

Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

1. Espacio de funciones	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Sucesiones de funciones	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt	9
1.4. Coeficientes de Fourier	10
1.5. Integrales impropias (valor principal)	14
1.6. Convergencia según Cesàro	15
2. Series de Fourier	19
3. Transformada de Fourier	35
3.1. Definiciones	35
3.2. Ejemplos	36
3.3. Propiedades	41
3.4. Aplicaciones	43
4. Convolución	45
4.1. Espacio \mathcal{S}	45
4.2. Producto de convolución	46
4.3. El espacio \mathcal{S} como anillo	49
5. Distribuciones temperadas	53
5.1. Definiciones	53
5.2. Sucesión de distribuciones	61
5.3. Producto de distribuciones	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales	72
5.5. Convergencia débil	73
6. Distribuciones y transformada de Fourier	79
7. Convolución de distribuciones	87
7.1. Definiciones	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones	89
7.3. Uso de convolución en Física	91

8. La función Gamma	93
8.1. La función factorial	93
8.2. La función Gamma	94
8.3. Función Beta	96
8.4. Notación doble factorial	99
8.5. Fórmula de Stirling	99
8.6. Otras funciones relacionadas	101
9. Transformada de Laplace	103
9.1. Definición	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace	111
10. Aplicaciones de la transformada de Laplace	113
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	114
10.2. Ecuaciones integrales	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales	120
11. Polinomios ortogonales	123
11.1. Definiciones	123
11.2. Teoremas	123
11.3. Relación de recurrencia	125
12. Polinomios de Hermite	127
12.1. Definición	127
12.2. Función generatriz	127
12.3. Ortogonalidad	130
12.4. Algunos resultados interesantes	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite	131
13. Polinomios de Laguerre	133
13.1. Definición	133
13.2. Función generatriz	133
13.3. Relaciones de recurrencia	135
13.4. Ecuación de Laguerre	135
13.5. Ortogonalidad	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre	138
14. El problema de Sturm-Liouville	139
14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos	139
14.2. Operadores autohermíticos	141
14.3. Problema de autovalores	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales	143

15. Ecuaciones diferenciales con singularidades	145
15.1. Puntos singulares	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs	149
15.4. Una segunda solución	151
16. Ecuaciones diferenciales del tipo...	155
16.1. Soluciones en puntos regulares	155
16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares	159
16.3. Singularidades en infinito	167
16.4. Ejemplos	168
16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas	171
17. Funciones hipergeométricas	177
17.1. La ecuación hipergeométrica general	177
17.2. Ecuación indicial	178
17.3. Ecuación diferencial de Gauss	179
17.4. La serie hipergeométrica	181
17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente	183
18. Polinomios de Legendre	187
18.1. Función generatriz	187
18.2. Relaciones de recurrencia	189
18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$	190
18.4. Fórmula de Rodrigues	191
18.5. Ecuación diferencial de Legendre	192
18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$	193
18.7. Relación de ortogonalidad	193
18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$	194
18.9. Serie de Legendre	196
18.10. Funciones asociadas de Legendre	199
18.11. Problema de Sturm-Liouville asociado	201
18.12. Armónicos esféricos	203
18.13. Segunda solución de la ecuación de Legendre	205
19. La ecuación diferencial de Bessel	211
19.1. La ecuación diferencial de Bessel	211
19.2. Funciones de Bessel de índice no entero	212
19.3. Funciones de Bessel de índice entero	213
19.4. Comportamiento asintótico	214
19.5. Función generatriz	215
19.6. Fórmulas de adición	216
19.7. Representaciones integrales	217
19.8. Relaciones de recurrencia	219
19.9. Relaciones de ortogonalidad	220
19.10. Problema de Sturm-Liouville asociado	221

20. Diversos tipos de funciones cilíndricas	223
20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel	223
20.2. Funciones de Hankel	226
21. Aplicaciones a la Electrostática	229
21.1. Coordenadas rectangulares	229
21.2. Coordenadas polares, dos dimensiones	233
21.3. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas	236
21.4. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas	240
21.5. Otras aplicaciones	243
21.6. Ecuación de difusión	246
21.7. Difusión con creación de partículas	248

Capítulo 21

Aplicaciones a la Electrostática

versión preliminar 0.4-30 diciembre 2002

En este Capítulo aplicaremos algunos de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para resolver problemas de interés físico. En particular, estudiaremos el problema de encontrar el potencial electrostático en un cierto volumen del espacio delimitado por superficies mantenidas a potenciales dados. Este problema involucra la solución de Laplace en cierto dominio del espacio real. En los capítulos anteriores hemos podido encontrar autofunciones asociadas al operador de Laplace, y por lo tanto podemos escribir formalmente la solución como una combinación lineal de tales autofunciones. Los potenciales fijos en las superficies que determinan el dominio proporcionarán las condiciones de borde necesarias para encontrar todos los coeficientes de dicha combinación lineal y, por ende, resolver completamente el problema.

21.1. Coordenadas rectangulares

La ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 . \quad (21.1)$$

Suponemos

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) . \quad (21.2)$$

Sustituyendo en (21.1) y dividiendo por (21.2) tenemos

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 . \quad (21.3)$$

Si cada término en (21.3) depende sólo de una variable independiente, cada uno debe ser

igual a una constante:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2, \quad (21.4)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2, \quad (21.5)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2, \quad (21.6)$$

donde $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Si elegimos arbitrariamente α^2 y β^2 positivos entonces las soluciones de (21.4), (21.5) y (21.6) son

$$X(x) = \exp(\pm i\alpha x), \quad Y(y) = \exp(\pm i\beta y), \quad Z(z) = \exp(\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z),$$

luego

$$\Phi(x, y, z) = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}. \quad (21.7)$$

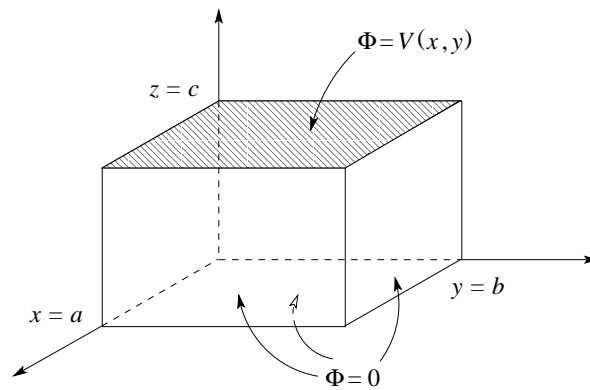
Observamos que:

- α y β son arbitrarios y se determinan por las condiciones de contorno;
- por superposición lineal de (21.7) obtenemos la solución más general de la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas.

