

APUNTES SOBRE DIFRACCIÓN

1 RED DE DIFRACCIÓN

Sea un foco de luz monocromática (=compuesta de una única longitud de onda λ) que emite frente de ondas de cualquier forma. Cuando esta luz atraviesa un agujero cuyo tamaño sea del orden de o menor que la longitud de onda, *independientemente* de la forma del frente de ondas que está incidiendo sobre el agujero, éste se convierte en un foco emisor de ondas (casi) semiesféricas. A este fenómeno se llama **difracción**, y no debe ser confundido con la refracción. Si en cambio ser un agujero es una rendija muy alargada de anchura del orden de la longitud de onda λ , la rendija se convierte en una foco emisor de ondas (casi) semicilíndricas. Una onda cilíndrica, así como una onda esférica, se propaga en *todas* las direcciones. Se llama red de difracción a la sucesión de rendijas muy estrechas separadas entre sí por la misma distancia d .

Veamos el caso de la figura 1, donde hay representadas tres rendijas de una red de difracción; la anchura de cada rendija se toma prácticamente como cero, de tal forma que podamos considerar que cada rendija es una fuente de frente de ondas cilíndricas perfectas. Supongamos que ahora sobre la red incide perpendicularmente no una luz monocromática sino luz blanca (=compuesta de muchas longitudes de onda λ distintas). Cada rendija emite en todas las direcciones cada una de las longitudes de onda λ de la luz blanca. Tomemos una dirección, determinada por el ángulo θ medido con respecto a la perpendicular a la red: en esta dirección llegan los rayos de cada longitud de onda a nuestro ojo situado a gran distancia, por lo que podemos considerar que los rayos llegan paralelos (también pueden llegar a un pequeño telescopio como en la práctica del laboratorio). En el ojo se enfocan todos los rayos en punto y de esta forma se llevan todos los rayos a interferir entre sí. Para *cada* longitud de onda, esta interferencia será constructiva o destructiva dependiendo de si los rayos que llegan desde cada rendija están o no en fase entre sí.

Para la dirección θ de la figura 1 consideremos primero los dos rayos rojos. La diferencia en el camino recorrido entre el primer y el segundo rayo es, por simple trigonometría, $d \sin \theta$: si esta diferencia corresponde exactamente a una longitud de onda del color rojo entonces la interferencia entre los dos rayos cuando lleguen al ojo (o al telescopio) será completamente constructiva ya que ambos rayos van exactamente en fase. Lo misma interferencia constructiva ocurriría si en cambio de cumplirse $d \sin \theta = \lambda_{\text{rojo}}$ se cumpliera que $d \sin \theta = 2\lambda_{\text{rojo}}$ ó $d \sin \theta = 3\lambda_{\text{rojo}}, \dots$

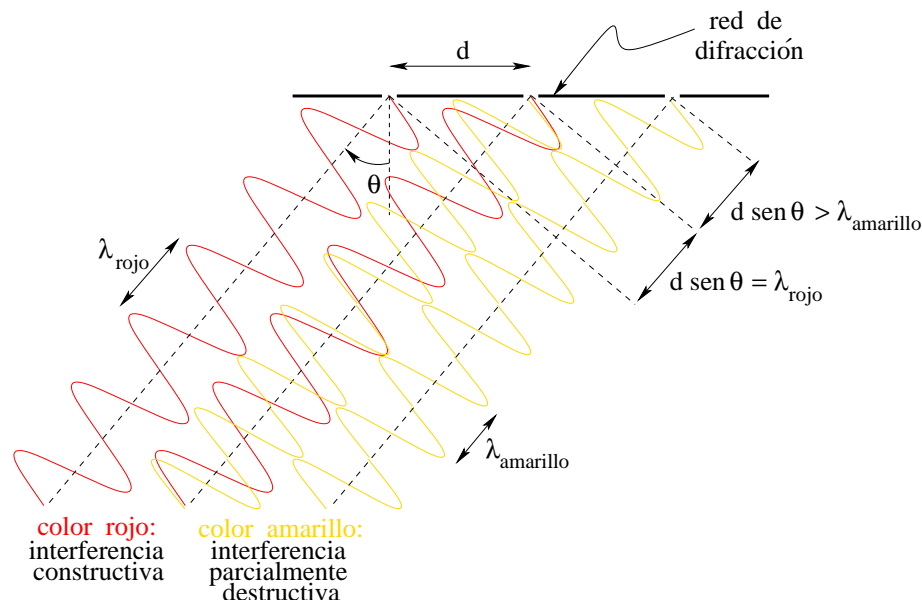


Figura 1

Sin embargo, para los dos rayos de una longitud de onda algo menor (color amarillo), la diferencia en el camino recorrido por los dos rayos es algo mayor que su longitud de onda y por tanto la interferencia entre ellos dos será en parte destructiva y la intensidad en el punto donde interfieran será menor (o cero) que en el caso de interferencia constructiva. Además una red de difracción no consta sólo de tres rendijas sino de varias decenas de miles de ellas, y desde cada una de ellas llega al ojo un rayo por cada una de las longitudes de onda. Por lo tanto, la interferencia parcialmente destructiva entre dos de los rayos de longitud de onda amarilla *también* ocurre entre el segundo y el tercer rayo amarillo, entre el tercero y el cuarto, y así sucesivamente: cuando todos los rayos amarillos interfieran en punto al enfocarlos el ojo, la interferencia **resultante** de todas éstas parcialmente destructivas es destructiva completamente. O sea, en la dirección θ de la figura 1 **no** veremos una raya amarilla.

