



Universidad de Vigo

Notas de Clase

de la asignatura

Matemáticas de la Especialidad

(Regulación Automática y Electrónica)

(plan de 1981)

Curso 2001 -02

Emilio Faro Rivas

Índice General

Índice General	3
1 Resolución de ecuaciones no lineales	9
1.1 Métodos generales	10
1.1.1 Método de la bisección	10
1.1.2 Regula Falsi (falsa posición)	12
1.1.3 Regula Falsi Modificada	14
1.1.4 Método de la Secante e idea del Método de Müller	15
1.2 Métodos iterativos	17
1.2.1 Método de Newton	18
1.2.2 Propiedades generales de los métodos iterativos . .	22
1.2.3 Velocidad de convergencia	25
1.2.4 Aceleración de la convergencia	30
1.3 Ecuaciones polinómicas	33
1.3.1 Introducción	33
1.3.2 Propiedades generales de los polinomios	34
1.3.3 Algoritmo de Newton para ecuaciones polinómicas	41
1.3.4 Ecuaciones polinómicas mal condicionadas	41
1.3.5 El método de Bernoulli	43
1.4 El Método de Müller	45

Respuestas Ejercicios Capítulo 1	50
2 Sistemas de Ecuaciones Lineales	55
2.1 Métodos directos	55
2.1.1 Eliminación de Gauss	55
2.1.2 Factorización triangular	62
2.1.3 Método de Gauss-Jordan	68
2.1.4 Otras técnicas de pivotación	69
2.2 Análisis de errores y Condición	71
2.2.1 Introducción: Distintas medidas del error	71
2.2.2 Mejora iterativa	72
2.2.3 Normas de matrices	76
2.2.4 Condición de una matriz y acotación de errores	79
2.2.5 Estimación de la condición de una matriz	83
2.2.6 Condición de las matrices ortogonales	84
2.3 Métodos iterativos	85
2.3.1 Ejemplo introductorio del método iterativo	85
2.3.2 Esquema general del Método Iterativo	87
2.3.3 Convergencia del método iterativo general	88
2.3.4 Método de Jacobi	90
2.3.5 Aceleración de la convergencia; método de Gauss-Seidel	93
2.3.6 Método de las relajaciones sucesivas	96
Respuestas Ejercicios Capítulo 2	99
3 Vectores y valores propios	107
3.1 Método de la potencia	108
3.2 Método QR o de la factorización ortogonal	109
3.2.1 La Sucesión General del Método de la Factorización Ortogonal	110

3.2.2 La factorización ortogonal de una matriz: Método de las rotaciones planas	111
3.2.3 Simplificación que ocurre para las matrices tipo Hessenberg	114
3.2.4 Método de las reflexiones de Householder para el cálculo de una matriz Hessenberg semejante a una dada	114
3.2.5 Simplificación aplicable a matrices simétricas	119
3.2.6 Algoritmo rápido para la factorización ortogonal de matrices Hessenberg	119
Respuestas Ejercicios Capítulo 3	124
4 Interpolación y Aproximación	127
4.1 El problema general	127
4.1.1 Introducción	127
4.1.2 Interpolación, aproximación y ajuste de datos	128
4.2 Interpolación polinómica	129
4.2.1 Existencia y unicidad del polinomio de interpolación	130
4.2.2 Fórmula de Lagrange para la interpolación polinómica. Polinomios de Lagrange	132
4.2.3 Fórmula baricéntrica para el polinomio de interpolación	134
4.2.4 Análisis de errores	136
4.3 Método de Newton	138
4.3.1 La fórmula de Newton	139
4.3.2 Las diferencias divididas	140
4.3.3 Propiedades de simetría	143
4.3.4 Tabla de diferencias divididas. Adición de nuevos nodos	144
4.4 El algoritmo de interpolación de Aitken	145
4.5 Nodos igualmente espaciados	147

4.5.1	Problemas de la interpolación con nodos igualmente espaciados	149
4.6	Varillas flexibles (<i>splines</i>)	150
4.6.1	Introducción	150
4.6.2	Varillas flexibles cúbicas	152
4.6.3	Un algoritmo para obtener varillas flexibles cúbicas de extremos libres	160
4.7	Interpolación Óptima	161
4.7.1	Introducción y motivación	161
4.7.2	El concepto de interpolación óptima	162
4.7.3	Los polinomios de Chebyshev	165
4.7.4	Teorema de los nodos de Chebyshev	166
4.7.5	Interpolación óptima en un intervalo arbitrario	168
4.7.6	Ejemplo de la interpolación de Chebyshev	169
	Respuestas Ejercicios Capítulo 4	171
5	Ecuaciones diferenciales	177
5.1	Problemas de valores iniciales	178
5.1.1	El algoritmo de Euler	178
5.1.2	Métodos de Taylor	180
5.1.3	Métodos de Runge-Kutta	182
5.1.4	Error local y paso variable	185
5.1.5	Métodos de paso múltiple	186
5.1.6	Sistemas de ecuaciones	188
5.2	Problemas de valores en la frontera	188
5.2.1	Métodos de tiro o disparo	188
5.2.2	Problemas lineales: Método de las diferencias finitas	190
5.2.3	Métodos de colocación	191
5.2.4	Tratamiento Variacional	192
5.2.5	Método de los elementos finitos	193

	Respuestas Ejercicios Capítulo 5	194
	Bibliografía	195
A	Ejercicios Complementarios	199

Capítulo 1

Resolución de ecuaciones no lineales

Uno de los primeros problemas de las matemáticas ha sido el de la resolución de ecuaciones. Pero, ¿qué es una ecuación?

El concepto general de ecuación

El concepto más general de ecuación se obtiene al igualar dos funciones $f : X \rightarrow A$, $g : Y \rightarrow A$ cuyos valores pertenecen a un mismo rango. Resolver la ecuación de f y g es, en tal situación, hallar todos los pares (x, y) para los cuales se verifica la igualdad

$$f(x) = g(y). \quad (1.1)$$

Pero nada se gana con tanta generalidad porque esta formulación tan general es, curiosamente, equivalente a una simplificación de uno de sus casos particulares: a saber, el caso más sencillo en que las dos funciones tienen el mismo dominio, es decir, son de la forma:

$$X \xrightarrow[g]{f} A$$

y la solución de la ecuación de f y g está formada por todos los elementos $x \in X$ tales que

$$f(x) = g(x). \quad (1.2)$$

Para convencerse de que saber resolver ecuaciones del tipo (1.2) es suficiente para resolver todas las del tipo (1.1) no hay más que ver que el

problema de (1.1) se puede reducir al de (1.2) utilizando el producto cartesiano, $X \times Y$, de los dominios. Un razonamiento más sutil (que utiliza la diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times X$) muestra que saber resolver todos los problemas de tipo (1.1) es suficiente para resolver todos los del tipo (1.2).

En el planteamiento general que acabamos de presentar no hace falta suponer que f y g sean funciones numéricas. Sin embargo, en el caso de que lo sean, (1.2) es equivalente a la ecuación $f(x) - g(x) = 0$. Este es el caso que nos interesará en lo que sigue y por tanto podemos decir que las soluciones de una ecuación como (1.2) son los *ceros* de la función diferencia $f - g$. Así, nuestro problema general será el de resolver ecuaciones de la forma

$$f(x) = 0, \quad (1.3)$$

es decir, el de hallar ceros de funciones.

También es posible plantear la resolución de una ecuación como el problema de hallar los *puntos fijos* de una función g , es decir, las soluciones de

$$g(x) = x.$$

Por ejemplo, dar una solución de (1.3) es equivalente a dar un punto fijo de cualquier función de la forma $g(x) = x + f(x)/\lambda$ con $\lambda \neq 0$ (entre otras muchas posibles). Planteado el problema de esta forma se puede someter a los métodos generales de resolución de problemas de punto fijo, que se llaman *métodos iterativos*.

Así pues, estudiaremos dos tipos de métodos de resolución de ecuaciones: *métodos generales* (o búsqueda de ceros) y *métodos iterativos* (o búsqueda de puntos fijos). Además de esto estudiaremos algunos métodos particulares para las ecuaciones polinómicas, es decir para el caso en que la función $f(x)$ en (1.3) sea un polinomio.

1.1 Métodos generales

1.1.1 Método de la bisección

El método de la bisección sirve para aproximarse tanto como se quiera a un cero de una función real de variable real continua y que toma valores de signos opuestos en los extremos de un intervalo $[a, b]$. Suponemos, pues, que f es continua en $[a, b]$ y que $f(a)f(b) < 0$. Esto implica que f

tiene (al menos) un cero en $[a, b]$. El punto medio de $[a, b]$, $x_0 = (a + b)/2$, aproxima al cero con un error menor que $|b - a|/2$. Existen dos posibilidades: (1) $f(x_0) = 0$, en cuyo caso ya hemos hallado el cero, y (2) $f(x_0) \neq 0$, en cuyo caso, según que el signo de $f(x_0)$ sea opuesto del de $f(a)$ o del de $f(b)$, el intervalo $[a, x_0]$ ó el $[x_0, b]$ tiene con certeza un cero. Si se da la posibilidad (2) hemos reducido la acotación del cero a la mitad, de forma que si al principio conocíamos el cero con un error menor que $(b - a)/2$, después de un paso de bisección el error en el nuevo punto medio es menor que $(b - a)/2^2$. Continuando el proceso vamos reduciendo el error a la mitad en cada paso. Así, llegamos al siguiente algoritmo para el método de la bisección. En él se calcula el número N de pasos que hay que dar para garantizar que el error sea menor que ϵ en base a la relación $(b - a)/2^{N+1} \leq \epsilon$, que es equivalente a $N \geq (\ln(b - a) - \ln \epsilon) / \ln 2 - 1$.

Algoritmo del Método de la Bisección

- 1 Datos:** f (la función de la que se quiere un cero), a, b (extremos del intervalo en que $f(a)f(b) < 0$), ϵ (precisión deseada).
- 2** $N = \text{ent}((\ln(b - a) - \ln \epsilon) / \ln 2)$
- 3 Si** $N = (\ln(b - a) - \ln \epsilon) / \ln 2$ **entonces** $N = N - 1$
- 4** $x = (a + b)/2$
- 5 Para** $i = 1$ **hasta** N
 - Si** $f(x) = 0$ **entonces ir a 7**
 - Si** $f(x)f(a) < 0$ **entonces** $b = x$
 - Si** $f(x)f(a) > 0$ **entonces** $a = x$
 - $x = (a + b)/2$
- 6 siguiente** i
- 7 Resultado:** x (el valor del cero con error menor que ϵ).

El principal inconveniente de este método es su lentitud. Esto es más de notar cuando es necesario aplicarlo repetidamente muchas veces y lo comparamos con otros métodos que veremos a continuación. Por otro lado, tiene la ventaja de ser un método sencillo, robusto y que ofrece un control excelente de la precisión de la aproximación y la posibilidad de calcular el número exacto de pasos que hay que dar para aproximar la solución con un error inferior a un valor dado. Por estas razones este método es

¿Qué es un punto fijo?

adecuado cuando necesitamos el cálculo sencillo y esporádico de un cero de una función continua con una cierta precisión dada.

Ejercicio 1.1

Hallar el número de pasos que se han de dar con el algoritmo de la bisección para hallar, con un error menor que una milésima, el cero de una función de la que se sabe que toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. ¿Y si sólo quisiéramos que el error fuese menor que un octavo?

