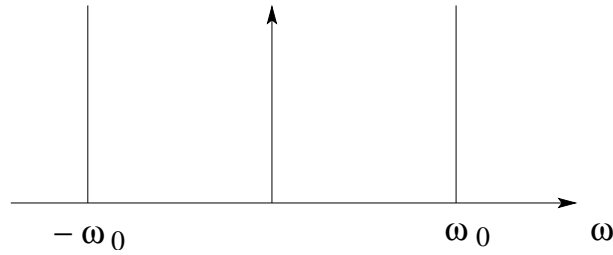
$$\mathcal{F}\{\overline{\operatorname{sen}(at)}\} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta_a - \delta_{-a}) = -\mathcal{F}^{-1}\{\overline{\operatorname{sen}(at)}\} , \quad (6.16)$$

donde hemos usado el hecho de que  $\delta_a + \delta_{-a}$  es una distribución par y que  $\delta_a - \delta_{-a}$  es impar.  
En textos de Física encontraremos las relaciones (6.15) y (6.16) en la forma:

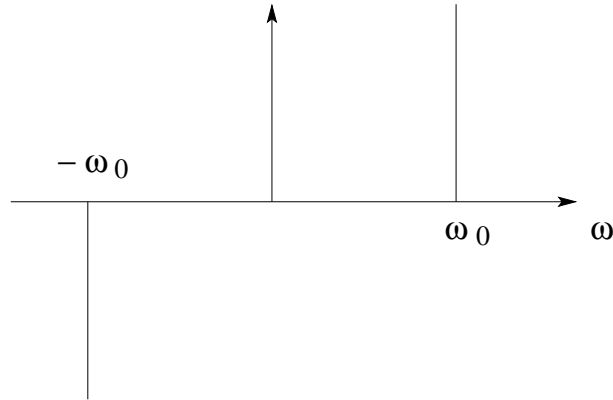
$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t), \omega\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] ,$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t), \omega\} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] .$$

Vale decir, al graficar el espectro de frecuencias de  $\cos(\omega_0 t)$  tendríamos dos *peaks*, en  $\pm\omega_0$ :

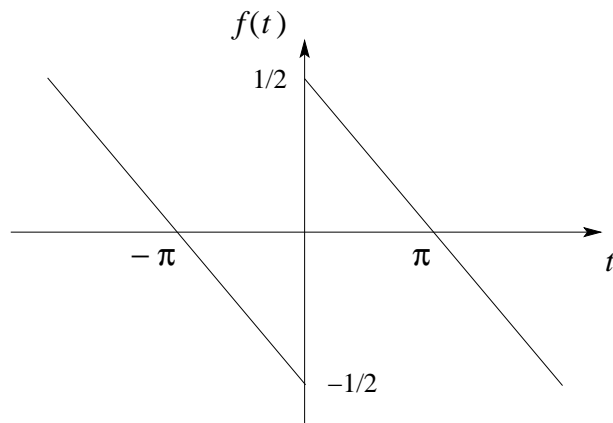


y en el caso de  $\sin(\omega_0 t)$  el peak en  $-\omega_0$  sería negativo:



Terminemos este Capítulo encontrando una representación útil para la delta. Consideremos la función “dientes de sierra”:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}(t + \pi) & -\pi \leq t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ -\frac{1}{2\pi}(t - \pi) & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$



La función es periódica:

$$f(t + 2m\pi) = f(t) \quad \forall m \in \mathbb{Z} .$$

Es pues expandible en una serie de Fourier impar:

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \operatorname{sen}(\nu t) ,$$

con

$$b_{\nu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \operatorname{sen}(\nu t') dt' = \frac{1}{\pi\nu} ,$$

entonces

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\nu t)}{\nu} .$$

Consideremos la distribución asociada

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\left( \frac{\operatorname{sen}(\nu t)}{\nu} \right)} ,$$

y derivémosla:

$$\left( \overline{f(t)} \right)' = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\left( \frac{\operatorname{sen}(\nu t)}{\nu} \right)'} = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\left( \frac{\operatorname{sen}(\nu t)}{\nu} \right)'}' = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\cos(\nu t)} .$$

Por otra parte,

$$\left( \overline{f(t)} \right)' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi} - \frac{1}{2\pi}$$

(la demostración queda como ejercicio), luego

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\cos(\nu t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi} - \frac{1}{2\pi} ,$$

es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\cos(\nu t)} .$$

Restringiéndonos al intervalo  $[-\pi, \pi]$ , encontramos la relación:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\nu t) , \quad t \in [-\pi, \pi] . \quad (6.17)$$

# Capítulo 7

## Convolución de distribuciones

versión final 3.3-13 enero 2003

### 7.1. Definiciones

Sean  $x, y \in \mathcal{S}$  y sean  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\mathcal{S}}^*$  sus funcionales asociados. Hemos definido

$$\begin{aligned}\bar{x} + \bar{y} &\equiv \overline{x + y} \\ \bar{y}' &\equiv \overline{y'} \\ \mathcal{F}\{\bar{y}\} &\equiv \overline{\mathcal{F}\{y\}} .\end{aligned}$$

En forma análoga, definiremos a continuación, el producto de convolución.

**Definición 7.1** *Producto de convolución de funcionales*

Sea  $x * y \in \mathcal{S}$  y  $\overline{x * y} \in \bar{\mathcal{S}}^*$  el funcional asociado. Definimos el producto de convolución de dos funcionales como

$$\boxed{\bar{x} * \bar{y} = \overline{x * y}} . \quad (7.1)$$

Evaluemos

$$\begin{aligned}\langle \overline{y * z}, x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [y * z](s) x(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(s-t) z(t) dt \right] x(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(s-t) x(s) ds \right] z(t) dt .\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $u = s - t$ ,

$$\begin{aligned}\langle \overline{y * z}, x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(u) x(u+t) du \right] z(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u+t) y(u) z(t) dt du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(u+t) z(t) dt \right] y(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} y(u) \langle \bar{z}(t), x(u+t) \rangle du .\end{aligned}$$

La última igualdad tiene sentido sólo si la función de  $u$   $\langle \bar{z}(t), x(u+t) \rangle \in \mathcal{S}$ . Si lo es, podemos escribir.

$$\langle \overline{y * z}, x \rangle = \langle \bar{y}(u), \langle \bar{z}(t), x(u+t) \rangle \rangle .$$

El lado derecho es un número complejo, que se puede reescribir:

$$\begin{aligned} \langle \overline{y * z}, x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(u)x(u+t) du \right] z(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \langle \bar{y}(u), x(u+t) \rangle dt \\ &= \langle \bar{z}(t), \langle \bar{y}(u), x(u+t) \rangle \rangle . \end{aligned}$$

Éste es otro número complejo, que tiene sentido sólo si la función de  $t$   $\langle \bar{y}(u), x(u+t) \rangle \in \mathcal{S}$ . Por lo tanto, resumiendo,

$$\langle \bar{y} * \bar{z}, x \rangle = \langle \overline{y * z}, x \rangle = \langle \bar{y}(u), \langle \bar{z}(t), x(u+t) \rangle \rangle = \langle \bar{z}(t), \langle \bar{y}(u), x(u+t) \rangle \rangle .$$

Falta demostrar que las igualdades última y penúltima tienen sentido.

**Proposición 7.1** Si  $x, z \in \mathcal{S}$  entonces  $\langle \bar{z}(t), x(u+t) \rangle \in \mathcal{S}(u)$ .

**Demostración** Sabemos que si  $x, z \in \mathcal{S}$  entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^m x^{(n)}(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^m z^{(n)}(t) = 0, \quad \forall m \text{ y } n \in \mathbb{N} .$$

Definamos

$$g(u) \equiv \langle \bar{z}(t), x(u+t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)x(u+t) dt .$$

Tomemos las derivadas de  $g(u)$ :

$$\begin{aligned} g'(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)x'(u+t) dt \\ &\vdots \\ g^{(n)} &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)x^{(n)}(u+t) dt . \end{aligned}$$

Luego  $g$  es infinitamente diferenciable. Ahora consideremos el límite

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} [u^m g^{(n)}(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \lim_{|u| \rightarrow \infty} [u^m x^{(n)}(u+t)] dt = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} .$$

Luego  $g(u) \in \mathcal{S}$ .

q.e.d.

**Definición 7.2** *Producto de convolución entre una distribución y un funcional asociado a una función Sean  $\varphi \in \mathcal{S}^*$ ,  $f \in \mathcal{S}$ . Definimos*

$$[\varphi * \bar{f}](u) = \langle \varphi_t, f(u-t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)f(u-t) dt ,$$

usando la notación como funciones. Esta definición es consistente con los resultados anteriores.

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi * \bar{f}, x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi * \bar{f}](u) x(u) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} du x(u) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(u-t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(u) f(u-t) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(v+t) f(v) dv \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi(t) \langle \bar{f}(v), x(v+t) \rangle \\
 &= \langle \varphi(t), \langle \bar{f}(v), x(v+t) \rangle \rangle .
 \end{aligned}$$

$\langle \bar{f}(v), x(v+t) \rangle$  no necesariamente pertenece a  $\mathcal{S}$  si  $f$  es de crecimiento lento, que es lo que se necesita para que la última expresión tenga sentido. Por ejemplo, si  $f = 1$ ,

$$\langle \bar{f}(v), x(v+t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(v+t) dv = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) du = \text{cte} \notin \mathcal{S} .$$

Sin embargo, al menos es una función infinitamente derivable. El problema anterior se presenta por supuesto también cuando se trata de dos distribuciones arbitrarias.

**Definición 7.3** *Producto de convolución de distribuciones* Sean  $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ . Si  $\langle \psi(t), x(t+u) \rangle \in \mathcal{S}(u) \forall x \in \mathcal{S}$ , se define  $\varphi * \psi$  como:

$$\langle \varphi * \psi, x \rangle \equiv \langle \varphi(u), \langle \psi(t), x(u+t) \rangle \rangle .$$

Si además  $\langle \varphi(t), x(u+t) \rangle \in \mathcal{S}(t)$ , entonces también existe  $\psi * \varphi$ .

**Proposición 7.2** (Sin demostración)

Una condición suficiente para que valga  $\langle \psi(t), x(t+u) \rangle \in \mathcal{S}(u)$ , es que  $\psi$  tenga soporte finito.

## 7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones

1) ¿Conmutatividad?

No, sólo en algunos casos  $\varphi * \psi$  y  $\psi * \varphi$  existen ambas.

2) ¿Asociatividad?

Sí. Sean  $\varphi, \psi, \chi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ , con

$$\langle \psi(u), y(u+t) \rangle \in \mathcal{S}(t) \quad \text{y} \quad \langle \chi(t), x(u+t) \rangle \in \mathcal{S}(u) \quad \forall x, y \in \mathcal{S} ,$$

entonces

$$\begin{aligned}\langle (\varphi * \psi) * \chi, x \rangle &= \langle (\varphi * \psi)(u), \langle \chi(t), x(t+u) \rangle \rangle \\ &= \langle \varphi(v), \langle \psi(u), \langle \chi(t), x(t+u+v) \rangle \rangle \rangle .\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\langle \varphi * (\psi * \chi), x \rangle &= \langle \varphi(v), \langle \psi * \chi(u), x(u+v) \rangle \rangle \\ &= \langle \varphi(v), \langle \psi(u), \langle \chi(t), x(t+u+v) \rangle \rangle \rangle ,\end{aligned}$$

luego

$$\varphi * (\psi * \chi) = (\varphi * \psi) * \chi = \varphi * \psi * \chi .$$

3) ¿Distributividad?

Sí. Sean  $\varphi, \psi, \chi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ , con  $\langle \chi(t), x(t+u) \rangle \in \mathcal{S}(u) \forall x \in \mathcal{S}$ , entonces

$$\begin{aligned}\langle (\varphi + \psi) * \chi, x \rangle &= \langle (\varphi + \psi)(u), \langle \chi(t), x(t+u) \rangle \rangle \\ &= \langle \varphi(u), \langle \chi(t), x(t+u) \rangle \rangle + \langle \psi(u), \langle \chi(t), x(t+u) \rangle \rangle \\ &= \langle \varphi * \chi, x \rangle + \langle \psi * \chi, x \rangle = \langle \varphi * \chi + \psi * \chi, x \rangle .\end{aligned}$$

4) La  $\delta$  es elemento neutro derecho:

$$\langle \varphi * \delta, x \rangle = \langle \varphi(u), \langle \delta(t), x(t+u) \rangle \rangle = \langle \varphi(u), x(u) \rangle = \langle \varphi, x \rangle ,$$

por lo tanto,  $\forall \varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ , tenemos

$$\boxed{\varphi * \delta = \varphi} \tag{7.2}$$

5) Papel de  $\delta'$  como factor derecho:

$$\langle \varphi * \delta', x \rangle = \langle \varphi(u), \langle \delta'(t), x(t+u) \rangle \rangle = -\langle \varphi, x' \rangle = \langle \varphi', x \rangle .$$

Luego podemos escribir,  $\forall \varphi \in \overline{\mathcal{S}}^*$ ,

$$\boxed{\varphi * \delta' = \varphi'} \tag{7.3}$$

Vale decir, la derivación es un caso particular de la convolución.

6)  $\delta_a$  como factor derecho

$$\langle \varphi * \delta_a, x \rangle = \langle \varphi(u), \langle \delta(t-a), x(t+u) \rangle \rangle = \langle \varphi(u), x(a+u) \rangle .$$

Sea  $f \in \mathcal{S}$  y  $\overline{f} \in \overline{\mathcal{S}}^*$  su funcional asociado. Entonces

$$\langle \overline{f} * \delta_a, x \rangle = \langle \overline{f}(u), x(a+u) \rangle = \langle \overline{f}(u-a), x(u) \rangle .$$

Es decir, si  $\overline{f} \in \overline{\mathcal{S}}^*$ , escribimos:

$$\boxed{\overline{f} * \delta_a = \overline{f(t-a)}} \tag{7.4}$$



El desplazamiento es un caso particular de la convolución.

7) El producto de deltas:

$$\langle \delta_a * \delta_b, x \rangle = \langle \delta(u - a), \langle \delta(t - b), x(t + u) \rangle \rangle = \langle \delta(u - a), x(b + u) \rangle = x(a + b) = \langle \delta_{a+b}, x \rangle .$$

Luego

$$\boxed{\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}} \quad (7.5)$$

8) Existen divisores del cero. Sea  $C$  una función constante en un intervalo finito y cero en el resto.

$$\overline{C} * \delta' = \overline{C}' = \overline{C'} = \overline{0} = 0 ,$$

o sea que se tiene  $\varphi * \psi = 0$  sin que  $\varphi = 0$  ni  $\psi = 0$ . Consecuencia de lo anterior es que si  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{S}^*$ , las ecuaciones

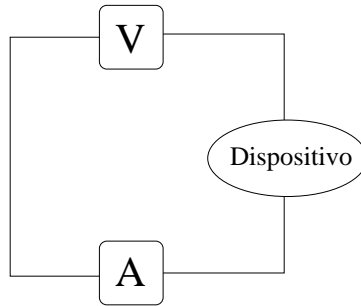
$$\alpha * (\beta - \gamma) = 0 \quad \text{o} \quad \alpha * \beta = \alpha * \gamma \not\Rightarrow \beta = \gamma ,$$

aun si  $\alpha \neq 0$ ,

9) Las ecuaciones  $\alpha * \beta = \psi$  o  $\beta * \alpha = \psi$  puede tener más de una solución  $\alpha$  para  $\beta, \psi$  dados. Por ejemplo, para  $\beta = \delta'$  y  $\psi = \overline{0}$  la ecuación  $\alpha * \beta = \psi$  tiene como soluciones  $\alpha = \overline{0}$ ,  $\alpha = \overline{C}$  entre otras.

## 7.3. Uso de convolución en Física

Consideremos el siguiente circuito:



**V** Mide la *fem*  $e(t)$  aplicada al dispositivo. Esto corresponde al “estímulo” o “excitación” que perturba el sistema.

**A** Mide la corriente  $i(t)$  que circula por el sistema. Ésta corresponde a la “respuesta” del sistema frente a lo que lo perturba.

Las siguientes premisas deben ser satisfechas por el sistema:

- I Si  $e(t) = 0$  para  $t < t_1$ , entonces  $i(t) = 0$  para  $t < t_1$ .
- II Si a las excitaciones  $e_{1,2}(t)$  les corresponden respuestas  $i_{1,2}(t)$ , entonces a una excitación  $\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$  le corresponde una respuesta  $\alpha i_1(t) + \beta i_2(t)$ . (Linealidad.)

- III Si a la excitación  $e(t)$  le corresponde la respuesta  $i(t)$ , entonces a  $e(t - a)$  le corresponde  $i(t - a)$ . (Desplazamiento.)
- IV Si a la excitación  $e_n(t)$  le corresponde la respuesta  $i_n(t)$ , entonces a  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(t)$  le corresponde  $\lim_{n \rightarrow \infty} i(t)$ . (Continuidad.)

**Teorema 7.1** Sea la distribución  $G(t)$  la respuesta a la excitación  $\delta(t)$ . (Esto corresponde a una excitación “percusional”, nula para todo tiempo salvo en el instante  $t = 0$ .) Entonces la respuesta  $\bar{i}$  a cualquier excitación  $\bar{e}(t)$  se obtiene por el producto de convolución

$$\bar{i} = G * \bar{e} . \quad (7.6)$$

Así pues, basta conocer la respuesta de un sistema (cualquier sistema con las premisas anteriores, esperables para un sistema físico) a un estímulo elemental, para conocer la respuesta del sistema a cualquier otro estímulo, a través del producto de convolución. Situaciones similares se presentan en otros problemas físicos: basta conocer el campo eléctrico producido por una carga puntual para saber el campo eléctrico producido por una distribución arbitraria de carga.

A continuación damos las líneas generales de una eventual demostración del anterior teorema.

- I. Si  $\bar{e} = \delta$  entonces  $\bar{i} = G = G * \delta = G * \bar{e}$ .
- II. Si  $\bar{e} = \delta_b = \delta_b(t) = \delta(t - b)$  entonces  $\bar{i} = G(t - b) = G(t) * \delta(t - b) = G * \delta_b = G * \bar{e}$ .
- III. Si  $\bar{e} = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} \delta_{t_{\nu}}(t) = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} \delta(t - t_{\nu})$  entonces la respuesta será, usando las propiedades del sistema,  $\bar{i} = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} G_{\nu}(t - t_{\nu}) = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} G(t) * \delta(t - t_{\nu}) = G(t) * \bar{e}(t) = G * \bar{e}$ .
- IV. Sea  $e(t)$  nula para  $t < t_0$ , de crecimiento lento, seccionalmente continua y derivable, de modo que  $\bar{e} \in \bar{\mathcal{S}}^*$  existe.

$$\langle \bar{e}, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)x(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu}^N \alpha_{\nu} x(t_{\nu}) = \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu}^N \alpha_{\nu} \delta(t - t_{\nu}), x \right\rangle .$$

Si  $e(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu}^N \alpha_{\nu} \delta(t - t_{\nu})$ , existe la esperanza de que esto permita expresar toda la respuesta de la forma

$$\bar{i}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu}^N \alpha_{\nu} G(t - t_{\nu}) = G(t) * \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu}^N \alpha_{\nu} \delta(t - t_{\nu}) = G * \bar{e} .$$

# Capítulo 8

## La función Gamma

versión final 3.3-13 enero 2003

La función Gamma aparece en diversos problemas de Física, tales como la normalización de la función de onda de Coulomb y en el cómputo de probabilidades en mecánica estadística. Por tanto, su estudio es relevante, al menos en forma somera.

### 8.1. La función factorial

Consideremos la integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} .$$

Derivando  $n$  veces respecto a  $\alpha$  ambos lados de esta expresión:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} .$$

Poniendo  $\alpha = 1$  encontramos una expresión integral para la función factorial:

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A partir de este resultado podemos extender la función factorial para  $n = 0$ :

$$0! = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 .$$

Así, tenemos en general,

$$\boxed{n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx , \quad n = 0, 1, 2, \dots} \quad (8.1)$$

## 8.2. La función Gamma

Definimos la función Gamma por:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (8.2)$$

Vale decir, es una generalización de la función factorial para números complejos con parte real positiva.

Observemos que:

- Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la función  $e^{-t}$  domina cualquier potencia. Cuando  $t \rightarrow 0$ ,  $|e^{-t} t^{z-1}| \sim t^{\operatorname{Re}(z)-1}$ , de modo que la condición  $\operatorname{Re} z > 0$  (es decir,  $\operatorname{Re}(z) - 1 > -1$ ) es necesaria para la convergencia de la integral.
- Para el caso  $\operatorname{Re} z \leq 0$  la integral diverge y no puede usarse para definir  $\Gamma(z)$ . Más adelante veremos qué hacer con este caso.

La función  $\Gamma(z)$  es continua (si  $\operatorname{Re} z > 0$ ). Además, es fácil ver (al menos formalmente) que, para  $\operatorname{Re} z > 0$ ,

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln t dt, \quad (8.3)$$

$$\Gamma''(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} (\ln t)^2 dt, \quad (8.4)$$

etc. Se puede demostrar que  $\Gamma(z)$  es infinitamente diferenciable si  $\operatorname{Re} z > 0$ .

### 8.2.1. Relación con la función factorial

De la definición de la función Gamma (8.2), se tiene

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}. \quad (8.5)$$

### 8.2.2. Relación de recurrencia

Integrando por partes (8.2),

$$\Gamma(z+1) = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) z t^{z-1} dt = z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z),$$

luego

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)} \quad (8.6)$$

Notemos que, en particular, si  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \Gamma(n-1) = \cdots = n!,$$

pues  $\Gamma(1) = 1$ .

### 8.2.3. Función Gamma de números negativos

Ya observamos que la expresión integral (8.2) no es adecuada para su extensión a números negativos. Sin embargo, ello sí es posible a través de la relación de recurrencia (8.6).

Si  $z \neq 0, -1, -2, \dots$ , la expresión

$$\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z}$$

está bien definida para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande ( $\operatorname{Re}(z) + n > 0$ ). Además su valor es independiente de  $n$ , pues

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z+n+m)}{(z+n+m-1)(z+n+m-2)\cdots(z+1)z} &= \frac{\Gamma(z+n)(z+n+m-1)\cdots(z+n)}{(z+n+m-1)\cdots(z+n)(z+n-1)\cdots z} \\ &= \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z} . \end{aligned}$$

Entonces, se define  $\Gamma(z)$  para todo  $z$  diferente de  $0, -1, -2, \dots$ , por medio de

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z} , \quad n \in \mathbb{N} \text{ y } \operatorname{Re}(z) + n > 0 , \quad (8.7)$$

Por ejemplo,

$$\Gamma(-1,5) = \frac{1}{-1,5} \Gamma(-0,5) = \frac{1}{-1,5} \frac{1}{-0,5} \Gamma(0,5) .$$

Observemos que si  $z = -m + \epsilon$ , con  $m \in \mathbb{N}$  y  $\epsilon < 1$ , la ecuación (8.7) nos dice (con  $n = m + 1$ ) que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(\epsilon+1)}{\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon-2)\cdots(\epsilon-m)} \sim \frac{(-1)^m}{m! \epsilon} \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 .$$

Entonces, en todos los puntos  $z = 0, -1, -2, \dots$ ,  $\Gamma(z)$  tiene polos simples, y el residuo en el polo  $z = -m$  es  $(-1)^m/m!$ .

Más adelante veremos que  $\Gamma'(1) = -\gamma$ , donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni. Entonces, cuando  $z \rightarrow 0$ ,  $\Gamma(1+z) = 1 - \gamma z + \cdots$ , y con esto

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{1}{z} - \gamma + \cdots , \quad \text{cuando } z \rightarrow 0 .$$

### 8.2.4. Algunos resultados

(a) Evaluemos  $\Gamma(1/2)$ . De la definición (8.2),

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt .$$

Con el cambio de variables  $t = y^2$ ,

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy .$$

Entonces

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4 \left( \int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

Reescribiendo la integral en coordenadas polares,

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r dr d\theta = 4 \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = 2\pi \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^\infty = 2\pi \left( \frac{1}{2} \right) .$$

Luego

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} . \quad (8.8)$$

(b) Para todo  $z \notin \mathbb{Z}$  se verifica que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} . \quad (8.9)$$

La demostración la veremos más adelante.

(c) La fórmula de duplicación de Legendre dice que

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) . \quad (8.10)$$

La demostración la veremos más adelante.

## 8.3. Función Beta

### 8.3.1. Definición

Definimos la función Beta por:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt , \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0 \quad (8.11)$$

Con el cambio de variables  $\tau = 1 - t$  se puede demostrar que

$$B(p, q) = B(q, p) . \quad (8.12)$$

Otras formas de expresar  $B(p, q)$ , con los cambios de variable  $t = \cos^2 \theta$  y  $t = r/(1+r)$  respectivamente, son:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} \theta)^{2q-1} (\cos \theta)^{2p-1} d\theta , \quad (8.13)$$

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{r^{p-1}}{(1+r)^{p+q}} dr . \quad (8.14)$$

La función Beta se relaciona con la función Gamma a través de la expresión:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} . \quad (8.15)$$

**Demostración** Ejercicio.

### 8.3.2. Otras relaciones entre las funciones Beta y Gamma

En esta sección volveremos sobre los dos resultados pendientes de la sección 8.2.4, esto es, las ecuaciones (8.9) y (8.10).

Para demostrar el resultado (8.9) primero notamos que, con la ayuda de (8.15),  $B(z, 1 - z) = \Gamma(z)\Gamma(1 - z)$ . Ahora, por (8.14), lo que tenemos es

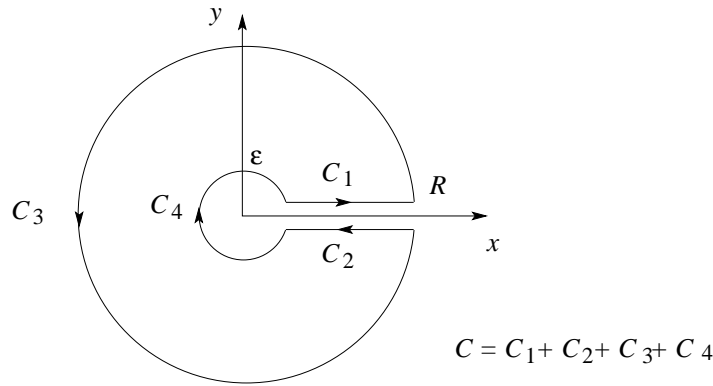
$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw ,$$

con  $0 < \operatorname{Re} z < 1$  (por la definición de Beta).

Notemos que la función  $w^{z-1}/(1 + w)$ , con  $z$  fijo y tal que  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ , tiene un polo en  $w = -1$ . Además, como la función es multivaluada, consideraremos, en el primer cuadrante del plano complejo, que

$$w^{z-1} = e^{(z-1)\ln w} .$$

Aquí,  $\ln w$  es real. Consideremos ahora el camino cerrado  $C$  que muestra la figura:



Entonces

$$\int_C \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw = -2\pi i e^{i\pi z} ,$$

pues el residuo en  $w = -1$  es  $w^{z-1}$  (ejercicio). También quedará como ejercicio demostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{C_1} \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw &= \int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw , \\ \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{C_2} \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw &= -e^{2i\pi z} \int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw , \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw &= 0 , \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_4} \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw &= 0 , \end{aligned}$$

es decir, demuestre que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{C_1} \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw = (1 - e^{2i\pi z}) \int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{1 + w} dw .$$

De este modo, se obtiene que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{-2i\pi e^{i\pi z}}{1 - e^{2i\pi z}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

si  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)\Gamma(-z) &= z\Gamma(z)\frac{\Gamma(-z+1)}{(-z)} \\ &= -\Gamma(z)\Gamma(1-z) \\ &= -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\end{aligned}$$

si  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ , de modo que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z + \pi)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

si  $1 < \operatorname{Re} z < 2$ . Así, entonces,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad \operatorname{Re} z \notin \mathbb{Z}.$$

Para demostrar la fórmula de duplicación de Legendre (8.10), primero notemos que ésta es equivalente a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

[donde hemos usado el resultado (8.8)], lo cual es equivalente a

$$\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)} = 2^{2z-1} \frac{[\Gamma(z)]^2}{\Gamma(2z)}.$$

De este modo, por la expresión (8.15), lo que tenemos que demostrar es

$$B(1/2, z) = 2^{2z-1}B(z, z).$$

Pero con el cambio de variable  $t = (x+1)/2$  en la definición de la función Beta (8.11),

$$B(z, z) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^{z-1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{z-1} \frac{dx}{2} = \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^1 (1-x^2)^{z-1} dx,$$

mientras que, con el cambio de variable  $t = x^2$ ,

$$B(1/2, z) = 2 \int_0^1 (1-x^2)^{z-1} dx.$$

De este modo, con las dos ecuaciones anteriores, terminamos de obtener lo buscado, esto es

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$



## 8.4. Notación doble factorial

Definimos el *doble factorial* como el producto de los  $n$  primeros enteros impares o pares:

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) , \quad (8.16)$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) . \quad (8.17)$$

Claramente

$$(2n)!! = 2^n n! , \quad (8.18)$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} . \quad (8.19)$$

## 8.5. Fórmula de Stirling

(Una idea de la demostración.)

Deseamos encontrar una expresión asintótica para  $\Gamma(x)$  para  $x$  grande. Consideremos

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{x \ln t - t} dt .$$

Con el cambio de variables  $t = x + r\sqrt{x}$ , obtenemos

$$\Gamma(x+1) = \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x \ln(x+r\sqrt{x}) - x - r\sqrt{x}} \sqrt{x} dr .$$

Para  $x$  grande, se tiene

$$\ln(x + r\sqrt{x}) = \ln x + \ln \left( 1 + \frac{r}{\sqrt{x}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ln x + \frac{r}{\sqrt{x}} - \frac{r^2}{2x} + \cdots .$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x \ln x + r\sqrt{x} - r^2/2 - x - r\sqrt{x}} \sqrt{x} dr \\ &= e^{x \ln x - x} \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-r^2/2} dr \\ &= x^x e^{-x} \sqrt{x} \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-r^2/2} dr - \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} e^{-r^2/2} dr \right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} x^x e^{-x} \sqrt{x} (\sqrt{2\pi} - 0) , \end{aligned}$$

obteniendo así la *fórmula de Stirling*:

$$\boxed{\Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}} \quad (8.20)$$

Con más trabajo es posible encontrar la expansión asintótica de  $\Gamma(x+1)$ :

$$\Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left( 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \cdots \right). \quad (8.21)$$

Con la ayuda de la fórmula de Stirling encontraremos una forma alternativa de definir la función Gamma, pero sólo mostraremos un sentido de la demostración. Directamente de la fórmula de Stirling, para un  $x$  fijo y con  $y \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \sim \frac{(x+y)^{x+y} e^{-(x+y)} \sqrt{2\pi(x+y)}}{y^y e^{-y} \sqrt{2\pi y}} \sim y^x \left( 1 + \frac{x}{y} \right)^{x+y} e^{-x},$$

pero como

$$\left( 1 + \frac{x}{y} \right)^{x+y} = \left( 1 + \frac{x}{y} \right)^x \left( 1 + \frac{x}{y} \right)^y \sim e^x,$$

se tiene

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \sim y^x,$$

Por otro lado, si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)} &= \frac{(x+n-1)(x+n-2) \cdots (x+1)x\Gamma(x)}{(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \left( 1 + \frac{x}{n-1} \right) \left( 1 + \frac{x}{n-2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{x}{1} \right) x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Si en la ecuación anterior se toma el límite  $n \rightarrow \infty$  resulta que

$$n^x \sim \left( 1 + \frac{x}{n-1} \right) \left( 1 + \frac{x}{n-2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{x}{1} \right) x\Gamma(x),$$

es decir,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \sim x(1+x) \cdots \left( 1 + \frac{x}{n-2} \right) \left( 1 + \frac{x}{n-1} \right) n^{-x}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Recordando que la constante de Euler-Mascheroni  $\gamma$  se define como

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^s \frac{1}{n} - \ln s \right) = 0,577215664901 \dots, \quad (8.22)$$

vemos que

$$n^{-x} = e^{-x \ln n} \sim e^{-x(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})+\gamma x},$$

de lo cual resulta que

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \sim x e^{\gamma x} (1+x) e^{-\frac{x}{1}} \left( 1 + \frac{x}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}} \cdots \left( 1 + \frac{x}{n-2} \right) e^{-\frac{x}{n-2}} \left( 1 + \frac{x}{n-1} \right) e^{-\frac{x}{n-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Así, se obtiene la *representación de Weierstrass* de la función Gamma:

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}}} \quad (8.23)$$

## 8.6. Otras funciones relacionadas

1. *Función digamma:*

$$F(z) = \frac{d}{dz} \ln(z!) , \quad (8.24)$$

donde entendemos que  $z! = \Gamma(z+1)$ .

De la representación de Weierstrass (8.23) se obtiene que

$$-\ln \Gamma(z) = \ln z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ln \left( 1 + \frac{z}{n} \right) - \frac{z}{n} \right] .$$

Derivando la ecuación anterior es claro que

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) ,$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} &= -\frac{1}{z+1} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+1+n} \right) \\ &= -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) , \end{aligned}$$

es decir

$$F(z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)} . \quad (8.25)$$

Del resultado anterior es claro que  $F(z)$  tiene polos en  $z = -1, -2, \dots$ , con residuo 1.

2. *Función poligamma:* Es la  $m$ -ésima derivada de la función  $F$ :

$$F^{(m)}(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \ln(z!) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}} . \quad (8.26)$$

Observemos que

$$F^{(m)}(0) = (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1) , \quad m = 1, 2, 3, \dots , \quad (8.27)$$

donde la función *zeta de Riemann* se define como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} , \quad s > -1 . \quad (8.28)$$

3. *Función Beta incompleta:*

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt , \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0 \text{ y } 0 \leq x \leq 1. \quad (8.29)$$

Claramente

$$B_{x=1}(p, q) = B(p, q) .$$

4. *Funciones Gamma incompletas:*

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \operatorname{Re}(a) > 0, \quad (8.30)$$

y

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt. \quad (8.31)$$

Se tiene

$$\gamma(a, x) + \Gamma(a, x) = \Gamma(a). \quad (8.32)$$

Se puede mostrar (ejercicio) que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\gamma(n, x) = (n-1)! \left( 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right), \quad (8.33)$$

$$\Gamma(n, x) = (n-1)! e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}. \quad (8.34)$$

5. *Integrales de error:*

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (8.35)$$

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt. \quad (8.36)$$

Con un cambio de variable simple podemos escribir las integrales de error en términos de las funciones Gamma incompletas:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right), \quad (8.37)$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right). \quad (8.38)$$

## BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

Un libro dedicado completamente al tema es la referencia [1], el cual fue originalmente publicado en 1906 (en dos tomos). Una interesante y famosa referencia es el capítulo XII del libro de Whittaker y Watson [2]:

1. Niels Nielsen, *Die Gammafunktion*, Band I/II, Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1965 (ISBN 0-8284-0188-8).
2. E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1997 (ISBN 0-5215-8807-3).

# Capítulo 9

## Transformada de Laplace

versión final 3.4-13 enero 2003

### 9.1. Definición

**Definición 9.1** Definimos la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  por

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t), s\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt} \quad s \in \mathbb{C} . \quad (9.1)$$

**Definición 9.2** Una función  $f : [0, \infty) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$  es de *orden exponencial* si  $f(t)$  es seccionalmente continua y derivable en  $0 \leq t < \infty$  y

$$|f(t)| \leq Ae^{s_0 t} \quad \forall t \geq 0 \quad A, s_0 \in \mathbb{R}. \quad (9.2)$$

**Proposición 9.1** Sea  $f$  un función de orden exponencial. Entonces la transformada de Laplace,  $\mathcal{L}\{f\}$ , existe en el semiplano  $\text{Re}[s] > s_0$ .

**Demostración**

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\{f\}| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st}| |f(t)| dt \leq A \int_0^{\infty} |e^{-st}| e^{s_0 t} dt \\ &= A \int_0^{\infty} |e^{-i \text{Im}[s]t}| e^{-(\text{Re}[s]-s_0)t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\text{Re}[s]-s_0)t} dt < \infty \quad \forall \text{Re}[s] > s_0 . \end{aligned}$$

q.e.d.

**Proposición 9.2** La integral  $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  converge uniformemente para todo  $s$  tal que  $\text{Re}[s] \geq s_1 > s_0$ .

**Demostración** Si  $\epsilon > 0$ , afirmamos que existe  $M(\epsilon)$  independiente de  $s$  tal que

$$\left| F(s) - \int_0^M dt e^{-st} f(t) \right| = \left| \int_M^\infty dt e^{-st} f(t) \right| < \epsilon .$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left| \int_M^\infty dt e^{-st} f(t) \right| &\leq \int_M^\infty dt |e^{-st} f(t)| \leq \int_M^\infty dt A e^{-t(\operatorname{Re}[s] - s_0)} \\ &\leq \int_M^\infty dt A e^{-t(s_1 - s_0)} = \frac{A}{s_1 - s_0} e^{-M(s_1 - s_0)} < \epsilon , \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se satisface escogiendo

$$M > \frac{1}{s_1 - s_0} \ln \left[ \frac{A}{\epsilon(s_1 - s_0)} \right] .$$

q.e.d.

**Proposición 9.3**  $F(s)$  es holomorfa (analítica) en  $\operatorname{Re}[s] \geq s_1 > s_0$ , es decir, la derivada  $F'(s)$  existe en dicho semiplano.

**Demostración** En virtud de la convergencia uniforme, podemos pasar la derivada dentro de la integral:

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt ,$$

luego

$$|F'(s)| \leq \int_0^\infty |e^{-st}| t |f(t)| dt \leq A \int_0^\infty t e^{(s_0 - s_1)t} dt ,$$

y la última integral existe (es finita), independiente de  $s$ .

q.e.d.

En general, existe

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-st} dt . \quad (9.3)$$

**Proposición 9.4**

$$\lim_{\operatorname{Re}[s] \rightarrow \infty} F(s) = 0 . \quad (9.4)$$

**Demostración**

$$\lim_{\operatorname{Re}[s] \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty f(t) e^{-i \operatorname{Im}[s] t} \left( \lim_{\operatorname{Re}[s] \rightarrow \infty} e^{-\operatorname{Re}[s] t} \right) dt = 0 .$$

q.e.d.

Notemos, como consecuencia de esta proposición, que  $1$ ,  $s$ ,  $s^2$  o cualquier polinomio, no pueden ser transformadas de Laplace de ninguna función. Sí pueden serlo, en cambio,  $1/s$  o, en general, funciones racionales con el grado del denominador superior al del numerador.

