Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

Capítulo 19

La ecuación diferencial de Bessel

versión preliminar 3.1-26 diciembre 2002

19.1. La ecuación diferencial de Bessel

Consideremos en la ecuación hipergeométrica general el caso $A = 0$, $C = \infty$, $\alpha + \alpha' = 0$, $\beta + \beta' = 1$ y $\gamma + \gamma' = 0$, lo cual esta de acuerdo con $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$

$$\Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left[\frac{-B\,\alpha\alpha'}{z^2(z-B)} + \frac{B\,\beta\beta'}{z(z-B)^2} + \frac{\gamma\gamma'}{z(z-B)}\right]\Psi = 0 \ ,$$

si consideramos además, $\beta\beta' = \gamma\gamma' = B^2$ y tomamos el límite $B \to \infty$, obtenemos

$$\boxed{\Psi'' + \frac{1}{z}\Psi' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z^2}\right)\Psi = 0 \ .} \tag{19.1}$$

la cual es conocida como *la ecuación diferencial de Bessel*. Esta ecuación tiene una singularidad fuchsiana en $z = 0$ cuando $\text{Re}(\alpha) > 0$. Planteamos como solución

$$\Psi(z) = z^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{\nu+\sigma} \ .$$

Sustituyendo en la ecuación (19.1)

$$z^2\Psi'' + z\Psi' - \alpha^2\Psi = -z^2\Psi \ ,$$

tenemos

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{a_\nu(\nu+\sigma)(\nu+\sigma-1) + a_\nu(\nu+\sigma) - a_\nu\alpha^2\right\} z^{\nu+\sigma} = -\sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu-2} z^{\nu+\sigma} \ ,$$

obteniendo

$$a_\nu\left[(\nu+\sigma)^2 - \alpha^2\right] = -a_{\nu-2} \ , \quad \nu = 2, 3, \ldots \ ,$$

mientras que para $\nu = 0$

$$a_0(\sigma^2 - \alpha^2) = 0 \ ,$$

lo que da una ecuación para el exponente $\sigma^2 = \alpha^2$, con dos soluciones, $\sigma_1 = +\alpha$ y $\sigma_2 = -\alpha$. Elegimos $\sigma = \sigma_1 = +\alpha$ y $a_0 \neq 0$. Para $\nu = 1$

$$a_1(1 + 2\alpha) = 0 \ ,$$

lo que implica $a_1 = 0$. Además, usando la *fórmula recursiva* para los coeficientes

$$\boxed{a_\nu = -\frac{a_{\nu-2}}{\nu(\nu + 2\alpha)}} \ , \tag{19.2}$$

se puede demostrar que todos los coeficientes impares son nulos. Los coeficientes pares

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2\, 1!\, (\alpha + 1)} \ , \qquad a_4 = \frac{a_0}{2^4\, 2!\, (\alpha + 1)(\alpha + 2)} \ , \qquad \ldots$$

El término general es

$$a_{2\mu} = (-1)^\mu \frac{a_0}{2^{2\mu}\, \mu!\, (\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + \mu)} \ .$$

Tomando

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha\, \Gamma(\alpha + 1)} \ ,$$

se obtiene

$$\boxed{J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!\, \Gamma(\mu + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu}} \ , \tag{19.3}$$

con $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, conocida como función de Bessel de orden α.

19.2. Funciones de Bessel de índice no entero

Consideremos $\sigma = -\alpha$. Hay solución, en este caso, linealmente independiente de J_α, en forma de serie

$$J_{-\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!\, \Gamma(\mu - \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu} \ , \tag{19.4}$$