Resumiendo: si para la longitud de onda λ que llega a nosotros en una dirección determinada θ , la diferencia $d \sin \theta$ entre el camino recorrido por dos rayos consecutivos no corresponde exactamente a un número entero de veces λ , entonces en esa dirección habrá interferencia destructiva y el color correspondiente a tal longitud de onda no se verá. O lo que es lo mismo, para una red de difracción veremos **sólo** las longitudes de onda que cumplan $d \sin \theta = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$, o bien

$$d \sin \theta = n\lambda \quad \text{con } n \text{ número entero positivo.} \quad (1)$$

Este resultado hace que si sobre la red de difracción incide luz blanca, cada una de las longitudes de onda contenidas en ella se vea (o sea, se cumpla la condición (1)) en direcciones diferentes.

Además la misma longitud de onda λ_0 (en el caso de la figura 2, corresponde al color

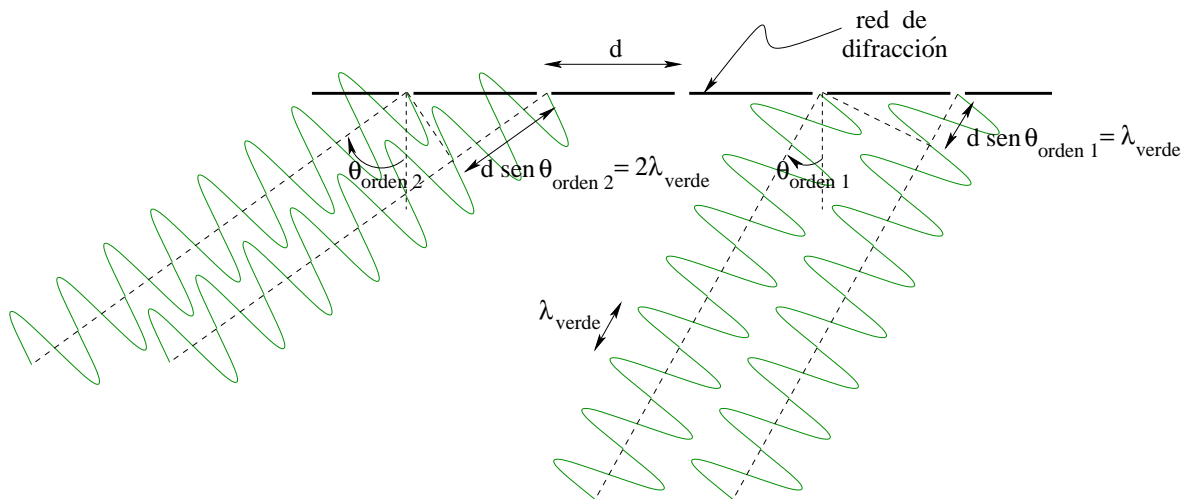


Figura 2

verde) se va a ver bajo ángulos diferentes $\theta_1, \theta_2, \dots$ que cumplen (ver figura 2)

$$\begin{cases} d \sin \theta_1 = \lambda_0, \\ d \sin \theta_2 = 2\lambda_0, \\ d \sin \theta_3 = 3\lambda_0, \\ \dots = \dots \end{cases} \quad (2)$$

2 DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER EN UNA RENDIJA

En la sección anterior hemos estudiado el patrón de difracción producido por una red formada por un número enorme de rendijas paralelas. Cada una de estas rendijas la hemos supuesto muy, muy estrecha de forma que actúe como un foco puntual emisor de frentes de ondas perfectamente cilíndricos (aunque ahora la anchura de la rendija ya no va a ser cero, seguimos considerando que su longitud es infinita).

Pero qué sucede cuando la rendija no es tan estrecha, aunque siempre manteniendo una anchura que no sea excesivamente grande en comparación con la(s) longitud(es) de onda que llega(n) a la rendija (ya que de lo contrario no habría difracción).

Consideremos el caso de **una** única rendija de anchura a pequeña pero no despreciable que está iluminada perpendicularmente por una luz puntual monocromática coherente (por ejemplo, la de un láser) de longitud de onda λ . Esta rendija difracta la luz en todas las direcciones y nosotros observamos la luz que llega desde una dirección θ . Como ahora la rendija no es tan estrecha, la difracción que provoca, aunque se sigue propagando en todas las direcciones ya no es con frentes de onda cilíndricos. De acuerdo con el Principio de Huygens, suponemos que dentro de la anchura de la rendija “caben” muchos (infinitos) focos emisores puntuales de frentes de ondas cilíndricos que al superponerse unos con otros dan como resultado el frente de onda de la luz difractada por la rendija.

Puesto que la luz que ilumina la rendija es coherente, estos focos emisores están en fase unos con otros; y, repitiendo, la luz que nos llegue a un punto determinado será el resultado de la interferencia entre las ondas emitidas en cada foco contenido dentro del ancho de la rendija. Notar que ahora cada uno de los focos puntuales emisores de ondas cilíndricas no está en diferentes rendijas infinitesimalmente estrechas (como era el caso de la red de difracción) sino dentro de una sola rendija de anchura no despreciable.

Para facilitar más el estudio de este caso vamos a considerar que el punto donde observamos la imagen está muy alejado de la rendija, para que así podamos considerar que los rayos, que van a parar e interfieren en el punto donde colocamos el ojo o el detector, sean prácticamente paralelos. Tal caso se denomina difracción de Fraunhofer para una rendija.