**Ejemplo** Sea  $f(t) = \cos at$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos at, s\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cos(at) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-st} (e^{iat} - e^{-iat}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia} \right) \quad (\text{si } \operatorname{Re}[s] > 0) \\ &= \frac{s}{a^2 + s^2}.\end{aligned}$$

## 9.2. Inversión de la transformada de Laplace

Sea  $f$  una función de orden exponencial, tal que  $f(t) = 0$  si  $t < 0$ . Sean  $F(s) = \mathcal{L}\{f, s\}$  y  $\sigma > s_0$ . Observemos que

$$g(t) = f(t)e^{-\sigma t} \quad (9.5)$$

es módulo integrable:

$$\int_{-\infty}^\infty |g| < \infty,$$

luego la transformada de Fourier de  $g(t)$  existe. Se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{g(t), u\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g(t)e^{itu} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t)e^{-(\sigma - iu)t} dt \\ \mathcal{F}\{g(t), u\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}\{f(t), \sigma - iu\}.\end{aligned} \quad (9.6)$$

Usando el teorema de reciprocidad de la transformada de Fourier:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}\{g(t), u\} e^{-iut} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}\{f, \sigma - iu\} e^{-iut} du.$$

Con el cambio de variable  $s = \sigma - iu$ ,

$$g(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\sigma+i\infty}^{\sigma-i\infty} \mathcal{L}\{f, s\} e^{(s-\sigma)t} ds = \frac{e^{-\sigma t}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{L}\{f, s\} e^{st} ds.$$

Finalmente

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{L}\{f, s\} e^{st} ds. \quad (9.7)$$

Por lo tanto, si la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  está dada por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t), s\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re} s > s_0,$$

entonces  $f(t)$  viene dada por la antitransformada de Laplace:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s), t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad \sigma > s_0. \quad (9.8)$$

La expresión (9.8) se conoce como la *integral de inversión de Mellin*.

Observemos que  $\sigma$  es arbitrario, en tanto sea mayor que  $s_0$ . ¿Cómo es posible que la integral de Mellin [igual a  $f(t)$ ] sea independiente de  $\sigma$ ? Para verificarlo, necesitamos la siguiente proposición:

**Proposición 9.5**

$$\lim_{\operatorname{Im}[s] \rightarrow \pm\infty} F(s) = 0. \quad (9.9)$$

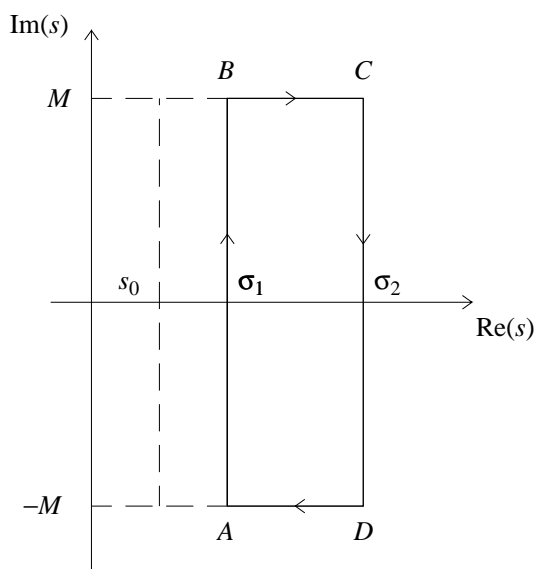
**Demostración** Sea  $s = s_R + i\omega$ . Entonces, por (9.6),

$$\mathcal{L}\{f, s\} = \mathcal{L}\{f, s_R + i\omega\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{fe^{-s_R t}, -\omega\} \xrightarrow{\omega \rightarrow \pm\infty} 0,$$

donde el último límite se sigue de las propiedades de la transformada de Fourier. Luego hemos demostrado la proposición.

q.e.d.

Ahora podemos discutir la independencia de  $\sigma$  de la integral de Mellin. En efecto, consideremos el circuito de integración:





El contorno  $ABCD$  no encierra singularidades, y las integrales a lo largo de  $CB$  y  $AD$  se van a cero cuando  $M = \text{Im}[s] \rightarrow \infty$  [ver (9.9)]. Luego, por el teorema de Cauchy,

$$\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} ds e^{ts} F(s) = \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} ds e^{ts} F(s) , \quad \sigma_1, \sigma_2 > s_0,$$

lo que muestra la independencia en  $\sigma$ .

Una consecuencia del teorema de inversión de la transformada de Laplace es que si dos funciones son distintas, entonces sus transformadas de Laplace también lo son.

**Ejemplo** Consideremos la función escalón de Heaviside

$$h(t) = \frac{1 + \text{sgn}(t)}{2} .$$

Su transformada de Laplace es

$$H(s) = \mathcal{L}\{h, s\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} .$$

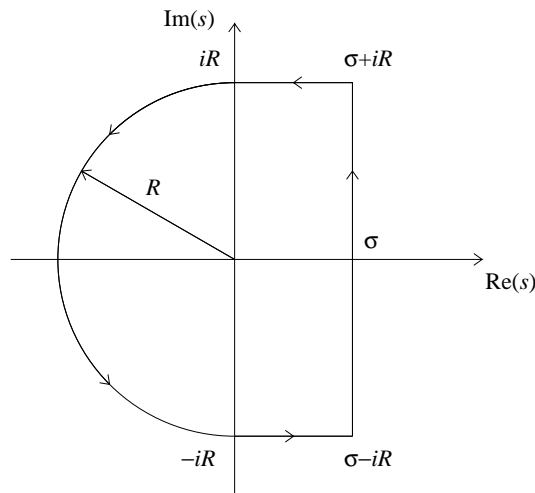
Observemos que  $h(t)$  es de crecimiento exponencial con  $s_0 = 0$  y, consistentemente,  $H(s)$  es holomorfa en el semiplano  $\text{Re}[s] > 0$ .

Invirtiendo la transformada de Laplace, deberíamos tener

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s}, t \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds .$$

¿Será cierto? Comprobarlo exigirá un poco de trabajo al integrar en el plano complejo.

i)  $t > 0$ . Consideremos el siguiente camino de integración:



Sobre los segmentos horizontales:

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s} ds \right| = \left| \int_0^\sigma \frac{e^{t(x \pm iR)}}{x \pm iR} dx \right| \leq \int_0^\sigma \frac{|e^{tx}| |e^{itR}|}{|x \pm iR|} dx \leq \frac{\sigma e^{t\sigma}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad t > 0.$$

Sobre el segmento circular, se tiene

$$z = iRe^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Luego

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s} ds \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{tz}(-Re^{i\varphi})}{iRe^{i\varphi}} d\varphi \right| \leq \int_0^\pi e^{-tR \sin \varphi} d\varphi \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{tR\varphi}{2}} d\varphi.$$

La última desigualdad se sigue del hecho de que

$$\sin \varphi \geq \frac{\varphi}{2} \quad \text{si } 0 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

de modo que, si  $t > 0$ ,

$$-tR \sin \varphi \leq -tR \frac{\varphi}{2}.$$

Por tanto,

$$\left| \int \frac{e^{ts}}{s} ds \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{tR\varphi}{2}} d\varphi = \frac{4}{tR} \left( 1 - e^{-\frac{tR\pi}{4}} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad t > 0.$$

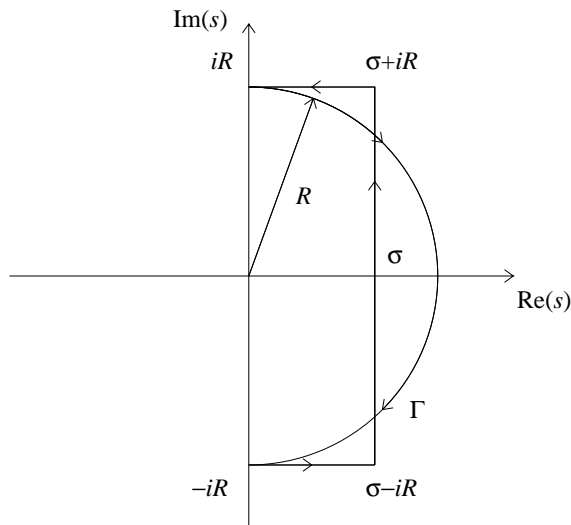
Así, por el teorema del residuo,

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{ts}}{s} ds = 2\pi i \frac{e^{ts}}{s} \Big|_{s=0} = 2\pi i,$$

vale decir

$$h(t) = 1, \quad t > 0.$$

- II) Sea  $t < 0$ . En este caso es fácil convencerse, a partir de lo visto en el caso anterior, que el camino de integración conveniente es:



Y en tal caso,

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{ts}}{s} ds = \int_{\Gamma} \frac{e^{ts}}{s} ds = 0 ,$$

pues no hay polos dentro del circuito de integración  $\Gamma$ . Entonces

$$h(t) = 0 , \quad t < 0 .$$

III) Caso  $t = 0$ .

La integral queda simplemente

$$\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} \frac{ds}{s} = \ln(\sigma + ir) \Big|_{r=-R}^{r=R} = \ln(\sqrt{\sigma^2 + r^2}) + i \arctan\left(\frac{r}{\sigma}\right) \Big|_{r=-R}^{r=R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} i\pi ,$$

de modo que

$$h(0) = \frac{1}{2} .$$

Por lo tanto, al invertir la transformada de Laplace hemos reobtenido la función escalón de Heaviside  $h(t)$ .

### 9.3. Propiedades de la transformada de Laplace

En lo sucesivo, el símbolo  $\circ \longrightarrow \bullet$  significará “tiene como transformada de Laplace”. Además,  $f(t)$  y  $g(t)$  serán funciones de crecimiento exponencial, con  $f(t) = g(t) = 0$  si  $t < 0$ . Finalmente, definimos  $F(s) = \mathcal{L}\{f, s\}$  y  $G(s) = \mathcal{L}\{g, s\}$ .

1) Si  $a, b \in \mathbb{C}$ , entonces

$$af(t) + bg(t) \circ \longrightarrow \bullet aF(s) + bG(s) .$$

(La transformada de Laplace es lineal.)

2) Si  $\alpha > 0$ , entonces

$$f(\alpha t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) .$$

3)

$$\int_0^t f(t') dt' \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{s} F(s) , \quad \operatorname{Re}(s) > s_0 .$$

#### Demostración

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du, s\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u) du dt .$$

Integrando por partes,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du, s\right\} = -\frac{e^{-st}}{s} \left[\int_0^t f(u) du\right] \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s} F(s) .$$

4)

$$f'(t) \circ \longrightarrow \bullet sF(s) - f(0) , \quad \operatorname{Re}(s) > s_0 .$$

**Demostración** Integrando por partes:

$$\mathcal{L}\{f', s\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0) .$$

Análogamente,

$$f^{(n)}(t) \circ \longrightarrow \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) .$$

5)

$$t^n f(t) \circ \longrightarrow \bullet (-1)^n F^{(n)}(s) .$$

6) Desplazamiento en el eje  $t$ . Sea  $\beta > 0$ . Entonces

$$f(t - \beta) \circ \longrightarrow \bullet e^{-\beta s} F(s) .$$

7) Desplazamiento en el plano  $s$ . Sea  $c \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$e^{ct} f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s - c) .$$

**Demostración**

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t), s\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t) dt = F(s - c) .$$

8) Convolución. De la definición de producto de convolución, y puesto que  $f(t)$  y  $g(t)$  son nulas si sus argumentos son menores que cero, se sigue que

$$p(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t - u) g(u) du .$$

Y se puede mostrar que

$$f * g(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s) G(s) .$$

**Demostración** Ejercicio.

## 9.4. Lista de transformadas de Laplace

Se supone en lo que sigue que todas las funciones que aparecen a la izquierda del símbolo  $\circ \text{---} \bullet$  son tales que  $f(t) = 0$  si  $t < 0$ .

a)

$$\begin{aligned} 0 &\circ \text{---} \bullet 0 \\ 1 &\circ \text{---} \bullet \frac{1}{s} \\ c &\circ \text{---} \bullet \frac{c}{s} \end{aligned}$$

b) Sea  $\alpha > 0$ .

$$\mathcal{L}\{t^\alpha, s\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Luego

$$\begin{aligned} t^\alpha &\circ \text{---} \bullet \frac{1}{s^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1), \quad \alpha > 0. \\ t^n &\circ \text{---} \bullet \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \sqrt{t} &\circ \text{---} \bullet \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} e^{ct} &\circ \text{---} \bullet \frac{1}{s-c}, \quad c \in \mathbb{C}. \\ t^n e^{ct} &\circ \text{---} \bullet \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}. \end{aligned}$$

En efecto,

$$\mathcal{L}\{e^{ct}, s\} = \mathcal{L}\{e^{ct} \cdot 1, s\} = \mathcal{L}\{1, s-c\} = \frac{1}{s-c},$$

y

$$\mathcal{L}\{t^n e^{ct}, s\} = (-1)^n [\mathcal{L}\{e^{ct}, s\}]^{(n)} = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}.$$

d) Si  $s > 0$ ,  $\omega > 0$ ,

$$\begin{aligned} \cos \omega t &\circ \text{---} \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \sen \omega t &\circ \text{---} \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) &\circ \text{---} \bullet \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha} \right) \\ \cosh(\alpha t) &\circ \text{---} \bullet \frac{s}{s^2 - \alpha^2} \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \sinh(\alpha t) &\circ \text{---} \bullet \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t} \cos(\omega t) &\circ \longrightarrow \bullet \frac{\gamma + s}{(s + \gamma)^2 + \omega^2} \\ e^{-\gamma t} \sin(\omega t) &\circ \longrightarrow \bullet \frac{\omega}{(s + \gamma)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} te^{-\gamma t} \cos(\omega t) &\circ \longrightarrow \bullet \frac{(\gamma + s)^2 - \omega^2}{[(s + \gamma)^2 + \omega^2]^2} \\ te^{-\gamma t} \sin(\omega t) &\circ \longrightarrow \bullet \frac{2\omega(\gamma + s)}{[(s + \gamma)^2 + \omega^2]^2} \end{aligned}$$

g) Si se desea encontrar la antitransformada de una función racional  $P(s)/Q(s)$ , con el grado de  $P$  menor que el grado de  $Q$ , la estrategia será descomponerla en fracciones parciales, de la forma

$$\sum \frac{A_n}{(s - c)^n} .$$

Por ejemplo, de este modo podemos mostrar que

$$\frac{as^2 + bs + c\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \bullet \longrightarrow \circ \frac{a - c}{2} t \cos(\omega t) + \frac{a + bt + c}{2\omega} \sin \omega t .$$

h) Sea  $q(t)$  la función escalón desplazada en  $t_0$  hacia la derecha:

$$q(t) = h(t - t_0) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(t - t_0)] , \quad t_0 > 0 .$$

Entonces, de las propiedades de la transformada de Laplace,

$$q(t) = h(t - t_0) \circ \longrightarrow \bullet e^{-t_0 s} \frac{1}{s} .$$

Entonces

$$\overline{q(t)}' = \delta(t - t_0) \circ \longrightarrow \bullet s\mathcal{L}\{\overline{q(t)}, s\} - \overline{q(0)} = se^{-t_0 s} \frac{1}{s} - 0 = e^{-t_0 s} .$$

Suponiendo entonces que es lícito evaluar la transformada de Laplace de distribuciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &\circ \longrightarrow \bullet e^{-t_0 s} \\ \delta'(t - t_0) &\circ \longrightarrow \bullet se^{-t_0 s} \\ \delta^{(n)}(t - t_0) &\circ \longrightarrow \bullet s^n e^{-t_0 s} \end{aligned}$$

# Capítulo 10

## Aplicaciones de la transformada de Laplace

versión final 3.3-13 enero 2003

La transformada de Laplace introducida en el Capítulo anterior tiene algunas ventajas respecto a la transformada de Fourier (Cap. 3).

En primer lugar, al igual que la transformada de Fourier, nos permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas (propiedad 4, sección 9.3), con la diferencia que las condiciones iniciales quedan incorporadas de inmediato en la ecuación resultante. Utilizando transformada de Fourier también podemos convertir la ecuación diferencial en una algebraica, pero aún queda trabajo por hacer, que es resolver nuevas ecuaciones que resultan de imponer las condiciones iniciales. Así, usando transformada de Laplace economizamos recursos.

Por cierto, el punto anterior puede resultar más bien secundario, ya que ambos procedimientos deberían arrojar el mismo resultado. Un aspecto nada de secundario, sin embargo, es que, mientras la transformada de Fourier sólo se puede aplicar a funciones que decrecen rápidamente a cero (funciones en  $\mathcal{S}$ ), o a lo sumo a funciones de crecimiento polinomial (es decir, funciones que tienen asociadas distribuciones temperadas), la transformada de Laplace está bien definida incluso para funciones de crecimiento exponencial. Puesto que en general una inestabilidad de un sistema físico está caracterizada por alguna variable que crece exponencialmente, no está garantizado que el formalismo de transformada de Fourier dé resultados con sentido en estos casos. Así, la transformada de Laplace no es sólo un formalismo alternativo, sino que en ocasiones puede ser el único adecuado.

A continuación expondremos algunos ejemplos de empleo de la transformada de Laplace para resolver algunos problemas matemáticos o físicos. En particular, estos ejemplos permiten ilustrar, por un lado, la utilidad de incorporar inmediatamente las condiciones iniciales al aplicar la transformada a ecuaciones diferenciales, y por otro, que tanto las soluciones de dichas ecuaciones como las ecuaciones mismas pueden contener términos exponencialmente crecientes, situación que impediría el empleo de transformadas de Fourier.

## 10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

1) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Para resolverla, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}, s\right\} - \mathcal{L}\{y, s\} = \mathcal{L}\{1, s\},$$

donde interpretamos la función constante 1 como 1 para  $t \geq 0$  y 0 para  $t < 0$ . Evaluamos la transformada de la segunda derivada, usando las propiedades enunciadas en el capítulo anterior.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}, s\right\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - 1,$$

donde  $Y(s) = \mathcal{L}\{y, s\}$ . Usando lo anterior en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 1 - Y(s) &= \frac{1}{s} \\ (s^2 - 1)Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{s}{s} = \frac{1+s}{s} \\ Y(s) &= \frac{s+1}{s} \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s} \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Retransformando,

$$y(t) = e^t - 1.$$

2) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = t, \quad y(1) = a, \quad y(2) = b.$$

Encontremos la solución para  $y(t)$ . Primero hacemos el cambio de variable  $x = t - 1$  con  $u(x) = y(t)$ , de esta manera la ecuación nos queda

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = x + 1, \quad u(0) = y(1) = a, \quad u(1) = b.$$

Aplicamos la transformada de Laplace. Definiendo  $\mathcal{L}\{u, s\} = U(s)$  y  $u'(0) = \gamma$ , tenemos

$$\begin{aligned} s^2 U(s) - su(0) - u'(0) - U(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \\ (s^2 - 1)U(s) &= as + \gamma + \frac{1+s}{s^2} \\ U(s) &= \frac{as}{s^2-1} + \frac{\gamma}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s-1)}. \end{aligned}$$



Retransformando,

$$u(x) = a \cosh(x) + \gamma \sinh(x) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-1)}, x \right\} .$$

Haciendo notar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_0^x e^{x'} dx', s \right\} &= \frac{1}{s} \mathcal{L} \{ e^t, s \} = \frac{1}{s} \frac{1}{s-1} \\ \mathcal{L} \left\{ \int_0^x dx' \int_0^{x'} e^{x''} dx'', s \right\} &= \frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ \int_0^x e^{x'} dx', s \right\} = \frac{1}{s} \frac{1}{s} \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2(s-1)} , \end{aligned}$$

se tiene

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-1)}, x \right\} = \int_0^x dx' \int_0^{x'} e^{x''} dx'' = \int_0^x (e^{x'} - 1) dx' = e^x - 1 - x .$$

Finalmente

$$u(x) = a \cosh(x) + \gamma \sinh(x) + e^x - (1 + x) .$$

Expresando la solución en la variable original,

$$y(t) = a \cosh(t-1) + \gamma \sinh(t-1) + e^{t-1} - t .$$

Comprobamos la condición inicial:

$$\begin{aligned} y(1) &= a \cosh(0) + \gamma \sinh(0) + e^0 - 1 , \\ y(1) &= a + 0 + 1 - 1 = a . \end{aligned}$$

Para determinar  $\gamma = u'(0)$  usamos  $y(2) = b$ :

$$\begin{aligned} y(2) &= a \cosh(1) + \gamma \sinh(1) + e - 2 = b \\ \gamma &= \frac{2 + b - e - a \cosh(1)}{\sinh(1)} . \end{aligned}$$

En general, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \alpha \frac{d}{dt} x(t) + \beta x(t) = f(t) h(t) ,$$

donde  $h(t)$  corresponde a la función escalón de Heaviside, tiene por solución:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \xi, t \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} ds e^{st} \xi(s) ,$$

con

$$\xi(s) = \mathcal{L} \{ x, s \} = \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta} [\mathcal{L} \{ f(t), s \} + (\alpha + s)x(0) + x'(0)] .$$

## 10.2. Ecuaciones integrales

Sea la ecuación integral para  $f(x)$

$$g(x) = \lambda f(x) + \int_0^x f(\alpha) K(x - \alpha) d\alpha, \quad (10.1)$$

donde  $g(x)$  y  $K(x)$  son funciones dadas. Busquemos la solución aplicando la transformada

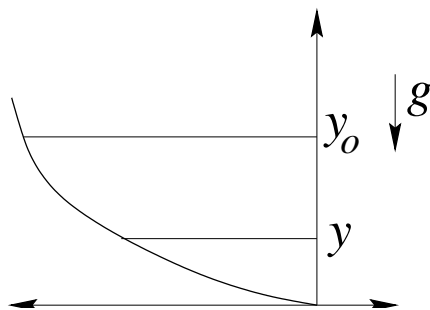
$$\mathcal{L}\{g(x), s\} = \lambda \mathcal{L}\{f(x), s\} + \mathcal{L}\{f * K(x), s\} = \lambda \mathcal{L}\{f(x), s\} + \mathcal{L}\{f(x), s\} \mathcal{L}\{K(x), s\}.$$

Despejando,

$$\mathcal{L}\{f(x), s\} = \frac{\mathcal{L}\{g(x), s\}}{\lambda + \mathcal{L}\{K(x), s\}}. \quad (10.2)$$

Retransformando se obtiene  $f(x)$ .

Como ilustración de situaciones físicas que involucran ecuaciones integrales revisaremos el problema de la *tautócrona*: una partícula de masa  $m$  resbala, sin roce, sobre una curva bajo el efecto de la gravedad. Queremos la forma de la curva de modo que el tiempo que se demore la partícula en “llegar abajo” sea independiente del punto de lanzamiento.



Debido a la conservación de la energía se satisface para todo  $y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mg(y_0 - y) \\ v &= \sqrt{2g(y_0 - y)}, \end{aligned}$$

donde  $y_0$  es la altura inicial. Podemos evaluar el tiempo de descenso

$$\int \frac{ds}{v} = \int_{y_0}^0 \frac{1}{v} \frac{ds}{dy} dy = - \int_0^{y_0} f(y)(y_0 - y)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2g}} dy,$$

donde hemos definido  $f(y) = ds/dy$ . Con este resultado podemos escribir la condición de que la curva sea tautócrona de la siguiente manera:

$$\int_0^{y_0} f(y)(y_0 - y)^{-1/2} dy = C_0, \quad \text{constante independiente de } y_0.$$

Esta ecuación integral es de la forma (10.1), con  $\lambda = 0$ ,  $g(x) = C_0$  y  $K(x) = x^{-1/2}$ , por tanto tiene solución de la forma (10.2):

$$\mathcal{L}\{f(x), s\} = \frac{C_0/s}{\mathcal{L}\{x^{-1/2}, s\}} .$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}\{x^{-1/2}, s\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} ,$$

luego

$$\mathcal{L}\{f(x), s\} = \frac{C_0}{s} \frac{\sqrt{s}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{C_0}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{s}} .$$

Retransformando,

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \frac{C_0}{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2} y^{-1/2} = C y^{-1/2} .$$

A partir de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 ,$$

despejamos

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{ds^2 - dy^2} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dy} dy\right)^2 - dy^2} , \\ dx &= \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 dy^2 - dy^2} = \left[\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1\right]^{1/2} dy . \end{aligned}$$

Como conocemos  $ds/dy$ , tenemos

$$dx = \left[\frac{C^2}{y} - 1\right]^{1/2} dy . \quad (10.3)$$

Haciendo el cambio de variable

$$y = C^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{C^2}{2} [1 - \cos(\phi)] .$$

Diferenciando,

$$dy = \frac{C^2}{2} \operatorname{sen} \phi d\phi .$$

Reemplazando en (10.3) obtenemos

$$\begin{aligned} dx &= \left[\csc^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1\right]^{1/2} \frac{C^2}{2} \operatorname{sen} \phi d\phi \\ dx &= \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{C^2}{2} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi \\ dx &= C^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi = \frac{C^2}{2} (1 + \cos \phi) d\phi . \end{aligned}$$

Integrando esta última ecuación y agregando el cambio de variable podemos expresar la curva resultante en forma paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= \frac{C^2}{2}(\phi + \operatorname{sen} \phi) \\ y &= \frac{C^2}{2}(1 - \cos \phi) . \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una cicloide.

### 10.3. Ecuaciones en derivadas parciales

Consideremos la ecuación unidimensional de conducción del calor

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} , \quad (10.4)$$

donde  $u(x, t)$  corresponde a la temperatura en la posición  $x$  y a tiempo  $t$ . Elegimos, por simplicidad, la constante  $c^2 = K/\sigma\rho = 1$ , donde  $K$  es la conductividad térmica,  $\sigma$  el calor específico y  $\rho$  la densidad.

El problema específico a abordar es el de una varilla seminfinita con condición inicial  $u(x, 0) = 0$ ,  $\forall x > 0$ , y condiciones de borde  $u(0, t) = A$  y  $u(\infty, t) = 0$ .

Si tomamos la transformada de Laplace respecto de  $x$  en (10.4), encontramos que la transformada de  $u$  debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$s^2 \mathcal{L}\{u(x, t), s\} - su(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}, s\right\} .$$

La anterior ecuación resulta no ser de coeficientes constantes, además, es inhomogénea y uno de sus términos,  $\partial u/\partial x(0, t)$  no lo conocemos, así que la solución no es directa. Pero si tomamos la transformada de Laplace respecto a  $t$  de la ecuación de conducción, y definiendo

$$U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t), s\} = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt ,$$

obtenemos

$$\frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} = sU(x, s) - u(x, 0) .$$

Utilizando la condición inicial  $u(x, 0) = 0$ , nos queda una ecuación diferencial en donde  $s$  es un parámetro,

$$\frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} - sU(x, s) = 0 ,$$

con solución

$$U(x, s) = C_1 e^{x\sqrt{s}} + C_2 e^{-x\sqrt{s}} .$$

Aplicamos la transformada de Laplace sobre las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(\infty, t), s\} = U(\infty, s) = 0 &\implies C_1 = 0 , \\ \mathcal{L}\{u(0, t), s\} = U(0, s) = \mathcal{L}\{A, s\} = \frac{A}{s} &\implies C_2 = \frac{A}{s} . \end{aligned}$$

La solución es

$$U(x, s) = \frac{A}{s} e^{-x\sqrt{s}}, \quad \text{para } \operatorname{Re}[s] > 0.$$

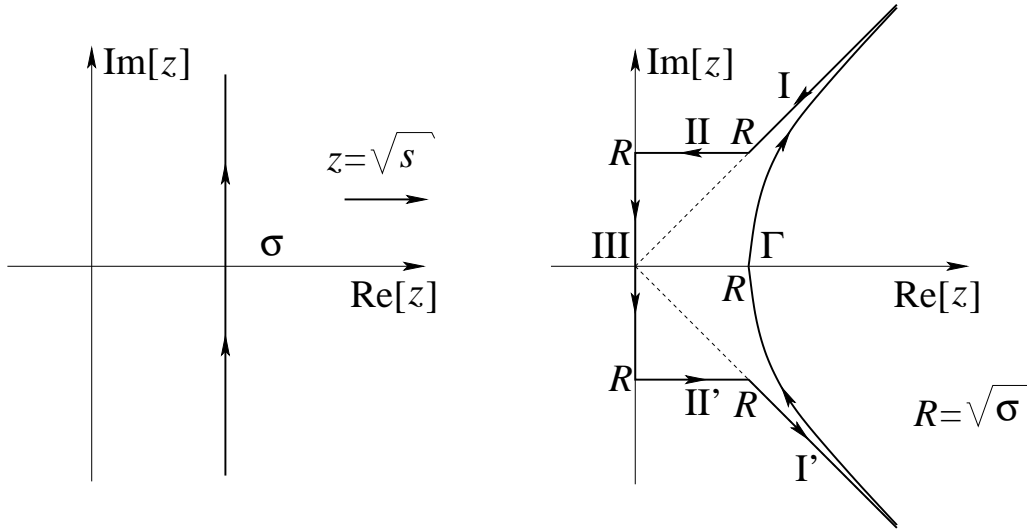
Retransformando,

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} e^{-x\sqrt{s}}, t \right\} = A \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-x\sqrt{s}}, t' \right\} dt'.$$

Evaluamos, primero,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-x\sqrt{s}}, t \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} e^{-x\sqrt{s}} ds.$$

Usando el cambio de variable  $z = \sqrt{s}$ , el camino de integración se modifica como muestra la figura:



y la integral nos queda

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-x\sqrt{s}}, t \right\} = \frac{2}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{z^2 t} e^{-zx} z dz.$$

Analicemos la integral sobre los tramos que cierran el camino, partiendo por el tramo I:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\text{I}} z e^{z^2 t - zx} dz \right|_{z=(1+i)y} &= \frac{1}{\pi} \left| \int_R^\infty (1+i)^2 y e^{(1+i)^2 y^2 t - (1+i)yx} dy \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_R^\infty y e^{-y^2 t} dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

El tramo II:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\text{II}} z e^{z^2 t - zx} dz \right|_{z=iR+y} &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^R (iR+y) e^{(iR+y)^2 t - (iR+y)x} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R |iR+y| e^{(y^2 - R^2)t - yx} dy \\ &\leq \frac{e^{-R^2 t}}{\pi} \sqrt{2} R \int_0^R e^{y^2 t - yx} dy \end{aligned}$$

El integrando  $f(y) = e^{y^2 t - yx}$  es acotado en el intervalo  $[0, R]$ , siendo su máximo  $f(0) = 1$  ó  $f(R)$  (dentro del intervalo hay sólo un punto con derivada nula,  $y = x/2$ , y resulta ser un mínimo). Si  $R$  es suficientemente grande, el máximo es  $f(R)$ . de modo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\text{II}} z e^{z^2 t - zx} dz \right|_{z=iR+y} &\leq \frac{e^{-R^2 t}}{\pi} \sqrt{2} R \int_0^R e^{R^2 t - Rx} dy \\ &= \frac{e^{-Rx}}{\pi} \sqrt{2} R^2 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 . \end{aligned}$$

Notamos que dentro del circuito no hay polos, entonces al utilizar el teorema del residuo podemos concluir que la integral sobre el circuito cerrado es nula. Ya hemos demostrado que las integrales sobre los tramos I y II tienden a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ . En forma equivalente se puede mostrar que se anularán, en el mismo límite, las integrales sobre los tramos I' y II'. Por lo tanto, la integral sobre el camino  $\Gamma$  más la integral sobre el tramo III deben cancelarse en el límite  $R \rightarrow \infty$ , o lo que es lo mismo, la integral sobre el camino  $\Gamma$ , que es la que nos interesa, es igual a menos la integral sobre el tramo III. Parametrizamos por  $z = iy$ , y nos queda

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-x\sqrt{s}}, t \right\} = \frac{1}{\pi i} \int_{\text{III}} e^{z^2 t - zx} z dz = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 t - iyx} y dy = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} e^{-x^2/4t} .$$

Podemos escribir la solución

$$u(x, t) = A \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{t'^{3/2}} e^{-x^2/4t'} dt' .$$

Hacemos el cambio de variable  $\alpha^2 = x^2/4t'$ , lo que implica  $dt' = -x^2/2\alpha^3 d\alpha$ , y obtenemos finalmente

$$u(x, t) = \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = A \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right] .$$

## 10.4. Sistema de ecuaciones lineales

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} y_1' + 2y_2' + y_1 - y_2 &= 25 \\ 2y_1' + y_2 &= 25e^t , \end{aligned}$$

con condiciones iniciales  $y_1(0) = 0$  e  $y_2(0) = 25$ . Apliquemos la transformada de Laplace, con las definiciones

$$Y_{1,2} = \mathcal{L} \{ y_{1,2}(t), s \} .$$

Obtenemos para el sistema:

$$\begin{aligned} sY_1 - y_1(0) + 2sY_2 - 2y_2(0) + Y_1 - Y_2 &= \frac{25}{s} , \\ 2sY_1 - 2y_1(0) + Y_2 &= \frac{25}{s-1} . \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} sY_1 + 2sY_2 - 50 + Y_1 - Y_2 &= \frac{25}{s} , \\ 2sY_1 + Y_2 &= \frac{25}{s-1} . \end{aligned}$$

Despejando,

$$Y_1(s) = \frac{25}{4s(s-1)^2(s+1/4)} = \frac{25}{s} - \frac{9}{s-1} + \frac{5}{(s-1)^2} - \frac{16}{(s+1/4)} .$$

Retransformando,

$$y_1(t) = 25 - 9e^t + 5te^t - 16e^{-t/4} .$$

Análogamente

$$y_2(t) = 33e^t - 10te^t - 8e^{-t/4} .$$





# Capítulo 11

## Polinomios ortogonales

versión final 3.4-13 enero 2003

### 11.1. Definiciones

**Definición 11.1** Sean  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  y sea  $p(x) > 0$  continua en el intervalo  $[a, b]$ . Definimos el producto interno de  $f$  y  $g$  con función de peso  $p$  de la forma siguiente:

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)p(x) dx . \quad (11.1)$$

**Definición 11.2** Sean  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$  un conjunto de polinomios reales, donde  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ . El conjunto  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$  forma un sistema ortogonal de polinomios con la función de peso  $p(x)$  si

$$\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{nm} A_m . \quad (11.2)$$

### 11.2. Teoremas

**Teorema 11.1** Sean  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$  polinomios ortogonales en  $[a, b]$  con la función de peso  $p(x)$ . Sea  $Q_k$  un polinomio cualquiera de grado  $k$ . Entonces  $P_n(x)$  es ortogonal a  $Q_k$  si  $n > k$ .

**Demostración** Escribamos el polinomio  $Q_k(x)$  como sigue

$$Q_k(x) = \sum_{\nu=0}^k a_\nu x^\nu .$$

Podemos escribir los  $x^\nu$  como combinación de los polinomios  $P_n(x)$ ,

$$x^\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu P_\mu(x) , \quad \text{con } b_\mu \propto \langle x^\nu, P_\mu \rangle ,$$

por lo tanto,

$$Q_k(x) = \sum_{\nu=0}^k a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu P_\mu(x) ,$$

$$\langle P_n, Q_k \rangle = \sum_{\nu=0}^k a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu \langle P_n, P_\mu \rangle = \sum_{\nu=0}^k a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} b_\mu A_\mu \delta_{n\mu} = 0 , \quad \text{si } n > k .$$

q.e.d.

**Teorema 11.2** Los ceros de los polinomios ortogonales son reales y simples.

**Demostración** Consideremos el polinomio  $P_{n+1}(x)$  que tiene  $n+1$  raíces. Por el teorema anterior

$$\langle Q_k, P_{n+1} \rangle = \int_a^b Q_k^*(x) P_{n+1}(x) p(x) dx = 0 \quad \forall k \leq n .$$

Supongamos que  $P_{n+1}(x)$  no tiene raíces reales en  $[a, b]$ . Al considerar  $Q_k = 1$  obtenemos

$$\int_a^b 1 \times P_{n+1}(x) p(x) dx \neq 0 .$$

Esto contradice lo anterior, lo que significa que  $P_{n+1}$  tiene por lo menos una raíz en  $[a, b]$ . Sea  $\alpha$  esa raíz. Podemos factorizar  $P_{n+1}$  como

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha) S_n(x) .$$

Si  $n \geq 1$  se debe tomar  $Q_k = (x - \alpha)$ , y como por un lado debe cumplirse

$$\langle P_{n+1}, x - \alpha \rangle = 0 ,$$

y por otro lado, de (11.1),

$$\langle P_{n+1}, x - \alpha \rangle = \int_a^b (x - \alpha)^2 S_n(x) p(x) dx \neq 0$$

si  $S_n(x)$  no tiene una raíz en  $[a, b]$ , hay nuevamente contradicción. Por lo tanto,  $S_n(x)$  tiene por lo menos una raíz en  $[a, b]$ . Siguiendo con este procedimiento encontramos que  $P_{n+1}(x)$  tiene  $n+1$  raíces reales.

Nos falta demostrar que las raíces son simples. Sea  $x = \alpha$  una raíz no simple, es decir,

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha)^m S_{n+1-m}(x) , \quad \text{con } m \geq 2 .$$

Si  $m$  es par, sea  $Q_k(x) = S_{n+1-m}(x)$ .

Si  $m$  es impar, sea  $Q_k(x) = (x - \alpha) S_{n+1-m}(x)$ .

Supongamos que  $m$  es impar por simplicidad (si  $m$  es par la demostración es análoga), entonces

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, Q_k \rangle &= \int_a^b (x - \alpha)^m S_{n+1-m}(x) (x - \alpha) S_{n+1-m}(x) p(x) dx \\ &= \int_a^b (x - \alpha)^{m+1} [S_{n+1-m}(x)]^2 p(x) dx \neq 0 , \end{aligned}$$

distinta de cero porque cada factor de la función subintegral es positivo, en los dos primeros casos por ser las potencias pares y en el último por definición de  $p(x)$ . Por otra parte,  $\text{grado}[Q_k(x)] = n + 1 - m + 1 = (n + 1) - (m - 1) < n + 1$ , lo cual significa que

$$\langle P_{n+1}, Q_k \rangle = 0 . \quad \Rightarrow \Leftarrow$$

Por lo tanto, las raíces deben ser simples.

q.e.d.

### Teorema 11.3 Teorema de unicidad (sin demostración)

Si  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$  y  $\{Q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$  son dos conjuntos de polinomios ortogonales que satisfacen la misma relación de ortogonalidad en  $[a, b]$ , entonces son iguales. Es decir, si

$$\int_a^b P_n^*(x) P_m(x) p(x) dx = \int_a^b Q_n^*(x) Q_m(x) p(x) dx \implies P_n(x) = Q_n(x) .$$

## 11.3. Relación de recurrencia

Sea  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$  un conjunto de polinomios ortogonales. Se tiene

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + c_n x^{n-2} + \dots \quad (11.3a)$$

$$P_{n-1}(x) = a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-3} + \dots \quad (11.3b)$$

$$P_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + c_{n+1} x^{n-1} + \dots . \quad (11.3c)$$

Luego se puede escribir

$$x P_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \beta_{nj} P_j(x) = \beta_{n0} P_0 + \beta_{n1} P_1 + \dots + \beta_{n,n+1} P_{n+1} ,$$

donde, si suponemos adicionalmente que los  $P_n(x)$  están normalizados,

$$\beta_{nj} = \int_a^b p(x) x P_n(x) P_j^*(x) dx = \beta_{jn}^* . \quad (11.4)$$

Vemos que  $\beta_{nj} \neq 0$  sólo si  $n = j, j-1, j+1$ , luego

$$x P_n(x) = \beta_{n,n+1} P_{n+1}(x) + \beta_{n,n} P_n(x) + \beta_{n,n-1} P_{n-1}(x) . \quad (11.5)$$

Reemplazando (11.3) en (11.5) y comparando potencias, obtenemos para los coeficientes

$$\beta_{n,n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}} , \quad \beta_{n,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} , \quad \beta_{n,n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} .$$

$[\beta_{n,n+1}$  y  $\beta_{n,n}$  se obtienen fácilmente de (11.5);  $\beta_{n-1,n}$  se obtiene simplemente desplazando en 1 los subíndices para  $\beta_{n,n+1}$ , lo cual permite obtener  $\beta_{n,n-1}$  por la simetría (11.4).] Reemplazando en (11.5) estos resultados, tenemos finalmente

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x) + \left[ \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - x \right] P_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} P_{n-1}(x) = 0} \quad (11.6)$$



# Capítulo 12

## Polinomios de Hermite

versión final 3.5-13 enero 2003

### 12.1. Definición

Definimos los polinomios de Hermite por:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} . \quad (12.1)$$

$\{H_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  son polinomios de grado  $n$ . Se tiene que:

$$H_n(-t) = (-1)^n H_n(t) , \quad (12.2)$$

es decir,  $H_n$  es par si  $n$  es par, e impar si  $n$  es impar.

