Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

Capítulo 20

Diversos tipos de funciones cilíndricas

versión preliminar 3.2-23 diciembre 2002

La ecuación de Bessel, que estudiamos en el capítulo anterior, da origen a una serie de funciones que genéricamente denominamos "cilíndricas", debido a que la ecuación de Bessel aparece de modo natural en diversos problemas físicos con simetría cilíndrica, pues corresponde a la parte radial del Laplaciano en dichas coordenadas. Una de ellas es la función de Bessel $J_\alpha(z)$, que estudiamos en el capítulo anterior. En éste revisaremos brevemente algunas otras funciones y sus propiedades.

20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel

Consideremos la ecuación de Bessel, con solución centrada en $z = 0$. Escojamos además $n = 0$:

$$f'' + \frac{1}{z}f' + f = 0 \ . \tag{20.1}$$

Esta ecuación hipergeométrica tiene dos soluciones linealmente independientes, una de las cuales es la ya conocida $J_0(z)$. Determinemos ahora la segunda solución. Observando la forma de la segunda solución en (15.26), proponemos una solución de la forma

$$f(z) = J_0(z) \int^z u(t)\, dt \ . \tag{20.2}$$

Luego

$$\frac{1}{z}f'(z) = \frac{1}{z}J_0'(z) \int^z u(t)\, dt + \frac{1}{z}J_0(z)u(z) \ , \tag{20.3}$$

$$f''(z) = J_0''(z) \int^z u(t)\, dt + 2J_0'(z)u(z) + J_0(z)u'(z) \ . \tag{20.4}$$

Reemplazando en (20.1), y puesto que $J_0(z)$ es solución de ella,

$$u'(z)J_0(z) + u(z)\left[2J_0'(z) + \frac{1}{z}J_0(z)\right] = 0 \ ,$$

esto es,

$$
\begin{aligned}
u'(z) &= -\left[\frac{2J_0'(z)}{J_0(z)} + \frac{1}{z}\right] u(z) \ , \\
u(z) &= C \exp\left[-\int^z \left(\frac{2J_0'(t)}{J_0(t)} + \frac{1}{t}\right) dt\right] \ , \\
u(z) &= \exp\left[-\ln J_0^2(z) - \ln z\right] \ ,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
u(z) = \frac{1}{zJ_0^2(z)} = \frac{1}{z}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\nu} z^{2\nu}\right) \ . \tag{20.5}
$$

La solución linealmente independiente a $J_0(z)$ es entonces

$$
N_0(z) = J_0(z) \int^z \frac{dt}{tJ_0^2(t)} \ , \tag{20.6}
$$

lo que reescribimos como

$$
N_0(z) = J_0(z)\left[\ln z + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{2\nu} z^{2\nu}\right] = J_0(z) \ln z + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \ .
$$

Reemplazando en la ecuación diferencial (20.1) determinamos los coeficientes $c_{2\nu}$. Para ello, notamos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z} N_0'(z) &= \frac{1}{z} J_0'(z) \ln z + \frac{1}{z^2} J_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \frac{2\nu}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu-2} \frac{1}{2} \\
N_0''(z) &= J_0''(z) \ln z + 2J_0'(z)\frac{1}{z} - J_0(z)\frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \frac{2\nu(2\nu-1)}{4} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu-2} \ .
\end{aligned}
$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de z, se tiene la relación de recurrencia

$$
c_{2\nu} = -\frac{c_{2\nu-2}}{\nu^2} - \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2}\frac{1}{\nu} \ , \quad \nu \geq 1 \ . \tag{20.7}
$$

Tomamos $c_0 = 0$, y notamos que sólo nos interesan los índices pares. Entonces

$$
\begin{aligned}
c_2 &= 1 \ , \\
c_4 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ .
\end{aligned}
$$

Afirmación

$$
c_{2\nu} = \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right) \ . \tag{20.8}
$$

Demostración La demostración es fácil por inducción. Suponiendo que la afirmación es cierta para $\nu = n$, podemos calcular

$$c_{2n+2} = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\frac{1}{n+1}$$

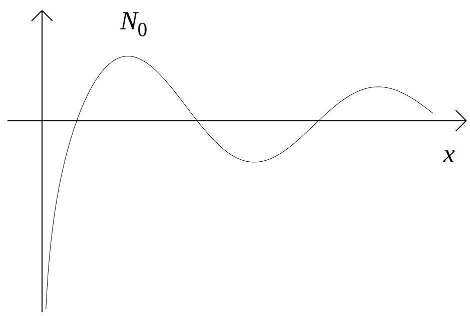
$$c_{2n+2} = -\frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) \ .$$

q.e.d.