Como se ve en la figura 3, supongamos que la dirección θ bajo la que llegan los rayos cumple la condición $a \sin \theta = \lambda$: en tal caso se ve claramente que el rayo difractado justo en el borde superior de la rendija interfiere destructivamente (=está desfasado en media longitud de onda) con el rayo difractado en la mitad de la rendija; y este rayo a su vez interfiere destructivamente con el rayo difractado en el borde inferior de la rendija. De ello se deduce que en la dirección θ considerada habrá un cero en

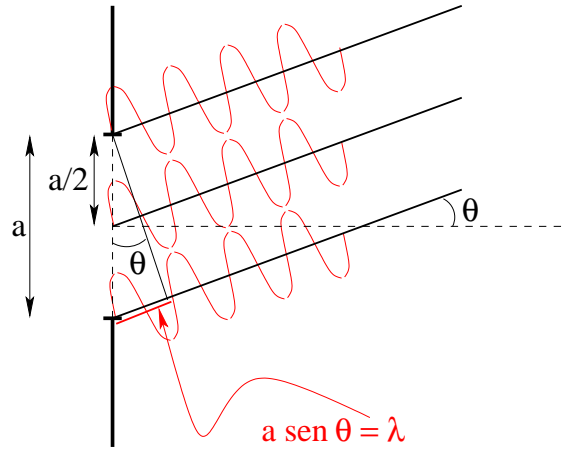


Figura 3

la intensidad de la luz difractada. Si ahora consideramos otro ángulo θ' que cumpla $a \sin \theta' = 2\lambda$, tendremos un caso similar: el rayo difractado en el borde superior interfiere destructivamente con el rayo difractado una distancia $a/4$ más abajo; este segundo rayo interfiere destructivamente con el rayo difractado en la mitad de la rendija; éste a su vez, destructivamente con el rayo difractado una distancia $a/4$ más abajo; y finalmente, este último rayo interfiere destructivamente con el rayo difractado en el borde inferior. Generalizando, la condición de intensidad cero para la difracción de luz monocromática por una rendija de anchura a es

$$a \sin \theta \Big|_{\text{intensidad } 0} = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Caso especial es el ángulo $\theta = 0$: en tal caso la discusión precedente ya no se cumple puesto que ya no hay ningún desfase entre los rayos que salen de cada foco emisor dentro

de la anchura de la rendija. Por ello, para $\theta = 0$ habrá un máximo en la intensidad del patrón de interferencia que se forme en el punto de observación; este máximo se llama máximo central.

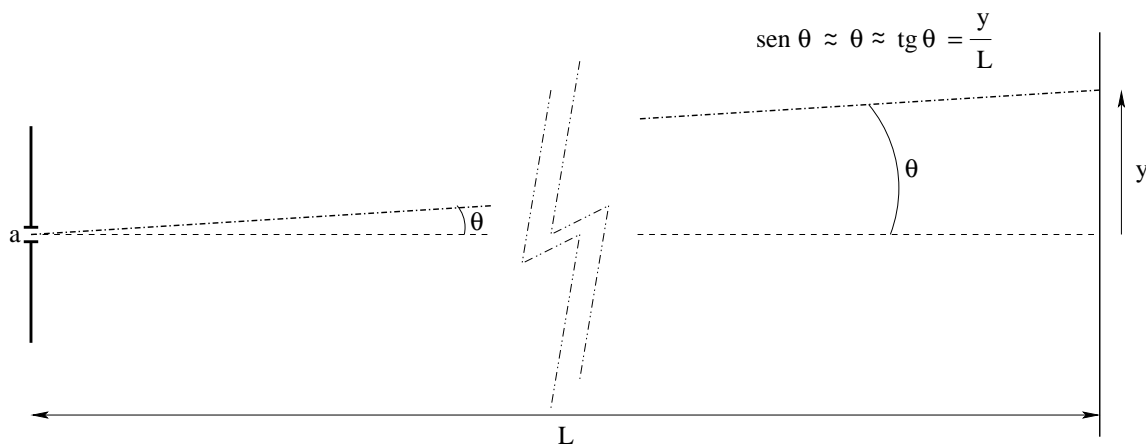


Figura 4

En la mayoría de los casos cuando se estudia la difracción de Fraunhofer, la situación es la representada en la figura 4, en la que estamos observando el patrón de interferencia sobre una pantalla muy alejada de la rendija. El ángulo θ , en el que llegan los rayos que van a interferir en un punto a una distancia y del máximo central, es lo suficientemente pequeño para poder aproximar su seno por su tangente, con lo que las posiciones y_m sobre la pantalla para intensidad nula es, según (3)

$$m\lambda = a \sin \theta \Big|_{\text{intensidad } 0} \approx a \frac{y_m}{L} = m\lambda \Rightarrow y_m \Big|_{\text{intensidad } 0} = m \frac{\lambda}{a} L. \quad (4)$$

Importante. Repetimos: no confundir la rendija única de anchura a , que es lo que estamos viendo, con la red de difracción, que está formada por muchísimas rendijas siendo la anchura de cada rendija prácticamente cero. Mientras que $a \sin \theta = m\lambda$ (con m entero *distinto de cero*) indica los ángulos para intensidad **cero** en la difracción de Fraunhofer de **una** única rendija, la relación $d \sin \theta = m\lambda$ (con m entero *cualquiera*) da los ángulos para **máximo** en una **red** de difracción.