Los primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 \\ H_1(t) &= 2t \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2 \\ H_3(t) &= 8t^3 - 12t \\ H_4(t) &= 16t^4 - 48t^2 + 12 \end{aligned}$$

### 12.2. Función generatriz

Consideremos la función

$$\psi(t, x) = e^{t^2} e^{-(t-x)^2} = e^{2tx-x^2} . \quad (12.3)$$

Su desarrollo en serie de Taylor será:

$$\psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(t)}{n!} x^n , \quad A_n(t) = \left. \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \right|_{x=0} .$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(t-x)}(-1) ,$$

se tiene

$$A_n(t) = e^{t^2} \frac{\partial^n}{\partial(t-x)^n} e^{-(t-x)^2} \Big|_{x=0} (-1)^n = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} = H_n(t) ,$$

luego

$$e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n . \quad (12.4)$$

Se dice que  $e^{2tx-x^2}$  es la *función generatriz* de los polinomios de Hermite, vale decir, es aquella función de dos variables tal que su desarrollo de Taylor en una de las variables tiene como coeficientes precisamente los polinomios de Hermite.

A partir de (12.4) se pueden encontrar relaciones entre los polinomios de Hermite. La estrategia para hallarlas (para ésta o cualquier otra función generatriz de otros polinomios) es típica: derivar parcialmente respecto a alguna de las variables y luego comparar potencias de  $x$  en los desarrollos en Taylor resultantes.

1) Derivando respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2x\psi .$$

Usando (12.4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{d}{dt} H_n(t) \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} 2x^{n+1} .$$

Reordenando la suma en el lado izquierdo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(t)}{n!} x^{n+1} = H'_0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H'_{m+1}(t)}{(m+1)!} x^{m+1} .$$

Comparando los coeficientes de las potencias de  $x$  en cada serie encontramos:

$$\begin{aligned} H'_0(t) &= 0 , \\ 2H_n(t) &= \frac{1}{n+1} H'_{n+1}(t) , \end{aligned}$$

lo cual puede ser reescrito en la forma

$$2nH_{n-1}(t) = H'_n(t) , \quad n \geq 0 . \quad (12.5)$$

Observemos que, si bien sólo tiene sentido considerar polinomios de Hermite con índice positivo, la expresión (12.5) puede ser extendida a  $n = 0$ , aunque ello haga aparecer un factor  $H_{-1}$ . En general, las relaciones de recurrencia que obtendremos pueden considerarse válidas

para cualquier índice entero, adoptando la convención de que los polinomios con subíndices negativos tienen algún valor adecuado, por ejemplo, cero.

La relación (12.5) expresa un polinomio de Hermite en términos de un operador (en este caso la derivada) aplicado sobre el polinomio de Hermite inmediatamente superior. Un operador que tiene tal propiedad se denomina *operador de bajada*. En este caso, el operador de bajada de los polinomios de Hermite es  $(2n)^{-1}d_t$ .

2) Derivando respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = (2t - 2x)\psi .$$

Con (12.4):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(t)}{(n-1)!} x^{n-1} &= 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^{n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(t)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2tH_n(t)}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_{n-1}(t)}{(n-1)!} x^n \end{aligned}$$

Comparando potencias de  $x$ :

$$\begin{aligned} H_1(t) &= 2tH_0(t) , \\ H_{n+1}(t) &= 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) , \quad n \geq 1 . \end{aligned}$$

O bien

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t) , \quad n \geq 0 . \quad (12.6)$$

3) Podemos utilizar las dos relaciones de recurrencia (12.5) y (12.6) para obtener una tercera:

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H'_n(t) . \quad (12.7)$$

Hemos pues encontrado el *operador de subida* para los polinomios de Hermite, a saber,  $2t - d_t$ .

Derivando (12.7):

$$H'_{n+1} = 2H_n + 2tH'_n - H''_n .$$

Con (12.5),

$$2(n+1)H_n = 2H_n + 2tH'_n - H''_n ,$$

o sea,

$$H''_n - 2tH'_n + 2nH_n = 0 .$$

Es decir, los polinomios  $H_n$  son una solución de la *ecuación de Hermite*:

$$y''(t) - 2ty'(t) + 2ny(t) = 0 . \quad (12.8)$$

### 12.3. Ortogonalidad

Evalúemos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt .$$

Sin pérdida de generalidad, sea  $n \geq m$ . Podemos escribir

$$I = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} dt .$$

Integrando por partes:

$$I = (-1)^{n+1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-t^2} dt .$$

Integrando por partes  $m$  veces:

$$I = (-1)^m (-1)^n 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(t) \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} e^{-t^2} dt .$$

Si  $m < n$ , entonces

$$I = (-1)^{n+m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} e^{-t^2} dt = (-1)^{n+m} 2^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 .$$

Si  $n = m$ ,

$$I = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} .$$

Resumiendo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} . \quad (12.9)$$

Podemos expresar este resultado diciendo que los polinomios de Hermite son ortogonales, pero con una *función de peso*  $p(t) = e^{-t^2}$ .

Si definimos las funciones

$$\varphi_n(t) = \frac{H_n(t) e^{-t^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} , \quad (12.10)$$

es claro que  $\{\varphi_n\}_n$  es un conjunto ortonormal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \delta_{nm} . \quad (12.11)$$



## 12.4. Algunos resultados interesantes

- (a) Es fácil demostrar que las funciones  $\varphi_n$  definidas en (12.10) satisfacen la ecuación diferencial

$$y'' - t^2 y = -(2n + 1)y \quad (12.12)$$

[con la condición de borde  $y(\pm\infty) = 0$ ], que es precisamente la *ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico*.

- (b) Sea  $\Phi_n(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi_n(t), \omega\}$ . Dado que se cumple

$$\varphi_n'' + (2n + 1 - t^2)\varphi_n = 0 ,$$

se puede demostrar que  $\Phi_n(\omega)$  satisface

$$\Phi_n''(\omega) + (2n + 1 - \omega^2)\Phi_n(\omega) = 0 , \quad (12.13)$$

es decir, la misma ecuación diferencial que  $\varphi_n(t)$ . En otras palabras, la transformada de Fourier de  $\varphi_n(t)$  es esencialmente ella misma.

## 12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite

Consideremos la ecuación de Hermite (12.8), pero generalicémosla ligeramente:

$$y'' - 2ty' + 2\beta y = 0 . \quad (12.14)$$

Busquemos soluciones con un cierto desarrollo de Taylor:

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu} . \quad (12.15)$$

Reemplazando en (12.14):

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} [a_{\nu+2}(\nu+2)(\nu+1) - 2a_{\nu}\nu + 2\beta a_{\nu}] t^{\nu} &= 0 , \\ 2\beta a_{\nu} - 2\nu a_{\nu} + a_{\nu+2}(\nu+1)(\nu+2) &= 0 , \quad \nu \geq 0 , \end{aligned}$$

es decir, obtenemos una relación de recurrencia para los coeficientes de la serie:

$$a_{\nu+2} = \frac{2(\nu - \beta)}{(\nu+1)(\nu+2)} a_{\nu} . \quad (12.16)$$

Se desprenden las siguientes consecuencias:

- a) Hay dos series independientes, la de coeficientes con índice par, que depende sólo de  $a_0$ , y la de coeficientes con índice impar, que depende sólo de  $a_1$ . Por tanto, hay dos coeficientes arbitrarios,  $a_0$  y  $a_1$ , y por ende dos soluciones linealmente independientes.

b)

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu}} = \frac{2(\nu - \beta)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \simeq \frac{2}{\nu} \quad \text{si } \nu \gg 1,$$

lo cual significa que el radio de convergencia de la serie es infinito. Vale decir, las soluciones no tienen singularidades en el plano.

- c) La ecuación tiene por solución un polinomio sólo si  $\beta \in \mathbb{N}^*$ . Si  $\beta$  es par, hay que tomar  $a_0 \neq 0$  y  $a_1 = 0$ . Si  $\beta$  es impar, hay que tomar  $a_0 = 0$  y  $a_1 \neq 0$ .
- d) Si  $\beta \notin \mathbb{N}^*$ , y si la solución es par o impar, entonces  $(\nu - \beta)/[(\nu + 1)(\nu + 2)] > 0$  desde cierto  $\nu_0$  en adelante, de modo que los  $a_{\nu}$  tienen todos el mismo signo para  $\nu > \nu_0$ . Esto es, la serie tiene un crecimiento rápido cuando  $t \rightarrow \infty$ .

# Capítulo 13

## Polinomios de Laguerre

versión final 3.2-13 enero 2003

### 13.1. Definición

**Definición 13.1** Definimos el conjunto de los polinomios de Laguerre  $\{L_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$  mediante una cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = (-1)^n t^n + \cdots + n! , \quad (13.1a)$$

$$L_n(t) = e^t \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \left( \frac{d^{n-\nu} t^n}{dt^{n-\nu}} \right) \frac{d^\nu e^{-t}}{dt^\nu} , \quad (13.1b)$$

$$L_n(t) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{n!}{\nu!} t^\nu = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{n! n!}{(n-\nu)! (\nu!)^2} t^\nu . \quad (13.1c)$$

Algunos de los polinomios en forma explícita:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1 \\ L_1(t) &= -t + 1 \\ L_2(t) &= t^2 - 4t + 2 \\ L_3(t) &= -t^3 + 9t^2 - 18t + 6 \\ L_4(t) &= t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24 \\ &\vdots \end{aligned}$$

### 13.2. Función generatriz

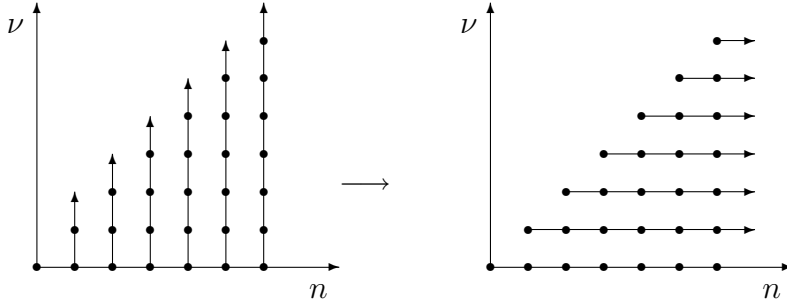
**Definición 13.2** La función generatriz  $\Psi(t, x)$  está definida por la siguiente relación:

$$\Psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n . \quad (13.2)$$

Usando (13.1c) obtenemos:

$$\Psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \binom{n}{\nu} t^{\nu} x^n$$

Cambiamos el orden de suma. El primer gráfico corresponde a la forma en que estábamos sumando: fijamos un  $n$  en el eje horizontal, con  $n = 1, \dots, \infty$  y luego consideramos los  $\nu$  variando desde 1 a  $n$  (flechas verticales hacia arriba). El segundo corresponde a la misma suma pero hecha de forma diferente: fijamos un  $\nu$  en el eje vertical, con  $\nu = 1, \dots, \infty$  y luego consideramos los  $n$  variando desde  $\nu$  a  $\infty$  (flechas horizontales hacia la derecha).



Obtenemos

$$\Psi(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} t^{\nu} \binom{n}{\nu} x^n .$$

Haciendo el cambio de índice  $m = n - \nu$ :

$$\Psi(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} t^{\nu} \binom{m+\nu}{\nu} x^{m+\nu} .$$

Reordenando

$$\Psi(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} t^{\nu} x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\nu}{\nu} x^m .$$

Pero

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\nu}{\nu} x^m = \left( \frac{1}{1-x} \right)^{\nu+1} \quad \text{cuando } |x| < 1 ,$$

luego

$$\Psi(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} t^{\nu} \left( \frac{x}{1-x} \right)^{\nu} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \left( \frac{tx}{1-x} \right)^{\nu} .$$

Finalmente

$$\boxed{\Psi(t, x) = \frac{1}{1-x} \exp \left( \frac{-tx}{1-x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n} \quad (13.3)$$

### 13.3. Relaciones de recurrencia

Reescribamos la definición de la función generatriz

$$\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n . \quad (13.4)$$

Derivemos respecto a  $x$ :

$$\frac{-t}{(1-x)^2} \exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(t)}{(n-1)!} x^{(n-1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n .$$

Usando (13.4) y comparando coeficientes de  $x$ ,

$$\boxed{L_{n+1}(t) + (t - 2n - 1)L_n(t) + n^2 L_{n-1}(t) = 0} \quad (13.5)$$

De la misma manera, derivando (13.4) respecto a  $t$ , se obtiene

$$\boxed{L'_n(t) - n L'_{n-1}(t) + n L_{n-1}(t) = 0} \quad n \geq 1 . \quad (13.6)$$

### 13.4. Ecuación de Laguerre

Diferenciando dos veces (13.4) respecto a  $t$ ,

$$L''_{n+2}(t) + (t - 2n - 3)L''_{n+1}(t) + (n+1)^2 L''_n(t) + 2L'_{n+1}(t) = 0 . \quad (13.7)$$

De (13.6) tenemos

$$L'_{n+1}(t) = (n+1) [L'_n(t) - L_n(t)] , \quad (13.8)$$

de donde obtenemos, derivando nuevamente,

$$L''_{n+1}(t) = (n+1) [L''_n(t) - L'_n(t)] . \quad (13.9)$$

Cambiando  $n \rightarrow n+1$ ,

$$L''_{n+2}(t) = (n+2) [L''_{n+1}(t) - L'_{n+1}(t)] .$$

Usando (13.8) y (13.9),

$$\begin{aligned} L''_{n+2}(t) &= (n+2)(n+1) [L''_n(t) - L'_n(t) - L'_n(t) + L_n(t)] , \\ L''_{n+2}(t) &= (n+2)(n+1) [L''_n(t) - 2L'_n(t) + L_n(t)] . \end{aligned} \quad (13.10)$$

Reemplazando (13.8), (13.9) y (13.10) en (13.7),

$$\begin{aligned} &(n+2)(n+1) [L''_n(t) - 2L'_n(t) + L_n(t)] + (t - 2n - 3)(n+1) [L''_n(t) - L'_n(t)] \\ &\quad + (n+1)^2 L''_n(t) + 2(n+1) [L'_n(t) - L_n(t)] = 0 \\ &(n+1) (n+2+t-2n-3+n+1) L''_n(t) + (n+1) (2n-4-t+2n+3+2) L'_n(t) \\ &\quad + (n+1) (n+2-2) L_n(t) = 0 \\ &(n+1) t L''_n(t) + (n+1) (1-t) L'_n(t) + (n+1)n L_n(t) = 0 . \end{aligned}$$

Dividiendo por  $(n + 1)$  obtenemos

$$\boxed{t L_n''(t) + (1 - t) L_n'(t) + n L_n(t) = 0} \quad (13.11)$$

Es decir,  $L_n(t)$  es una solución de la *ecuación de Laguerre*

$$\boxed{t y''(t) + (1 - t) y'(t) + n y(t) = 0} . \quad (13.12)$$

Consideremos esta ecuación, pero en una forma más general:

$$t y''(t) + (1 - t) y'(t) + \lambda y(t) = 0 .$$

Buscando soluciones del tipo

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu} ,$$

es fácil demostrar que los  $a_{\nu}$  satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{\nu+1} = \frac{\nu - \lambda}{(\nu + 1)^2} a_{\nu} .$$

Lo anterior tiene varias consecuencias:

- (i) El coeficiente  $a_0$  puede elegirse libremente, quedando  $a_1, a_2, \dots$  así determinados por  $a_0$ . Se obtiene un espacio de soluciones de dimensión uno. Para encontrar la otra solución linealmente independiente hay que analizar ecuaciones del tipo

$$f'' + p(z)f' + q(z)f = 0 .$$

Esto se hará en el capítulo siguiente.

- (ii) Al hacer el cociente entre los coeficientes tenemos

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \frac{1}{\nu} .$$

Esto implica radio de convergencia infinito para la serie.

- (iii) Los valores  $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$  son excepcionales: dan soluciones polinomiales.
- (iv) Si  $\lambda \notin \mathbb{N}^0$  todos los coeficientes de índice suficientemente grande son positivos o negativos. Esto implica un crecimiento muy rápido.

## 13.5. Ortogonalidad

Consideremos

$$I = \int_0^{\infty} t^m L_n(t) e^{-t} dt , \quad \text{con } m < n .$$

Sea  $m > 0$ , entonces

$$I = \int_0^\infty t^m \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) dt ,$$

integrando por partes,

$$t^m \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^n e^{-t}) \Big|_0^\infty - m \int_0^\infty t^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^n e^{-t}) dt .$$

Integrando  $n$  veces por partes se obtiene entonces

$$I = (-1)^n m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} (t^n e^{-t}) dt .$$

Si  $m < n$ ,

$$I = (-1)^n m! \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} (t^n e^{-t}) \Big|_0^\infty = 0 ,$$

luego

$$\int_0^\infty L_n(t) L_m(t) e^{-t} dt = 0 \quad \text{si } m < n .$$

Por simetría la integral va a ser nula siempre que  $m \neq n$ .

Si  $m = n$ ,

$$\int_0^\infty L_n^2(t) e^{-t} dt = (-1)^n (-1)^n n! \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = (n!)^2 .$$

Resumiendo ambos casos,

$$\boxed{\int_0^\infty L_n(t) L_m(t) e^{-t} dt = (n!)^2 \delta_{nm}} \quad (13.13)$$

Basados en la relación de ortogonalidad (13.13) podemos definir un conjunto de funciones

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t) e^{-t/2} . \quad (13.14)$$

Claramente

$$\int_0^\infty \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \delta_{nm} .$$

Es decir, el conjunto  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$  corresponde a un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo  $[0, \infty)$ .

A partir de (13.14) podemos despejar los polinomios de Laguerre

$$L_n(t) = n! e^{t/2} \varphi_n(t) ,$$

y usando la ecuación diferencial (13.11) que satisfacen, encontramos la ecuación para las funciones  $\varphi_n(t)$ :

$$t \varphi_n''(t) + \varphi_n'(t) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right) \varphi_n(t) = 0 . \quad (13.15)$$

Además,  $\varphi_n(t)$  satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_n(t) < \infty .$$

## 13.6. Polinomios asociados de Laguerre

Al diferenciar  $m$  veces la ecuación (13.11) obtenemos

$$t L_n^{(m+2)}(t) + (m+1-t) L_n^{(m+1)}(t) + (n-m) L_n^{(m)}(t) = 0 .$$

Podemos definir un nuevo conjunto de polinomios

$$\boxed{L_n^m(t) = \frac{d^m}{dt^m} L_n(t)} \quad \text{para } n \geq m , \quad (13.16)$$

conocidos como los *polinomios asociados de Laguerre*. Los cuales son soluciones de la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{t y''(t) + (m+1-t) y'(t) + (n-m) y(t) = 0 .} \quad (13.17)$$

Algunos de los primeros polinomios son:

$$\begin{aligned} L_1^1 &= -1 , \\ L_2^1 &= -4 + 2t , & L_2^2 &= 2 , \\ L_3^1 &= -18 + 18t - 3t^2 , & L_3^2 &= 18 - 6t , & L_3^3 &= -6 . \end{aligned}$$

La función generatriz

$$\boxed{\Psi_m(t, x) = (-1)^m x^m \exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x)^{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{L_n^m(t)}{n!} x^n .} \quad (13.18)$$

Utilizando esta ecuación podemos obtener las relaciones de recurrencia

$$\frac{d}{dt} L_n^m(t) = L_n^{m+1}(t) , \quad (13.19)$$

$$L_{n+1}^m(t) + (t-2n-1)L_n^m(t) + m L_n^{m+1}(t) + n^2 L_{n-1}^m(t) = 0 , \quad (13.20)$$

$$L_n^m(t) - n L_{n-1}^m(t) + n L_{n-1}^{m-1}(t) = 0 . \quad (13.21)$$

Finalmente, en forma análoga a lo que hicimos con los polinomios de Laguerre podemos definir las funciones ortogonales a partir de los polinomios asociados de Laguerre de la siguiente forma:

$$R_{n\ell}(t) \equiv e^{-t/2} t^\ell L_{n+\ell}^{2\ell+1}(t) . \quad (13.22)$$

Estas funciones satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{dy(t)}{dt} - \left( \frac{1}{4} - \frac{n}{t} + \frac{\ell(\ell+1)}{t^2} \right) y(t) = 0 . \quad (13.23)$$

Esta ecuación aparece en Mecánica Cuántica al resolver el átomo de Hidrógeno. Específicamente, corresponde a la ecuación radial de Schrödinger para la función de onda del átomo de Hidrógeno.



# Capítulo 14

## El problema de Sturm-Liouville

versión final 1.1-13 enero 2003

Una gran cantidad de problemas físicos están descritos por ecuaciones diferenciales en las que interviene un operador Laplaciano (la ecuación de Laplace, la ecuación de onda, la ecuación de Schrödinger, etc.). Matemáticamente, estas ecuaciones corresponden a casos particulares del *problema de Sturm-Liouville*, vale decir, ecuaciones de autovalores para un operador diferencial autoadjunto. Las propiedades que demostramos en general para los polinomios ortogonales (Cap. 11), y reencontramos en dos casos particulares (Caps. 12 y 13), son en realidad propiedades generales de las soluciones de problemas de Sturm-Liouville, como veremos en este capítulo.

### 14.1. Operadores diferenciales auto-adjuntos

Consideremos el operador diferencial  $\mathcal{L}$  de la forma:

$$\mathcal{L}u(x) = \left[ p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_2(x) \right] u(x) , \quad (14.1)$$

donde  $u(x)$  es una función compleja dos veces diferenciable, y los  $\{p_j(x)\}$  son funciones reales que cumplen:

- $p_0''(x)$ ,  $p_1'(x)$ ,  $p_2(x)$  existen y son continuas en  $[a, b]$ .
- $p_0(x)$  no tiene ceros en  $(a, b)$ .

$p_0(x)$  puede (y suele) tener ceros en los extremos del intervalo, y el intervalo  $[a, b]$  podría ser semi-infinito o infinito.

Consideremos una segunda función derivable dos veces,  $v(x)$ . Definimos

$$\langle v | \mathcal{L} | u \rangle \equiv \langle v, \mathcal{L}u \rangle = \int_a^b dx v^*(x) \mathcal{L}u(x) . \quad (14.2)$$

Integrando por partes y usando la continuidad de  $p_0'(x)$  y  $p_1(x)$ ,

$$\int_a^b dx v^*(x) p_1(x) u'(x) = \left. v^*(x) u(x) p_1(x) \right|_a^b - \int_a^b dx u(x) [v^*(x) p_1(x)]' ,$$

y

$$\begin{aligned} \int_a^b dx v^*(x) p_0(x) u''(x) &= \left. v^*(x) u'(x) p_0(x) \right|_a^b - \int_a^b dx u'(x) [v^*(x) p_0(x)]' \\ &= \left. \{v^*(x) u'(x) p_0(x) - u(x) [v^*(x) p_0(x)]'\} \right|_a^b + \int_a^b dx u(x) [v^*(x) p_0(x)]'' . \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle v | \mathcal{L} | u \rangle &= \int_a^b dx u(x) \overline{\mathcal{L}} v^*(x) \\ &+ \left. \{u(x) v^*(x) [p_1(x) - p_0'(x)] + p_0(x) [u'(x) v^*(x) - u(x) v^{*'}(x)]\} \right|_a^b , \quad (14.3) \end{aligned}$$

donde

$$\overline{\mathcal{L}} u(x) = \frac{d^2}{dx^2} [p_0(x) u(x)] - \frac{d}{dx} [p_1(x) u(x)] + p_2(x) u(x) , \quad (14.4a)$$

$$\overline{\mathcal{L}} u(x) = \left\{ p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + [2p_0'(x) - p_1(x)] \frac{d}{dx} + [p_2(x) - p_1'(x) + p_0''(x)] \right\} u(x) \quad (14.4b)$$

es el *operador adjunto* a  $\mathcal{L}$ .

Si

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} , \quad (14.5)$$

decimos que  $\mathcal{L}$  es *autoadjunto*.

Comparando (14.1) y (14.4), se sigue que  $\mathcal{L}$  es autoadjunto si y sólo si

$$2p_0'(x) - p_1(x) = p_1(x)$$

y

$$[p_1(x) - p_0'(x)]' = 0 ,$$

es decir, si

$$p_0'(x) = p_1(x) . \quad (14.6)$$

Muchos problemas interesantes corresponden a operadores auto-adjuntos; por ejemplo, el oscilador armónico simple, mientras que otros, como las ecuaciones de Hermite y Laguerre, no. Sin embargo la teoría de operadores diferenciales auto-adjuntos de segundo orden es completamente general, pues cualquier operador de segundo orden puede ser transformado a una forma auto-adjunta. En efecto, puesto que  $p_0(x)$  no tiene ceros en  $(a, b)$ , consideremos

$$h(x) = \frac{1}{p_0(x)} \exp \left[ \int_{x_0}^x dt \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right] ,$$

y definamos

$$\begin{aligned} \overline{p}_0(x) &= h(x) p_0(x) , \\ \overline{p}_1(x) &= h(x) p_1(x) . \end{aligned}$$

Entonces

$$\overline{p_0}'(x) = \frac{d}{dx} \exp \left[ \int_{x_0}^x dt \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right] = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \exp \left[ \int_{x_0}^x dt \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right] = \overline{p_1}(x) ,$$

es decir,  $h(x)\mathcal{L}$  es autoadjunto.

Usando (14.6), y definiendo  $A(x) = p_0(x)$ ,  $B(x) = p_2(x)$ , se sigue que todo operador autoadjunto se puede escribir en la forma:

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{d}{dx} \left[ A(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + B(x)u(x) . \quad (14.7)$$

Además, para operadores auto-adjuntos (14.3) queda

$$\langle v | \mathcal{L} | u \rangle = \int_a^b dx u(x) \overline{\mathcal{L}v^*(x)} + A(x) [u'(x)v^*(x) - u(x)v^{*'}(x)] \Big|_a^b . \quad (14.8)$$

## 14.2. Operadores autohermíticos

Limitémonos ahora a un subespacio  $\mathcal{H}$  de nuestro espacio de funciones, en el cual se cumple

$$A(x) \frac{du(x)}{dx} v^*(x) \Big|_{x=a} = A(x) \frac{du(x)}{dx} v^*(x) \Big|_{x=b} , \quad \forall u, v \in \mathcal{H} . \quad (14.9)$$

Es inmediato mostrar que  $\mathcal{H}$  es un espacio vectorial.

Entonces, de (14.8) se sigue que, si  $u(x), v(x) \in \mathcal{H}$ , y si  $\mathcal{L}$  es autoadjunto, entonces

$$\langle v, \mathcal{L}u \rangle = \int_a^b dx u(x) \mathcal{L}v(x) = \langle \mathcal{L}v, u \rangle . \quad (14.10)$$

Se dice entonces que  $\mathcal{L}$  es *autohermítico* en  $\mathcal{H}$ .

## 14.3. Problema de autovalores

Sea  $w(x)$  una función real positiva, la cual a lo más puede tener ceros aislados en  $[a, b]$  (*función de peso*). Consideremos la ecuación

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0 , \quad \lambda \in \mathbb{C} , \quad (14.11)$$

con determinadas condiciones de borde (en este caso, nos interesarán las condiciones que determinan el subespacio  $\mathcal{H}$ ). Las soluciones de (14.11), debido precisamente a las condiciones de borde, no existen para todo  $\lambda$ , sino para cierto número discreto  $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , asociados a ciertas funciones  $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Los  $\lambda_i$  se denominan *autovalores* y las funciones asociadas  $u_i$ , *autofunciones*.

Se pueden mostrar las siguientes propiedades:

**Proposición 14.1** Los autovalores de un operador autohermítico son reales.

**Demostración** Sean  $\lambda_j, \lambda_k$  autovalores asociados a autofunciones  $u_j(x), u_k(x)$ , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_j(x) + \lambda_j w(x)u_j(x) &= 0, \\ \mathcal{L}u_k^*(x) + \lambda_k^* w(x)u_k^*(x) &= 0.\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $u_k^*(x)$  e integrando en  $[a, b]$ :

$$\langle u_k, \mathcal{L}u_j \rangle + \lambda_j \int_a^b dx u_k^*(x)w(x)u_j(x) = 0.$$

Haciendo algo similar con la segunda ecuación, pero multiplicando por  $u_j^*(x)$ ,

$$\langle \mathcal{L}u_k, u_j \rangle + \lambda_k \int_a^b dx u_j(x)w(x)u_k^*(x) = 0.$$

Restando ambas expresiones, y usando (14.10),

$$(\lambda_j - \lambda_k^*) \int_a^b u_k^*(x)w(x)u_j(x) = 0. \quad (14.12)$$

Ahora, si  $j = k$ ,

$$0 = (\lambda_j - \lambda_j^*) \int_a^b |u_j(x)|^2 w(x).$$

Como  $w(x) \geq 0$ , existen soluciones  $u_j(x)$  no triviales si sólo si

$$\lambda_j = \lambda_j^*,$$

es decir,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ .

q.e.d.

**Proposición 14.2** Las autofunciones de un operador autohermítico se pueden elegir ortogonales entre sí.

**Demostración** Si escogemos ahora  $\lambda_j \neq \lambda_k$ , entonces de (14.12) se sigue que

$$0 = \int_a^b dx u_k^*(x)w(x)u_j(x),$$

es decir  $u_k(x)$  y  $u_j(x)$  son ortogonales con función de peso  $w(x)$ . (Incidentalmente, vemos que la generalización del producto interno introducida en (11.1) emerge naturalmente al considerar el problema de autovalores de un operador autohermítico.)

Por lo tanto, autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales. Sin embargo, puede ocurrir que más de una autofunción esté asociada al mismo autovalor, es decir, que un

autovalor sea *degenerado*. Es fácil mostrar que las funciones asociadas a un mismo autovalor forman un espacio vectorial. En efecto, si  $u_{j,1}(x)$ ,  $u_{j,2}$  están asociadas al autovalor  $\lambda_j$ , se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_{j,1} + \lambda_j w(x)u_{j,1} &= 0 , \\ \mathcal{L}u_{j,2} + \lambda_j w(x)u_{j,2} &= 0 .\end{aligned}$$

Entonces una combinación lineal de ellas también es autofunción de  $\mathcal{L}$  con el mismo autovalor:

$$\mathcal{L} \sum_{\alpha=1,2} u_{j,\alpha} + \lambda_j w(x) \sum_{\alpha=1,2} u_{j,\alpha} = \sum_{\alpha=1,2} [\mathcal{L}u_{j,\alpha} + \lambda_j w(x)u_{j,\alpha}] = 0 .$$

Por lo tanto, es posible encontrar una base ortogonal del subespacio asociado a  $\lambda_j$  (vía Gram-Schmidt). Procediendo así con todos los subespacios de degeneración, podemos finalmente construir una base ortogonal para el espacio de funciones completo.

q.e.d.

**Proposición 14.3** Las autofunciones de un operador autohermítico forman una base del espacio  $\mathcal{H}$ .

**Demostración** (Discusión)

La completitud de un conjunto de funciones usualmente se determina comparando con una serie de Laurent. Por ejemplo, para polinomios ortogonales, es posible encontrar una expansión polinomial para cada potencia de  $z$ :

$$z^n = \sum_{i=0}^n a_i P_i(z) ,$$

donde  $P_i(z)$  es el  $i$ -ésimo polinomio. Una función  $f(z)$  se puede entonces expandir en una serie de Laurent, y en definitiva en una combinación lineal de los polinomios  $P_i(z)$ . Así, podemos mostrar que la expansión polinomial existe y que es única. La limitación de este desarrollo en serie de Laurent es que  $f(z)$  debe ser analítica. Las funciones pueden ser más generales que eso (recordemos la expansión de la función “dientes de sierra” en series de Fourier, por ejemplo). Una demostración de que nuestras autofunciones de problemas de Sturm-Liouville son completas aparece en el libro de Courant y Hilbert [R. Courant y D. Hilbert, “*Métodos de la Física Matemática*”, Vol. 1, Cap. 6, Sec. 3].

q.e.d.

## 14.4. Ejemplos de funciones ortogonales

Distintas elecciones del operador diferencial  $\mathcal{L}$  (es decir, de las funciones  $A(x)$  y  $B(x)$  en (14.7), de la función de peso  $w(x)$  en el problema de autovalores asociado, y del intervalo  $[a, b]$  que determina las condiciones de borde (14.9), generan diversas funciones especiales. Algunas de ellas, de interés en problemas físicos, aparecen en la siguiente tabla:

Función	$A(x)$	$B(x)$	$w(x)$	$a$	$b$	$\lambda$	Fórmula generatriz
Legendre (polinomios)	$1 - x^2$	0	1	-1	1	$l(l+1)$	$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l$
Legendre (asociados)	$1 - x^2$	$\frac{-m^2}{1-x^2}$	1	-1	1	$l(l+1)$	$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x)$
Chebyshev I (polinomios)	$\sqrt{1 - x^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	-1	1	$n^2$	$T_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1 - x^2)^{n-\frac{1}{2}}$
Chebyshev II (polinomios)	$(1 - x^2)^{3/2}$	0	$\sqrt{1 - x^2}$	-1	1	$n(n+2)$	$U_n(x) = \frac{(n+1)}{(2n+1)!! \sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1 - x^2)^{n+\frac{1}{2}}$
Gegenbauer (ultraesféricas)	$(1 - x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}$	0	$(1 - x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$	-1	1	$n(n+2\alpha)$	$C_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}+n)(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^n n! \Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(2\alpha+n)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1 - x^2)^{\alpha+n-\frac{1}{2}}$
Laguerre (polinomios)	$xe^{-x}$	0	$e^{-x}$	0	$\infty$	$n$	$L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x})$
Laguerre (asociados)	$x^{k+1} e^{-x}$	0	$x^k e^{-x}$	0	$\infty$	$n - k$	$L_n^{(m)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m L_n(x)$
Hermite (polinomios)	$e^{-x^2}$	0	$e^{-x^2}$	$-\infty$	$\infty$	$2n$	$H_n(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$
Bessel <sup>a</sup>	$x$	$-\frac{\alpha}{x}$	$x$	0	1	$a_\nu^2$	$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\frac{1}{2}x}{\alpha+\frac{1}{2}}\right)^\alpha \int_{-1}^1 dt (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)$

<sup>a</sup>Las relaciones de ortogonalidad de las funciones de Bessel son atípicas: debemos reemplazar  $J_\alpha(x)$  por  $J_\alpha(xa_\nu)$  en la ecuación diferencial, con  $J_\alpha(a_\nu) = 0$ , cumpliéndose

$$\int_0^1 dx x J_\alpha(a_\mu x) J_\alpha(a_\nu x) = \text{cte.} \cdot \delta_{a_\mu, a_\nu}.$$

Ver capítulo (19).

# Capítulo 15

## Ecuaciones diferenciales con singularidades

versión final 1.0-13 enero 2003

La ecuación de Laplace —que aparece naturalmente en problemas de electrostática o Mecánica Cuántica, por ejemplo— se puede resolver por separación de variables, y esto da, para la parte radial, la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{QR}{r^2} ,$$

donde  $k$  y  $Q$  son constantes. Ésta es una ecuación diferencial con coeficientes que no sólo no son constantes, sino que son singulares (en  $r = 0$ ). Muchos otros problemas dan origen a ecuaciones que son también de la forma

$$f''(z) + p(z)f'(z) + q(z)f(z) = 0 . \quad (15.1)$$

El problema de encontrar soluciones a este tipo de problemas es complejo. El estudio de las singularidades de  $p(z)$  y  $q(z)$  es útil pues permite clasificar las ecuaciones diferenciales, e investigar la factibilidad de encontrar soluciones vía expansión en serie (Teorema de Fuchs). En este capítulo veremos nociones útiles para trabajar con este tipo de ecuaciones; los aspectos formales de esta discusión se encuentran en el capítulo siguiente.

### 15.1. Puntos singulares

Consideremos ecuaciones diferenciales de la forma (15.1).

Algunas definiciones útiles:

1.  $z_0$  es un *punto ordinario* si  $p(z_0)$  y  $q(z_0)$  son finitas.
2.  $z_0$  es un *punto singular* si  $p(z)$  o  $q(z)$ , o ambas, divergen si  $z \rightarrow z_0$ .
3.  $z_0$  es un punto regular o singular no esencial si  $p(z)$  o  $q(z)$  divergen si  $z \rightarrow z_0$ , pero  $(z - z_0)p(z)$  y  $(z - z_0)^2 q(z)$  son finitas cuando  $z \rightarrow z_0$ .

4.  $z_0$  es una singularidad irregular o esencial si  $(z - z_0)p(z)$  o  $(z - z_0)^2q(z)$  divergen si  $z \rightarrow z_0$ . Es decir, si  $p(z)$  diverge más rápido que  $1/(z - z_0)$ , o  $q(z)$  diverge más rápido que  $1/(z - z_0)^2$ .

Estas definiciones son válidas para todo valor finito de  $z$ . El punto  $z \rightarrow \infty$  se trata introduciendo el cambio de variables  $s = 1/z$ , y luego haciendo  $s \rightarrow 0$ . Con dicho cambio de variables, (15.1) queda

$$s^4 \frac{d^2 \bar{f}}{ds^2} + \left[ 2s^3 - s^2 p \left( \frac{1}{s} \right) \right] \frac{d\bar{f}}{ds} + q \left( \frac{1}{s} \right) \bar{f} = 0 . \quad (15.2)$$

con  $\bar{f}(s) = f(z) = f(1/s)$ . Luego, el comportamiento en  $z = \infty$  ( $s = 0$ ) está dado por el comportamiento de los nuevos coeficientes

$$\bar{p}(s) = \frac{2s - p(1/s)}{s^2} , \quad \bar{q}(s) = \frac{q(1/s)}{s^4} . \quad (15.3)$$

Si son finitos,  $z = \infty$  es un punto ordinario. Si divergen como  $1/s$  y  $1/s^2$  o más lentamente, respectivamente,  $z = \infty$  es punto singular regular; si no, es un punto singular irregular o esencial.

**Ejemplo** La ecuación de Bessel,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 , \quad (15.4)$$

sólo tiene una singularidad regular en  $x = 0$ , y una singularidad irregular o esencial en  $x = \infty$ .