1.1.2 Regula Falsi (falsa posición)

El siguiente método es una variante del anterior en el que se pretende acelerar la convergencia utilizando un punto de corte del intervalo que tenga mayor probabilidad de estar cerca del cero, a saber la posición que tendría el cero en caso de que la función fuese una línea recta (pasando por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$).

Ejercicio 1.2

Demostrar que el punto de corte de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje x es

$$x_0 = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

El siguiente ejercicio muestra que otra forma de describir el punto de corte es diciendo que es el promedio ponderado de los puntos a y b con los pesos $|f(b)|$ y $|f(a)|$.

Ejercicio 1.3

Demostrar que si $f(a)f(b) < 0$ entonces

$$\frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Algoritmo de la Regula Falsi

- 1 Datos:** f (la función de la que se quiere un cero), a, b (extremos del intervalo en que $f(a)f(b) < 0$), ϵ (precisión deseada).

2 $x_0 = (af(b) - bf(a))/(f(b) - f(a))$

3 $x = x_0$

4 Si $f(x) = 0$ **entonces ir a 10**

5 Si $f(x)f(a) < 0$ **entonces** $b = x$

6 Si $f(x)f(a) > 0$ **entonces** $a = x$

7 $x_0 = (af(b) - bf(a))/(f(b) - f(a))$

8 Si $|x - x_0| < \epsilon$ **entonces ir a 10**

9 Ir a 3

10 Resultado: x_0 .

Este algoritmo produce rápidamente un punto x donde $|f(x)| \simeq 0$, pero no produce un intervalo pequeño que contenga el cero. La razón es que en general va a acercarnos al cero por la derecha (manteniendo fijo el extremo inferior del intervalo) si la función es cóncava en el intervalo, o por la izquierda (manteniendo fijo el extremo superior del intervalo) si la función es convexa. Por ejemplo, en la siguiente figura (fig. 1.1) en que tenemos una función cóncava vemos que las aproximaciones se van acercando al cero por la derecha.

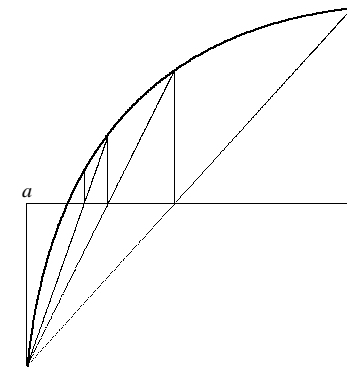


Figura 1.1: Regula Falsi.

Este problema se evita en el método de la *regula falsi modificada*.

1.1.3 Regula Falsi Modificada

Este método es una pequeña variante de la regla falsi. Con él se intenta evitar el que sucesivas aproximaciones se mantengan del mismo lado del cero, de forma que ningún extremo del intervalo quede fijo todo el tiempo. De esta forma la longitud del intervalo de acotación se va reduciendo hasta hacerse tan pequeño como se quiera.

Para conseguir esta reducción del intervalo de acotación, si en un paso usamos la cuerda de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ para obtener la aproximación $x = (af(b) - bf(a))/(f(b) - f(a))$, antes del siguiente paso miramos si el signo de $f(x)$ coincide con el de $f(a)$ o con el de $f(b)$. Supongamos que coincide con el de $f(b)$ (como en la figura 1.2. —Si coincidiese con $f(a)$ se realizaría el proceso análogo correspondiente—), entonces el siguiente punto se obtendrá a partir del segmento de extremos $(a, \frac{f(a)}{2})$ y $(x, f(x))$ continuando de esta forma, cada vez reduciendo a la mitad la ordenada del extremo del segmento en a hasta que se obtenga un punto en el que el valor de f tenga el mismo signo que $f(a)$. En ese momento se vuelve a trazar una cuerda y se repite el proceso. Un algoritmo sencillo para implementar este método se indica a continuación

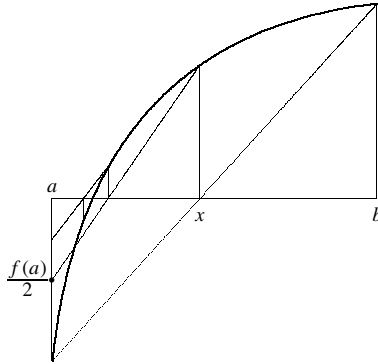


Figura 1.2: Regula Falsi Modificada.

Algoritmo de la Regula Falsi Modificada

- 1 Datos:** f (la función de la que se quiere un cero), a, b (extremos del intervalo en que $f(a)f(b) < 0$), ϵ (precisión deseada).
- 2** $F = f(a)$; $G = f(b)$; $x_0 = a$
- 3** $x = (aG - bF)/(G - F)$
- 4 Si** $f(a)f(x) < 0$ **entonces** $b = x$; $G = f(x)$ **en otro caso ir a 6**
- 5 Si** $f(x)f(x_0) > 0$ **entonces** $F = F/2$
- 6 Si** $f(x)f(a) > 0$ **entonces** $a = x$; $F = f(x)$ **en otro caso ir a 8**
- 7 Si** $f(x)f(x_0) > 0$ **entonces** $G = G/2$
- 8 Si** $f(x) = 0$ **entonces ir a 12**
- 9 Si** $|b - a| < \epsilon$ **entonces ir a 12**
- 10** $x_0 = x$
- 11 Ir a 3**
- 12 Resultado:** x (el valor del cero con error menor que ϵ).

1.1.4 Método de la Secante e idea del Método de Müller

El método de la secante puede considerarse como otra modificación de la regla falsi porque al igual que en aquel método, en cada paso vamos a intersectar una secante a la gráfica de nuestra función con el eje x . Sin embargo ahora abandonamos el propósito de obtener intervalos que encierren a la solución en cada paso y simplemente construimos una sucesión que converge a dicha solución. Así, en este método cada secante es la que corresponde a los dos últimos puntos encontrados y por lo tanto x_{n+1} se obtiene al intersectar el eje x con la recta que pasa por los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_nf(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (1.4)$$

La fórmula (1.4) es propensa a dar errores de pérdida de precisión cuando x_n es próximo a x_{n-1} . Como alternativa es preferible usar la fórmula equivalente

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (1.5)$$

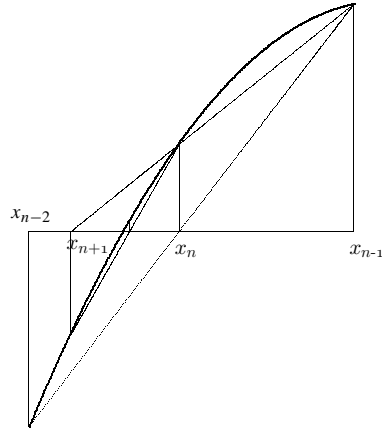


Figura 1.3: Método de la secante.

Cuando converge, el método de la secante nos acerca muy rápidamente a la solución. El problema principal de este método es que necesita partir de dos estimaciones iniciales, x_0 y x_1 , *suficientemente cercanas* al punto buscado. Si las dos estimaciones iniciales no son suficientemente cercanas a la solución es fácil que el método no converja. En consecuencia este método debe ir acompañado de alguna técnica de acercamiento previo a la solución.

Un método parecido en su concepción al método de la secante es el método de Müller, que estudiamos más detenidamente en la sección 1.4. Aquí sólo queremos recalcar la relación que existe entre los dos métodos. La idea principal en el método de la secante es que, conocida la función en dos puntos cercanos a un cero, podemos aproximar ese cero por la raíz del polinomio de primer grado que coincide con la función en esos dos puntos. El método de Müller se obtiene al llevar esta idea un paso más lejos: aproximar el cero de nuestra función por una raíz del polinomio de segundo grado que coincide con la función en tres puntos cercanos al cero buscado.

1.2 Métodos iterativos

Iterar una función es evaluarla en un punto que es resultado de haberla evaluado previamente, es decir, hacer una evaluación de la forma $f(f(x))$. Un *endomorfismo* es una función $f : A \rightarrow A$ cuyo dominio es igual a su codominio o rango. Tales funciones pueden iterarse repetida e indefinidamente porque sus valores siempre pertenecerán a su dominio (es decir, al conjunto de los elementos en los que f se puede evaluar). Por tanto para una tal función todo elemento $x_0 \in A$ define una sucesión en A que consiste en las sucesivas iteraciones de f comenzando con x_0 : $x_n = f(\cdots f(f(x_0)) \cdots)$, ó $x_n = (f \circ \cdots \circ f)(x_0)$ ó

$$x_0 \in A, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Un importante concepto asociado con las funciones que son endomorfismos es el de *punto fijo*. Decir que un punto $x \in A$ es un punto fijo de la función $f : A \rightarrow A$ significa que

$$f(x) = x.$$

Por ejemplo, el número 1 es un punto fijo de la función $y = x^2$. Igualmente lo es el número 0. Éstos son los únicos puntos fijos de la función x^2 . Para la función identidad, $y = x$, todo número es un punto fijo.

Ejercicio 1.4

Si $f : A \rightarrow A$ es un endomorfismo idempotente (es decir, tal que $f^2 = f$) entonces los puntos fijos de f son precisamente los valores de f , es decir los puntos de la forma $a = f(x)$ para algún $x \in A$.

Ejercicio 1.5

Si g es una función continua y $\{x_n\}$ es una sucesión de iteraciones de g que converge, entonces su límite $\xi = \lim\{x_n\}$ es un punto fijo de g .

Basado en este resultado surge el método iterativo de resolución de problemas de punto fijo, que consiste en formar una sucesión de iteraciones que converja.

Recordemos que una condición sencilla que garantiza la convergencia de una sucesión de iteraciones de una función g es la existencia de una métrica en A para la que g sea una función *contractiva* (teorema de Banach del punto fijo).

Un método iterativo de resolución de una ecuación $f(x) = 0$ consiste, pues en los siguientes pasos:

1. Elegir una función g , continua, cuyos puntos fijos sean ceros de f .
2. Formar una sucesión de iteraciones de g que sea convergente.
3. Hallar el límite de dicha sucesión, que será necesariamente la solución de nuestra ecuación.

Tal función g se llama una *función de iteración* para la ecuación $f(x) = 0$. El ejemplo más famoso de función de iteración es la que corresponde al método iterativo llamado método de Newton, que describimos a continuación.

1.2.1 Método de Newton

Dada una ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función diferenciable, el método de Newton para aproximarse a un cero de f es el método iterativo correspondiente a la función de iteración

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (1.6)$$

Ejercicio 1.6

Demostrar que todo punto fijo de la función definida en (1.6) es un cero de f .

Ejercicio 1.7

Demostrar que la intersección del eje x con la recta que pasa por el punto (x, y) con pendiente m tiene su abscisa igual a $x - y/m$. Como consecuencia la intersección de la tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$ con el eje x tiene su abscisa igual a $x - f(x)/f'(x)$.

Según este último ejercicio, el método de Newton puede describirse geoméricamente como una variante del método de la secante: en lugar de trazar secantes a la gráfica de nuestra función, trazamos rectas tangentes y por lo demás procedemos igual que en el método de la secante (figura 1.4).

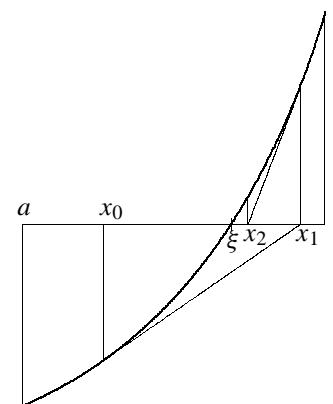


Figura 1.4: Método de Newton.