La discusión anterior para la difracción de Fraunhofer en una única rendija ha sido, aunque correcta, sólo cualitativa: de hecho, a pesar de saber que dentro de la anchura de la rendija hay infinitos focos emisores de ondas cilíndricas, para la condición de interferencia completamente destructiva sólo hemos considerado tres focos (extremos superior, centro y extremo inferior). Esto es así ya que lo mismo va a ocurrir con un foco un poco por debajo del extremo superior y su correspondiente foco desplazado en la misma distancia por debajo del punto medio. Aun así la discusión anterior sólo nos ha permitido obtener los puntos de intensidad cero, y el máximo central para $\theta = 0$. Pero la intensidad para otros ángulos que no sean ni cero ni que cumplan la condición

(3) hay que obtenerla por un procedimiento más preciso, y su resultado es

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right)^2, \quad (5)$$

donde I_0 es la intensidad del máximo central. La deducción de esta fórmula se propone como ejercicio en seis sencillos pasos más adelante. Ahora veamos qué conclusiones se pueden deducir de (5).

- En primer lugar, el resultado cualitativo (3) sigue siendo completamente válido: para $\theta \neq 0$ se cumple que la intensidad es cero para $\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ o equivalentemente para $a \sin \theta = m\lambda$ con $m=1,2,3,\dots$
- Para $\theta = 0$ se cumple que la intensidad es la máxima posible, esto es, la intensidad I_0 : para valores de θ que tiendan a cero, el seno que aparece en (5) se puede aproximar por el ángulo $\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right) \xrightarrow{\theta \approx 0} \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)$ con lo que

$$I(\theta = 0) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} I_0 \left(\frac{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right)^2 = I_0. \quad (6)$$

Notar que este máximo central para $\theta = 0$ ocurre **independientemente** de la longitud de onda o de la anchura de la rendija.

- Como se ve de la ecuación (5), la intensidad en un punto sobre la pantalla depende del ángulo θ que forme tal punto con la perpendicular a la rendija. Para un montaje como en la figura 4 con $L=4$ metros y con $a/\lambda = 200$, obtenemos en la pantalla un patrón de interferencia para la difracción por una rendija en la forma de la figura 5. Los mínimos de intensidad cero ocurren, según la relación (4), para $y = 20, 40, \dots$ mm.

Sin embargo, la intensidad no sólo depende del ángulo sino también de la anchura de la rendija, como se ve en la figura 6 para tres valores crecientes de la anchura de la rendija frente a la longitud de onda de la luz monocromática que ilumina la rendija. Notar que a medida que aumenta la anchura de la rendija el patrón de tiende a una única mancha puntual central: el punto que corresponde a la fuente puntual coherente (por ejemplo, el láser) que iluminaba la rendija. Esta propiedad se deriva directamente de la ecuación (5): salvo para el ángulo $\theta = 0$ — que como

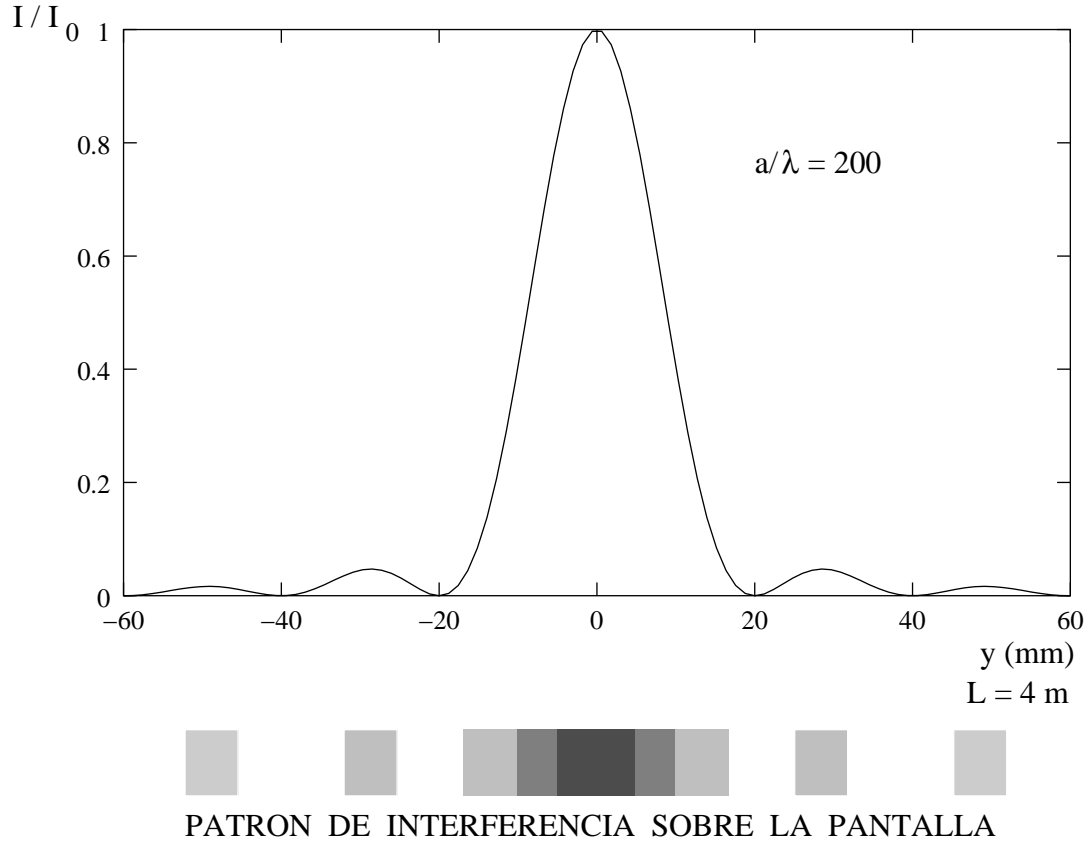


Figura 5

ya sabemos corresponde a la máxima intensidad independientemente de la anchura de la rendija — el límite de a tendiendo a infinito produce