## 15.2. Solución por serie: método de Frobenius

El método de expansión en serie permite encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden. Siempre será posible encontrar una solución con este método, siempre que la serie corresponda a una expansión en torno a un punto que sea ordinario o punto singular regular.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación del oscilador armónico:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 . \quad (15.5)$$

Introduzcamos una solución de la forma

$$y(x) = x^k \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda} , \quad a_0 \neq 0 . \quad (15.6)$$

Ya hicimos algo similar al estudiar las ecuaciones de Hermite y Laguerre en los capítulos anteriores. En esos casos,  $k = 0$ . Ahora nos interesa el caso general. De hecho,  $k$  no necesariamente



es un número entero. Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(k+\lambda)x^{k+\lambda+1}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2},\end{aligned}$$

de modo que, reemplazando en (15.5), se tiene

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2} + \omega^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}x^{k+\lambda} = 0. \quad (15.7)$$

Esta igualdad implica que cada coeficiente, para todas las potencias de  $x$ , debe anularse. En particular, el coeficiente de la menor potencia de  $x$ ,  $x^{k-2}$ :

$$a_0 k(k-1) = 0.$$

Puesto que  $a_0$  es el menor coeficiente no nulo de la serie,

$$k(k-1) = 0. \quad (15.8)$$

Esta ecuación, que proviene de anular el coeficiente de la menor potencia de  $x$  en (15.7), se denomina *ecuación indicial*. Sus raíces son de gran importancia para nuestro análisis. Para el oscilador armónico, las raíces de la ecuación indicial son

$$k = 0, \quad k = 1. \quad (15.9)$$

Por otro lado, de (15.7) se sigue, al anular el coeficiente de  $x^{k+j}$ , con  $j = \lambda + 2$ , la relación de recurrencia

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(k+j+2)(k+j+1)}. \quad (15.10)$$

Como en el caso de la ecuación de Hermite, esta relación de recurrencia determina o sólo los términos pares, o sólo los impares, de modo que hay dos coeficientes arbitrarios,  $a_0$  y  $a_1$ .

Ahora bien, volviendo a las raíces de la ecuación indicial, si  $k = 0$ , entonces el coeficiente de  $x^{k-2}$  en (15.7) se anula, y así  $a_0 \neq 0$ . Al mismo tiempo, el coeficiente de la siguiente potencia de  $x$ ,  $x^{k-1}$ , es

$$a_1(k+1)k = 0,$$

que también se satisface si  $k = 0$ . Por tanto, en este caso ambos coeficientes son arbitrarios. Para  $k = 1$ , en tanto, el coeficiente de  $x^{k-2}$  es cero, pero el de  $x^{k-1}$  no es cero a menos que  $a_1 = 0$ . Como  $a_1$  es arbitrario si  $k = 0$ , y necesariamente cero si  $k = 1$ , escojamos  $a_1 = 0$ . De este modo, todos los coeficientes impares de la serie desaparecen. (En principio podemos temer pérdida de soluciones, pero el objetivo aquí es encontrar al menos una solución; de todos modos, los términos impares reaparecerán al considerar la segunda raíz de la ecuación indicial.)

Tomando entonces  $k = 0$ , la relación de recurrencia queda

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+2)(j+1)} ,$$

es decir,

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} = -\frac{\omega^2}{2!} a_0 , \\ a_4 &= -a_2 \frac{\omega^2}{3 \cdot 4} = \frac{\omega^4}{4!} a_0 , \\ a_6 &= -a_4 \frac{\omega^2}{5 \cdot 6} = -\frac{\omega^6}{6!} a_0 , \end{aligned}$$

etc@. Podemos ver entonces (y mostrar por inducción) que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0 , \quad (15.11)$$

y la solución es

$$\begin{aligned} y(x)_{k=0} &= a_0 \left[ 1 - \frac{(\omega x)^2}{2!} + \frac{(\omega x)^4}{4!} - \frac{(\omega x)^6}{6!} + \dots \right] \\ y(x)_{k=0} &= a_0 \cos(\omega x) . \end{aligned} \quad (15.12)$$

Con  $k = 1$ , en tanto, la relación de recurrencia es

$$a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+3)(j+2)} ,$$

es decir

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\omega^2}{2 \cdot 3} = -\frac{\omega^2}{3!} a_0 , \\ a_4 &= -a_2 \frac{\omega^2}{4 \cdot 5} = \frac{\omega^4}{5!} a_0 , \\ a_6 &= -a_4 \frac{\omega^2}{6 \cdot 7} = -\frac{\omega^6}{7!} a_0 , \end{aligned}$$

que conduce a

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0 . \quad (15.13)$$

Así,

$$\begin{aligned} y(x)_{k=1} &= a_0 x \left[ 1 - \frac{(\omega x)^2}{3!} + \frac{(\omega x)^4}{5!} - \frac{(\omega x)^6}{7!} + \dots \right] \\ &= \frac{a_0}{\omega} \left[ (\omega x) - \frac{(\omega x)^3}{3!} + \frac{(\omega x)^5}{5!} - \frac{(\omega x)^7}{7!} + \dots \right] \\ y(x)_{k=1} &= \frac{a_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega x) . \end{aligned} \quad (15.14)$$

Por supuesto, hemos obtenido dos soluciones linealmente independientes que no son ninguna sorpresa, pero el método de Frobenius es general y nos permite estudiar cualquier ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden. Sin embargo, obtener una solución como una expansión en serie no significa que dicha solución sea aceptable: eso depende de si converge o no, lo cual no está asegurado, y requiere un análisis separado.

En general, es posible usar este método expandiendo la solución en torno a un punto  $x_0$  arbitrario, en cuyo caso (15.6) es reemplazada por

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}(x - x_0)^{k+\lambda}, \quad a_0 \neq 0. \quad (15.15)$$

### 15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs

Para el oscilador armónico encontramos, mediante el método de Frobenius, las dos soluciones linealmente independientes que bastan para describir todo el espacio de soluciones. ¿Es siempre posible ello? La respuesta es no. Ya sabemos un caso en el que no es posible: la ecuación de Laguerre (Sec. 13.4). Cuando introducimos una solución en la forma de una serie de Taylor, resultó una relación de recurrencia que determinaba todos los coeficientes en términos del primero, y por tanto el método de Frobenius en este caso permite encontrar sólo una solución. Más aún, ni siquiera está asegurado que, una vez determinados todos los coeficientes, la serie sea convergente. En el caso de la ecuación de Laguerre (13.12), a menos que la serie termine y sea en realidad un polinomio, la serie diverge.

¿Bajo qué condiciones es posible encontrar soluciones con el método de Frobenius? La respuesta a esta pregunta involucra a las raíces de la ecuación indicial y el grado de singularidad de los coeficientes en la ecuación diferencial. Consideremos, a modo de ilustración, las siguientes ecuaciones simples:

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = 0, \quad (15.16)$$

$$y'' - \frac{6}{x^3}y = 0, \quad (15.17)$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0, \quad (15.18)$$

$$y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0. \quad (15.19)$$

En el primer caso, la ecuación indicial es

$$k^2 - k - 6 = 0,$$

con soluciones  $k = 3$ ,  $k = -2$ . El método de Frobenius no da una relación de recurrencia, de modo que las dos soluciones son simplemente  $x^3$  y  $x^{-2}$ .

El segundo caso difiere del primero sólo en una potencia de  $x$  en el coeficiente de  $y$ , pero esto es suficiente para cambiar radicalmente la estructura del problema: la ecuación indicial resulta ser

$$-6a_0 = 0,$$

lo que es imposible pues  $a_0 \neq 0$ . Así, vemos que en el caso (15.16), con una singularidad regular en  $x = 0$ , el método de Frobenius da dos soluciones, pero simplemente no funciona para (15.17), que tiene una singularidad esencial en  $x = 0$ .

Si ahora agregamos un término con primera derivada en la forma (15.18), se obtiene la ecuación indicial

$$k^2 - a^2 = 0 ,$$

sin relación de recurrencia, de modo que las soluciones son  $x^a$  y  $x^{-a}$ .

Finalmente, si modificamos la ecuación anterior cambiando en 1 la potencia del coeficiente de  $y'$ , ejemplo (15.19), se tiene la ecuación indicial

$$k = 0 ,$$

que arroja sólo un valor de  $k$ , y la relación de recurrencia

$$a_{j+1} = a_j \frac{a^2 - j(j-1)}{j+1} .$$

A menos que  $a$  sea tal que la serie se corte para algún  $j$  (es decir, si  $a = \pm\sqrt{n(n-1)}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ), se tiene

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j(j+1)}{j+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} j = \infty ,$$

es decir, la solución por serie diverge para todo  $x \neq 0$ .

Nuevamente nuestra solución tiene problemas con singularidades esenciales.

En general se puede mostrar que al menos una solución en forma de serie de potencias se puede obtener, siempre que la expansión sea en torno a un punto ordinario o un punto singular regular. Este resultado constituye el *Teorema de Fuchs*. Una demostración de este teorema se encuentra en el Capítulo 16. Se mostrará también en ese Capítulo, y parcialmente en la siguiente sección, que la obtención de una o dos soluciones a partir del método de Frobenius depende de las raíces de la ecuación indicial:

- Si las dos raíces de la ecuación indicial son iguales, se obtiene sólo una solución. (Ej.: ecuación de Laguerre.)
- Si las dos raíces difieren en un número no entero, se obtienen dos soluciones linealmente independientes.
- Si las dos raíces difieren en un número entero, la mayor de ellas da una solución. La otra puede o no dar una solución dependiendo del comportamiento de los coeficientes. Para el oscilador armónico se obtienen dos soluciones; para la ecuación de Bessel (15.4), sólo una (Cap. 19).

En la siguiente sección desarrollaremos un método para encontrar una segunda solución linealmente independiente en el caso que el método de Frobenius no nos la proporcione.

## 15.4. Una segunda solución

### 15.4.1. Forma integral

Para una ecuación diferencial de segundo orden, el espacio de soluciones es un espacio vectorial de dimensión dos. Dos soluciones  $y_1$  y  $y_2$  serán linealmente dependientes si

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0 , \quad (15.20)$$

con  $k_i$  no todos cero. Inversamente, si  $k_1 = k_2 = 0$  es la única solución, entonces las soluciones son linealmente independientes. Derivando (15.20) ( $y_i$  es solución de una ecuación de segundo orden, así que al menos es una vez diferenciable):

$$k_1 y_1' + k_2 y_2' = 0 . \quad (15.21)$$

(15.20) y (15.21) son un conjunto de ecuaciones lineales, donde los coeficientes  $k_i$  son desconocidos. Este sistema tiene solución no nula si

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 . \quad (15.22)$$

$W(x)$  se denomina el *Wronskiano* de las funciones  $y_i$ . Si el Wronskiano es distinto de cero, entonces las funciones  $y_i$  son linealmente independientes. Si el Wronskiano es cero en un cierto intervalo, entonces las funciones  $y_i$  son linealmente dependientes en ese intervalo.

Así pues, supongamos que, por el método de Frobenius u otro, tenemos una solución  $y_1(x)$ . El problema es ahora encontrar una segunda solución  $y_2(x)$  tal que el Wronskiano de ambas sea distinto de cero. Primero es fácil mostrar (ver Cap. 16) que si la ecuación diferencial tiene la forma general

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 ,$$

entonces el Wronskiano de dos soluciones  $y_1, y_2$  es

$$W' = -p(x)W , \quad (15.23)$$

que podemos reescribir

$$\frac{dW}{W} = -p(x)dx ,$$

lo que tiene sentido pues deseamos que  $W \neq 0$ . Integrando en un intervalo  $[a, x]$ , para cierto  $a$ ,

$$\ln \frac{W(x)}{W(a)} = - \int_a^x p(x_1) dx_1 ,$$

o

$$W(x) = W(a) e^{-\int_a^x p(x_1) dx_1} . \quad (15.24)$$

Por otro lado,

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) , \quad (15.25)$$

de modo que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) = W(a) \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_a^x p(x_1) dx_1} .$$

Integrando ahora en  $[b, x]$ , para cierto  $b$ ,

$$y_2(x) = y_1(x)W(a) \int_b^x \frac{1}{[y_1(x_2)]^2} e^{-\int_a^{x_2} p(x_1) dx_1} dx_2 + y_1(x) \frac{y_2(b)}{y_1(b)} .$$

El segundo término, no entrega nueva información, pues es proporcional a la solución conocida, y no nos sirve para encontrar una linealmente independiente. Lo eliminamos entonces. Además,  $W(a)$  es una constante, y como de todos modos  $y_1(x)$  está determinada salvo una constante de normalización, ponemos  $W(a) = 1$ , quedando entonces

$$y_2(x) = y_1(x) \int_b^x \frac{1}{[y_1(x_2)]^2} e^{-\int_a^{x_2} p(x_1) dx_1} dx_2 . \quad (15.26)$$

Ésta es la segunda solución, linealmente independiente, que buscamos. Observemos que hemos omitido la evaluación en el límite inferior de las integrales. Al igual que antes, mantener el límite inferior contribuye con un término proporcional a la solución conocida  $y_1(x)$ .

**Ejemplo** Para el oscilador armónico,  $d^2y/dx^2 + y = 0$ , una solución es  $y_1 = \sin x$ , obteniéndose

$$y_2(x) = \sin x \int \frac{dx_2}{\sin^2 x_2} = \sin x (-\cot x) = -\cos x .$$

### 15.4.2. Expansión en serie

Podemos reescribir la segunda solución obtenida (15.26) usando expansiones en serie para  $y_1(x)$  y  $p(x)$ . De acuerdo al teorema de Fuchs, es posible encontrar una solución por serie  $y_1(x)$ , si  $x = 0$  no es singularidad esencial, y es de la forma

$$y_1(x) = x^\alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda , \quad (15.27)$$

con  $\alpha$  la mayor de las raíces de la ecuación indicial. Por su parte, este teorema exige que, a lo sumo,  $p(x)$  diverja como  $1/x$ , y  $q(x)$  como  $1/x^2$ , en  $x = 0$ , luego

$$p(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i , \quad (15.28)$$

$$q(x) = \sum_{i=-2}^{\infty} q_i x^i . \quad (15.29)$$

La ecuación indicial resulta ser:

$$k^2 + (p_{-1} - 1)k + q_{-2} = 0 . \quad (15.30)$$

Ésta tiene dos raíces, que podemos escribir

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha , \\ k_2 &= \alpha - n , \end{aligned} \quad (15.31)$$

con  $n$  entero (el único caso problemático es cuando las raíces difieren en un número entero). Entonces

$$(k - \alpha)(k - \alpha + n) = 0 , \quad (15.32)$$

Igualando coeficientes de  $k$  en (15.30) y (15.32), tenemos

$$p_{-1} - 1 = n - 2\alpha . \quad (15.33)$$

Reemplazando ahora (15.27) en (15.26),

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{e^{-\int_a^{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1}}{x_2^{2\alpha} \left( \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x_2^{\lambda} \right)^2} dx_2 . \quad (15.34)$$

En el término exponencial aparece la integral

$$\int_a^{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1 = p_{-1} \ln x_2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} + f(a) ,$$

con  $f$  cierta función. Luego

$$\exp \left( - \int_a^{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1 \right) = e^{-f(a)} x_2^{-p_{-1}} \exp \left( - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} \right) .$$

El denominador en (15.34) se puede reescribir en general:

$$\left[ x_2^{2\alpha} \left( \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x_2^{\lambda} \right)^2 \right]^{-1} = x_2^{-2\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\lambda} x_2^{\lambda} ,$$

para ciertos coeficientes  $b_{\lambda}$ . Así, despreciando factores constantes que pueden ser absorbidos en  $W(a)$ ,  $y_2(x)$  queda de la forma

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-p_{-1}-2\alpha} \left( \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} x_2^{\lambda} \right) dx_2 ,$$

es decir, con (15.33),

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-n-1} \left( \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda} x_2^{\lambda} \right) dx_2 ,$$

de modo que

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x (c_0 x_2^{-n-1} + c_1 x_2^{-n} + c_2 x_2^{n+1} + \cdots + c_n x_2^{-1} + \cdots) dx_2 . \quad (15.35)$$

Se aprecia entonces que la segunda solución es de la forma  $y_1(x)s(x)$ , con  $s(x)$  una función que tiene dos partes:

- Una serie de potencias, partiendo con  $x^{-n}$ .

- Un término logarítmico, proveniente de integrar  $x^{-1}$ .

El término logarítmico proviene del término con  $\lambda = n$  está presente sólo si  $\lambda = n$  en (15.4.2), de modo que aparece sólo si  $n$  es un entero, a menos que  $c_n$ , por casualidad, resulte ser cero.

Puesto que la menor potencia de  $y_1(x)$  es  $x^\alpha = x^{k_1}$ , se sigue que, obviando el término logarítmico, la menor potencia de  $y_2$  es  $x^{\alpha-n} = x^{k_2}$  (independiente de si  $n$  es entero o no). Así, podemos escribir la segunda solución (absorbiendo el coeficiente  $c_0$  en la normalización de  $y_1(x)$ ), en la forma

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + x^{k_2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda x^\lambda . \quad (15.36)$$

En otras palabras, si las dos raíces de la ecuación indicial difieren en un número no entero, las dos soluciones de la ecuación diferencial están dadas por el Ansatz del método de Frobenius, determinadas por las dos raíces de la ecuación indicial [(15.27) y (15.36), sin el término logarítmico]. Si las raíces difieren en un número entero, una primera solución está dada por el método de Frobenius, con la mayor de las raíces, y a la segunda solución se le agrega un término  $y_1(x) \ln(x)$ .



# Capítulo 16

## Ecuaciones diferenciales del tipo

$$f'' + p(z)f' + q(z)f = 0$$

versión final 3.4-13 enero 2003

En este Capítulo volveremos sobre algunos temas del anterior sobre ecuaciones diferenciales con singularidades (Cap. 15), ahora desde un punto de vista más formal.

### 16.1. Soluciones en puntos regulares

Consideremos la ecuación diferencial

$$f''(z) + p(z)f'(z) + q(z)f(z) = 0 . \quad (16.1)$$

Sea  $D$  una región en el plano complejo. Sean  $p(z)$  y  $q(z)$  holomorfas en  $D$ . Sea  $z_0 \in D$ . En este caso se puede eliminar el término en  $f'$  en (16.1). Para ello consideramos

$$f(z) = g(z)e^{-\frac{1}{2} \int_{z_0}^z p(z') dz'} \equiv g(z)E . \quad (16.2)$$

Puesto que

$$\begin{aligned} E' &= -\frac{1}{2}pE , \\ E'' &= \left(-\frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4}\right)E , \end{aligned}$$

(16.1) se puede reescribir:

$$f'' + pf' + qf = E \left( g'' + qg - \frac{p^2 g}{4} - \frac{p' g}{2} \right) = 0 ,$$

es decir

$$g''(z) + A(z)g(z) = 0 , \quad (16.3)$$

con

$$A(z) = q(z) - \frac{p(z)^2}{4} - \frac{p'(z)}{2} . \quad (16.4)$$

$A(z)$  será analítica y univalente en  $D$  si  $p$  y  $q$  lo son. Supongamos entonces que esto se satisface. Sea el origen  $0 \in D$ . Entonces, en torno a  $z = 0$ :

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} , \quad (16.5)$$

serie que tiene un cierto radio de convergencia  $r$ .

Planteamos para  $g(z)$  una solución de forma análoga:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k . \quad (16.6)$$

Reordenando las series:

$$A(z)g(z) = \sum_{lk} a_l c_k z^{l+k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\mu} c_{\nu-\mu} z^{\nu} .$$

(16.3) queda entonces

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ c_{\nu+2}(\nu+1)(\nu+2) + \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\mu} c_{\nu-\mu} \right] z^{\nu} = 0 ,$$

hallando la fórmula recursiva:

$$c_{\nu+2} = -\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\mu} c_{\nu-\mu} . \quad (16.7)$$

Es claro entonces que podemos elegir arbitraria e independientemente dos coeficientes,  $c_0$  y  $c_1$ .

Sea  $0 < \rho < r$ . Como  $\sum_{\mu=0}^{\infty} |a_{\mu}| \rho^{\mu}$  converge, entonces existe un  $M > 0$  tal que

$$|a_{\mu}| \rho^{\mu} < M . \quad (16.8)$$

Sea

$$N(k) = \max\{|c_0|, |c_1| \rho, \dots, |c_k| \rho^k\} , \quad (16.9)$$

es decir,

$$|c_{\mu}| \leq \frac{N(k)}{\rho^{\mu}} , \quad \mu = 0, 1, \dots, k .$$

Usando la relación de recurrencia (16.7):

$$c_{k+1} = -\frac{1}{k(k+1)} \sum_{\mu=0}^{k-1} c_{\mu} a_{k-1-\mu} ,$$

luego

$$\begin{aligned} |c_{k+1}| &< \frac{1}{k(k+1)} \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{N(k)}{\rho^\mu} \frac{M}{\rho^{k-1-\mu}} = \frac{1}{k(k+1)} \frac{N(k)}{\rho^{k-1}} M k \\ &< \frac{1}{\rho^{k+1}} \frac{N(k) \rho^2 M}{(k+1)} \end{aligned}$$

Luego

$$|c_{k+1}| \rho^{k+1} < \frac{M \rho^2}{(k+1)} N(k) < N(k) \quad \forall k \text{ suficientemente grande.}$$

Por tanto, desde cierto  $k_0$  en adelante,

$$N(k) = N(k+1) = N(k+2) = \dots = N,$$

o sea

$$|c_k| \rho^k \leq N, \quad k \geq k_0.$$

Con ello,

$$\left| \sum_{k=k_0}^{\infty} c_k z^k \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |c_k| |z|^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} |c_k| \rho^k \left( \frac{|z|}{\rho} \right)^k \leq N \sum_{k=k_0}^{\infty} \left( \frac{|z|}{\rho} \right)^k.$$

La última suma converge si  $|z| < \rho < r$ , luego  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  converge si  $|z| < r$ . Este resultado sugiere el siguiente teorema.

**Teorema 16.1 (Sin demostración)** Toda solución de  $f'' + p(z)f' + q(z)f = 0$  es analítica por lo menos allí donde los coeficientes  $p(z)$  y  $q(z)$  lo son.

**Definición 16.1** Dos funciones univalentes en  $D$  son *linealmente dependientes* (l.d.) si una es múltiplo de la otra en  $D$ , i.e.

$$\psi_1 = \lambda \psi_2.$$

Se dice que son *linealmente independientes* (l.i.) en  $D$  si en  $D$  ninguna es múltiplo de la otra.

**Teorema 16.2 (Sin demostración)** En un dominio  $D$  simplemente conexo, donde  $p(z)$  y  $q(z)$  son holomorfas, las soluciones forman un espacio de dimensión dos.

**Definición 16.2** El *Wronskiano* de dos soluciones de la ecuación (16.1) es

$$W(z) = W[\psi_1(z), \psi_2(z)] = \begin{vmatrix} \psi_1(z) & \psi_2(z) \\ \psi_1'(z) & \psi_2'(z) \end{vmatrix}. \quad (16.10)$$

Evaluemos  $W'$ :

$$\begin{aligned} W &= \psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' \\ W' &= \psi_1 \psi_2'' - \psi_2 \psi_1'' = \psi_1(-p\psi_2' - q\psi_2) - \psi_2(-p\psi_1' - q\psi_1) \\ &= -p\psi_1 \psi_2' + p\psi_2 \psi_1' = -p(\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1') = -pW, \end{aligned}$$

$$\frac{W'}{W} = (\ln W)' = -p , \quad (16.11)$$

luego

$$W(z) = C e^{-\int_{z_0}^z p(z') dz'} . \quad (16.12)$$

Observemos que si  $W(z_0) \neq 0$ ,  $W(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$ . Observemos también que si  $p(z) = 0$ ,  $W(z)$  es constante. Éste es precisamente el caso de la ecuación de Schrödinger:

$$\left[ -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (V(x) + E) \right] \psi = 0 .$$

**Proposición 16.1** Sean  $p(z)$  y  $q(z)$  holomorfas en  $D$  y univalentes. Entonces

a)  $W(z) = 0 \quad \forall z \in D \iff \psi_1(z), \psi_2(z)$  son l.d. en  $D$ .

b)  $\psi_1(z), \psi_2(z)$  son l.i. en  $D \iff W(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$ .

**Ejemplo** Consideremos la ecuación

$$f'' - \frac{2}{z}f' + \frac{2}{z^2}f = 0 ,$$

en un dominio  $D$  que no incluye el cero. En  $D$ ,

$$p(z) = -\frac{2}{z} , \quad q(z) = \frac{2}{z^2} ,$$

son analíticas, holomorfas.

Dos soluciones l.i. son

$$\psi_1(z) = z , \quad \psi_2(z) = z^2 .$$

El Wronskiano:

$$W = 2z^2 - z^2 = z^2 \neq 0 \quad \forall z \in D .$$

Conociendo  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , soluciones linealmente independientes de (16.1), podemos encontrar  $p$  y  $q$ . En efecto, de (16.11)

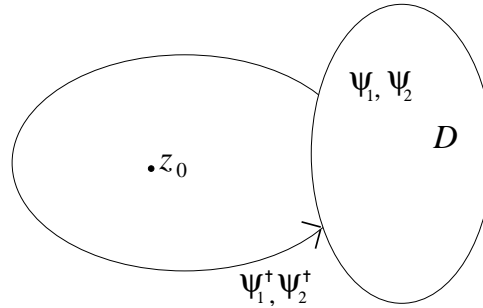
$$p(z) = -\frac{W'(z)}{W(z)} . \quad (16.13)$$

Y reemplazando este resultado en (16.1):

$$q(z) = -\frac{\psi_i''(z)}{\psi_i(z)} - p(z) \frac{\psi_i'(z)}{\psi_i(z)} , \quad i = 1, 2 . \quad (16.14)$$

## 16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares

Consideremos ahora la ecuación (16.1), pero sea ahora  $z_0$  un punto fuera del dominio  $D$ . Sean  $\psi_1, \psi_2$  base del espacio vectorial de soluciones de (16.1).  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son analíticas en  $D$ , donde  $p$  y  $q$  lo son. Supongamos que  $p$  o  $q$  no son holomorfas en  $z_0$ . ¿Qué ocurre con nuestras soluciones si las prolongamos analíticamente en torno al punto  $z_0$  y volvemos a  $D$ ?



Al recorrer un circuito en torno a un punto singular aparecerá un problema de multivalencia, de modo que en general  $\psi_1$  y  $\psi_2$  no recuperarán sus valores originales al completar el circuito:

$$(\psi_1, \psi_2) \not\rightarrow (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger) .$$

La transformación es un endomorfismo de  $V$  en  $V$ . Después del viaje, las funciones base quedan convertidas en ciertas combinaciones lineales de las funciones originales:

$$\begin{aligned} \psi_1^\dagger &= a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 , \\ \psi_2^\dagger &= a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 , \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} \psi_1^\dagger \\ \psi_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} . \quad (16.15)$$

La matriz de la transformación se denomina *matriz de circunvalación* asociada a la base  $\{\psi_1, \psi_2\}$ .

Para que  $\psi_1^\dagger$  y  $\psi_2^\dagger$  sean l.i., y por tanto sigan siendo base de  $V$ , se debe cumplir que el determinante de la matriz de circunvalación sea no nulo:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 .$$

Nuestro propósito a continuación será encontrar bases “canónicas”, en el siguiente sentido: deseamos construir una solución  $\Phi$  de (16.1) tal que

$$\Phi \not\rightarrow \Phi^\dagger = \lambda \Phi , \quad \lambda = \text{cte.} \quad (16.16)$$

Sea entonces  $\{\psi_1, \psi_2\}$  una base de soluciones. Entonces

$$\Phi = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 .$$

Luego del viaje:

$$\lambda \Phi = \Phi^\dagger = b_1\psi_1^\dagger + b_2\psi_2^\dagger .$$

Con (16.15):

$$\lambda(b_1\psi_1 + b_2\psi_2) = (b_1a_{11} + b_2a_{21})\psi_1 + (b_1a_{12} + b_2a_{22})\psi_2 .$$

Siendo  $\{\psi_1, \psi_2\}$  l.i.:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)b_1 + a_{21}b_2 &= 0 , \\ a_{12}b_1 + (a_{22} - \lambda)b_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Existen soluciones no triviales si

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 , \quad (16.17)$$

es decir, nuestro problema corresponde a encontrar los autovalores de la matriz de circunvalación. (Algo esperable, por cierto.)

Sean ahora  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las soluciones de esta ecuación. Existen dos posibilidades:

a) Sea  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . En este caso podemos escoger la base tal que

$$\begin{aligned} \psi_1^\dagger &= \lambda_1\psi_1 , \\ \psi_2^\dagger &= \lambda_2\psi_2 . \end{aligned}$$

La matriz de circunvalación en la base canónica es diagonal:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^\dagger \\ \psi_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} . \quad (16.18)$$

Es conveniente introducir la siguiente definición:

**Definición 16.3**

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_k . \quad (16.19)$$

Entonces

$$\begin{aligned} (z - z_0)^{\sigma_k} &\xrightarrow{\dagger} [(z - z_0)^{\sigma_k}]^\dagger = [e^{\sigma_k \ln(z - z_0)}]^\dagger \\ &= e^{\sigma_k [\ln(z - z_0) + 2\pi i]} = (z - z_0)^{\sigma_k} e^{2\pi i \sigma_k} = \lambda_k (z - z_0)^{\sigma_k} . \end{aligned}$$

En resumen:

$$\begin{aligned} \psi_k^\dagger &= \lambda_k \psi_k , \\ [(z - z_0)^{\sigma_k}]^\dagger &= \lambda_k (z - z_0)^{\sigma_k} . \end{aligned}$$

O sea el cociente

$$\left[ \frac{\psi_k}{(z - z_0)^{\sigma_k}} \right]^\dagger = \frac{\psi_k}{(z - z_0)^{\sigma_k}} ,$$

es decir, queda univalente al dar la vuelta en torno al punto singular  $z_0$ , luego este cociente admite un desarrollo de Laurent:

$$\frac{\psi_k(z)}{(z - z_0)^{\sigma_k}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{k\nu}(z - z_0)^{\nu} .$$

**En resumen:** Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , existe una base cuyo desarrollo en la vecindad del punto singular  $z_0$  es:

$$\psi_1(z) = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{1\nu}(z - z_0)^{\nu} , \quad (16.20)$$

$$\psi_2(z) = (z - z_0)^{\sigma_2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu}(z - z_0)^{\nu} . \quad (16.21)$$

b) Si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , estamos en un caso “incómodo”. Supongamos que la base transforma del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \psi_1 &\xrightarrow{\quad} \psi_1^{\dagger} = \lambda_1 \psi_1 , \\ \psi_2 &\xrightarrow{\quad} \psi_2^{\dagger} = a_{21} \psi_1 + a_{22} \psi_2 . \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{\dagger} \\ \psi_2^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} .$$

La ecuación de autovalores es:

$$(\lambda_1 - \lambda)(a_{22} - \lambda) = 0 .$$

para que  $\lambda_1 = \lambda_2$  debe tenerse que  $\lambda_1 = a_{22}$ , es decir

$$\psi_2^{\dagger} = a_{21} \psi_1 + \lambda_1 \psi_2 ,$$

de donde

$$\frac{\psi_2^{\dagger}}{\psi_1^{\dagger}} = \frac{a_{21} \psi_1 + \lambda_1 \psi_2}{\lambda_1 \psi_1} = \frac{\psi_2}{\psi_1} + \frac{a_{21}}{\lambda_1} . \quad (16.22)$$

Afirmamos que

$$\chi = \frac{\psi_2}{\psi_1} - \frac{a_{21}}{\lambda_1} \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad (16.23)$$

es univalente en torno a  $z_0$ . En efecto, usando (16.22):

$$\chi^{\dagger} = \frac{\psi_2^{\dagger}}{\psi_1^{\dagger}} - \frac{a_{21}}{\lambda_1 2\pi i} [\ln(z - z_0) + 2\pi i] = \frac{\psi_2}{\psi_1} - \frac{a_{21}}{\lambda_1} \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_0) = \chi .$$

Podemos entonces desarrollar en una serie de Laurent en torno a  $z_0$ :

$$\chi = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} d_{\mu}(z - z_0)^{\mu} ,$$

o bien

$$\psi_2 = \psi_1 \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} d_{\mu}(z - z_0)^{\mu} + \frac{a_{21}}{2\pi i \lambda_1} \psi_1 \ln(z - z_0) .$$

Pero  $\psi_1$  es autovector de la matriz de circunvalación, por tanto tiene un desarrollo de Laurent del tipo (16.20). Reordenando entonces las series, obtenemos:

$$\psi_2 = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu}(z - z_0)^{\nu} + \frac{a_{21}}{2\pi i \lambda_1} \psi_1(z) \ln(z - z_0) .$$

Si  $a_{21} \neq 0$  podemos dividir  $\psi_2$  por  $a_{21}$ , es decir, podemos tomar, sin pérdida de generalidad,  $a_{21} = 1$ .

**En resumen:** Si  $\lambda_1 = \lambda_2$  existe una base canónica cuyo desarrollo en la vecindad del punto singular  $z_0$  es:

$$\psi_1(z) = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{1\nu}(z - z_0)^{\nu} , \quad (16.24)$$

$$\psi_2(z) = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu}(z - z_0)^{\nu} + \frac{1}{2\pi i \lambda_1} \psi_1(z) \ln(z - z_0) . \quad (16.25)$$

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente teorema.

**Teorema 16.3** Si los coeficientes  $p(z)$  y  $q(z)$  son singulares en  $z_0$ , entonces existen dos soluciones l.i. que en la vecindad de  $z_0$  tienen la forma:

a) Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  (caso cómodo):

$$\psi_1(z) = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{1\nu}(z - z_0)^{\nu} , \quad (16.26)$$

$$\psi_2(z) = (z - z_0)^{\sigma_2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu}(z - z_0)^{\nu} . \quad (16.27)$$

b) Si  $\lambda_1 = \lambda_2$  (caso incómodo):

$$\psi_1(z) = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{1\nu}(z - z_0)^{\nu} , \quad (16.28)$$

$$\psi_2(z) = (z - z_0)^{\sigma_1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{2\nu}(z - z_0)^{\nu} + \frac{1}{2\pi i \lambda_1} \psi_1(z) \ln(z - z_0) . \quad (16.29)$$

En estas expresiones,

$$\sigma_k = \frac{\ln \lambda_k}{2\pi i} . \quad (16.30)$$



**Definición 16.4**  $z_0$  es un *punto de holomorfía* de la ecuación (16.1) si en  $z_0$  todas las soluciones de esta ecuación son holomorfas.

**Teorema 16.4**  $z_0$  es punto de holomorfía si y sólo si  $p(z)$  y  $q(z)$  son holomorfas en  $z_0$ .

### Demostración

I) Si  $p(z)$  y  $q(z)$  son holomorfas en  $z_0$ , entonces  $z_0$  es punto de holomorfía.

Ya demostrado.

II) Si  $z_0$  es punto de holomorfía, entonces  $p(z)$  y  $q(z)$  son holomorfas en  $z_0$ .

De (16.11) se tiene de inmediato que

$$p(z) = -\frac{W'}{W}$$

es holomorfa. Y de (16.14),  $q(z)$  también debe ser holomorfa. El único problema podría ocurrir si  $\psi_j(z) = 0$  para algún  $z$ . Pero la otra función l.i. no puede ser nula en el mismo punto (si lo fuese, el Wronskiano sería nulo en ese punto, lo que contradice la independencia lineal), y basta considerar entonces aquella función que no es nula en ese punto.

q.e.d.

**Definición 16.5** Un punto es una *singularidad Fuchsiana* de (16.1) si en ese punto  $p(z)$  y  $q(z)$  no son ambas holomorfas y si el desarrollo de Laurent de las soluciones (base canónica) tiene una cantidad finita de términos de potencias negativas. Es decir, los cuocientes univalentes son meromorfos.

**Definición 16.6** Una función se dice *meromorfa* si es analítica en todo el plano finito excepto en un número finito de polos. Por ejemplo:  $z/[(z+1)(z-3)^3]$ .

**Teorema 16.5 (Fuchs)** Para que  $z_0$  sea una singularidad Fuchsiana de (16.1) es necesario y suficiente que  $p(z)$  tenga en  $z_0$  a lo sumo un polo simple y  $q(z)$  tenga en  $z_0$  a lo sumo un polo doble, sin ser ambas holomorfas.

### Demostración

I) Demostración de necesidad.

Sea  $z_0 = 0$  singularidad Fuchsiana de (16.1). Consideremos la base canónica:

$$\begin{aligned}\psi_1(z) &= z^{\sigma_1} \sum_{\nu=-n}^{\infty} c_{1\nu} z^{\nu} & c_{1,-n} &\neq 0, \\ \psi_2(z) &= z^{\sigma_2} \sum_{\nu=-m}^{\infty} c_{2\nu} z^{\nu} + \eta \ln(z) \psi_1(z) & c_{2,-m} &\neq 0,\end{aligned}$$

donde

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{caso cómodo} \\ \frac{1}{2\pi i \lambda_1} & \text{caso incómodo} \end{cases}$$

Con las definiciones

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \sigma_1 - n , \\ \bar{\sigma}_2 &= \sigma_2 - m , \end{aligned}$$

podemos reescribir las series anteriores de modo que ambas comiencen en el índice cero:

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= z^{\bar{\sigma}_1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{c}_{1\mu} z^{\mu} & \bar{c}_{10} &\neq 0 , \\ \psi_2(z) &= z^{\bar{\sigma}_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{c}_{2\nu} z^{\nu} + \eta \ln(z) \psi_1(z) & \bar{c}_{20} &\neq 0 . \end{aligned}$$

$p(z)$  viene dado por (16.11). Observemos que

$$W = \psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' = \left( \frac{\psi_2}{\psi_1} \right)' \psi_1^2 .$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{\psi_2}{\psi_1} &= \eta \ln z + z^{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} , \\ \left( \frac{\psi_2}{\psi_1} \right)' &= \frac{\eta}{z} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 + \nu) a_{\nu} z^{\nu + \bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 - 1} , \end{aligned}$$

luego

$$W = \left( \frac{\eta}{z} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 + \nu) a_{\nu} z^{\nu + \bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 - 1} \right) \left( z^{\bar{\sigma}_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{c}_{1\nu} z^{\nu} \right)^2 ,$$

lo que se puede reescribir siempre en la forma

$$W = z^{\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} z^{\nu} , \quad b_0 \neq 0 .$$

De aquí,

$$W' = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\tau + \nu) b_{\nu} z^{\nu - 1 + \tau} = \frac{1}{z} z^{\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\tau + \nu) b_{\nu} z^{\nu} .$$

$p(z)$  tiene entonces la forma:

$$p(z) = -\frac{W'}{W} = -\frac{1}{z} \frac{\tau b_0 + (\tau + 1) b_1 z + \dots}{b_0 + b_1 z + \dots} .$$

Si  $\tau = 0$ , entonces  $p(z)$  es regular en  $z = 0$ . Si  $\tau \neq 0$ , entonces  $p(z) = -\tau/z + \dots$ , luego tiene un polo simple en  $z = 0$ .

De modo análogo podemos estudiar  $q(z)$ , dado por (16.14). Basta observar que

$$\frac{\psi'_1}{\psi_1} = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{\sigma}_1 + \nu) \bar{c}_{1\nu} z^{\bar{\sigma}_1 + \nu - 1}}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{c}_{1\nu} z^{\bar{\sigma}_1 + \nu}} = \frac{1}{z} \frac{\bar{\sigma}_1 \bar{c}_{10} + (\bar{\sigma}_1 + 1)z + \dots}{\bar{c}_{10} + \bar{c}_{11}z + \dots}$$

tiene a lo sumo un polo simple en  $z = 0$ .

Análogamente,  $\psi''_1/\psi'_1$  tiene a lo sumo un polo simple en  $z = 0$ . Luego  $q(z)$  tiene a lo sumo un polo doble en  $z = 0$ .