Con este resultado, podemos escribir una solución linealmente independiente de $J_0(x)$ en la forma:

$$N_0(z) = J_0(z)\ln(z) + \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^6 - \cdots \tag{20.9}$$

Gráficamente:



Análogamente, asociadas a las funciones de índices superiores $J_n(z)$, será posible encontrar la segunda solución, $N_n(z)$.

En general, $N_n(z)$ se puede encontrar notando que la función

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\pi}[J_\alpha(z)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(z)] \ , \tag{20.10}$$

es linealmente independiente a $J_\alpha(z)$ si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, y por tanto puede ser usada como segunda solución. Las $N_\alpha(z)$ se conocen como *funciones de Bessel de segunda especie*, o *funciones de Neumann*. Lo interesante es que, al contrario de $J_{-\alpha}(z)$, $N_\alpha(z)$ continúa siendo linealmente independiente cuando α es entero. Para mostrarlo (no lo haremos aquí), se puede considerar $\alpha = n + \epsilon$, y tomar el límite $\epsilon \to 0$. Resulta finalmente

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{z}{2}\right)J_n(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l[\Psi(l+1)+\Psi(n+l+1)]}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-l-1)!}{l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l-n} \ , \tag{20.11}$$

donde

$$\Psi(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\frac{d\Gamma(\lambda)}{d\lambda} \ . \tag{20.12}$$

20.2. Funciones de Hankel

En el capítulo anterior, vimos que las funciones de Bessel se pueden representar en la forma integral

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z \operatorname{sen}\phi - n\phi)]\, d\phi \ .$$

Hagamos el cambio de variable $\phi = -\psi$, de modo que

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(z \operatorname{sen}\psi - n\psi)]\, d\psi \ .$$

Consideremos ahora una generalización de lo anterior al plano complejo, la función

$$\Phi(z) = \int_C e^{-iz \operatorname{sen} s} e^{i\alpha s}\, ds \ . \tag{20.13}$$

Sea

$$g(s) = e^{i\alpha s} \ . \tag{20.14}$$

Entonces

$$g'' + \alpha^2 g = 0 \ . \tag{20.15}$$

Sea además

$$f(z,s) = e^{-iz \operatorname{sen} s} \ , \tag{20.16}$$

de modo que

$$z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z\frac{\partial f}{\partial z} + z^2 f = -\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \ . \tag{20.17}$$

Afirmación $\Phi(z)$ satisface la ecuación de Bessel (bajo ciertas restricciones),

$$z^2\Phi'' + z\Phi' + (z^2 - \alpha^2)\Phi = 0 \ . \tag{20.18}$$

Demostración Si (20.18) se satisface, entonces

$$0 = \int_C \left[z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z\frac{\partial f}{\partial z} + (z^2-\alpha^2)f \right] g \ .$$

Con (20.17),

$$\begin{aligned}
0 &= -\alpha^2\int_C fg - \int_C \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right) g \\
&= -\alpha^2\int_C fg + \int_C \frac{\partial f}{\partial s} g' - \left[\frac{\partial f}{\partial s} g\right]\Big|_C \\
&= -\alpha^2\int_C fg - \int_C fg'' + \left[fg' - \frac{\partial f}{\partial s} g\right]\Big|_C \\
&= -\int_C f(g''+\alpha^2 g) + \left[fg' - \frac{\partial f}{\partial s} g\right]\Big|_C \ .
\end{aligned}$$

Con (20.15),

$$0 = \left[fg' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \bigg|_C \ .$$

Por lo tanto, Φ es solución de la ecuación de Bessel si f y $\partial f / \partial s$ son despreciables en el contorno de integración C.

q.e.d.

