Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

Capítulo 8

La función Gamma

versión preliminar 3.2-14 octubre 2002

La función Gamma aparece en diversos problemas de Física, tales como la normalización de la función de onda de Coulomb y en el cómputo de probabilidades en mecánica estadística. Por tanto, su estudio es relevante, al menos en forma somera.

8.1. La función factorial

Consideremos la integral:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha} \ .$$

Derivando n veces respecto a α ambos lados de esta expresión:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\, dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \ .$$

Poniendo $\alpha = 1$ encontramos una expresión integral para la función factorial:

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \ , \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

A partir de este resultado podemos extender la función factorial para $n = 0$:

$$0! = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 \ .$$

Así, tenemos en general,

$$\boxed{n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \ , \qquad n = 0, 1, 2\ldots} \tag{8.1}$$

8.2. La función Gamma

Definimos la función Gamma por:

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \ , \qquad \operatorname{Re} z > 0 \ .} \tag{8.2}$$

Vale decir, es una generalización de la función factorial para números complejos con parte real positiva.

Observemos que:

- Cuando $t \to \infty$, la función e^{-t} domina cualquier potencia. Cuando $t \to 0$, $|\, e^{-t}t^{z-1}\,| \sim t^{\operatorname{Re}(z)-1}$, de modo que la condición $\operatorname{Re} z > 0$ (es decir, $\operatorname{Re}(z) - 1 > -1$ es necesaria para la convergencia de la integral.
- Para el caso $\operatorname{Re} z \leq 0$ la integral diverge y no puede usarse para definir $\Gamma(z)$. Más adelante veremos qué hacer con este caso.

La función $\Gamma(z)$ es continua (si $\operatorname{Re} z > 0$. Además, es fácil ver (al menos formalmente) que, para $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\ln t\,dt \ , \tag{8.3}$$

$$\Gamma''(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}(\ln t)^2\,dt \ , \tag{8.4}$$

etc. Se puede demostrar que $\Gamma(z)$ es infinitamente diferenciable si $\operatorname{Re} z > 0$.

8.2.1. Relación con la función factorial

De la definición de la función Gamma (8.2), se tiene

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n! \ , \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}. \tag{8.5}$$

8.2.2. Relación de recurrencia

Integrando por partes (8.2),

$$\Gamma(z+1) = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-t}\right) z t^{z-1}\,dt = z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt = z\Gamma(z) \ ,$$

luego

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)} \tag{8.6}$$

Notemos que, en particular, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\cdot(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n! \ ,$$

pues $\Gamma(1) = 1$.

8.2.3. Función Gamma de números negativos

Ya observamos que la expresión integral (8.2) no es adecuada para su extensión a números negativos. Sin embargo, ello sí es posible a través de la relación de recurrencia (8.6).

Si $z \neq 0, -1, -2, \ldots$, la expresión

$$\frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z}$$

está bien definida para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande ($\mathrm{Re}(z)+n>0$). Además su valor es independiente de n, pues

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(z+n+m)}{(z+n+m-1)(z+n+m-2)\cdots(z+1)z} &= \frac{\Gamma(z+n)(z+n+m-1)\cdots(z+n)}{(z+n+m-1)\cdots(z+n)(z+n-1)\cdots z} \\ &= \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z} \ .\end{aligned}$$

Entonces, se define $\Gamma(z)$ para todo z diferente de $0, -1, -2, \ldots$, por medio de

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z} \ , \qquad n \in \mathbb{N} \text{ y } \mathrm{Re}(z)+n>0 \ , \tag{8.7}$$

Por ejemplo,

$$\Gamma(-1{,}5) = \frac{1}{-1{,}5}\Gamma(-0{,}5) = \frac{1}{-1{,}5}\frac{1}{-0{,}5}\Gamma(0{,}5) \ .$$

Observemos que si $z = -m+\epsilon$, con $m \in \mathbb{N}$ y $\epsilon < 1$, la ecuación (8.7) nos dice (con $n = m+1$) que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(\epsilon+1)}{\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon-2)\cdots(\epsilon-m)} \sim \frac{(-1)^m}{m!\,\epsilon} \quad \text{cuando } \epsilon \to 0.$$

Entonces, en todos los puntos $z = 0, -1, -2, \ldots$, $\Gamma(z)$ tiene polos simples, y el residuo en el polo $z=-m$ es $(-1)^m/m!$.