## II) Demostración de suficiencia.

Supongamos que  $p(z)$  y  $q(z)$  tienen a lo sumo un polo simple y doble, respectivamente, en  $z = 0$ . Reescribamos (16.1):

$$f'' + \frac{P(z)}{z} f' + \frac{Q(z)}{z^2} f = 0, \quad (16.31)$$

con  $P(z)$  y  $Q(z)$  analíticas:

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{\nu} z^{\nu}, \quad (16.32)$$

$$Q(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{\nu} z^{\nu}. \quad (16.33)$$

Planteamos una solución de la forma

$$f = z^{\sigma} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu + \sigma}, \quad c_0 \neq 0. \quad (16.34)$$

Entonces

$$f' = \frac{z^{\sigma}}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (\nu + \sigma) z^{\nu},$$

$$f'' = \frac{z^{\sigma}}{z^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (\nu + \sigma) (\nu + \sigma - 1) z^{\nu}.$$

La ecuación diferencial nos queda:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (\sigma + \nu) (\sigma + \nu - 1) z^{\nu} + \left( \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{\mu} z^{\mu} \right) \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (\sigma + \nu) z^{\nu} \right) + \left( \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{\mu} z^{\mu} \right) \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu} \right) = 0. \quad (16.35)$$

Comparando coeficientes para  $z = 0$ :

$$c_0\sigma(\sigma - 1) + p_0c_0\sigma + q_0c_0 = 0 ,$$

es decir, se obtiene la llamada *ecuación indicial*:

$$\boxed{\sigma(\sigma - 1) + p_0\sigma + q_0 = 0} \quad (16.36)$$

Sean las raíces de la ecuación indicial  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$

Definamos

$$\Phi(\sigma) = \sigma(\sigma - 1) + p_0\sigma + q_0 ,$$

de modo que

$$\Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2) = 0 .$$

Igualando los coeficientes de  $z^1$  en (16.35):

$$\begin{aligned} c_1(\sigma + 1)\sigma + p_0c_1(\sigma + 1) + p_1c_0\sigma + q_0c_1 + q_1c_0 &= 0 , \\ c_1[(\sigma + 1)\sigma + p_0(\sigma + 1) + q_0] &= -c_0(\sigma p_1 + q_1) , \\ c_1\Phi(\sigma + 1) &= -c_0(\sigma p_1 + q_1) . \end{aligned}$$

Análogamente, para  $z^n$ , se obtienen ecuaciones de la forma:

$$c_n\Phi(\sigma + n) = \dots$$

De este modo, si  $\Phi(\sigma + n) \neq 0$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , podemos dividir por  $\Phi$  cada ecuación y obtener los coeficientes de la serie.

El procedimiento para resolver (16.31) es entonces, primero, resolver la ecuación

$$\Phi(\sigma) = 0 ,$$

para obtener  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

Se pueden presentar dos casos:

I)

$$\sigma_1 - \sigma_2 \notin \mathbb{Z} . \quad (16.37)$$

En este caso,

$$\sigma_1 + n \neq \sigma_2 \quad \forall n \in \mathbb{Z} ,$$

y por tanto

$$\Phi(\sigma_i + n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} , \quad i = 1, 2 .$$

Es posible entonces obtener todos los coeficientes de la expansión en serie de la solución. Pero además, (16.37) asegura que

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 ,$$

de modo que los coeficientes obtenidos por el método descrito son distintos en general, y las dos soluciones resultantes son linealmente independientes.

II)

$$\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z} . \quad (16.38)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\operatorname{Re} \sigma_1 \geq \operatorname{Re} \sigma_2 .$$

Entonces de (16.38) se sigue que

$$\Phi(\sigma_1 + n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Por tanto, el procedimiento anterior de dividir por  $\Phi(\sigma_1 + n)$  es válido, obteniéndose la solución asociada a  $\sigma_1$ .

Para  $\sigma_2$ , por su parte, puede haber problemas, pues  $\Phi(\sigma_2 + n) = 0$  cuando  $n = \sigma_1 - \sigma_2$  y no se pueden obtener los coeficientes de la solución. Esto significa que la solución no es de la forma (16.34), y se necesita la expresión más general, con un término logarítmico. De todos modos  $z = 0$  será singularidad Fuchsiana.

q.e.d.

## 16.3. Singularidades en infinito

Consideremos el cambio de variable

$$s = \frac{1}{z} \quad (16.39)$$

en la ecuación (16.1), y definamos

$$\bar{f}(s) = f(z) = f\left(\frac{1}{s}\right) . \quad (16.40)$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dz} &= -\frac{1}{z^2} = -s^2 , \\ \frac{d\bar{f}}{dz} &= \frac{d\bar{f}}{ds} \frac{ds}{dz} = -s^2 \frac{d\bar{f}}{ds} , \\ \frac{d^2\bar{f}}{dz^2} &= s^4 \frac{d^2\bar{f}}{ds^2} + 2s^3 \frac{d\bar{f}}{ds} , \end{aligned}$$

de modo que  $\bar{f}$  satisface:

$$\frac{d^2\bar{f}}{ds^2} + \frac{2s - p(1/s)}{s^2} \frac{d\bar{f}}{ds} + \frac{q(1/s)}{s^4} \bar{f} = 0 . \quad (16.41)$$

Este resultado nos conduce a la siguiente definición:

**Definición 16.7** *Infinito es punto de holomorfía de (16.1) si cero lo es de (16.41).*

**Proposición 16.2** Infinito es punto de holomorfía de (16.1) si:

- a)  $2s - p(1/s)$  tiene en cero un lugar nulo de multiplicidad doble o mayor (es decir,  $2s - p(1/s) \sim s^n$ , con  $n \geq 2$ , cuando  $s \rightarrow 0$ ).
- b)  $q(1/s)$  tiene en cero un lugar nulo de multiplicidad cuádruple o mayor.

**Demostración** Es inmediata del teorema 16.4 y de la forma de (16.41).

Análogamente definimos la singularidad Fuchsiana en infinito:

**Definición 16.8** *Infinito es singularidad Fuchsiana de (16.1) si cero lo es de (16.41).*

**Proposición 16.3** Infinito es singularidad Fuchsiana de (16.1) si no es punto de holomorfía y al menos

- a)  $q(1/s)$  tiene un lugar nulo doble en  $s = 0$ .
- b)  $p(1/s)$  tiene un lugar nulo simple en  $s = 0$ .

**Demostración** Inmediata del teorema de Fuchs 16.5 y de la forma de (16.41).

## 16.4. Ejemplos

1) Ecuación diferencial de Laguerre:

$$zf'' + (1 - z)f' + nf = 0 , \quad (16.42)$$

o, equivalentemente,

$$f'' + \frac{1 - z}{z}f' + \frac{nz}{z^2}f = 0 . \quad (16.43)$$

Claramente  $z = 0$  es singularidad Fuchsiana. En cuanto a  $z = \infty$ , observemos que  $p(1/s)$  es holomorfo en  $s = 0$ :

$$p\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1 - (1/s)}{(1/s)} = s - 1 ,$$

de modo que  $z = \infty$  no es singularidad Fuchsiana.

Siguiendo las definiciones (16.31), (16.32) y (16.33) para la ecuación de Laguerre

$$P(z) = 1 - z , \quad Q(z) = nz ,$$

luego

$$p_0 = 1 , \quad q_0 = 0 .$$

La ecuación indicial es entonces

$$\begin{aligned}\sigma(\sigma - 1) + \sigma &= 0 \\ \sigma^2 &= 0 \\ \sigma_1 = \sigma_2 &= 0\end{aligned}$$

Estamos pues en el caso incómodo.

En el Cap. 13, Polinomios de Laguerre, ya habíamos encontrado la primera solución, de la forma

$$\Psi_1(z) = z^{\sigma_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} z^{\nu} . \quad (16.44)$$

Corresponde a los polinomios de Laguerre  $L_n$ . Falta encontrar la segunda solución, linealmente independiente con  $L_n$ :

$$\Psi_2(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} z^{\nu} + \Psi_1(z) \ln(z) . \quad (16.45)$$

El primer polinomio de Laguerre es  $L_{n=0} = 1$ , de modo que:

$$\Psi_2(z) = \ln(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} z^{\nu} , \quad n = 0 . \quad (16.46)$$

Reemplazando en (16.42):

$$\begin{aligned}0 &= z \left( -\frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_{\nu} \nu(\nu - 1) z^{\nu-2} \right) + (1 - z) \left( \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu} \nu z^{\nu-1} \right) \\ 0 &= -1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_{\nu} \nu(\nu - 1) z^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu} \nu z^{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu} \nu z^{\nu}\end{aligned}$$

Se sigue la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}f_{\nu+1}(\nu^2 + 2\nu + 1) &= f_{\nu} \nu , \quad \nu \geq 1 , \\ f_{\nu+1} &= \frac{f_{\nu} \nu}{(\nu + 1)^2} .\end{aligned}$$

Escogiendo

$$f_1 = 1 ,$$

se obtiene

$$f_n = \frac{(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n \cdot n!} .$$

Así, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Laguerre para  $n = 0$  son:

$$\begin{aligned}\Psi_1(z) &= L_0(z) = 1 , \\ \Psi_2(z) &= \ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu \cdot \nu!} .\end{aligned}$$

2) La ecuación

$$z^2 f'' + z \left( z - \frac{1}{2} \right) f' + \frac{1}{2} f = 0$$

tiene una singularidad Fuchsiana en  $z = 0$ . La ecuación indicial es:

$$\sigma(\sigma - 1) - \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2} = 0 ,$$

luego

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} , \quad \sigma_2 = 1 \quad \text{y} \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 .$$

i) Obtengamos la primera solución l.i., con  $\sigma = 1/2$ . En este caso

$$f = \sqrt{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu+1/2} .$$

Sustituyendo en la ecuación y comparando potencias de  $z$  obtenemos la relación de recurrencia

$$a_{\nu} = -\frac{a_{\nu-1}}{\nu} , \quad \nu \geq 1 .$$

Tomando  $a_0 = 1$ :

$$a_1 = -1 , \quad a_2 = \frac{1}{2} , \quad a_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3!} , \quad \dots ,$$

$$a_{\nu} = (-1)^{\nu} \frac{1}{\nu!} .$$

Luego

$$f(z) = \sqrt{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} z^{\nu}}{\nu!} = e^{-z} \sqrt{z} .$$

ii) La segunda solución corresponde a  $\sigma = 1$ :

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu+1} .$$

Obtenemos la relación de recurrencia

$$a_{\nu} = -\frac{a_{\nu+1}}{\nu + 1/2} , \quad \nu \geq 1 .$$

Tomando  $a_0 = 1$ , resulta

$$a_{\nu} = (-1)^{\nu} \frac{2^{\nu}}{(2\nu + 1)!!} ,$$

$$f(z) = z \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2z)^{\nu}}{(2\nu + 1)!!} .$$



## 16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas

Nuestro objetivo ahora será encontrar el tipo de ecuación (16.1) más general tal que sea holomorfa en todo el plano “completo” (es decir, incluyendo infinito), salvo en 0, 1, 2 ó 3 singularidades Fuchsianas, una de las cuales podría estar en infinito. Esto es,  $p(z)$ ,  $q(z)$ ,  $p(1/s)$  y  $q(1/s)$  deben ser meromorfas.

**Proposición 16.4** Para que la ecuación (16.1) tenga sólo singularidades Fuchsianas es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

$$p(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - \alpha_k} , \quad (16.47a)$$

$$q(z) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{B_k}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{C_k}{(z - \alpha_k)} \right] , \quad (16.47b)$$

$$\sum_{k=1}^n C_k = 0 . \quad (16.47c)$$

**Demostración** Para que  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sean singularidades Fuchsianas, se debe tener que  $p(z)$  a lo sumo tenga un polo de primer orden y  $q(z)$  a lo sumo uno de segundo orden:

$$p(z) = \frac{P(z)}{(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)} , \quad (16.48a)$$

$$q(z) = \frac{Q(z)}{(z - \alpha_1)^2 \cdots (z - \alpha_n)^2} , \quad (16.48b)$$

donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son funciones regulares.

Para que  $z = \infty$  sea a lo sumo singularidad Fuchsiana, se debe tener que

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{s}\right) &= a_1 s + a_2 s^2 + \cdots \\ q\left(\frac{1}{s}\right) &= a_0 s^2 + a_3 s^3 + \cdots \end{aligned}$$

Pero, de (16.48),

$$p\left(\frac{1}{s}\right) = s^n \frac{P(1/s)}{(1 - s\alpha_1) \cdots (1 - s\alpha_n)} \sim s^n P\left(\frac{1}{s}\right) , \quad \text{si } s \rightarrow 0 ,$$

de modo que la mayor potencia de  $1/s$  en  $P(1/s)$  debe ser  $1/s^{n-1}$ . Es decir,  $P(z)$  debe ser un polinomio al menos un grado inferior al grado del denominador de  $p(z)$ . Un análisis similar conduce a que el grado de  $Q(z)$  es al menos dos grados inferior al grado del denominador de  $q(z)$ .

Descomponiendo ahora  $p(z)$  y  $q(z)$  en fracciones parciales:

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - \alpha_k} , \\ q(z) &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{B_k}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{C_k}{(z - \alpha_k)} \right] , \\ \sum_{k=1}^n C_k &= 0 . \end{aligned}$$

La última condición viene de exigir que el grado de  $Q(z)$  sea al menos dos grados inferior al del denominador de  $q(z)$ . En efecto, al sumar las fracciones parciales, los términos que contienen  $C_k$  son de la forma  $C_k(z - \alpha_k) \prod_{j \neq k}^n (z - \alpha_j)^2$ , que tiene grado  $1 + 2 \cdot (n - 1) = 2n - 1$ , que es sólo un grado inferior al grado del denominador. La mayor potencia de  $z$  aparece en un término de la forma  $z^{2n-1} \sum_{k=1}^n C_k$ . Por otro lado, los términos que contienen  $B_k$  son de la forma  $B_k \prod_{j \neq k}^n (z - \alpha_j)^2$ , de grado  $2 \cdot (n - 1) = 2n - 2$  a lo sumo. Por tanto, el numerador es de grado  $2n - 2$  o inferior si  $\sum_{k=1}^n C_k = 0$ .

q.e.d.

Ahora revisemos cada uno de los casos que nos interesan.

### 16.5.1. $n = 0$ singularidades Fuchsianas

Para que  $p(z)$  y  $q(z)$  no tengan singularidades deben ser de la forma:

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots \\ q(z) &= q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots \end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{s}\right) &= p_0 + p_1 \frac{1}{s} + p_2 \frac{1}{s^2} + \cdots \\ q\left(\frac{1}{s}\right) &= q_0 + q_1 \frac{1}{s} + q_2 \frac{1}{s^2} + \cdots \end{aligned}$$

Pero entonces  $2s - p(1/s)$  tiene un cero en  $s = 0$  sólo si  $p(1/s) = 0$ , y  $q(1/s)$  tiene un cero en  $s = 0$  sólo si  $q(1/s) = 0$ . Luego, por la Proposición 16.2,  $z = \infty$  puede ser punto de holomorfía sólo si

$$p(z) = q(z) = 0 .$$

Sin embargo, esta condición implica a su vez que infinito es singularidad Fuchsiana (Proposición 16.3). Esto es una contradicción, luego no existen ecuaciones de la forma (16.1) sin singularidades Fuchsianas.

**16.5.2.  $n = 1$  singularidades Fuchsianas, en  $z = \infty$** 

De lo dicho en la Subsección 16.5.1, si la ecuación (16.1) tiene una única singularidad Fuchsiana, y localizada en  $z = \infty$ , entonces

$$p(z) = q(z) = 0 ,$$

de donde, en (16.47)

$$A_k = B_k = C_k = 0 .$$

La ecuación con una singularidad Fuchsiana en  $z = \infty$  es pues

$$f'' = 0 , \quad (16.49)$$

y su solución es

$$f(z) = c_1 + c_2 z . \quad (16.50)$$

**16.5.3.  $n = 1$  singularidades Fuchsianas, en  $z = 0$** 

En este caso  $n = 1$  en (16.47), y por tanto, de (16.47c),

$$C_1 = 0 .$$

Luego, escribiendo  $A_1 = A$  y  $B_1 = B$ ,

$$p(z) = \frac{A}{z} , \quad q(z) = \frac{B}{z^2} ,$$

y la ecuación es de la forma:

$$f'' + \frac{A}{z} f' + \frac{B}{z^2} f = 0 .$$

Pero  $z = \infty$  es punto de holomorfía, de modo que (Proposición 16.2)

a)

$$2s - p\left(\frac{1}{s}\right) = 2s - As$$

debe tener al menos un lugar nulo doble en  $s = 0$ , vale decir,

$$A = 2 .$$

b)

$$q\left(\frac{1}{s}\right) = Bs^2$$

debe tener al menos un lugar nulo cuádruple en  $s = 0$ , luego

$$B = 0 .$$

La ecuación con una singularidad Fuchsiana en  $z = 0$  es entonces

$$f'' + \frac{2}{z} f' = 0 . \quad (16.51)$$

Sus soluciones:

$$\begin{aligned} f_1 &= c_1 , \\ f_2 &= \frac{c_2}{z} . \end{aligned} \quad (16.52)$$

**16.5.4.  $n = 2$  singularidades Fuchsianas, en  $z = 0$  y  $z = \infty$** 

En este caso  $n = 1$  en (16.47), de modo que  $C_1 = 0$ . Escribamos  $A_1 = A$  y  $B_1 = B$ . Para que infinito sea singularidad Fuchsiana, de la Proposición 16.3 se sigue que  $2s - p(1/s) = 2s - As$  debe tener un lugar nulo simple en  $s = 0$  y  $q(1/s) = Bs^2$  debe tener un lugar nulo doble en  $s = 0$ . Ambas condiciones se cumplen, de modo que no hay nuevas restricciones sobre  $A$  y  $B$ . La ecuación más general con dos singularidades Fuchsianas, una de ellas en infinito, es la *ecuación diferencial de Euler*:

$$\boxed{f'' + \frac{A}{z}f' + \frac{B}{z^2}f = 0} \quad (16.53)$$

Determinemos sus soluciones. La ecuación indicial es

$$\sigma(\sigma - 1) + A\sigma + B = 0 .$$

Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las dos soluciones de ella:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 - A + \sqrt{(1 - A)^2 - B} \right) , \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - A - \sqrt{(1 - A)^2 - B} \right) . \end{aligned}$$

1) Caso  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  (caso cómodo).

En cualquier dominio de conexión simple que no contiene al cero  $z^{\sigma_1}$  y  $z^{\sigma_2}$  son dos soluciones l.i. La solución general es

$$f = c_1 z^{\sigma_1} + c_2 z^{\sigma_2} . \quad (16.54)$$

2) Caso  $\sigma_1 = \sigma_2$  (caso incómodo).

Una solución no trivial es:

$$f_1 = z^{\sigma_1} .$$

La otra viene dada por:

$$f_2 = z^{\sigma_1} \ln z ,$$

como es fácil comprobar reemplazando en (16.53).

La solución general en este caso es entonces

$$f = c_1 z^{\sigma_1} (1 + c_2 \ln z) . \quad (16.55)$$

**16.5.5.  $n = 2$  singularidades Fuchsianas, en  $z = a$  y  $z = b$ , holomorfa en infinito**

La ecuación y sus soluciones se obtienen del caso anterior por medio de la transformación:

$$z \longrightarrow \frac{z - a}{z - b} . \quad (16.56)$$

En efecto, bajo esta transformación:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow a , \\ \infty &\longrightarrow b . \end{aligned}$$

La ecuación diferencial queda de la forma:

$$f'' + \frac{2z - 2aA(a-b)}{(z-a)(z-b)}f' + \frac{B(a-b)^2}{(z-a)^2(z-b)^2}f = 0 ,$$

lo que se puede reescribir, con las definiciones adecuadas,

$$f'' + \frac{2z + \bar{A}}{(z-a)(z-b)}f' + \frac{\bar{B}}{(z-a)^2(z-b)^2}f = 0 . \quad (16.57)$$

Las soluciones se obtienen simplemente aplicando la transformación (16.56) a la solución hallada en la Subsección 16.5.4:

1) Caso cómodo:

$$f = c_1 \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^{\sigma_1} + c_2 \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^{\sigma_2} . \quad (16.58)$$

2) Caso incómodo:

$$f = c_1 \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^{\sigma_1} \left[ 1 + c_2 \ln \left( \frac{z-a}{z-b} \right) \right] . \quad (16.59)$$



# Capítulo 17

## Funciones hipergeométricas

versión final 3.3-13 enero 2003

### 17.1. La ecuación hipergeométrica general

Consideremos la ecuación diferencial

$$\Psi'' + p(z)\Psi' + q(z)\Psi = 0 , \quad (17.1)$$

con tres singularidades fuchsianas localizadas en:

$$z_1 = A , \quad z_2 = B , \quad z_3 = C ,$$

y con  $z = \infty$  punto de holomorfía.

Para que la ecuación (17.1) tenga singularidades fuchsianas,  $p(z)$  debe tener a lo más un polo simple en cada una de ellas, tomando la forma:

$$p(z) = \frac{h}{z-A} + \frac{k}{z-B} + \frac{l}{z-C} . \quad (17.2)$$

Para que  $z = \infty$  sea punto de holomorfía

$$2s - p\left(\frac{1}{s}\right) = 2s - \frac{hs}{1-As} - \frac{ks}{1-Bs} - \frac{ls}{1-Cs} , \quad (17.3)$$

debe tener a lo menos un lugar nulo doble en  $s = 0$ . Lo anterior implica que

$$\begin{aligned} 0 = 2s - p\left(\frac{1}{s}\right) &\simeq 2s - hs(1+As) - ks(1-Bs) - ls(1-Cs) + \dots \\ &= (2-h-k-l)s + \dots , \quad s \sim 0 , \end{aligned}$$

es decir, las constantes debe satisfacer la condición  $h+k+l=2$ . La característica de singularidades fuchsianas impone sobre la función  $q(z)$  a lo más polos dobles en las singularidades, es decir,

$$q(z) = \frac{Q(z)}{(z-A)^2(z-B)^2(z-C)^2} , \quad (17.4)$$

y para que infinito sea punto de holomorfía  $q(1/s)$  debe tener a lo menos un lugar nulo cuádruple en  $s = 0$ . Luego a lo sumo  $Q(z)$  debe ser un polinomio de grado 2. En efecto, si es así,

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{a + bz + cz^2}{(z - A)^2(z - B)^2(z - C)^2} = \frac{a + b/s + c/s^2}{(1/s - A)^2(1/s - B)^2(1/s - C)^2} , \\ &= \frac{as^2 + bs + c}{(1 - As)^2(1 - Bs)^2(1 - Cs)^2} \frac{1/s^2}{1/s^6} = s^4 \frac{as^2 + bs + c}{(1 - As)^2(1 - Bs)^2(1 - Cs)^2} . \end{aligned} \quad (17.5)$$

Esto claramente no impone nuevas restricciones sobre  $q(z)$ , la cual podemos escribir de forma general como:

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{Q(z)}{(z - A)(z - B)(z - C)} \left[ \frac{1}{(z - A)(z - B)(z - C)} \right] \\ &= \left( \frac{H}{z - A} + \frac{K}{z - B} + \frac{L}{z - C} \right) \left[ \frac{1}{(z - A)(z - B)(z - C)} \right] . \end{aligned} \quad (17.6)$$

Reemplazando la forma general de  $p(z)$  y  $q(z)$  dadas en (17.2) y (17.6) en (17.1) obtenemos la *ecuación hipergeométrica general*:

$$\begin{aligned} \Psi'' + \left[ \frac{h}{z - A} + \frac{k}{z - B} + \frac{l}{z - C} \right] \Psi' \\ + \left( \frac{H}{z - A} + \frac{K}{z - B} + \frac{L}{z - C} \right) \left[ \frac{1}{(z - A)(z - B)(z - C)} \right] \Psi = 0 , \end{aligned} \quad (17.7)$$

con  $h + k + l = 2$ , *i.e.* 5 constantes libres.

## 17.2. Ecuación indicial

Consideremos la singularidad fuchsiana en  $z = A$ , su ecuación indicial corresponde a:

$$\sigma(\sigma - 1) + h\sigma + \frac{H}{(A - B)(A - C)} = 0 . \quad (17.8)$$

Sean  $\alpha$  y  $\alpha'$  las dos soluciones de esta ecuación, entonces

$$\alpha + \alpha' = 1 - h \quad \text{y} \quad \alpha\alpha' = \frac{H}{(A - B)(A - C)} .$$

Análogamente sean  $\beta$  y  $\beta'$  y  $\gamma$  y  $\gamma'$  las soluciones respectivas de la ecuación indicial en las singularidades fuchsianas  $z = B$  y  $z = C$ , con

$$\beta + \beta' = 1 - k , \quad \beta\beta' = \frac{K}{(B - A)(B - C)} ,$$

$$\gamma + \gamma' = 1 - l , \quad \gamma\gamma' = \frac{L}{(C - A)(C - B)} .$$



Tenemos  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 3 - k - l - h = 3 - (k + l + h) = 3 - 2 = 1$ .

De lo anterior podemos eliminar de la ecuación hipergeométrica los coeficientes  $h, k, l, H, K, L$  y escribirla en función de  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$  y  $\gamma'$

$$\begin{aligned} \Psi'' + \left[ \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - A} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - B} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - C} \right] \Psi' - \left[ \frac{(C - A)(A - B)(B - C)}{(z - A)(z - B)(z - C)} \right] \\ \times \left( \frac{\alpha\alpha'}{(z - A)(B - C)} + \frac{\beta\beta'}{(z - B)(C - A)} + \frac{\gamma\gamma'}{(z - C)(A - B)} \right) \Psi = 0, \end{aligned} \quad (17.9)$$

con singularidades fuchsianas en  $z_1 = A, z_2 = B$  y  $z_3 = C$  y 5 constantes independientes, ya que tenemos la restricción de que

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

La solución más general de esta ecuación es la llamada *función P de Riemann* la cual denotamos por

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{matrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \begin{matrix} z \\ \\ \end{matrix} \right\}. \quad (17.10)$$

### 17.3. Ecuación diferencial de Gauss

Consideremos el caso particular  $z_1 = A = 0, z_2 = B = 1$  y  $z_3 = C \rightarrow \infty$ . Elegimos además  $\alpha' = \beta' = 0$ , obteniendo

$$\Psi'' + \left[ \frac{1 - \alpha}{z} + \frac{1 - \beta}{z - 1} \right] \Psi' + \frac{\gamma\gamma'}{z(z - 1)} \Psi = 0. \quad (17.11)$$

Las constantes deben satisfacer  $\alpha + \beta + \gamma + \gamma' = 1$ , lo cual deja sólo tres constantes independientes. La ecuación (17.11) es conocida como *ecuación diferencial de Gauss* y su solución, escrita como función  $P$  de Riemann, es:

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma' \end{matrix} \begin{matrix} z \\ \\ \end{matrix} \right\}. \quad (17.12)$$

Haciendo un cambio de notación

$$1 - \alpha = c, \quad \gamma = a, \quad \gamma' = b.$$

Podemos despejar  $\beta$  a partir de la condición que satisfacen las raíces de la ecuación indicial,

$$\beta = 1 - \alpha - \gamma - \gamma' = c - a - b,$$

luego, la ecuación diferencial de Gauss (17.11) queda de la forma

$$\Psi'' + \frac{(1 + a + b)(z - c)}{z(z - 1)} \Psi' + \frac{ab}{z(z - 1)} \Psi = 0. \quad (17.13)$$

Su solución, escrita como función  $P$  de Riemann

$$\Psi(z) = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 1-c & c-a-b & a \\ 0 & 0 & b \end{matrix} \begin{matrix} z \\ \\ \end{matrix} \right\} . \quad (17.14)$$

Busquemos soluciones de (17.13) de la forma

$$\Psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} z^{\nu} , \quad \text{con } d_0 = 1. \quad (17.15)$$

Recordemos que  $z = 0$  es singularidad fuchsiana de (17.13) y las raíces de la ecuación indicial corresponden a  $\sigma_1 = 0$  y  $\sigma_2 = 1 - c$ . Podemos reescribir (17.13) de la forma

$$z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\Psi = 0 , \quad (17.16)$$

Reemplazando la serie (17.15) en (17.16) e igualando potencias del mismo orden, obtenemos una relación de recurrencia para los coeficientes  $d_{\nu}$ ,

$$d_{\nu+1} = \frac{(\nu+a)(\nu+b)}{(\nu+c)(\nu+1)} d_{\nu} , \quad \text{para } \nu = 0, 1, 2, \dots . \quad (17.17)$$

La exclusión de  $c = 0, -1, -2, \dots$ , no es siempre necesaria, ya que es posible que se anule el numerador.

**Definición 17.1** Definimos la función hipergeométrica  ${}_2F_1(a, b, c; z)$ , por la siguiente serie:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \dots . \quad (17.18)$$

La serie geométrica es un caso particular de la anterior

$${}_2F_1(1, b, b; z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} .$$

El radio de convergencia de la serie hipergeométrica es igual a uno, exceptuando el caso cuando  $a$  o  $b$  son iguales a cero o a un entero negativo, en tal caso el radio de convergencia es infinito.

Afirmamos que  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  es solución de (17.13). Busquemos la otra solución linealmente independiente correspondiente a la solución de la ecuación indicial  $\sigma_2 = 1 - c$ . Planteamos

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= z^{1-c}\phi(z) , \quad c \neq 1 , \\ \Psi'(z) &= (1-c)z^{-c}\phi(z) + z^{1-c}\phi'(z) , \\ \Psi''(z) &= -(1-c)cz^{-c-1}\phi(z) + 2(1-c)z^{-c}\phi'(z) + z^{1-c}\phi''(z) . \end{aligned}$$

Reemplazando en (17.16)

$$z(z-1)\phi'' + [(a+b-2c+3)z - (2-c)]\phi' + (a-c+1)(b-c+1)\phi = 0 . \quad (17.19)$$

Sustituyendo

$$c \rightarrow 2 - c, \quad a \rightarrow a - c + 1, \quad b \rightarrow b - c + 1,$$

se obtiene la ecuación hipergeométrica de Gauss, por lo tanto la solución para  $\phi(z)$  en (17.19) es:

$$\phi(z) = {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z), \quad \text{con } c \neq 2,$$

luego la otra solución de (17.13) es

$$\Psi(z) = z^{1-c} {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z). \quad (17.20)$$

Hagamos un resumen de los resultados anteriores. La ecuación diferencial de Gauss

$$z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\Psi = 0, \quad (17.19)$$

bajo la condición de que  $c \notin \mathbb{Z}$  tiene como base de soluciones con centro en cero:

$$\Psi_1 = {}_2F_1(a, b, c; z), \quad (17.21a)$$

$$\Psi_2 = z^{1-c} {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z). \quad (17.21b)$$

Si  $c = 1$  las soluciones  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  coinciden, en ese caso se debe plantear

$$\Psi_2(z) = \Psi_1(z) \ln(z) + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}.$$

Derivando y reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos una relación de recurrencia para los  $c_{\nu}$ .

## 17.4. La serie hipergeométrica

Analicemos en más detalle la serie hipergeométrica

$${}_2F_1(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!}, \quad (17.18)$$

tenemos para el coeficiente  $n+1$

$$f_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2) \cdots (a+n)b(b+1)(b+2) \cdots (b+n)}{c(c+1)(c+2) \cdots (c+n)},$$

$$f_{n+1} = \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(c+n+1)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left( \frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-b)} \right).$$

Reescribamos la serie hipergeométrica usando el anterior resultado:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)} \Gamma(a+\nu) \frac{z^{\nu}}{\nu!},$$

pero

$$\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(c+\nu)} = B(c-b, b+\nu) ,$$

con

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} , \quad \text{para } m > 0 \text{ y } n > 0 .$$

Reescribimos la serie, usando la expresión integral de la función beta,

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} \frac{t^\nu z^\nu}{\nu!} dt ,$$

con  $\text{Re}[c] > \text{Re}[b] > 0$ .

Ahora como

$$(1-tz)^{-a} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)\nu!} t^\nu z^\nu .$$

La forma integral de la función hipergeométrica es:

$$\boxed{{}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt ,} \quad (17.22)$$

con  $\text{Re}[c] > \text{Re}[b] > 0$ ,  $|z| < 1$  y donde  $t$  es una variable compleja.

### Proposiciones

$$\text{a) } {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right).$$

$$\text{b) } {}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{1}{(1-z)^b} {}_2F_1\left(c-a, b, c; \frac{z}{z-1}\right).$$

$$\text{c) } {}_2F_1(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

$$\text{d) } {}_2F_1(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b, c; z).$$

### Demostraciones

a)

$$\frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1} \left(1 - \frac{tz}{z-1}\right)^{-a} \frac{1}{(1-z)^a} dt ,$$

haciendo el cambio de variable  $1-t = t'$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t'^{b-1}(1-t')^{c-b-1} \\ &\quad \times \left[ (1-z) \left( 1 - \frac{(1-t')z}{z-1} \right) \right]^{-a} dt' , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^a} {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt, \\ &= {}_2F_1(a, b, c; z). \end{aligned}$$

b) Directo usando a) y la relación de simetría

$${}_2F_1(a, b, c; z) = {}_2F_1(b, a, c; z).$$

c) y d) Tarea.

Consideremos la expansión en serie de la función  $\ln(1+z)$  con centro en  $z=0$ :

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots, \quad \text{para } |z| < 1, \\ \ln(1+z) &= z \left( 1 + \frac{1 \times 1}{2 \times 1!}(-z) + \frac{1 \times 2 \times 1 \times 2}{2 \times 3 \times 2!}(-z)^2 + \frac{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4 \times 3!}(-z)^3 + \cdots \right), \\ \ln(1+z) &= z {}_2F_1(1, 1, 2; -z) = \frac{z}{1+z} {}_2F_1\left(1, 1, 2; \frac{z}{1+z}\right). \end{aligned}$$

La última igualdad corresponde a la propiedad a) probada anteriormente. Tenemos que para  $|z| < 1$  sirve la primera expresión  $z {}_2F_1(1, 1, 2; -z)$  y no la segunda, para  $|z| > 1$  la primera expresión no nos sirve y sí la segunda. Probemos, en forma explícita, la última relación,

$$\begin{aligned} \frac{z}{1+z} {}_2F_1\left(1, 1, 2; \frac{z}{1+z}\right) &= \frac{z}{1+z} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{z}{1+z} + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{1+z} \right)^2 + \cdots \right), \\ &= \frac{z}{1+z} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{1+z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{1+z} \right)^3 + \cdots, \\ &= -\ln\left(1 - \frac{z}{1+z}\right) = -\ln\left(\frac{1}{1+z}\right) = \ln(1+z). \end{aligned}$$

## 17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente

Consideremos la ecuación diferencial de Gauss con singularidades fuchsianas en  $z=0$ ,  $z=1$  y  $z \rightarrow \infty$

$$z(z-1)\Psi'' + (1+a+b)(z-c)\Psi' + ab\Psi = 0.$$

Al reemplazar  $z = \frac{u}{b}$  nos queda

$$\frac{u}{b} \left( \frac{u}{b} - 1 \right) \frac{d^2}{dz^2} \Psi \left( \frac{u}{b} \right) + \left[ (a+b+1) \frac{u}{b} - c \right] \frac{d}{dz} \Psi \left( \frac{u}{b} \right) + ab \Psi \left( \frac{u}{b} \right) = 0. \quad (17.23)$$

Definimos  $\bar{\Psi}(u) = \Psi\left(\frac{u}{b}\right)$  y evaluamos las derivadas

$$\frac{d\Psi}{du} = \frac{d}{dz} \Psi \left( \frac{u}{b} \right) \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \frac{d}{dz} \Psi \left( \frac{u}{b} \right), \quad \frac{d^2\Psi}{du^2} = \frac{1}{b^2} \frac{d^2}{dz^2} \Psi \left( \frac{u}{b} \right).$$

Dividiendo (17.23) por  $-b$ ,

$$u \left(1 - \frac{u}{b}\right) \frac{1}{b^2} \frac{d^2}{dz^2} \Psi \left(\frac{u}{b}\right) - \left[\frac{a+1}{b} + u - c\right] \frac{1}{b} \frac{d}{dz} \Psi \left(\frac{u}{b}\right) - a \Psi \left(\frac{u}{b}\right) = 0 ,$$

$$u \left(1 - \frac{u}{b}\right) \frac{d^2 \bar{\Psi}}{du^2} - \left[\frac{a+1}{b} + u - c\right] \frac{d \bar{\Psi}}{du} - a \bar{\Psi} = 0 .$$

Simplificando la notación, cambiamos la variable de  $u$  a  $z$  y la función de  $\bar{\Psi}$  a  $\Psi$ . Además, haciendo tender  $b \rightarrow \infty$  obtenemos:

$$\boxed{z \Psi''(z) + (c - z) \Psi'(z) - a \Psi(z) = 0 .} \quad (17.24)$$

La anterior es conocida como *la ecuación hipergeométrica confluyente* y su solución se denota por  ${}_1F_1(a, c; z)$ . Esta ecuación tiene una singularidad fuchsiana en  $z = 0$  y una singularidad esencial en  $z = \infty$ . Una de las soluciones en torno a  $z = 0$  es:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1 \left(a, b, c; \frac{z}{b}\right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{abz}{1c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \times 2 \times c(c+1)} \frac{z^2}{b^2} + \dots\right] ,$$

$${}_1F_1(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots . \quad (17.25)$$

Esta serie es conocida como *la serie hipergeométrica confluyente*. Tiene radio de convergencia infinito siempre que  $c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ . La otra solución de la ecuación diferencial es:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{b}\right)^{1-c} {}_2F_1 \left(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; \frac{z}{b}\right) = z^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c; z) , \quad (17.26)$$

con  $c \neq 1, 2, 3, \dots$

### Proposiciones

- a)  $e^z = {}_1F_1(a, a; z)$ .
- b)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(z) = z {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z^2\right)$ .
- c)  ${}_1F_1(a, c; z) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 (1-t)^{c-a-1} t^{a-1} e^{zt} dt$ .
- d)  ${}_1F_1(a, c; z) = e^z {}_1F_1(c-a, c; -z)$ .

### Demostraciones

a) Directa a partir de la definición dada en (17.26).

b)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(z) &= \int_0^z e^{-t^2} dt = \int_0^z \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \dots\right) dt , \\ &= z - \frac{z^3}{3 \times 1!} + \frac{z^5}{5 \times 2!} - \frac{z^7}{7 \times 3!} + \dots , \\ &= z \left(1 - \frac{1/2}{3/2} \frac{z^2}{1!} + \frac{1/2 \times 3/2}{3/2 \times 5/2} \frac{z^4}{2!} + \dots\right) , \\ &= z {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z^2\right) . \end{aligned}$$

c) y d) Tarea.





# Capítulo 18

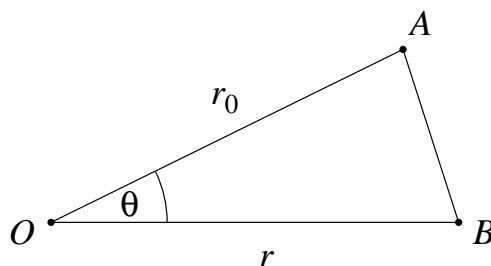
## Polinomios de Legendre

versión final 3.6-13 enero 2003

### 18.1. Función generatriz

En diversos problemas físicos (gravitación, electrostática, etc.) nos encontramos con fuerzas que dependen del inverso de la distancia entre dos cuerpos. Los polinomios de Legendre aparecen naturalmente en el problema geométrico de determinar esta distancia inversa, lo cual los vincula con numerosas situaciones de interés físico.