Ejemplo Observemos que si $\alpha = 1/2$, la resta de las dos raíces $\sigma_1 - \sigma_2 = 1/2 + 1/2 = 1 \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, a pesar de estar en el caso incómodo las dos soluciones todavía funcionan (habíamos encontrado un hecho similar al discutir el oscilador armónico). En efecto, consideremos $\alpha = 1/2$. El denominador en (19.3) se puede reescribir

$$\mu!\Gamma(\mu + 3/2) = \mu!(\mu + 1/2)\Gamma(\mu + 1/2) \ .$$

Pero $\Gamma(n + 1/2) = (2n - 1)!!\sqrt{\pi}/2^n$, luego

$$\begin{aligned} \mu!\, \Gamma(\mu + 3/2) &= \mu!(\mu + 1/2)(2\mu - 1)!!\sqrt{\pi}/2^\mu \\ &= \mu!(2\mu + 1)(2\mu - 1)!!\sqrt{\pi}/2^{\mu+1} \\ &= \mu!(2\mu + 1)!!\sqrt{\pi}/(2^{\mu+1}) \end{aligned}$$

Y como $(2n+1)!! = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$, de modo que

$$\mu!\,\Gamma(\mu+3/2) = (2\mu+1)!\sqrt{\pi}/2^{2\mu+1} \ ,$$

se tiene finalmente

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{z}{2}}\frac{1}{z\sqrt{\pi}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu 2^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}\frac{z^{2\mu+1}}{2^{2\mu}} \ ,$$

es decir

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!}z^{2\mu+1} \ . \tag{19.5}$$

La sumatoria en (19.5) es el desarrollo en serie de $\operatorname{sen} z$, luego

$$\boxed{J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{z}}} \ . \tag{19.6}$$

La otra solución resulta ser

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!}z^{2\mu} \ , \tag{19.7}$$

o bien

$$\boxed{J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos z}{\sqrt{z}}} \ . \tag{19.8}$$

Sin demostración: J_α para índices $\alpha = \pm(2n+1)/2$ se expresa por fórmulas semejantes.

19.3. Funciones de Bessel de índice entero

Para $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, J_n dada por (19.3) es holomorfa en $z=0$, y en realidad holomorfa en todo el plano. Consideremos la primera función de Bessel, es decir con $n=0$, y derivémosla:

$$J_0(z) = \sum_{\nu}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2}\frac{z^4}{2^4} - \cdots \ ,$$

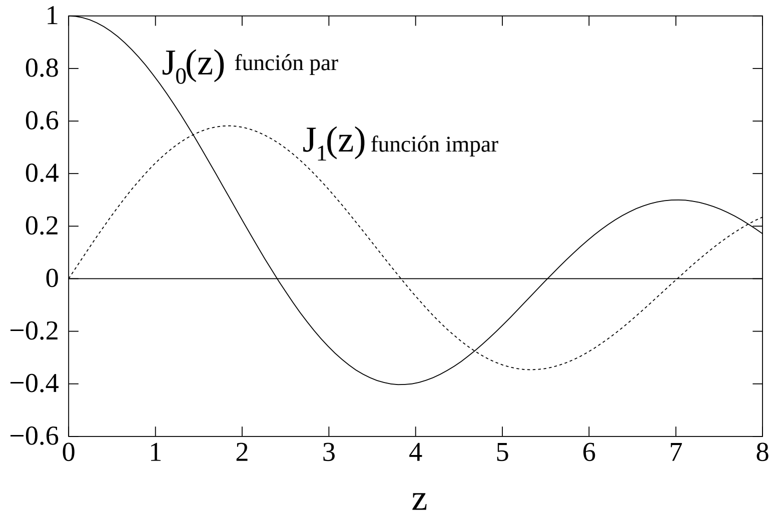
$$J_0'(z) = -\frac{2}{(1!)^2}\frac{z}{2^2} + \frac{4}{(2!)^2}\frac{z^3}{2^4} - \frac{6}{(3!)^2}\frac{z^5}{2^6} + \cdots \ .$$

Por otra parte, la función de Bessel de índice uno es

$$J_1(z) = \frac{z}{2}\sum_{\nu}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} = \frac{z}{2}\left\{1 - \frac{1}{(1!)^2}\frac{z^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2}\frac{z^4}{2^4} - \cdots\right\} \ .$$

Comparando concluimos que

$$\boxed{J_1(z) = -J_0'(z) \ .} \tag{19.9}$$



Para índice entero positivo, (19.3) da

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \ . \tag{19.10}$$

Para índice entero pero negativo:

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \ .$$

Consideraremos nulos los coeficientes con $\nu < n$ en la función gamma (la función gamma tiene polos en $\lambda = 0, -1, -2, \ldots$, luego $1/\Gamma(\lambda) = 0$). Sea $\mu = \nu - n$. Luego

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu(-1)^n}{(\mu+n)!\mu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu} \ ,$$

lo que resumimos como

$$\boxed{J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \ .} \tag{19.11}$$

19.4. Comportamiento asintótico

Proposición 19.1 Para una variable real $x \gg 1$, toda solución real de la ecuación de Bessel es aproximadamente de la forma $A\cos(x+\gamma)/\sqrt{x}$.

Demostración Sea

$$\sqrt{x}\Psi(x) = u(x) \ .$$

Despejando y diferenciando tenemos

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= x^{-1/2}u(x) \ , \\
\Psi'(x) &= x^{-1/2}u'(x) - \frac{1}{2}x^{-3/2}u(x) \ , \\
\Psi''(x) &= x^{-1/2}u''(x) - x^{-3/2}u'(x) + \frac{3}{4}x^{-5/2}u(x).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Bessel,

$$u''(x) - \frac{u'(x)}{x} + \frac{3}{4}\frac{u(x)}{x^2} + \frac{u'(x)}{x} - \frac{1}{2}\frac{u(x)}{x^2} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u(x) = 0 \ ,$$

quedando

$$u''(x) + \left(1 - \frac{1/4 - \alpha^2}{x^2}\right) u(x) = 0 \ .$$

Para x muy grande,

$$u''(x) + u(x) = 0 \ , \quad \text{con solución } u(x) = A\cos(x+\gamma) \ ,$$

luego la solución completa es

$$\Psi(x) = A\frac{\cos(x+\gamma)}{\sqrt{x}} \ .$$

q.e.d.

Por otra parte, cerca de cero la función de Bessel de índice nulo se puede aproximar por

$$J_0(z) \approx 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} = \left(1 - \frac{z^2}{8}\right)^2 \ . \tag{19.12}$$

19.5. Función generatriz

Buscamos una función generatriz de las funciones de Bessel de índice entero,

$$\Psi(z,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) \ . \tag{19.13}$$

Usando (19.10) (que es válida también si $n < 0$, recordando que $1/h! \equiv 0$ si $h < 0$, $h \in \mathbb{Z}$),

$$\begin{aligned}
\Psi(z,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}\left(\frac{zs}{2}\right)^{n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}\left(\frac{z}{2s}\right)^{l}\frac{1}{(l+n)!}\left(\frac{zs}{2}\right)^{l+n}
\end{aligned}$$

Sea $h = l + n$. La doble suma se puede reescribir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \ ,$$

pero los factores de la forma $1/h!$ reducen la suma sobre h a ir entre 0 e ∞. Así,

$$\Psi(z,s) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(\frac{z}{2s}\right)^l \left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\left(\frac{zs}{2}\right)^h\right] = e^{-\frac{z}{2s}} e^{\frac{zs}{2}} \ .$$

De este modo, la función generatriz queda

$$\boxed{\Psi(z,s) = \exp\left[\frac{z}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) s^n \ .} \tag{19.14}$$

19.6. Fórmulas de adición

Consideremos la función generatriz (19.14) con argumento $z = (z_1 + z_2)/2$

$$\exp\left[\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\left(s-\frac{1}{s}\right)\right] = \exp\left[\frac{z_1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right] \exp\left[\frac{z_2}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right] \ ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z_1+z_2) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s^\mu J_\mu(z_1) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} s^\nu J_\nu(z_2) \ .$$

Comparando coeficientes para igual potencia en s tenemos

$$\boxed{J_n(z_1+z_2) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(z_1) J_{n-\mu}(z_2) \ .} \tag{19.15}$$

