

Capítulo 4

Trabajo, Energía Cinética y Potencial

4.1. Trabajo y energía cinética

Si se está aplicando una fuerza \vec{F} sobre un cuerpo P y este se desplaza (en un breve lapso) una distancia infinitesimal $d\vec{r}$, se dice que el *trabajo* infinitesimal efectuado por aquella fuerza es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.1.1)$$

Si no hay movimiento no hay trabajo.

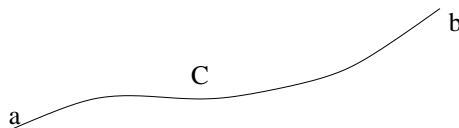


Figura 4.1: El trabajo de una fuerza \vec{F} cuando el cuerpo se desplaza desde un punto a a un punto b a lo largo de un camino C . Sólo en casos especiales la integral (4.1.2) no depende del camino C seguido al hacer la integral.

Si la fuerza varía de punto en punto: $\vec{F}(\vec{r})$ y el cuerpo P se mueve desde el punto a hasta el punto b , por el camino C , entonces el trabajo efectuado

por la fuerza es

$$W_{a \rightarrow b}(C) = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.1.2)$$

El trabajo se mide en Joule, que es una unidad de energía.

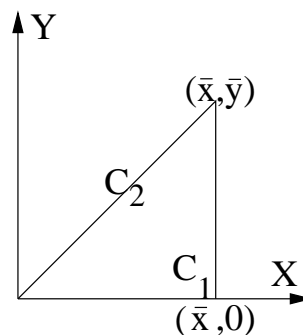
EJEMPLO: Considérese un cuerpo que se mueve en el plano XY debido a una fuerza dada por la expresión

$$\vec{F} = -\frac{Ax^2y^5}{5}\hat{i} - \frac{Bx^3y^4}{3}\hat{j} \quad (4.1.3)$$

Se hará la integral de trabajo asociada a esta fuerza, entre los puntos $(0,0)$ y (\bar{x},\bar{y}) siguiendo dos caminos: C_1 es el camino que primero va en forma recta desde el origen hasta $(\bar{x},0)$ y luego en forma recta desde este último punto a (\bar{x},\bar{y}) y C_2 es el camino recto entre los dos puntos extremos.

La integral de trabajo por C_1 es

$$\begin{aligned} W(C_1) &= \int_0^{\bar{x}} \vec{F} \cdot \hat{i} dx + \int_{x=\bar{x}(y=0)}^{\bar{y}} \vec{F} \cdot \hat{j} dy \\ &= 0 - \frac{\bar{x}^3}{3} \frac{B\bar{y}^5}{5} \\ &= -\frac{B\bar{x}^3\bar{y}^5}{15} \end{aligned}$$



Para poder hacer la integral por C_2 se debe tener claro que (a) la recta C_2 es descrita por la ecuación $\bar{x}y = \bar{y}x$, entonces se puede, por ejemplo, integrar con respecto a x usando un integrando donde se ha reemplazado $y = \bar{y}x/\bar{x}$; (b) se debe usar $d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy = (\hat{i} + \hat{j}\frac{\bar{y}}{\bar{x}}) dx$. (c) Ahora es trivial hacer el producto punto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ e integrar con respecto a x lo que da:

$$W(C_2) = -\left(\frac{A}{40} + \frac{B}{24}\right) \bar{x}^3 \bar{y}^5$$

que no coincide con $W(C_1)$ salvo que $A = B$. ◀

♣ Obtenga la forma de $d\vec{r}$ en el ejemplo anterior con $\bar{x} = \bar{y}$ para el caso en que se desee hacer la integral a lo largo de una semicircunferencia que parte del

origen hacia arriba y tiene su centro en $(\bar{x}, 0)$. Calcule la integral de camino en el caso $A = B$.

En la definición (4.1.2) no se ha dicho que \vec{F} sea la única causa del movimiento. Cuando sobre el cuerpo P están actuando varias fuerzas \vec{F}_k , se puede definir un trabajo $W_{a \rightarrow b}^{(k)}(C)$ asociado a cada una de ellas usando el camino C de a a b ,

$$W_{a \rightarrow b}^{(k)}(C) = \int_a^b \vec{F}_k \cdot d\vec{r} \quad (4.1.4)$$

Si el desplazamiento es perpendicular a la fuerza considerada, esa fuerza no ejerce trabajo.

El *trabajo total* es el que efectúa la fuerza total,

$$\begin{aligned} W_{a \rightarrow b}^{\text{total}}(C) &= \int_a^b \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\ &= m \int_a^b \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \\ &= m \int_{t_a}^{t_b} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= m \int_{\vec{v}_a}^{\vec{v}_b} \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ &= \frac{m}{2} \int_{v_a^2}^{v_b^2} dv^2 \\ &= \frac{m}{2} v_b^2 - \frac{m}{2} v_a^2 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Se define la *energía cinética* K de un cuerpo de masa m y velocidad \vec{v} como

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (4.1.6)$$

Y de aquí que el trabajo total pueda expresarse como la diferencia entre la energía cinética final menos la energía cinética inicial.

$$W_{a \rightarrow b}^{\text{total}}(C) = K_b - K_a \quad (4.1.7)$$

El signo de W^{total} indica si se ha ganado ($W > 0$) o perdido ($W < 0$) energía cinética. Por ejemplo, si una partícula es lanzada verticalmente hacia arri-

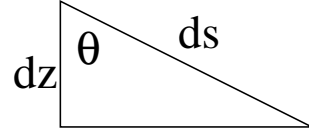
ba con rapidez inicial v_0 y en algún momento se detiene, el trabajo efectuado por la fuerza total a lo largo de la trayectoria, sobre esa partícula, desde que fue lanzada hasta que se detiene, es $-\frac{1}{2}mv_0^2$.

El trabajo de la fuerza total en el caso de un cuerpo que se mueve con roce sobre una superficie a rapidez constante, es nulo. Pero, para comprender bien los conceptos es preferible separar el trabajo efectuado por la fuerza f que arrastra al cuerpo, W_f , del trabajo W_r asociado a la fuerza de roce. El trabajo W_f es positivo porque el desplazamiento apunta en la misma dirección que la fuerza, mientras que W_r es negativo y se cumple que $W_f + W_r = 0$.

» En un movimiento circunferencial con velocidad angular constante la fuerza total no efectúa trabajo, por dos razones: ella es perpendicular al desplazamiento y la rapidez no cambia.

Si un cuerpo desliza con roce sobre una superficie en reposo, la fuerza normal \vec{N} no efectúa trabajo, porque es perpendicular al desplazamiento.

Cuando un carro baja por una montaña rusa sin roce, ¿depende el trabajo que efectúa el peso de la forma de la montaña? Al avanzar una distancia $ds = \|\vec{d\vec{r}}\|$ en una zona en la cual el riel forma un ángulo θ con la vertical, el carro desciende una altura $dz = ds \cos \theta$. El trabajo infinitesimal es $dW = \vec{mg} \cdot \vec{d\vec{r}} = mg dz$. Al integrar se obtiene que el trabajo solo depende de la altura descendida z : $W = mgz$, que no depende de la forma del riel.



EJEMPLO: Se ilustra una forma como se puede utilizar la relación (4.1.7) para resolver un problema. Se considerará el ejemplo visto en §3.3.2 de un péndulo de largo R apoyado en un plano inclinado, con el cual tiene roce, figura 3.8. El desplazamiento es $d\vec{r} = \hat{\phi} R d\phi$. De las fuerzas, tanto la tensión \vec{T} del hilo, como la normal \vec{N} son perpendiculares al desplazamiento, por tanto no efectúan trabajo. Las fuerzas que sí contribuyen son la fuerza de roce $\vec{F}_{RD} = -\mu N \hat{\phi}$, (con $N = mg \cos \alpha$) y la componente del peso a lo largo de $\hat{\phi}$, que es $\hat{\phi} mg \sin \alpha \cos \phi$. El trabajo de la fuerza total, entonces, es el trabajo que efectúan estas dos fuerzas:

$$W_{\phi=0 \rightarrow \phi=\phi_1}^{\text{total}} = \int_0^{\phi_1} (mg \sin \alpha \cos \phi - \mu mg \cos \alpha) R d\phi \quad (4.1.8)$$

donde ϕ_1 es el ángulo en el cual el péndulo se detiene. Como ha partido del reposo el trabajo total tiene que ser cero y entonces la integral anterior debe ser nula

$$mg \sin \alpha \sin \phi_1 - \mu mg \cos \alpha \phi_1 = 0 \quad (4.1.9)$$

que implica la relación

$$\mu = \frac{\sin \phi_1}{\phi_1} \tan \alpha$$

que es (3.3.18).

4.2. Potencia

Se define la *potencia* como la variación del trabajo con el tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (4.2.1)$$

Si esta potencia es positiva se trata de potencia entregada al sistema y, si es negativa, es potencia que el sistema pierde. Cuando se trata de la potencia asociada a la fuerza total, P es energía cinética por unidad de tiempo que el sistema gana ($P > 0$) o pierde ($P < 0$).