El método de Newton produce una sucesión en la que cada término, x_{n+1} , se obtiene del anterior por la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Nótese la semejanza entre esta fórmula y la del método de la secante en la forma (1.5). De hecho ésta es el caso límite de aquella para $x_{n-1} = x_n$, lo que corresponde al hecho geométrico de que la recta tangente es la posición límite de rectas secantes cuyos dos puntos de corte se aproximan uno al otro hasta coincidir en el punto de tangencia.

Para aplicar el método de Newton se puede utilizar el siguiente algoritmo:

Algoritmo del Método de Newton

- 1 Datos:** f (la función de la que se quiere un cero), x (estimación inicial de la solución), M (número máximo de pasos que queremos dar), ϵ (precisión deseada).
- 2 Para $i = 1$ hasta M**
- 3 $x_0 = x$**

- 4 $x = x - f(x)/f'(x)$
- 5 Si $|x - x_0| < \epsilon$ entonces ir a 9
- 6 Siguiendo i
- 7 Imprimir “No hubo convergencia después de”; M ; “pasos”
- 8 PARAR
- 9 Resultado: x (con error menor que ϵ)

Ejercicio 1.8

Aplicar el método de Newton a la ecuación $x^2 - N = 0$ para obtener un algoritmo para el cálculo de la raíz cuadrada de un número positivo N . Diseñar un algoritmo análogo para el cálculo de la raíz cúbica.

Como veremos más adelante, el método de Newton, cuando converge, converge incluso más rápido que el método de la secante. Sin embargo este método plantea varias dificultades. Una de ellas es la necesidad de evaluar la función derivada f' muchas veces, lo cual puede llegar a ser muy costoso. Para mitigar esta dificultad se han diseñado variantes del método de Newton en las que se evalúa la derivada un número menor de veces. La idea tras estos métodos es la siguiente: Supongamos que modificamos el método de Newton de forma que para calcular x_{n+1} con n par, en lugar de evaluar la derivada en x_n utilizamos el valor $f'(x_{n-1})$ que habíamos calculado en el paso anterior, de forma que para n par calculamos $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_{n-1})$ y para n impar calculamos $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Entonces, dado que (al menos para n grande) las pendientes $f'(x_n)$ son todas próximas a su límite $f'(\xi)$, obtendremos una sucesión que diferirá muy poco de la del método de Newton y convergerá a ξ casi tan rápidamente como aquella, pero con la mitad de evaluaciones de la derivada. Llevando esto más lejos podemos elegir un entero positivo p y modificar el método de forma que se calculen solamente una derivada de cada p términos, o sea que definimos la sucesión de iteraciones de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - f(x_n)/f'(x_0) & \text{si } 0 < n \leq p-1 \\ x_n - f(x_n)/f'(x_p) & \text{si } p < n \leq 2p-1 \\ \vdots & \\ x_n - f(x_n)/f'(x_{rp}) & \text{si } rp < n \leq (r+1)p-1 \\ \vdots & \end{cases}$$

La otra dificultad básica del método de Newton consiste en la necesidad de conocer una estimación inicial suficientemente próxima al cero buscado. El siguiente teorema nos da una idea precisa de lo que es “suficientemente próximo” en este contexto.

Teorema 1 (Convergencia del método de Newton) *Supongamos que f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, que tiene derivada segunda continua en (a, b) y que satisface las siguientes condiciones:*

1. $f(a)f(b) < 0$, es decir, los valores de f en los extremos de $[a, b]$ tienen distinto signo.
2. La derivada primera de f no se anula en $[a, b]$, es decir, f es estrictamente monótona en $[a, b]$.
3. La derivada segunda de f no cambia de signo en $[a, b]$, es decir, la concavidad de f no cambia en $[a, b]$.
- 4.

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a \quad \text{y} \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a,$$

(esto, supuestas las condiciones anteriores, equivale a que las tangentes a la gráfica de f en $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ intersecan al eje x dentro del intervalo $[a, b]$)

entonces f tiene un único cero, ξ , en $[a, b]$ y el método de Newton converge a ξ para cualquier estimación inicial $x_0 \in [a, b]$.

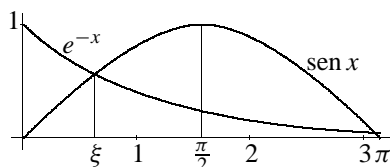
Demostración: Por la continuidad de f y las dos primeras condiciones, f tiene un único cero, ξ , en $[a, b]$. Sin perder generalidad se puede suponer que f es convexa y creciente, es decir, $f(a) < 0$ y $f''(x) \geq 0$ en (a, b) (como en la figura 1.4). Si $x_0 \neq \xi$ hay dos posibilidades:

1. $\xi < x_0$. En este caso, por la convexidad de f tendremos $\xi \leq x_1 \leq x_0$ y en general $\xi \leq x_{n+1} \leq x_n$, es decir, la sucesión producida por el método de Newton es monótona decreciente acotada inferiormente. En consecuencia converge siendo su límite necesariamente el cero, ξ , de f .
2. $x_0 < \xi$. En este caso tendremos $x_0 < \xi \leq x_1 \leq b$ con lo que a partir de x_1 estamos en la situación del caso anterior, obteniendo la misma conclusión.

Los demás casos (según la convexidad de f y si es creciente o decreciente) se analizan de forma análoga, llegándose a las mismas conclusiones. ■

Ejemplo de aplicación del método de Newton.–

Como ejemplo, supongamos que queremos hallar el menor cero positivo de $f(x) = e^{-x} - \sin x$. Vamos a buscar un intervalo que satisfaga las condiciones del teorema de convergencia del método de Newton. Comenzamos calculando las derivadas $f'(x) = -e^{-x} - \cos x$, $f''(x) = e^{-x} + \sin x$. Vemos que $f(0) = 1$, $f(1) \simeq -0.47$. Además $f'(x) < 0$ para $x \in [0, 1]$



y también $f''(x) > 0$ para $x \in [0, 1]$. Sólo nos falta estudiar la última condición en $[0, 1]$: Tenemos, $f(0) = 1$, $f'(0) = -2$, $|f(0)/f'(0)| = \frac{1}{2} < b - a = 1$; $f(1) = -0.47$, $f'(1) = -1.36$, $|f(1)/f'(1)| = 0.34 < b - a$. Luego las condiciones se satisfacen en el intervalo $[0, 1]$.

El método de Newton es uno de los métodos iterativos más importantes pero en ocasiones puede resultar más apropiado utilizar un método iterativo distinto (basado en otra función de iteración). A continuación estudiamos las propiedades generales de los métodos iterativos.

1.2.2 Propiedades generales de los métodos iterativos

Dada una ecuación de la forma $f(x) = 0$ existen diversas funciones $g(x)$ cuyos puntos fijos son precisamente los ceros de f . El ejemplo más sencillo, mencionado más arriba, es $g(x) = x + f(x)$, pero en general habrá muchas otras posibilidades como se ve en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.9

Demostrar que los puntos fijos de las cuatro funciones dadas a continuación

son solución de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sqrt{2+x}, & g_2(x) &= 1 + \frac{2}{x}, \\ g_3(x) &= x - \frac{x^2 - x - 2}{m} \quad (m \neq 0), & g_4(x) &= \frac{x^2 + 2}{2x - 1}. \end{aligned}$$

Ahora bien, no toda función cuyos puntos fijos sean solución de nuestra ecuación sirve como función de iteración. Es necesario que las sucesivas iteraciones de la función den una sucesión convergente. En general vamos a pedir a toda función de iteración g que cumpla las siguientes condiciones:

Condiciones que ha de cumplir una función de iteración.–

- Que exista un intervalo $I = [a, b]$ en el que g esté definida y en el que g tome sus valores, es decir que g sea un endomorfismo de I , $I \xrightarrow{g} I$,
- Que g sea continua en I ,
- Que g sea diferenciable en I y exista una constante $k < 1$ tal que para todo $x \in I$ se cumpla $|g'(x)| \leq k$.

Nótese que nos hemos permitido cierta redundancia en estas condiciones (por ejemplo (c) \Rightarrow (b)). Lo más importante de estas condiciones es que garantizan la existencia y unicidad de punto fijo y la convergencia de la sucesión de iteraciones. La existencia de punto fijo es una sencilla consecuencia de (a) y (b), cuya demostración proponemos como ejercicio:

Ejercicio 1.10

Demostrar que toda función g que cumpla las propiedades (a) y (b) anteriores tiene un punto fijo en el intervalo I .

(Sugerencia: Estudiar los cambios de signo de la función $h(x) = g(x) - x$.)

Además de esto tenemos:

Teorema 2 Si g es una función que satisface las condiciones (a), (b), (c) anteriores entonces g tiene un único punto fijo, $\xi \in I$ y para cualquier valor inicial $x_0 \in I$, la sucesión de iteraciones $x_{n+1} = g(x_n)$, converge a ξ .

Demostración: Sabemos por el ejercicio 1.10 que existe en I un punto ξ que es punto fijo de g , es decir tal que, $g(\xi) = \xi$. Si demostramos que toda sucesión de iteraciones converge a ξ , la unicidad del punto fijo será consecuencia de la unicidad de límite de una sucesión. Ahora bien, los errores $e_n = \xi - x_n$ verifican

$$e_n = g(\xi) - g(x_{n-1}) = g'(\eta_n)(\xi - x_{n-1}) = g'(\eta_n)e_{n-1}$$

ya que según el teorema del valor medio existe un número η_n (entre ξ y x_{n-1}) tal que $g'(\eta_n) = (g(\xi) - g(x_{n-1})) / (\xi - x_{n-1})$. En consecuencia, por ser $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$, tenemos que para todo n $|e_n| \leq k|e_{n-1}|$, de donde

$$|e_n| \leq k|e_{n-1}| \leq k^2|e_{n-2}| \leq \dots \leq k^n|e_0|$$

y por tanto, al ser $k < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e_n| = |e_0| \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0,$$

lo que significa que $\lim\{x_n\} = \xi$. ■

En aquellos casos en que sea difícil comprobar la condición (a), puede ser suficiente aplicar la siguiente versión débil del teorema:

Corolario 1 Si g es una función continuamente diferenciable en algún intervalo abierto I que contenga un punto fijo ξ de g , y si $|g'(\xi)| < 1$, entonces existe un número $\epsilon > 0$ tal que para todo valor inicial x_0 que diste de ξ menos que ϵ la sucesión de iteraciones $x_{n+1} = g(x_n)$, converge a ξ .

Demostración: Por ser $|g'(\xi)| < 1$ existe k tal que $|g'(\xi)| < k < 1$, y por ser g' continua en ξ existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo x que diste de ξ menos que ϵ , $|g'(x)| < k$. Entonces se cumple la condición (c) en el intervalo $I = [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ (lo que implica la condición (b)). Además para todo $x \in I$

$$|g(x) - \xi| = |g(x) - g(\xi)| = |g'(\xi)||x - \xi| \leq k\epsilon \leq \epsilon,$$

luego $g(x) \in I$, de forma que también se cumple (a) en I y podemos aplicar el teorema al intervalo I . ■

Ejercicio 1.11

Para cada una de las cuatro funciones del ejercicio 1.9 hallar un intervalo I , si existe, en el que se cumplan las condiciones (a), (b) y (c).

