Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

Capítulo 13

Polinomios de Laguerre

versión preliminar 3.1-28 octubre 2002

13.1. Definición

Definición 13.1 *Definimos el conjunto de los polinomios de Laguerre* $\{L_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}^0}$ *mediante una cualquiera de las siguientes ecuaciones:*

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n\, e^{-t}\right) = (-1)^n t^n + \cdots + n!\ , \tag{13.1a}$$

$$L_n(t) = e^t \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{d^{n-\nu} t^n}{dt^{n-\nu}}\right) \frac{d^\nu e^{-t}}{dt^\nu}\ , \tag{13.1b}$$

$$L_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{n!}{\nu!}\, t^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{n!\, n!}{(n-\nu)!\, (\nu!)^2}\, t^\nu\ . \tag{13.1c}$$

Algunos de los polinomios en forma explícita:

$$\begin{aligned}
L_0(t) &= 1 \\
L_1(t) &= -t+1 \\
L_2(t) &= t^2 - 4t + 2 \\
L_3(t) &= -t^3 + 9t^2 - 18t + 6 \\
L_4(t) &= t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24 \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

13.2. Función generatriz

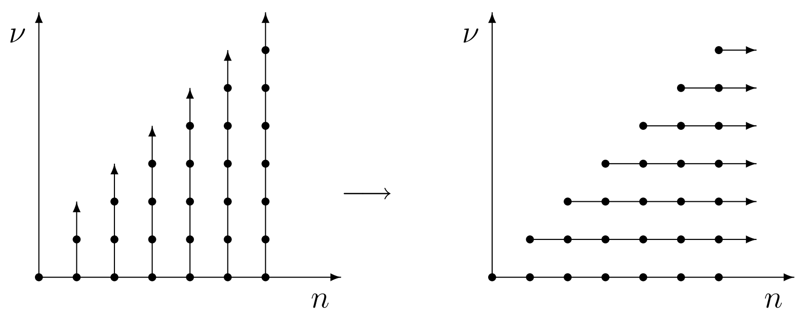
Definición 13.2 *La función generatriz* $\Psi(t,x)$ *está definida por la siguiente relación:*

$$\Psi(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!}\, x^n\ . \tag{13.2}$$

Usando (13.1c) obtenemos:

$$\Psi(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \binom{n}{\nu} t^\nu x^n$$

Cambiemos el orden de suma. El primer gráfico corresponde a la forma en que estábamos sumando: fijamos un n en el eje horizontal, con $n = 1, \ldots, \infty$ y luego consideramos los v variando desde 1 a n (flechas verticales hacia arriba). El segundo corresponde a la misma suma pero hecha de forma diferente: fijamos un ν en el eje vertical, con $\nu = 1, \ldots, \infty$ y luego consideramos los n variando desde ν a ∞ (flechas horizontales hacia la derecha).



Obtenemos

$$\Psi(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} t^\nu \binom{n}{\nu} x^n .$$

Haciendo el cambio de índice $m = n - \nu$:

$$\Psi(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} t^\nu \binom{m+\nu}{\nu} x^{m+\nu} .$$

Reordenando

$$\Psi(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} t^\nu x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\nu}{\nu} x^m .$$

Pero

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+\nu}{\nu} x^m = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\nu+1} \qquad \text{cuando } |x| < 1 ,$$

luego

$$\Psi(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} t^\nu \left(\frac{x}{1-x}\right)^\nu \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{tx}{1-x}\right)^\nu .$$

Finalmente

$$\boxed{\Psi(t,x) = \frac{1}{1-x} \exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n} \tag{13.3}$$

13.3. Relaciones de recurrencia

Reescribamos la definición de la función generatriz

$$\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n!}\,x^n\ . \tag{13.4}$$

Derivemos respecto a x:

$$\frac{-t}{(1-x)^2}\exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(t)}{(n-1)!}\,x^{(n-1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n!}\,x^n\ .$$

Usando (13.4) y comparando coeficientes de x,

$$\boxed{L_{n+1}(t) + (t-2n-1)L_n(t) + n^2L_{n-1}(t) = 0} \tag{13.5}$$

De la misma manera, derivando (13.4) respecto a t, se obtiene

$$\boxed{L'_n(t) - n\,L'_{n-1}(t) + n\,L_{n-1}(t) = 0} \qquad n \geq 1\ . \tag{13.6}$$