Ejemplos

1) Potencial en el interior de un paralelepípedo con caras a diferente potencial.

Consideremos primero el caso de un paralelepípedo con todas las caras a potencial cero salvo una. El problema general, en el cual cada una de las seis caras está a un potencial diferente, se puede obtener como la superposición de seis de estos problemas.



Si $\Phi = 0$ en $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin \alpha x, \\ Y(y) &= \sin \beta y, \\ Z(z) &= \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z). \end{aligned}$$

Si $\Phi = 0$ en $x = a$ y $y = b$,

$$\alpha a = n\pi \quad \text{y} \quad \beta b = m\pi ,$$

luego

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} , \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b} , \quad \text{y} \quad \gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} .$$

Podemos escribir el potencial parcial Φ_{nm} , el cual satisface todas las condiciones de contorno excepto una:

$$\Phi_{nm} = \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) . \quad (21.8)$$

La solución completa es la superposición de estos potenciales para todos los valores posibles de m y n :

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{nm} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) . \quad (21.9)$$

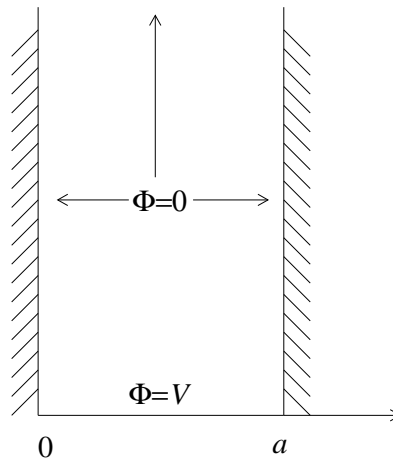
Sólo queda satisfacer $\Phi(x, y, z = c) = V(x, y)$:

$$V(x, y) = \sum_{nm} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c) , \quad (21.10)$$

correspondiendo a una doble serie de Fourier. Los coeficientes vienen dados por

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) .$$

2) Calculemos ahora el potencial en la región definida por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = \infty$. Debido a la simetría de traslación en z , el problema es efectivamente bidimensional:



Podemos afirmar que la solución será de la forma:

$$\Phi(x, y) = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm \alpha y} ,$$

con α real o complejo.

La condición $\Phi = 0$ en $x = 0$ y $x = a$, da

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) .$$

La condición $\Phi = 0$ para $y \rightarrow \infty$ da

$$Y(y) = e^{-\alpha y} = e^{-\frac{n\pi}{a}y} .$$

Por lo tanto

$$\Phi_n = e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) .$$

La solución general es

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) .$$

Los A_n son determinados imponiendo $\Phi = V$ para $y = 0$, con $0 \leq x \leq a$:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) ,$$

con $\Phi(x, 0) = V$. Es decir,

$$A_n = \frac{2V}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin u \, du = \frac{2V}{n\pi} \cos u \Big|_0^{n\pi} = \frac{2V}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1]$$

$$A_n = \frac{4V}{n\pi} \begin{cases} 1 & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Así, el potencial queda

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) . \quad (21.11)$$

Usando que $\text{Im}(e^{i\theta}) = \sin \theta$ y definiendo

$$z = e^{\frac{i\pi}{a}(x+iy)} ,$$

podemos reescribir el potencial como una función en el plano complejo:

$$\Phi(z) = \frac{4V}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{n \text{ impar}} \frac{z^n}{n} \right] .$$

(Esto es un hecho bastante general. En variable compleja, las funciones analíticas satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, que son equivalentes a una ecuación de Laplace, por tanto no es sorprendente que un potencial electrostático se pueda escribir en términos de funciones analíticas en el espacio complejo.)

Integrando $(1 \pm z)^{-1} = \sum (\mp z)^n$, tenemos

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \\ \ln(1-z) &= -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Restando ambos resultados,

$$\ln \left[\frac{1+z}{1-z} \right] = \sum_{n \text{ impar}} \frac{z^n}{n} ,$$

es decir,

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \text{Im} \left[\ln \frac{1+z}{1-z} \right] .$$

Por otro lado,

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-z^*)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2 + 2i \text{Im}(z)}{|1-z|^2}$$

$$\text{Im} \left[\ln \frac{1+z}{1-z} \right] = \text{fase} \left[\ln \frac{1+z}{1-z} \right] = \arctan \left(\frac{2\text{Im}(z)}{1-|z|^2} \right)$$

Pero

$$z = e^{i\frac{\pi}{a}(x+iy)} = e^{-\frac{\pi y}{a}} e^{i\frac{\pi x}{a}} ,$$

luego

$$\text{Im}(z) = e^{-\frac{\pi y}{a}} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) ,$$