1.2.3 Velocidad de convergencia

Definición: Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente cuyo límite es ξ . Sea, para cada entero positivo n , $e_n = \xi - x_n$ (el “error” del término n -ésimo). Decimos que $\{x_n\}$ tiene *orden de convergencia* igual al número real p si la sucesión $\{|e_{n+1}|/|e_n|^p\}$ es convergente y su límite es distinto de cero.

A la vista de esta definición quizás a uno le pueda quedar la duda de si el número real p tiene que ser único si existe. Por lo tanto conviene hacer el siguiente ejercicio para disipar esa duda.

Ejercicio 1.12

Demostrar que si p y q son dos números reales tales que

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} < \infty$$

y

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^q} < \infty$$

entonces $p = q$.

Si $\{x_n\}$ tiene orden de convergencia igual a p la constante

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}$$

se llama *constante de error* o constante de error asintótico de $\{x_n\}$.

Si una sucesión tiene orden de convergencia igual a 1 decimos que tiene *convergencia lineal* y si tiene orden de convergencia igual a 2 decimos que tiene *convergencia cuadrática*.

Proposición 1 Sea g una función de iteración continuamente diferenciable para la que la sucesión de iteraciones $x_{n+1} = g(x_n)$ converge al punto fijo ξ de g y para la que $g'(\xi) \neq 0$. Entonces la sucesión de iteraciones tiene *convergencia lineal* y su constante de error es igual a $|g'(\xi)|$.

Demostración: Al igual que en la demostración del teorema 2, deducimos (aplicando el teorema del valor medio) que para cada entero positivo n existe un número η_n en el intervalo de extremos x_n y ξ tal que

$|e_{n+1}| = |g'(\eta_n)||e_n|$. Como evidentemente $\lim\{\eta_n\} = \xi$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = |g'(\xi)|.$$

■

Igualmente, si g es una función de iteración con derivada segunda continua y con punto fijo ξ , tal que $g'(\xi) = 0$ y $g''(\xi) \neq 0$ entonces $e_{n+1} = \frac{1}{2}g''(\eta_n)e_n^2$ de donde se deduce que la sucesión de iteraciones de g tiene convergencia cuadrática y la constante de error asintótico es $|\frac{1}{2}g''(\xi)|$. En general tenemos lo siguiente

Ejercicio 1.13

En las condiciones de la proposición 1, si las $n - 1$ primeras derivadas de g se anulan en ξ y la derivada n -ésima no se anula entonces la sucesión de iteraciones tiene orden de convergencia igual a n . ¿Cuánto vale la constante de error?

Orden de convergencia del método de Newton.—

Podemos ahora justificar la ventaja del método de Newton respecto a su velocidad de convergencia demostrando que, si la derivada de f en ξ no se anula, tiene convergencia cuadrática. Para ello calculamos la derivada de la función de iteración $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ obteniendo

$$g'(x) = 1 - (f'(x)^2 - f(x)f''(x))/f'(x)^2 = f(x)f''(x)/f'(x)^2.$$

Ahora hemos de evaluar esta derivada en el punto ξ , en el que $f(\xi) = 0$. La forma de hacerlo es calculando el límite

$$g'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 0.$$

Esto prueba que la convergencia es al menos cuadrática.

Para hallar la constante de error asintótico hemos de hallar la derivada segunda de g y evaluarla en $x = \xi$. El resultado es el siguiente:

Ejercicio 1.14

Si $f'(\xi), f''(\xi) \neq 0$ entonces la constante de error asintótico del método de Newton aplicado a la función f para hallar el cero ξ es igual a

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right|$$

Ejercicio 1.15

Si ξ es un cero de f de orden dos, (es decir, $f(\xi) = f'(\xi) = 0$ y $f''(\xi) \neq 0$) entonces el método de Newton no converge cuadráticamente (probar que $g'(\xi) = \frac{1}{2}$). En este caso se puede modificar el algoritmo de Newton usando la función de iteración

$$g(x) = x - \frac{2f(x)}{f'(x)}$$

la cual, si f''' es continua, da lugar a una convergencia cuadrática.

(Sugerencia: Usar el hecho de que

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{f'(x)^2} \lim_{x \rightarrow \xi} f''(x)$$

junto con la regla de L'Hôpital.)

El resultado de este ejercicio se puede generalizar:

Ejercicio 1.16

Si ξ es un cero de f de orden m entonces la función de iteración

$$g(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}$$

da lugar a una convergencia cuadrática.

Orden de convergencia del método de la secante.—

El método de la secante no es un método iterativo en el sentido que aquí entendemos. Sin embargo es un método que da lugar, igual que los métodos iterativos a una sucesión de la que podemos estudiar la velocidad de convergencia siguiendo los conceptos generales vistos más arriba. De este estudio se deduce que la convergencia es casi tan buena como la del método de Newton, ya que su orden de convergencia es cercano a 1.62.

Para hallar el orden de convergencia del método de la secante necesitamos establecer primeramente la siguiente representación de una función (lema 1):

$$f(x) = f(\alpha) + f[\alpha, \beta](x - \alpha) + f[\alpha, \beta, x](x - \alpha)(x - \beta). \quad (1.7)$$

La notación usada en esta fórmula significa lo siguiente: en primer lugar tenemos la primera diferencia dividida,

$$f[a, b] = \begin{cases} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} & \text{si } a \neq b, \\ f'(a) & \text{si } a = b. \end{cases}$$

En segundo lugar tenemos la *segunda diferencia dividida*:

$$f[a, b, c] = \begin{cases} \frac{f[a, b] - f[a, c]}{b - c} & \text{si } b \neq c, \\ \frac{f[a, c] - f[b, c]}{a - b} & \text{si } a \neq b, \\ \frac{1}{2} f''(a) & \text{si } a = b = c. \end{cases}$$

Ejercicio 1.17

Mostrar que con la notación que acabamos de introducir, la sucesión obtenida por el método de la secante se puede expresar de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}.$$

Ejercicio 1.18

Mostrar que, suponiendo $a \neq b$ y $b \neq c$,

$$\frac{f[a, b] - f[a, c]}{b - c} = \frac{f[a, c] - f[b, c]}{a - b}$$

y

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f[a, b] - f[a, a]}{b - a} = \frac{1}{2} f''(a).$$

Estas diferencias divididas se estudiarán con más detalle en el próximo capítulo. De momento sólo las necesitamos para establecer la fórmula (1.7):

Lema 1 Sea f una función con derivada segunda continua en un intervalo I y sean $\alpha, \beta \in I$. Entonces, para todo $x \in I$ se cumple

$$f(x) = f(\alpha) + f[\alpha, \beta](x - \alpha) + f[\alpha, \beta, x](x - \alpha)(x - \beta). \quad (1.7)$$

Demostración: Si $x = \alpha$ la fórmula no es más que la identidad $f(x) = f(x)$. Podemos suponer, pues, $x \neq \alpha$. Si $x = \beta$ esta fórmula no es más que una reescritura de la definición del símbolo $f[\alpha, \beta]$, mientras que si $x \neq \beta$ la fórmula es una reescritura de la definición del símbolo $f[\alpha, \beta, x]$. ■

Ahora usaremos la fórmula (1.7) para hallar el orden de convergencia del método de la secante. Sea ξ un cero de la función f . Poniendo $x = \xi$ en (1.7) tenemos:

$$0 = f(\alpha) + f[\alpha, \beta](\xi - \alpha) + f[\alpha, \beta, \xi](\xi - \alpha)(\xi - \beta)$$

de donde

$$\xi = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f[\alpha, \beta]} - \frac{f[\alpha, \beta, \xi]}{f[\alpha, \beta]}(\xi - \alpha)(\xi - \beta)$$

Supongamos ahora que β y α son sucesivas aproximaciones $\beta = x_{n-1}$, $\alpha = x_n$ obtenidas al aplicar el método de la secante a la función f para hallar el cero ξ . Entonces $\xi - \beta = \xi - x_{n-1}$ y $\xi - \alpha = \xi - x_n$ son los sucesivos errores e_{n-1} y e_n , mientras que, según el ejercicio 1.17, $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f[\alpha, \beta]} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]} = x_{n+1}$, de donde deducimos la siguiente relación entre tres errores consecutivos:

$$e_{n+1} = -\frac{f[x_n, x_{n-1}, \xi]}{f[x_n, x_{n-1}]} e_n e_{n-1}. \quad (1.8)$$

De esta relación junto con la hipótesis de que tanto la derivada primera como la derivada segunda de f en ξ son distintas de cero deducimos inmediatamente que el orden de convergencia del método de la secante es $p = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$, debido al siguiente teorema:

Teorema 3 Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente al número ξ para la que los errores $e_n = \xi - x_n$ verifican $e_{n+1} = c_n e_n e_{n-1}$ donde las constantes c_n convergen a $c_\infty = \lim\{c_n\}$. Entonces $\{x_n\}$ tiene orden de convergencia $p = (1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1.618$ y tiene constante de error asintótico igual a $|c_\infty|^{1/p}$.

Demostración: Tenemos que hallar el valor de p tal que los cocientes $y_n = |e_{n+1}|/|e_n|^p$ tengan límite distinto de cero, es decir, tal que $\lim\{y_n\} \neq 0$. Para conseguir esto buscamos el valor de p que hace que y_n pueda expresarse en términos de y_{n-1} . Supongamos que el valor de p es tal que para algún α se cumple

$$y_n = |c_n| |e_n|^{1-p} |e_{n-1}| = |c_n| (y_{n-1})^\alpha. \quad (1.9)$$

Entonces la sucesión de cocientes y_n satisfará la relación

$$y_{n+1} = |c_n| y_n^\alpha,$$

y el límite $c = \lim\{y_n\}$ verificará $c = (\lim\{|c_n|\})c^\alpha = |c_\infty|c^\alpha$, es decir, $c = |c_\infty|^{1/(1-\alpha)}$. Para calcular p y α sólo hace falta escribir (1.9) en la forma

$$y_n = |c_n| |e_n|^{1-p} |e_{n+1}| = |c_n| \left(\frac{|e_n|}{|e_{n+1}|^p} \right)^\alpha$$

para deducir que p y α han de verificar $\alpha p = -1$ y $\alpha = 1 - p$. De aquí se deduce $c = |c_\infty|^{\frac{1}{p}}$ y $p^2 - p - 1 = 0$, de donde $p = (1 + \sqrt{5})/2$. ■

Corolario 2 Supongamos que ξ es un cero de primer orden de la función f y que la derivada segunda de f en ξ es distinta de cero. Entonces suponiendo que el método de la secante aplicado a f converge a ξ , su orden de convergencia es $p = (1 + \sqrt{5})/2$ y su constante de error asintótico es

$$\left| \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right|^{\frac{1}{p}}$$

Demostración: Según el teorema anterior y la fórmula (1.8) sólo necesitamos demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f[x_n, x_{n-1}, \xi]}{f[x_n, x_{n-1}]} \neq 0.$$

Pero usando el resultado del ejercicio 1.18, es inmediato comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f[x_n, x_{n-1}, \xi]}{f[x_n, x_{n-1}]} = \frac{f[\xi, \xi, \xi]}{f[\xi, \xi]} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \neq 0,$$

como queríamos demostrar. ■

1.2.4 Aceleración de la convergencia

Como hemos visto, si g es una función de iteración cuya sucesión de iteraciones tiene convergencia lineal al límite ξ entonces $g'(\xi) \neq 0$. Además para cada n existe η_n en el intervalo de extremos ξ y x_n tal que

$$\xi - x_{n+1} = g'(\eta_n)(\xi - x_n)$$

de donde

$$\begin{aligned} \xi(1 - g'(\eta_n)) &= x_{n+1} - g'(\eta_n)x_n \\ &= x_{n+1} - g'(\eta_n)x_{n+1} + g'(\eta_n)x_{n+1} - g'(\eta_n)x_n \\ &= (1 - g'(\eta_n))x_{n+1} + g'(\eta_n)(x_{n+1} - x_n). \end{aligned}$$

De aquí obtenemos la siguiente expresión para el límite ξ :

$$\xi = x_{n+1} + \frac{g'(\eta_n)(x_{n+1} - x_n)}{1 - g'(\eta_n)} = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{g'(\eta_n)^{-1} - 1}.$$

En consecuencia, si podemos aproximar $g'(\eta_n)$, podríamos utilizar esa aproximación en esta fórmula para obtener una aproximación de ξ de la que se puede esperar que sea más exacta que x_{n+1} .

