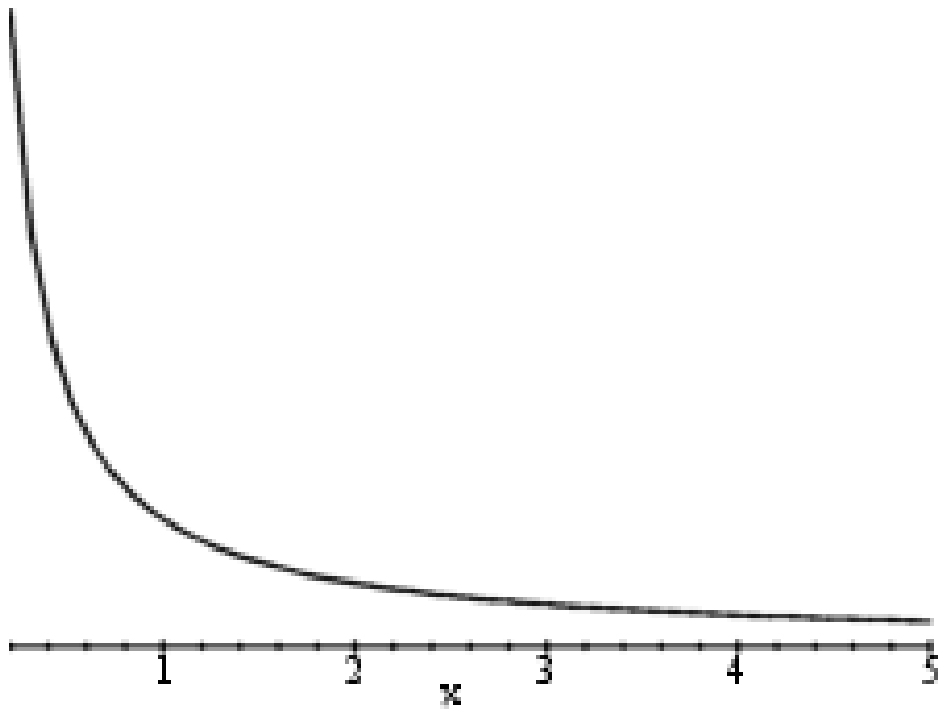
Física calor

Antalcides olivo

Universidad del Norte

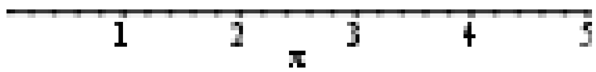
e-mail: aolivo@uninorte.edu.co

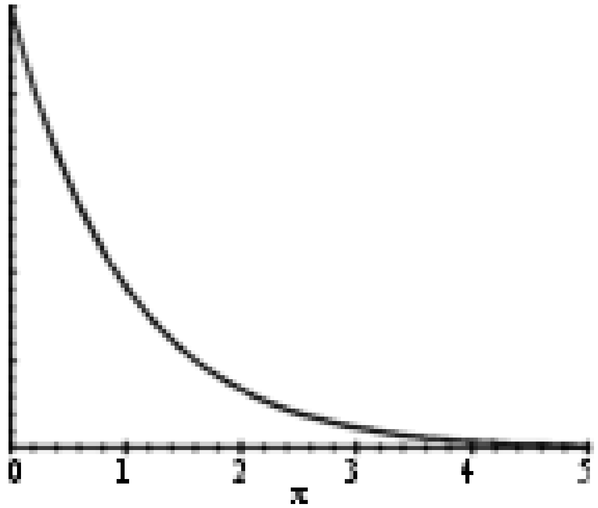


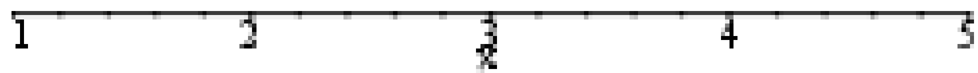
1. Inverso

2. Directamente proporcional

3. Se llama modelo exponencial a

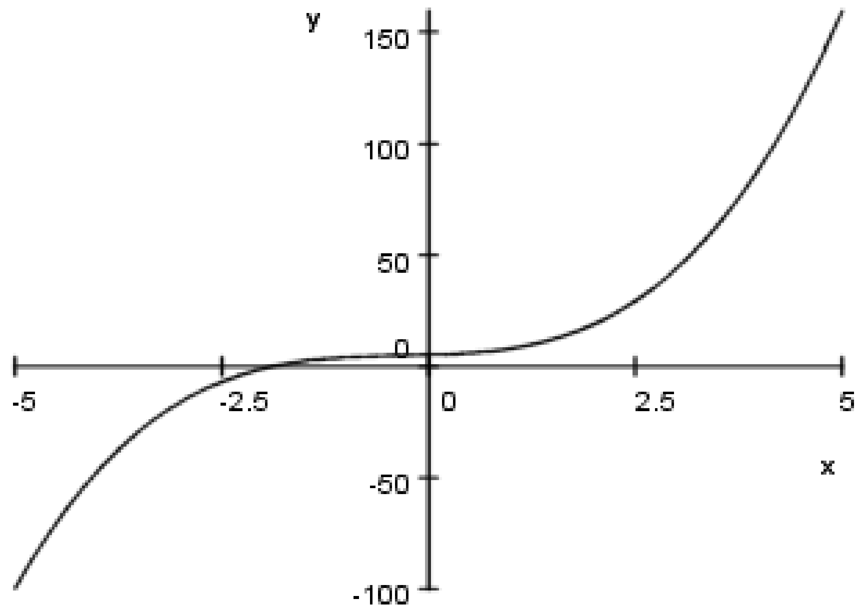

1
2
3
4
5
x


0
1
2
3
4
5
x



4. Modelo logarítmico

5. Modelo lineal



6. Modelo polinomico

$$y = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

0.1. Ajuste de la curva

Al observar las gráficas notamos que muchas se parecen y a veces es díficil estar seguro si el modelo que escogemos es adecuado, es más no conocemos todos los modelos. en esta sección explicaremos dos métodos para ayudarnos a escoger un modelo que se aproxime de buena forma a los datos.

1. Linealización :

   Este método consiste en encontrar dos relaciones $h\left(y\right)$ y $f\left(x\right)$ tales que al graficar $h\left(y\right)$ vs $f\left(x\right)$ se obtenga una linea recta, es decir si esto sucede el modelo es satisfactorio.

   Por ejemplo si tenemos los datos

$y\left(cm\right)$	1	4	9	16	25
$x(s)$	1	2	3	4	5

De acuerdo con la forma el modelo es $y = ax^m$, pero si analizamos los datos ellos nos hacen sospechar que $m = 2$, por lo que podríamos hacer $h(y) = y$ y $f(x) = x^2$ de lo que obtenemos la siguiente tabla

$h(y)$	1	4	9	16	25
$f(x)$	1	4	9	16	25

Como se obtuvo una recta podemos decir que el modelo es aceptable y al determinar la ecuación de la recta nos que al tomar dos puntos cualesquiera