Particularicemos (19.15) al caso $n = 0$ y $z_1 = z = -z_2$

$$J_0(0) = 1 = J_0^2(z) + \sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu(z) J_{-\mu}(-z) + \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{-\mu}(-z) J_\mu(z) \ ,$$

obteniendo

$$\boxed{1 = J_0^2(z) + 2\sum_{\mu=1}^{\infty} J_\mu^2(z) \ .} \tag{19.16}$$

En el caso que la variable $z \in \mathbb{R}$ y considerando que $|\, J_0(z)\,| \leq 1$, podemos acotar los J_ν por

$$\boxed{|\, J_\mu(z)\,| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \qquad \text{si } \mu = 1, 2, 3, \ldots} \tag{19.17}$$

Reemplazamos $s = e^{i\varphi}$ con $\varphi \in \mathbb{R}$, luego

$$\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = i \operatorname{sen}\varphi \ .$$

En la función generatriz,

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right] = \exp(iz\operatorname{sen}\varphi) \ ,$$

luego

$$\boxed{\exp(iz \operatorname{sen}\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} J_n(z) \ .} \tag{19.18}$$

Desarrollando, y usando (19.11),

$$\begin{aligned}
\exp(iz \operatorname{sen}\varphi) &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(z)(\cos n\varphi - i \operatorname{sen} n\varphi) \ , \\
&= J_0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(z) \cos 2m\varphi + 2i \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(z) \operatorname{sen}(2m+1)\varphi \ ,
\end{aligned}$$

Comparando partes real e imaginaria, con $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(x \operatorname{sen}\varphi) &= J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) \cos 2m\varphi \ , \\
\operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\varphi) &= 2\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(x) \operatorname{sen}(2m+1)\varphi \ .
\end{aligned} \tag{19.19}$$

Sea $\varphi = 0$. Entonces

$$\boxed{1 = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) \ .} \tag{19.20}$$

Sea $\varphi = \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\cos x &= J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(x) \ , \\
\operatorname{sen} x &= 2\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(x) \ .
\end{aligned} \tag{19.21}$$

19.7. Representaciones integrales

Cambiemos el índice de suma en (19.18) a m, multipliquemos la ecuación por $e^{-im\varphi}$ e integremos en φ. Se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(z \operatorname{sen}\varphi - m\varphi) d\varphi = 2\pi J_m(z) \ .$$

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $J_m(x)$ es real, lo que significa

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(x \operatorname{sen}\varphi - m\varphi\right) \, d\varphi \ ,$$

por paridad de la función subintegral, podemos reescribir la integral como

$$\boxed{J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos\left(m\varphi - x \operatorname{sen}\varphi\right) \, d\varphi \ .} \tag{19.22}$$

En particular,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi\right] .$$

Haciendo el cambio de variable $\theta = \varphi - \pi$, tenemos

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi + \int_{-\pi/2}^{0} \cos(x\,\mathrm{sen}(\theta+\pi))\,d\theta\right] .$$

Usando que $\mathrm{sen}(\theta+\pi) = -\,\mathrm{sen}\,\theta$ y que coseno es una función par,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi + \int_{-\pi/2}^{0} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta\right] .$$

Sumando ambas integrales

$$\boxed{J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\varphi\ .} \tag{19.23}$$

Hagamos el cambio de variable en (19.23) $\omega = \mathrm{sen}\,\varphi$. Entonces $d\varphi = \dfrac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$ y la integral nos queda

$$J_0(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(\omega x)}{\pi\sqrt{1-\omega^2}}\,d\omega\ .$$

Definamos una función $p(\omega)$ de la forma

$$p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\,\omega\,| \geq 1, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-\omega^2}} & \text{si } |\,\omega\,| < 1, \end{cases}$$

podemos reescribir J_0 como

$$J_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x)p(\omega)\,d\omega\ .$$

Con los cambios de variable $x = t$ y $\omega = 2\pi s$, obtenemos

$$J_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi st)F(s)\,ds\ ,$$

donde

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\,s\,| \geq \frac{1}{2\pi}, \\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-4\pi s^2}} & \text{si } |\,s\,| < \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