Si una de las fuerzas actuando sobre un cuerpo es \vec{F} y en ese instante su velocidad en \vec{v} entonces

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (4.2.2)$$

y la potencia asociada a esta fuerza es

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.2.3)$$

» Un cuerpo en caída libre tiene velocidad $\vec{v} = -gt \hat{k}$ y la fuerza que está actuando es el peso $\vec{F} = -mg \hat{k}$. La potencia que el peso le está entregando al cuerpo que cae es $P = (-gt \hat{k}) \cdot (-mg \hat{k}) = mg^2 t$.

Pero si el cuerpo ha sido lanzado hacia arriba, entonces $\vec{v} = (v_0 - gt) \hat{k}$ y, mientras $t < v_0/g$, se está perdiendo potencia: $P = -(v_0 - gt) mgt$, porque el trabajo de la fuerza peso en ese lapso es negativo.

» La fuerza efectiva que mantiene a velocidad constante a un automóvil es opuesta al roce viscoso cuadrático, y es $F = \eta v^2$. La potencia entonces es $P = \eta v^3$, lo que muestra lo rápido que aumenta la potencia consumida a medida que aumenta la velocidad.

4.3. Fuerzas conservativas y energía potencial

4.3.1. Energía mecánica

Se dice que una fuerza es *conservativa* cuando la integral de trabajo (4.1.2) que se le asocia no depende del camino C escogido. Si se integra—por diversos caminos—entre un punto \vec{r}_0 , que se fija arbitrariamente, y un punto \vec{r} , siempre se obtiene el mismo valor $W(\vec{r})$. Resulta natural, en-

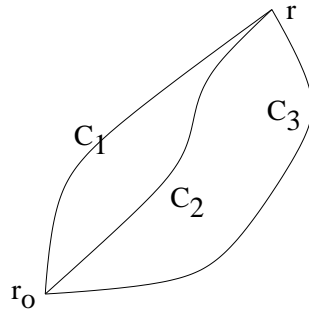


Figura 4.2: El trabajo de una fuerza \vec{F} conservativa que se calcula con caminos C_1 , C_2 etc. entre puntos \vec{r}_0 y \vec{r} es siempre el mismo.

tonces, definir la función asociada a la integral trabajo.

Supongamos que se escoge un punto arbitrario \vec{r}_0 y se hace la integral de trabajo desde este punto a un punto cualquiera \vec{r} . En general esta integral depende del camino escogido. Si la fuerza que se está considerando es tal que el trabajo que se le asocia no depende del camino de integración, sino que da el mismo valor cada vez que se integra desde \vec{r}_0 hasta \vec{r} , adquiere sentido definir una función

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.3.1)$$

a la que se llama *energía potencial* asociada a la fuerza \vec{F} . Estrictamente debiera decirse que U depende tanto de \vec{r} como de \vec{r}_0 , pero ya se verá que \vec{r}_0 siempre es dejado fijo mientras que el otro punto es variable y juega un papel interesante.

» En el párrafo anterior se ha dicho que existen fuerzas, llamadas *conservativas*, para las cuales la integral de trabajo no depende del camino de integración y para estas fuerza se puede definir una función escalar $U(\vec{r})$ llamada energía potencial.

Si la fuerza total \vec{F}^{total} , actuando sobre un cuerpo, es una fuerza conservativa, entonces el trabajo que esta fuerza efectua cuando el cuerpo se desplaza de a a b es

$$\begin{aligned}
 W_{a \rightarrow b} &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_0} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_b} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_a} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_b} \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} \\
 &= U(\vec{r}_a) - U(\vec{r}_b)
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

pero ya se sabe que también es

$$W_{a \rightarrow b} = K_b - K_a \tag{4.3.3}$$

lo que implica que

$$K_b + U(\vec{r}_b) = K_a + U(\vec{r}_a) \tag{4.3.4}$$

Pero los puntos a y b son arbitrarios, por lo cual se puede afirmar que la *energía mecánica total*

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})$$

(4.3.5)

permanece constante durante la evolución del movimiento.

» Conclusión: fuerza total conservativa implica que la energía mecánica total, (4.3.5) es una cantidad conservada, es decir, mantiene un mismo valor durante la evolución del sistema.

Más arriba se ha dicho que si \vec{F} es conservativa, entonces su integral de trabajo no depende del camino de integración. Equivalentemente *una fuerza es conservativa si y solo si ella puede ser escrita como el gradiente de la función U de energía potencial*,

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

La expresión anterior, escrita en componentes cartesianas, es

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.3.7)$$

Si se toma cualesquiera dos de estas relaciones y se las deriva una vez más, pero con respecto a otra coordenada, se obtiene, por ejemplo,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Una fuerza es conservativa si y solo si

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (4.3.8)$$

que puede ser descrito en forma más compacta como la condición

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad (4.3.9)$$

EJEMPLO: Si se usa (4.3.8) en el ejemplo visto inmediatamente después de (4.1.2), se obtiene $\partial F_x / \partial y = Ax^2y^4$ mientras que $\partial F_y / \partial x = Bx^2y^4$, es decir, la fuerza de ese ejemplo es conservativa si y solo si $A = B$ lo que antes se pudo meramente sospechar después de hacer dos integrales. Si $A = B$ se concluye que $U(x, y) = x^3y^5/15$. ◀

Para un sistema de partículas sobre el que actúan tan solo fuerzas conservativas se tiene también una energía mecánica total y ella se puede escribir

$$E = \sum_a \left(\frac{1}{2} m_a + U(\vec{r}_a) \right) + \frac{1}{2} \sum_{a,b} U(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \quad (4.3.10)$$

El primer término es una suma de todas las energías cinéticas y las energías potenciales individuales (responsables de fuerzas externas, por ejemplo, el peso) y el segundo término se refiere a las interacciones mutuas entre pares de partículas y es el que permite definir las fuerzas internas.

4.4. Energía mecánica total no conservada

En general la fuerza total que actúa sobre un cuerpo puede ser separada en una suma de fuerzas conservativas más una suma de fuerzas no conservativas,

$$\vec{F}^{\text{total}} = \vec{F}_C + \vec{F}_{\text{NC}} \quad (4.4.1)$$

En consecuencia, el trabajo total efectuado desde a hasta b puede ser separado,

$$\begin{aligned} W^{\text{total}} &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_C \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_{\text{NC}} \cdot d\vec{r} \\ &= W_C + W_{\text{NC}} \\ &= \frac{1}{2} m (v_b^2 - v_a^2) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

pero

$$W_C = U_a - U_b \quad (4.4.3)$$

por lo cual

$$K_b - K_a = U_a - U_b + W_{\text{NC}} \quad (4.4.4)$$

de donde resulta que

$$W_{\text{NC}} = (K_b + U_b) - (K_a + U_a) \quad (4.4.5)$$

que se puede expresar como: *el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual a la diferencia: energía mecánica total final menos la energía mecánica total inicial,*

$$W_{\text{NC}} = E_{\text{final total}} - E_{\text{inicial total}} \quad (4.4.6)$$

4.5. Fuerzas centrales y energía potencial

4.5.1. Energía potencial de fuerzas centrales

Se verá a continuación que toda fuerza central de la forma

$$\vec{F} = f(r) \vec{r}, \quad \text{con} \quad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.5.1)$$

es conservativa. Para verlo primero se nota que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

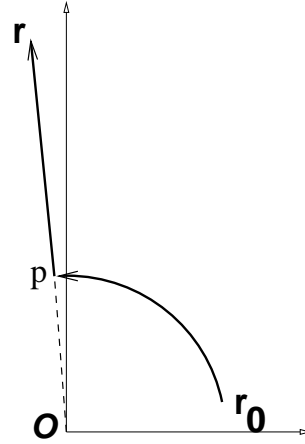
y de aquí

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (f(r)x) = \frac{\partial f}{\partial y} x = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} x = \frac{xy}{r} f' \quad (4.5.2)$$

que es simétrica en x e y y por tanto se satisfacen las condiciones (4.3.8).

Una vez que se sabe que estas fuerzas son conservativas se puede determinar la función energía potencial escogiendo un camino de integración conveniente entre dos puntos cualesquiera \vec{r}_0 y \vec{r} . Llamaremos r_0 a la distancia entre \vec{r}_0 y el centro \mathcal{O} asociado a la fuerza central y r a la distancia de \mathcal{O} a \vec{r} .

Ya que se tiene tres puntos especiales: \vec{r}_0 , \vec{r} y \mathcal{O} , ellos definen un plano (el plano del papel en la figura adjunta). El camino se puede construir avanzando desde \vec{r}_0 por un arco de circunferencia con centro en \mathcal{O} hasta un punto p (definido por \vec{r}_p) que está en la recta que une a \mathcal{O} con \vec{r} y desde p se sigue en línea recta hasta \vec{r} . La



integral de camino tiene dos partes: (a) la integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ de \vec{r}_0 hasta \vec{r}_p es nula porque mientras la fuerza es en la dirección \hat{r} , el elemento de camino $d\vec{r}$ es en la dirección tangente a la curva, que es ortogonal a \hat{r} ; (b) la integral desde \vec{r}_p hasta \vec{r} que es una integral a lo largo de una línea radial (pasa por el centro de fuerza) como muestra la figura adjunta. Siendo así, el desplazamiento a lo largo de este camino es radial: $d\vec{r} = \hat{r} dr$ lo que lleva

a

$$U(r) = - \int_{r_0}^r f(r) \vec{r} \cdot \hat{r} dr = - \int_{r_0}^r f(r) r dr \quad (4.5.3)$$

Es inmediato de lo anterior ver que la función de energía potencial depende tan solo de la coordenada radial r .