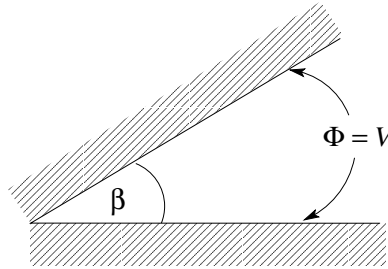
$$1-|z|^2 = 1 - e^{-\frac{2\pi y}{a}} = e^{-\frac{\pi y}{a}} \left(e^{\frac{\pi y}{a}} - e^{-\frac{\pi y}{a}} \right) = 2e^{-\frac{\pi y}{a}} \sinh \left(\frac{\pi y}{a} \right) .$$

Así, finalmente,

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \arctan \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\sinh \frac{\pi y}{a}} \right) .$$

21.2. Coordenadas polares, dos dimensiones

Estudiemos ahora el potencial entre dos placas conductoras que forman un cierto ángulo β entre sí, mantenidas a potencial V :



La ecuación de Laplace en este caso es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 . \quad (21.12)$$

Separando variables,

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi) .$$

Reemplazando en (21.12),

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(\phi)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} &= 0 \\ \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} &= 0 . \end{aligned}$$

Cada uno de los términos debe ser igual a una constante:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = \nu^2 , \quad \frac{1}{\Psi(\phi)} \frac{d^2\Psi(\phi)}{d\phi^2} = -\nu^2 ,$$

quedando las ecuaciones

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - \nu^2 R = 0 , \quad \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + \nu^2 \Psi = 0 ,$$

con soluciones

$$R(\rho) = a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu} , \quad \Psi(\phi) = A_\nu \cos(\nu\phi) + B_\nu \sin(\nu\phi) . \quad (21.13)$$

En el caso especial $\nu = 0$ las ecuaciones toman la forma

$$\rho \frac{dR}{d\rho} = cte , \quad \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = 0 ,$$

con soluciones

$$R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho , \quad \Psi(\phi) = A_0 + B_0 \phi . \quad (21.14)$$

Si no hay restricciones sobre ϕ (i.e. $0 \leq \phi \leq 2\pi$) entonces por unicidad debemos imponer que $\nu \in \mathbb{Z}$. Por la misma razón, cuando $\nu = 0$ debe imponerse $B_0 = 0$.

La solución general en dos dimensiones es entonces

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) .$$

Notemos que:

1. Si el origen es incluido en el volumen, en el cual no hay carga, todos los b_n son 0 ($b_0 = b_n = 0 \forall n$)
2. Si excluimos el origen $b_n \neq 0$.
3. El término logarítmico equivale al potencial generado por una línea de carga infinita sobre el eje z , con densidad lineal de carga $\lambda = -b_0/2$.

En nuestro problema, $0 \leq \phi \leq \beta$. Las condiciones de borde son entonces

$$\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, \beta) = V .$$

La condición de que la solución sea finita en $\rho = 0$ implica que

$$b_0 = b_\nu = 0 .$$

Para $\phi = 0$ se obtiene

$$V = a_0 A_0 + \sum_{\nu} a_{\nu} \rho^{\nu} A_{\nu} .$$

Siendo el lado izquierdo independiente de ρ ,

$$\begin{aligned} a_{\nu} A_{\nu} &= 0 , \\ a_0 A_0 &= V . \end{aligned}$$

La primera ecuación da $A_{\nu} = 0$ (si $a_{\nu} = 0$, no habría ninguna dependencia en ρ del potencial).

Para $\phi = \beta$ se obtiene

$$\begin{aligned} V &= a_0 (A_0 + B_0 \beta) + \sum_{\nu} a_{\nu} \rho^{\nu} B_{\nu} \sin \nu \beta , \\ a_0 B_0 \beta &= - \sum_{\nu} a_{\nu} \rho^{\nu} B_{\nu} \sin \nu \beta . \end{aligned}$$

Siendo el lado izquierdo independiente de ρ , ambos términos deben ser nulos. Como $a_0 A_0 = V$, se sigue que $a_0 \neq 0$, luego

$$B_0 = 0 .$$

En el lado derecho, en tanto, como $a_{\nu} \neq 0$ (para preservar alguna dependencia en ρ del potencial), y $B_{\nu} \neq 0$ (para preservar dependencia en ϕ), se concluye que

$$\sin \nu \beta = 0 ,$$

es decir

$$\nu = \frac{m\pi}{\beta} , \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Queda entonces la solución general

$$\Phi(\rho, \phi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin \left(\frac{m\pi\phi}{\beta} \right) .$$

Para ρ suficientemente pequeño sólo el primer término es relevante:

$$\Phi(\rho, \phi) \simeq V + a_1 \rho^{\pi/\beta} \sin \left(\frac{\pi\phi}{\beta} \right) .$$

Las componentes del campo eléctrico son

$$\begin{aligned} E_{\rho} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \simeq -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sin \left(\frac{\pi\phi}{\beta} \right) \\ E_{\phi} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \simeq \frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos \left(\frac{\pi\phi}{\beta} \right) \end{aligned}$$

La densidad de carga para $\phi = 0$ y $\phi = \beta$ es

$$\sigma(\rho) = \frac{E_{\phi}}{4\pi} \simeq -\frac{a_1}{4\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} .$$

21.3. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

La ecuación a resolver es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Separando variables, suponemos $\Phi(\vec{r}) = r^{-1}U(r)P(\theta)Q(\phi)$. Obtenemos

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0 .$$

Si multiplicamos por $r^2 \frac{\sin^2 \theta}{UPQ}$ queda

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0 .$$

El último término debe ser una constante:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2 ,$$

es decir

$$Q = e^{\pm im\phi} .$$

Para que Q sea univaluada para $\phi \in [0, 2\pi]$, m debe ser entero.

Separando ahora las ecuaciones para $P(\theta)$ y $U(r)$, queda la ecuación angular

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 ,$$

donde $l(l+1)$ es otra constante real, y la ecuación radial

$$\frac{d}{dr^2} U(r) - l(l+1) \frac{U(r)}{r^2} = 0 .$$

La ecuación radial es la ecuación de Euler, con solución

$$U_l(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l} .$$

l aún está por determinar. Escribiendo $x = \cos \theta$, se observa que la ecuación para $P(\theta)$ es la ecuación generalizada de Legendre. Sus soluciones regulares en $[-1, 1]$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), son las funciones asociadas de Legendre (Cap. 18):

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) ,$$

si l es un entero, y $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$.