Consideremos dos radios  $r_0$  y  $r$  que unen un punto  $O$  con dos puntos,  $A$  y  $B$ , respectivamente:



La distancia  $d = \overline{AB}$  está dada por:

$$d = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta} .$$

Definamos

$$x = \cos \theta , \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

Si  $r > r_0$  y  $s = r_0/r < 1$ , conviene escribir

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}} .$$

Si, por el contrario,  $r < r_0$ , y  $s = r/r_0 < 1$ :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}} .$$

En ambos casos, la segunda fracción es la misma y resulta ser precisamente la función generatriz de los polinomios de Legendre.

**Definición 18.1**

$$\psi(x, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2xs}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^n \quad (18.1)$$

es la función generatriz de los polinomios de Legendre  $P_n(x)$ .

Observemos que  $\psi(x, s)$  puede ser expandida en serie de Taylor en el argumento  $(s^2 - 2xs)$ :

$$\begin{aligned} \psi(x, s) &= [1 + (s^2 - 2xs)]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(s^2 - 2xs) + \frac{3}{8}(s^2 - 2xs)^2 - \dots \\ &= 1 + xs + \frac{1}{2}(3x^2 - 1)s^2 - \dots , \end{aligned}$$

lo cual nos permite encontrar expresiones explícitas para los polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1 , \quad (18.2a)$$

$$P_1(x) = x , \quad (18.2b)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) , \quad (18.2c)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \dots \quad (18.2d)$$

Considerando el caso particular  $x = 1$  en (18.1):

$$\psi(1, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2s}} = \frac{1}{1 - s} = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) s^n .$$

Luego

$$P_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 . \quad (18.3)$$

Análogamente, tomando  $x = -1$ :

$$\psi(-1, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 + 2s}} = \frac{1}{1 + s} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1) s^n .$$

Luego

$$P_n(-1) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 . \quad (18.4)$$

También es inmediato evaluar  $P_n(0)$ :

$$\psi(0, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} = 1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{8}s^4 + \dots = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu - 1)!!}{(2\nu)!!} s^{2\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) s^n ,$$

luego

$$\begin{aligned} P_n(0) &= 0 \quad \text{si } n \text{ es impar,} \\ P_{2\nu}(0) &= (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \quad \text{si } \nu \geq 1, \\ P_0(0) &= 1. \end{aligned}$$

## 18.2. Relaciones de recurrencia

1) Derivemos (18.1) respecto a  $s$ .

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{1}{2}(1+s^2-2xs)^{-3/2}(2s-2x) = \frac{x-s}{1+s^2-2xs} \psi = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) s^{n-1},$$

es decir

$$(1+s^2-2xs) \frac{\partial \psi}{\partial s} - (x-s)\psi = 0.$$

Introduciendo la expansión (18.1) e igualando coeficientes de  $s^n$ , se obtiene la relación de recurrencia

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0}, \quad n \geq 1, \quad (18.5a)$$

$$P_1 - xP_0 = 0. \quad (18.5b)$$

2) Escribamos los polinomios de Legendre en la forma

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m} x^m. \quad (18.6)$$

Reemplazando en (18.5) y comparando coeficientes de  $x^{m+1}$  se sigue que:

$$\begin{aligned} (n+1) a_{(n+1),(n+1)} &= (2n+1) a_{n,n}, \\ a_{m,m} &= \frac{2m-1}{m} a_{m-1,m-1}, \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (18.7)$$

Ésta es una relación de recurrencia entre los coeficientes supremos de los polinomios de Legendre. Puesto que  $a_{00} = 1$  [relaciones (18.2)], se sigue que

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}, \quad a_{33} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots$$

y en general

$$a_{nn} = \frac{(2n-1)!!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \quad (18.8)$$

3) Derivando (18.1) respecto a  $x$  se obtiene:

$$\boxed{xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)} \quad (18.9)$$

Derivando (18.5) respecto a  $x$ , y combinándola con (18.9) para eliminar el término en  $P'_n(x)$ :

$$\boxed{P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)} \quad (18.10)$$

Restando (18.9) y (18.10):

$$\boxed{P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)} \quad (18.11)$$

### 18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$

Consideremos (18.1) y expandamos  $\psi(x, s)$  en serie de Taylor:

$$\psi(x, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + (s^2 - 2sx)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (s^2 - 2sx)^k ,$$

donde

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)!}{k!(-\frac{1}{2} - k)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{k!(-\frac{1}{2} - k)!} .$$

Por su parte,

$$(s^2 - 2sx)^k = \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} s^{2\mu} (-2sx)^{k-\mu} ,$$

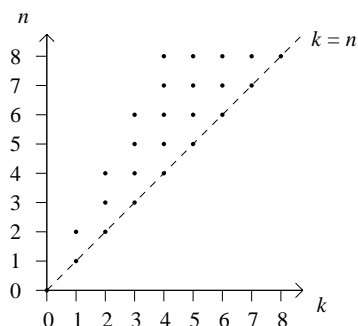
de modo que

$$\psi(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^k \binom{-1/2}{k} \binom{k}{\mu} (-2x)^{k-\mu} s^{k+\mu} .$$

Sea  $n = k + \mu$ . Entonces

$$\psi(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{2k} \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n} s^n .$$

Deseamos intercambiar el orden de las sumas. Para ello observemos la siguiente figura:



Efectuar la doble suma equivale a sumar sobre los pares ordenados  $(k, n)$  indicados con puntos en la figura. El orden en que se realizan las sumas corresponde a desplazarnos sobre el eje horizontal, escoger un valor de  $k$ , y luego desplazarnos sobre el eje vertical, recorriendo los valores de  $n$  entre  $n = k$  y  $n = 2k$ . Equivalentemente, podemos desplazarnos primero sobre el eje vertical, escoger un valor de  $n$ , y luego recorrer los puntos horizontalmente entre los límites  $k = [(n+1)/2]$  y  $k = n$ . Así, la doble suma se puede escribir:

$$\psi(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^n \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n} s^n,$$

donde

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil &\equiv \frac{n}{2} && \text{si } n \text{ es par,} \\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil &\equiv \frac{n+1}{2} && \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Comparando con (18.1), identificamos

$$P_n(x) = \sum_{k=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^n \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n}.$$

Definiendo  $\mu = n - k$ , el límite inferior de la suma corresponde a  $\mu = n - [(n+1)/2] = [n/2]$ , de modo que

$$P_n(x) = \sum_{\mu=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^0 = \binom{-1/2}{n-\mu} \binom{n-\mu}{\mu} (-2)^{n-2\mu} x^{n-2\mu},$$

o bien

$$P_n(x) = \sum_{\mu=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{(-1)^\mu (2n-2\mu)!}{2^n (n-\mu)! (n-2\mu)! \mu!} x^{n-2\mu} \quad (18.12)$$

De (18.12) es fácil deducir que:

- $P_n(x)$  es par si  $n$  es par.
- $P_n(x)$  es impar si  $n$  es impar.

## 18.4. Fórmula de Rodrigues

Puesto que

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-\mu)} = \frac{(2n-2\mu)!}{(n-2\mu)!} x^{n-2\mu},$$

(18.12) se puede reescribir en la forma:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\mu \frac{1}{\mu!(n-\mu)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-\mu)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\mu \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} x^{2(n-\mu)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n ,
 \end{aligned}$$

obteniéndose la *fórmula de Rodrigues*:

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n} \quad (18.13)$$

La fórmula de Rodrigues nos permite demostrar fácilmente diversas propiedades de los polinomios de Legendre, como veremos en las siguientes secciones.

## 18.5. Ecuación diferencial de Legendre

Nos interesa ahora determinar la ecuación diferencial de la cual los polinomios de Legendre son solución. Sea

$$u(x) = (x^2 - 1)^n .$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= n(x^2 - 1)^{n-1} 2x , \\
 (x^2 - 1)u'(x) &= 2nx(x^2 - 1)^n = 2nxu(x) , \\
 \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(x^2 - 1)u'(x)] &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} 2nxu(x) .
 \end{aligned}$$

Desarrollando las derivadas de productos a ambos lados de esta expresión:

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1} 2xu^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{2} 2u^{(n)}(x) = \\
 2nxu^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} 2nu^{(n)}(x) ,
 \end{aligned}$$

$$(x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2xu^{(n+1)}(x) - n(n+1)u^{(n)}(x) = 0 .$$

Luego, con (18.13), obtenemos la *ecuación diferencial de Legendre*:

$$\boxed{(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0} \quad (18.14)$$

## 18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$

**Proposición 18.1**  $P_n(x)$  tiene lugares nulos simples en el intervalo  $(-1, 1)$ .

**Demostración** Sea  $u(x) = (x^2 - 1)^n$ . Entonces  $u(x)$  tiene lugares nulos de multiplicidad  $n$  en  $x = \pm 1$ . Como  $u(-1) = u(1) = 0$ , por el teorema del valor medio  $u'(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in (-1, 1)$ . Pero  $u'(-1) = u'(1) = 0$ , luego también es cierto que  $u''(x)$  se anula dos veces en  $(-1, 1)$ , una vez en  $(-1, x_0)$  y otra vez en  $(x_0, 1)$ . Procediendo sucesivamente, se encuentra que  $u^{(n)}(x)$  se anula  $n$  veces en  $(-1, 1)$ .

Estos ceros son necesariamente simples, dada la condición de polinomios ortogonales de los polinomios de Legendre (sección 18.7 y teorema 11.2).

q.e.d.

## 18.7. Relación de ortogonalidad

Supongamos  $0 \leq m < n$ , y observemos que, por la fórmula de Rodrigues (18.13):

$$2^n n! \int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = \int_{-1}^1 t^m u^{(n)}(t) dt ,$$

donde  $u(t) = (t^2 - 1)^n$ . Integrando por partes:

$$2^n n! \int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = t^m u^{(n-1)}(t) \Big|_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 t^{m-1} u^{(n-1)}(t) dt .$$

El término de borde es cero pues  $u^{(m)}(\pm 1) = 0$  si  $m < n$ . Análogamente, integrando por partes  $m$  veces:

$$2^n n! \int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = (-1)^m m! \int_{-1}^1 u^{(n-m)}(t) dt = (-1)^m m! u^{(n-m-1)}(t) \Big|_{-1}^1 = 0 .$$

Luego  $P_n(x)$  es ortogonal a todo polinomio de grado  $m < n$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , en particular a  $P_m(x)$ .

En el caso  $m = n$ , el producto interno entre los polinomios de Legendre es:

$$(2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \int_{-1}^1 u^{(n)}(t) u^{(n)}(t) dt .$$

Integrando por partes:

$$(2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = u^{(n)} u^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u^{(n+1)}(t) u^{(n-1)}(t) dt = - \int_{-1}^1 u^{(n+1)}(t) u^{(n-1)}(t) dt ,$$

pues el término de borde es nulo. Así, integrando por partes  $n$  veces:

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= (-1)^n \int_{-1}^1 u^{(2n)}(t) u(t) dt \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} [(t^2 - 1)^n] (t^2 - 1)^n dt . \end{aligned}$$

Usando que  $\frac{d^{2n}}{dt^{2n}} [(t^2 - 1)^n] = (2n)!$ ,

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (-1)^n (1 - t^2)^n dt \\ &= (2n)! \int_{-1}^1 (1 - t)^n (1 + t)^n dt . \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= (2n)! \left[ (1 - t)^n \frac{(1 + t)^{n+1}}{n + 1} \Big|_{-1}^1 + \frac{n}{n + 1} \int_{-1}^1 (1 - t)^{n-1} (1 + t)^{n+1} dt \right] \\ &= (2n)! \frac{n}{n + 1} \int_{-1}^1 (1 - t)^{n-1} (1 + t)^{n+1} dt \end{aligned}$$

Análogamente, integrando por partes  $n$  veces:

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= (2n)! \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2) \cdots 2n} \int_{-1}^1 1 \cdot (1 + t)^{2n} dt \\ &= (2n)! n! \frac{n!}{(2n)!} \frac{1}{2n + 1} (1 + t)^{2n+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n + 1} . \end{aligned}$$

Obtenemos así la *relación de ortogonalidad*:

$$\boxed{\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm}} \quad (18.15)$$

## 18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$

Sabemos, por el Teorema de Cauchy, que una función analítica se puede escribir en términos de una integral de contorno:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(u)}{(u - z)^{n+1}} du .$$

Sea

$$f(z) = \frac{1}{2^n n!} (z^2 - 1)^n .$$



Entonces los polinomios de Legendre se pueden escribir en la forma:

$$P_n(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \frac{1}{2^n n!} \oint \frac{(u^2 - 1)^n}{(u - z)^{n+1}} du ,$$

obteniéndose la *fórmula de Schläfli*:

$$\boxed{P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(u^2 - 1)^n}{(u - z)^{n+1}} du} \quad (18.16)$$

Integremos sobre una circunferencia de centro  $z$  y radio  $\rho$ . Entonces

$$\begin{aligned} u &= z + \rho e^{i\phi} , & 0 \leq \phi < 2\pi , \\ du &= i\rho e^{i\phi} d\phi = i(u - z)d\phi , \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{u^2 - 1}{u - z} &= \frac{z^2 + 2z\rho e^{i\phi} + \rho^2 e^{2i\phi} - 1}{\rho e^{i\phi}} \\ &= \frac{1}{\rho} [(z^2 - 1)e^{-i\phi} + 2z\rho + \rho^2 e^{i\phi}] , \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^n} [(z^2 - 1)e^{-i\phi} + 2z\rho + \rho^2 e^{i\phi}]^n i d\phi \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^n} \int_0^{2\pi} [(z^2 - 1)e^{-i\phi} + 2z\rho + \rho^2 e^{i\phi}]^n d\phi . \end{aligned}$$

Si  $z \neq \pm 1$  podemos tomar  $\rho = \sqrt{z^2 - 1}$ , con lo cual la relación anterior queda:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^n} \int_0^{2\pi} [\rho^2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + 2z\rho]^n d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi})}{2} + \frac{2z\rho}{2\rho} \right]^n d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\rho \cos \phi + z]^n d\phi . \end{aligned}$$

Se obtiene así la *relación de Laplace*:

$$\boxed{P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \phi]^n d\phi} \quad (18.17)$$

Para  $z = \pm 1$  tenemos simplemente

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n .$$

**Corolario**  $|P_n(x)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \forall x \in [-1, 1]$ .

**Demostración** Sea  $x \in [-1, 1]$ . Adoptamos la convención de que la raíz cuadrada es un número positivo, y escribimos

$$\sqrt{x^2 - 1} = i\sqrt{1 - x^2}.$$

El integrando en (18.17) satisface:

$$\left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \phi \right|^2 = x^2 + (1 - x^2) \cos^2 \phi \leq x^2 + 1 - x^2 = 1,$$

luego

$$\left( \left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \phi \right|^2 \right)^{n/2} \leq 1.$$

Así,

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \phi \right|^n d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = 1.$$

q.e.d.

Poniendo  $z = \cos \theta$  en (18.17),  $\sqrt{z^2 - 1} = i \sin \theta$ , se obtiene la representación adicional:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^n d\phi,$$

$$\boxed{P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^n d\phi} \quad (18.18)$$

## 18.9. Serie de Legendre

Los polinomios de Legendre, siendo ortogonales en  $[-1, 1]$ , son candidatos a ser una base en ese intervalo, de modo que una función arbitraria podría ser escrita como una combinación lineal de los  $P_n$ . Estudiemos esta posibilidad.

Si la serie  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$  converge uniformemente en  $[-1, 1]$  y representa allí a  $f(x)$ , es decir,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x),$$

entonces

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_{-1}^1 P_\nu(x) P_n(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \delta_{\nu n} \frac{2}{2n+1} = \frac{2a_n}{2n+1}.$$

Entonces los *coeficientes de Fourier* de  $f(x)$  respecto a los polinomios de Legendre están dados por:

$$a_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (18.19)$$

A la inversa: Sea  $f(x)$  una función dada, acotada y seccionalmente continua en  $[-1, 1]$ . Entonces se pueden calcular los coeficientes de Fourier  $a_\nu$  respecto a  $P_\nu$  y construir la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) .$$

¿Converge la serie? Si converge, ¿representa a  $f(x)$ ?

Para saberlo, tomemos el módulo de (18.19):

$$|a_n| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 |f(x)| |P_n(x)| dx .$$

Sea  $M = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ . Como  $|P_n(x)| \leq 1$ ,

$$|a_n| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) 2M = (2n + 1)M .$$

Por otra parte, si  $f'$  existe y es continua en  $[-1, 1]$ , entonces para  $n > 0$  se tiene

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx .$$

Integrando por partes,

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[ f(x) \int_{-1}^x P_n(x') dx' \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(x) \int_{-1}^x P_n(x') dx' dx \right] .$$

Pero, de la relación de recurrencia (18.10),

$$\int_{-1}^x P_n(x') dx' = \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] ,$$

con lo cual

$$a_n = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(x) [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] dx .$$

Así,

$$|a_n| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f'(x)| (|P_{n+1}(x)| + |P_{n-1}(x)|) dx \leq \int_{-1}^1 |f'(x)| dx \equiv 2M' ,$$

donde

$$M' = \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| .$$

Realizando el mismo procedimiento suponiendo que  $f''$  es seccionalmente continua en  $[-1, 1]$  se obtiene que

$$|a_n| \simeq \frac{1}{n^2} A ,$$

para  $n$  suficientemente grande, y  $A$  cierta constante. Por tanto,  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  converge, luego  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$  converge uniformemente.

Ahora nos preguntamos: Dada una función  $f$ , calculamos los coeficientes  $a_n$  y sabemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$  converge uniformemente. ¿Representa esta serie de Legendre la función  $f(x)$ ? Para responder, consideremos la diferencia entre la serie y la función  $f(x)$ :

$$g(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}(x) .$$

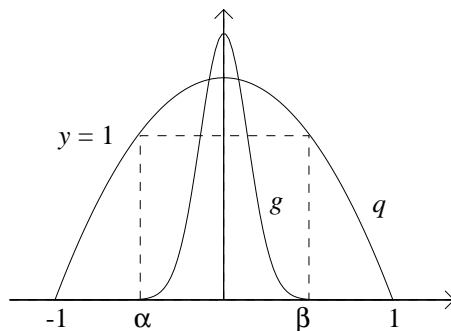
Los coeficientes de Fourier de  $g(x)$  son:

$$\begin{aligned} b_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[ \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \int_{-1}^1 P_{\nu}(x) P_n(x) dx \right] \\ &= a_n - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \delta_{n\nu} = 0 . \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$g(x) \equiv 0 .$$

**Demostración** Supongamos que  $g(x) \neq 0$  en un intervalo  $[\alpha, \beta] \in [-1, 1]$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos además que  $g(x) > 0$  en este intervalo. Sea  $q(x)$  un polinomio de grado dos tal que  $q(\alpha) = q(\beta) = 1$  y  $q(x) < 1$  en  $[-1, \alpha] \cup [\beta, 1]$ . Gráficamente:



Luego

$$\int_{-1}^1 g q^k \xrightarrow{k \gg 1} \int_{\alpha}^{\beta} g q^k > 0 .$$

Pero  $g(x)$  es ortogonal a todos los polinomios  $P_n(x)$ , y por tanto a todo polinomio, luego

$$\int_{-1}^1 g q^k = 0 ,$$

lo que contradice nuestro resultado anterior.

Por lo tanto  $g(x) \equiv 0$ .

q.e.d.

Luego,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}(x) .$$

## 18.10. Funciones asociadas de Legendre

Una manera de obtener la ecuación asociada de Legendre es partir de la ecuación regular de Legendre (18.14)

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 , \quad (18.14)$$

y con la ayuda de la fórmula de Leibniz, para la derivada  $n$ -ésima de un producto de funciones,

$$\frac{d^n}{dx^n}[A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^n \frac{n!}{(n-s)!s!} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}}A(x) \frac{d^s}{dx^s}B(x) , \quad (18.20)$$

diferenciála  $m$  veces obteniendo:

$$(1 - x)^2 u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0 , \quad (18.21)$$

donde

$$u(x) \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) .$$

Reemplazando

$$\psi(x) = (1 - x^2)^{m/2} u(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) ,$$

resolviendo para  $u$  y diferenciando,

$$\begin{aligned} u' &= \left( \psi' + \frac{mx\psi}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{-m/2} , \\ u'' &= \left[ \psi'' + \frac{2mx\psi'}{1-x^2} + \frac{m\psi}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2\psi}{(1-x^2)^2} \right] (1-x^2)^{-m/2} . \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (18.21), encontramos que  $\psi$  satisface la ecuación diferencial

$$\boxed{(1 - x^2) \psi'' - 2x \psi' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \psi = 0 .} \quad (18.22)$$

La cual es conocida como *la ecuación asociada de Legendre*. Para reobtener la ecuación de Legendre (18.14) basta tomar  $m = 0$ . Haciendo el cambio de variable  $x = \cos \theta$ , obtenemos la ecuación expresada en coordenadas polares, que es la forma usual en que nos la vamos a encontrar

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \psi = 0 . \quad (18.23)$$

Las soluciones regulares, denotadas por  $P_n^m(x)$ , son:

$$\psi(x) = P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) . \quad (18.24)$$

Ocasionalmente los  $P_n^m(x)$  aparecen en su definición con un factor  $(-1)^m$ , por ejemplo en *Classical Electrodynamics, Second Edition* de J.D. Jackson, esta elección es conocida como fase de Magnus y Oberhettinger o de Condon y Shortley. Nosotros incluiremos esta fase en la definición de los armónicos esféricos, al estilo seguido en *Mathematical Methods for Physicists*,

*Fourth Edition* de G.B. Arfken y H.J. Weber. A pesar de que el factor de fase se introduce en distintos puntos de las definiciones los armónicos esféricos resultantes son iguales.

Algunos ejemplos de funciones asociadas de Legendre

$$\begin{aligned}
P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} = \sin \theta , \\
P_2^1(x) &= 3x (1-x^2)^{1/2} = 3 \cos \theta \sin \theta , \\
P_2^2(x) &= 3(1-x^2) = 3 \sin^2 \theta , \\
P_3^1(x) &= \frac{3}{2} (5x^2-1) (1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta , \\
P_3^2(x) &= 15x (1-x^2) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta , \\
P_3^3(x) &= 15 (1-x^2)^{3/2} = 15 \sin^3 \theta , \\
P_4^1(x) &= \frac{5}{2} (7x^3-3x) (1-x^2)^{1/2} = \frac{5}{2} (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta , \\
P_4^2(x) &= \frac{15}{2} (7x^2-1) (1-x^2) = \frac{15}{2} (7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta , \\
P_4^3(x) &= 105x (1-x^2)^{3/2} = 105 \cos \theta \sin^3 \theta , \\
P_4^4(x) &= 105 (1-x^2)^2 = 105 \sin^4 \theta .
\end{aligned} \tag{18.25}$$

La relación entre  $P_n^m$  y  $P_n^{-m}$  es:

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) . \tag{18.26}$$

La función generatriz de las funciones asociadas de Legendre

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu+m}^m(x) t^\nu . \tag{18.27}$$

Las relaciones de recurrencia que satisfacen las funciones asociadas de Legendre

$$P_n^{m+1} - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m + [n(n+1) - m(m-1)] P_n^{m-1} = 0 , \tag{18.28}$$

$$(n+m) P_{n-1}^m + (n-m+1) P_{n+1}^m = (2n+1) x P_n^m , \tag{18.29}$$

$$\frac{1}{2} P_n^{m+1} - \frac{1}{2} (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1} = (1-x^2)^{1/2} P_n^{m'} , \tag{18.30}$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{1/2} P_n^m = P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m-1} , \tag{18.31}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+m)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1} \\
&\quad - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1} .
\end{aligned} \tag{18.32}$$

La relación de paridad satisfecha por las funciones asociadas de Legendre es

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x) . \tag{18.33}$$

Además, se satisface en los extremos que

$$P_n^m(\pm 1) = 0 \quad \text{para } m \neq 0. \tag{18.34}$$

Las funciones asociadas de Legendre satisfacen distintas relaciones de ortogonalidad dependiendo sobre cual índice se tomen. La primera:

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq} , \quad (18.35)$$

en coordenadas polares

$$\int_0^\pi P_p^m(\cos \theta) P_q^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq} . \quad (18.36)$$

Sobre el otro índice

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^k(x) (1-x^2)^{-1} dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{mk} . \quad (18.37)$$

## 18.11. Problema de Sturm-Liouville asociado

La ecuación asociada de Legendre (18.22) o (18.23) se puede reescribir en la forma

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] - \frac{m^2}{1-x^2} y + n(n+1)y = 0 . \quad (18.38)$$

La condición de borde

$$y(\pm 1) \text{ finito} \quad (18.39)$$

asegura que las soluciones sean las funciones asociadas de Legendre [ver (18.34), (18.3) y (18.4)]. Claramente, esto corresponde a un problema de autovalores de un operador diferencial autoadjunto de la forma general (14.7), con  $A(x) = (1-x^2)$ ,  $B(x) = -m^2/(1-x^2)$ , y donde el problema de autovalores está caracterizado por una función de peso  $w(x) = 1$ , y autovalores  $\lambda = n(n+1)$  (ver tabla en Sección 14.4).

La relevancia física de este problema se aprecia al considerar ecuaciones que contengan el laplaciano:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + f(r) \Psi(\vec{r}) = 0 , \quad (18.40)$$

Estas ecuaciones aparecen frecuentemente en Física, ya sea para encontrar el potencial electrostático debido a una distribución de cargas [ $f(r) = 0$ ], los modos normales de oscilación de un medio continuo (una cavidad esférica, una membrana, etc.) [ $f(r) = k^2$ ], o, en Mecánica Cuántica, la dependencia espacial de una función de onda en un potencial central dado por  $f(r)$ .

Si el problema tiene simetría esférica (potencial fuera de un conductor esférico, ondas en una cavidad esférica, problema cuántico con potencial coulombiano, etc.), conviene resolver este problema mediante separación de variables, en coordenadas esféricas. Como la única dependencia angular proviene del operador laplaciano, se obtiene la siguiente ecuación tras la separación de variables:

$$\frac{\Phi(\phi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \lambda \Theta(\theta) \Phi(\phi) = 0 . \quad (18.41)$$

La dependencia azimutal satisface

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = m^2, \quad (18.42)$$

con soluciones

$$\Phi(\phi) = \{e^{-im\phi}, e^{im\phi}\}. \quad (18.43)$$

Las cuales satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{m_1}^*(\phi) \Phi_{m_2}(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} e^{-im_1\phi} e^{im_2\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m_1 m_2}. \quad (18.44)$$

En la mayoría de los problemas físicos requerimos que  $m$  sea un entero para que  $\Phi(\phi)$ , sea una función monovaluada del ángulo azimutal. Dada la relación (18.44)

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad (18.45)$$

es un conjunto de funciones ortonormales con respecto a la integración sobre el ángulo azimutal  $\phi$ . Separando la dependencia azimutal, la dependencia en el ángulo polar  $\theta$  conduce a una ecuación asociada de Legendre

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0. \quad (18.46)$$

Nos aseguramos de que las soluciones no diverjan en  $\cos \theta = \pm 1$  poniendo  $\lambda = n(n+1)$ , pues en ese caso esta ecuación tiene por solución las funciones asociadas de Legendre  $\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta)$ . Por tanto, cualquier problema laplaciano con simetría esférica corresponde a un problema de autovalores de un operador autoadjunto (problema de Sturm-Liouville). Las soluciones de este problema serán ortogonales para distintos autovalores, y se podrá construir una base del espacio de soluciones con ellas. En otras palabras, la parte angular de cualquier solución de la ecuación diferencial (18.40) se podrá escribir como una combinación lineal de los  $P_n^m(\cos \theta)$ .

Puesto que los polinomios de Legendre se reobtienen con  $m = 0$ , se sigue que gran parte de la discusión en las secciones 18.7 y 18.9 es sólo una manifestación de estas conclusiones generales.



## 18.12. Armónicos esféricos

En la sección anterior mostramos que la parte angular de un problema laplaciano con simetría esférica consta de dos partes:

$$\Theta(\theta)\Phi(\phi) = A_{nm}P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi} ,$$

con  $A_{nm}$  una cierta constante de normalización,  $m$  entero, positivo o negativo, si la función debe ser mono-valuada en la variable  $\phi$ , y  $n$  entero para que las soluciones no diverjan en  $\cos\theta = \pm 1$ .

La definición (18.24) en principio sólo contempla  $m > 0$ . Para incluir valores negativos de  $m$  usamos la fórmula de Rodrigues en la definición de  $P_n^m(\cos\theta)$ :

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n , \quad -n \leq m \leq n . \quad (18.47)$$

Normalizando las función asociadas de Legendre

$$\mathcal{P}_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) , \quad -n \leq m \leq n . \quad (18.48)$$

Ahora bien, la función  $\Phi_m(\phi) = e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}$  es ortonormal con respecto al ángulo azimutal  $\phi$ , y la función  $\mathcal{P}_n^m(\cos\theta)$  es ortonormal con respecto al ángulo polar  $\theta$ . Consideramos entonces el producto de ambas y definimos los *armónicos esféricos*:

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = Y_n^m(\theta, \phi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} , \quad (18.49)$$

que son funciones en los dos ángulos, ortonormales sobre la superficie esférica. La integral completa de ortogonalidad es

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1*}(\theta, \phi) Y_{n_2}^{m_2}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2} , \quad (18.50)$$

o bien,

$$\int_{4\pi} Y_{n_1}^{m_1*}(\Omega) Y_{n_2}^{m_2}(\Omega) d\Omega = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2} , \quad (18.51)$$

donde  $\Omega$  es el ángulo sólido.

A continuación, una lista de los primeros armónicos esféricos:

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} , \\
Y_1^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{i\phi} , \\
Y_1^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta , \\
Y_1^{-1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{-i\phi} , \\
Y_2^2(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2 \theta e^{2i\phi} , \\
Y_2^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{i\phi} , \\
Y_2^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) , \\
Y_2^{-1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{-i\phi} , \\
Y_2^{-2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2 \theta e^{-2i\phi} .
\end{aligned} \tag{18.52}$$

Parte de la importancia de los armónicos esféricos yace en la propiedad de completitud. Esta propiedad, en este caso, significa que cualquier función  $f(\theta, \phi)$ , con las suficientes propiedades de continuidad, evaluada sobre la superficie de la esfera puede ser expandida en una uniformemente convergente doble serie de armónicos esféricos, conocida como serie de Laplace,

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m,n} a_{mn} Y_n^m(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{mn} Y_n^m(\theta, \phi) . \tag{18.53}$$

Si  $f(\theta, \phi)$  es conocida, los coeficientes pueden ser inmediatamente encontrados por el uso de la integral de ortogonalidad (18.50).

Una propiedad importante que satisfacen los armónicos esféricos es:

$$Y_n^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_n^{m*}(\theta, \phi) . \tag{18.54}$$

Consideremos a continuación dos direcciones en coordenadas polares esféricas en un espacio tridimensional,  $(\theta_1, \phi_1)$  y  $(\theta_2, \phi_2)$ . El ángulo entre las dos direcciones lo denotamos  $\gamma$ . Este ángulo satisface la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) . \tag{18.55}$$

El *teorema de adición para los armónicos esféricos* afirma que

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n (-1)^m Y_n^m(\theta_1, \phi_1) Y_n^{-m}(\theta_2, \phi_2) , \tag{18.56}$$

o equivalentemente

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_1, \phi_1) Y_n^{m*}(\theta_2, \phi_2) . \quad (18.57)$$

En términos de los polinomios de Legendre

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \theta_1) P_n(\cos \theta_2) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_1) P_n^m(\cos \theta_2) \cos[m(\phi_1 - \phi_2)] . \quad (18.58)$$

La ecuación (18.55) es un caso especial de la ecuación (18.58).

### 18.13. Segunda solución de la ecuación de Legendre

Los polinomios de Legendre son solución de la ecuación diferencial (18.14). Pero ésta es una ecuación de segundo grado, y por tanto debe existir otra solución, linealmente independiente a los  $P_n(x)$ . La encontraremos observando que los polinomios de Legendre son un caso particular de la función hipergeométrica. En efecto, consideremos la ecuación hipergeométrica general:

$$W'' + \left( \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-A} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-B} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-C} \right) W' - \left( \frac{\alpha\alpha'}{(z-A)(B-C)} + \frac{\beta\beta'}{(z-B)(C-A)} + \frac{\gamma\gamma'}{(z-C)(A-B)} \right) \frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{(z-A)(z-B)(z-C)} W = 0 ,$$

con soluciones

$$P \left\{ \begin{matrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right\} .$$

Considerando el caso particular

$$\begin{aligned} A &= -1 , & B &= 1 , & C &= \infty , \\ \alpha &= \alpha' = 0 , & \beta &= \beta' = 0 , & \gamma &= -n , & \gamma' &= n+1 , \end{aligned} \quad (18.59)$$

que satisface la condición  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ , la ecuación hipergeométrica queda

$$W'' + \left( \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \right) W' - \frac{n(n+1)}{(z+1)(z-1)} W = 0 ,$$

es decir

$$\boxed{(z^2 - 1)W'' + 2zW' - n(n+1)W = 0} \quad (18.60)$$

que es la *ecuación diferencial de Legendre* ya encontrada en (18.14).

Los polinomios de Legendre se pueden escribir entonces como la función

$$P_n(z) = P \left\{ \begin{matrix} -1 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & n+1 \end{matrix} \right\} . \quad (18.61)$$

Así pues, la ecuación de Legendre tiene singularidades Fuchsianas en  $-1$ ,  $1$  e  $\infty$ . Las raíces de la ecuación indicial en torno a  $\pm 1$  son ambas cero, por lo tanto estamos en el caso incómodo, en que el método de Frobenius sólo puede darnos una solución por serie, y la otra tiene un término logarítmico.

Observemos que la expresión (15.26) para la segunda solución de una ecuación con singularidades indica que esta solución se puede escribir en la forma  $P_n(x) \int^x u(t) dt$ , con  $u(x)$  cierta función. A partir de este hecho, se puede mostrar que la expresión

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt \quad (18.62)$$

es solución de la ecuación de Legendre. En efecto,

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) &= \int_{-1}^1 (z^2 - 1) \frac{P_n(t)}{(z-t)^3} dt - \int_{-1}^1 z \frac{P_n(t)}{(z-t)^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{t^2 - 1}{(z-t)^3} + \frac{t(z-t)}{(z-t)^3} \right] P_n(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P_n(t) \cdot \frac{dt}{(z-t)^3} + \int_{-1}^1 \frac{tP_n(t)}{(z-t)^2} dt . \end{aligned}$$

Integrando por partes la primera integral:

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) &= \left[ (t^2 - 1)P_n(t) \frac{1}{2(z-t)^2} \right] \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)P_n'(t) + 2tP_n(t)] \frac{dt}{2(z-t)^2} + \int_{-1}^1 \frac{tP_n(t)}{(z-t)^2} dt \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - 1)P_n'(t)}{2(z-t)^2} dt . \end{aligned}$$

Integrando nuevamente por partes:

$$(z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) = \left[ (t^2 - 1)P_n'(t) \frac{1}{2(z-t)} \right] \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - 1)P_n''(t) + 2tP_n'(t)}{z-t} dt .$$

Luego

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) - n(n+1)Q_n(z) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - 1)P_n''(t) + 2tP_n'(t) - n(n+1)P_n(t)}{z-t} dt . \end{aligned}$$

Pero el integrando es precisamente la ecuación de Legendre, que es satisfecha por los  $P_n$ , luego el integrando es cero y

$$(z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) - n(n+1)Q_n(z) = 0 . \quad (18.63)$$

Las funciones  $Q_n(z)$  son la *segunda solución de la ecuación de Legendre*. (18.62) se puede reescribir:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)I(z) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Q_n^*(z, t) dt , \quad (18.64a)$$

con

$$I(z) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{z-t} , \quad (18.64b)$$

$$Q_n^*(z, t) = \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z-t} . \quad (18.64c)$$

Se tiene

$$I(z) = -\ln(z-t) \Big|_{t=-1}^{t=1} = \ln(z+1) - \ln(z-1) = \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) ,$$

que es univaluado en todo el plano complejo, salvo en la recta  $-1 \leq z \leq 1$ , luego

$$I(z) = \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) , \quad \text{salvo en } -1 \leq z \leq 1. \quad (18.65)$$

El numerador de  $Q_n^*$  es un polinomio de grado  $n$ , y su denominador es un polinomio de grado 1. Se puede mostrar que  $Q_n^*$  es un polinomio de grado  $n-1$  en  $t$  y  $z$ . Así, la segunda integral en (18.64a) es un polinomio en  $z$  de grado  $n-1$ . Finalmente,

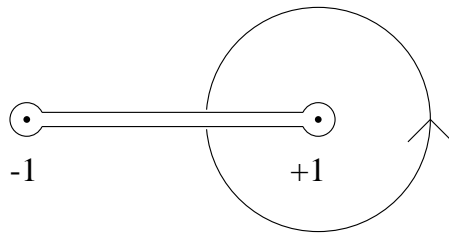
$$Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z) \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) - q_n(z) , \quad (18.66)$$

con  $q_n(z)$  un polinomio de grado  $n-1$  con coeficientes reales, que tiene el término logarítmico que esperábamos.

Para  $-1 < \xi < 1$ , (18.66) nos permite afirmar que

$$Q_n(\xi + 0i) = Q_n(\xi - 0i) - \pi i P_n(\xi) . \quad (18.67)$$

Basta considerar el circuito en torno al polo en  $z = 1$ :



**Afirmación** Si  $x$  es real,  $|x| > 1$ , entonces  $Q_n(x) \in \mathbb{R}$ .

**Demostración** Basta observar que el argumento del logaritmo en (18.66) es siempre positivo, pues el numerador y el denominador son positivos (negativos) si  $x > 1$  ( $x < 1$ ).

q.e.d.

Denominamos a las soluciones  $Q_n$  de la ecuación de Legendre, *funciones de Legendre de segunda especie*.