El gradiente de una función que solo depende de r , escrito en coordenadas esféricas, se reduce a $\nabla U(r) = \hat{r} dU/dr$ es decir,

$$\vec{F} = - \frac{dU}{dr} \hat{r} \quad (4.5.4)$$

lo que muestra que la fuerza que implica una función de energía potencial $U(r)$ que solo depende de la coordenada radial r es una fuerza central del tipo restringido descrito en (4.5.1). Lo que se ha expresado en la fórmula de arriba se puede decir forma más básica: si $U(r)$ entonces $F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -U' \frac{x}{r}$. Pero como \vec{r} es el vector (x, y, z) entonces $\vec{F} = - \frac{1}{r} U' \vec{r} = -U' \hat{r}$. La función $f(r)$ es $-\frac{1}{r} U'$.

4.5.2. La energía potencial asociada a la fuerza de gravitación universal

La ley de gravitación universal

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (4.5.5)$$

ya fue mencionada en §3.1. Para determinar la función energía potencial basta con hacer la integral a lo largo de un radio tal como se explicó en §4.5.1, es decir, $d\vec{r} = \hat{r} dr$. En tal caso

$$U = GMm \int_{r_0}^r \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}}{r^3} dr = GMm \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = GMm \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) \quad (4.5.6)$$

Lo normal es escoger $r_0 = \infty$ de donde

$$U(r) = - \frac{GMm}{r} \quad (4.5.7)$$

4.5.3. La energía potencial del oscilador armónico tridimensional

El potencial

$$U(r) = \frac{k}{2} r^2 \quad (4.5.8)$$

implica una fuerza,

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) = -k\vec{r} \quad (4.5.9)$$

que corresponde a la de un oscilador armónico tridimensional de largo natural nulo.

Casos más generales son

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{2} (r - D_0)^2 \quad (4.5.10)$$

o incluso

$$U(\vec{r}) = \frac{k_1}{2} (x - D_1)^2 + \frac{k_2}{2} (y - D_2)^2 + \frac{k_3}{2} (z - D_3)^2 \quad (4.5.11)$$

4.6. Energía potencial y equilibrio

4.6.1. Punto de equilibrio

La energía mecánica total de un cuerpo cuya fuerza total es conservativa es

$$E_{\text{mec total}} = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) \quad (4.6.1)$$

y esta cantidad es fija durante toda la evolución del sistema, es decir, si se la calcula en cualquier momento de su historia se obtiene el mismo valor. En ese sentido puede decirse que queda determinada por las condiciones iniciales.

En general el movimiento no puede extenderse en cualquier dirección arbitrariamente. Al despejar la magnitud de la velocidad:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{E_{\text{mec total}} - U(\vec{r})}} \quad (4.6.2)$$

que obviamente es real y positiva—se observa que en ningún momento la energía potencial U puede ser mayor que la energía total E . Si la partícula alcanza un punto en el cual se cumple que $E = U$, este es un punto con velocidad nula pero normalmente la fuerza

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}) \quad (4.6.3)$$

no lo es. El movimiento entonces se reinicia hacia puntos donde $E > U$.

» El gradiente de una función escalar cualquiera $h(\vec{r})$ siempre apunta en la dirección en que la función h crece más rápido, esto es, en la dirección en que su derivada es más grande y positiva. Por ejemplo si $h(x, y)$ es la función altura sobre el nivel del mar de la descripción de una zona de nuestra geografía en un mapa (plano XY), entonces ∇h apunta en la dirección en que la altura crece más rápido.

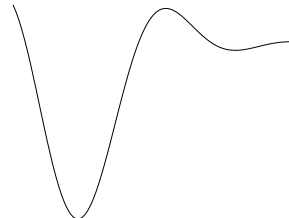
El gradiente de la función energía potencial apunta en la dirección en que el potencial crece con mayor derivada, pero como en (4.6.3) hay un signo menos, se concluye que la fuerza apunta en la dirección opuesta, en la dirección en que U decrece con mayor derivada.

Se llama punto de equilibrio a una posición \vec{r}_e en la cual la fuerza total es cero: $\nabla U(\vec{r}_e) = 0$. Para que el equilibrio sea *estable* se debe cumplir que al colocar en reposo a la partícula en un punto suficientemente cercano a \vec{r}_e , la partícula adquiera un movimiento oscilatorio en torno a ese punto.

4.6.2. Análisis unidimensional

En un caso unidimensional la energía potencial es una simple función $U(x)$ y la fuerza es $F = -dU/dx$. La fuerza apunta hacia la izquierda en los puntos en que U es creciente y apunta hacia la derecha en los puntos donde es decreciente.

En particular, en la vecindad de un mínimo x_e la fuerza que hay a la izquierda de este punto apunta hacia la derecha (también hacia x_e) y la fuerza que hay a la derecha de x_e apunta hacia la



izquierda (o sea hacia x_e). Esto permite entender porqué un mínimo de U es un punto de equilibrio.

Si una partícula está sometida a una fuerza total conservativa, se llama *punto de equilibrio estable* a un punto \vec{r}_e para el cual se cumple que:

(i) si la partícula es dejada en reposo en ese punto permanece en reposo en él; (ii) si se la deja en \vec{r}_e con una velocidad suficientemente pequeña, la partícula oscila en torno a ese punto.

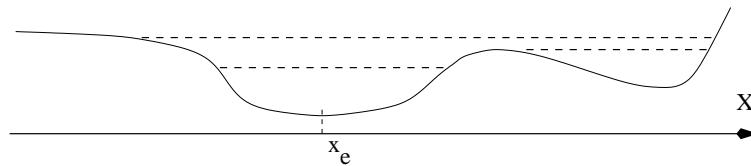
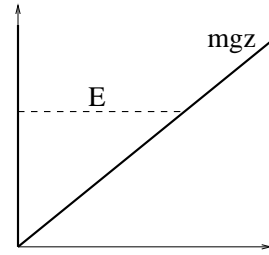


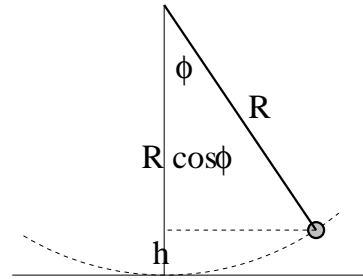
Figura 4.3: Ejemplo de función $U(x)$ con dos mínimos. Las líneas a trazos representan algunos valores posibles de la energía mecánica total. Puesto que (4.6.1) asegura que esta energía es siempre mayor, a lo sumo igual, a U entonces para los valores indicados de E el movimiento no puede extenderse indefinidamente en el eje x .

Como la fuerza total es conservativa, existe un potencial $U(x)$ y la fuerza total es $F = -dU/dx$. En las zonas donde U es creciente F es negativo (es decir, la fuerza apunta hacia la izquierda) y en las zonas donde U es decreciente, F es positivo. Esto muestra que si x_e es un mínimo de U la fuerza en una zona en torno a x_e apunta hacia x_e y es nula justo en x_e . Esto quiere decir que si se da como condición inicial $x(0) = x_e$ y una velocidad suficientemente pequeña, entonces la partícula va a ser frenada por la fuerza hasta que invierta el sentido de su movimiento. Debido a (4.6.1), en el punto x_1 en el cual la velocidad se hace cero se cumple que $E = U(x_1)$. En la figura 4.3 se puede ver gráficamente en qué puntos la partícula soltada desde x_e con la energía total indicada por línea de trazos, llega un punto en que su velocidad se hace cero—los *puntos de retorno*—y se devuelve. Para los tres valores de E indicados en la figura el movimiento ocurre en una zona limitada del eje X . También se puede adivinar que si la energía es suficientemente alta el movimiento puede ser no acotado.

EJEMPLO: La energía potencial debida a la fuerza peso es mgz . Una pelota ideal rebotando *ad infinitum* contral el suelo está sometida a esta energía potencial más la que reprenta el suelo: $U(z > 0) = mgz$ y $U(0) = \infty$. Dada una energía cinética inicial, la partícula tiene una energía total E fija para siempre y, como se ve en el diagrama, el movimiento es acotado entre el suelo ($z = 0$) y una altura máxima.