La solución general se puede escribir entonces,

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{ml} (Ar^l + Br^{-(l+1)}) P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} ,$$

o en términos de los armónicos esféricos,

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{ml} (Ar^l + Br^{-(l+1)}) Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

Si hay simetría azimutal, es decir, si no hay dependencia en ϕ , entonces $m = 0$, con lo cual la ecuación para θ se convierte en la ecuación de Legendre ordinaria:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0 ,$$

y la solución general es

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) .$$

$\{A_l, B_l\}$ son determinados por las condiciones de contorno.

Ejemplo Potencial al interior de una esfera de radio a , en cuya superficie el potencial es $V(\theta)$.

En este caso, la solución debe ser regular en el origen, luego

$$B_l = 0 .$$

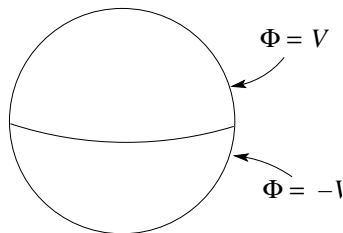
Al imponer la condición de borde,

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) ,$$

con A_l

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta .$$

Particularicemos al caso en que el hemisferio superior e inferior están a potenciales opuestos:



$$V(\theta) = \begin{cases} +V & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -V & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases} .$$

Entonces,

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} V \left[\int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] .$$

Con el cambio de variables $u = \cos \theta$, de modo que $du = -\sin \theta d\theta$,

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[-\int_1^0 P_l(u) du + \int_0^{-1} P_l(u) du \right] , \\ A_l &= \frac{2l+1}{2a^l} V \left[\int_0^1 P_l(u) du - \int_{-1}^0 P_l(u) du \right] . \end{aligned}$$

Usando la paridad de los polinomios de Legedre,

$$\int_0^1 P_l(u) du - \int_{-1}^0 P_l(u) du = 2 \int_0^1 P_l(u) du \quad \text{si } l \text{ impar,}$$

y es cero si l es par. Si l es impar, entonces,

$$A_l = \frac{2l+1}{a^l} V \int_0^1 P_l(u) du = \frac{2l+1}{a^l} V \left(-\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{2 \left(\frac{l+1}{2} \right)!!} ,$$

y la solución queda

$$\Phi(r, \theta) = V \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(-\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{2 \left(\frac{l+1}{2} \right)!!} \left(\frac{r}{a} \right)^l P_l(\cos \theta) .$$

Es fácil darse cuenta que para resolver el problema exterior, basta reemplazar

$$\left(\frac{r}{a} \right)^l \longrightarrow \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1}$$

en la solución anterior.

A partir de la discusión sobre la función generatriz de los polinomios de Legendre, Sec. 18.1, es inmediato obtener el siguiente importante resultado:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{r_{>}^2 + r_{<}^2 - 2r_{<}r_{>} \cos \gamma}} ,$$

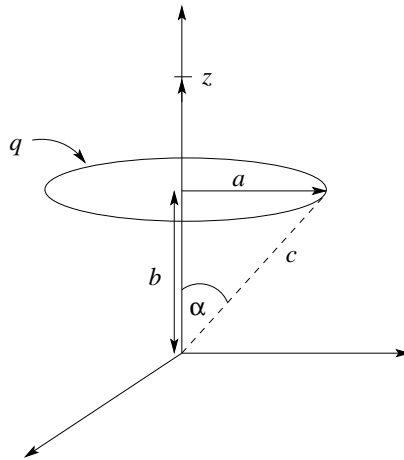
donde $r_{<}$ ($r_{>}$) es el más pequeño (grande) de $|\vec{x}|$ y $|\vec{x}'|$, y γ es el ángulo entre \vec{x} y \vec{x}' .

También importante es la siguiente observación: notemos que si tenemos un problema con simetría acimutal, el potencial sobre el eje z es ($\theta = 0$, $\cos \theta = 1$, $P_l(\cos \theta) = 1$)

$$\Phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l z^l + \frac{B_l}{z^{l+1}} .$$

En consecuencia, si hay simetría acimutal, y de algún modo conseguimos evaluar el potencial sobre el eje z como una serie de potencias, eso significa haber encontrado los coeficientes A_l y B_l de la expansión anterior. Dada la unicidad de la expansión, entonces, el potencial en todo el espacio se obtiene simplemente reemplazando z por r , y multiplicando cada término de la serie por $P_l(\cos \theta)$. Veamos un ejemplo a continuación:

Ejemplo Consideremos un anillo de radio a y densidad de carga q , paralelo a y a una distancia b del plano x - y . Deseamos encontrar el potencial debido a este anillo cargado en todo el espacio.



Este problema tiene claramente simetría acimutal. Además, es particularmente sencillo encontrar el potencial en el eje z , que es el eje de simetría del anillo. En efecto, todos los puntos del anillo se encuentran a la misma distancia R de un punto dado sobre el eje z . Calcular el potencial en dicho punto como una suma sobre todos los puntos del anillo resulta muy simple. Si $\lambda = q/2\pi a$ es la densidad lineal de carga, entonces

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a d\theta}{R} = \frac{q}{2a\pi} \frac{2a\pi}{R} = \frac{q}{(z^2 + c^2 - 2zc \cos \alpha)^{1/2}},$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$ y $\alpha = \arctan(a/b)$. Ahora podemos distinguir dos casos:

$$\begin{aligned} \text{si } z > c, \quad \Phi(z) &= q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{z^{l+1}} P_l(\cos \alpha), \\ \text{si } z < c, \quad \Phi(z) &= q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha). \end{aligned}$$

Hemos entonces expresado el potencial en el eje z como una serie de potencias, y los coeficientes tienen la forma que esperábamos, $\sim z^l$ para z pequeño, y $\sim z^{-(l+1)}$ para z grande.

