# Cálculo de variaciones

## Métodos Matemáticos de la Física II

# Aplicaciones

- En todas las áreas de la Física
  - Mecánica clásica
  - Mecánica cuántica
  - Relatividad general
  - Nuevas teorías de unificación
- Conceptualmente es muy sencilla
- Matemáticamente es muy limpia (no hay trucos)

# Funcional

Una función relaciona un número con otro número

$$x \rightarrow y(x)$$

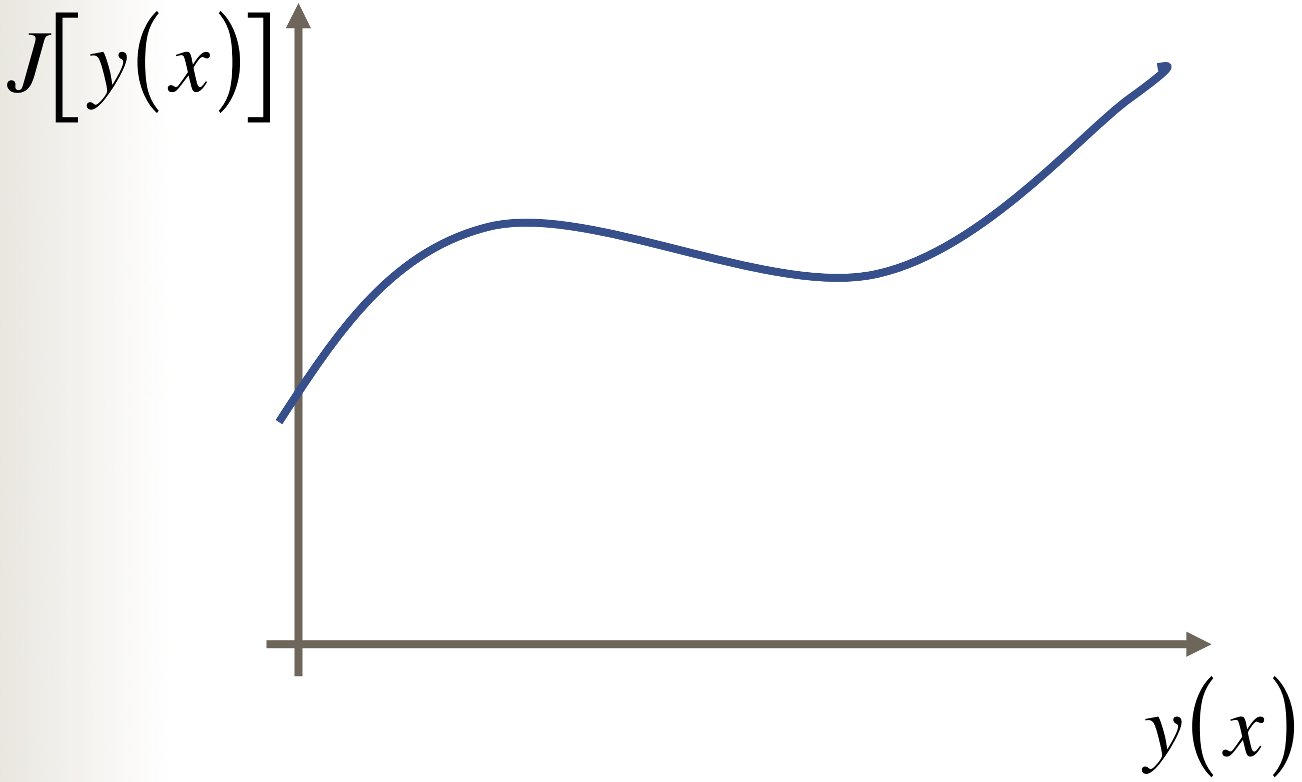
Un funcional relaciona una función con un número

$$y(x) \rightarrow J[y(x)]$$

# Objetivo del Cálculo de Variaciones

- Minimizar o maximizar un funcional
- Encontrar aquella función con la cual se obtiene el menor (o mayor) valor posible para el funcional.