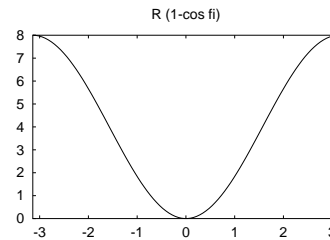
OTRO EJEMPLO: Un caso muy ilustrativo es el del péndulo plano formado por una vara rígida sin masa de largo R en cuyo extremo hay una masa puntual m . La energía cinética como siempre es $K = \frac{1}{2}mv^2$ pero en este caso $v = R\dot{\phi}$. La energía potencial esencialmente es mgh y, como se ve de la figura, $h = R(1 - \cos \phi)$. El cero de energía potencial se ha escogido en el punto más bajo que tiene el recorrido de la masa m .



De aquí que la ecuación para la energía total conservada sea

$$E_{MT} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\phi}^2 + mgR(1 - \cos \phi) \quad (4.6.4)$$

que muestra que el potencial en este caso es $mgR(1 - \cos \phi)$ y cuya forma se puede apreciar en la segunda figura adjunta.



Se puede comprobar que derivando (4.6.4) una vez con respecto al tiempo, se obtiene la conocida ecuación para el péndulo.

Y OTRO EJEMPLO MÁS: Consideremos un caso con energía potencial U dado por

$$U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \quad (4.6.5)$$

y x siempre positivo. Este potencial, representado en la figura 4.4 es divergente en el origen, tiene un único mínimo en $x_e = 2b/a$ y tiende a cero

cuando x crece indefinidamente. Para cualquier valor negativo de la energía total el movimiento está acotado entre dos valores x_{\min} y x_{\max} , (puntos de retorno)

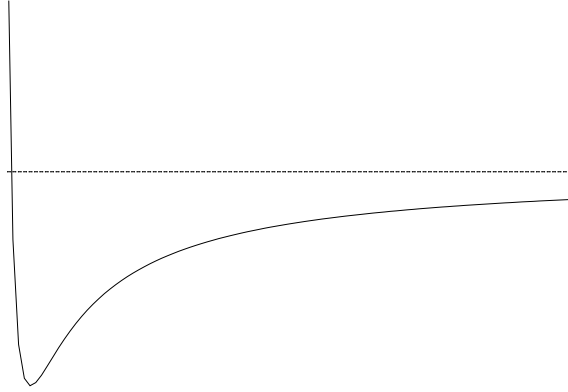


Figura 4.4: El potencial $-\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ tiene un solo mínimo, en $x = x_e = 2b/a$, y tiende a cero cuando $x \rightarrow \infty$.

$$x_{\min} = \frac{a}{2|E|} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4|E|b}{a^2}} \right), \quad x_{\max} = \frac{a}{2|E|} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4|E|b}{a^2}} \right) \quad (4.6.6)$$

Cuando la partícula alcanza uno de estos valores extremos la velocidad se hace cero pero $dU/dx \neq 0$, es decir, la fuerza es no nula y la partícula tiene una aceleración que apunta alejándose del valor extremo. En una situación así, el movimiento consiste en ir y volver entre estos dos valores extremos de x . El movimiento es periódico pero en general es diferente a un movimiento armónico simple.

En cambio, para cualquier valor positivo de la energía el movimiento tiene una cota inferior x_{\min} pero no tiene cota superior: una vez que la partícula adquiere velocidad hacia la derecha no cambiará más la dirección de su movimiento.

Si se escoge un punto cualquiera $x = x_0$ como posición inicial, ¿cuál es la mínima velocidad inicial para que la partícula logre tener un movimiento

no acotado hacia la derecha? La respuesta se obtiene exigiendo que en el momento inicial (y siempre) la energía sea no negativa, es decir, $\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \geq 0$, es decir,

$$v_0^2 \geq -\frac{2}{m}U(x_0). \quad (4.6.7)$$

En la zona en que $U(x_0)$ es positivo esta relación no es restricción alguna y la partícula escapa a infinito siempre; en cambio en la gran zona en que $U(x_0)$ es negativo (4.6.7) da una cota a la rapidez inicial. Esta cota inferior se denomina *velocidad de escape*. ◀

» Completamente en general la *velocidad de escape*—que depende de la posición inicial r_0 —es la velocidad mínima necesaria para que la partícula pueda tener movimiento no acotado.

Para una función de energía potencial arbitraria $U(x)$ que tiende a un valor constante U_∞ cuando $x \rightarrow \infty$ la velocidad de escape en un punto x cualquiera está dada por

$$v_{\text{esc}}(x) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{U_\infty - U(x)} \quad (4.6.8)$$

♣ *Determine el valor en metros por segundo de la velocidad para escapar de la atracción gravitacional de la Tierra partiendo desde el nivel del mar.*

Integración de caso conservativo unidimensional

La ecuación (4.6.2) unidimensional en un rango en que la velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

la cual puede escribirse en la forma integral

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (4.6.9)$$

válida, como se ha dicho, mientras la velocidad no cambie de signo. Esta es una solución formal de todos los problemas unidimensionales.

Caso sencillo en que la energía no se conserva

En lo anterior se ha explotado el análisis en el que las fuerzas son todas conservativas. Sin embargo si se toma el caso en que se agrega una fuerza constante no conservativa como es el caso del roce dinámico, también se tiene un gráfico de energía suficientemente sencillo para poder hacer un análisis fácil de interpretar.

Considérese el caso de un oscilador sobre un plano horizontal: $m\ddot{x} = -kx$ al que se agrega la fuerza de roce dinámico. Este roce apunta hacia la izquierda cuando es el movimiento es hacia la derecha ($\dot{x} > 0$) y viceversa, es decir, $F_{\text{roce}} = -\varepsilon \mu mg$ donde ε es el signo de \dot{x} . Mientras el desplazamiento es hacia la derecha, la fuerza es negativa y el trabajo que esta fuerza no conservativa efectúa es proporcional a x . En efecto, de la ecuación de movimiento completa: $m\ddot{x} = -kx - \varepsilon \mu mg$ se puede integrar una vez para obtener

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -\frac{k}{2}x^2 - \varepsilon \mu mgx$$

que se puede escribir como

$$E_{MT}(t) = E_{MT}^{(0)} - \varepsilon \mu mgx(t)$$

Esta última relación describe la forma como la energía mecánica total inicial $E_{MT}^{(0)}$ va disminuyendo a medida que el sistema evoluciona.

♣ *Resuelva un caso específico para el cual pueda hacer un gráfico que ilustre la evolución $E_{MT}(t)$.*

4.6.3. Oscilaciones en torno a un punto de equilibrio. Caso 1D.

Consideremos el caso de un potencial $U(x)$ que tiene un mínimo en $x = x_e$. No tendrá importancia si U tiene además otros mínimos. Puesto que se trata de un mínimo, está garantizado que $(dU/dx)_{x=x_e} = 0$. Supondremos que el movimiento tiene una energía total levemente superior a $U(x_e)$, es decir, la energía cinética es siempre muy pequeña y la partícula permanece todo el tiempo muy cerca de $x = x_e$. El punto x_e tiene a ambos lados puntos de retorno muy cercanos. En tal caso, la expansión de $U(x)$ en torno a

x_e que solo llega hasta la segunda derivada de la función puede ser una excelente aproximación para U ,

$$U(x) \approx U(x_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=x_e} (x - x_e)^2 \quad (4.6.10)$$

Este potencial aproximado da como fuerza aproximada

$$F(x) = -k(x - x_e) \quad \text{con} \quad k = \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=x_e} \quad (4.6.11)$$

que es la fuerza de un resorte de largo natural x_e y constante elástica dada por la segunda derivada de U evaluada en el mínimo. El movimiento es armónico simple. La constante k es positiva debido a que x_e es un mínimo y la frecuencia angular de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_e)}{m}} \quad (4.6.12)$$

En general, entonces, el movimiento de pequeñas oscilaciones en torno a un mínimo de potencial es armónico simple excepto en los casos en que la derivada U'' en ese punto sea nula. Por ejemplo, no hay pequeñas oscilaciones armónicas en torno al origen en el caso $U = ax^4$.

» Cuando una partícula se mueve muy cerca del punto en que U tiene un mínimo, $U = U_{\min}$, y la energía total es levemente superior a este valor U_{\min} , el movimiento de la partícula es aproximadamente un movimiento armónico simple en torno al punto de equilibrio.

El movimiento oscilatorio que ocurre en estas circunstancias se denomina pequeñas oscilaciones en torno a un punto de equilibrio.

4.6.4. Ejemplo de energía y pequeñas oscilaciones

Para ilustrar varios de los conceptos recientes se analizará el caso de un péndulo que tiene dos masas en varas que forman un ángulo recto, como muestra la figura. Veremos cuál es el ángulo máximo si el sistema se suelta del reposo con $\phi = 0$. Veremos cuánto vale la velocidad angular cuando $\phi = \pi/2$ y finalmente veremos la frecuencia en el caso de pequeñas oscilaciones en torno al ángulo ϕ_e de equilibrio estático.

La energía del sistema es la suma K de las energías cinéticas más la suma U de las energías potenciales:

$$E = \frac{m}{2} (a\dot{\phi})^2 + \frac{m}{2} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \dot{\phi} \right)^2 - mga \sin \phi - mg(a \sin \phi + b \cos \phi)$$

- Si se suelta desde el reposo (esto es, $\dot{\phi} = 0$) con $\phi = 0$ la energía inicial es

$$E_{\text{ini}} = -mgb$$

y este es el valor que tendrá durante todo el movimiento.