13.4. Ecuación de Laguerre

Diferenciando dos veces (13.4) respecto a t,

$$L''_{n+2}(t) + (t-2n-3)L''_{n+1}(t) + (n+1)^2L''_n(t) + 2L'_{n+1}(t) = 0\ . \tag{13.7}$$

De (13.6) tenemos

$$L'_{n+1}(t) = (n+1)\left[L'_n(t) - L_n(t)\right]\ , \tag{13.8}$$

de donde obtenemos, derivando nuevamente,

$$L''_{n+1}(t) = (n+1)\left[L''_n(t) - L'_n(t)\right]\ . \tag{13.9}$$

Cambiando $n \to n+1$,

$$L''_{n+2}(t) = (n+2)\left[L''_{n+1}(t) - L'_{n+1}(t)\right]\ .$$

Usando (13.8) y (13.9),

$$\begin{aligned}
L''_{n+2}(t) &= (n+2)(n+1)\left[L''_n(t) - L'_n(t) - L'_n(t) + L_n(t)\right]\ ,\\
L''_{n+2}(t) &= (n+2)(n+1)\left[L''_n(t) - 2L'_n(t) + L_n(t)\right]\ . \qquad (13.10)
\end{aligned}$$

Reemplazando (13.8), (13.9) y (13.10) en (13.7),

$$\begin{gathered}
(n+2)(n+1)\left[L''_n(t) - 2L'_n(t) + L_n(t)\right] + (t-2n-3)(n+1)\left[L''_n(t) - L'_n(t)\right]\\
+(n+1)^2L''_n(t) + 2(n+1)\left[L'_n(t) - L_n(t)\right] = 0\\
(n+1)\left(n+2+t-2n-3+n+1\right)L''_n(t) + (n+1)\left(2n-4-t+2n+3+2\right)L'_n(t)\\
+(n+1)\left(n+2-2\right)L_n(t) = 0\\
(n+1)\;t\;L''_n(t) + (n+1)\left(1-t\right)\;L'_n(t) + (n+1)n\;L_n(t) = 0\ .
\end{gathered}$$

Dividiendo por $(n+1)$ obtenemos

$$\boxed{t\ L_n''(t) + (1-t)\ L_n'(t) + n\ L_n(t) = 0} \tag{13.11}$$

Es decir, $L_n(t)$ es una solución de la *ecuación de Laguerre*

$$\boxed{t\ y''(t) + (1-t)\ y'(t) + n\ y(t) = 0\ .} \tag{13.12}$$

Consideremos esta ecuación, pero en una forma más general:

$$t\ y''(t) + (1-t)\ y'(t) + \lambda\ y(t) = 0\ .$$

Buscando soluciones del tipo

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu\ ,$$

es fácil demostrar que los a_ν satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{\nu+1} = \frac{\nu-\lambda}{(\nu+1)^2} a_\nu\ .$$

Lo anterior tiene varias consecuencias:

(i) El coeficiente a_0 puede elegirse libremente, quedando $a_1, a_2, \ldots$ así determinados por a_0. Se obtiene un espacio de soluciones de dimensión uno. Para encontrar la otra solución linealmente independiente hay que analizar ecuaciones del tipo

$$f'' + p(z) f' + q(z) f = 0\ .$$

Esto se hará en el capítulo siguiente.

(ii) Al hacer el cuociente entre los coeficientes tenemos

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{1}{\nu}\ .$$

Esto implica radio de convergencia infinito para la serie.

(iii) Los valores $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots$ son excepcionales: dan soluciones polinomiales.

(iv) Si $\lambda \notin \mathbb{N}^0$ todos los coeficientes de índice suficientemente grande son positivos o negativos. Esto implica un crecimiento muy rápido.