# Gráfica de un funcional



# Caso más simple:una variable dependiente y una independiente

$$J[y] = \int_a^b f(y, y_x, x)\,dx$$

$$y_x = \frac{dy}{dx}$$

# Problema

Encontrar $y(x)$ que maximice o minimice la integral

$$\longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0$$

Ecuación de Euler

# Demostración

$$y(x) = u(x) + \square\square(x)$$

Función de prueba

Función minimizadora

Parámetro real

Función en $C_0(a,b)$

# Condición de minimización

$$\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

# Leonhard Euler

15 de abril de 1707 Basel, Suiza

18 de septiembre de 1783,
San Petersburgo, Rusia

http://www.spbu.ru/e/Education/Faculties/Mathematics/

http://www.spbu.ru/e/Education/Faculties/Physics/

# Aplicaciones

- ¿Cómo demuestro que la distancia más corta entre dos puntos en un plano se consigue por medio de una recta?
- ¿Cuál es el funcional que nos interesa minimizar?

# Buscamos el funcional

$$J = \int_{x_1}^{x_2} ds$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{1 + y_x^{\,2}}\,dx$$

$$\longrightarrow \quad J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^{\,2}}\,dx$$

corto tiempo

# Braquis - tocrona


¿A lo largo de qué curva que va de A hasta B, una partícula se desliza en el menor tiempo?

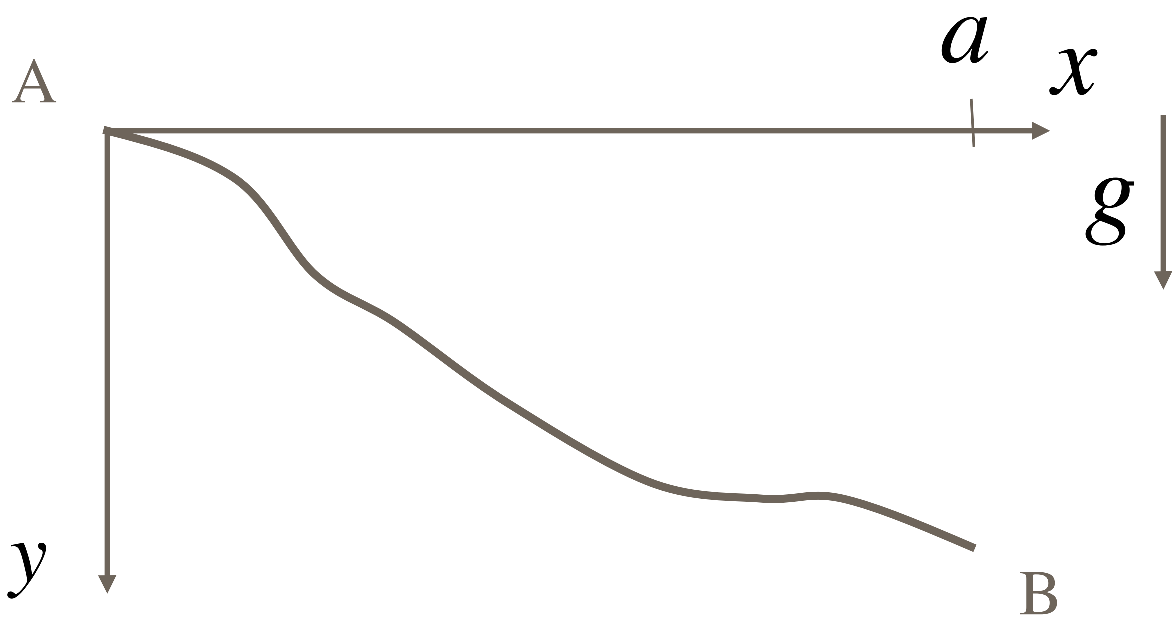
# ¿Cuál es el funcional?

$$J = T = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$dt = \frac{ds}{v}$$

¿Cómo expresamos la velocidad en todo tiempo?