Ahora podemos afirmar que el potencial en *todo* el espacio se obtiene simplemente multiplicando por $P_l(\cos \theta)$ todos los términos de la serie:

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta),$$

donde $r_{<}(r_{>})$ es el más pequeño (grande) de r y c .

En particular para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ (el anillo se encuentra sobre el plano x - y , y el punto de observación está sobre el mismo plano),

$$\Phi\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} [P_l(0)]^2.$$

Pero

$$\begin{aligned} P_{2k}(0) &= \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!}, \\ P_{2k+1}(0) &= 0, \end{aligned}$$

luego

$$\Phi(r) = q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{2k}}{r_{>}^{2k+1}} \left[\frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \right]^2 .$$

Volviendo a los problemas sin simetría acimutal necesariamente, de modo que la solución de la ecuación de Laplace puede ser escrita

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

el potencial dentro de una esfera de radio R donde se ha especificado sobre su superficie el potencial $V(\theta, \phi)$ vendrá dado por la condición:

$$V(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} R^l Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

donde

$$A_{lm} = \frac{1}{R^l} \int dR Y_{lm}^*(\theta, \phi) V(\theta, \phi) .$$

Finalmente, recordemos que hemos expresado $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ como una serie de potencias de $|\vec{x}|$ y $|\vec{x}'|$, involucrando el coseno del ángulo γ entre ambos vectores. A su vez, si \vec{x} y \vec{x}' están determinados por los ángulos $\Omega = (\theta, \phi)$, $\Omega' = (\theta', \phi')$, conocemos una relación entre $P_l(\cos \theta)$ y los armónicos esféricos evaluados en Ω y Ω' [(18.57)]. Esto da origen al *Teorema de adición de los Armónicos Esféricos*:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

Esta expresión nos permite escribir el potencial debido a una carga puntual, separando entre sí las coordenadas asociadas a \vec{x} y a \vec{x}' . Esto resulta útil al integrar sobre una de las variables, digamos \vec{x}' (que puede representar la posición de la distribución de carga), manteniendo a la otra coordenada (\vec{x}) constante (punto de observación).

En definitiva, esta fórmula de adición no hace sino recordarnos que cualquier función angular (en particular la distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio) puede ser expandida en la base de armónicos esféricos.

21.4. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

La ecuación a resolver es:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 .$$

Separando variables:

$$\Phi(\rho, \theta, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z) ,$$

queda

$$\begin{aligned} QZ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{QZ}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + RQ \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho} \frac{dR}{d\rho} + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \end{aligned}$$

La única dependencia en z está en el último término, y la única dependencia en ϕ está en el penúltimo término, por tanto deben ser iguales a una constante, que llamamos k^2 y $-\nu^2$, respectivamente. Entonces quedan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z &= 0 , \\ \frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \nu^2 Q &= 0 , \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R &= 0 . \end{aligned}$$

Las ecuaciones para z y ϕ tienen solución:

$$Z = e^{\pm kz} , \quad Q = e^{\pm i\nu\phi} .$$

Para que la función sea univaluada cuando $0 \leq \phi \leq 2\pi$ es permitido, ν debe ser entero. k , por su parte, puede ser cualquier número real en principio.

Si $x = k\rho$, la ecuación radial queda

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 ,$$

que es la ecuación de Bessel, con soluciones $J_\nu, J_{-\nu}$. Éstas soluciones son linealmente independientes sólo si $\nu \notin \mathbb{Z}$. Si todos los ángulos entre 0 y 2π son permitidos, que es lo usual, entonces ν es entero y no son independientes, y hay que usar como base de soluciones las funciones de Bessel y de Neumann, J_ν y N_ν , con

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} ,$$

o bien las funciones de Hankel:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) , \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) . \end{aligned}$$

Si las soluciones deben ser regulares en el origen, sin embargo, las soluciones a usar son solamente las funciones de Bessel $J_\nu(x)$. La sucesión $\{\sqrt{\rho} J_\nu(x_{\nu n} \frac{\rho}{a})\}$ con ν fijo, $J_\nu(x_{\nu n}) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ es un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $0 \leq \rho \leq a$, cumpliéndose que

$$\int_0^a \rho J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nn'} .$$

Al escribir una función arbitraria de ρ como combinación lineal de esta base se obtiene la llamada expansión en serie de Fourier Bessel:

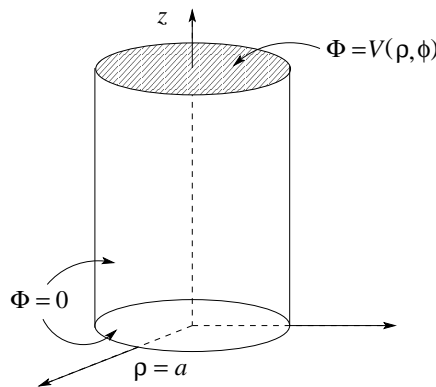
$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_{\nu} \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \quad 0 \leq \rho \leq a ,$$

con

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_{\nu} \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) d\rho .$$

De lo indicado en la sección 19.9 se sigue que esta expansión es apropiada cuando la función es nula en $\rho = 0$, es decir, cuando las condiciones de borde sobre el manto del cilindro son tipo Dirichlet. Si las condiciones de borde son tipo Neumann, de modo que la derivada de la función se debe anular en $\rho = a$, entonces es posible una expansión en la base $\sqrt{\rho} J_{\nu}(y_{\nu n} \frac{\rho}{a})$ donde $y_{\nu n}$ es la n -ésima raíz de $\frac{dJ_{\nu}(x)}{dx}$.

