

UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
SEDE VIÑA DEL MAR, JOSE MIGUEL CARRERA.

APUNTES DE FISICA

Prof.: Carlos Contreras Janvier.

Año Académico 2001

1. INTRODUCCION A LAS CIENCIAS FISICAS, MEDIDA Y ERRORES

Para la Física y la Química, en su calidad de ciencias experimentales, la medida constituye una operación fundamental. Sus descripciones del mundo físico se refieren a magnitudes o propiedades medibles. Las unidades, como cantidades de referencia a efectos de comparación, forman parte de los resultados de las medidas. Cada dato experimental se acompaña de su error o, al menos, se escriben sus cifras de tal modo que reflejen la precisión de la correspondiente medida.

Se consideran *ciencias experimentales* aquellas que por sus características y, particularmente por el tipo de problemas de los que se ocupan, pueden someter sus afirmaciones o enunciados al juicio de la experimentación. En un sentido científico la experimentación hace alusión a una observación controlada; en otros términos, experimentar es reproducir en el laboratorio el fenómeno en estudio con la posibilidad de variar a voluntad y de forma precisa las condiciones de observación.

La física y la química constituyen ejemplos de ciencias experimentales. La historia de ambas disciplinas pone de manifiesto que la experimentación ha desempeñado un doble papel en su desarrollo. Con frecuencia, los experimentos científicos sólo pueden ser entendidos en el marco de una teoría que orienta y dirige al investigador sobre qué es lo que hay que buscar y sobre qué hipótesis deberán ser contrastadas experimentalmente. Pero, en ocasiones, los resultados de los experimentos generan información que sirve de base para una elaboración teórica posterior.

Este doble papel de la experimentación como *juez y guía* del trabajo científico se apoya en la realización de medidas que facilitan una descripción de los fenómenos en términos de cantidad. La *medida* constituye entonces una operación clave en las ciencias experimentales.

1.1 MAGNITUDES Y MEDIDA

El gran físico inglés Lord Kelvin consideraba que solamente puede aceptarse como satisfactorio nuestro conocimiento si somos capaces de expresarlo mediante números. Aun cuando la afirmación de Lord Kelvin tomada al pie de la letra supondría la descalificación de valiosas formas de conocimiento, destaca la importancia del conocimiento cuantitativo, particularmente en el tipo de ciencia que él profesaba.

La operación que permite expresar una propiedad o atributo físico en forma numérica es precisamente la medida.

Magnitud, cantidad y unidad

La noción de magnitud está inevitablemente relacionada con la de medida. Se denominan *magnitudes* ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresados en forma numérica. En otros términos, las magnitudes son propiedades o atributos medibles.

La longitud, la masa, el volumen, la fuerza, la velocidad, la cantidad de sustancia son ejemplos de magnitudes físicas. La belleza, sin embargo, no es una magnitud, entre otras razones porque no es posible elaborar una escala y mucho menos un aparato que permita determinar cuántas veces una persona o un objeto es más bello que otro.

La sinceridad o la amabilidad tampoco lo son. Se trata de aspectos cualitativos porque indican cualidad y no cantidad.

En el lenguaje de la física la noción de *cantidad* se refiere al valor que toma una magnitud dada en un cuerpo o sistema concreto; la longitud de esta mesa, la masa de aquella moneda, el volumen de ese lapicero, son ejemplos de cantidades.

Una cantidad de referencia se denomina *unidad* y el sistema físico que encarna la cantidad considerada como una unidad se denomina *patrón*.

La medida como comparación

La medida de una magnitud física supone, en último extremo, la comparación del objeto que encarna dicha propiedad con otro de la misma naturaleza que se toma como referencia y que constituye el patrón.

La medida de longitudes se efectuaba en la antigüedad empleando una vara como patrón, es decir, determinando cuántas veces la longitud del objeto a medir contenía a la de patrón. La vara, como predecesora del metro de sastre, ha pasado a la historia como una unidad de medida equivalente a 835,9 mm. Este tipo de comparación inmediata de objetos corresponde a las llamadas *medidas directas*.

Con frecuencia, la comparación se efectúa entre atributos que, aun cuando están relacionados con lo que se desea medir, son de diferente naturaleza. Tal es el caso de las medidas térmicas, en las que comparando longitudes sobre la escala graduada de un termómetro se determinan temperaturas. Esta otra clase de medidas se denominan *indirectas*.

1.2 SISTEMAS DE UNIDADES

¿Qué es un sistema de unidades?

En las ciencias físicas tanto las leyes como las definiciones relacionan matemáticamente entre sí grupos, por lo general amplios, de magnitudes. Por ello es posible seleccionar un conjunto reducido pero completo de ellas de tal modo que cualquier otra magnitud pueda ser expresada en función de dicho conjunto.

Esas pocas magnitudes relacionadas se denominan *magnitudes fundamentales*, tales como: la longitud, la masa, el tiempo, etc., mientras que el resto que pueden expresarse en función de las fundamentales reciben el nombre de *magnitudes derivadas*, entre estas: la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc.