El ángulo máximo lo alcanza en otro punto en el cual $\dot{\phi} = 0$. Se debe exigir que la energía en ese momento sea

$$-mg(2a \sin \phi + b \cos \phi) = -mgb$$

que tiene dos soluciones, una es la condición inicial $\phi = 0$ y la otra es para el máximo valor posible ϕ_M para el ángulo

$$\sin \phi_M = \frac{4ab}{4a^2 + b^2}$$

Para saber la velocidad angular cuando $\phi = \pi/2$ se vuelve a aplicar conservación de energía:

$$\frac{m}{2} (2a^2 + b^2) \dot{\phi}^2 - mg2a = -mgb$$

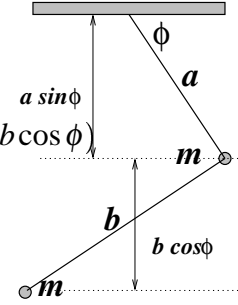
que implica

$$\dot{\phi}(\phi = \frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{2g(2a - b)}{2a^2 + b^2}}$$

Este resultado no tiene sentido salvo cuando $2a \geq b$. Esto se debe a que si tal desigualdad no se obedece el péndulo no llega nunca a tener $\phi = \pi/2$ con la condición inicial escogida.

- Veamos ahora cuánto vale la energía si el sistema está en equilibrio estable. En tal situación $\dot{\phi} = 0$ y el sistema está en un mínimo de energía potencial. La derivada de la energía potencial con respecto a ϕ es

$$U' = -mg(2a \cos \phi - b \sin \phi)$$



que se anula cuando

$$\tan \phi_e = \frac{2a}{b}$$

y se comprueba que para este valor del ángulo la energía potencial, que es la energía total en el caso estático, vale

$$E_{\min} = -mg\sqrt{4a^2 + b^2}$$

Antes de calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones del actual ejemplo, vale la pena hacer notar que si la energía de un sistema es

$$E = \frac{\alpha}{2} \dot{\phi}^2 + U(\phi) \quad (4.6.13)$$

entonces la ecuación dinámica es $dE/dt = 0$ que aquí resulta ser $\ddot{\phi} = -\frac{1}{\alpha}U'$. Si $\phi = \phi_e$ es un punto de equilibrio estable, se cumple que $U'(\phi_e) = 0$ y $U''(\phi_e) > 0$ (condición de mínimo). La ecuación dinámica en una pequeña vecindad del mínimo en ϕ_e aproximadamente es $\ddot{\phi} \approx -(U''(\phi_e)/\alpha)(\phi - \phi_e)$, que se reconoce como una ecuación de movimiento armónico simple con frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(\phi_e)}{\alpha}} \quad (4.6.14)$$

Con lo ya dicho resulta muy fácil determinar que en el presente ejemplo la frecuencia al cuadrado es

$$\omega^2 = \frac{g\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a^2 + b^2}$$

4.6.5. Equilibrio y pequeñas oscilaciones en 2D y 3D

En dos o tres dimensiones hay más casos posibles. En la figura 4.5 se representa un potencial $U(x,y)$ que tiene dos mínimos, es decir, dos puntos de equilibrio estable, un mínimo más profundo que el otro. Si esta superficie se cortara por un plano horizontal a alguna altura E se tendría la zona en la cual el movimiento puede darse ($E \geq U$). En la base de esta figura se puede ver las curvas de nivel las cuales representan precisamente curvas $U = \text{constante}$. Considérese, por ejemplo, la curva cerrada en torno al

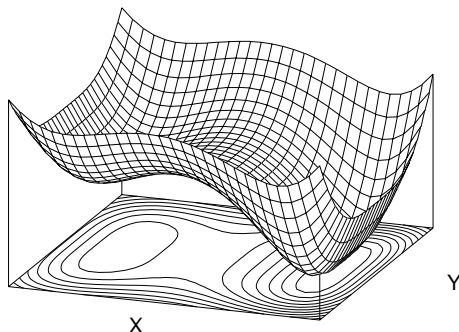


Figura 4.5: Ejemplo de la forma de un potencial $U(x,y)$ con dos puntos de equilibrio estable.

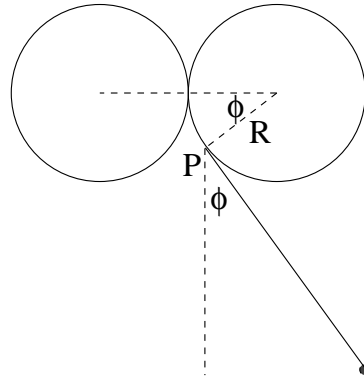
mínimo izquierdo que aparece en la base de la figura. Ella corresponde a un cierto valor $U = E_0$. La zona interior a esa curva cumple con $E_0 \geq U(\vec{r})$. Es decir, si la partícula tiene energía total E_0 y su posición inicial fue dada dentro de esta zona, el movimiento será todo el tiempo dentro de esta zona.

Hay otro punto interesante de este potencial: es un punto entre los dos mínimos y él es un máximo en la dirección X y un mínimo en la dirección Y . A tales puntos se les llama *punto silla* y son puntos de equilibrio inestables aunque la fuerza en ellos es nula.

No veremos en detalle la forma del movimiento armónico simple en el caso de un potencial $U(x,y)$ y tan solo se dice a modo de complementación cultural que es necesario considerar la matriz de valores $M_{ab} = \partial^2 U / \partial x_a \partial x_b$, se debe diagonalizar y estudiar sus autovalores.

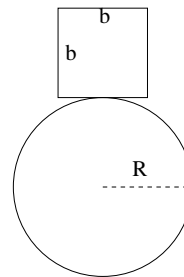
4.6.6. Problemas de pequeñas oscilaciones

4A.1 Se tiene un péndulo plano que consta de un hilo de largo D que tiene una partícula puntual de masa m en su extremo inferior. Pero no es un péndulo común porque su origen superior está en el punto de contacto entre dos circunferencias de radio R , como lo muestra la figura. Cuando el péndulo oscila se enrolla un poco en forma alternada en las dos circunferencias, de modo que su largo instantáneo no es D sino $(D - R\phi)$ y su centro instantáneo de giro es el punto P de tangencia (ver figura).



a) Obtenga las ecuaciones escalares de movimiento, una de ellas sirve para determinar la tensión del hilo y la otra es la interesante. b) Escriba la energía cinética, $K(\phi, \dot{\phi})$ y la energía gravitacional $U(\phi)$. c) Demuestre que la exigencia de conservación de la energía mecánica, $dE/dt = 0$, conduce a la ecuación interesante de movimiento. d) Escriba la ecuación asociada a pequeñas oscilaciones.

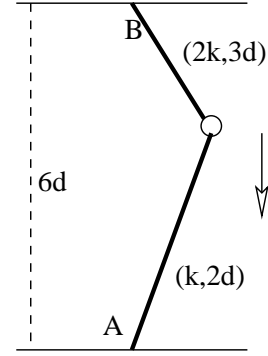
4A.2 Un cubo de arista de largo b está apoyada en la parte más alta de un cilindro horizontal fijo de radio R (ver figura). El contacto es perfectamente rugoso (no hay deslizamiento). Determinar la relación entre R y b para que el cubo esté en equilibrio estable a pequeñas oscilaciones. Considere que toda la masa del cubo está concentrada en su centro geométrico.



4A.3 (a) Calcule el valor de la función de energía potencial U definido en (4.6.5) en el punto de equilibrio x_e ; (b) Calcule los puntos de retorno cuando la energía total es $E = (1 - \varepsilon^2)U(x_e)$; haga una expansión de estos valores de las posiciones de retorno al más bajo orden

no trivial en ε . Determine el período T de estas oscilaciones en la aproximación ya usada.

- 4A.4 Una partícula P de masa m está sometida a la fuerza de dos resortes. Estos dos resortes de constantes elásticas $k_A = 2k$ y $k_B = k$ tienen largos naturales $3d$ y $2d$ respectivamente y tienen puntos fijos, como lo muestra la figura, en un punto A el primero y el segundo en un punto B verticalmente sobre él a distancia $6d$. Determinar las frecuencias a pequeñas oscilaciones verticales y a pequeñas oscilaciones horizontales.



4.7. Barrera centrífuga

4.7.1. La noción

Intuitivamente la noción de barrera centrífuga puede comprenderse a partir de la conservación del momento angular que se tiene cuando la fuerza total es central con centro en \mathcal{O} . En forma poco precisa se puede decir que el momento angular $\ell_{\mathcal{O}}$ es proporcional a la distancia R de la partícula al centro \mathcal{O} y también es proporcional a la velocidad angular, $\ell_{\mathcal{O}} \sim R\dot{\phi}$. Puesto que $\ell_{\mathcal{O}}$ es constante, si R comienza a decrecer, $\dot{\phi}$ tiene que crecer en la misma proporción. La aceleración centrípeta, por otro lado es $a_n \sim v^2/R \sim R\dot{\phi}^2$, es decir, a_n crece también. En otras palabras, para disminuir R se necesita cada vez una mayor fuerza hacia el centro (centrípeta), lo que se siente como si se estuviera contrarrestando una barrera que expulsa del centro (centrífuga).