Ejemplo Busquemos el potencial en el interior de un cilindro cuya tapa superior se encuentra a potencial $V(\rho, \theta)$:



Todos los ángulos ϕ están permitidos, por lo tanto podemos escribir las funciones en cada variable en la forma:

$$\begin{aligned} Q(\phi) &= A \sin m\phi + B \cos m\phi , \\ Z(z) &= \sinh kz , \\ R(\rho) &= C J_m(k\rho) + D N_m(k\rho) . \end{aligned}$$

La expresión para $Z(z)$ satisface la condición de borde $Z(0) = 0$. Como además Φ es finito en $\rho = 0$, debe tenerse

$$k = k_{mn} = \frac{x_{mn}}{a} , \quad n = 1, 2, 3 ,$$

donde x_{mn} es la raíz n -ésima de J_m i.e. $J_m(x_{mn}) = 0$. La solución general se escribe entonces

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) [A_{mn} \sin(m\phi) + B_{mn} \cos(m\phi)] .$$

Imponiendo la condición de borde en $z = L$:

$$V(\rho, \phi) = \sum_{mn} \sinh(k_{mn}L) J_m(k_{mn}\rho) [A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi] .$$

Los coeficientes del potencial A_{mn} , B_{mn} se encuentran invirtiendo esta doble serie de Fourier Bessel. Usando las relaciones de ortogonalidad para senos, cosenos y las funciones de Bessel:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{2 \operatorname{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \sin m\phi , \\ B_{mn} &= \frac{2 \operatorname{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \cos m\phi . \end{aligned}$$

21.5. Otras aplicaciones

21.5.1. Modos normales de oscilación

Un sistema oscilatorio se puede caracterizar por una variable $\psi(\vec{r}, t)$ (escalar o vectorial) que depende del espacio y el tiempo, y que satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 ,$$

donde v es la velocidad de propagación de las oscilaciones. ψ puede ser la altura de cada punto de una cuerda tensada horizontalmente, la presión de un gas, el ángulo de un péndulo respecto a la posición de equilibrio, el campo electromagnético, etc. Los modos normales de un sistema oscilatorio son aquellos en que todas las partes móviles del sistema oscilan con una misma frecuencia, ω . En este caso, la dependencia temporal de ψ , para todo \vec{r} , se puede escribir como un factor $e^{i\omega t}$, en cuyo caso la ecuación de onda se convierte en la *ecuación de Helmholtz*:

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = 0 ,$$

con

$$k = \omega/v .$$

Al involucrar el operador Laplaciano, esperamos que sus soluciones (es decir, la amplitud de los modos normales de oscilación de un sistema general), se pueda escribir en términos de funciones sinusoidales, armónicos esféricos o funciones de Bessel, según la simetría del problema. Revisemos algunos ejemplos.

Modos normales de un gas dentro de una cavidad esférica de radio a

La ecuación de Helmholtz se escribe en este caso:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 .$$

Separando variables, escribiendo $\psi(\vec{r}) = R(r)P(\theta)Q(\phi)$, es fácil advertir que las ecuaciones angulares serán las mismas que para la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (Sec. 21.3), de modo que la parte angular corresponderá a los armónicos esféricos:

$$P(\theta)Q(\phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

La ecuación radial, en tanto, queda:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) + k^2 R(r) = 0 .$$

Con el cambio de variables

$$R(r) = U(r)/\sqrt{r} ,$$

queda

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right] U(r) = 0 .$$

Con $r = kx$, queda

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{x^2} \right] U(x) = 0 ,$$

que es la ecuación de Bessel (19.1) con $\alpha = l + 1/2$. Así, la solución radial se puede escribir en la forma

$$R(r) = A_{lm} \frac{J_{l+1/2}(kr)}{r^{1/2}} + B_{lm} \frac{N_{l+1/2}(kr)}{r^{1/2}} ,$$

que se puede reescribir en términos de las *funciones de Bessel esféricas*:

$$\begin{aligned} j_l(x) &= \frac{\pi}{2x} J_{l+\frac{1}{2}}(x) , \\ n_l(x) &= \frac{\pi}{2x} N_{l+\frac{1}{2}}(x) . \end{aligned}$$

Como sus equivalentes cilíndricos, $j_l(x)$ es regular en el origen y $n_l(x)$ es singular en el origen.

Estando interesados en el interior de una cavidad esférica, nos quedamos con $j_l(x)$. Al imponer la condición de borde de paredes fijas, es decir $\psi(r = a, \theta, \phi) = 0$, se obtiene

$$k = k_{ln} = \frac{x_{ln}}{a} ,$$

con x_{ln} es n -ésimo cero de $j_l(x)$.

Ahora bien, cada k corresponde a un modo normal (es decir, a un modo caracterizado por una única frecuencia, dada por $\omega = ck$). Los modos normales de la cavidad esférica son entonces

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = j_l \left(x_{ln} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

asociados a frecuencias

$$\omega_{ln} = vk_{ln} = v \frac{x_{ln}}{a} .$$

v es la velocidad del sonido en el gas. Observemos que la frecuencia no depende del índice azimutal m . Es decir, existen $2l + 1$ (la cantidad de m 's posibles para cada l) modos normales con la misma frecuencia (el espectro es degenerado).