Cuando se ha elegido ese conjunto reducido y completo de magnitudes fundamentales y se han definido correctamente sus unidades correspondientes, se dispone entonces de un *sistema de unidades*.

La definición de unidades dentro de un sistema se atiene a diferentes criterios. Así la unidad ha de ser constante como corresponde a su función de cantidad de referencia equivalente para las diferentes mediciones, pero también ha de ser reproducible con relativa facilidad en un laboratorio. Así, por ejemplo, la definición de ampere como unidad de intensidad de corriente ha evolucionado sobre la base de este criterio.

Debido a que las fuerzas se saben medir con bastante precisión y facilidad, en la actualidad se define el ampere a partir de un fenómeno electromagnético en el que aparecen fuerzas entre conductores cuya magnitud depende de la intensidad de corriente.

El Sistema Internacional de Unidades (SI)

Las condiciones de definición de un sistema de unidades permitirían el establecimiento de una considerable variedad de ellos. Así, es posible elegir conjuntos de magnitudes fundamentales

diferentes o incluso, aun aceptando el mismo conjunto, elegir y definir unidades distintas de un sistema a otro.

Desde un punto de vista formal, cada científico o cada país podría operar con su propio sistema de unidades, sin embargo, y aunque en el pasado tal situación se ha dado con cierta frecuencia (recuérdense los países anglosajones con sus millas, pies, libras, grados Fahrenheit, etc.), existe una tendencia generalizada a adoptar un mismo sistema de unidades con el fin de facilitar la cooperación y comunicación en el terreno científico y técnico.

En esta línea de acción, la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1960, tomó la resolución de adoptar el llamado con anterioridad Sistema Práctico de Unidades, como Sistema Internacional, que es, precisamente, como se le conoce a partir de entonces.

El Sistema Internacional de Unidades (abreviadamente SI) distingue y establece, además de las magnitudes básicas y de las magnitudes derivadas, un tercer tipo formado por aquellas que aún no están incluidas en ninguno de los dos anteriores, son denominadas *magnitudes suplementarias*.

El SI toma como magnitudes fundamentales la longitud, la masa, el tiempo, la intensidad de corriente eléctrica, la temperatura absoluta, la intensidad luminosa y la cantidad de sustancia, y fija las correspondientes unidades para cada una de ellas.

A estas siete magnitudes fundamentales hay que añadir dos suplementarias asociadas a medidas angulares, el ángulo plano y el ángulo sólido.

La definición de las diferentes unidades fundamentales ha evolucionado con el tiempo al mismo ritmo que las propias ciencias físicas. Así, el segundo se definió inicialmente como 1/86 400 de la duración del día solar medio, esto es, promediado a lo largo de un año.

Un día normal tiene 24 horas aproximadamente, es decir 86400 segundos; no obstante, esto tan sólo es aproximado, pues la duración del día varía a lo largo del año en algunos segundos, de ahí que se tome como referencia la duración promediada del día solar.

Pero debido a que el periodo de rotación de la Tierra puede variar, y de hecho varía, se ha acudido al átomo para buscar en él un periodo de tiempo fijo al cual referir la definición de su unidad fundamental.

1.2.1 EL SISTEMA INTERNACIONAL

A lo largo de la historia el hombre ha venido empleando diversos tipos de sistemas de unidades. Estos están íntimamente relacionados con la condición histórica de los pueblos que las crearon, las adaptaron o las impusieron a otras culturas. Su permanencia y extensión en el tiempo lógicamente también ha quedado ligada al destino de esos pueblos y a la aparición de otros sistemas más coherentes y generalizadas. El sistema anglosajón de medidas -millas, pies, libras, Grados Fahrenheit- todavía en vigor en determinadas áreas geográficas, es, no obstante, un ejemplo evidente de un sistema de unidades en recesión. Otros sistemas son el cegesimal -centímetro, gramo, segundo-, el terrestre o técnico -metro-kilogramo, fuerza-segundo-, el Giorgi o MKS -metro, kilogramo, segundo- y el sistema métrico decimal, muy extendido en ciencia, industria y comercio, y que constituyó la base de elaboración del Sistema Internacional.

El Sistema Internacional es el sistema práctico de unidades de medidas adoptado por la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en octubre de 1960 en París. Trabaja sobre siete magnitudes fundamentales (longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, intensidad luminosa y cantidad de sustancia) de las que se determinan sus correspondientes unidades fundamentales (metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, candela y mol). De estas siete unidades se definen las derivadas (coulomb, joule, newton, pascal, volt, ohm, etc.), además de otras suplementarias de estas últimas.

UNIDADES FUNDAMENTALES

Metro (m) Es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de $1/299\,792\,458$ de segundo.

kilogramo (kg.) Es la masa del prototipo internacional de platino iridiado que se conserva en la Oficina de Pesas y Medidas de París.