De las expresiones explícitas (18.64a), (18.64c) y (18.66), notamos que

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) , \quad (18.68)$$

$$Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) - 1 . \quad (18.69)$$

### Expansión en serie

Podemos utilizar (18.62) para encontrar una expansión en serie para  $Q_n$ . En efecto,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2z} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 - \frac{t}{z}} P_n(t) dt .$$

Si  $|z| > 1$ ,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2z} \sum_{\nu=n}^{\infty} \int_{-1}^1 \left( \frac{t}{z} \right)^{\nu} P_n(t) dt .$$

Observemos que todos los términos con  $\nu < n$  en la suma son cero, debido a la ortogonalidad de  $P_n(t)$  y  $t^{\nu}$ . Obtenemos así

$$Q_n(z) = \frac{b_{n+1}}{z^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{z^{n+2}} + \cdots ,$$

con

$$b_{\mu} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^{\mu-1} P_n(t) dt .$$

En particular,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^n P_n(t) dt .$$

Como

$$P_n(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n} t^n + \cdots ,$$

se tiene, dada la ortogonalidad de  $P_n(t)$  con polinomios de grado menor que  $n$ ,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \int_{-1}^1 P_n(t) P_n(t) dt = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \frac{2}{2n+1} .$$

Es decir,

$$b_{n+1} = \frac{n!}{(2n+1)!!} .$$

**Relación de recurrencia**

Obtengamos una relación de recurrencia para  $Q_n(z)$ . En general,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n Q_n(z) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Sea  $n \geq 1$ . Entonces

$$(n+1)Q_{n+1} - z(2n+1)Q_n + nQ_{n-1} = \frac{1}{2}[(n+1)P_{n+1} - z(2n+1)P_n + nP_{n-1}] \ln \left( \frac{z+1}{z-1} \right) - (\text{polinomio}).$$

El factor entre paréntesis cuadrados es cero. Sea  $|z| \rightarrow \infty$ . Entonces

$$0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} -(\text{polinomio}),$$

luego el polinomio es nulo. Por tanto, para todo  $z$ ,

$$\boxed{(n+1)Q_{n+1} - z(2n+1)Q_n + nQ_{n-1} = 0} \quad (18.70)$$

**Ejemplo** Sea  $z \notin [-1, 1]$ . Entonces

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t),$$

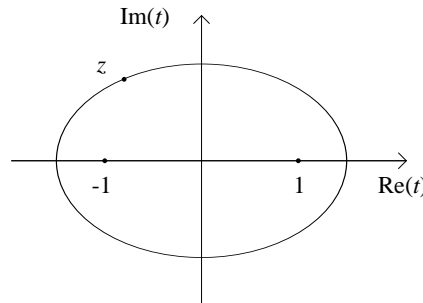
al menos en  $-1 \leq t \leq 1$ . Los coeficientes de la expansión están dados por

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt = (2n+1)Q_n(z),$$

luego

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(t)Q_n(z). \quad (18.71)$$

**Afirmación (Sin demostración)** El desarrollo (18.71) es válido en el interior de la elipse con focos en  $\pm 1$  que pasa por  $z$ :







# Capítulo 19

## La ecuación diferencial de Bessel

versión final 3.2-13 enero 2003

### 19.1. La ecuación diferencial de Bessel

Consideremos en la ecuación hipergeométrica general el caso  $A = 0$ ,  $C = \infty$ ,  $\alpha + \alpha' = 0$ ,  $\beta + \beta' = 1$  y  $\gamma + \gamma' = 0$ , lo cual esta de acuerdo con  $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$

$$\Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left[ \frac{-B\alpha\alpha'}{z^2(z-B)} + \frac{B\beta\beta'}{z(z-B)^2} + \frac{\gamma\gamma'}{z(z-B)} \right] \Psi = 0 ,$$

si consideramos además,  $\beta\beta' = \gamma\gamma' = B^2$  y tomamos el límite  $B \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\boxed{\Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) \Psi = 0 .} \quad (19.1)$$

la cual es conocida como *la ecuación diferencial de Bessel*. Esta ecuación tiene una singularidad fuchsiana en  $z = 0$  cuando  $\text{Re}(\alpha) > 0$ . Planteamos como solución

$$\Psi(z) = z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{\nu+\sigma} .$$

Sustituyendo en la ecuación (19.1)

$$z^2\Psi'' + z\Psi' - \alpha^2\Psi = -z^2\Psi ,$$

tenemos

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \{a_\nu(\nu+\sigma)(\nu+\sigma-1) + a_\nu(\nu+\sigma) - a_\nu\alpha^2\} z^{\nu+\sigma} = - \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu-2} z^{\nu+\sigma} ,$$

obteniendo

$$a_\nu [(\nu+\sigma)^2 - \alpha^2] = -a_{\nu-2} , \quad \nu = 2, 3, \dots ,$$

mientras que para  $\nu = 0$

$$a_0(\sigma^2 - \alpha^2) = 0 ,$$

lo que da una ecuación para el exponente  $\sigma^2 = \alpha^2$ , con dos soluciones,  $\sigma_1 = +\alpha$  y  $\sigma_2 = -\alpha$ . Elegimos  $\sigma = \sigma_1 = +\alpha$  y  $a_0 \neq 0$ . Para  $\nu = 1$

$$a_1(1 + 2\alpha) = 0 ,$$

lo que implica  $a_1 = 0$ . Además, usando la *fórmula recursiva* para los coeficientes

$$\boxed{a_\nu = -\frac{a_{\nu-2}}{\nu(\nu + 2\alpha)}} , \quad (19.2)$$

se puede demostrar que todos los coeficientes impares son nulos. Los coeficientes pares

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 1! (\alpha + 1)} , \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4 2! (\alpha + 1)(\alpha + 2)} , \quad \dots$$

El término general es

$$a_{2\mu} = (-1)^\mu \frac{a_0}{2^{2\mu} \mu! (\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + \mu)} .$$

Tomando

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} ,$$

se obtiene

$$\boxed{J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu! \Gamma(\mu + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu}} , \quad (19.3)$$

con  $\text{Re } \alpha \geq 0$ , conocida como función de Bessel de orden  $\alpha$ .

## 19.2. Funciones de Bessel de índice no entero

Consideremos  $\sigma = -\alpha$ . Hay solución, en este caso, linealmente independiente de  $J_\alpha$ , en forma de serie

$$J_{-\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu! \Gamma(\mu - \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu} , \quad (19.4)$$

**Ejemplo** Observemos que si  $\alpha = 1/2$ , la resta de las dos raíces  $\sigma_1 - \sigma_2 = 1/2 + 1/2 = 1 \in \mathbb{Z}$ . Sin embargo, a pesar de estar en el caso incómodo las dos soluciones todavía funcionan (habíamos encontrado un hecho similar al discutir el oscilador armónico). En efecto, consideremos  $\alpha = 1/2$ . El denominador en (19.3) se puede reescribir

$$\mu! \Gamma(\mu + 3/2) = \mu! (\mu + 1/2) \Gamma(\mu + 1/2) .$$

Pero  $\Gamma(n + 1/2) = (2n - 1)!! \sqrt{\pi} / 2^n$ , luego

$$\begin{aligned} \mu! \Gamma(\mu + 3/2) &= \mu! (\mu + 1/2) (2\mu - 1)!! \sqrt{\pi} / 2^\mu \\ &= \mu! (2\mu + 1) (2\mu - 1)!! \sqrt{\pi} / 2^{\mu+1} \\ &= \mu! (2\mu + 1)!! \sqrt{\pi} / (2^{\mu+1}) \end{aligned}$$

Y como  $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$ , de modo que

$$\mu! \Gamma(\mu + 3/2) = (2\mu + 1)! \sqrt{\pi} / 2^{2\mu+1} ,$$

se tiene finalmente

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{z}{2}} \frac{1}{z\sqrt{\pi}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu 2^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \frac{z^{2\mu+1}}{2^{2\mu}} ,$$

es decir

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!} z^{2\mu+1} . \quad (19.5)$$

La sumatoria en (19.5) es el desarrollo en serie de  $\sin z$ , luego

$$\boxed{J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}} . \quad (19.6)$$

La otra solución resulta ser

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!} z^{2\mu} , \quad (19.7)$$

o bien

$$\boxed{J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}} . \quad (19.8)$$

Sin demostración:  $J_\alpha$  para índices  $\alpha = \pm(2n+1)/2$  se expresa por fórmulas semejantes.

### 19.3. Funciones de Bessel de índice entero

Para  $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ ,  $J_n$  dada por (19.3) es holomorfa en  $z = 0$ , y en realidad holomorfa en todo el plano. Consideremos la primera función de Bessel, es decir con  $n = 0$ , y derivémosla:

$$J_0(z) = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2} \frac{z^4}{2^4} - \cdots ,$$

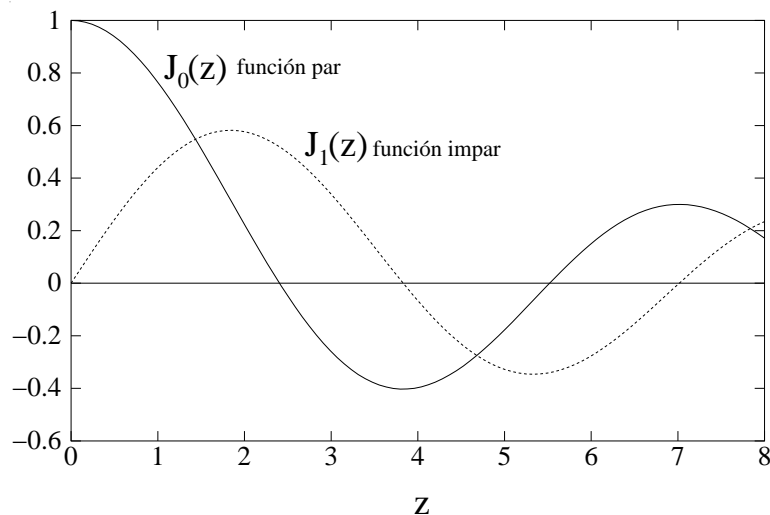
$$J_0'(z) = -\frac{2}{(1!)^2} \frac{z}{2^2} + \frac{4}{(2!)^2} \frac{z^3}{2^4} - \frac{6}{(3!)^2} \frac{z^5}{2^6} + \cdots .$$

Por otra parte, la función de Bessel de índice uno es

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{\nu}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = \frac{z}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1!)^2} \frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2} \frac{z^4}{2^4} - \cdots \right\} .$$

Comparando concluimos que

$$\boxed{J_1(z) = -J_0'(z)} . \quad (19.9)$$



Para índice entero positivo, (19.3) da

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! (\nu+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}. \quad (19.10)$$

Para índice entero pero negativo:

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! \Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}.$$

Consideraremos nulos los coeficientes con  $\nu < n$  en la función gamma (la función gamma tiene polos en  $\lambda = 0, -1, -2, \dots$ , luego  $1/\Gamma(\lambda) = 0$ ). Sea  $\mu = \nu - n$ . Luego

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu (-1)^n}{(\mu+n)! \mu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu},$$

lo que resumimos como

$$\boxed{J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)}. \quad (19.11)$$

## 19.4. Comportamiento asintótico

**Proposición 19.1** Para una variable real  $x \gg 1$ , toda solución real de la ecuación de Bessel es aproximadamente de la forma  $A \cos(x + \gamma)/\sqrt{x}$ .

**Demostración** Sea

$$\sqrt{x}\Psi(x) = u(x).$$

Despejando y diferenciando tenemos

$$\Psi(x) = x^{-1/2}u(x),$$

$$\Psi'(x) = x^{-1/2}u'(x) - \frac{1}{2}x^{-3/2}u(x),$$

$$\Psi''(x) = x^{-1/2}u''(x) - x^{-3/2}u'(x) + \frac{3}{4}x^{-5/2}u(x).$$

Sustituyendo en la ecuación de Bessel,

$$u''(x) - \frac{u'(x)}{x} + \frac{3}{4} \frac{u(x)}{x^2} + \frac{u'(x)}{x} - \frac{1}{2} \frac{u(x)}{x^2} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u(x) = 0 ,$$

quedando

$$u''(x) + \left(1 - \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\right) u(x) = 0 .$$

Para  $x$  muy grande,

$$u''(x) + u(x) = 0 , \quad \text{con solución } u(x) = A \cos(x + \gamma) ,$$

luego la solución completa es

$$\Psi(x) = A \frac{\cos(x + \gamma)}{\sqrt{x}} .$$

q.e.d.

Por otra parte, cerca de cero la función de Bessel de índice nulo se puede aproximar por

$$J_0(z) \approx 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} = \left(1 - \frac{z^2}{8}\right)^2 . \quad (19.12)$$

## 19.5. Función generatriz

Buscamos una función generatriz de las funciones de Bessel de índice entero,

$$\Psi(z, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) . \quad (19.13)$$

Usando (19.10) (que es válida también si  $n < 0$ , recordando que  $1/h! \equiv 0$  si  $h < 0$ ,  $h \in \mathbb{Z}$ ),

$$\begin{aligned} \Psi(z, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l} \left(\frac{zs}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{z}{2s}\right)^l \frac{1}{(l+n)!} \left(\frac{zs}{2}\right)^{l+n} \end{aligned}$$

Sea  $h = l + n$ . La doble suma se puede reescribir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} ,$$

pero los factores de la forma  $1/h!$  reducen la suma sobre  $h$  a ir entre 0 e  $\infty$ . Así,

$$\Psi(z, s) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{z}{2s}\right)^l \left[ \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left(\frac{zs}{2}\right)^h \right] = e^{-\frac{z}{2s}} e^{\frac{zs}{2}} .$$

De este modo, la función generatriz queda

$$\boxed{\Psi(z, s) = \exp \left[ \frac{z}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) s^n .} \quad (19.14)$$

## 19.6. Fórmulas de adición

Consideremos la función generatriz (19.14) con argumento  $z = (z_1 + z_2)/2$

$$\begin{aligned} \exp \left[ \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] &= \exp \left[ \frac{z_1}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] \exp \left[ \frac{z_2}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] , \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z_1 + z_2) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s^\mu J_\mu(z_1) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s^\nu J_\nu(z_2) . \end{aligned}$$

Comparando coeficientes para igual potencia en  $s$  tenemos

$$\boxed{J_n(z_1 + z_2) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(z_1) J_{n-\mu}(z_2) .} \quad (19.15)$$

Particularicemos (19.15) al caso  $n = 0$  y  $z_1 = z = -z_2$

$$J_0(0) = 1 = J_0^2(z) + \sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu(z) J_{-\mu}(-z) + \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{-\mu}(-z) J_\mu(z) ,$$

obteniendo

$$\boxed{1 = J_0^2(z) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu^2(z) .} \quad (19.16)$$

En el caso que la variable  $z \in \mathbb{R}$  y considerando que  $|J_0(z)| \leq 1$ , podemos acotar los  $J_\nu$  por

$$\boxed{|J_\mu(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad \text{si } \mu = 1, 2, 3, \dots} \quad (19.17)$$

Reemplazamos  $s = e^{i\varphi}$  con  $\varphi \in \mathbb{R}$ , luego

$$\frac{1}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = i \sin \varphi .$$

En la función generatriz,

$$\exp \left[ \frac{z}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \right] = \exp(iz \sin \varphi) ,$$

luego

$$\boxed{\exp(iz \operatorname{sen} \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} J_n(z) .} \quad (19.18)$$

Desarrollando, y usando (19.11),

$$\begin{aligned} \exp(iz \operatorname{sen} \varphi) &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(z)(\cos n\varphi - i \operatorname{sen} n\varphi) , \\ &= J_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(z) \cos 2m\varphi + 2i \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(z) \operatorname{sen}(2m+1)\varphi , \end{aligned}$$

Comparando partes real e imaginaria, con  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) &= J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) \cos 2m\varphi , \\ \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \varphi) &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(x) \operatorname{sen}(2m+1)\varphi . \end{aligned} \quad (19.19)$$

Sea  $\varphi = 0$ . Entonces

$$\boxed{1 = J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) .} \quad (19.20)$$

Sea  $\varphi = \pi/2$ . Entonces

$$\begin{aligned} \cos x &= J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(x) , \\ \operatorname{sen} x &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(x) . \end{aligned} \quad (19.21)$$

## 19.7. Representaciones integrales

Cambiamos el índice de suma en (19.18) a  $m$ , multipliquemos la ecuación por  $e^{-im\varphi}$  e integremos en  $\varphi$ . Se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(z \operatorname{sen} \varphi - m\varphi)) d\varphi = 2\pi J_m(z) .$$

Si  $x \in \mathbb{R}$  entonces  $J_m(x)$  es real, lo que significa

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \varphi - m\varphi) d\varphi ,$$

por paridad de la función subintegral, podemos reescribir la integral como

$$\boxed{J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi .} \quad (19.22)$$

En particular,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi + \int_{\pi/2}^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi \right] .$$

Haciendo el cambio de variable  $\theta = \varphi - \pi$ , tenemos

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi + \int_{-\pi/2}^0 \cos(x \operatorname{sen}(\theta + \pi)) d\theta \right] .$$

Usando que  $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen} \theta$  y que coseno es una función par,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi + \int_{-\pi/2}^0 \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta \right] .$$

Sumando ambas integrales

$$\boxed{J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi .} \quad (19.23)$$

Hagamos el cambio de variable en (19.23)  $\omega = \operatorname{sen} \varphi$ . Entonces  $d\varphi = \frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$  y la integral nos queda

$$J_0(x) = \int_{-1}^1 \frac{\cos(\omega x)}{\pi \sqrt{1-\omega^2}} d\omega .$$

Definamos una función  $p(\omega)$  de la forma

$$p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\omega| \geq 1, \\ \frac{1}{\pi \sqrt{1-\omega^2}} & \text{si } |\omega| < 1, \end{cases}$$

podemos reescribir  $J_0$  como

$$J_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) p(\omega) d\omega .$$

Con los cambios de variable  $x = t$  y  $\omega = 2\pi s$ , obtenemos

$$J_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st) F(s) ds ,$$

donde

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| \geq \frac{1}{2\pi}, \\ \frac{2}{\pi \sqrt{1-4\pi^2 s^2}} & \text{si } |s| < \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

De lo anterior se desprende, puesto que  $J_0(x)$  es una función par, que  $F(s)$  es precisamente la transformada de Fourier de  $J_0(x)$ :

$$\mathcal{F}\{J_0, s\} = F(s) .$$

Análogamente, tomando transformada de Fourier a la relación (19.9) obtenemos

$$\mathcal{F}\{J_1, s\} = \mathcal{F}\{-J'_0, s\} = -i2\pi s \mathcal{F}\{J_0, s\} = -2\pi i s F(s) .$$



## 19.8. Relaciones de recurrencia

Derivemos la función generatriz (19.14) respecto a  $s$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(z, s)}{\partial s} &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) , \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n s^{n+1} J_n(z) &= \frac{z}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{n-1} + J_{n+1}] s^{n+1} .\end{aligned}$$

Comparando coeficientes,

$$\boxed{\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) .} \quad (19.24)$$

Derivamos (19.14) respecto a  $z$  y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(z, s)}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) , \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J'_n(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{n-1} - J_{n+1}] s^n .\end{aligned}$$

Comparando coeficientes

$$\boxed{2J'_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) .} \quad (19.25)$$

Sumando (19.24) y (19.25) tenemos

$$\frac{n}{z} J_n(z) + J'_n(z) = J_{n-1}(z) , \quad (19.26)$$

es decir

$$\boxed{z^n J_{n-1}(z) = [z^n J_n(z)]' .} \quad (19.27)$$

Por otro lado, restando (19.24) y (19.25) obtenemos

$$J'_n(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = -J_{n+1}(z) , \quad (19.28)$$

es decir

$$\boxed{-z^{-n} J_{n+1}(z) = [z^{-n} J_n(z)]' .} \quad (19.29)$$

(19.27) y (19.29) indican que, al igual que los polinomios de Hermite, las funciones de Bessel de índice entero tienen operadores de subida y de bajada. En este caso, el operador de subida es

$$-z^n \frac{d}{dz} \frac{1}{z^n} ,$$

y el de bajada es

$$\frac{1}{z^n} \frac{d}{dz} z^n .$$

Finalmente, consideremos (19.20)

$$1 = J_0(z) + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [J_{2\nu}(z) + J_{2\nu+2}(z)] .$$

Usando la relación de recurrencia (19.24) para  $n = 2\nu + 1$  tenemos

$$1 = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{z} J_{2\nu+1}(z) ,$$

$$\frac{z}{2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1) J_{2\nu+1}(z) ,$$

y por inducción completa:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu+n)(n+\nu+1)!}{\nu!} J_{2\nu+n}(z) . \quad (19.30)$$

Podemos pues expresar cualquier serie de potencias en serie de funciones de Bessel.

## 19.9. Relaciones de ortogonalidad

Estudiemos las relaciones de ortogonalidad en el intervalo  $0 \leq x \leq \infty$ . Consideremos

$$f(x) = J_{\sigma}(hx) , \quad g(x) = J_{\sigma}(kx) , \quad \text{con } h \neq k. \quad (19.31)$$

Tomemos las derivadas

$$\begin{aligned} f'(x) &= h J'_{\sigma}(hx) , & f''(x) &= h^2 J''_{\sigma}(hx) , \\ g'(x) &= k J'_{\sigma}(kx) , & g''(x) &= k^2 J''_{\sigma}(kx) . \end{aligned}$$

La ecuaciones de Bessel que satisfacen son:

$$\begin{aligned} J''_{\sigma}(hx) + \frac{1}{hx} J'_{\sigma}(hx) + \left(h^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) J_{\sigma}(hx) &= 0 , \\ J''_{\sigma}(kx) + \frac{1}{kx} J'_{\sigma}(kx) + \left(k^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) J_{\sigma}(kx) &= 0 . \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $h^2$  y la segunda por  $k^2$  y usando las definiciones dadas en (19.31) obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(h^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) f(x) &= 0 , \\ g''(x) + \frac{1}{x} g'(x) + \left(k^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) g(x) &= 0 . \end{aligned} \quad (19.32)$$

Multiplicando por  $xg(x)$  y por  $xf(x)$  respectivamente y restando,

$$xf(x)''g(x) - xg(x)''f(x) + (xf'(x)g'(x) - xf'(x)g'(x)) \\ + f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + x(h^2 - k^2)f(x)g(x) = 0 .$$

El factor entre paréntesis corresponde a un cero agregado para lograr el reordenamiento

$$[x(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))]' = (k^2 - h^2)xf(x)g(x) .$$

Integrando en el intervalo  $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b t f(t)g(t) dt = \frac{1}{k^2 - h^2} \left[ x(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \right]_a^b .$$

La expresión del lado derecho se anulará en tres casos

1. Si  $J_\sigma(hx)$  y  $J_\sigma(kx)$  se anulan en  $a$  y en  $b$ .
2. Sus derivadas se anulan en  $a$  y en  $b$ .
3. O bien  $J_\sigma(ha) = J_\sigma(ka) = 0 = J'_\sigma(hb) = J'_\sigma(kb)$ .

De cualquier modo,

$$\int_a^b x J_\sigma(hx) J_\sigma(kx) dx$$

es la típica integral que interviene en asuntos de ortogonalidad.

### Ortogonalidad

Por ejemplo, para  $m \neq n$ , se tiene ortogonalidad sobre el intervalo  $[0, a]$  con

$$\int_0^a J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left( \alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \rho d\rho = 0 , \quad (19.33)$$

donde los  $\alpha_{\nu m}$  son tales que  $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$ .

**Normalización** (sin demostración)

$$\int_0^a \left[ J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right]^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2 . \quad (19.34)$$

## 19.10. Problema de Sturm-Liouville asociado

(19.33) y (19.34) sugieren que  $J_\nu \left( \alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right)$  pueden ser base de un espacio de funciones en  $[0, a]$ . Poniendo  $h = \alpha_{\nu m}/a$  y  $\sigma = \nu$  en (19.32) encontramos que satisfacen la ecuación

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) + \left( \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) f(\rho) = 0 ,$$

que se puede reescribir

$$\rho f''(\rho) + f'(\rho) + \left( \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho f(\rho) = 0 ,$$

o bien

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} f \right) + \left( \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho f(\rho) = 0 , \quad (19.35)$$

que es un problema de autovalores de un operador autoadjunto. En efecto, tomando el operador autoadjunto

$$\mathcal{L} = \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho} ,$$

y la función de peso

$$w(\rho) = \rho > 0 \quad \text{en } \rho \in [0, \infty] ,$$

(19.35) corresponde al problema de autovalores de  $\mathcal{L}$ , con autovalores

$$\lambda_{\nu m} = \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} .$$

Así, las funciones  $J_\nu(\lambda_{\nu m}\rho)$  asociadas a cada autovalor, para  $m = 0, 1, 2, \dots$  ( $\nu$  está fijo) serán un set completo en el cual se podrá expandir cualquier función en  $[0, \infty]$ .

¿A qué problemas físicos está asociado este problema de Sturm-Liouville? Consideremos nuevamente el operador laplaciano, como en (18.40), pero ahora en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \Psi(\rho, \phi, z) . \quad (19.36)$$

Se aprecia de inmediato que en un proceso de separación de variables, las derivadas respecto a  $z$  serán reemplazadas por una constante, y las derivadas respecto a  $\phi$  serán reemplazadas por otra constante, quedando para la parte radial precisamente la ecuación de Bessel en la forma (19.35). Por tanto, las funciones de Bessel aparecerán típicamente (no únicamente) como soluciones de problemas que involucren el operador de Laplace (encontrar un potencial electrostático —ecuación de Laplace—, modos normales de oscilación —ecuación de Helmholtz—, etc.) y que tengan simetría cilíndrica.

# Capítulo 20

## Diversos tipos de funciones cilíndricas

versión final 3.3-13 enero 2003

La ecuación de Bessel, que estudiamos en el capítulo anterior, da origen a una serie de funciones que genéricamente denominamos “cilíndricas”, debido a que la ecuación de Bessel aparece de modo natural en diversos problemas físicos con simetría cilíndrica, pues corresponde a la parte radial del Laplaciano en dichas coordenadas. Una de ellas es la función de Bessel  $J_\alpha(z)$ , que estudiamos en el capítulo anterior. En éste revisaremos brevemente algunas otras funciones y sus propiedades.

### 20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel

Consideremos la ecuación de Bessel, con solución centrada en  $z = 0$ . Escojamos además  $n = 0$ :

$$f'' + \frac{1}{z}f' + f = 0 . \quad (20.1)$$

Esta ecuación hipergeométrica tiene dos soluciones linealmente independientes, una de las cuales es la ya conocida  $J_0(z)$ . Determinemos ahora la segunda solución. Observando la forma de la segunda solución en (15.26), proponemos una solución de la forma

$$f(z) = J_0(z) \int^z u(t) dt . \quad (20.2)$$

Luego

$$\frac{1}{z}f'(z) = \frac{1}{z}J'_0(z) \int^z u(t) dt + \frac{1}{z}J_0(z)u(z) , \quad (20.3)$$

$$f''(z) = J''_0(z) \int^z u(t) dt + 2J'_0(z)u(z) + J_0(z)u'(z) . \quad (20.4)$$

Reemplazando en (20.1), y puesto que  $J_0(z)$  es solución de ella,

$$u'(z)J_0(z) + u(z) \left[ 2J'_0(z) + \frac{1}{z}J_0(z) \right] = 0 ,$$

esto es,

$$\begin{aligned} u'(z) &= - \left[ \frac{2J'_0(z)}{J_0(z)} + \frac{1}{z} \right] u(z) , \\ u(z) &= C \exp \left[ - \int^z \left( \frac{2J'_0(t)}{J_0(t)} + \frac{1}{t} \right) dt \right] , \\ u(z) &= \exp \left[ - \ln J_0^2(z) - \ln z \right] , \end{aligned}$$

es decir,

$$u(z) = \frac{1}{zJ_0^2(z)} = \frac{1}{z} \left( 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\nu} z^{2\nu} \right) . \quad (20.5)$$

La solución linealmente independiente a  $J_0(z)$  es entonces

$$N_0(z) = J_0(z) \int^z \frac{dt}{tJ_0^2(t)} , \quad (20.6)$$

lo que reescribimos como

$$N_0(z) = J_0(z) \left[ \ln z + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{2\nu} z^{2\nu} \right] = J_0(z) \ln z + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \left( \frac{z}{2} \right)^{2\nu} .$$

Reemplazando en la ecuación diferencial (20.1) determinamos los coeficientes  $c_{2\nu}$ . Para ello, notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} N'_0(z) &= \frac{1}{z} J'_0(z) \ln z + \frac{1}{z^2} J_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \frac{2\nu}{2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2\nu-2} \frac{1}{2} \\ N''_0(z) &= J''_0(z) \ln z + 2J'_0(z) \frac{1}{z} - J_0(z) \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \frac{2\nu(2\nu-1)}{4} \left( \frac{z}{2} \right)^{2\nu-2} . \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de  $z$ , se tiene la relación de recurrencia

$$c_{2\nu} = -\frac{c_{2\nu-2}}{\nu^2} - \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \frac{1}{\nu} , \quad \nu \geq 1 . \quad (20.7)$$

Tomamos  $c_0 = 0$ , y notamos que sólo nos interesan los índices pares. Entonces

$$\begin{aligned} c_2 &= 1 , \\ c_4 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) . \end{aligned}$$

**Afirmación**

$$c_{2\nu} = \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} \right) . \quad (20.8)$$

**Demostración** La demostración es fácil por inducción. Suponiendo que la afirmación es cierta para  $\nu = n$ , podemos calcular

$$c_{2n+2} = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \frac{1}{n+1}$$

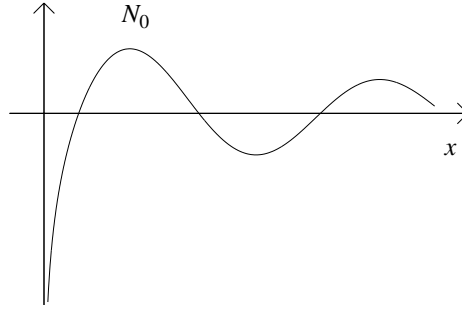
$$c_{2n+2} = -\frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

q.e.d.

Con este resultado, podemos escribir una solución linealmente independiente de  $J_0(x)$  en la forma:

$$N_0(z) = J_0(z) \ln(z) + \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^6 - \dots \quad (20.9)$$

Gráficamente:



Análogamente, asociadas a las funciones de índices superiores  $J_n(z)$ , será posible encontrar la segunda solución,  $N_n(z)$ .

En general,  $N_n(z)$  se puede encontrar notando que la función

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{\sin \alpha \pi} [J_\alpha(z) \cos \alpha \pi - J_{-\alpha}(z)] , \quad (20.10)$$

es linealmente independiente a  $J_\alpha(z)$  si  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , y por tanto puede ser usada como segunda solución. Las  $N_\alpha(z)$  se conocen como *funciones de Bessel de segunda especie*, o *funciones de Neumann*. Lo interesante es que, al contrario de  $J_{-\alpha}(z)$ ,  $N_\alpha(z)$  continúa siendo linealmente independiente cuando  $\alpha$  es entero. Para mostrarlo (no lo haremos aquí), se puede considerar  $\alpha = n + \epsilon$ , y tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Resulta finalmente

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z}{2}\right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l [\Psi(l+1) + \Psi(n+l+1)]}{l!(l+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-l-1)!}{l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l-n} , \quad (20.11)$$

donde

$$\Psi(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{d\Gamma(\lambda)}{d\lambda} . \quad (20.12)$$

## 20.2. Funciones de Hankel

En el capítulo anterior, vimos que las funciones de Bessel se pueden representar en la forma integral

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z \sin \phi - n\phi)] d\phi .$$

Hagamos el cambio de variable  $\phi = -\psi$ , de modo que

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(z \sin \psi - n\psi)] d\psi .$$

Consideremos ahora una generalización de lo anterior al plano complejo, la función

$$\Phi(z) = \int_C e^{-iz \sin s} e^{i\alpha s} ds . \quad (20.13)$$

Sea

$$g(s) = e^{i\alpha s} . \quad (20.14)$$

Entonces

$$g'' + \alpha^2 g = 0 . \quad (20.15)$$

Sea además

$$f(z, s) = e^{-iz \sin s} , \quad (20.16)$$

de modo que

$$z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial f}{\partial z} + z^2 f = -\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} . \quad (20.17)$$

**Afirmación**  $\Phi(z)$  satisface la ecuación de Bessel (bajo ciertas restricciones),

$$z^2 \Phi'' + z \Phi' + (z^2 - \alpha^2) \Phi = 0 . \quad (20.18)$$

**Demostración** Si (20.18) se satisface, entonces

$$0 = \int_C \left[ z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial f}{\partial z} + (z^2 - \alpha^2) f \right] g .$$

Con (20.17),

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha^2 \int_C f g - \int_C \left( \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) g \\ &= -\alpha^2 \int_C f g + \int_C \frac{\partial f}{\partial s} g' - \left[ \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C \\ &= -\alpha^2 \int_C f g - \int_C f g'' + \left[ f g' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C \\ &= - \int_C f (g'' + \alpha^2 g) + \left[ f g' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C . \end{aligned}$$



Con (20.15),

$$0 = \left[ fg' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C .$$

Por lo tanto,  $\Phi$  es solución de la ecuación de Bessel si  $f$  y  $\partial f/\partial s$  son despreciables en el contorno de integración  $C$ .

q.e.d.

Sean ahora  $z = x > 0$ ,  $s = s_1 + is_2$ ,  $s_{1,2} \in \mathbb{R}$ . En este caso,

$$\text{sen } s = \text{sen } s_1 \cosh s_2 + i \cos s_1 \sinh s_2 .$$

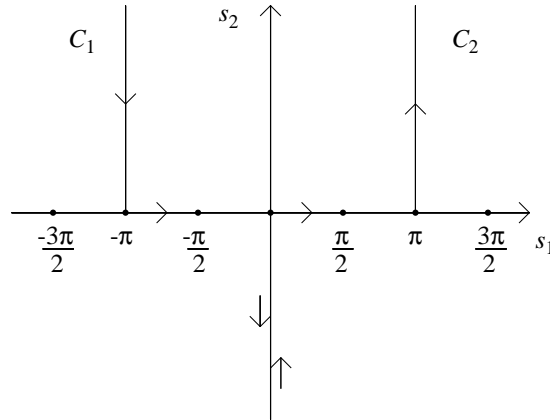
Considerando la afirmación anterior, ¿en qué parte del plano  $(\text{Re } s, \text{Im } s)$  tenemos  $|f(x, s)| = |e^{ix \text{sen } s}| \rightarrow 0$ ? Esto es, buscamos un contorno  $C$  tal que

$$\text{Re}(-ix \text{sen } s) = x \cos s_1 \sinh s_2 \longrightarrow -\infty .$$

Esta condición equivale a

$$\begin{aligned} \sinh s_2 &\longrightarrow -\infty & \text{si } \cos s_1 > 0 , \\ \sinh s_2 &\longrightarrow \infty & \text{si } \cos s_1 < 0 . \end{aligned} \quad (20.19)$$

Escojamos los contornos de integración:



Sobre estos contornos,  $f$  y  $\partial f/\partial s$  son despreciables en infinito, y estamos en condiciones de definir dos nuevas funciones, soluciones de la ecuación diferencial de Bessel:

**Definición 20.1** *Funciones de Hankel*

$$H_{\alpha}^{(1,2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_{1,2}} e^{-ix \text{sen } s} e^{i\alpha s} ds , \quad x > 0 \quad (20.20)$$

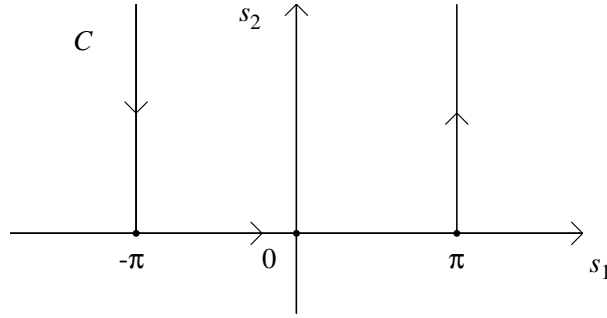
Consideremos el caso particular  $\alpha = n$ , y la expresión

$$I(x) = H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) \quad (20.21)$$

De (20.20),

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{-ix \operatorname{sen} s} e^{ins} ds ,$$

con



Puesto que

$$\begin{aligned} e^{in(s+2\pi)} &= e^{ins} , \\ \operatorname{sen}(s + 2\pi) &= \operatorname{sen} s , \end{aligned}$$

las integraciones sobre los segmentos verticales de  $C$  se anulan entre sí. Se tiene entonces

$$H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \operatorname{sen} \phi} e^{in\phi} d\phi .$$

Se siguen las siguientes relaciones entre las funciones cilíndricas que hemos examinado:

$$J_n = \frac{1}{2} [H_n^{(1)} + H_n^{(2)}] , \quad (20.22)$$

$$N_n = \frac{1}{2i} [H_n^{(1)} - H_n^{(2)}] , \quad (20.23)$$

y a la inversa,

$$H_n^{(1)} = J_n + iN_n , \quad (20.24)$$

$$H_n^{(2)} = J_n - iN_n . \quad (20.25)$$

# Capítulo 21

## Aplicaciones

versión final 1.0-13 enero 2003

En este Capítulo aplicaremos algunos de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para resolver problemas de interés físico. En particular, estudiaremos el problema de encontrar el potencial electrostático en un cierto volumen del espacio delimitado por superficies mantenidas a potenciales dados. Este problema involucra la solución de Laplace en cierto dominio del espacio real. En los capítulos anteriores hemos podido encontrar autofunciones asociadas al operador de Laplace, y por lo tanto podemos escribir formalmente la solución como una combinación lineal de tales autofunciones. Los potenciales fijos en las superficies que determinan el dominio proporcionarán las condiciones de borde necesarias para encontrar todos los coeficientes de dicha combinación lineal y, por ende, resolver completamente el problema.

Además, resolveremos algunos problemas relacionados con la ecuación de onda (modos normales de una membrana) y la ecuación de difusión.

### 21.1. Coordenadas rectangulares

La ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 . \quad (21.1)$$

Suponemos

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) . \quad (21.2)$$

Sustituyendo en (21.1) y dividiendo por (21.2) tenemos

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 . \quad (21.3)$$

Si cada término en (21.3) depende sólo de una variable independiente, cada uno debe ser

igual a una constante:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2, \quad (21.4)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad (21.5)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2, \quad (21.6)$$

donde  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Si elegimos arbitrariamente  $\alpha^2$  y  $\beta^2$  positivos entonces las soluciones de (21.4), (21.5) y (21.6) son

$$X(x) = \exp(\pm i\alpha x), \quad Y(y) = \exp(\pm i\beta y), \quad Z(z) = \exp(\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z),$$

luego

$$\Phi(x, y, z) = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}. \quad (21.7)$$

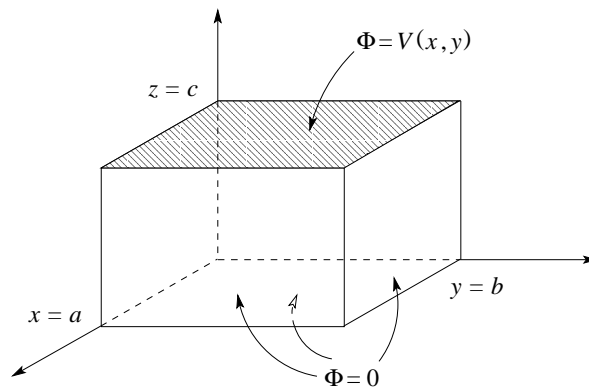
Observamos que:

- $\alpha$  y  $\beta$  son arbitrarios y se determinan por las condiciones de contorno;
- por superposición lineal de (21.7) obtenemos la solución más general de la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas.

### Ejemplos

1) Potencial en el interior de un paralelepípedo con caras a diferente potencial.

Consideremos primero el caso de un paralelepípedo con todas las caras a potencial cero salvo una. El problema general, en el cual cada una de las seis caras está a un potencial diferente, se puede obtener como la superposición de seis de estos problemas.