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(\theta \neq 0) = I_0 \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right)^2 = 0,$$

ya que el seno como mucho vale uno mientras que el denominador diverge a infinito (para $\theta \neq 0$). Luego

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(\theta) = \begin{cases} I_0 & \theta = 0, \\ 0 & \text{cualquier } \theta \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Este resultado es lógico, ya que como sabemos desde el comienzo, la difracción es tanto más clara cuanto más pequeña sea la anchura de la rendija frente a la longitud de onda.

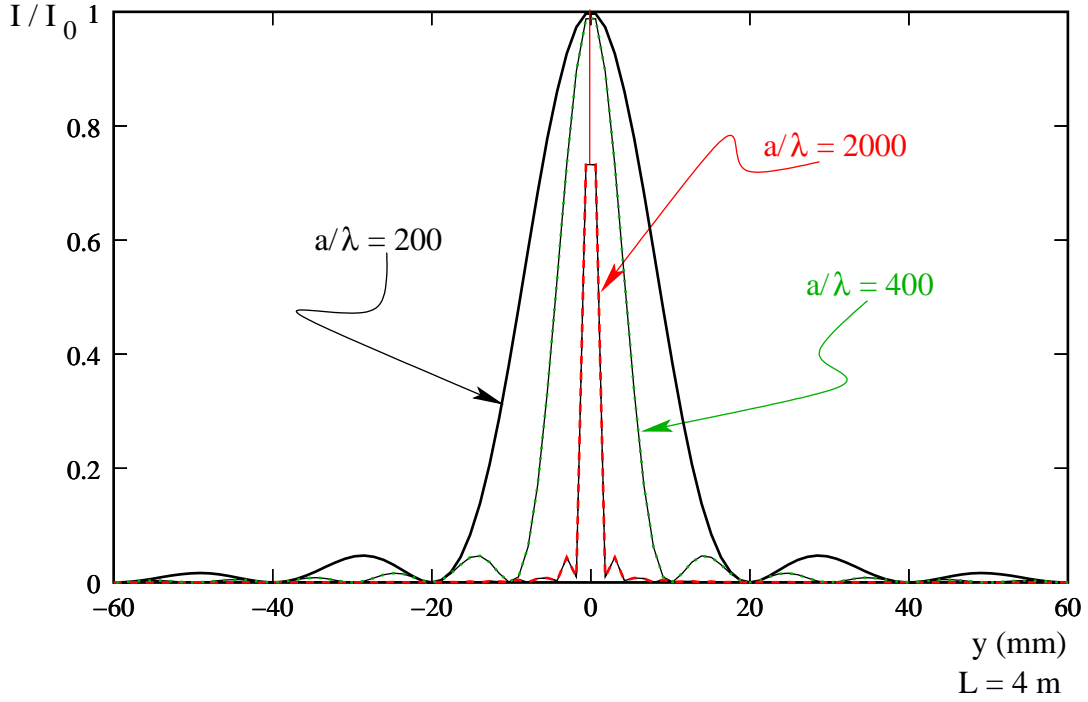


Figura 6

Deducción del resultado (5) en seis pasos

En clase de teoría ya habrás visto que una manera gráfica de visualizar la interferencia de muchas ondas es utilizando fasores. En el fondo estos fasores no es otra cosa que el representar números complejos de módulo unidad. Aunque este sistema es bastante inmediato de entender, aquí vamos a utilizar los números complejos directamente, ya que es más cómodo, rápido y exacto. Por otra parte, los siguientes resultados matemáticos que vas a obtener te pueden ser útiles al sumar funciones trigonométricas.

Paso 1 A partir de la definición de una exponencial compleja $e^{i\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \delta + i \sin \delta$, con $i = \sqrt{-1}$, demostrar que el número complejo $z = e^{i\delta}$ tiene módulo 1, es decir, que el módulo al cuadrado, definido como zz^* siendo z^* el número complejo que resulta de z al cambiar de signo la parte multiplicada por i , es 1.

Paso 2 Demostrar a partir de $e^{i\delta} = \cos \delta + i \sin \delta$ las siguientes igualdades:

$$\sin \delta = \frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos \delta = \frac{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}{2}. \quad (8)$$

Paso 3 Utilizando la fórmula para una serie finita de razón r ,

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1 - r^N}{1 - r},$$

obtener que

$$1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} = \frac{e^{i\frac{N}{2}\delta} e^{i\frac{N}{2}\delta} - e^{-i\frac{N}{2}\delta}}{e^{i\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta}{2}} - e^{-i\frac{\delta}{2}}},$$

y que esto, recordando (8), es igual a

$$1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} = e^{i\frac{(N-1)}{2}\delta} \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{N}{2}\delta \right)}{\text{sen} \left(\frac{\delta}{2} \right)} \right). \quad (9)$$

Con el resultado del Paso 1, ver que el módulo al cuadrado de la anterior ecuación

(9) es igual a $\left(\frac{\text{sen} \left(\frac{N}{2}\delta \right)}{\text{sen} \left(\frac{\delta}{2} \right)} \right)^2$. En los siguientes pasos veremos que este último

resultado es precisamente la intensidad de la luz que llega a la pantalla infinitamente alejada de una rendija en la que cabe un número finito N de focos emisores coherentes de frentes de onda cilíndricos