Segundo (s) Unidad de tiempo que se define como la duración de $9\,192\,631\,770$ periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

ampere (A) Es la intensidad de corriente constante que, mantenida en dos conductores rectilíneos, paralelos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados a una distancia de un metro el uno del otro, en el vacío, produce entre estos conductores una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N por cada metro de longitud.

kelvin (K) Unidad de temperatura termodinámica correspondiente a la fracción $1/273,16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

candela (cd) Unidad de intensidad luminosa, correspondiente a la fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540 \cdot 10^{12}$ Hz y cuya intensidad energética en esa dirección es $1/683$ W sr⁻¹.

mol (mol) Cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kg de carbono 12.

UNIDADES DERIVADAS

coulomb (C) Cantidad de electricidad transportada en un segundo por una corriente de un ampere.

joule (J) Trabajo producido por una fuerza de un newton cuando su punto de aplicación se desplaza la distancia de un metro en la dirección de la fuerza.

newton (N) Es la fuerza que, aplicada a un cuerpo que tiene una masa de 1 kilogramo, le comunica una aceleración de 1 metro por segundo, cada segundo.

pascal (Pa) Unidad de presión. Es la presión uniforme que, actuando sobre una superficie plana de 1 metro cuadrado, ejerce perpendicularmente a esta superficie una fuerza total de 1 newton.

volt (V) Unidad de tensión eléctrica, potencial eléctrico, fuerza electromotriz. Es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un hilo conductor que transporta una corriente de intensidad constante de 1 ampere cuando la potencia disipada entre esos puntos es igual a 1 watt.

watt (W) Potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1 joule por segundo.

ohm (Ω) Unidad de resistencia eléctrica. Es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 volt aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1 ampere, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor.

weber (Wb) Unidad de flujo magnético, flujo de inducción magnética. Es el flujo magnético que, al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 volt si se anula dicho flujo en 1 segundo por decrecimiento uniforme.

1.2.2 EL SISTEMA INGLES

Este sistema se define en términos de las cantidades físicas: longitud en pies ([ft]), fuerza en libras ([lb]) y tiempo en segundo ([s]).

1 [lb] se define como el peso de una masa de aproximadamente 454 [gr] al nivel del mar donde la aceleración de gravedad toma el valor $9,8$ [m/s²], es decir 1 [lb] = $0,454 \cdot 9,8$ [m/s²] = $4,449$ [N].

Como múltiplos y submúltiplos de la libra están: 1 [onza] = 1/16 [lb],
1 [kip] = 1000 [lb],
1 [ton] = 2000 [lb].

Por otro lado, al comparar el pie patrón con el respectivo metro patrón resulta: 1[ft]= 0,3048 [m],
Como múltiplo y submúltiplo del pie están: 1 [inch] = 1/12 [ft],
1 [Yarda] = 3 [ft]
1 [milla] = 5280 [ft].

1.3 MEDIDAS RESULTADOS Y ERRORES

Fuentes de error

Los resultados de las medidas nunca se corresponden con los valores reales de las magnitudes a medir, sino que, en mayor o menor extensión, son defectuosos, es decir, están afectados de error. Las causas que motivan tales desviaciones pueden ser debidas al observador, al aparato o incluso a las propias características del proceso de medida.

Los errores se dividen en: Teóricos, Instrumentales y Personales. Ejemplos de **errores teóricos** son: expansión de la regla de medida con la temperatura, el efecto del empuje del aire en las pesas de una balanza, etc. Como **errores instrumentales** podríamos citar: La inexactitud en la calibración de instrumentos, errores en las divisiones de una regla de medir, etc.. Debido al observador, dentro de los **errores personales** está el llamado *error de paralaje*, que se presenta cuando la medida se efectúa mediante la lectura sobre una escala graduada. La situación del observador respecto de dicha escala influye en la posición de la aguja indicadora según sea vista por el observador. Por ello para evitar este tipo de error es preciso situarse en línea con la aguja, pero perpendicularmente al plano de la escala. Otros errores debidos al observador pueden introducirse por descuido de éste, por defectos visuales, etc.

Error absoluto y error relativo

Como consecuencia de la existencia de diferentes fuentes de error, el científico se plantea por sistema hasta qué punto o en qué grado los resultados obtenidos son fiables, esto es, dignos de confianza. Por ello, al resultado de una medida se le asocia un valor o índice complementario que indica la calidad de la medida o su grado de precisión. Los errores o imprecisiones en los resultados se expresan matemáticamente bajo dos formas que se denominan error absoluto y error relativo.

Se define el *error absoluto* e_A , como la diferencia entre el resultado de la medida M y el verdadero valor m de la magnitud a medir,

$$e_A = M - m$$

El *error relativo* e_R es el cociente entre el error absoluto e_A y el verdadero valor m . Cuando se expresa en tanto por ciento su expresión es

$$e_R(\%) = (e_A/m) \cdot 100.$$

En sentido estricto tales definiciones son únicamente aplicables cuando se refieren no a medidas físicas propiamente, sino a operaciones matemáticas, ya que el valor exacto de una magnitud no

es accesible. Por ello, con frecuencia se prefiere hablar de incertidumbres en lugar de errores. En tal caso se toma como m el valor que más se aproxima al verdadero, es decir, valor medio obtenido al repetir varias veces la misma medida.