De lo anterior se desprende, puesto que $J_0(x)$ es una función par, que $F(s)$ es precisamente la transformada de Fourier de $J_0(x)$:

$$\mathcal{F}\{J_0, s\} = F(s)\ .$$

Análogamente, tomando transformada de Fourier a la relación (19.9) obtenemos

$$\mathcal{F}\{J_1, s\} = \mathcal{F}\{-J_0', s\} = -i2\pi s\mathcal{F}\{J_0, s\} = -2\pi i s F(s)\ .$$

19.8. Relaciones de recurrencia

Derivemos la función generatriz (19.14) respecto a s,

$$\frac{\partial\Psi(z,s)}{\partial s} = \frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) \ ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n s^{n+1} J_n(z) = \frac{z}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[J_{n-1}+J_{n+1}\right] s^{n+1} \ .$$

Comparando coeficientes,

$$\boxed{\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z) \ .} \tag{19.24}$$

Derivamos (19.14) respecto a z y obtenemos

$$\frac{\partial\Psi(z,s)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n(z) \ ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n J_n'(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[J_{n-1}-J_{n+1}\right] s^{n} \ .$$

Comparando coeficientes

$$\boxed{2J_n'(z) = J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z) \ .} \tag{19.25}$$

Sumando (19.24) y (19.25) tenemos

$$\frac{n}{z}J_n(z)+J_n'(z) = J_{n-1}(z) \ , \tag{19.26}$$

es decir

$$\boxed{z^n J_{n-1}(z) = \left[z^n J_n(z)\right]' \ .} \tag{19.27}$$

Por otro lado, restando (19.24) y (19.25) obtenemos

$$J_n'(z)-\frac{n}{z}J_n(z) = -J_{n+1}(z) \ , \tag{19.28}$$

es decir

$$\boxed{-z^{-n} J_{n+1}(z) = \left[z^{-n} J_n(z)\right]' \ .} \tag{19.29}$$

(19.27) y (19.29) indican que, al igual que los polinomios de Hermite, las funciones de Bessel de índice entero tienen operadores de subida y de bajada. En este caso, el operador de subida es

$$-z^n\frac{d}{dz}\frac{1}{z^n} \ ,$$

y el de bajada es

$$\frac{1}{z^n}\frac{d}{dz}z^n \ .$$

Finalmente, consideremos (19.20)

$$1 = J_0(z) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[J_{2\nu}(z) + J_{2\nu+2}(z)\right] \ .$$

Usando la relación de recurrencia (19.24) para $n = 2\nu + 1$ tenemos

$$1 = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{z} J_{2\nu+1}(z) \ ,$$

$$\frac{z}{2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu+1) J_{2\nu+1}(z) \ ,$$

y por inducción completa:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu+n)(n+\nu+1)!}{\nu!} J_{2\nu+n}(z) \ . \tag{19.30}$$

Podemos pues expresar cualquier serie de potencias en serie de funciones de Bessel.

19.9. Relaciones de ortogonalidad

Estudiemos las relaciones de ortogonalidad en el intervalo $0 \leq x \leq \infty$. Consideremos

$$f(x) = J_\sigma(hx) \ , \qquad g(x) = J_\sigma(kx) \ , \quad \text{con } h \neq k. \tag{19.31}$$

Tomemos las derivadas

$$\begin{aligned} f'(x) &= hJ'_\sigma(hx) \ , \qquad & f''(x) &= h^2 J''_\sigma(hx) \ , \\ g'(x) &= kJ'_\sigma(kx) \ , \qquad & g''(x) &= k^2 J''_\sigma(kx) \ . \end{aligned}$$

La ecuaciones de Bessel que satisfacen son:

$$\begin{aligned} J''_\sigma(hx) + \frac{1}{hx} J'_\sigma(hx) + \left(h^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) J_\sigma(hx) = 0 \ , \\ J''_\sigma(kx) + \frac{1}{kx} J'_\sigma(kx) + \left(k^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) J_\sigma(kx) = 0 \ . \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por h^2 y la segunda por k^2 y usando las definiciones dadas en (19.31) obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(h^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) f(x) = 0 \ , \\ g''(x) + \frac{1}{x} g'(x) + \left(k^2 - \frac{\sigma^2}{x^2}\right) g(x) = 0 \ . \end{aligned} \tag{19.32}$$

