Capítulo 4

Teoría de la Interpolación y Aproximación

4.1 El problema general de interpolación

4.1.1 Introducción

Antes de la gran difusión que los ordenadores personales y las calculadoras digitales tuvieron en el último tercio del siglo XX, los cálculos necesarios para resolver los problemas de ingeniería y otras ciencias aplicadas se realizaban principalmente con la ayuda de tablas de funciones. No hace mucho aún se enseñaba en el bachillerato el uso de las *tablas trigonométricas y logarítmicas* en que se listan los valores (cuidadosamente calculados) que toma en ciertos puntos una función particular, como puede ser el seno o el logaritmo. Naturalmente las tablas no pueden contener todos los puntos que se puedan necesitar. Para los puntos no tabulados es necesario realizar una *interpolación* basada en los puntos de la tabla que sean más próximos al dado. Por ejemplo, como nos enseñaban en el bachillerato, si necesitamos el valor de la función f en el punto x y en nuestra tabla de la función f aparecen x_1 y x_2 como puntos más cercanos a x, tendremos

$$f(x) - f(x_2) \approx (x - x_2)\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

de donde se obtiene el valor interpolado de f en x.

Lo que acabamos de ver es un ejemplo de interpolación lineal. Consiste en hallar el polinomio lineal o de primer grado que "pasa" por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ y tomar para $f(x)$ el valor de ese polinomio en x. Si este polinomio lineal es una aproximación suficientemente buena de la función f en el intervalo $[x_1, x_2]$ entonces sus valores ahí podrán ser tomados por los de f. Así pues, el problema general de interpolación está muy relacionado con la teoría de aproximación.

La esencia del problema de interpolación ha de ser entendida como la búsqueda de un criterio de cómo debe comportarse una función razonable entre los puntos dados. Después de todo, se puede usar un número infinito de curvas distintas para interpolar unos datos y debemos tener, en cada caso, un criterio para elegir entre ellas. Normalmente ese criterio incluye sencillez y minimizar la curvatura.

4.1.2 Interpolación, aproximación y ajuste de datos

La diferencia entre el problema de interpolación y el problema de aproximación de funciones es principalmente de enfoque. En el problema de aproximación se busca una función (de entre las de una cierta clase) que sea lo más parecida posible (en un sentido a definir en cada problema) a una función dada. En el problema de interpolación lo que nos interesa es la estimación del *valor* en un punto o unos puntos concretos de una cierta función que sólo es conocida de forma más o menos exacta en ciertos otros puntos. Por supuesto, este problema puede resolverse a veces si se encuentra una función que aproxime a la dada suficientemente bien en el intervalo de interés, pero también puede resolverse por otros métodos especiales adaptados al problema particular de interpolación.

Otro problema parecido y relacionado con el problema de interpolación es el de ajuste de una función a unos datos. En ambos casos se trata de poder hallar valores de una función en "puntos intermedios" a los de una tabla dada $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,n}$. Pero en el problema de interpolación los datos son considerados exactos, y se requerirá que la función de interpolación pase exactamente por cada uno de los puntos (x_i, y_i), mientras que en el problema de ajuste lo que se considera correcto es la clase de funciones entre las que buscamos la nuestra, mientras que los datos se consideran como resultados aproximados de la evaluación de la función (ya sea mediante el cálculo o como resultados de medidas experimentales), por lo que no se pide que la función pase exactamente por ellos (lo que, por otra parte no tendría normalmente solución).