¿Qué hacer si se hacen mas de una medición?. Suponga que se mide el largo de un lápiz. En la tabla se representan un conjunto de 9 medidas.

M_i [cm]
14,31
14,30
14,38
14,32
14,35
14,32
14,39
14,31
14,36

¿Cuál es el largo del lápiz?. Aceptamos que tal largo es bien definido y no ocurre que este se alarga o se acorta.

Considere el promedio de las mediciones, es decir:

$$\langle L \rangle = \frac{\text{suma de todas las medidas}}{\text{número de medidas}} = \frac{129,04}{9} = 14,34 \text{ [cm]}.$$

Al representar en un gráfico las medidas hechas y el promedio de ellas, podemos visualizar cuánto difiere cada medición con respecto al promedio.



Cálculo de los errores en las mediciones:

Considere la tabla que se presenta. En la primera columna están los resultados de las medidas hechas al largo del lápiz. En la segunda columna las diferencias entre el valor medido y el promedio de las mediciones. Esta columna representa los errores de cada medida respecto al promedio. La tercera columna son los cuadrados de los valores de la segunda columna.

M_i [cm]	$M_i - \langle L \rangle$ [cm]	$(M_i - \langle L \rangle)^2$ [cm ²]
14,31	-0,03	0,0009
14,30	-0,04	0,0016
14,38	+0,04	0,0016
14,32	-0,02	0,0004
14,35	+0,01	0,0001
14,32	-0,02	0,0004
14,39	+0,05	0,0025
14,31	-0,03	0,0009
14,36	+0,02	0,0004

Se define la cantidad:

$\sigma = \sqrt{\text{suma de los } (M_i - \langle L \rangle)^2 / \text{núm.de mediciones}}$, llamada desviación estándar.

Para este ejemplo $\sigma = \sqrt{\frac{0,00088}{9}} = 0,03[\text{cm}]$.

De este modo la desviación estándar representa el promedio de los errores con respecto al promedio. Note que si σ es pequeño es porque cada una de las medidas no se escapa mucho del promedio. En caso contrario σ será grande. (Analice e interprete usted mismo cuando σ es cero).

Usaremos el siguiente convenio:

Largo medido = largo promedio $\pm \sigma$. Es decir:

$L = 14,34 \pm 0,03$ [cm]. Significa que el largo del lápiz está entre 14,31 [cm] y 14,37 [cm].

1.4 Cifras significativas

Los científicos procuran que sus datos experimentales no digan más de lo que pueden decir según las condiciones de medida en los que fueron obtenidos. Por ello ponen cuidado en el número de cifras con que expresar el resultado de una medida con el propósito de incluir sólo aquellas que tienen algún significado experimental.

Tales cifras reciben el nombre de *cifras significativas*. Una cifra es significativa cuando se conoce con una precisión aceptable. Así, cuando se mide con un termómetro que aprecia hasta las décimas de grado no tiene ningún sentido que se escriban resultados del tipo 36,25 °C o 22,175 °C, por ejemplo.

Todas las cifras que figuran en un resultado deben ser significativas. Este mismo criterio general debe respetarse cuando se opera con datos experimentales; es una cuestión de sentido común que por el simple hecho de operar con los números no es posible mejorar la precisión de los resultados si éstos tienen una base experimental. Cuando un resultado se escribe de modo que todas sus cifras sean significativas proporciona por sí mismo información sobre la precisión de la medida.

MANEJANDO CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Para manejar correctamente los resultados expresados mediante cifras significativas es necesario seguir las siguientes reglas:

a) Cuando los ceros figuran como primeras cifras de un resultado no son considerados como cifras significativas, por ello el número de cifras significativas de un resultado es el mismo, cualquiera que sea la unidad en la que se exprese. Así, por ejemplo, si se desea expresar en metros el resultado de medir una longitud l de 3,2 cm con una regla que aprecie hasta el milímetro se tendrá:

$$l = 3,2 \text{ cm} = 0,032 \text{ m}$$

y el resultado seguirá teniendo dos cifras significativas. Por esta razón se acostumbra a escribirlo recurriendo a las potencias de 10:

$$l = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

b) Cuando los ceros figuran como últimas cifras de números enteros, ello no implica que deban ser considerados, necesariamente, como cifras significativas. Así, por ejemplo, cuando se expresa la anterior cantidad en micras resulta $l = 32\,000 \mu$ ($1 \mu = 1$ milésima parte del mm $= 10^{-3}$ mm); ello no quiere decir que el resultado tenga cinco cifras significativas, sino sólo dos en este caso. Para evitar este tipo de confusiones lo más apropiado es escribir el dato recurriendo, de nuevo, a las potencias de 10:

$$l = 3,2 \cdot 10^4 \mu$$

Es posible preguntarse cómo arrastrar las cifras significativas en operaciones tales como la multiplicación o la división. Cuando se dispone de una calculadora electrónica parece como si se estuviera tentado a escribir los resultados con tantas cifras decimales como aparecen en pantalla, pero esto la mayoría de las veces carece de sentido. Valga como ejemplo el siguiente caso:

Se desea encontrar cuál es la superficie de una tira de papel. Se mide su longitud y su anchura utilizando una regla que aprecia hasta los milímetros y se obtiene 53,2 y 4,1 cm respectivamente. Multiplicando ambos resultados resulta:

$$S = 53,2 \cdot 4,1 = 218,12 \text{ cm}^2$$

Pero ¿cuántas de estas cifras son verdaderamente significativas? La regla que sigue es la siguiente: el número de cifras significativas de un producto (o de un cociente) entre datos que corresponden a resultados de medidas no puede ser superior al de cualquiera de los factores. En el presente caso 4,1 tiene dos cifras significativas, luego el resultado en rigor se escribiría como:

$$S = 220 \text{ cm}^2 = 2,2 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$$

Cuando como en este ejemplo es preciso redondear alguna cifra por no resultar significativa, se desprecia si es igual o interior a la mitad del valor de la unidad de la última cifra significativa y si es superior se considera ésta incrementada en una unidad. Dado que en el presente ejemplo 8 está por encima de la mitad de unidad de las decenas ($10/2$) se ha escrito el resultado como 220 cm^2 y no como 210 cm^2 .

1.5 Tipos de magnitudes

Entre las distintas propiedades medibles puede establecerse una clasificación básica. Un grupo importante de ellas quedan perfectamente determinadas cuando se expresa su cantidad mediante un número seguido de la unidad correspondiente. Este tipo de magnitudes reciben el nombre de **magnitudes escalares**. La longitud, el volumen, la masa, la temperatura, la energía, son sólo algunos ejemplos.

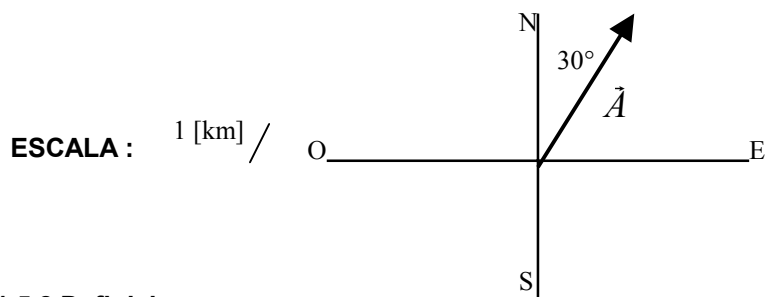
Sin embargo, existen otras que precisan para su total definición que se especifique, además de los elementos anteriores, una dirección o una recta de acción y un sentido: son las llamadas **magnitudes vectoriales** o dirigidas. La fuerza es un ejemplo claro de magnitud vectorial, pues sus efectos al actuar sobre un cuerpo dependerán no sólo de su cantidad, sino también de la línea a lo largo de la cual se ejerza su acción.

Al igual que los números reales son utilizados para representar cantidades escalares, las cantidades vectoriales requieren el empleo de otros elementos matemáticos diferentes de los números, con mayor capacidad de descripción. Estos elementos matemáticos que pueden representar intensidad, dirección y sentido se denominan **vectores**.

Las magnitudes que se manejan en la vida diaria son, por lo general, escalares. El dependiente de una tienda de ultramarinos, el comerciante o incluso el contable, manejan masas, precios, volúmenes, etc., y por ello les es suficiente saber operar bien con números. Sin embargo, el físico, y en la medida correspondiente el estudiante de física, al tener que manejar magnitudes vectoriales, ha de operar, además, con vectores.

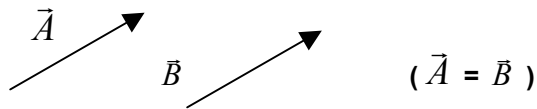
1.5.1 Representación gráfica de un vector.

Un vector se representa por una línea orientada, la cual indica la dirección, y por una flecha, la cual indica su sentido. La longitud de la línea es proporcional a la magnitud del vector. Si deseamos representar un vector \vec{A} de magnitud 4 [km] Norte 30° Este:

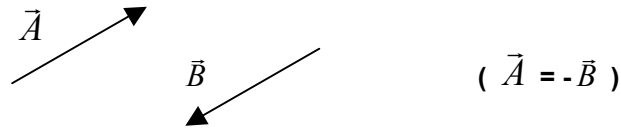


1.5.2 Definiciones:

- a. **Vectores iguales:** Dos vectores \vec{A} y \vec{B} son iguales si tienen igual tamaño, dirección y sentido. Es decir:



b. Vectores opuestos: Dos vectores \vec{A} y \vec{B} son opuestos si tienen igual tamaño, igual dirección pero sentido contrario. Es decir



c. Tamaño, norma, módulo o magnitud de un vector: Si \vec{A} representa un vector, su tamaño, norma, módulo o magnitud se designa como:

$$|\vec{A}| = A.$$

1.5.3 Algebra y propiedades entre vectores:

Sean **A, B, C** vectores y a,b escalares:

- i. Propiedad Conmutativa: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}.$
- ii. Propiedad Asociativa: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{C} + \vec{A}) + \vec{B}.$
- iii. Propiedad Conmutativa: $a\vec{A} = \vec{A}a.$
- iv. Propiedad Asociativa: $a(b\vec{A}) = (ab)\vec{A}.$
- v. Prop. Distributiva (suma escalar): $(a+b)\vec{A} = a\vec{A} + b\vec{A}.$
- vi. Prop. Distributiva (suma vectorial): $a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$
- vii. Identidad: $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$
- viii. Elemento inverso: $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}.$

1.5.4 OPERACIONES ENTRE VECTORES:

- **Suma y resta entre vectores**

La suma de dos vectores \vec{A} y \vec{B} con un origen común O se define mediante la llamada *regla del paralelogramo*, según la cual el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$ es igual a la diagonal del paralelogramo -

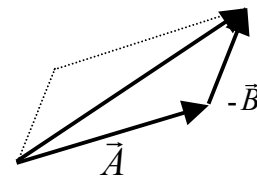
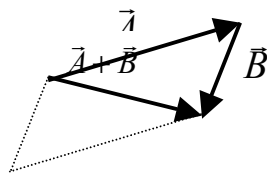
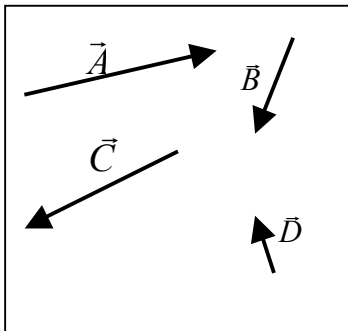
considerada como segmento orientado- formado por \vec{A} , y sus respectivas paralelas trazadas por los extremos de ambos vectores. Una de las características de la suma vectorial es que el módulo o longitud del vector suma no es igual, en general, a la suma de los módulos de los vectores sumando.

Para el caso de mas de dos vectores, la suma se va realizando de dos en dos sucesivamente.

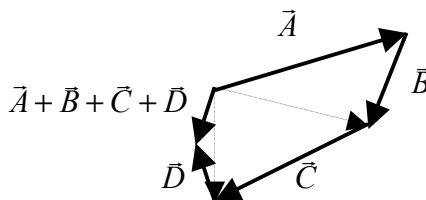
Como sucede con los números, la diferencia de dos vectores debe entenderse como la suma de uno de ellos con el opuesto del otro:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

(Regla del paralelogramo)



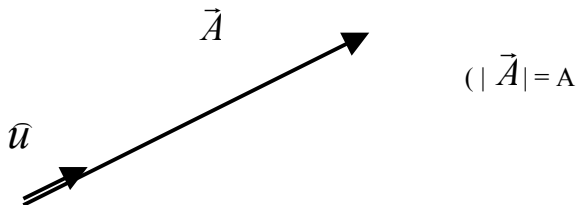
(Regla del polígono)



1.5.5 Vector unitario:

Un vector unitario, representado como \hat{u} , es un vector de magnitud 1, usado fundamentalmente para representar la dirección y sentido de un vector.

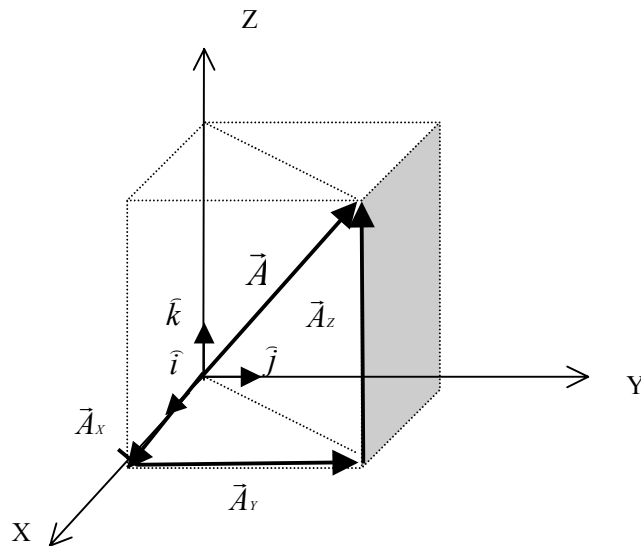
Sea \hat{u} un vector unitario y \vec{A} un vector cualquiera en la dirección y sentido de \hat{u} .



Por lo tanto, como $\vec{A} = A \hat{u}$, un vector unitario se define como: $\hat{u} = \vec{A}/A$.

1.5.6 Componentes de un vector

Cualquier vector \vec{A} puede siempre considerarse como la suma de dos o más vectores. A cualquier conjunto de vectores que al sumarse den \vec{A} se les llama las componentes de \vec{A} . Las componentes mas comúnmente usadas son las cartesianas rectangulares (¿porqué?), es decir, el vector se expresa como la suma de 3 vectores mutuamente perpendiculares.



\hat{i} , \hat{j} , \hat{k} son vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes X, Y y Z respectivamente.