# Ponemos los ejes




Conservación de la energía mecánica

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

# Funcional

$$J = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y_x^{2}}{2gy}}\,dx$$

Se debe agregar la condición

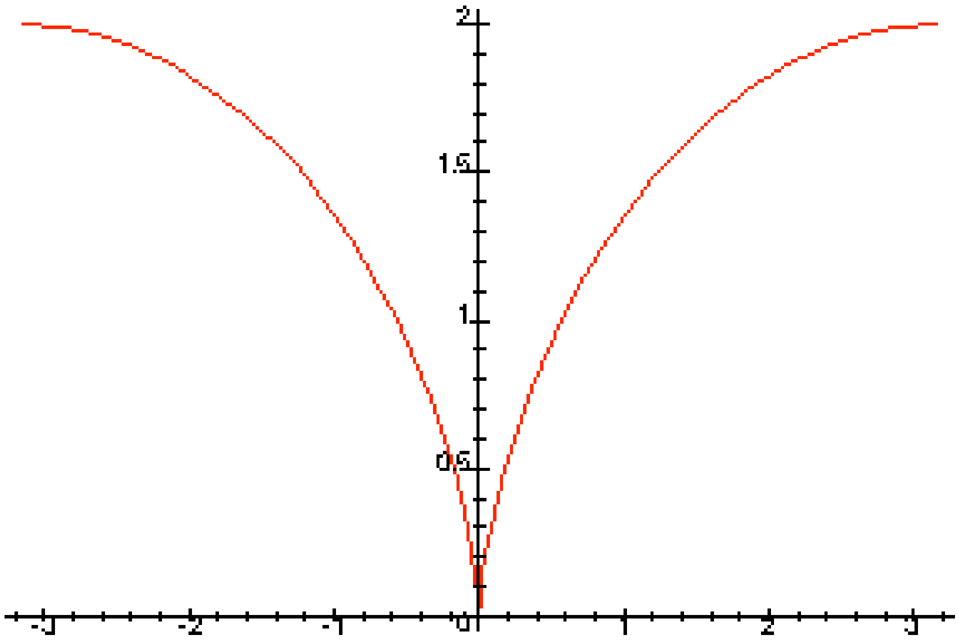
$$y(a) = b$$

# A trabajar 5 minutos

Encontrar la ecuación diferencial que permite encontrar la curva que minimiza el tiempo.

# Gráfica de la solución paramétrica

> plot([t-sin(t),1-cos(t),t=-Pi..Pi]);



# Solución

- Mañana se resolverá el problema con todo detalle en la sesión de ejercicios
  - Salón 2-130
  - 18:30 - 19:30

# Generalización a varias variables dependientes

$$J[u,v] = \int_a^b f\left(u,v,u_x,v_x,x\right)dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) = 0$$

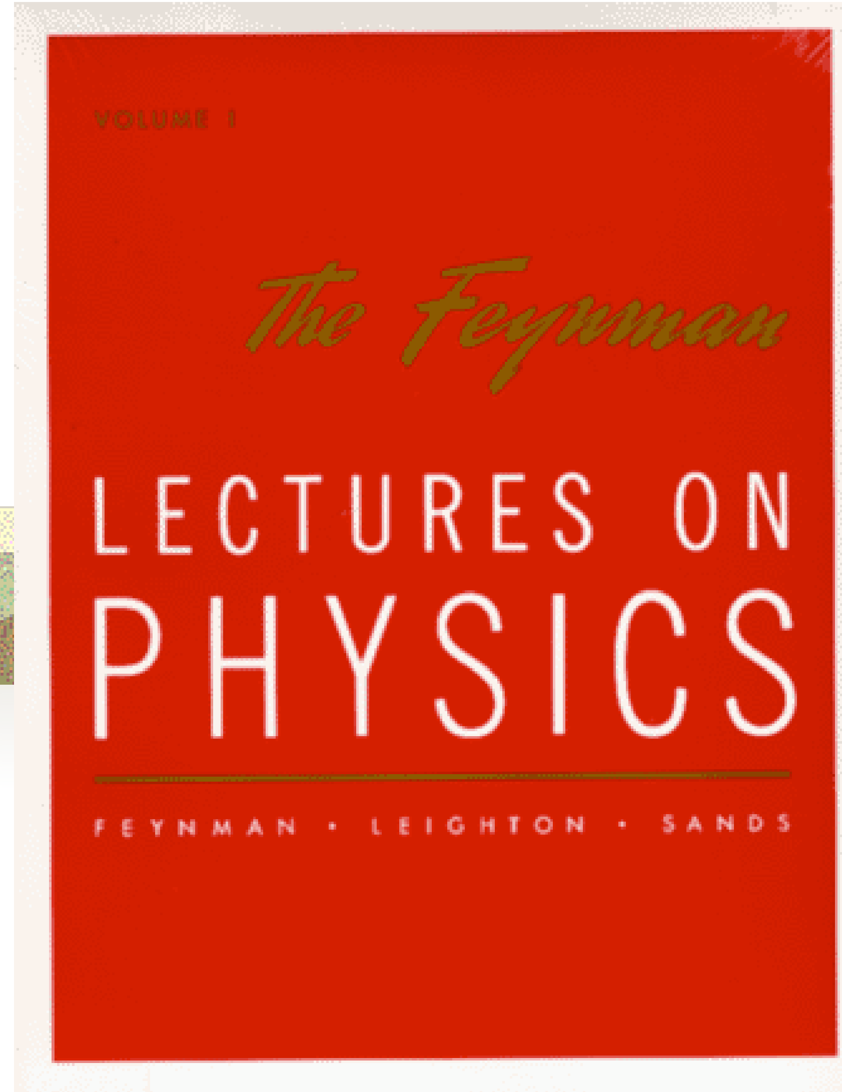
$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right) = 0$$