4.2 Interpolación polinómica

Entre las distintas clases de funciones que se usan en la práctica para la interpolación y aproximación ocupa un lugar destacado por su sencillez, facilidad de evaluación y por su gran número de aplicaciones la clase de las *funciones polinómicas*. Debe recordarse que toda función diferenciable de clase k en un punto x_0 puede aproximarse en un entorno de x_0 por su polinomio de Taylor en torno a ese punto y que toda función continua puede aproximarse tanto como se quiera mediante polinomios en el sentido del famoso teorema de Weierstrass:

Teorema 20 (Teorema de Weierstrass) *Dada una función f continua en un intervalo $[a, b]$ sea $E_n(f)$, para cada entero positivo n, el ínfimo de los valores que toma la cantidad $\|f - p\|_\infty = \sup_{a\le x\le b} |f(x) - p(x)|$ cuando p recorre el conjunto $\mathcal{P}_n$ de los polinomios de grado menor o igual que n, es decir,*

$$E_n(f) = \inf_{p\in\mathcal{P}_n}\left(\sup_{a\le x\le b} |f(x) - p(x)|\right).$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0.$$

Así pues, los polinomios son las primeras funciones que se usarán en las técnicas de interpolación, lo cual nos lleva a la teoría de la *interpolación polinómica*. Para hacer una interpolación polinómica de una función f en unos puntos dados $x_0, \dots, x_n$, llamados los *nodos de interpolación*, es necesario conocer los valores exactos $y_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$ que f toma en esos puntos. Entonces interpolar polinómicamente f en un punto x del intervalo que contiene a los $x_0, \dots, x_n$ es evaluar en x el polinomio del menor grado posible que coincida con f en los nodos $x_0, \dots, x_n$. Tal polinomio se llama *polinomio de interpolación* de f en los nodos $x_0, \dots, x_n$ o también polinomio de interpolación en los puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. Veremos que el valor que el polinomio de interpolación toma en el punto x

se podrá considerar, bajo condiciones adecuadas, como una buena aproximación del valor de f en ese punto.

4.2.1 Existencia y unicidad del polinomio de interpolación

Dado que un polinomio de grado menor o igual que n está determinado por sus $n+1$ coeficientes, quedará completamente determinado por $n+1$ condiciones como son, por ejemplo, que tome valores prescritos en $n+1$ puntos distintos. Sean $a_0, \ldots, a_n$ los $n+1$ coeficientes desconocidos del polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Para que $p(x)$ pase por los $n+1$ puntos (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) dichos coeficientes deben satisfacer el sistema de $n+1$ ecuaciones lineales en las $n+1$ incógnitas $a_0, \ldots, a_n$,

$$\begin{aligned} a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 &= y_0 \\ &\vdots \\ a_n x_n^n + \cdots + a_1 x_n + a_0 &= y_n\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es la matriz de Vandermonde

$$M = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

Ejercicio 4.1

$$\det M = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

(Sugerencia: tómese la abscisa x_n como una variable, t. Entonces la función $p(t) = \det\big(M(t)\big)$ es un polinomio de grado n cuyas raices son las otras abscisas.)

Este determinante es ciertamente distinto de cero si y sólo si $x_i \neq x_j$ siempre que $i \neq j$. En consecuencia el sistema (4.1) tiene solución única para cualesquiera $n+1$ puntos con *distintas* abscisas $x_0, \ldots, x_n$. Hemos pues demostrado

Teorema 21 *Dados $n+1$ puntos del plano (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) con distintas abscisas $x_0, \ldots, x_n$, existe un único polinomio de grado menor o igual que n, $p(x)$ que pase por todos ellos, es decir tal que*

$$p(x_k) = y_k. \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

En base a este teorema podemos dar la siguiente:

Definición: Dados $n+1$ puntos del plano (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) con distintas abscisas $x_0, \ldots, x_n$, el único polinomio de grado menor o igual que n, $p(x)$ que pase por todos ellos se llama el *polinomio de interpolación* de dichos puntos. Dada una función real de variable real f, y abscisas distintas $x_0, \ldots, x_n$ el único polinomio de grado $\le n$ que toma el mismo valor que f en los nodos $x_0, \ldots, x_n$ se llama el *polinomio de interpolación de f en* $x_0, \ldots, x_n$.

Ejercicio 4.2
¿Qué condición deben cumplir los $n+1$ puntos $\{(x_k, y_k)\}_{0\le k\le n})$ para que en la solución de (4.1) resulte $a_n = 0$?