Aceleración Δ^2 de Aitken.-

Una forma de aproximar $g'(\eta_n)$ nos viene sugerida por el hecho de que para todo n el cociente $(g(x_n) - g(x_{n-1}))/ (x_n - x_{n-1})$ es igual al valor de la derivada de g en algún punto ζ_n entre x_n y x_{n-1} . Este punto ζ_n estará necesariamente próximo a η_n (al menos para valores grandes de n) ya que η_n se encuentra entre x_n y ξ y la sucesión $\{x_n\}$ converge a ξ (véase la figura 1.5). Así pues, teniendo en cuenta que $g(x_n) = x_{n+1}$ podemos usar la aproximación

$$g'(\eta_n) \approx g'(\zeta_n) = \frac{g(x_n) - g(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}$$

para aproximar ξ mediante

$$\hat{x}_n = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{r_n - 1} \quad (1.10)$$

con

$$r_n = \frac{1}{g'(\zeta_n)} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}. \quad (1.11)$$

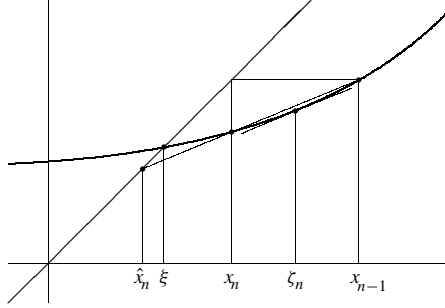
Como se puede ver en la figura 1.5 esta corrección corresponde a una interpolación lineal de g en los puntos x_n y x_{n-1} . Este proceso de aceleración se conoce como aceleración Δ^2 de Aitken debido a que la fórmula (1.10) puede expresarse en términos de los operadores de incremento Δ y Δ^2 definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= x_{n+1} - x_n \\ \Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19

Demostrar que la fórmula (1.10) es equivalente a

$$\hat{x}_n = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}.$$

Figura 1.5: Aceleración Δ^2 .

Se puede demostrar que al aplicar este proceso de aceleración a una sucesión cualquiera que tenga convergencia lineal se obtiene otra que tiene un orden de convergencia mayor.

Iteración de Steffensen.—

Cuando aplicamos la aceleración Δ^2 a la sucesión que resulta de un método iterativo con orden de convergencia lineal, una vez calculada la corrección \hat{x}_n , es mejor usar este valor en el siguiente paso de iteración, en lugar de usar x_{n+1} . De esta forma se llega al siguiente algoritmo que acelera un proceso iterativo lineal intercalando un paso de aceleración entre cada dos pasos de iteración:

Algoritmo de Iteración de Steffensen

- 1 Datos:** g (la función de iteración), x_0 (estimación inicial), M (número máximo de pasos que queremos dar), ϵ (precisión deseada).
- 2** $x = x_0$
- 3 Para** $i = 1$ **hasta** M
 - $x_0 = x$
 - $x_1 = g(x_0); x_2 = g(x_1);$
 - $d = \Delta x_1 = x_2 - x_1; r = \Delta x_0/d = (x_1 - x_0)/d$

$$x = x_2 + d/(r - 1)$$

Si $|d/(r - 1)| < \epsilon$ **entonces ir a 6**

4 Siguiente i

5 Imprimir “No hubo convergencia después de”; M ; “pasos” y **PARAR**

6 Solución: x .

1.3 Ecuaciones polinómicas

1.3.1 Introducción

Las ecuaciones polinómicas son aquellas ecuaciones $f(x) = g(x)$ en las que ambas funciones, f y g , son polinomios. Como la diferencia $f - g$ es de nuevo un polinomio, la resolución de las ecuaciones polinómicas se reduce al problema del cálculo de las raíces de polinomios.

Las raíces de los polinomios de segundo grado se obtendrán directamente mediante las conocidas fórmulas

$$\text{solución de menor valor absoluto} = \frac{-2c}{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\text{solución de mayor valor absoluto} = \frac{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a}.$$

Existen también fórmulas para las raíces de los polinomios de tercer y cuarto grado. En el caso de la ecuación cúbica existe siempre una raíz real, la cual puede hallarse de la siguiente forma:

$$\boxed{\text{Ecuación cúbica: } x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0}$$

Se calculan primeramente las cantidades:

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}, \quad D = Q^3 + R^2.$$

y entonces:

1. Si $D \geq 0$ una solución real es $x_1 = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} - \frac{1}{3}a_1$.

2. Si $D < 0$ el cálculo se puede hacer mediante trigonometría:

$$x_1 = 2\sqrt{-Q} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(R/\sqrt{-Q^3} \right) \right] - \frac{1}{3}a_1.$$

Una vez hallada la raíz real x_1 es fácil reducir la cúbica a una ecuación cuadrática para hallar las restantes raíces: no hay más que dividir el polinomio de tercer grado por el binomio $x - x_1$.

La fórmula de las raíces de una ecuación cuártica nos las da en función de las raíces de una de tercer grado:

Ecuación cuártica: $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$

Sea Y una solución real de la ecuación cúbica asociada

$$y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_4)y + (4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4) = 0$$

Entonces las soluciones de la cuártica son las raíces de las dos ecuaciones cuadráticas en z

$$z^2 + \frac{1}{2} \left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4Y} \right) z + \frac{1}{2} \left(Y \mp \sqrt{Y^2 - 4a_4} \right) = 0.$$

Un famoso trabajo de Galois demuestra que para los polinomios de grado superior al cuarto no existe ninguna fórmula algebraica que nos de sus raíces y por lo tanto es imprescindible recurrir en esos casos a los métodos numéricos. Es más, los métodos numéricos son incluso preferibles para polinomios de grado cuatro e incluso tres.

Por supuesto, las ecuaciones polinómicas pueden siempre resolverse por los métodos generales de resolución de ecuaciones no lineales que hemos visto hasta ahora. Sin embargo, para los polinomios existen métodos especiales que nos permiten mayor flexibilidad y eficacia. Estos métodos se basan en las propiedades especiales de estas funciones.

1.3.2 Propiedades generales de los polinomios

Cuando nos enfrentamos con la tarea de hallar las raíces de un polinomio es con frecuencia posible deducir información útil acerca de las raíces mediante un breve estudio preliminar del polinomio dado. En este estudio conviene tener en cuenta resultados generales acerca de los polinomios como son los siguientes:

Evaluación de un polinomio y de su derivada.–

El conocido algoritmo de la división de números puede efectuarse también con polinomios y aplicarlo al caso particular de la división de un polinomio cualquiera $p(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ por un polinomio lineal de la forma $x - a$.

La demostración de que el resto de la división $p(x)/(x - a)$ es $p(a)$ se reduce fácilmente al caso de binomios mónicos:

Ejercicio 1.20

Demostrar que $x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ siendo el cociente el polinomio

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}.$$

Deducir de ello que para todo polinomio $p(x)$ la diferencia $p(x) - p(a)$ es divisible por $x - a$, lo que significa que $p(a)$ es el resto al dividir $p(x)$ entre $x - a$.

Una demostración alternativa de este resultado es la siguiente. Sea $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$ el cociente y r el resto de la división de $p(x)$ entre $x - a$, de forma que

$$p(x) = (x - a)q(x) + r. \quad (1.12)$$

Queremos hallar los coeficientes b_k y r . Realizando la multiplicación obtenemos

$$\begin{aligned} (x - a)q(x) &= b_{n-1}x^n + \dots + b_1x^2 + b_0x \\ &\quad - (ab_{n-1}x^{n-1} + \dots + ab_1x + ab_0) \\ &= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} \\ &\quad + \dots + (b_0 - ab_1)x - ab_0 \end{aligned}$$

Sumando r e igualando coeficientes con los de $p(x)$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} - ab_{n-1} &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ b_0 - ab_1 &= a_1 \\ r - ab_0 &= a_0 \end{aligned}$$

de lo que deducimos que los coeficientes b_k satisfacen la relación recursiva

$$b_k = a_{k+1} + ab_{k+1}$$

(con la condición inicial $b_{n-1} = a_n$) y el resto es $r = a_0 + ab_0$, que podría ser llamado b_{-1} . En consecuencia el resto puede considerarse como el resultado final de un proceso iterativo que va produciendo los coeficientes b_k uno en cada paso. Por ejemplo, suponiendo que el grado es $n = 4$ el resto es

$$r = a_0 + a(a_1 + a(a_2 + a(a_3 + aa_4))).$$

¡Pero esto no es más que la evaluación de $p(x)$ en $x = a$ por el método de Horner o de las multiplicaciones encajadas! De esto se deduce que el resto r es igual al valor $p(a)$ que el polinomio toma en a .

Vemos pues que

Los resultados intermedios en el proceso de evaluación de un polinomio $p(x)$ en a por el método de las multiplicaciones encajadas son los coeficientes del polinomio obtenido al dividir $p(x)$ entre $x - a$ y el resultado final, el valor del polinomio en a , $p(a)$, es el resto en dicha división.

Dichos resultados intermedios tienen una importancia adicional en la evaluación de la derivada de $p(x)$ en el punto a . De la expresión (1.12) deducimos

$$p'(x) = q(x) + (x - a)q'(x)$$

de donde

$$\boxed{p'(a) = q(a)}.$$

Es decir,

El valor $q(a)$ que toma en a el cociente $q(x)$ de dividir $p(x)$ entre $x - a$ es igual al valor que toma la derivada de p en el mismo punto.

Esto era de esperar ya que siendo

$$\frac{p(x) - p(a)}{x - a} = q(x),$$

por la definición de derivada

$$p'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) - p(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} q(x) = q(a).$$

La consecuencia más importante de este resultado es que podemos hacer una sencilla modificación del algoritmo de Horner para que nos evalúe tanto el polinomio como su derivada en un punto dado:

Datos: a_0, \dots, a_n (coeficientes del polinomio p), a

$c = a_n$; $b = a \cdot a_n + a_{n-1}$

Para $k = n - 2$ **hasta** 0 **paso** -1

$c = a \cdot c + b$

$b = a \cdot b + a_k$

siguiente k

Resultados: b (el valor de $p(a)$), c (el valor de $p'(a)$).

Raíces o ceros de polinomios.—

Puesto que el resto de la división de un polinomio $p(x)$ entre un polinomio lineal de la forma $x - a$ es la constante $p(a)$ que resulta al evaluar p en a , se puede concluir lo siguiente:

Ejercicio 1.21

Un número a es un cero o raíz de un polinomio $p(x)$ si y sólo si el polinomio $x - a$ es un factor de p .