ETC

# Aplicaciones Interesantes: Principio de Hamilton

o de mínima acción

# Lectura




El principio de mínima acción, capítulo 19, volumen 2

# Mecánica Clásica

- Visión equivalente a las ecuaciones de Newton
- Al mundo clásico le gusta vivir en el mínimo de la “acción”
- ¿Qué es la acción?

# Acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$$

Si un sistema físico está formado de N partículas, entonces

$$i = 1..3N$$

$$L = T - V$$

Se llama lagrangiano y es la energía cinética menos la energía potencial.

# Ejemplo No. 1 - Partícula en caída libre


$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \qquad \longrightarrow \qquad L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy$$

$$V = mgy$$

Encontrar la ecuación de movimiento

# Ejemplo No. 2 - Partícula en el plano *x-y*

$$T = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right)$$

$$V = mgy$$

Encontrar las ecuaciones de movimiento

# Ejemplo No. 3 - Movimiento en el plano *x-y*

Partícula sometida a un potencial que depende solamente de la distancia con el centro de fuerza

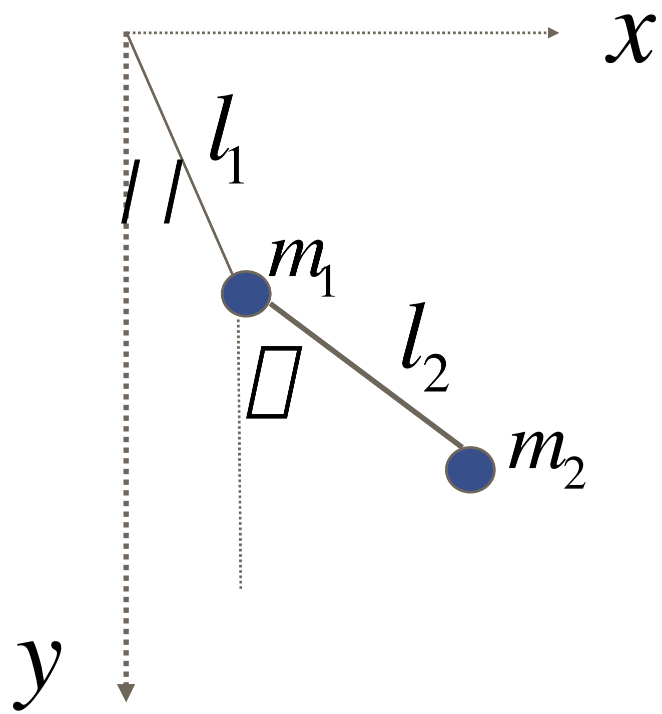
$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$V = V(r)$$

Encontrar las ecuaciones de movimiento

# Ejemplo No. 4 - Péndulo doble



# Varias variables independientes

$u$ ← Variable dependiente

$x, y$ ← Variable independiente

$$J[u] = \iint f\left(u, u_x, u_y, x, y\right) dxdy$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

# Ingredientes de la demostración

Se define

$$u(x,y) = \tilde{u}(x,y) + \square\square(x,y)$$

En vez de hacer una integración por partes, se utiliza el Teorema de Green. Así,

$$\frac{\partial f}{\partial u} \square \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u_x}\right] \square \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u_y}\right] = 0$$

# Ejemplo - Cuerda vibrante

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{L} \frac{1}{2} \left[ \rho(x) {y_t}^2 - T {y_x}^2 \right] dx\,dt$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda

# Quiz (7 minutos)

Encuentra el máximo de la función

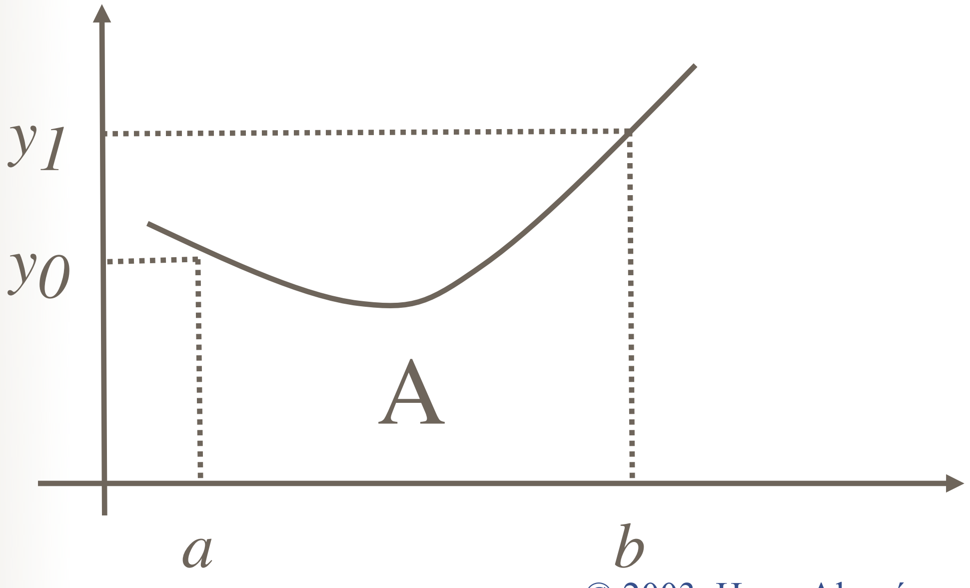
$$f(x,y) = xy$$

tal que

$$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$$

# Problemas con ligaduras

Encontrar la curva $C$ de longitud $L$ que pase por los puntos $(a,y_0)$ y $(b,y_1)$ tal que el área encerrada por $C$, el eje $x$ y las rectas $x=a$, $x=b$ sea máxima.




Problema isoperimétrico

# Multiplicadores de Lagrange

# Repaso - Multiplicadores de Lagrange

Queremos maximizar una función de dos variables

$$f(x,y)$$

Se deben satisfacer las condiciones

$$f_x = 0$$

$$f_y = 0$$

# Repaso - Multiplicadores de Lagrange

Si tenemos la siguiente condición $g(x,y) = cte$

Entonces $df = f_x dx + f_y dy = 0$

No podemos decir que $f_x = 0$, $f_y = 0$ ya que *dx* y *dy* no son independientes.

$$dg = g_x dx + g_y dy = 0$$

# Repaso - Multiplicadores de Lagrange

Entonces

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = \lambda$$

Finalmente

$$f_x - \lambda g_x = 0$$

$$f_y - \lambda g_y = 0$$

# Problema equivalente

Minimización de la siguiente función

$$f(x,y) \square \lambda g(x,y)$$

y nos olvidamos de la ligadura.

- $\lambda$ es un multiplicador de Lagrange
- $\lambda$ se ajusta de tal modo que *g(x,y)* tome el valor correcto