Como $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$ y $\vec{A}_x = A_x \hat{i}$, $\vec{A}_y = A_y \hat{j}$, $\vec{A}_z = A_z \hat{k}$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}.$$

Por otro lado, usando el teorema de Pitágoras:

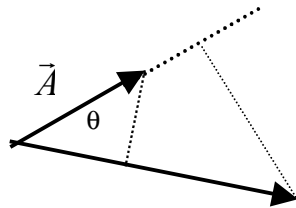
$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}.$$

1.6 Producto entre vectores

Es posible definir otras operaciones con vectores, además de la suma. Una de estas operaciones es el producto escalar o punto (el resultado es un **escalar**), otra es el producto vectorial o producto cruz (el resultado es un **vector**).

1.6.1 Producto Punto:

Dados 2 vectores \vec{A} y \vec{B} que forman un ángulo θ entre si, el producto punto entre \vec{A} y \vec{B} anotado como $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es definido por:



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos(\theta) = B A \cos(\theta) = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Interpretación geométrica: Puesto que $A \cos(\theta)$ es la proyección de \vec{A} sobre \vec{B} , $\vec{A} \cdot \vec{B}$ representa B veces proyección de \vec{A} sobre \vec{B} , o bien A veces la proyección del vector \vec{B} sobre \vec{A}

Producto punto entre vectores unitarios:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1.$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0.$$

- Cuando los vectores están escritos en términos de sus componentes cartesianas rectangulares, es decir:

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ y $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$, el producto punto entre \vec{A} y \vec{B} viene dado por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

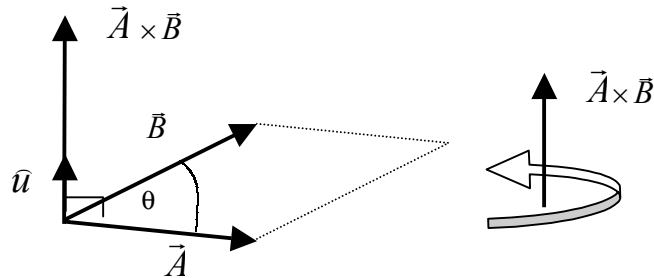
- Si \vec{A} y \vec{B} son dos vectores no nulos tales que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

1.6.2 Producto cruz:

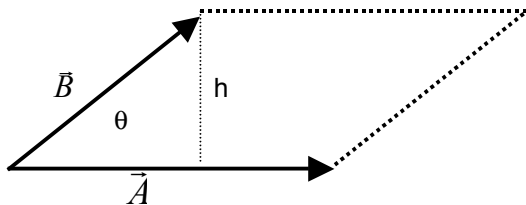
Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores los cuales forman un ángulo θ entre si. El Producto cruz o vectorial entre \vec{A} y \vec{B} anotado como $\vec{A} \times \vec{B}$ es dado por:

$\vec{A} \times \vec{B} = A B \sin(\theta) \vec{u}$, donde \vec{u} es un vector unitario \perp a \vec{A} y \vec{B} , o sea \perp al plano formado por \vec{A} y \vec{B} , y cuyo sentido está determinado por la regla de la mano derecha.



Interpretación geométrica:

Con dos vectores podemos formar un paralelogramo, es decir:



Area del paralelogramo = Base \cdot Altura
 $= (A \cdot h)$; Como $h = B \sin(\theta)$,
 Area del paralelogramo = $A \cdot B \sin(\theta)$, es decir:
 Area del paralelogramo = $|\vec{A} \times \vec{B}|$

- Note que el producto cruz no es conmutativo. $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$.

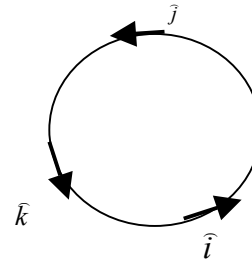
- Producto cruz entre vectores unitarios:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}.$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}.$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}.$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$



- Cuando los vectores están escritos en términos de sus componentes cartesianas rectangulares, es decir:

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ y $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$, el producto cruz entre \vec{A} y \vec{B} viene dado por:

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = \hat{i} (A_y B_z - A_z B_y) - \hat{j} (A_x B_z - A_z B_x) + \hat{k} (A_x B_y - A_y B_x)$, es decir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- Si \vec{A} y \vec{B} son dos vectores no nulos tales que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} \text{ y } \vec{B} \text{ son paralelos (} \theta = 0^\circ \text{).}$$

EJERCICIOS

1. Exprese su altura en unidades del sistema internacional e Ingles.
2. Transforme:
 - a. 20 [Km/hr] a [m/s].
 - b. 9,8 [m/s²] a [ft/s²].
 - c. 34,56 [mm²] a [m²].

d. 50,7 [cm³] a [inch³].

3. Cuáles serían las dimensiones de las expresiones siguientes (en el sistema internacional)

a. ML^3

b. ML^{-1}

c. ML^3T^{-4}

d. $M^{-1}L$.