Más adelante veremos que $\Gamma'(1) = -\gamma$, donde γ es la constante de Euler-Mascheroni. Entonces, cuando $z \to 0$, $\Gamma(1+z) = 1 - \gamma z + \cdots$, y con esto

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{1}{z} - \gamma + \cdots \ , \quad \text{cuando } z \to 0.$$

8.2.4. Algunos resultados

(a) Evaluemos $\Gamma(1/2)$. De la definición (8.2),

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt \ .$$

Con el cambio de variables $t = y^2$,

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \ .$$

Entonces

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\ .$$

Reescribiendo la integral en coordenadas polares,

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = 4\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^\infty = 2\pi\left(\frac{1}{2}\right)\ .$$

Luego

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\ . \tag{8.8}$$

(b) Para todo $z \notin \mathbb{Z}$ se verifica que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\ . \tag{8.9}$$

La demostración la veremos más adelante.

(c) La fórmula de duplicación de Legendre dice que

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\ . \tag{8.10}$$

La demostración la veremos más adelante.

8.3. Función Beta

8.3.1. Definición

Definimos la función Beta por:

$$\boxed{B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\ , \qquad \operatorname{Re} p > 0,\ \operatorname{Re} q > 0} \tag{8.11}$$

Con el cambio de variables $\tau = 1 - t$ se puede demostrar que

$$B(p,q) = B(q,p)\ . \tag{8.12}$$

Otras formas de expresar $B(p,q)$, con los cambios de variable $t = \cos^2\theta$ y $t = r/(1+r)$ respectivamente, son:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta)^{2q-1}(\cos\theta)^{2p-1}\,d\theta\ , \tag{8.13}$$

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{r^{p-1}}{(1+r)^{p+q}}\,dr\ . \tag{8.14}$$

La función Beta se relaciona con la función Gamma a través de la expresión:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ . \tag{8.15}$$

Demostración Ejercicio.

8.3.2. Otras relaciones entre las funciones Beta y Gamma

En esta sección volveremos sobre los dos resultados pendientes de la sección 8.2.4, esto es, las ecuaciones (8.9) y (8.10).

Para demostrar el resultado (8.9) primero notamos que, con la ayuda de (8.15), $B(z, 1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$. Ahora, por (8.14), lo que tenemos es

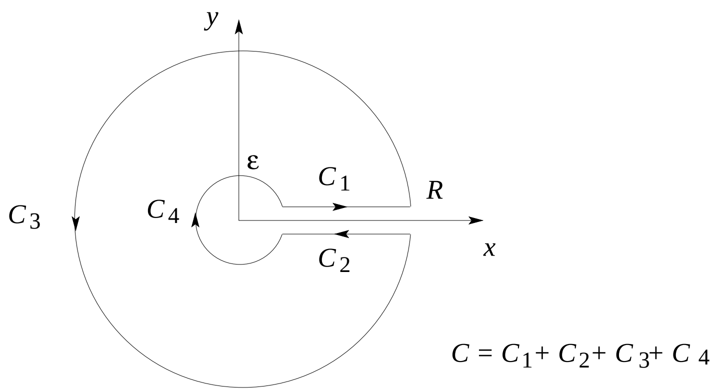
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw \ ,$$

con $0 < \operatorname{Re} z < 1$ (por la definición de Beta).

Notemos que la función $w^{z-1}/(1+w)$, con z fijo y tal que $0 < \operatorname{Re} z < 1$, tiene un polo en $w = -1$. Además, como la función es multivaluada, consideraremos, en el primer cuadrante del plano complejo, que

$$w^{z-1} = e^{(z-1)\ln w} \ .$$

Aquí, $\ln w$ es real. Consideremos ahora el camino cerrado C que muestra la figura:



Entonces

$$\int_C \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw = -2\pi i e^{i\pi z} \ ,$$

pues el residuo en $w = -1$ es w^{z-1} (ejercicio). También quedará como ejercicio demostrar que

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C_1} \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw = \int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw \ ,$$

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C_2} \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw = -e^{2i\pi z} \int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw \ ,$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_3} \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw = 0 \ ,$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_4} \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw = 0 \ ,$$

es decir, demuestre que

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{C_1} \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw = (1 - e^{2i\pi x}) \int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{1+w}\, dw \ .$$