13.5. Ortogonalidad

Consideremos

$$I = \int_0^\infty t^m\ L_n(t)\ e^{-t}\ dt\ , \qquad \text{con } m < n\ .$$

Sea $m > 0$, entonces
$$I = \int_0^\infty t^m \, \frac{d^n}{dt^n} \left(t^n \, e^{-t} \right) \, dt \ ,$$
integrando por partes,
$$t^m \, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(t^n \, e^{-t} \right) \Big|_0^\infty - m \int_0^\infty t^{m-1} \, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(t^n \, e^{-t} \right) \, dt \ .$$
Integrando n veces por partes se obtiene entonces
$$I = (-1)^n \, m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} \left(t^n \, e^{-t} \right) \, dt \ .$$
Si $m < n$,
$$I = (-1)^n \, m! \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} \left(t^n \, e^{-t} \right) \Big|_0^\infty = 0 \ ,$$
luego
$$\int_0^\infty L_n(t) \, L_m(t) \, e^{-t} \, dt = 0 \qquad \text{si } m < n \ .$$
Por simetría la integral va a ser nula siempre que $m \neq n$.
Si $m = n$,
$$\int_0^\infty L_n^2(t) \, e^{-t} \, dt = (-1)^n (-1)^n n! \int_0^\infty t^n \, e^{-t} \, dt = (n!)^2 \ .$$
Resumiendo ambos casos,
$$\boxed{\int_0^\infty L_n(t) \, L_m(t) \, e^{-t} \, dt = (n!)^2 \, \delta_{nm}} \tag{13.13}$$
Basados en la relación de ortogonalidad (13.13) podemos definir un conjunto de funciones
$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} \, L_n(t) \, e^{-t/2} \ . \tag{13.14}$$
Claramente
$$\int_0^\infty \varphi_n(t) \, \varphi_m(t) \, dt = \delta_{nm} \ .$$
Es decir, el conjunto $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}^0}$ corresponde a un conjunto de funciones ortonormales en el intervalo $[0, \infty)$.

A partir de (13.14) podemos despejar los polinomios de Laguerre
$$L_n(t) = n! \, e^{t/2} \varphi_n(t) \ ,$$
y usando la ecuación diferencial (13.11) que satisfacen, encontramos la ecuación para las funciones $\varphi_n(t)$:
$$t \, \varphi_n''(t) + \ \varphi_n'(t) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \right) \varphi_n(t) = 0 \ . \tag{13.15}$$
Además, $\varphi_n(t)$ satisface
$$\lim_{t \to \infty} \varphi_n(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0} \varphi_n(t) < \infty \ .$$

13.6. Polinomios asociados de Laguerre

Al diferenciar m veces la ecuación (13.11) obtenemos

$$t\ L_n^{(m+2)}(t) + (m+1-t)\ L_n^{(m+1)}(t) + (n-m)\ L_n^{(m)}(t) = 0\ .$$

Podemos definir un nuevo conjunto de polinomios

$$\boxed{L_n^m(t) = \frac{d^m}{dt^m}\ L_n(t)} \qquad \text{para } n \geq m\ , \tag{13.16}$$

conocidos como los *polinomios asociados de Laguerre*. Los cuales son soluciones de la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{t\ y''(t) + (m+1-t)\ y'(t) + (n-m)\ y(t) = 0\ .} \tag{13.17}$$

Algunos de los primeros polinomios son:

$$\begin{array}{lll}
L_1^1 = -1\ , & & \\
L_2^1 = -4 + 2t\ , & L_2^2 = 2\ , & \\
L_3^1 = -18 + 18t - 3t^2\ , & L_3^2 = 18 - 6t\ , & L_3^3 = -6\ .
\end{array}$$

La función generatriz

$$\boxed{\Psi_m(t,x) = (-1)^m x^m\ \exp\left(\frac{-tx}{1-x}\right) = (1-x)^{m+1}\ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{L_n^m(t)}{n!}\ x^n\ .} \tag{13.18}$$

Utilizando esta ecuación podemos obtener las relaciones de recurrencia

$$\frac{d}{dt}\ L_n^m(t) = L_n^{m+1}(t)\ , \tag{13.19}$$

$$L_{n+1}^m(t) + (t-2n-1)L_n^m(t) + m\ L_n^{m+1}(t) + n^2 L_{n-1}^m(t) = 0\ , \tag{13.20}$$

$$L_n^m(t) - n\ L_{n-1}^m(t) + n\ L_{n-1}^{m-1}(t) = 0\ . \tag{13.21}$$

Finalmente, en forma análoga a lo que hicimos con los polinomios de Laguerre podemos definir las funciones ortogonales a partir de los polinomios asociados de Laguerre de la siguiente forma:

$$R_{n\,\ell}(t) \equiv e^{-t/2}\ t^\ell\ L_{n+\ell}^{2\ell+1}(t)\ . \tag{13.22}$$

Estas funciones satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2}{t}\ \frac{dy(t)}{dt} - \left(\frac{1}{4} - \frac{n}{t} + \frac{\ell(\ell+1)}{t^2}\right) y(t) = 0\ . \tag{13.23}$$

Esta ecuación aparece en Mecánica Cuántica al resolver el átomo de Hidrógeno. Específicamente, corresponde a la ecuación radial de Schrödinger para la función de onda del átomo de Hidrógeno.