(T: dimensiones de tiempo, L: dimensiones de longitud, M: dimensiones de masa)

4. Un estudiante efectúa mediciones, para determinar el tiempo que demora en ir de su casa al colegio. Para diferentes días registra la hora de salida de casa y la hora de llegada al colegio: sus anotaciones están indicadas en la tabla adjunta. Para estas mediciones, determine:

<i>dia</i>	<i>salida</i>	<i>llegada</i>
<i>martes</i>	7:12	7:40
<i>miércoles</i>	7:15	7:45
<i>jueves</i>	7:30	7:55
<i>viernes</i>	7:10	7:38
<i>sábado</i>	7:08	7:37
<i>lunes</i>	7:21	7:47
<i>martes</i>	7:06	7:31
<i>miércoles</i>	7:19	7:48
<i>jueves</i>	7:11	7:37

a. El tiempo promedio empleado en este trayecto

b. La desviación estándar

c. El tiempo que demora en ir desde su casa al colegio usando el convenio mencionado.

5. ¿Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es máximo?...¿En que caso lo será?. Interprete en términos de ángulos y proyecciones.

6. Para dos vectores dados, ¿Cuándo su producto vectorial es mínimo y porqué?.

7. ¿El módulo de la suma de dos vectores dados siempre será menor que el módulo de la diferencia de esos vectores?.

8. ¿En que casos el módulo de la suma de dos vectores coincide con la suma de los módulos de los vectores que se suman?.

9. Un vector \vec{A} tiene de componentes (1,2,3). Otro vector \vec{B} de módulo $3^{1/2}$ tiene por componente X el valor 1. Determinar el vector \vec{B} para que sea perpendicular al vector \vec{A} .

10. Dado los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ y $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$:

a. Encuentre el ángulo formado por tales vectores.

b. Para el vector \vec{A} , determine los ángulos α , β y γ que forma el vector con los ejes X, Y y Z respectivamente.

- c. Muestre que en general, para cualquier vector: $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$. Tales cosenos se denominan directores pues definen su dirección con respecto a los ejes coordenados.

11. Encontrar las componentes rectangulares de un vector de 10 unidades de magnitud, cuando éste forma un ángulo, con respecto al eje de las X de:

- 50°
- 130°
- 230° , haciendo uso de las funciones trigonométricas.

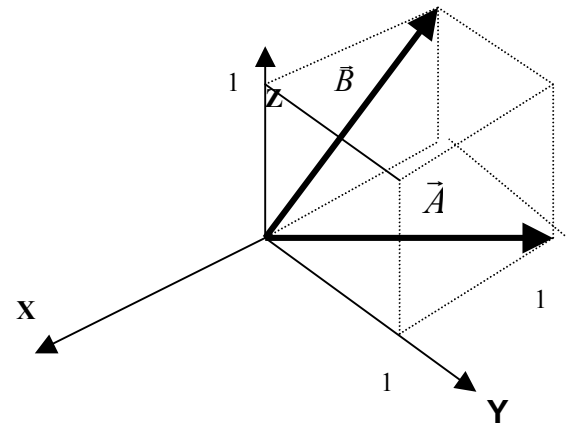
12. Sean 4 vectores \vec{E} , \vec{F} , \vec{G} y \vec{H} ubicados consecutivamente, de tal forma que \vec{H} hace un ángulo de 65° con \vec{G} ; el vector \vec{G} forma 67° con \vec{F} y \vec{F} hace 85° con \vec{E} . Las magnitudes de cada vector son de 9 unidades.

- Represente gráficamente estos cuatro vectores, según los datos dados,
- Construir el vector: $\vec{I} = \vec{E} + 2\vec{F} - 3\vec{G} + \vec{H}$.

13. Un buque se dispone a zarpar hacia un punto situado a 124 [km] al Norte. Una tormenta inesperada empuja el buque hasta un punto 72 [km] al Norte y 31 [km] al Este desde su punto de arranque. ¿Qué distancia y en qué dirección debe navegarse, para llegar a su destino original?.

14. Para los vectores de la figura (cubo de lado 1), determine:

- $\vec{A} + \vec{B}$.
- $|\vec{A} + \vec{B}|$.
- $\vec{A} \cdot \vec{B}$.



15. Dado los vectores:

$\vec{A} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k}$ y $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, determine:

- $\vec{A} \cdot \vec{B}$
- Vector unitario en la dirección y sentido de: $\vec{A} + \vec{B}$.

16. Hallar un vector unitario, paralelo al plano XY que sea perpendicular al vector: $-8\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$.

17. ¿Para que valores de α son $\vec{K} = \alpha\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{L} = 2\alpha\hat{i} + \alpha\hat{j} - 4\hat{k}$, perpendiculares?.

18. Dados los vectores $\vec{U} = \alpha\hat{i} + 4\hat{j}$ y $\vec{V} = 9\hat{i} + 12\hat{j} + \beta\hat{k}$, encontrar los valores de α y β de manera que ambos vectores sean paralelos.

19. Un vector \vec{A} de módulo 5 unidades forma un ángulo de 30° con el eje Z. Su proyección sobre el plano XY forma un ángulo de 60° con el eje X. Hallar el vector \vec{A} y el ángulo que forma con el vector $\vec{B} = -\hat{i} - \hat{j}$.