De este modo, se obtiene que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{-2i\pi e^{i\pi z}}{1-e^{2i\pi z}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

si $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)\Gamma(-z) &= z\Gamma(z)\frac{\Gamma(-z+1)}{(-z)} \\ &= -\Gamma(z)\Gamma(1-z) \\ &= -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\end{aligned}$$

si $0 < \operatorname{Re} z < 1$, de modo que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z + \pi)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

si $1 < \operatorname{Re} z < 2$. Así, entonces,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \ , \quad \operatorname{Re} z \notin \mathbb{Z} \ .$$

Para demostrar la fórmula de duplicación de Legendre (8.10), primero notemos que ésta es equivalente a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

[donde hemos usado el resultado (8.8)], lo cual es equivalente a

$$\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)} = 2^{2z-1}\frac{[\Gamma(z)]^2}{\Gamma(2z)} \ .$$

De este modo, por la expresión (8.15), lo que tenemos que demostrar es

$$B(1/2, z) = 2^{2z-1}B(z,z) \ .$$

Pero con el cambio de variable $t = (x+1)/2$ en la definición de la función Beta (8.11),

$$B(z,z) = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{z-1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{z-1}\frac{dx}{2} = \frac{2}{2^{2z-1}}\int_0^1 (1-x^2)^{z-1}\,dx \ ,$$

mientras que, con el cambio de variable $t = x^2$,

$$B(1/2, z) = 2\int_0^1 (1-x^2)^{z-1}\,dx \ .$$

De este modo, con las dos ecuaciones anteriores, terminamos de obtener lo buscado, esto es

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \ .$$

8.4. Notación doble factorial

Definimos el *doble factorial* como el producto de los n primeros enteros impares o pares:

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) \ , \tag{8.16}$$
$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \ . \tag{8.17}$$

Claramente

$$(2n)!! = 2^n n! \ , \tag{8.18}$$
$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \ . \tag{8.19}$$

8.5. Fórmula de Stirling

(Una idea de la demostración.)
Deseamos encontrar una expresión asintótica para $\Gamma(x)$ para x grande. Consideremos

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{x\ln t - t}\, dt \ .$$

Con el cambio de variables $t = x + r\sqrt{x}$, obtenemos

$$\Gamma(x+1) = \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x\ln(x+r\sqrt{x}\,) - x - r\sqrt{x}} \sqrt{x}\, dr \ .$$

Para x grande, se tiene

$$\ln(x + r\sqrt{x}\,) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{r}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ln x + \frac{r}{\sqrt{x}} - \frac{r^2}{2x} + \cdots \ .$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &\xrightarrow[x\to\infty]{} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{x\ln x + r\sqrt{x} - r^2/2 - x - r\sqrt{x}} \sqrt{x}\, dr \\
&= e^{x\ln x - x}\sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-r^2/2}\, dr \\
&= x^x e^{-x}\sqrt{x} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-r^2/2}\, dr - \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} e^{-r^2/2}\, dr \right) \\
&\xrightarrow[x\to\infty]{} x^x e^{-x}\sqrt{x}\left(\sqrt{2\pi} - 0\right) \ ,
\end{aligned}$$

obteniendo así la *fórmula de Stirling*:

$$\boxed{\Gamma(x+1) \xrightarrow[x\to\infty]{} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} \tag{8.20}$$

Con más trabajo es posible encontrar la expansión asintótica de $\Gamma(x+1)$:

$$\Gamma(x+1) \xrightarrow[x\to\infty]{} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\cdots\right) . \tag{8.21}$$

Con la ayuda de la fórmula de Stirling encontraremos una forma alternativa de definir la función Gamma, pero sólo mostraremos un sentido de la demostración. Directamente de la fórmula de Stirling, para un x fijo y con $y \to \infty$,

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \sim \frac{(x+y)^{x+y}e^{-(x+y)}\sqrt{2\pi(x+y)}}{y^y e^{-y}\sqrt{2\pi y}} \sim y^x\left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y} e^{-x} ,$$

pero como

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y} = \left(1+\frac{x}{y}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{y}\right)^{y} \sim e^x ,$$

se tiene

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \sim y^x ,$$

Por otro lado, si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)} &= \frac{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x)}{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n-1}\right)\left(1+\frac{x}{n-2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{1}\right)x\Gamma(x) .\end{aligned}$$