Si  $\Phi = 0$  en  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $z = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin \alpha x, \\ Y(y) &= \sin \beta y, \\ Z(z) &= \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z). \end{aligned}$$

Si  $\Phi = 0$  en  $x = a$  y  $y = b$ ,

$$\alpha a = n\pi \quad \text{y} \quad \beta b = m\pi ,$$

luego

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} , \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b} , \quad \text{y} \quad \gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} .$$

Podemos escribir el potencial parcial  $\Phi_{nm}$ , el cual satisface todas las condiciones de contorno excepto una:

$$\Phi_{nm} = \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) . \quad (21.8)$$

La solución completa es la superposición de estos potenciales para todos los valores posibles de  $m$  y  $n$ :

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{nm} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) . \quad (21.9)$$

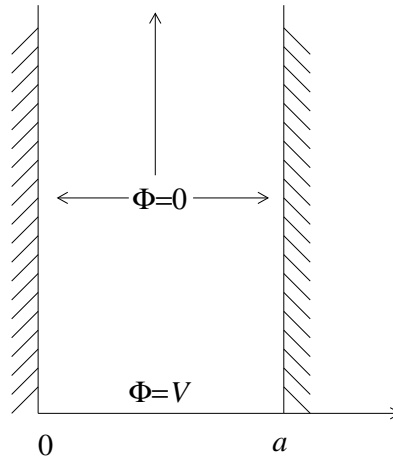
Sólo queda satisfacer  $\Phi(x, y, z = c) = V(x, y)$ :

$$V(x, y) = \sum_{nm} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c) , \quad (21.10)$$

correspondiendo a una doble serie de Fourier. Los coeficientes vienen dados por

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) .$$

2) Calculemos ahora el potencial en la región definida por los planos  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = \infty$ . Debido a la simetría de traslación en  $z$ , el problema es efectivamente bidimensional:



Podemos afirmar que la solución será de la forma:

$$\Phi(x, y) = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm \alpha y} ,$$

con  $\alpha$  real o complejo.

La condición  $\Phi = 0$  en  $x = 0$  y  $x = a$ , da

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) .$$

La condición  $\Phi = 0$  para  $y \rightarrow \infty$  da

$$Y(y) = e^{-\alpha y} = e^{-\frac{n\pi}{a}y} .$$

Por lo tanto

$$\Phi_n = e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) .$$

La solución general es

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) .$$

Los  $A_n$  son determinados imponiendo  $\Phi = V$  para  $y = 0$ , con  $0 \leq x \leq a$ :

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) ,$$

con  $\Phi(x, 0) = V$ . Es decir,

$$A_n = \frac{2V}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin u \, du = \frac{2V}{n\pi} \cos u \Big|_0^{n\pi} = \frac{2V}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1]$$

$$A_n = \frac{4V}{n\pi} \begin{cases} 1 & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Así, el potencial queda

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) . \quad (21.11)$$

Usando que  $\text{Im}(e^{i\theta}) = \sin \theta$  y definiendo

$$z = e^{\frac{i\pi}{a}(x+iy)} ,$$

podemos reescribir el potencial como una función en el plano complejo:

$$\Phi(z) = \frac{4V}{\pi} \text{Im} \left[ \sum_{n \text{ impar}} \frac{z^n}{n} \right] .$$

(Esto es un hecho bastante general. En variable compleja, las funciones analíticas satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, que son equivalentes a una ecuación de Laplace, por tanto no es sorprendente que un potencial electrostático se pueda escribir en términos de funciones analíticas en el espacio complejo.)

Integrando  $(1 \pm z)^{-1} = \sum (\mp z)^n$ , tenemos

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \\ \ln(1-z) &= -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Restando ambos resultados,

$$\ln \left[ \frac{1+z}{1-z} \right] = \sum_{n \text{ impar}} \frac{z^n}{n} ,$$

es decir,

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \text{Im} \left[ \ln \frac{1+z}{1-z} \right] .$$

Por otro lado,

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-z^*)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2 + 2i \text{Im}(z)}{|1-z|^2}$$

$$\text{Im} \left[ \ln \frac{1+z}{1-z} \right] = \text{fase} \left[ \ln \frac{1+z}{1-z} \right] = \arctan \left( \frac{2\text{Im}(z)}{1-|z|^2} \right)$$

Pero

$$z = e^{i\frac{\pi}{a}(x+iy)} = e^{-\frac{\pi y}{a}} e^{i\frac{\pi x}{a}} ,$$

luego

$$\text{Im}(z) = e^{-\frac{\pi y}{a}} \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) ,$$

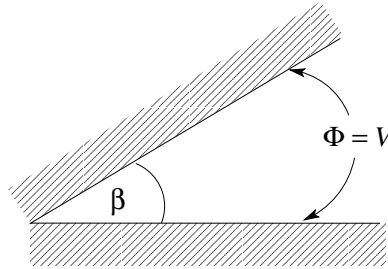
$$1-|z|^2 = 1 - e^{-\frac{2\pi y}{a}} = e^{-\frac{\pi y}{a}} \left( e^{\frac{\pi y}{a}} - e^{-\frac{\pi y}{a}} \right) = 2e^{-\frac{\pi y}{a}} \sinh \left( \frac{\pi y}{a} \right) .$$

Así, finalmente,

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \arctan \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\sinh \frac{\pi y}{a}} \right) .$$

## 21.2. Coordenadas polares, dos dimensiones

Estudiemos ahora el potencial entre dos placas conductoras que forman un cierto ángulo  $\beta$  entre sí, mantenidas a potencial  $V$ :



La ecuación de Laplace en este caso es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 . \quad (21.12)$$

Separando variables,

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi) .$$

Reemplazando en (21.12),

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(\phi)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} &= 0 \\ \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} &= 0 . \end{aligned}$$

Cada uno de los términos debe ser igual a una constante:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = \nu^2 , \quad \frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} = -\nu^2 ,$$

quedando las ecuaciones

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - \nu^2 R = 0 , \quad \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + \nu^2 \Psi = 0 ,$$

con soluciones

$$R(\rho) = a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu} , \quad \Psi(\phi) = A_\nu \cos(\nu\phi) + B_\nu \sin(\nu\phi) . \quad (21.13)$$

En el caso especial  $\nu = 0$  las ecuaciones toman la forma

$$\rho \frac{dR}{d\rho} = \text{cte} , \quad \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = 0 ,$$

con soluciones

$$R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho , \quad \Psi(\phi) = A_0 + B_0 \phi . \quad (21.14)$$

Si no hay restricciones sobre  $\phi$  (i.e.  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ) entonces por unicidad debemos imponer que  $\nu \in \mathbb{Z}$ . Por la misma razón, cuando  $\nu = 0$  debe imponerse  $B_0 = 0$ .

La solución general en dos dimensiones es entonces

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) .$$

Notemos que:

1. Si el origen es incluido en el volumen, en el cual no hay carga, todos los  $b_n$  son 0 ( $b_0 = b_n = 0 \forall n$ )
2. Si excluimos el origen  $b_n \neq 0$ .
3. El término logarítmico equivale al potencial generado por una línea de carga infinita sobre el eje  $z$ , con densidad lineal de carga  $\lambda = -b_0/2$ .

En nuestro problema,  $0 \leq \phi \leq \beta$ . Las condiciones de borde son entonces

$$\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, \beta) = V .$$



La condición de que la solución sea finita en  $\rho = 0$  implica que

$$b_0 = b_\nu = 0 .$$

Para  $\phi = 0$  se obtiene

$$V = a_0 A_0 + \sum_{\nu} a_{\nu} \rho^{\nu} A_{\nu} .$$

Siendo el lado izquierdo independiente de  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} a_{\nu} A_{\nu} &= 0 , \\ a_0 A_0 &= V . \end{aligned}$$

La primera ecuación da  $A_{\nu} = 0$  (si  $a_{\nu} = 0$ , no habría ninguna dependencia en  $\rho$  del potencial).

Para  $\phi = \beta$  se obtiene

$$\begin{aligned} V &= a_0 (A_0 + B_0 \beta) + \sum_{\nu} a_{\nu} \rho^{\nu} B_{\nu} \sin \nu \beta , \\ a_0 B_0 \beta &= - \sum_{\nu} a_{\nu} \rho^{\nu} B_{\nu} \sin \nu \beta . \end{aligned}$$

Siendo el lado izquierdo independiente de  $\rho$ , ambos términos deben ser nulos. Como  $a_0 A_0 = V$ , se sigue que  $a_0 \neq 0$ , luego

$$B_0 = 0 .$$

En el lado derecho, en tanto, como  $a_{\nu} \neq 0$  (para preservar alguna dependencia en  $\rho$  del potencial), y  $B_{\nu} \neq 0$  (para preservar dependencia en  $\phi$ ), se concluye que

$$\sin \nu \beta = 0 ,$$

es decir

$$\nu = \frac{m\pi}{\beta} , \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Queda entonces la solución general

$$\Phi(\rho, \phi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin \left( \frac{m\pi\phi}{\beta} \right) .$$

Para  $\rho$  suficientemente pequeño sólo el primer término es relevante:

$$\Phi(\rho, \phi) \simeq V + a_1 \rho^{\pi/\beta} \sin \left( \frac{\pi\phi}{\beta} \right) .$$

Las componentes del campo eléctrico son

$$\begin{aligned} E_{\rho} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \simeq -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sin \left( \frac{\pi\phi}{\beta} \right) \\ E_{\phi} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \simeq \frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos \left( \frac{\pi\phi}{\beta} \right) \end{aligned}$$

La densidad de carga para  $\phi = 0$  y  $\phi = \beta$  es

$$\sigma(\rho) = \frac{E_{\phi}}{4\pi} \simeq -\frac{a_1}{4\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} .$$

### 21.3. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

La ecuación a resolver es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Separando variables, suponemos  $\Phi(\vec{r}) = r^{-1}U(r)P(\theta)Q(\phi)$ . Obtenemos

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0 .$$

Si multiplicamos por  $r^2 \frac{\sin^2 \theta}{UPQ}$  queda

$$r^2 \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0 .$$

El último término debe ser una constante:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2 ,$$

es decir

$$Q = e^{\pm im\phi} .$$

Para que  $Q$  sea univaluada para  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,  $m$  debe ser entero.

Separando ahora las ecuaciones para  $P(\theta)$  y  $U(r)$ , queda la ecuación angular

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 ,$$

donde  $l(l+1)$  es otra constante real, y la ecuación radial

$$\frac{d}{dr^2} U(r) - l(l+1) \frac{U(r)}{r^2} = 0 .$$

La ecuación radial es la ecuación de Euler, con solución

$$U_l(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l} .$$

$l$  aún está por determinar. Escribiendo  $x = \cos \theta$ , se observa que la ecuación para  $P(\theta)$  es la ecuación generalizada de Legendre. Sus soluciones regulares en  $[-1, 1]$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ), son las funciones asociadas de Legendre (Cap. 18):

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) ,$$

si  $l$  es un entero, y  $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ .

La solución general se puede escribir entonces,

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{ml} (Ar^l + Br^{-(l+1)}) P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} ,$$

o en términos de los armónicos esféricos,

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{ml} (Ar^l + Br^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

Si hay simetría azimutal, es decir, si no hay dependencia en  $\phi$ , entonces  $m = 0$ , con lo cual la ecuación para  $\theta$  se convierte en la ecuación de Legendre ordinaria:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0 ,$$

y la solución general es

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) .$$

$\{A_l, B_l\}$  son determinados por las condiciones de contorno.

**Ejemplo** Potencial al interior de una esfera de radio  $a$ , en cuya superficie el potencial es  $V(\theta)$ .

En este caso, la solución debe ser regular en el origen, luego

$$B_l = 0 .$$

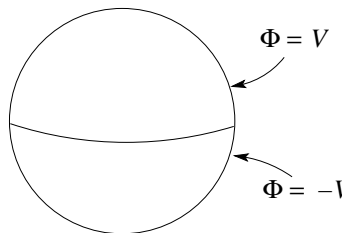
Al imponer la condición de borde,

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) ,$$

con  $A_l$

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta .$$

Particularicemos al caso en que el hemisferio superior e inferior están a potenciales opuestos:



$$V(\theta) = \begin{cases} +V & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -V & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases} .$$

Entonces,

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} V \left[ \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] .$$

Con el cambio de variables  $u = \cos \theta$ , de modo que  $du = -\sin \theta d\theta$ ,

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[ -\int_1^0 P_l(u) du + \int_0^{-1} P_l(u) du \right] , \\ A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[ \int_0^1 P_l(u) du - \int_{-1}^0 P_l(u) du \right] . \end{aligned}$$

Usando la paridad de los polinomios de Legendre,

$$\int_0^1 P_l(u) du - \int_{-1}^0 P_l(u) du = 2 \int_0^1 P_l(u) du \quad \text{si } l \text{ impar,}$$

y es cero si  $l$  es par. Si  $l$  es impar, entonces,

$$A_l = \frac{2l+1}{a^l} V \int_0^1 P_l(u) du = \frac{2l+1}{a^l} V \left( -\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{2 \left( \frac{l+1}{2} \right)!!} ,$$

y la solución queda

$$\Phi(r, \theta) = V \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left( -\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{2 \left( \frac{l+1}{2} \right)!!} \left( \frac{r}{a} \right)^l P_l(\cos \theta) .$$

Es fácil darse cuenta que para resolver el problema exterior, basta reemplazar

$$\left( \frac{r}{a} \right)^l \longrightarrow \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1}$$

en la solución anterior.

A partir de la discusión sobre la función generatriz de los polinomios de Legendre, Sec. 18.1, es inmediato obtener el siguiente importante resultado:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{r_{>}^2 + r_{<}^2 - 2r_{<}r_{>} \cos \gamma}} ,$$

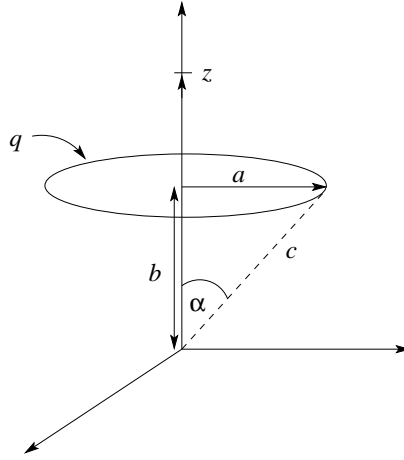
donde  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) es el más pequeño (grande) de  $|\vec{x}|$  y  $|\vec{x}'|$ , y  $\gamma$  es el ángulo entre  $\vec{x}$  y  $\vec{x}'$ .

También importante es la siguiente observación: notemos que si tenemos un problema con simetría acimutal, el potencial sobre el eje  $z$  es ( $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ ,  $P_l(\cos \theta) = 1$ )

$$\Phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l z^l + \frac{B_l}{z^{l+1}} .$$

En consecuencia, si hay simetría acimutal, y de algún modo conseguimos evaluar el potencial sobre el eje  $z$  como una serie de potencias, eso significa haber encontrado los coeficientes  $A_l$  y  $B_l$  de la expansión anterior. Dada la unicidad de la expansión, entonces, el potencial en todo el espacio se obtiene simplemente reemplazando  $z$  por  $r$ , y multiplicando cada término de la serie por  $P_l(\cos \theta)$ . Veamos un ejemplo a continuación:

**Ejemplo** Consideremos un anillo de radio  $a$  y densidad de carga  $q$ , paralelo a y a una distancia  $b$  del plano  $x$ - $y$ . Deseamos encontrar el potencial debido a este anillo cargado en todo el espacio.



Este problema tiene claramente simetría acimutal. Además, es particularmente sencillo encontrar el potencial en el eje  $z$ , que es el eje de simetría del anillo. En efecto, todos los puntos del anillo se encuentran a la misma distancia  $R$  de un punto dado sobre el eje  $z$ . Calcular el potencial en dicho punto como una suma sobre todos los puntos del anillo resulta muy simple. Si  $\lambda = q/2\pi a$  es la densidad lineal de carga, entonces

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta}{R} = \frac{q}{2a\pi} \frac{2a\pi}{R} = \frac{q}{(z^2 + c^2 - 2zc \cos \alpha)^{1/2}},$$

donde  $c^2 = a^2 + b^2$  y  $\alpha = \arctan(a/b)$ . Ahora podemos distinguir dos casos:

$$\begin{aligned} \text{si } z > c, \quad \Phi(z) &= q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{z^{l+1}} P_l(\cos \alpha), \\ \text{si } z < c, \quad \Phi(z) &= q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha). \end{aligned}$$

Hemos entonces expresado el potencial en el eje  $z$  como una serie de potencias, y los coeficientes tienen la forma que esperábamos,  $\sim z^l$  para  $z$  pequeño, y  $\sim z^{-(l+1)}$  para  $z$  grande.

Ahora podemos afirmar que el potencial en *todo* el espacio se obtiene simplemente multiplicando por  $P_l(\cos \theta)$  todos los términos de la serie:

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta),$$

donde  $r_{<}(r_{>})$  es el más pequeño (grande) de  $r$  y  $c$ .

En particular para  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (el anillo se encuentra sobre el plano  $x$ - $y$ , y el punto de observación está sobre el mismo plano),

$$\Phi\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} [P_l(0)]^2.$$

Pero

$$\begin{aligned} P_{2k}(0) &= \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!}, \\ P_{2k+1}(0) &= 0, \end{aligned}$$

luego

$$\Phi(r) = q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{2k}}{r_{>}^{2k+1}} \left[ \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \right]^2 .$$

Volviendo a los problemas sin simetría acimutal necesariamente, de modo que la solución de la ecuación de Laplace puede ser escrita

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

el potencial dentro de una esfera de radio  $R$  donde se ha especificado sobre su superficie el potencial  $V(\theta, \phi)$  vendrá dado por la condición:

$$V(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} R^l Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

donde

$$A_{lm} = \frac{1}{R^l} \int dR Y_{lm}^*(\theta, \phi) V(\theta, \phi) .$$

Finalmente, recordemos que hemos expresado  $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$  como una serie de potencias de  $|\vec{x}|$  y  $|\vec{x}'|$ , involucrando el coseno del ángulo  $\gamma$  entre ambos vectores. A su vez, si  $\vec{x}$  y  $\vec{x}'$  están determinados por los ángulos  $\Omega = (\theta, \phi)$ ,  $\Omega' = (\theta', \phi')$ , conocemos una relación entre  $P_l(\cos \theta)$  y los armónicos esféricos evaluados en  $\Omega$  y  $\Omega'$  [(18.57)]. Esto da origen al *Teorema de adición de los Armónicos Esféricos*:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

Esta expresión nos permite escribir el potencial debido a una carga puntual, separando entre sí las coordenadas asociadas a  $\vec{x}$  y a  $\vec{x}'$ . Esto resulta útil al integrar sobre una de las variables, digamos  $\vec{x}'$  (que puede representar la posición de la distribución de carga), manteniendo a la otra coordenada ( $\vec{x}$ ) constante (punto de observación).

En definitiva, esta fórmula de adición no hace sino recordarnos que cualquier función angular (en particular la distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio) puede ser expandida en la base de armónicos esféricos.

## 21.4. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

La ecuación a resolver es:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 .$$

Separando variables:

$$\Phi(\rho, \theta, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z) ,$$

queda

$$\begin{aligned} QZ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{QZ}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + RQ \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R} \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2 Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \end{aligned}$$

La única dependencia en  $z$  está en el último término, y la única dependencia en  $\phi$  está en el penúltimo término, por tanto deben ser iguales a una constante, que llamamos  $k^2$  y  $-\nu^2$ , respectivamente. Entonces quedan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z &= 0 , \\ \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \nu^2 Q &= 0 , \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R &= 0 . \end{aligned}$$

Las ecuaciones para  $z$  y  $\phi$  tienen solución:

$$Z = e^{\pm kz} , \quad Q = e^{\pm i\nu\phi} .$$

Para que la función sea univaluada cuando  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  es permitido,  $\nu$  debe ser entero.  $k$ , por su parte, puede ser cualquier número real en principio.

Si  $x = k\rho$ , la ecuación radial queda

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 ,$$

que es la ecuación de Bessel, con soluciones  $J_\nu, J_{-\nu}$ . Éstas soluciones son linealmente independientes sólo si  $\nu \notin \mathbb{Z}$ . Si todos los ángulos entre 0 y  $2\pi$  son permitidos, que es lo usual, entonces  $\nu$  es entero y no son independientes, y hay que usar como base de soluciones las funciones de Bessel y de Neumann,  $J_\nu$  y  $N_\nu$ , con

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} ,$$

o bien las funciones de Hankel:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) , \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) . \end{aligned}$$

Si las soluciones deben ser regulares en el origen, sin embargo, las soluciones a usar son solamente las funciones de Bessel  $J_\nu(x)$ . La sucesión  $\{\sqrt{\rho} J_\nu(x_{\nu n} \frac{\rho}{a})\}$  con  $\nu$  fijo,  $J_\nu(x_{\nu n}) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  es un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo  $0 \leq \rho \leq a$ , cumpliéndose que

$$\int_0^a \rho J_\nu \left( x_{\nu n'} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left( x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nn'} .$$

Al escribir una función arbitraria de  $\rho$  como combinación lineal de esta base se obtiene la llamada expansión en serie de Fourier Bessel:

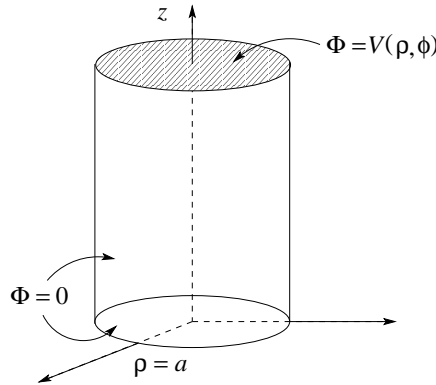
$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_{\nu} \left( x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \quad 0 \leq \rho \leq a ,$$

con

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_{\nu} \left( x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) d\rho .$$

De lo indicado en la sección 19.9 se sigue que esta expansión es apropiada cuando la función es nula en  $\rho = 0$ , es decir, cuando las condiciones de borde sobre el manto del cilindro son tipo Dirichlet. Si las condiciones de borde son tipo Neumann, de modo que la derivada de la función se debe anular en  $\rho = a$ , entonces es posible una expansión en la base  $\sqrt{\rho} J_{\nu}(y_{\nu n} \frac{\rho}{a})$  donde  $y_{\nu n}$  es la  $n$ -ésima raíz de  $\frac{dJ_{\nu}(x)}{dx}$ .

**Ejemplo** Busquemos el potencial en el interior de un cilindro cuya tapa superior se encuentra a potencial  $V(\rho, \theta)$ :



Todos los ángulos  $\phi$  están permitidos, por lo tanto podemos escribir las funciones en cada variable en la forma:

$$\begin{aligned} Q(\phi) &= A \sin m\phi + B \cos m\phi , \\ Z(z) &= \sinh kz , \\ R(\rho) &= C J_m(k\rho) + D N_m(k\rho) . \end{aligned}$$

La expresión para  $Z(z)$  satisface la condición de borde  $Z(0) = 0$ . Como además  $\Phi$  es finito en  $\rho = 0$ , debe tenerse

$$k = k_{mn} = \frac{x_{mn}}{a} , \quad n = 1, 2, 3 ,$$

donde  $x_{mn}$  es la raíz  $n$ -ésima de  $J_m$  i.e.  $J_m(x_{mn}) = 0$ . La solución general se escribe entonces

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) [A_{mn} \sin(m\phi) + B_{mn} \cos(m\phi)] .$$

Imponiendo la condición de borde en  $z = L$ :

$$V(\rho, \phi) = \sum_{mn} \sinh(k_{mn}L) J_m(k_{mn}\rho) [A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi] .$$



Los coeficientes del potencial  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  se encuentran invirtiendo esta doble serie de Fourier Bessel. Usando las relaciones de ortogonalidad para senos, cosenos y las funciones de Bessel:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{2 \operatorname{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \sin m\phi , \\ B_{mn} &= \frac{2 \operatorname{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \cos m\phi . \end{aligned}$$

## 21.5. Otras aplicaciones

### 21.5.1. Modos normales de oscilación

Un sistema oscilatorio se puede caracterizar por una variable  $\psi(\vec{r}, t)$  (escalar o vectorial) que depende del espacio y el tiempo, y que satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 ,$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación de las oscilaciones.  $\psi$  puede ser la altura de cada punto de una cuerda tensada horizontalmente, la presión de un gas, el ángulo de un péndulo respecto a la posición de equilibrio, el campo electromagnético, etc. Los modos normales de un sistema oscilatorio son aquellos en que todas las partes móviles del sistema oscilan con una misma frecuencia,  $\omega$ . En este caso, la dependencia temporal de  $\psi$ , para todo  $\vec{r}$ , se puede escribir como un factor  $e^{i\omega t}$ , en cuyo caso la ecuación de onda se convierte en la *ecuación de Helmholtz*:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = 0 ,$$

con

$$k = \omega/v .$$

Al involucrar el operador Laplaciano, esperamos que sus soluciones (es decir, la amplitud de los modos normales de oscilación de un sistema general), se pueda escribir en términos de funciones sinusoidales, armónicos esféricos o funciones de Bessel, según la simetría del problema. Revisemos algunos ejemplos.

#### Modos normales de un gas dentro de una cavidad esférica de radio $a$

La ecuación de Helmholtz se escribe en este caso:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 .$$

Separando variables, escribiendo  $\psi(\vec{r}) = R(r)P(\theta)Q(\phi)$ , es fácil advertir que las ecuaciones angulares serán las mismas que para la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (Sec. 21.3), de modo que la parte angular corresponderá a los armónicos esféricos:

$$P(\theta)Q(\phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

La ecuación radial, en tanto, queda:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) + k^2 R(r) = 0 .$$

Con el cambio de variables

$$R(r) = U(r)/\sqrt{r} ,$$

queda

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right] U(r) = 0 .$$

Con  $r = kx$ , queda

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{x^2} \right] U(x) = 0 ,$$

que es la ecuación de Bessel (19.1) con  $\alpha = l + 1/2$ . Así, la solución radial se puede escribir en la forma

$$R(r) = A_{lm} \frac{J_{l+1/2}(kr)}{r^{1/2}} + B_{lm} \frac{N_{l+1/2}(kr)}{r^{1/2}} ,$$

que se puede reescribir en términos de las *funciones de Bessel esféricas*:

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \frac{\pi}{2x} J_{l+\frac{1}{2}}(x) , \\ n_l(x) &= \frac{\pi}{2x} N_{l+\frac{1}{2}}(x) . \end{aligned}$$

Como sus equivalentes cilíndricos,  $j_l(x)$  es regular en el origen y  $n_l(x)$  es singular en el origen.

Estando interesados en el interior de una cavidad esférica, nos quedamos con  $j_l(x)$ . Al imponer la condición de borde de paredes fijas, es decir  $\psi(r = a, \theta, \phi) = 0$ , se obtiene

$$k = k_{ln} = \frac{x_{ln}}{a} ,$$

con  $x_{ln}$  es  $n$ -ésimo cero de  $j_l(x)$ .

Ahora bien, cada  $k$  corresponde a un modo normal (es decir, a un modo caracterizado por una única frecuencia, dada por  $\omega = ck$ ). Los modos normales de la cavidad esférica son entonces

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = j_l \left( x_{ln} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

asociados a frecuencias

$$\omega_{ln} = vk_{ln} = v \frac{x_{ln}}{a} .$$

$v$  es la velocidad del sonido en el gas. Observemos que la frecuencia no depende del índice azimutal  $m$ . Es decir, existen  $2l + 1$  (la cantidad de  $m$ 's posibles para cada  $l$ ) modos normales con la misma frecuencia (el espectro es degenerado).

Finalmente, la solución general entonces es una combinación lineal sobre todos los modos normales:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{nlm} \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) e^{i\omega_{ln} t} .$$

Los coeficientes  $A_{nlm}$  se obtienen al imponer una condición inicial. Por ejemplo, si inicialmente el gas al interior de la cavidad esférica está dado por una función  $\psi_0(r, \theta, \phi)$ , los  $A_{nlm}$  se obtendrán invirtiendo la serie de Fourier

$$\psi_0(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{nlm} j_l \left( x_{ln} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

### Membrana circular

Consideremos los modos de oscilación de una membrana circular de radio  $a$ , densidad de masa superficial  $\sigma$ , sometida a una tensión  $T$ , con extremos fijos. En este caso, la ecuación de Helmholtz involucra el Laplaciano en dos dimensiones, conveniendo escribirlo en coordenadas polares:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right] \psi(\rho, \phi) = 0 .$$

La separación de variables,  $\psi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$ , de modo análogo a lo realizado en la sección 21.2, da las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R &= 0 , \\ \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + \nu^2 \Psi &= 0 . \end{aligned}$$

La ecuación angular tiene soluciones armónicas,  $e^{\pm i\nu\phi}$ . La monovaluación de la solución en el intervalo  $[0, 2\pi]$  indica que  $\nu \in \mathbb{Z}$ . La ecuación radial, en tanto, es la ecuación de Bessel, con solución  $J_\nu(k\rho)$  (la otra solución linealmente independiente,  $N_\nu(k\rho)$ , no es aceptable físicamente, pues diverge en  $\rho = 0$ ). Además, la condición de borde fijo implica que

$$k = k_{\nu n} = \frac{x_{\nu n}}{a} ,$$

con  $x_{\nu n}$  el  $n$ -ésimo cero de  $J_\nu(x)$ . Cada  $k_{\nu n}$  está asociado a una frecuencia

$$\omega_{\nu n} = v k_{\nu n} = v \frac{x_{\nu n}}{a} , \quad (21.15)$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

es la velocidad de propagación de las vibraciones sobre la membrana.

A diferencia de lo que ocurre con las oscilaciones de una cavidad esférica, la frecuencia depende de todos los índices ( $\nu$  y  $n$ ) presentes en el sistema, luego no hay degeneración del espectro. Todos los modos normales tienen distinta frecuencia. Estos modos están descritos por la función

$$\psi_{\nu n}(\rho, \theta, t) = J_\nu \left( x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) (A_\nu \sin(\nu\phi) + B_\nu \cos(\nu\phi)) e^{i\omega_{\nu n} t} , \quad (21.16)$$

y la solución general por una combinación lineal de estos modos:

$$\psi(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{\nu} \left( x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) (A_{\nu} \sin(\nu\phi) + B_{\nu} \cos(\nu\phi)) e^{i\omega_{\nu n} t} .$$

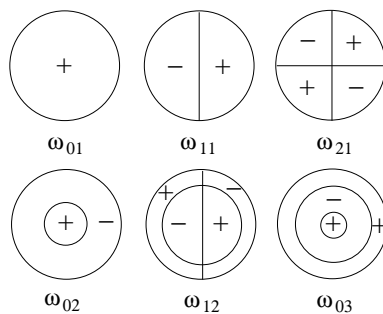
Dado que las frecuencias (21.15) son proporcionales a los ceros de las funciones de Bessel, es posible conocer la razón entre las frecuencias de oscilación de la membrana circular. Las seis frecuencias más bajas son:

$$\begin{aligned} \omega_{01} &, \\ \omega_{11} &= 1,593\omega_{01} , \\ \omega_{21} &= 2,136\omega_{01} , \\ \omega_{02} &= 2,295\omega_{01} , \\ \omega_{12} &= 2,917\omega_{01} , \\ \omega_{03} &= 3,598\omega_{01} . \end{aligned}$$

Para dibujar estos modos normales, basta notar que su amplitud se puede reescribir en la forma:

$$J_{\nu} \left( x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \cos(\nu\phi + \alpha_{\nu}) ,$$

con  $\alpha_{\nu}$  una cierta fase, que podemos considerar nula si nos interesa sólo un modo normal a la vez. Entonces advertimos que la frecuencia  $\omega_{\nu n}$  corresponde a un modo de oscilación con  $n$  nodos radiales —contando el borde fijo como un nodo radial— y  $\nu$  nodos angulares. Los primeros seis modos normales tienen la siguiente forma:



En esta figura, las líneas indican líneas nodales, el signo + indica regiones que en un tiempo dado se desplazan saliendo del plano de la página, y el signo - regiones que en el mismo tiempo se desplazan entrando al plano de la página.

## 21.6. Ecuación de difusión

Si  $u$  es una cantidad conservada, entonces uno puede afirmar que la variación de  $u$  dentro de un volumen sólo es posible porque hay un flujo de esa cantidad a través de las paredes del volumen:

$$\frac{d}{dt} \int_V d\vec{r} u(\vec{r}, t) = - \int_{S[V]} d\vec{a} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) , \quad (21.17)$$

donde  $\vec{J}$  es una corriente asociada a  $u$ . Del teorema de la divergencia se sigue entonces que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 . \quad (21.18)$$

Puesto que se espera en procesos de difusión que exista corriente sólo si hay gradientes de concentración, y que la dirección de la corriente sea tal que vaya de puntos de alta concentración a puntos de baja concentración (tendiendo a homogeneizar el sistema), se supone típicamente que

$$\vec{J} = -\lambda \vec{\nabla} u(\vec{r}, t) , \quad (21.19)$$

con  $\lambda$  alguna constante. Se tiene entonces

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 . \quad (21.20)$$

Por ejemplo, la ecuación de difusión del calor es de la forma (21.19), con  $\lambda = K/\sigma\rho$ , donde  $K$  es la conductividad térmica,  $\sigma$  el calor específico y  $\rho$  la densidad.

Consideremos entonces el problema de la difusión del calor en el interior de un paralelepípedo de aristas  $a, b, c$ , cuyas paredes están a temperatura cero, y que inicialmente tiene un perfil de temperatura  $u_0(x, y, z)$ . El dibujo es esencialmente el mismo que el de la página 230, así que no lo repetiremos.

Al separar variables en (21.20), escribiendo  $u(\vec{r}, t) = R(\vec{r})T(t)$ , obtenemos

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{1}{\lambda T} \frac{dT}{dt} .$$

Ambos términos deben ser entonces igual a una constante, que llamaremos  $-k^2$ . Entonces obtenemos, para la parte temporal,

$$\frac{dT}{dt} + \lambda k^2 T = 0 ,$$

que tiene por solución

$$T(t) = e^{-\lambda k^2 t} ,$$

lo que indica que, si  $k$  es real, un perfil inicial decaerá exponencialmente hacia la situación de equilibrio. La parte espacial, en tanto, es

$$\nabla^2 R + k^2 R = 0 ,$$

que no es sino la ecuación de Helmholtz.

Dada la simetría del problema, la escribimos en coordenadas cartesianas y separamos variables,  $R(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ , obteniéndose

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0 . \quad (21.21)$$

Concluimos entonces que cada término debe ser igual a una constante. En particular, podemos escribir  $X''/X = -\alpha^2$ ,  $Y''/Y = -\beta^2$ ,  $Z''/Z = -\gamma^2$ , de modo que

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0 , \\ Y'' + \beta^2 Y &= 0 , \\ Z'' + \gamma^2 Z &= 0 . \end{aligned}$$

Notando que deben satisfacerse las condiciones de borde  $X(0) = Y(0) = Z(0) = X(a) = Y(b) = Z(c) = 0$ , concluimos rápidamente que las soluciones son

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{a}n_x x\right) , \\ Y(y) &= \sin\left(\frac{\pi}{b}n_y y\right) , \\ Z(z) &= \sin\left(\frac{\pi}{c}n_z z\right) , \end{aligned}$$

con  $n_x, n_y, n_z$  enteros. Reemplazando estas soluciones en (21.21) encontramos que

$$k = k_{n_x, n_y, n_z} = \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2} . \quad (21.22)$$

La base de soluciones de (21.20) es entonces

$$u_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z, t) = \sin\left(\frac{\pi}{a}n_x x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}n_y y\right) \sin\left(\frac{\pi}{c}n_z z\right) e^{-\lambda \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2\right] t} , \quad (21.23)$$

y la solución general es de la forma

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} A_{n_x, n_y, n_z} u_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z, t) . \quad (21.24)$$

Por ejemplo, si inicialmente tenemos un cubo de arista  $a$ , con un perfil de temperatura inicial sinusoidal en todas direcciones:

$$u(x, y, z, 0) = T_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) , \quad (21.25)$$

es inmediato verificar, al imponer esta condición inicial sobre (21.24), que

$$A_{n_x, n_y, n_z} = T_0 \delta_{n_x, 1} \delta_{n_y, 1} \delta_{n_z, 1} , \quad (21.26)$$

y que la evolución temporal de este perfil será

$$u(x, y, z, t) = T_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) e^{-\lambda \frac{3\pi^2}{a^2} t} . \quad (21.27)$$

## 21.7. Difusión con creación de partículas

Consideremos la evolución de neutrones en material fisionable. Cuando un neutrón impactar sobre un núcleo de  $U^{235}$  —por ejemplo—, éste se fisiona y se liberan nuevos neutrones, que pueden continuar la reacción en cadena. En principio, la densidad de neutrones es una cantidad conservada, salvo por el hecho de que se están generando nuevos neutrones continuamente. Si  $n(\vec{r}, t)$  es la densidad de neutrones,  $\vec{J}$  su corriente, y si suponemos que la creación de neutrones ocurre a una tasa temporal  $1/\tau$ , y es proporcional a la densidad de neutrones

(es decir, se generan más neutrones en regiones donde hay mayor cantidad de ellos), podemos reescribir la “ecuación de conservación” (21.17) para los neutrones en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_V d\vec{r} n(\vec{r}, t) = - \int_{S[V]} d\vec{a} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\tau} \int_V d\vec{r} n(\vec{r}, t) . \quad (21.28)$$

Al usar el teorema de la divergencia para el término de superficie, y poner una ley para la corriente de la forma (21.19), es claro que se obtendrá la siguiente ecuación para la densidad:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \lambda \nabla^2 n + \frac{1}{\tau} n ,$$

es decir,

$$\nabla^2 n - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\lambda \tau} n = 0 . \quad (21.29)$$

Esta ecuación de continuidad modificada describe el comportamiento de la densidad de neutrones en material fisionable, considerando creación de neutrones a una tasa proporcional a su densidad.

Separando variables en la forma  $n(\vec{r}, t) = R(\vec{r})T(t)$ , se tiene:

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{1}{\lambda T} \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\lambda \tau} .$$

Cada lado debe ser igual a una constante, que llamaremos  $-k^2$ , de modo que quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)R &= 0 , \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\tau} (1 - k^2 \lambda \tau) T , \end{aligned}$$

es decir nuevamente la ecuación de Helmholtz para la parte espacial, y una parte temporal de la forma

$$T(t) = e^{\frac{1}{\tau}(1-k^2\lambda\tau)t} .$$

Estudiemos ahora una geometría específica: una esfera de radio  $a$  que contiene  $U^{235}$ , que impide el ingreso o fuga de neutrones por sus paredes, de modo que  $n(r = a, \theta, \phi, t) = 0$ . Debido a la simetría esférica, el problema para la parte espacial es el mismo que para los modos normales dentro de una cavidad esférica (Sec. 21.5.1), es decir,

$$k = k_{ln} = \frac{x_{ln}}{a} \quad (21.30)$$

y

$$R(\vec{r}) = j_l \left( x_{ln} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) , \quad (21.31)$$

con  $j_l(x)$  la función de Bessel esférica e  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  los armónicos esféricos. Con (21.30) y (21.31), la base de soluciones de (21.29) es

$$n_{lnm}(\vec{r}, t) = j_l \left( x_{ln} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{\frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{x_{ln}^2}{a^2} \lambda \tau \right) t} , \quad (21.32)$$

La evolución de la densidad de neutrones en esta esfera de material fisionable, para un perfil de densidad inicial dado, es de la forma

$$n(\vec{r}, t) = \sum_{nlm} A_{lnm} n_{lnm}(\vec{r}, t) . \quad (21.33)$$