# Variaciones sujetas a ligaduras

$$J[y] = \int_a^b f(y, y_x, x)\,dx$$

$$G[y] = \int_a^b g(y, y_x, x)\,dx = K$$

No podemos usar el método visto anteriormente

$$y = u + \square\square$$

Sino, $$y = u + \square\square + \square\square$$

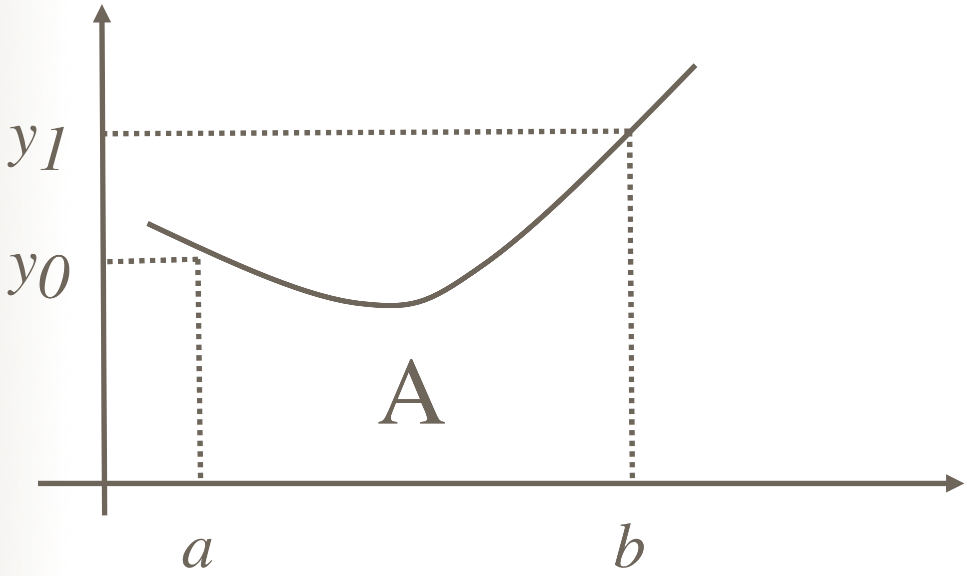
# Variaciones sujetas a ligaduras

- Tendremos que minimizar la función *J(□,□)* con la condición *G (□,□)=K*
- Que es equivalente a minimizar la función *J(□,□)-□G (□,□)*
- Por lo tanto la ecuación de Euler queda

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f - \lambda g\right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y_x}\left(f - \lambda g\right)\right] = 0$$

# A trabajar en planteamiento del problema y ecuaciones

Encontrar la curva $C$ de longitud $L$ que pase por los puntos $(a,y_0)$ y $(b,y_1)$ tal que el área encerrada por $C$, el eje $x$ y las rectas $x=a$, $x=b$ sea máxima.




Problema isoperimétrico

# Algo de mecánica cuántica

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi = E\psi$$

$\psi$ es la función de onda y tiene una interpretación probabilística.

$\psi^2 dx$ es la probabilidad de encontrar una partícula entre $x$ y $x+dx$.

$$\longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2 dx = 1$$

# ¿Qué se puede hacer con esa ecuación diferencial?

- Cuando se tiene una partícula sometida a un potencial, permite encontrar los posibles estados cuánticos y sus energías.
- Muchas veces interesa conocer el estado de menor energía que puede tener una partícula, por ejemplo en átomos. Este estado es el más estable posible.
- La solución analítica exacta de la ecuación solamente es posible en pocos casos.