Si en la ecuación anterior se toma el límite $n \to \infty$ resulta que

$$n^x \sim \left(1+\frac{x}{n-1}\right)\left(1+\frac{x}{n-2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{1}\right)x\Gamma(x) ,$$

es decir,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \sim x(1+x)\cdots\left(1+\frac{x}{n-2}\right)\left(1+\frac{x}{n-1}\right)n^{-x} , \quad n\to\infty .$$

Recordando que la constante de Euler-Mascheroni γ se define como

$$\gamma = \lim_{s\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{s}\frac{1}{n}-\ln s\right) = 0{,}577215664901\ldots , \tag{8.22}$$

vemos que

$$n^{-x} = e^{-x\ln n} \sim e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)+\gamma x} ,$$

de lo cual resulta que

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \sim xe^{\gamma x}(1+x)e^{-\frac{x}{1}}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\cdots\left(1+\frac{x}{n-2}\right)e^{-\frac{x}{n-2}}\left(1+\frac{x}{n-1}\right)e^{-\frac{x}{n-1}} , \quad n\to\infty .$$

Así, se obtiene la *representación de Weierstrass* de la función Gamma:

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}} \tag{8.23}$$

8.6. Otras funciones relacionadas

1. *Función digamma*:
$$\digamma(z) = \frac{d}{dz}\ln(z!) \ , \tag{8.24}$$
donde entendemos que $z! = \Gamma(z+1)$.
De la representación de Weierstrass (8.23) se obtiene que
$$-\ln\Gamma(z) = \ln z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right] \ .$$
Derivando la ecuación anterior es claro que
$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \ ,$$
o bien
$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} &= -\frac{1}{z+1} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+1+n}\right) \\ &= -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) \ ,\end{aligned}$$
es decir
$$\digamma(z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)} \ . \tag{8.25}$$
Del resultado anterior es claro que $\digamma(z)$ tiene polos en $z = -1, -2, \ldots$, con residuo 1.

2. *Función poligamma*: Es la m-ésima derivada de la función $\digamma$:
$$\digamma^{(m)}(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln(z!) = (-1)^{m+1}m!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{m+1}} \ . \tag{8.26}$$
Observemos que
$$\digamma^{(m)}(0) = (-1)^{m+1}m!\,\zeta(m+1) \ , \qquad m = 1, 2, 3 \ldots, \tag{8.27}$$
donde la función *zeta de Riemann* se define como
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \ , \qquad s > -1 \ . \tag{8.28}$$

3. *Función Beta incompleta*:
$$B_x(p,q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \ , \qquad \operatorname{Re}p > 0,\ \operatorname{Re}q > 0 \text{ y } 0 \le x \le 1. \tag{8.29}$$
Claramente
$$B_{x=1}(p,q) = B(p,q) \ .$$

4. *Funciones Gamma incompletas*:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\, dt \ , \qquad \mathrm{Re}(a) > 0 \ , \tag{8.30}$$

y

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1}\, dt \ . \tag{8.31}$$

Se tiene

$$\gamma(a,x) + \Gamma(a,x) = \Gamma(a) \ . \tag{8.32}$$

Se puede mostrar (ejercicio) que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma(n,x) = (n-1)! \left(1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) \ , \tag{8.33}$$

$$\Gamma(n,x) = (n-1)! e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \ . \tag{8.34}$$

5. *Integrales de error*:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt \ , \tag{8.35}$$

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2}\, dt \ . \tag{8.36}$$

Con un cambio de variable simple podemos escribir las integrales de error en términos de las funciones Gamma incompletas:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2 \right) \ , \tag{8.37}$$

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2 \right) \ . \tag{8.38}$$

Bibliografía Adicional

Un libro dedicado completamente al tema es la referencia [1], el cual fue originalmente publicado en 1906 (en dos tomos). Una interesante y famosa referencia es el capítulo XII del libro de Whittaker y Watson [2]:

1. Niels Nielsen, *Die Gammafunktion*, Band I/II, Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1965 (ISBN 0-8284-0188-8).

2. E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1997 (ISBN 0-5215-8807-3).