Finalmente, la solución general entonces es una combinación lineal sobre todos los modos normales:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{nlm} \psi_{nlm}(r, \theta, \phi) e^{i\omega_{ln} t} .$$

Los coeficientes A_{nlm} se obtienen al imponer una condición inicial. Por ejemplo, si inicialmente el gas al interior de la cavidad esférica está dado por una función $\psi_0(r, \theta, \phi)$, los A_{nlm} se obtendrán invirtiendo la serie de Fourier

$$\psi_0(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{nlm} j_l \left(x_{ln} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) .$$

Membrana circular

Consideremos los modos de oscilación de una membrana circular de radio a , densidad de masa superficial σ , sometida a una tensión T , con extremos fijos. En este caso, la ecuación de Helmholtz involucra el Laplaciano en dos dimensiones, conveniendo escribirlo en coordenadas polares:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right] \psi(\rho, \phi) = 0 .$$

La separación de variables, $\psi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$, de modo análogo a lo realizado en la sección 21.2, da las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R &= 0 , \\ \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + \nu^2 \Psi &= 0 . \end{aligned}$$

La ecuación angular tiene soluciones armónicas, $e^{\pm i\nu\phi}$. La monovaluación de la solución en el intervalo $[0, 2\pi]$ indica que $\nu \in \mathbb{Z}$. La ecuación radial, en tanto, es la ecuación de Bessel, con solución $J_\nu(k\rho)$ (la otra solución linealmente independiente, $N_\nu(k\rho)$, no es aceptable físicamente, pues diverge en $\rho = 0$). Además, la condición de borde fijo implica que

$$k = k_{\nu n} = \frac{x_{\nu n}}{a} ,$$

con $x_{\nu n}$ el n -ésimo cero de $J_\nu(x)$. Cada $k_{\nu n}$ está asociado a una frecuencia

$$\omega_{\nu n} = v k_{\nu n} = v \frac{x_{\nu n}}{a} , \quad (21.15)$$

donde

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

es la velocidad de propagación de las vibraciones sobre la membrana.

A diferencia de lo que ocurre con las oscilaciones de una cavidad esférica, la frecuencia depende de todos los índices (ν y n) presentes en el sistema, luego no hay degeneración del espectro. Todos los modos normales tienen distinta frecuencia. Estos modos están descritos por la función

$$\psi_{\nu n}(\rho, \theta, t) = J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) (A_\nu \sin(\nu\phi) + B_\nu \cos(\nu\phi)) e^{i\omega_{\nu n} t} , \quad (21.16)$$

y la solución general por una combinación lineal de estos modos:

$$\psi(\rho, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{\nu} \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) (A_{\nu} \sin(\nu\phi) + B_{\nu} \cos(\nu\phi)) e^{i\omega_{\nu n} t} .$$

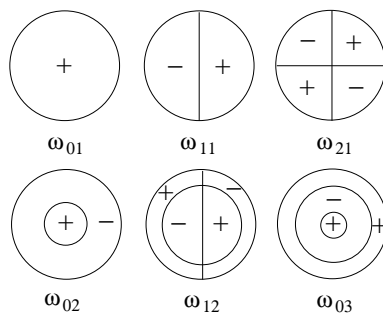
Dado que las frecuencias (21.15) son proporcionales a los ceros de las funciones de Bessel, es posible conocer la razón entre las frecuencias de oscilación de la membrana circular. Las seis frecuencias más bajas son:

$$\begin{aligned} \omega_{01} &, \\ \omega_{11} &= 1,593\omega_{01} , \\ \omega_{21} &= 2,136\omega_{01} , \\ \omega_{02} &= 2,295\omega_{01} , \\ \omega_{12} &= 2,917\omega_{01} , \\ \omega_{03} &= 3,598\omega_{01} . \end{aligned}$$

Para dibujar estos modos normales, basta notar que su amplitud se puede reescribir en la forma:

$$J_{\nu} \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \cos(\nu\phi + \alpha_{\nu}) ,$$

con α_{ν} una cierta fase, que podemos considerar nula si nos interesa sólo un modo normal a la vez. Entonces advertimos que la frecuencia $\omega_{\nu n}$ corresponde a un modo de oscilación con n nodos radiales —contando el borde fijo como un nodo radial— y ν nodos angulares. Los primeros seis modos normales tienen la siguiente forma:



En esta figura, las líneas indican líneas nodales, el signo + indica regiones que en un tiempo dado se desplazan saliendo del plano de la página, y el signo - regiones que en el mismo tiempo se despaizan entrando al plano de la página.

21.6. Ecuación de difusión

Si u es una cantidad conservada, entonces uno puede afirmar que la variación de u dentro de un volumen sólo es posible porque hay un flujo de esa cantidad a través de las paredes del volumen:

$$\frac{d}{dt} \int_V d\vec{r} u(\vec{r}, t) = - \int_{S[V]} d\vec{a} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) , \quad (21.17)$$

donde \vec{J} es una corriente asociada a u . Del teorema de la divergencia se sigue entonces que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 . \quad (21.18)$$

Puesto que se espera en procesos de difusión que exista corriente sólo si hay gradientes de concentración, y que la dirección de la corriente sea tal que vaya de puntos de alta concentración a puntos de baja concentración (tendiendo a homogeneizar el sistema), se supone típicamente que

$$\vec{J} = -\lambda \vec{\nabla} u(\vec{r}, t) , \quad (21.19)$$

con λ alguna constante. Se tiene entonces

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 . \quad (21.20)$$

Por ejemplo, la ecuación de difusión del calor es de la forma (21.19), con $\lambda = K/\sigma\rho$, donde K es la conductividad térmica, σ el calor específico y ρ la densidad.

Consideremos entonces el problema de la difusión del calor en el interior de un paralelepípedo de aristas a, b, c , cuyas paredes están a temperatura cero, y que inicialmente tiene un perfil de temperatura $u_0(x, y, z)$. El dibujo es esencialmente el mismo que el de la página 230, así que no lo repetiremos.

Al separar variables en (21.20), escribiendo $u(\vec{r}, t) = R(\vec{r})T(t)$, obtenemos

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{1}{\lambda T} \frac{dT}{dt} .$$

Ambos términos deben ser entonces igual a una constante, que llamaremos $-k^2$. Entonces obtenemos, para la parte temporal,

$$\frac{dT}{dt} + k^2 T = 0 ,$$

que tiene por solución

$$T(t) = e^{-k^2 t} ,$$

lo que indica que, si k es real, un perfil inicial decaerá exponencialmente hacia la situación de equilibrio. La parte espacial, en tanto, es

$$\nabla^2 R + k^2 R = 0 ,$$

que no es sino la ecuación de Helmholtz.

