Mecánica Cuántica I
Tarea Nº 7

Prof. : J. Rogan
Ayud. : V. Muñoz

Fecha de publicación: 26 de junio de 2001.
Fecha de entrega: 4 de julio de 2001.

1. Suponga que tiene un operador $\check{\vec{L}}$ y otro $\check{\vec{S}}$ tales que

$$\begin{aligned} [\check{L}_i, \check{L}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\check{L}_k \ , \\ [\check{S}_i, \check{S}_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\check{S}_k \ , \\ [\check{L}_i, \check{S}_j] &= 0 \quad \forall\, i, j \ . \end{aligned}$$

   (a) Calcule $[\check{\vec{L}}, \check{\vec{L}} \cdot \check{\vec{S}}]$, $[\check{\vec{S}}, \check{\vec{L}} \cdot \check{\vec{S}}]$.

   (b) Verifique que $[\check{\vec{J}}, \check{\vec{L}} \cdot \check{\vec{S}}] = 0$, con $\check{\vec{J}} = \check{\vec{L}} + \check{\vec{S}}$.

2. Suponga que un electrón en un átomo de hidrógeno está descrito por una función de onda que es la combinación lineal más general del subespacio de degeneración del valor $E = -R/4$, con R la constante de Rydberg.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de medir $L_z = 0$ en este estado?

   (b) Suponga que se mide L^2 y L_z, obteniéndose los valores $(2\hbar^2, \hbar)$. ¿Cuál es el valor de $\langle r \rangle$ en el estado en que queda el átomo?

   (c) ¿Cambia el valor de $\langle r \rangle$ si se hubiera obtenido $(2\hbar^2, -\hbar)$ o $(2\hbar^2, 0)$?

3. Sea $\check{H}$ el Hamiltoniano para el átomo de hidrógeno

$$\check{H} = \frac{\check{\vec{p}}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} \ .$$

   Demuestre que el *vector de Runge-Lenz*

$$\check{\vec{K}} = \frac{1}{2\mu e^2}\left(\check{\vec{L}} \times \check{\vec{p}} - \check{\vec{p}} \times \check{\vec{L}}\right) + \frac{\check{\vec{r}}}{r}$$

conmuta con $\check{H}$ y que cumple $\check{\vec{L}} \cdot \check{\vec{K}} = \check{\vec{K}} \cdot \check{\vec{L}} = 0$, y que

$$[\check{K}_i, \check{K}_j] = i\hbar \left(-\frac{2E}{\mu e^4} \right) \epsilon_{ijk} \check{L}_k \ .$$

Muestre que el operador $\check{\vec{A}} = \sqrt{-\mu e^4/2E}\,\check{\vec{K}}$ definido en el subespacio de estados ligados del átomo de hidrógeno con energía E ($E \leq 0$) satisface las relaciones de conmutación:

$$[\check{A}_i, \check{A}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \check{L}_k$$

e infiera que los operadores

$$\check{\vec{J}} = \frac{1}{2} \left(\check{\vec{L}} + \check{\vec{A}} \right) \qquad \check{\vec{J'}} = \frac{1}{2} \left(\check{\vec{L}} - \check{\vec{A}} \right)$$

obedece las relaciones de conmutación de momento angular y la condición $\check{\vec{J}}^{\,2} = \check{\vec{J'}}^{\,2}$. Derive la identidad

$$\check{\vec{J}}^{\,2} + \check{\vec{J'}}^{\,2} = -\frac{1}{2}\hbar^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu e^4}{2E}$$

y deduzca de ella la expresión para los niveles de energía del átomo de hidrógeno.