Paso 4 A partir de la definición $e^{i\delta} = \cos \delta + i \text{sen} \delta$ también podemos escribir

$$1 + e^{i\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} = 1 + \cos \delta + \dots + \cos ((N-1)\delta) \\ + i \text{sen} \delta + \dots + i \text{sen} ((N-1)\delta)$$

donde en la primera línea son todos términos reales mientras que en la segunda línea son todos imaginarios. Por ello, tomando la parte real y la parte imaginaria por separado del resultado (9), demostrar las siguientes relaciones:

$$1 + \cos \delta + \dots + \cos ((N-1)\delta) = \cos \left(\frac{(N-1)\delta}{2} \right) \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{N}{2}\delta \right)}{\text{sen} \left(\frac{\delta}{2} \right)} \right), \quad (10)$$

$$\text{sen} \delta + \dots + \text{sen} ((N-1)\delta) = \text{sen} \left(\frac{(N-1)\delta}{2} \right) \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{N}{2}\delta \right)}{\text{sen} \left(\frac{\delta}{2} \right)} \right).$$

Paso 5 Ahora ha llegado ya el momento de aplicar los resultados matemáticos anteriores al problema de la refracción de Fraunhofer para una única rendija. Consideremos por sencillez que la rendija de anchura a está dividida en N segmentos pequeños de igual longitud y que cada segmento contiene sólo un foco puntual emisor de ondas

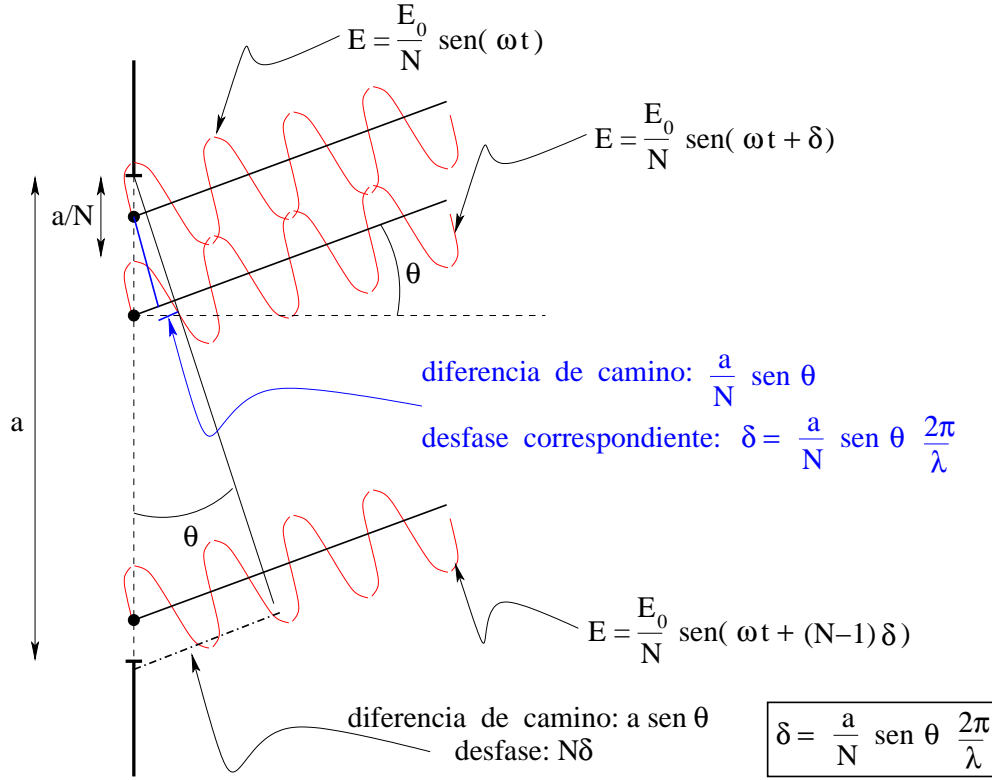


Figura 7

cilíndricas; en el siguiente paso se verá como tomar el límite en el que N tiende a infinito de forma que los focos puntuales están infinitesimalmente próximos.

Como se ve en la figura 7, para una dirección θ en la que llegan los rayos paralelos de cada uno de los focos emisores, el desfase entre dos rayos consecutivos es $\delta = \frac{a}{N} \sin \theta \frac{2\pi}{\lambda}$: así si tomamos que $E = \frac{E_0}{N} \sin(\omega t)$ es la onda difractada por el foco emisor localizado en el primer segmento de longitud a/N , entonces la onda emitida por el siguiente foco está descrita por $E = \frac{E_0}{N} \sin(\omega t + \delta)$ y así sucesivamente; el significado de E_0 se verá un poco más adelante. Notar al aumentar el número de divisiones de la rendija para llegar finalmente a una distribución continua de focos emisores, el desfase y la amplitud de cada onda disminuye.