Un polinomio *irreducible* es aquél que es distinto de cero y no es igual a un producto de polinomios de menor grado. Con este concepto podemos enunciar de forma precisa el teorema que tiene como corolario que, contando cada raíz tantas veces como indica su multiplicidad, “todo polinomio de grado n tiene n raíces”:

Teorema 4 (Teorema fundamental del álgebra) *En el campo de los números complejos los polinomios irreducibles son precisamente los no nulos de grado menor o igual que uno, o sea: los polinomios lineales y las constantes no nulas.*

Nótese que parte del contenido de este teorema es trivial, pues *En cualquier campo de números los polinomios lineales y las constantes no nulas son irreducibles.*

Si una potencia $(x - a)^k$, $k > 0$, de un polinomio mónico lineal aparece como factor de un polinomio $p(x)$ entonces el número a es una raíz de p .

Si $(x - a)^k$ es pero $(x - a)^{k+1}$ no es un factor de p entonces se dice que la multiplicidad del factor $x - a$ en p es k y que la raíz a tiene *multiplicidad* k . En consecuencia el teorema anterior nos dice que todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas contando su multiplicidad.

Para polinomios con coeficientes reales conviene recordar que:

Lema 2 *Los polinomios irreducibles en el campo de los números reales son los de grado uno y aquellos de grado dos que tienen discriminante negativo.*

Ejercicio 1.22

Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales entonces para todo número complejo z , $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ (p evaluado en el conjugado de z es el conjugado de $p(z)$).

Corolario 3 *Las raíces complejas no reales de un polinomio con coeficientes reales aparecen en pares conjugados. En otras palabras: si $z = a + bi$ es raíz de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales entonces también su conjugado, $\bar{z} = a - bi$, es raíz de p .*

De esto se deduce que todo polinomio de grado impar y con coeficientes reales tiene al menos una raíz real. Es interesante comparar la demostración de este hecho basada en los resultados anteriores (una demostración puramente “algebraica”) con una demostración analítica del mismo hecho basada en la continuidad de los polinomios y el cambio de signo que ocurre en los polinomios de grado impar (cuando se considera un intervalo suficientemente grande) debido a que para n impar, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \pm\infty$.

Regla de los signos de Descartes.–

La regla de los signos de Descartes nos permite limitar y a veces determinar el número de ceros reales positivos y el número de ceros reales negativos de un polinomio de coeficientes reales. Dice lo siguiente:

El número de raíces positivas de un polinomio de coeficientes reales restado del número de cambios de signo que ocurren en sus coeficientes da un número par no negativo.

Una consecuencia evidente de esto es:

Corolario 4 *Para todo polinomio en el que ocurra exactamente un cambio de signo entre sus coeficientes el número de raíces reales positivas es igual a uno.*

Para estudiar las raíces reales negativas de $p(x)$ basta estudiar el polinomio $q(x) = p(-x)$ ya que es evidente que si a es un cero positivo de $q(x)$ entonces $-a$ es un cero negativo de $p(x)$ de manera que el número de raíces negativas de $p(x)$ es igual al número de raíces positivas de $q(x)$.

Por ejemplo, consideremos el polinomio

$$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$$

Puesto que tiene tres cambios de signo, el número de raíces positivas es un impar menor o igual que tres, esto es, uno o tres. Por otro lado, el polinomio

$$q(x) = p(-x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$$

sólo tiene un cambio de signo, por lo que $p(x)$ sólo tiene una raíz real negativa. Por tanto este polinomio tiene o bien tres raíces reales positivas y una negativa o bien una raíz real positiva, dos complejas conjugadas y una real negativa.

Acotaciones de las raíces.–

Existen varios teoremas que nos dan información acerca de la situación de los ceros de polinomios en el plano complejo.

Teorema 5 *Todos los ceros del polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ tienen módulo menor o igual que*

$$r = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$$

es decir, todos se encuentran en el disco de centro cero y radio r .

Por ejemplo, para el polinomio

$$p(x) = x^3 - x - 1$$

tenemos $\frac{a_2}{a_3} = 0$, $\frac{a_1}{a_3} = -1$, $\frac{a_0}{a_3} = -1$, luego

$$r = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| = 2$$

por lo que toda raíz x de p satisface $|x| \leq 2$.

Teorema 6 *Todo polinomio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ tiene al menos un cero cuyo módulo es menor que cualquiera de los números*

$$\rho_1 = n \left| \frac{a_0}{a_1} \right|, \quad \rho_n = \left| \frac{a_0}{a_n} \right|^{\frac{1}{n}}$$

es decir, p tiene al menos un cero dentro del disco del plano complejo de centro cero y radio $\min\{\rho_1, \rho_2\}$.

Para el polinomio del ejemplo anterior, $p(x) = x^3 - x - 1$, tenemos

$$\rho_1 = 3 \left| \frac{-1}{-1} \right| = 3 \quad \text{y} \quad \rho_3 = \left| \frac{-1}{1} \right|^{\frac{1}{3}} = 1$$

por lo que p tiene al menos una raíz x tal que $|x| \leq 1$.

Finalmente tenemos un teorema debido a Cauchy:

Teorema 7 *Dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, si formamos los polinomios*

$$P(x) = |a_n| x^n - \dots - |a_1| x - |a_0|, \\ Q(x) = |a_n| x^n + \dots + |a_1| x + |a_0|,$$

dado que ambos tienen exactamente un cambio de signo, cada uno de ellos tiene exactamente un cero positivo y toda raíz de p tiene su módulo comprendido entre dichos ceros.

Reducción de grado.—

Cuando se quieren hallar todos los ceros de un polinomio $p(x)$ se puede emplear la técnica de *reducción de grado* que consiste en, hallada una raíz a , obtener el polinomio $q(x) = p(x)/(x - a)$. El grado de q es menor que el de p y sus raíces son las restantes raíces de p . A continuación se busca una raíz de q , lo que permite una nueva reducción de grado y así sucesivamente hasta llegar a un polinomio de segundo grado.

1.3.3 Algoritmo de Newton para ecuaciones polinómicas

Veremos a continuación un sencillo algoritmo en el que se adapta el método de Newton para cálculo de ceros de funciones al cálculo de una raíz de un polinomio. El método de Newton consiste en iterar la función $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ a partir de una estimación del cero, en consecuencia nos resultará útil el algoritmo que hemos visto para la evaluación de un polinomio y de su derivada. Así llegamos al siguiente:

Algoritmo de Newton para Polinomios

1 Datos: n (grado del polinomio $p(x)$); a_0, \dots, a_n (coeficientes del polinomio p); a (estimación inicial del cero); ϵ (tolerancia de error); M (máximo número de iteraciones)

2 Para $i = 1$ hasta M

$$c = a_n; \quad b = a \cdot a_n + a_{n-1}$$

Para $k = n - 2$ hasta 0 paso -1

$$c = a \cdot c + a_k$$

$$b = a \cdot b + a_k$$

Siguiente k

$$d = b/c$$

Si $|d| \leq \epsilon$ entonces ir a 5

$$a = a - d$$

3 Siguiente i

4 Imprimir “No hubo convergencia después de ”; M ; “ pasos.” y **PARAR**

5 Imprimir “Solución es: ”; $a - d$; “.” y **PARAR**

1.3.4 Ecuaciones polinómicas mal condicionadas

En esta sección vamos a estudiar cómo cambian las raíces de un polinomio por el hecho de cometer pequeños errores en sus coeficientes. Supongamos que $p(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales y con raíces simples r_1, \dots, r_n . Vamos a suponer también que producimos una alteración en los coeficientes de p de la forma

$$P(x, \epsilon) = p(x) + \epsilon q(x)$$

donde $q(x)$ es otro polinomio de grado n .

Sean $z_1(\epsilon), \dots, z_n(\epsilon)$ las funciones que nos dan las raíces de P (como polinomio en x) en función de ϵ . Evidentemente para cada $i = 1, \dots, n$ es $z_i(0) = r_i$. En estas condiciones puede demostrarse que estas funciones z_i son funciones diferenciables (incluso analíticas) en algún entorno del origen $\epsilon = 0$ y en consecuencia para ϵ pequeño podemos aproximar $z_i(\epsilon) \simeq z_i(0) + \epsilon z'_i(0) = r_i + \epsilon z'_i(0)$ de donde podemos estimar el cambio sufrido por las raíces de p mediante:

$$|z_i(\epsilon) - r_i| \simeq |\epsilon| |z'_i(0)| \quad (1.13)$$

Así, sólo nos falta determinar los valores de las derivadas $z'_i(0)$. Para ello hacemos lo siguiente: Sabemos que

$$0 = P(z_i(\epsilon), \epsilon) = p(z_i(\epsilon)) + \epsilon q(z_i(\epsilon))$$

de donde, derivando respecto a ϵ ,

$$0 = p'(z_i(\epsilon))z'_i(\epsilon) + q(z_i(\epsilon)) + \epsilon q'(z_i(\epsilon))z'_i(\epsilon)$$

y despejando $z'_i(\epsilon)$,

$$z'_i(\epsilon) = -\frac{q(z_i(\epsilon))}{p'(z_i(\epsilon)) + \epsilon q'(z_i(\epsilon))}.$$

Por la hipótesis de que todas las raíces son simples, podemos evaluar estas derivadas en $\epsilon = 0$ con lo que obtenemos

$$z'_i(0) = -\frac{q(r_i)}{p'(r_i)}.$$

En consecuencia, la estimación (1.13) del cambio sufrido por las raíces de $p(x)$ nos da

$$|z_i(\epsilon) - r_i| \simeq \frac{|\epsilon q(r_i)|}{|p'(r_i)|}.$$

De esta estimación aprendemos dos cosas: Primeramente, como cabe esperar para funciones en general, cuando la derivada es pequeña en valor absoluto cerca o en un cero la búsqueda de ese cero es un problema mal condicionado. La segunda cosa que aprendemos es que pequeños errores en un coeficiente de una potencia alta de x en $p(x)$ puede afectar seriamente el cálculo de las raíces de valor absoluto grande (tómese $q(x) = x^n$ y supongamos que r_i tiene $|r_i|$ grande y se verá que $|\epsilon q(r_i)|/|p'(r_i)|$ puede ser muy grande).

1.3.5 El método de Bernoulli

Vamos a terminar este tema de raíces de polinomios con una breve referencia a un antiguo método atribuido a Daniel Bernoulli (de la famosa familia Bernoulli de matemáticos) que (en su versión más sencilla) sirve para aproximar la raíz real de mayor valor absoluto de un polinomio.

El estudiante conoce seguramente el método para obtener una fórmula para el término general de una sucesión $\{x_n\}$ que satisface una ecuación de recurrencia de la forma $a_2x_n + a_1x_{n-1} + a_0x_{n-2} = 0$ (donde $a_2 \neq 0$). Claramente, para a_0, a_1, a_2 dados, el conjunto de tales sucesiones forma un espacio vectorial de dos dimensiones (pues cada sucesión está completamente determinada por sus dos términos iniciales x_0, x_1). En consecuencia la forma general de una tal sucesión está dada por una combinación lineal de dos de ellas que sean linealmente independientes.