Multiplicando por $xg(x)$ y por $xf(x)$ respectivamente y restando,

$$\begin{aligned} xf(x)''g(x) - xg(x)''f(x) + (xf'(x)g'(x) - xf'(x)g'(x)) \\ + f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + x(h^2 - k^2)f(x)g(x) = 0 \ . \end{aligned}$$

El factor entre paréntesis corresponde a un cero agregado para lograr el reordenamiento

$$[x(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))]' = (k^2 - h^2)xf(x)g(x) \ .$$

Integrando en el intervalo $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b tf(t)g(t)\,dt = \frac{1}{k^2 - h^2}\Big[x(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\Big]_a^b \ .$$

La expresión del lado derecho se anulará en tres casos

1. Si $J_\sigma(hx)$ y $J_\sigma(kx)$ se anulan en a y en b.

2. Sus derivadas se anulan en a y en b.

3. O bien $J_\sigma(ha) = J_\sigma(ka) = 0 = J'_\sigma(hb) = J'_\sigma(kb)$.

De cualquier modo,

$$\int_a^b xJ_\sigma(hx)J_\sigma(kx)\,dx$$

es la típica integral que interviene en asuntos de ortogonalidad.

Ortogonalidad

Por ejemplo, para $m \neq n$, se tiene ortogonalidad sobre el intervalo $[0, a]$ con

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho\,d\rho = 0 \ , \tag{19.33}$$

donde los $\alpha_{\nu m}$ son tales que $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$.

Normalización (sin demostración)

$$\int_0^a \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2 \rho\,d\rho = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2 \ . \tag{19.34}$$

19.10. Problema de Sturm-Liouville asociado

(19.33) y (19.34) sugieren que $J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)$ pueden ser base de un espacio de funciones en $[0, a]$. Poniendo $h = \alpha_{\nu m}/a$ y $\sigma = \nu$ en (19.32) encontramos que satisfacen la ecuación

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho}f'(\rho) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)f(\rho) = 0 \ ,$$

que se puede reescribir

$$\rho f''(\rho) + f'(\rho) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho f(\rho) = 0 \ ,$$

o bien

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} f \right) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho f(\rho) = 0 \ , \tag{19.35}$$

que es un problema de autovalores de un operador autoadjunto. En efecto, tomando el operador autoadjunto

$$\mathfrak{L} = \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho} \ ,$$

y la función de peso

$$w(\rho) = \rho > 0 \quad \text{en } \rho \in [0, \infty] \ ,$$

(19.35) corresponde al problema de autovalores de $\mathfrak{L}$, con autovalores

$$\lambda_{\nu m} = \frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} \ .$$

Así, las funciones $J_\nu(\lambda_{\nu m} \rho)$ asociadas a cada autovalor, para $m = 0, 1, 2, \ldots$ (ν está fijo) serán un set completo en el cual se podrá expandir cualquier función en $[0, \infty]$.

¿A qué problemas físicos está asociado este problema de Sturm-Liouville? Consideremos nuevamente el operador laplaciano, como en (18.40), pero ahora en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}\,) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \Psi(\rho, \phi, z) \ . \tag{19.36}$$

Se aprecia de inmediato que en un proceso de separación de variables, las derivadas respecto a z serán reemplazadas por una constante, y las derivadas respecto a ϕ serán reemplazadas por otra constante, quedando para la parte radial precisamente la ecuación de Bessel en la forma (19.35). Por tanto, las funciones de Bessel aparecerán típicamente (no únicamente) como soluciones de problemas que involucren el operador de Laplace (encontrar un potencial electrostático —ecuación de Laplace—, modos normales de oscilación —ecuación de Helmholtz—, etc.) y que tengan simetría cilíndrica.