Cuando la fuerza total es central, proveniente de una energía potencial $U(r)$,

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dr} \hat{r} \quad (4.7.1)$$

el momento angular se conserva y el movimiento es plano. En tal caso se puede describir todo el movimiento con las coordenadas polares (r, ϕ)

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} \quad (4.7.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi} \\ &= \vec{a}_r + \vec{a}_\phi \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

El momento angular con respecto al centro de fuerzas, que sabemos que se conserva en el caso de fuerza central, es

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= m\vec{r} \times \vec{v} \\ &= mr^2\dot{\phi}\hat{k} \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Al coeficiente que multiplica a \hat{k} lo denominaremos ℓ ,

$$\ell = mr^2\dot{\phi} \quad (4.7.5)$$

Siendo central la fuerza total, la aceleración \vec{a}_ϕ tiene que ser cero, lo que equivale a

$$0 = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\phi})$$

que es cierto porque el momento angular es constante. Usando la definición de ℓ dada más arriba se puede hacer el reemplazo

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2} \quad (4.7.6)$$

La energía mecánica total del sistema es $E = K + U$ donde $K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$ que ahora se puede escribir, gracias a (4.7.6), en la forma

$$E_{MT} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r) \quad (4.7.7)$$

El primer término es la contribución a la energía cinética del movimiento radial y el segundo es la contribución a la energía cinética debida a la velocidad angular $\dot{\phi}$.

La ecuación de movimiento en el caso actual puede escribirse en la forma $ma_r = -dU/dr$:

$$m \left(\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2 r^3} \right) = -\frac{dU}{dr} \quad (4.7.8)$$

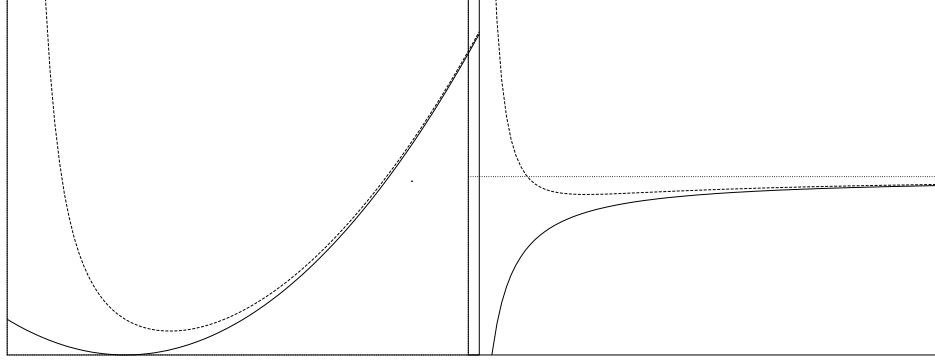


Figura 4.6: A la izquierda el potencial del oscilador armónico $U = k(r - D_0)^2/2$ que se anula en $r = D_0$ y el potencial efectivo U^* asociado. A la derecha se compara la función U con U^* en el caso del potencial gravitacional. El potencial gravitacional U es infinitamente negativo en el origen y crece asintóticamente a cero. El potencial efectivo U^* diverge a $+\infty$ en el origen, para cierto r se anula, pasa a valores negativos, llega a un mínimo y luego crece acercándose cada vez más a U .

que se reescribe como

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(U + \frac{\ell^2}{2mr^2} \right) = -\frac{d}{dr} U^*(r) \quad (4.7.9)$$

y puede ser deducida directamente de (4.7.7) sencillamente calculando $dE_{MT}/dt = 0$. Se obtiene una ecuación (4.7.9) para $r(t)$. Ya se estableció la dependencia de ϕ en r en (4.7.6).

Lo notable es que esta ecuación de movimiento es equivalente a la ecuación de movimiento de una partícula en el eje X con energía potencial $U^* = \frac{A}{x^2} + U(x)$, siempre que en ambos casos se tome la misma función U y $A = \ell^2/(2m)$.

Se ha demostrado las siguientes propiedades del movimiento de un cuerpo de masa m bajo el efecto de una fuerza total central de la forma (4.5.1):

- La fuerza es conservativa y es $-\hat{r}dU(r)/dr$, donde $U(r)$ es función energía potencial.
- Hay momento angular conservado implicando que el movimiento es plano. Queda ligada la velocidad angular con el radio r por medio de (4.7.6).

- La ecuación de movimiento, que es en un plano, se reduce a la ecuación tan solo para $r(t)$, es decir, se convierte en el problema unidimensional (4.7.9).
- Esta ecuación es matemáticamente equivalente a la ecuación de un movimiento unidimensional, solo que en lugar de tener a $U(r)$ como energía potencial, juega ese papel la función *potencial efectivo* U^* ,

$$U^*(r) = U(r) + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2}}_{\text{barrera centrífuga}} \quad (4.7.10)$$

Al último término en U^* se le conoce como *barrera centrífuga*.

Para el importante caso gravitacional definido con (4.5.7) el potencial efectivo tiene un mínimo. En efecto, si $U^* = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ entonces U^* es mínimo en $r_0 = 2b/a$.

4.7.2. Ejemplo sencillo

Una partícula libre es un caso trivial de “fuerza central”: $\vec{F} = 0$ y puede tomarse $U = 0$. Sin embargo U^* no es nulo. Nada malo hay en ilustrar este caso con el movimiento descrito en la figura 1.3, $\vec{r} = b\hat{j} + \hat{i}t v_0$.

Este movimiento también puede ser descrito utilizando coordenadas $(r(t), \phi(t))$: $x = v_0 t = r \sin \phi$ y $y = b = r \cos \phi$. Mirando la figura 1.3 debiera resultar obvio que si la partícula inicia su movimiento desde una posición bien a la izquierda, la variable $r(t)$ irá disminuyendo con el tiempo, alcanzará un mínimo $r = b$ y luego $r(t)$ comenzará a crecer, de modo que si el movimiento es visto solamente desde el punto de la variable r pareciera que ha habido un bote a distancia b en una *barrera centrífuga* para comenzar a alejarse.

De la definición de las coordenadas usadas se deduce que

$$\dot{r} = v_0 \sin \phi \quad \dot{\phi} = \frac{v_0 \cos \phi}{r}$$

de donde es inmediato calcular que

$$m\ddot{r} = m v_0 \dot{\phi} \cos \phi = \frac{m v_0^2 \cos^2 \phi}{r} = \frac{m v_0^2 b^2}{r^3} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} = -\frac{d}{dr} \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Es decir, el simple movimiento con velocidad uniforme $v_0 \hat{t}$ de una partícula libre puede ser visto como un movimiento bajo los efectos de una barrera centrífuga. ◀

4.7.3. Orbitas circunferenciales

La energía cinética expresada con las coordenadas polares (r, ϕ) es

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} v^2 &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \\ &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

En el segundo paso se reemplazó la velocidad angular $\dot{\phi}$ por la expresión (4.7.6) ya encontrada en términos de ℓ .

Una órbita es circunferencial cuando su velocidad radial es constantemente nula, es decir, cuando tanto $\dot{r} = 0$ como $\ddot{r} = 0$. Esto último implica que debe encontrarse un radio $r = r_c$ tal que $dU^*/dr = 0$

$$\frac{dU^*}{dr} = 0 \quad (4.7.12)$$

Si se resuelve (4.7.12) se deduce un valor particular $r = r_c$ el que depende paramétricamente del valor ℓ . Éste es el radio de la órbita circunferencial.

La energía cinética en el caso de la órbita circunferencial se reduce a

$$K_{\text{órbita circunf}} = \frac{\ell^2}{2mr_c^2} \quad (4.7.13)$$

Puede verse que esta última expresión coincide con la expresión del término que se agrega a U para formar U^* , es decir, la barrera centrífuga.

Conociendo el valor de la energía cinética y de la energía potencial, la energía mecánica total es $K + U$ y está dada por

$$E = \frac{\ell^2}{2mr_c^2} + U(r_c) \quad (4.7.14)$$

Ella está totalmente determinada por el radio r_c .