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{16 - 9}{16 - 9} = 1$$

como la relación matemática es $h\left(y\right)=af\left(x\right)$, entonces queda $y=x^{2}$.

Este método no es práctico en el sentido de que si no sospechamos nada acerca de la relaciómatemática es casi imposible determinar $h\left(y\right)$ y $f\left(x\right)$, afortunadamente para los modelos planteados ya existen estas relaciones

a) Para el modelo $y=ax^{m}$ son

$$h\left(y\right)=\log y,\ \ f\left(x\right)=\log x$$

al obtener la recta

$$\log Y = m \log x + b, a = 10^b$$

podemos encontrar $m = \frac{\log y_i - \log y_j}{\log x_i - \log x_j}$

$a = \frac{y_i}{x_i^m}$. En la práctica debido a los errores al tomar diferentes parejas (x_i, y_i) los valores de m y a no son constantes, por lo que hay que determinarlos varias veces y promediar los resultados, así la relación matemática queda $y = \bar{a}x^{\bar{m}}$

2. Para el modelo $y = ae^{mx}$ se escogen las relaciones

$$h(y) = \ln y,\ \ f(x) = x$$

y si obtenemos la recta

$$\ln Y = mX + b;\ \ a = e^{b}$$

podemos utilizar m =$\ln y_i - \ln y_j \frac{}{x_i - x_j a = \frac{y_i}{e^{m x_i}}.}$ y calculamos varios valores de m y a para promediarlos y obtener la relación matemática $y = \bar{a}e^{\bar{m}x}$

Si el modelo es $y = \frac{1}{m} \ln x$ las relaciones son

$$h(y) = y, \; f(x) = \ln x$$

si la gráfica $f(x) \;\; vs \; h(y)$ es lineal como se muestra en la figura podemos usar

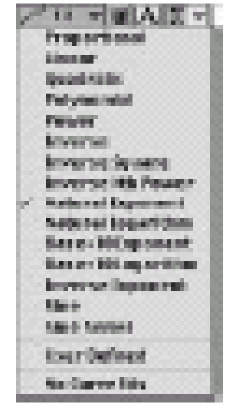
$$m = \frac{\ln x_i - \ln x_j}{y_i - y_j}$$

calculamos m varias veces y obtenemos $y = \frac{1}{\bar{m}} \ln x$.