Sobre la pantalla interfieren todas estas ondas que van desfasadas en δ una con la siguiente: utilizando la relación $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ en las funciones seno que contienen algún desfase, se obtiene que la onda resultante de tal interferencia viene dada por

$$E_{\text{resul}} = \frac{E_0}{N} \sin(\omega t) + \frac{E_0}{N} \sin(\omega t) \cos \delta + \dots + \frac{E_0}{N} \sin(\omega t) \cos((N-1)\delta) + \\ + \frac{E_0}{N} \cos(\omega t) \sin \delta + \dots + \frac{E_0}{N} \cos(\omega t) \sin((N-1)\delta),$$

y por tanto, teniendo en cuenta los resultados (10), demostrar que

$$E_{\text{resul}} = \frac{E_0}{N} \sin(\omega t) \left[\cos\left(\frac{(N-1)\delta}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right) \right] + \\ + \frac{E_0}{N} \cos(\omega t) \left[\sin\left(\frac{(N-1)\delta}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right) \right],$$

o lo que es lo mismo

$$E_{\text{resul}}(\theta) = \left[\frac{E_0}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right) \right] \sin\left(\omega t + \frac{(N-1)\delta}{2}\right). \quad (11)$$

La amplitud de la onda resultante sobre la pantalla es por tanto

$$A(\theta) = \left[\frac{E_0}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right) \right] = \frac{E_0}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{N} \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)} \right). \quad (12)$$

Paso 6 Finalmente tomarás el límite de una distribución continua ($N \rightarrow \infty$) de focos puntuales emisores dentro de la anchura de la rendija, que es la situación real. Puesto que el ángulo en el denominador tiende a cero, podemos sustituir su seno por el ángulo mismo, tal y como se ha hecho en la ecuación (6). Demostrar que $\lim_{N \rightarrow \infty} A(\theta)$ es igual a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A(\theta) = E_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)} \right), \quad (13)$$

y que

$$E_{\text{resul}}(\theta) = E_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)} \right) \sin\left(\omega t + \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right). \quad (14)$$

La intensidad sobre la pantalla, que es el cuadrado del resultado anterior, es entonces igual a la ecuación (5) que queríamos demostrar.

En cuanto al significado de E_0 hay que notar que para el caso $\theta = 0$ no hay desfase ($\delta = 0$) entre cada uno de los rayos que llegan en perpendicular a la pantalla desde cada uno de los focos emisores:

$$E_{\text{resul}}(\theta = 0) = N \frac{E_0}{N} \sin(\omega t + 0) = E_0 \sin(\omega t), \quad (15)$$

Por ello, E_0 es la amplitud de la onda correspondiente al máximo central ($\theta = 0$) para la difracción de Fraunhofer en una rendija. Y por ello también la amplitud de las ondas emitidas por cada foco puntual situado en el segmento de longitud a/N es E_0/N , para que así la amplitud total en el centro sea E_0 . Notar que $I_0 = E_0^2$ **no** es la intensidad de la luz del láser que ilumina la rendija.

3 DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER EN DOBLE RENDIJA

Para el caso del sistema formado por dos rendijas de anchura a cada una y separadas una distancia d , la extensión de los resultados del caso anterior es directa. Seguimos suponiendo que la distancia a la pantalla es infinita de forma que los rayos difractados por cada rendija son paralelos entre sí (ver figura 8). Para un punto sobre la pantalla donde interfieren estos dos rayos que llegan en una dirección θ , la diferencia de camino entre los dos rayos es $d \sin \theta$. Y por lo tanto, si la onda difractada en la primera rendija

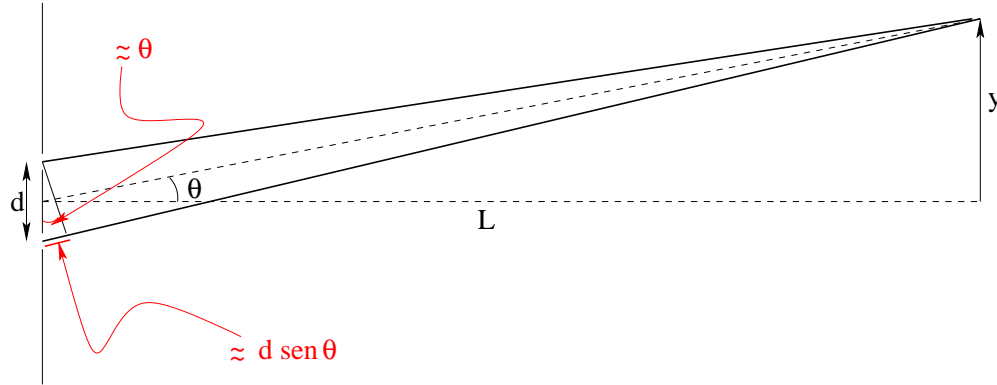


Figura 8

(de anchura no despreciable) viene dada por (14), entonces la onda difractada en la otra

rendija estará desfasada en $\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\text{rend } 1}(\theta) \stackrel{\text{ec. (14)}}{=} E_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right) \sin \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right), \\ E_{\text{rend } 2}(\theta) = E_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right) \sin \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} + \delta' \right). \end{array} \right. \quad (16)$$

Puesto que $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ entonces $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \beta \sin \alpha$; y aplicando este resultado con

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right) \\ \alpha - \beta = \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} + \delta' \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} + \frac{\delta'}{2} \right), \\ \beta = -\frac{\delta'}{2} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}. \end{array} \right.$$

a la suma de las dos ondas en (16) se obtiene inmediatamente que la onda sobre la pantalla muy alejada resultante de la interferencia entre los dos rayos difractados en la doble rendija es

$$\underline{2E_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right) \cos \left(\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \sin \left(\omega t + \frac{2\pi(a+d) \sin \theta}{\lambda} \right)}. \quad (17)$$

La amplitud es la parte subrayada y la intensidad sobre la pantalla se obtiene de elevar al cuadrado esta parte subrayada

$$I_{\text{doble ren.}}(\theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \right). \quad (18)$$

La representación de la intensidad sobre la pantalla para ángulos muy pequeños, tal que $\sin \theta \approx y/L$ se puede ver en la figura 9 para el caso $L=4$ m, $a/\lambda = 200$ y $d/\lambda = 400$. Darse cuenta del factor 4 en la intensidad ya que ahora al tener dos rendijas, a cada una le corresponde una amplitud de máximo central igual a E_0 y por tanto el máximo central resultante tendrá una amplitud de $2E_0$ y una intensidad de $(2E_0)^2 = 4I_0$.