EJEMPLO: Si se toma el caso gravitacional $U = -GMm/r$ la solución de (4.7.12) arroja

$$r_c = \frac{\ell^2}{GMm^2} \quad (4.7.15)$$

Aquí se puede apreciar que las órbitas planetarias circunferenciales tienen un radio que está dado por su momento angular ℓ . Pero tal vez una forma más satisfactoria de decir lo mismo se logra recordando que este es un movimiento circunferencial con velocidad angular uniforme $\omega = \dot{\phi} = \ell/(mr_c^2)$ de donde

$$r_c = \left(\frac{GM}{\omega^2} \right)^{1/3} \quad (4.7.16)$$

que no depende de la masa m del planeta sino tan solo de su velocidad angular. Con este valor la energía total es

$$E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2 \ell^2} \quad (4.7.17)$$

Los satélites geocéntricos son satélites alrededor de la Tierra, en el plano ecuatorial, que tienen una velocidad angular igual a la velocidad angular de la Tierra. Para un observador en la Tierra el satélite parece estar detenido. Estas son las órbitas que usan los satélites de comunicaciones. ◀

Las pequeñas oscilaciones de $r(t)$ en torno a una órbita circunferencial con un momento angular ℓ fijo se obtiene de (4.6.12) usando como potencial a U^* ,

$$U^* = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Su segunda derivada con respecto a r es $U^{*''} = -2GMm/r^3 + 3\ell^2/mr^4$. Si se reemplaza $\ell = mr^2\omega$ (donde $\omega = \dot{\phi}$ es la velocidad angular del satélite), el último término ya no depende de r . Si seguidamente se reemplaza r por su valor dado en (4.7.16), se obtiene que la frecuencia de estas pequeñas oscilaciones de r en torno al valor r_c es

$$\omega_{\text{peq. osc.}} = \omega$$

Esto significa que el tiempo que tarda el valor de r en tomar dos veces consecutivas su valor mínimo coincide con el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta, lo que implica que la órbita $r(\phi)$ es cerrada.

♣ Calcule a qué distancia del centro de la Tierra debe estar un satélite para que sea geoestacionario. Compruebe que están a decenas de miles de kilómetros. (Los satélites más usuales están a pocos cientos de kilómetros de altura).

♣ Si la fuerza total sobre un cuerpo es $\vec{F} = k r^a \hat{r} + \alpha \vec{v} \times \vec{r}$, ¿Cómo varía la energía mecánica total con el tiempo? (k , a y α son constantes conocidas).

4.8. Planetas y todo eso

4.8.1. La ecuación de la órbita y su integral

Ya se sabe que la ecuación de movimiento reducida a la ecuación sólo para $r(t)$ es

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} \quad (4.8.1)$$

Esta ecuación es difícil de analizar en forma directa y lo que resulta más sencillo es resolver la ecuación de la órbita, es decir, $r(\phi)$ (y no $r(t)$). Pero más sencillo aun es la ecuación para

$$w(\phi) \equiv \frac{1}{r(\phi)} \quad (4.8.2)$$

En lo sucesivo se va a denotar con prima las derivadas con respecto a ϕ ,

$$\frac{d}{d\phi} = (') \quad (4.8.3)$$

Utilizando la regla de la cadena $\dot{r} = \dot{\phi} r'$ y recordando que $\dot{\phi} = \ell/(mr^2)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\ell}{mr^2} r' \\ \ddot{r} &= \frac{\ell^2}{m^2 r^4} \left(r'' - \frac{2r'^2}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

Los pasos anteriores y los que siguen son válidos solo si $\ell \neq 0$. Ya que $r = 1/w$ entonces

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{w'}{w^2} \\ r'' &= -\frac{w''}{w^2} + \frac{2w'^2}{w^3} \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

Al reemplazar todo esto en (4.8.1) resulta la ecuación

$$w'' + w = \frac{GMm^2}{\ell^2} \quad (4.8.6)$$

que es un tipo de ecuación que ya se conoce, como por ejemplo: $m\ddot{x} = -kx + mg$. Su solución general es,

$$w(\phi) = A \cos(\phi + \delta) + \frac{GMm^2}{\ell^2} \quad (4.8.7)$$

donde A y δ son las dos constantes de integración. Siempre se puede escoger el eje a partir del cual se mide ϕ de tal modo que $\delta = 0$ que es lo que se hace a partir de ahora. Tal elección corresponde a cónicas orientadas en forma simétrica con respecto al cambio $y \rightarrow -y$.

Puesto que el inverso de w es r , (4.8.7) implica que

$$r(\phi) = \frac{\frac{\ell^2}{GMm^2}}{1 + \frac{A\ell^2}{GMm^2} \cos \phi} \quad (4.8.8)$$

Antes de continuar se hace un repaso de la forma como se puede escribir una cónica.

4.8.2. Cónicas

A continuación se va a demostrar que $r(\phi)$ dado por

$$r(\phi) = \frac{R}{1 + e \cos \phi} \quad (4.8.9)$$

define diversas cónicas según el valor de la *excentricidad* e . El parámetro R define la escala de longitud de la cónica.

Si (4.8.9) se escribe como $r + e r \cos \phi = R$ o equivalentemente como $x^2 + y^2 = (R - ex)^2$ donde se ha usado

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (4.8.10)$$

se obtiene

$$(1 - e^2)x^2 + 2eRx + y^2 = R^2 \quad (4.8.11)$$

que es una de las formas conocidas que describe cónicas. En efecto, todo polinomio cuadrático $\text{Pol}_i(x, y) = 0$ representa una cónica en el plano XY .

Si en (4.8.11) se hace el desplazamiento (válido tan solo si $e^2 \neq 1$)

$$x = \bar{x} - \frac{eR}{1 - e^2} \quad (4.8.12)$$

la ecuación puede ser reescrita como

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{R^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{1 - e^2}} = 1 \quad (4.8.13)$$

Esta forma describe elipses e hipérbolas centradas en el origen. En efecto, si $e^2 < 1$ esta es fácilmente reconocible como la ecuación de una elipse. En particular, si $e = 0$ se obtiene una circunferencia. Si $e^2 > 1$ lo es de una hipérbola. La ecuación (4.8.11) en cambio deja a uno de los focos de la cónica en el origen.

Elipses: $e^2 < 1$

Una elipse es una curva que se caracteriza porque la suma $L_1 + L_2$ de las distancia de cualquier punto P de la elipse a dos puntos especiales llamados *focos*, vale siempre lo mismo. Estos dos focos están en el interior de la elipse sobre su eje mayor. El caso particular en que los dos focos se funden en un solo punto produce una circunferencia.

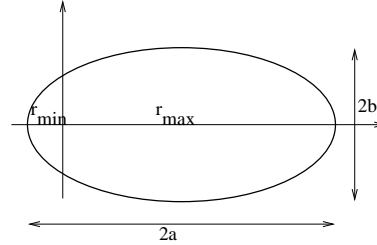
En la forma original descrita en (4.8.11) esta es una elipse con uno de sus focos en el origen y tiene sus radios mínimo y máximo sobre el eje X . Se tomará el caso $e > 0$.

Para $\phi = 0$ se obtiene r_{\min} y para $\phi = \pi$ se tiene r_{\max}

$$r_{\min} = \frac{R}{1+e} \quad r_{\max} = \frac{R}{1-e} \quad (4.8.14)$$

Los semiejes mayor y menor son

$$a = \frac{R}{1-e^2} \quad b = \frac{R}{\sqrt{1-e^2}} \quad (4.8.15)$$



Hipérbolas: $e^2 > 1$

Una hipérbola es una cónica disconexa, constando de dos ramas. Al igual que en el caso de una elipse, hay dos puntos especiales llamados focos. Esta vez la diferencia de las distancias: $|L_1 - L_2|$ entre cualquier punto P de la hipérbola y los dos focos es una constante. Las hipérbolas son curvas infinitas que tienden, a grandes distancia, a coincidir con dos rectas llamadas las *asíntotas*. La distancia entre ambos focos es $2eR/(e^2 - 1)$. La menor distancia entre las dos ramas de una hipérbola es $2R/(e^2 - 1)$.

Parábola: $e^2 = 1$

Una parábola tiene un solo punto llamado foco, el cual está sobre el único eje de simetría de la curva. La distancia entre el punto de máxima curvatura y el foco es R .

Si en un punto P de la parábola se traza la recta hasta el foco y la paralela al eje de simetría, la bisectriz es perpendicular a la tangente a la parábola. Esta propiedad es la que hace tan útiles los espejos parabólicos para hacer desde focos de linterna hasta telescopios y antenas.

El caso $e^2 = 1$ debe ser analizado antes de dividir por $e^2 - 1$. Por ejemplo de (4.8.11) se tiene con $e = \pm 1$

$$y^2 = R^2 \pm 2Rx \quad (4.8.16)$$

que son ecuaciones para dos parábolas.

4.8.3. El caso planetario

Ahora que se sabe la forma de describir las cónicas se puede identificar

$$\begin{aligned} R &= \frac{\ell^2}{GMm^2} \\ e &= \frac{A\ell^2}{GMm^2} \end{aligned} \quad (4.8.17)$$

A continuación se verá cómo relacionar A con la energía total E y el momento angular ℓ .