Dada la simetría del problema, la escribimos en coordenadas cartesianas y separamos variables, $R(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$, obteniéndose

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0 . \quad (21.21)$$

Concluimos entonces que cada término debe ser igual a una constante. En particular, podemos escribir $X''/X = -\alpha^2$, $Y''/Y = -\beta^2$, $Z''/Z = -\gamma^2$, de modo que

$$\begin{aligned} X'' + \alpha^2 X &= 0 , \\ Y'' + \beta^2 Y &= 0 , \\ Z'' + \gamma^2 Z &= 0 . \end{aligned}$$

Notando que deben satisfacerse las condiciones de borde $X(0) = Y(0) = Z(0) = X(a) = Y(b) = Z(c) = 0$, concluimos rápidamente que las soluciones son

$$\begin{aligned} X(x) &= \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} n_x x \right) , \\ Y(y) &= \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} n_y y \right) , \\ Z(z) &= \text{sen} \left(\frac{\pi}{c} n_z z \right) , \end{aligned}$$

con n_x, n_y, n_z enteros. Reemplazando estas soluciones en (21.21) encontramos que

$$k = k_{n_x, n_y, n_z} = \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2} . \quad (21.22)$$

La base de soluciones de (21.20) es entonces

$$u_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z, t) = \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} n_x x \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{b} n_y y \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{c} n_z z \right) e^{-\pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{c}\right)^2 \right] t} , \quad (21.23)$$

y la solución general es de la forma

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} A_{n_x, n_y, n_z} u_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z, t) . \quad (21.24)$$

Por ejemplo, si inicialmente tenemos un cubo de arista a , con un perfil de temperatura inicial sinusoidal en todas direcciones:

$$u(x, y, z, 0) = T_0 \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} x \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} y \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} z \right) , \quad (21.25)$$

es inmediato verificar, al imponer esta condición inicial sobre (21.24), que

$$A_{n_x, n_y, n_z} = T_0 \delta_{n_x, 1} \delta_{n_y, 1} \delta_{n_z, 1} , \quad (21.26)$$

y que la evolución temporal de este perfil será

$$u(x, y, z, t) = T_0 \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} x \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} y \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{a} z \right) e^{-\frac{3\pi^2}{a^2} t} . \quad (21.27)$$

21.7. Difusión con creación de partículas

Consideremos la evolución de neutrones en material fisionable. Cuando un neutrón impactar sobre un núcleo de U^{235} —por ejemplo—, éste se fisiona y se liberan nuevos neutrones, que pueden continuar la reacción en cadena. En principio, la densidad de neutrones es una cantidad conservada, salvo por el hecho de que se están generando nuevos neutrones continuamente. Si $n(\vec{r}, t)$ es la densidad de neutrones, \vec{J} su corriente, y si suponemos que la creación de neutrones ocurre a una tasa temporal $1/\tau$, y es proporcional a la densidad de neutrones

(es decir, se generan más neutrones en regiones donde hay mayor cantidad de ellos), podemos reescribir la “ecuación de conservación” (21.17) para los neutrones en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_V d\vec{r} n(\vec{r}, t) = - \int_{S[V]} d\vec{a} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\tau} \int_V d\vec{r} n(\vec{r}, t) . \quad (21.28)$$

Al usar el teorema de la divergencia para el término de superficie, y poner una ley para la corriente de la forma (21.19), es claro que se obtendrá la siguiente ecuación para la densidad:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \lambda \nabla^2 n + \frac{1}{\tau} n ,$$

es decir,

$$\nabla^2 n - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\lambda \tau} n = 0 . \quad (21.29)$$

Esta ecuación de continuidad modificada describe el comportamiento de la densidad de neutrones en material fisionable, considerando creación de neutrones a una tasa proporcional a su densidad.

Separando variables en la forma $n(\vec{r}, t) = R(\vec{r})T(t)$, se tiene:

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{1}{\lambda T} \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\lambda \tau} .$$

Cada lado debe ser igual a una constante, que llamaremos $-k^2$, de modo que quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)R &= 0 , \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\tau} (1 - k^2 \lambda \tau) T , \end{aligned}$$

es decir nuevamente la ecuación de Helmholtz para la parte espacial, y una parte temporal de la forma

$$T(t) = e^{\frac{1}{\tau}(1-k^2\lambda\tau)t} .$$

Estudiemos ahora una geometría específica: una esfera de radio a que contiene U^{235} , que impide el ingreso o fuga de neutrones por sus paredes, de modo que $n(r = a, \theta, \phi, t) = 0$. Debido a la simetría esférica, el problema para la parte espacial es el mismo que para los modos normales dentro de una cavidad esférica (Sec. 21.5.1), es decir,

$$k = k_{ln} = \frac{x_{ln}}{a} \quad (21.30)$$

y

$$R(\vec{r}) = j_l \left(x_{ln} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) , \quad (21.31)$$

con $j_l(x)$ la función de Bessel esférica e $Y_{lm}(\theta, \phi)$ los armónicos esféricos. Con (21.30) y (21.31), la base de soluciones de (21.29) es

$$n_{lnm}(\vec{r}, t) = j_l \left(x_{ln} \frac{r}{a} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{\frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{x_{ln}^2}{a^2} \lambda \tau \right) t} , \quad (21.32)$$

La evolución de la densidad de neutrones en esta esfera de material fisionable, para un perfil de densidad inicial dado, es de la forma

$$n(\vec{r}, t) = \sum_{nlm} A_{lnm} n_{lnm}(\vec{r}, t) . \quad (21.33)$$