Sean ahora $z = x > 0$, $s = s_1 + i s_2$, $s_{1,2} \in \mathbb{R}$. En este caso,

$$\operatorname{sen} s = \operatorname{sen} s_1 \cosh s_2 + i \cos s_1 \operatorname{senh} s_2 \ .$$

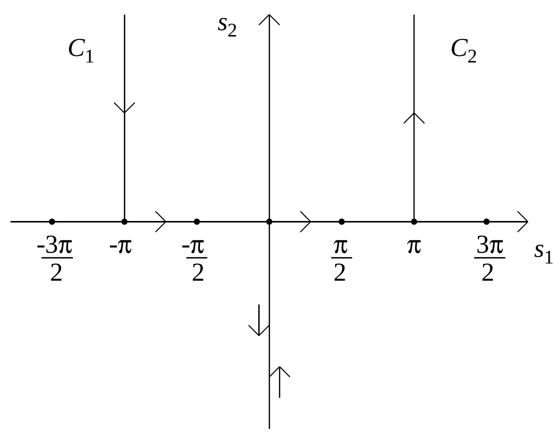
Considerando la afirmación anterior, ¿en qué parte del plano $(\operatorname{Re} s, \operatorname{Im} s)$ tenemos $|\, f(x,s)\,| = |\, e^{ix \operatorname{sen} s}\,| \to 0$? Esto es, buscamos un contorno C tal que

$$\operatorname{Re}(-ix \operatorname{sen} s) = x \cos s_1 \operatorname{senh} s_2 \longrightarrow -\infty \ .$$

Esta condición equivale a

$$\begin{array}{ll} \operatorname{senh} s_2 \longrightarrow -\infty & \text{si } \cos s_1 > 0 \ , \\ \operatorname{senh} s_2 \longrightarrow \infty & \text{si } \cos s_1 < 0 \ . \end{array} \tag{20.19}$$

Escojamos los contornos de integración:



Sobre estos contornos, f y $\partial f / \partial s$ son desprecibles en infinito, y estamos en condiciones de definir dos nuevas funciones, soluciones de la ecuación diferencial de Bessel:

Definición 20.1 *Funciones de Hankel*

$$\boxed{H_\alpha^{(1,2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_{1,2}} e^{-ix \operatorname{sen} s} e^{i\alpha s} \, ds \ , \quad x > 0} \tag{20.20}$$

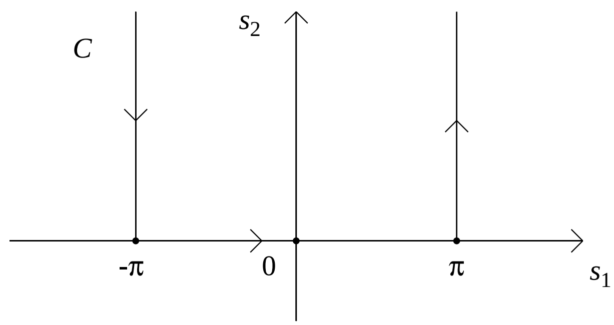
Consideremos el caso particular $\alpha = n$, y la expresión

$$I(x) = H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) \tag{20.21}$$

De (20.20),

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{-ix \operatorname{sen} s} e^{ins}\, ds \ ,$$

con



Puesto que

$$\begin{aligned} e^{in(s+2\pi)} &= e^{ins} \ , \\ \operatorname{sen}(s+2\pi) &= \operatorname{sen} s \ , \end{aligned}$$

las integraciones sobre los segmentos verticales de C se anulan entre sí. Se tiene entonces

$$H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \operatorname{sen} \phi} e^{in\phi}\, d\phi \ .$$

Se siguen las siguientes relaciones entre las funciones cilíndricas que hemos examinado:

$$J_n = \frac{1}{2} \left[H_n^{(1)} + H_n^{(2)} \right] \ , \tag{20.22}$$

$$N_n = \frac{1}{2i} \left[H_n^{(1)} - H_n^{(2)} \right] \ , \tag{20.23}$$

y a la inversa,

$$H_n^{(1)} = J_n + iN_n \ , \tag{20.24}$$

$$H_n^{(2)} = J_n - iN_n \ . \tag{20.25}$$