Por otro lado, supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de ese espacio vectorial, es decir, que satisface la relación de recurrencia dada. Entonces es muy fácil de ver que en caso de que la sucesión de cocientes sucesivos $y_n = x_{n+1}/x_n$ converja, su límite necesariamente será una raíz del polinomio $a_2x^2 + a_1x + a_0$. Este hecho es la base del método de Bernoulli, el cual consiste en construir de forma más o menos arbitraria una sucesión que satisfaga la recurrencia e intentar calcular su límite (con la esperanza de que exista). A continuación veremos una situación en que la existencia de dicho límite está garantizada.

Ejercicio 1.23

Si z es una raíz real del polinomio $a_2x^2 + a_1x + a_0$ entonces la sucesión $x_n = z^n$ satisface la relación de recurrencia $a_2x_n + a_1x_{n-1} + a_0x_{n-2} = 0$. Si z_1, z_2 son dos raíces reales no nulas distintas del mismo polinomio entonces las dos sucesiones z_1^n, z_2^n (satisfacen aquella relación de recurrencia y) son linealmente independientes

Ejercicio 1.24

Si el polinomio $a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene dos raíces reales distintas z_1, z_2 entonces la forma general de las sucesiones que satisfacen la relación de recurrencia $a_2x_n + a_1x_{n-1} + a_0x_{n-2} = 0$ es

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.

La importancia del ejercicio 1.24 consiste en que de él se deduce lo siguiente. Supongamos que $|z_1| > |z_2|$. Entonces podemos poner

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{c_1 z_1^{n+1} + c_2 z_2^{n+1}}{c_1 z_1^n + c_2 z_2^n} \\ &= \frac{z_1^{n+1}}{z_1^n} \frac{c_1 + c_2 (z_2/z_1)^{n+1}}{c_1 + c_2 (z_2/z_1)^n} = z_1 \frac{c_1 + c_2 (z_2/z_1)^{n+1}}{c_1 + c_2 (z_2/z_1)^n}.\end{aligned}$$

Esto implica (por ser $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_2/z_1)^n = 0$) que, si $c_1 \neq 0$, la sucesión $y_n = x_{n+1}/x_n$ tiene como límite la raíz de $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ de mayor valor absoluto. Y esto se cumple cualquiera que sea la sucesión $\{x_n\}$ que satisface la relación de recurrencia asociada con el polinomio cuadrático $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con tal que x_1/x_0 no sea ya una raíz. Pero es muy sencillo construir sucesiones que satisfacen dicha recurrencia; no hay más que elegir “arbitrariamente” (pero juiciosamente también) los dos términos iniciales y los demás quedan determinados por la propia relación de recurrencia. Así pues, llegamos al siguiente método de estimar la raíz de mayor valor absoluto de un polinomio cuadrático:

Proposición 2 Si $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es un polinomio de coeficientes reales con dos raíces reales distintas z_1 y z_2 y $|z_1| > |z_2|$ entonces para cualesquiera valores iniciales x_0, x_1 tales que x_1/x_0 no es raíz de $p(x)$, la sucesión $\{x_n\}$ definida recurrentemente por

$$x_n = -(a_1 x_{n-1} + a_0 x_{n-2})/a_2$$

tiene la propiedad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = z_1$$

Todo lo que acabamos de decir para ecuaciones cuadráticas vale también para ecuaciones polinómicas de cualquier grado. Además no es nada más difícil demostrar el caso general:

Teorema 8 (Método de Bernoulli) Si z_1, \dots, z_m (ordenados por sus valores absolutos, es decir $|z_1| > \dots > |z_m|$) son m raíces reales de un polinomio de grado m con coeficientes reales a_0, \dots, a_m (es decir, si $\sum_{k=0}^m a_k z_i^k = 0$) entonces la forma general de una sucesión $\{x_n\}$ que satisfaga la relación

de recurrencia $\sum_{k=0}^m a_k x_{n+k-m} = 0$ es $x_n = \sum_{i=1}^m c_i z_i^n$ y para cualquier tal sucesión con $c_1 \neq 0$ se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = z_1.$$

Una tal sucesión se puede obtener mediante la fórmula

$$x_n = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x_{n+k-m}$$

y una elección juiciosa de los m términos iniciales x_0, \dots, x_{m-1} .

El método de Bernoulli, como método general para hallar raíces de polinomios tiene muchas dificultades, especialmente en su forma simple explicada aquí. Incluso en los casos en los que es aplicable para hallar la raíz de mayor valor absoluto, la sucesión de aproximaciones suele converger muy despacio. Evidentemente es un método que tiene que ir acompañado de la técnica de reducción de grado explicada más arriba. Con todo, cuando aplicable, es un método muy sencillo que se puede utilizar como paso previo a otro más eficaz con la intención de proporcionar una estimación inicial de la raíz buscada.

Hay que decir también que este método ha sido objeto de exhaustivas investigaciones y con modificaciones apropiadas puede utilizarse incluso para estimar pares complejo-conjugados de raíces en algunos casos. Una variante moderna de este método (el algoritmo QD o de *cociente-diferencia*) resuelve muchas de las dificultades del algoritmo de Bernoulli y proporciona estimaciones de todas las raíces simultáneamente (incluyendo raíces complejas).

1.4 El Método de Müller

Ya hemos indicado en la sección 1.1.4 la idea que hay tras el método de Müller y su semejanza con el método de la secante. Como aquél, es un método que no requiere la evaluación de la derivada y que converge casi cuadráticamente. Además tiene la ventaja de que no necesita una estimación inicial precisa, aunque sí es necesario elegir no dos sino tres valores iniciales.

Aunque en lo que sigue se supone tácitamente que buscamos un cero real y que las variables son todas reales, todo lo que se dice vale sin cambios para el caso complejo. Esta es una de las ventajas que hacen del método de Müller una herramienta excelente a la hora de buscar ceros de funciones, pues no tenemos que preocuparnos a priori de si el cero buscado es real o complejo.

Dados tres puntos a, b, c en la recta real, comenzamos por calcular el polinomio cuadrático, $q(x)$, que coincide con la función dada, f , en esos tres puntos, es decir, tal que $q(a) = f(a)$, $q(b) = f(b)$, $q(c) = f(c)$.

Una vez hallado dicho polinomio cuadrático $q(x)$ calculamos, de sus dos raíces, aquella que más se acerque al cero buscado. Esa raíz será el siguiente término de la sucesión que converge al cero buscado. Así pues el método de Müller progresa de la siguiente forma: Conocidos tres términos consecutivos de la sucesión, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n , el siguiente término se obtiene haciendo lo siguiente:

1. Primeramente hacemos $a = x_{n-2}, b = x_{n-1}, c = x_n$.
2. Calculamos el polinomio $q(x)$ determinado por $q(a) = f(a), q(b) = f(b), q(c) = f(c)$.
3. Hallamos el cero de $q(x)$ más cercano a la solución buscada, sea este cero x , y ponemos $x_{n+1} = x$.
4. Por último preparamos los datos para el siguiente paso haciendo $a = b, b = c, c = x$ y vamos al paso 2.

Para elegir cuál de las dos posibles soluciones de $q(x) = 0$ nos interesa, razonamos así: a medida que el método progresa los tres puntos a, b, c estarán más y más cerca del cero y por tanto más cerca entre sí, lo que implica que la parábola representada por $y = q(x)$ se aproximará más y más a una línea recta que pasa cerca del cero buscado. Por lo tanto, mientras una raíz de $q(x)$ se acerca a la solución buscada la otra tenderá a $+\infty$ o a $-\infty$. Esto nos dice que la raíz de $q(x)$ que debemos desechar es la de mayor valor absoluto. Otra forma de plantear esto es buscar la ecuación cuadrática satisfecha por la diferencia $x - x_n$, es decir, expresando la ecuación $q(x) = 0$ en la forma $p(x - x_n) = 0$ (ecuación (1.14)). En este caso de nuevo buscaríamos la solución de menor valor absoluto ya que a medida que progresa el método esta diferencia irá acercándose a cero.

Este proceso continúa hasta que alcancemos un error (medido en términos de las correcciones) menor que el máximo tolerado.

La forma más sencilla de hallar el polinomio $q(x)$ es expresándolo en la forma

$$q(x) = y_3 + A(x - x_3) + B(x - x_2)(x - x_3)$$

así se garantiza que pasa por (x_3, y_3) y sólo tenemos que calcular dos coeficientes, los cuales se obtienen muy fácilmente. De $q(x_2) = y_2$ deducimos que A vale

$$A = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

y de $q(x_1) = y_1$ deducimos

$$y_1 = y_3 + A(x_1 - x_3) + B(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$$

de donde

$$B = \frac{\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} - A}{x_1 - x_2}.$$

Para hallar el cero que nos interesa expresaremos $q(x)$ en la forma

$$q(x) = y_3 + C(x - x_3) + D(x - x_3)^2, \quad (1.14)$$

cuyos coeficientes se determinan también fácilmente. En primer lugar, por ser igual al coeficiente principal, ha de ser $D = B$. Por otro lado el coeficiente C ha de verificar $C + (x - x_3)B = A + (x - x_2)B$, de donde

$$C = A + B(x_3 - x_2)$$

y la corrección que tenemos que hacer sobre x_3 es

$$x - x_3 = \frac{-2y_3}{C + \text{sign}(C)\sqrt{C^2 - 4y_3B}}.$$

Como dijimos más arriba, este método sirve para obtener tanto los ceros reales como los ceros complejos no reales de una función.

En el caso de que el cero buscado sea real, y a pesar de que todas las variables involucradas sean reales, los cálculos intermedios pueden producir

ocasionalmente valores complejos no reales por obtenerse un discriminante negativo en la resolución de la ecuación cuadrática.

Esas salidas del eje real no influyen en la aproximación al cero, pero puede ser conveniente evitarlas (en el caso de que el cero buscado se sepa con seguridad que es real) especialmente si se realizan los cálculos en un lenguaje de programación que no admite aritmética compleja.

En tal situación puede evitarse que aparezcan en los cálculos cantidades complejas no reales sin más que evitar el cálculo de la raíz cuadrada $\sqrt{C^2 - 4y_3B}$ cuando $C^2 - 4y_3B < 0$. Ésta es la técnica empleada en el siguiente algoritmo que implementa el método de Müller para el cálculo de ceros reales usando sólo aritmética real.

Algoritmo del Método de Müller
(ceros reales)

1 Datos: x_1, x_2, x_3 (valores iniciales), f (función de la que se desea un cero), ϵ (tolerancia de error), M (máximo número de pasos del algoritmo).

2 $h = x_3 - x_2$; $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$;

3 Para $k = 1, M$

$y_3 = f(x_3)$; $A = (y_3 - y_2)/h$;

$B = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$; $B = B - A$; $B = B/(x_1 - x_2)$;

$C = A + Bh$; $Q = C^2 - 4y_3B$

Si $Q < 0$ **entonces** $Q = 0$

$h = -2y_3/(C + \text{sign}(C)\sqrt{Q})$;

Si $|h| < \epsilon$ **entonces ir a 6**

$x_1 = x_2$; $x_2 = x_3$; $x_3 = x_3 + h$; $y_1 = y_2$; $y_2 = y_3$;

Imprimir x_3

4 Siguiente k

5 Imprimir “No hubo convergencia después de ”; M ; “ pasos.” y **PARAR**

6 Imprimir “Solución es: ”; x_3 ; “.” y **PARAR**

Naturalmente sería necesario modificar este algoritmo para que encontrase ceros complejos no reales. Para ello sería suficiente eliminar la línea

Si $Q < 0$ **entonces** $Q = 0$

siempre y cuando se pudiesen realizar los cálculos en aritmética de números complejos. Si se quieren buscar ceros complejos usando solamente aritmética real sería necesario hacer más modificaciones; principalmente en el cálculo de $h = -2y_3/(C + \text{sign}(C)\sqrt{Q})$. Dejamos este trabajo al estudiante trabajador.