# Formulación variacional de la mecánica cuántica

Funcional de energía

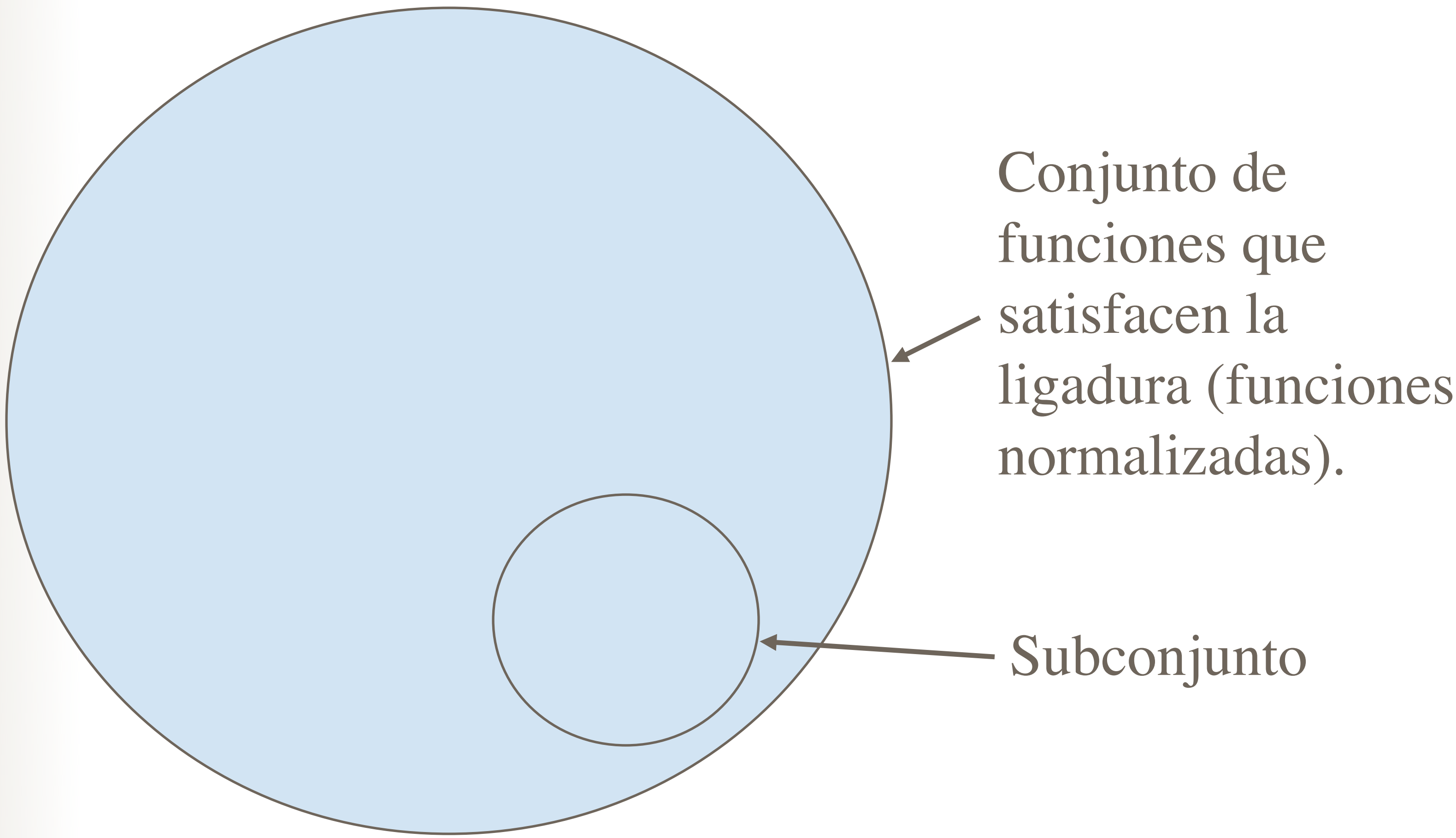
$$E[\psi] = \int \left( \frac{\hbar^2}{2m}\psi_x^{\,2} + V(x)\psi^2 \right) dx$$

Ligadura

$$\int \psi(x)^2 dx = 1$$

"El estado de menor energía de un sistema cuántico se obtiene al minimizar el funcional de energía sometido a la ligadura. El multiplicador de Lagrange corresponde a la energía del sistema cuántico"

# ¿Cómo se puede utilizar esta nueva formulación?



# ¿Cómo se puede utilizar esta nueva formulación?

Además siempre se cumple lo siguiente:

$$E \;\square\; E\left[\square\right]$$

Cualquier función admisible

$$E \;\square\; E\left[\square_{\square}\right]$$

En el subconjunto

La idea es minimizar el funcional dentro del subconjunto.

# Ejemplo - Oscilador armónico

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2}$$

Funciones de prueba gaussianas.

1. Encontrar *A* tal que la función de prueba esté normalizada.
2. Integrar el funcional para encontrar *E(a)*
3. Minimizar la función *E(a)*

# Resultado

$$E(a) = \frac{\hbar^2 a}{2m} + \frac{m\omega^2}{8a}$$

$$\longrightarrow \quad E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

Que corresponde al valor exacto.

# Extensión a 3-d

Funcional de energía

$$E[\psi] = \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \left| \nabla \psi \right|^2 + V(\vec{r})\psi^2 \right] d^3 r$$

Ligadura

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \psi(\vec{r}) \right|^2 d^3 r = 1$$

# Problema

Átomo de hidrógeno

$$V(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Encontrar una estimación para la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno.

# Proyecto Final

- Proyecto Parcial 1
  - Ver la lista publicada con los artículos seleccionados
  - Hojear algunos en la biblioteca
  - Seleccionar 5 por orden de interés
  - Enviar correo electrónico indicando la lista
  - Se les indicará el artículo seleccionado

# Fecha del Primer Parcial

6 de septiembre, 9:00 AM