El modelo lineal es trivial por lo que dejamos de tarea al lector

Usando Data Studio es fácil realizar el ajuste

Se seleciona la región de la curva que nos intersa y lugego escogemos en la barra de herramienta



fit y se escoge el modelo adecuado de acuerdcon los siguientes parámetros:

1. Si se escoge el modelo lineal obtenemos un display parecido al de la figura

Linear Fit	
m (Slope)	9.45000
b (Y Intercept)	-16.91667
r	0.97834
Standard Deviation m	0.75569
Standard Deviation b	4.25252

y se dice que el modelo es bueno si $r^2 > 0{,}95$

Si se escoge otro modelo obtendremos un display como

Quadratic Fit	
A	0.76948
B	1.75519
C	-2.80952
Mean Squared Error	6.38701
Root MSE	2.52725

y decimos que el modelo es bueno si el mean Square Error es despreciable comparado con $\bar{y}$

Ajuste lineal

El ajuste lineal es un método estadístico, parecido al anterior, pero usando herramientas diferentes.

En este caso no explicaremos mucho , sólo plantearemos algunas fórmulas e interpretaremos los resultados

Si tenemos dos conjuntos de datos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$

$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ definiremos la

1. Media aritmética $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

2. Varianza $S_{xx}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$S_{yy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$

3. Covarianza

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

4. Coeficiente de correlación

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}^2 S_{yy}^2}}$$

Cuando estudiamos dos variables X y Y, en realidad estas variables estas variables tienen desde el punto de vista geométrico el comportamiento de dos vectores (rayos con dirección). Y se dice que existe un ajuste lineal si los vectores representados por las desviaciones están alineados o son paralelos.

Para determinar si esto sucede podemos utilizar la trigonometría para determinar el ángulo entre los vectores representados en la figura

Utilizando una rama de las matemáticas llamada algebra lineal se puede comprobar que si θ es el ángulo entre los vectores entonces

$$\cos\theta = r$$

Es decir este coeficiente determina la relación lineal entre las desviaciones de las variables y esta dependencia es perfecta cuando $r = \pm 1$ existe el ajuste lineal en la practica esto no sucede debido a los errores pero decimos que el ajuste es aceptable si $r^2 > 0{,}95$.

Si el ajuste existe deben existir dos relaciones $h\left(y\right)$ y $f\left(x\right)$ tal que el modelo

$$h\left(y\right)=mf\left(x\right)+b$$

debe tener un r adecuado y se puede calcular

$$r=\frac{n\sum_{i.j=1}^{n}f\left(x_i\right)h\left(y_j\right)-\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)\sum_{j=1}^{n}h\left(y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n}f^2\left(x_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{2}f\left(x_i\right)^2\right)\right]}\left[n\sum_{j=1}^{n}h^2\left(y_j\right)-\left(\sum_{j=1}^{2}h\left(y_j\right)^2\right)\right]}$$

m $=$n$\sum_{i.j=1}^{n}f\left(x_i\right)h\left(y_j\right)-\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)\sum_{j=1}^{n}h\left(y_i\right)\frac{}{n\sum_{i=1}^{n}f^2(x_i)-\left(\sum_{i=1}^{2}f(x_i)^2\right)}$

b $=$$\sum_{j=1}^{n}h\left(y_j\right)-m\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)\frac{}{n}$ donde a se obtiene

- $a=10^b$ en el modelo $y=ax^m$
- $a=e^b$ en el modelo $y=ae^{mx}$

0.2. Interpretación geométrica de la covarianza

Si consideramos una nube de puntos formados por las parejas de los datos concretos de dos variables X e Y (x_i, y_i) el centro de gravedad de esta nube de puntos es $(-x, -y)$, ahora si trasladamos los ejes de tal forma que este punto sea el centro, la nube queda dividida en cuatro cuadrantes los que indica que los puntos que se encuentran en el pimer y tercer cuadrante contribuyen positivamente al valor de la covarianza y los que se encuentran en los otros dos cuadrantes contribuyen negativamente. como lo indica la figura.a y si los puntos se reparten con igual proporción la covarianza será negativa como indica la segunda gráfica de la figura a fig ay no hay relación matemática si

la nube de puntos no tiene ninguna tendencia como en la fig b

fig b