En el siguiente ejercicio se busca un cero complejo de la función Coseno Integral de Fresnel, cuyo único cero real es el obvio $x = 0$.

Ejercicio 1.25

Utilizar el método de Müller para hallar el cero no nulo de menor módulo de la función Coseno Integral de Fresnel:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1}.$$

(Sugerencias: Evaluar C truncando su serie de potencias en un valor de n par (por ejemplo, en $n = 2$ con lo cual $C(x) \simeq a_0x + a_1x^5 + a_2x^9$). Con ello se evitará la aparición de un cero real espurio. Dividir por x para obviar la solución $x = 0$. Evaluar cada coeficiente a_k en términos de a_{k-1} para mejorar la precisión, y evaluar el polinomio resultante por el método de las multiplicaciones encajadas. Comenzar las iteraciones con $x_1 = 1.6$, $x_2 = 1.7$, y $x_3 = 1.8$, lo cual permitirá obtener dos dígitos de precisión en cinco o seis iteraciones. Ir aumentando progresivamente el número de términos de la serie (siempre truncando en n par) para ir aumentando la precisión de la solución.)

Respuestas a Algunos Ejercicios del Capítulo 1

Ejercicio 1.1 (Esto está hecho para otros datos.) Con N pasos a partir de un intervalo de longitud l se obtiene un intervalo de longitud $l/2^N$. El punto medio de este intervalo tendrá un error menor que el radio, o sea, menor que $\frac{1}{2}l/2^N$ (el error no puede ser igual al radio porque eso significaría que el cero es uno de los extremos, lo que habría sido detectado por el algoritmo y se hubiera hallado el cero exacto). Para que dicho error sea menor que ϵ necesitamos que el número de pasos, N , sea tal que $2^N \geq \frac{1}{2}l/\epsilon$, es decir N mayor o igual que $\log(l/2\epsilon)/\log 2 = \log(l/\epsilon)/\log 2 - 1$, que es lo mismo que decir

$$N = \begin{cases} \text{ent}(\log(l/\epsilon)/\log 2) & \text{si } \text{frc}(\log(l/\epsilon)/\log 2) \neq 0 \\ \log(l/\epsilon)/\log 2 - 1 & \text{si } \text{frc}(\log(l/\epsilon)/\log 2) = 0. \end{cases}$$

En nuestro caso ($l = 20$ y $\epsilon = 10^{-6}$) $\log(l/\epsilon)/\log 2 = \log(2 \cdot 10^7)/\log 2 = 1 + 7/\log 2 = 24.25 \dots$ luego $N = 24$.

Ejercicio 1.2 La pendiente de la recta es $\frac{f(a)}{a-x_0} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. despejando x_0 se obtiene

$$x_0 = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Ejercicio 1.3 En realidad dicho promedio ponderado es también igual a $\frac{-af(b)+bf(a)}{-f(b)+f(a)}$. Ambas expresiones se obtienen al tener en cuenta que $f(a)f(b) < 0$ lo cual implica que o bien $|f(a)| = f(a)$ y $|f(b)| = -f(b)$ o bien $|f(a)| = -f(a)$ y $|f(b)| = f(b)$.

Ejercicio 1.4 Sea $a = f(x)$. Calculemos $f(a)$. $f(a) = f(f(x)) = f^2(x) = f(x) = a$. Luego a es un punto fijo. Recíprocamente, sea a un punto fijo de f . Entonces tomando $x = a$ se verifica que $a = f(x)$

Ejercicio 1.5 $\xi = \lim\{x_n\} = \lim\{g(x_{n-1})\} = g(\lim\{x_{n-1}\}) = g(\xi)$.

Ejercicio 1.6 Sea ξ el punto fijo, entonces $\xi = g(\xi) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$. Esto implica $f(\xi) = 0$.

Ejercicio 1.7 Sea a dicha abscisa. Entonces $f'(x) = f(x)/(x-a)$, de donde se deduce inmediatamente la fórmula dada.

Ejercicio 1.8 Como $f(x) = x^2 - N$ y $f'(x) = 2x$ la función de iteración del método de Newton es $g(x) = x - \frac{x^2-N}{2x} = x - \frac{x}{2} + \frac{N}{2x} = \frac{1}{2}(x + \frac{N}{x})$. Para la ecuación $x^3 - N = 0$, $f'(x) = 3x^2$ y la función de iteración es $g(x) = x - \frac{x^3-N}{3x^2} = x - \frac{2x}{3} + \frac{N}{3x^2} = \frac{1}{3}(2x + \frac{N}{x^2})$. Luego el algoritmo es: $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + N/x_n^2)$.

Ejercicio 1.9 (a) Para g_1 : si $x = \sqrt{2+x}$ entonces $x^2 = 2+x$, que es la ecuación dada. (b) Para g_2 : si $x = 1 + \frac{2}{x}$ entonces $x^2 = x+2$, que es la ecuación dada. (c) Para g_3 : si $x = x - \frac{x^2-x-2}{m}$ entonces $0 = -\frac{x^2-x-2}{m}$, de donde $0 + x^2 - x - 2$ que es la ecuación dada. (d) Para g_4 : si $x = \frac{x^2+2}{2x-1}$ entonces $x(2x-1) = x^2+2$, de donde $2x^2 - x = x^2+2$, que es equivalente a la ecuación dada.

Ejercicio 1.10 Si $g(a) = a$ o $g(b) = b$ ya tenemos un punto fijo. En caso contrario, puesto que $I \xrightarrow{g} I$, tenemos $a < g(a) < b$, y $a < g(b) < b$, lo que implica que la función $h(x) = g(x) - x$ es positiva en a y negativa en b , además de ser continua en I . En consecuencia h tiene un cero en I el cual es un punto fijo de g .

Ejercicio 1.11 Como $g'(x) = 1/(2\sqrt{2+x})$, para $x > 0$ se cumple $|g'(x)| < 1/\sqrt{8} < 1$, luego la condición (c) se cumple para todo $x > 0$. Como g es creciente, para que la condición (a) se cumpla en $[a, b]$ basta que sea $g(a) \geq a$ y $g(b) \leq b$. Lo primero se cumple para $a = 0$ y lo segundo es $\sqrt{2+b} \leq b$ o $2+b \leq b^2$ o $b \geq 2$. Luego podemos tomar $I = [0, 3]$.

Ejercicio 1.12

Ejercicio 1.13 La constante de error es igual a

$$\frac{1}{n!} |g^{(n)}(\xi)|.$$

Ejercicio 1.14 La derivada segunda de g es $(f'(x)^2 f''(x) + f(x) f'''(x) - 2f(x) f''(x)^2)/f'(x)^3$. De aquí, teniendo en cuenta que $f(\xi) = 0$, se obtiene $g''(\xi) = f''(\xi)/f'(\xi)$.

Ejercicio 1.15 (a)

$$g'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{f'(x)^2} \lim_{x \rightarrow \xi} f''(x) \\ = f''(\xi) \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)} = f''(\xi) \frac{1}{2f''(\xi)} = \frac{1}{2}.$$

(b) $g'(x) = 1 - 2 \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - 2 \frac{[f'(x)]^2}{[f'(x)]^2} + 2 \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = -1 + 2 \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$. Para hallar $g'(\xi)$ calculamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g'(x) = -1 + 2 \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = -1 + 2 \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{[f'(x)]^2} \lim_{x \rightarrow \xi} f''(x) \\ = -1 + 2 \left(\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{[f'(x)]^2} \right) f''(\xi) = -1 + 2 \left(\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)} \right) f''(\xi) \\ = -1 + 2 \left(\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{1}{2f''(x)} \right) f''(\xi) = -1 + 2 \frac{1}{2f''(\xi)} f''(\xi) = 0$$

de donde efectivamente $g'(\xi) = 0$. Ahora tenemos que demostrar que g'' es continua en $x = \xi$. Para ello hemos de ver que $\lim_{x \rightarrow \xi} g''(x)$ es finito. Primero hallamos

$$g'' = \left(-1 + 2 \frac{ff''}{[f']^2} \right)' = 2 \frac{(f'f'' + ff''')f' - 2ff''f'''}{[f']^3} \\ = 2 \frac{[f']^2 f'' + ff'''f' - 2f[f'']^2}{[f']^3} = 2 \frac{([f']^2 - 2ff'')f'' + ff'''f'}{[f']^3} \\ = 2 \frac{([f']^2 - 2ff'')}{[f']^3} f'' + 2 \frac{f}{[f']^2} f'''$$

y ahora, aplicando la regla de l'Hôpital y el hecho de que

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{[f'(x)]^2} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)} = \frac{1}{2f''(\xi)},$$

obtenemos,

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g''(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{([f'(x)]^2 - 2f(x)f''(x))'}{3f'(x)^2 f''(x)} \lim_{x \rightarrow \xi} f''(x) + 2 \frac{f'''(\xi)}{2f''(\xi)} \\ = 2 \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{2f'(x)f''(x) - 2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'''(x)}{3f'(x)^2} + \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} \\ = \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} - \frac{4}{3} f'''(\xi) \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} - \frac{2}{3} \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} = \frac{1}{3} \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)}$$

Ejercicio 1.16**Ejercicio 1.17**

Ejercicio 1.18 Supongamos primeramente que $a = c$. Entonces:

$$\frac{f[a, b] - f[a, c]}{b - c} = \frac{f[a, c] - f[a, b]}{c - b} = \frac{f[a, c] - f[c, b]}{a - b} = \frac{f[a, c] - f[b, c]}{a - b}$$

donde hemos usado la propiedad obvia $f[c, b] = f[b, c]$. Supongamos ahora que $a \neq c$. Tenemos que demostrar

$$(f[a, b] - f[a, c])(a - b) = (f[a, c] - f[b, c])(b - c),$$

que es equivalente a

$$f(a) - f(b) - f[a, c]a + f[a, c]b = f[a, c]b - f[a, c]c - f(b) + f(c)$$

y cancelando el término $-f(b) + f[a, c]b$ y operando, el problema queda reducido a probar

$$f(a) - f[a, c]a = -f[a, c]c + f(c),$$

lo cual no es más que una reescritura de la definición del símbolo $f[a, c]$.

Ejercicio 1.19 Esto es un simple cálculo:

$$\hat{x}_n = x_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x_n}{\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n} - 1} = x_{n+1} + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_n - x_{n-1} - (x_{n+1} - x_n)} \\ = x_{n+1} + \frac{(\Delta x_n)^2}{x_n - x_{n-1} - x_{n+1} + x_n} = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n} \\ = x_{n+1} - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}.$$

Ejercicio 1.20

Ejercicio 1.21 Si a es una raíz de p entonces al dividir $p(x)$ entre $x - a$ el resto es $p(a) = 0$ y por lo tanto $x - a$ es un factor de $p(x)$. Por otro lado, es evidente que si $x - a$ es un factor de p , $p(x) = (x - a)q(x)$ para algún otro polinomio $q(x)$ y entonces a es un cero de p : $p(a) = (a - a)q(a) = 0$.