Es importante notar que para una única rendija los máximos de intensidad sobre la pantalla tienen un ancho más grande que para el montaje experimental con dos rendijas de las mismas dimensiones: comparar la figura 6 para una rendija con la figura 9 para

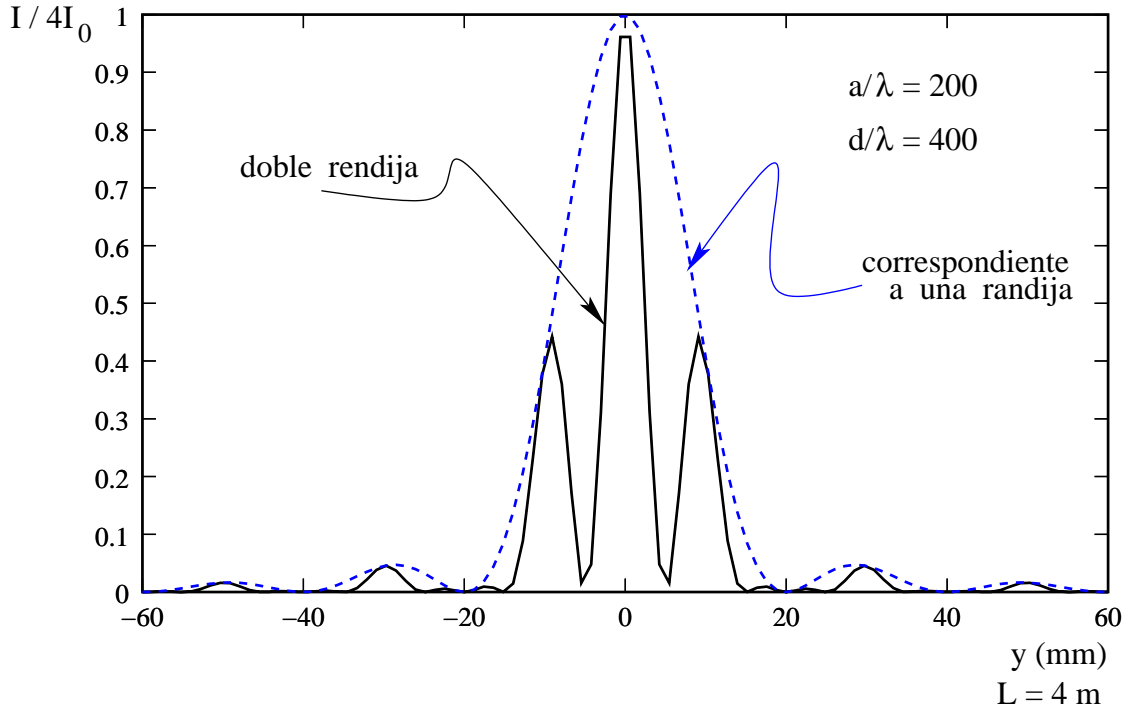


Figura 9

la doble rendija y ver como el máximo central para el primer caso ocupa el espacio sobre la pantalla en el que para la doble rendija cabe el máximo central y un máximos secundarios más a cada lado. Notar además que la distribución de los máximos para la doble rendija quedan “envueltos” (=modulados) por la curva correspondiente a la intensidad de la única rendija.

La posición de los mínimos de intensidad cero corresponden a cuando (18) sea cero:

$$\text{intensidad 0 para : } \begin{cases} \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} = \pi, 2\pi, \dots, \\ \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \end{cases}$$

o bien

$$\text{intensidad 0 para : } \begin{cases} a \sin \theta = \lambda, 2\lambda, \dots, \\ d \sin \theta = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots \end{cases} \quad (19)$$

4 Otras definiciones en Óptica

- **Frente de ondas.** Para un instante determinado, es decir, si tomáramos una foto fija de la onda al propagarse, el frente de ondas es la línea (o la superficie

si estamos trabajando en tres dimensiones) que une los puntos del espacio donde el estado de oscilación de la onda es máximo. Por ejemplo, si se tira una piedra pequeña a un lago de aguas quietas, el frente de ondas son los círculos concéntricos que se forman alrededor de donde hemos tirado la piedra.

- **Refracción.** La refracción es el “quiebro” que se produce en la dirección de propagación de la luz cuando ésta pasa de un medio donde se propaga con una velocidad a otro medio donde su velocidad de propagación es distinta.

5 Apuntes en formato PDF

Descarga del contenido de esta página aquí: apretando la tecla derecha del ratón sobre el enlace subrayado, elegir “Guardar enlace como” (Netscape) o “Guardar objetivo como” (Explorer).

Para usuarios de Linux, el archivo se puede abrir con el programa GhostView: escribir **gv amplia.pdf &** o bien **kghostview amplia.pdf &** en una consola de texto. Para usuarios de Windows, el archivo se abre con el programa Acrobat Reader cliqueando directamente sobre el icono del archivo.