La energía está dada por

$$E = \frac{m}{2} v^2 + U_G(r) \quad (4.8.18)$$

pero de (4.7.2) y luego de (4.8.4)

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^4} (r^2 + r'^2) \quad (4.8.19)$$

entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{\ell^2}{2m r^4} (r^2 + r'^2) - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{\ell^2}{2m} (w^2 + w'^2) - GMmw \end{aligned} \quad (4.8.20)$$

Al reemplazar la forma explícita de la función w se obtiene

$$E = \frac{\ell^2 A^2}{2m} - \frac{m}{2} \left(\frac{GMm}{\ell} \right)^2 \quad (4.8.21)$$

lo que permite establecer que A depende de E y ℓ en la forma

$$A = \pm \frac{GMm^2}{\ell^2} \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{(GMm)^2 m}} \quad (4.8.22)$$

De todo lo anterior se reconoce que

$$\boxed{R = \frac{\ell^2}{GMm^2}, \quad e^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{(GM)^2 m^3}.} \quad (4.8.23)$$

	excentricidad: e	radio medio [$10^8 \times \text{Km}$]
Mercurio	0.206	0.58
Venus	0.007	1.08
Tierra	0.017	1.50
Marte	0.093	2.28
Júpiter	0.048	7.78
Saturno	0.056	14.27
Urano	0.047	28.89
Neptuno	0.008	44.98
Plutón	0.249	59.0
Cometa Halley	0.967	

Cuadro 4.1: Los planetas, las excentricidades de sus órbitas y el radio medio de las respectivas órbitas.

Si se reemplaza el valor (4.7.17) de la energía de una órbita circular se comprueba que $e = 0$.

Para elipses, $e^2 < 1$ y entonces $E < 0$.
 Para parábolas, $e^2 = 1$ y entonces $E = 0$.
 Para hipérbola, $e^2 > 1$ y entonces $E > 0$.

EJEMPLO: Desde una distancia r_0 del centro de fuerza se lanza un satélite con velocidad \vec{v}_0 , perpendicular al vector posición inicial \vec{r}_0 .

La energía es $E = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$ y $\ell^2 = m^2 r_0^2 v_0^2$.

El caso límite es el de la parábola, es decir, el caso con $E = 0$,

$$v_0^2 = v_P^2 \equiv 2GM/r_0.$$

Si $v_0 < v_P$ la órbita es una elipse. Para el caso particular $v_0 = \sqrt{GM/r_0}$ se obtiene una circunferencia. Para $v_0 > v_P$ la órbita que resulta es una hipérbola. ◀

4.8.4. La tercera ley de Kepler

De la segunda ley de Kepler, (2.3.20), se desprende que el período T del movimiento planetario se relaciona al área de la elipse, $S = \pi ab$,

$$T = \frac{2mS}{\ell} = \frac{2m\pi ab}{\ell} = \frac{2m\pi}{\ell} \frac{R^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

pero se sabe que $\ell^2 = GMm^2R$. Calculando T^2 se puede reemplazar ℓ^2 por la relación recién escrita, resultado

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

que es la tercera ley de Kepler expresada con el semieje mayor, a .

4.9. Problemas

4B.1 Reestudie el problema de la argolla sin roce en una vara horizontal resuelto en §2.1.2. Obtenga la forma de la trayectoria, es decir, $\rho(\phi)$ y calcule el trabajo que la normal ejerce sobre la argolla cuando ésta da una vuelta completa.

4B.2 Determine la fuerza \vec{F} que implica la función de energía potencial

$$U = \frac{k}{2} (r - B) r$$

donde B es una constante positiva. Determine en qué situación realista se puede tener una fuerza como esta.

4B.3 Considere una partícula que se mueve en la región $x > 0$ bajo la influencia de la fuerza que proviene de la energía potencial $U(x) = \frac{U_0}{x} (1 + ax^2)$ con $U_0 > 0$. Encuentre puntos de equilibrio y discuta la estabilidad de ellos.

4B.4 Una partícula se mueve sin roce por la superficie interior de un cono de eje vertical, vértice abajo y ángulo α entre una generatriz y la vertical. Demuestre que la energía potencial efectiva U^* es

$$\frac{\ell^2}{2m\rho^2} + m g \rho \cot \alpha$$

donde ρ es la coordenada radial de coordenadas cilíndricas. Encuentre la frecuencia de las pequeñas oscilaciones cuando ρ oscila levemente en torno a un valor ρ_0 .

4B.5 Se tiene en órbita geoestacionaria una gran esfera hueca. Al centro de esa esfera flota una pequeña masa. Si se le da un pequeño impulso, ¿cuál es su frecuencia de oscilación en torno al centro de la gran esfera?

4B.6 Considere el movimiento de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza

$$\vec{F} = x(y^2 + z^2)\hat{i} + y(x^2 + z^2)\hat{j} + z(x^2 + y^2)\hat{k}$$

a) Demostrar que esta fuerza es conservativa. b) Encontrar la energía potencial $U(x, y, z)$ asociada a esta fuerza, tal que sea nula en el origen. c) Si la partícula es soltada desde el origen con rapidez v_0 , determine la rapidez en un punto cualquiera (x_1, y_1, z_1) .

4B.7 Si se considera la ecuación genérica para el radio, $r(t)$ con fuerza central proveniente de $\vec{F} = F(r)\hat{r}$, es decir, $m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} + F(r)$ demuestre que en lugar de (4.8.6) se obtiene

$$w'' + w = -\frac{mF(1/w)}{\ell^2 w^2}, \quad \text{ecuación de Binet}$$

4B.8 Un satélite artificial tiene una distancia máxima y mínima a la superficie terrestre de R y $3R$, siendo R el radio de la Tierra. Determine el período de rotación en función de la masa de la Tierra y de su radio. Suponga que en el momento en que el satélite está en su punto más bajo se activa su sistema de propulsión que lo deja en órbita circular. ¿Cuál es el período de esta nueva órbita?

4B.9 Una partícula P está sometida a la fuerza central dada por

$$\vec{F}(r) = -12B \left(\frac{a^6}{r^7} - \frac{a^{12}}{r^{13}} \right) \hat{r}$$

donde B y a son constantes positivas conocidas. Si ésta es la única fuerza sobre P determine, a) cuál es la rapidez mínima que debe

- tener P en $r = a$ para que la partícula pueda escapar sin retorno; b) cuál es la distancia máxima (o mínima) entre P y el centro de fuerzas si P se está moviendo radialmente de tal modo que pasa por $r = a$ con una rapidez que es la mitad de la encontrada en la pregunta anterior.
- 4B.10 Un satélite está describiendo una órbita circular de radio R alrededor de la Tierra. En cierto momento los cohetes del satélite se encienden brevemente dándole una aceleración puramente tangencial. Si el período de la nueva órbita es $\frac{27}{8}$ del período que tenía antes, determine la rapidez de la nave cuando pasa por el punto en que se encuentra más alejada de la Tierra (apogeo).
- 4B.11 Un satélite es colocado en órbita alrededor de la Tierra desde una altura de 600 Km sobre la superficie con una velocidad inicial de 30 mil kilómetros por hora, paralela a la superficie terrestre. Suponiendo que el radio de la Tierra es de 6378 kilómetros y su masa es de $5,976 \times 10^{24}$ Kg, determine la excentricidad de la órbita y la velocidad del satélite en su apogeo.
- 4B.12 Desde muy lejos y con rapidez v_0 se dispara una partícula de masa m contra un blanco que está definido como un campo de fuerza central repulsiva de magnitud Am/r^2 . La recta en la que la partícula inicia su movimiento pasa a distancia b del centro de fuerza. Calcule la distancia r^* mínima que logra tener la partícula con el centro de fuerza.
- 4B.13 Dos satélites de la Tierra, S_1 y S_2 , cada uno de masa m , están describiendo órbitas cerradas en un mismo plano y en el mismo sentido. S_1 está en una órbita circunferencial de radio R y S_2 está en una órbita elíptica caracterizada por $r_{\min} = R$ y $r_{\max} = 8R$. En un cierto instante ambos satélites se acoplan (la duración del proceso de acoplamiento se supone nulo) formando un satélite compuesto S_{12} . Durante el acoplamiento se conserva el momentum total pero no la energía. Determine a) el cociente entre la suma de las energías cinéticas $K_1 + K_2$ y K_{12} . b) Determine las características de la órbita de S_{12} .
- 4B.14 Sea R_0 el radio de la Tierra. Una nave espacial gira en torno a la Tierra en órbita elíptica de radio mínimo $8R_0$ y radio máximo $16R_0$.

Para regresar a la Tierra procede como sigue: en $t = 0$ se encuentra en su apogeo ($r_A = 16R_0$). Al llegar a su perigeo ($r_B = 8R_0$) enciende sus cohetes por un instante para frenar tangencialmente quedando en una órbita elíptica con radios máximo y mínimo: $8R_0$ y $4R_0$. Tan pronto alcanza por primera vez $r = 4R_0$ nuevamente frena de igual manera quedando en una tercera órbita elíptica caracterizada por $4R_0$ y $2R_0$. Finalmente, la primera vez que se encuentra en $r = 2R_0$ frena para estar en una órbita $[2R_0, R_0]$ con lo que logra terminar su misión. Obtenga las variaciones de energía cinética cada vez que frena y obtenga el tiempo que tarda en llegar a la Tierra.

- 4B.15 Un satélite está en órbita circunferencial de radio r_0 sometida a una fuerza central que implica la función de energía potencial $U(r) = -k/r$. En un instante recibe un impacto que produce un cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar su magnitud. El cambio de dirección es en un ángulo $\pi/3$. Determine las distancias mínima y máxima que el satélite pasa del centro de fuerzas en su nueva órbita.