Ejercicio 4.3
¿Cuál es el grado del polinomio de interpolación para los puntos (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) si éstos verifican $y_k = x_k$ para cada k?

La demostración de unicidad del polinomio de interpolación también puede hacerse con el siguiente razonamiento: Supongamos que $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de grado $\le n$ que coinciden con f en los $n+1$ puntos $x_0, \ldots, x_n$. Entonces $P(x) - Q(x)$ es un polinomio de grado $\le n$ que se anula en los $n+1$ puntos $x_0, \ldots, x_n$, es decir, que tiene $n+1$ ceros. Esto sólo es posible si es el polinomio cero, es decir, si $P(x) = Q(x)$.

De lo dicho se deduce la siguiente importante consecuencia:

Si la función f es un polinomio de grado menor o igual que n, el polinomio de interpolación de f en $n+1$ puntos es la propia función f. En consecuencia, el polinomio de interpolación para $n+1$ nodos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ que tengan las mismas ordenadas, $y_0 = y_1 = \cdots = y_n = y$, es el polinomio constante (de grado cero) igual a y.

4.2.2 Fórmula de Lagrange para la interpolación polinómica. Polinomios de Lagrange

El cálculo del polinomio de interpolación de una función en unos puntos dados puede hacerse de varias maneras. Después de lo dicho más arriba quizás lo primero que se le ocurriría a uno sería resolver el sistema (4.1), sin embargo con ello estaríamos calculando más de lo necesario porque en general sólo necesitamos evaluar el polinomio de interpolación en un punto o dos, para lo cual no es necesario evaluar sus coeficientes explícitamente. A continuación veremos un método de cálculo que lleva el nombre de *fórmula de Lagrange* el cual tiene importantes aplicaciones en varias áreas de las matemáticas.

Suponemos dados $n+1$ nodos de interpolación, $x_0, \ldots, x_n$, todos ellos *distintos entre sí* y en cada uno de los cuales se conoce el valor de la función a interpolar. Para cada $k \in \{0, \ldots, n\}$ formamos el polinomio $q_k(x)$ definido como el polinomio *mónico* (coeficiente principal 1) de grado n que se anula en todos los nodos excepto en x_k, es decir, que $q_k(x)$ viene dado por la fórmula

$$q_k(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j).$$

Podemos hacer que este $q_k(x)$ tome el mismo valor que f en x_k si lo multiplicamos por $f(x_k)/q_k(x_k)$. Repitiendo lo mismo para cada nodo y sumando los resultados obtenemos un polinomio

$$p(x) = \frac{f(x_0)}{q_0(x_0)} q_0(x) + \cdots + \frac{f(x_n)}{q_n(x_n)} q_n(x)$$

que tiene grado $\leq n$ por ser suma de polinomios de grado n y que claramente coincide con f en todos los nodos. Éste es, pues, el polinomio de interpolación de f en los nodos $x_0, \ldots, x_n$.

Ejercicio 4.4
Usar el hecho de que los polinomios $q_k(x)$ son todos mónicos de grado n para deducir que el coeficiente del término de grado n del polinomio de interpolación de f en los nodos $x_0, \ldots, x_n$ es

$$\frac{f(x_0)}{q_0(x_0)} + \cdots + \frac{f(x_n)}{q_n(x_n)} \tag{4.2}$$

Si definimos los polinomios

$$L_k(x) = \frac{q_k(x)}{q_k(x_k)}$$

el polinomio de interpolación puede expresarse de la siguiente forma llamada *fórmula de Lagrange*:

$$\boxed{p(x) = f(x_0)L_0(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)}. \tag{4.3}$$

Los polinomios $L_k(x)$ se llaman *polinomios de Lagrange* relativos a los nodos $x_0, \ldots, x_n$.

Los polinomios de Lagrange tienen (entre otras propiedades algebraicas de interés) la ventaja de ser independientes de la función a interpolar; dependen únicamente de los nodos, no de los valores $y_k = f(x_k)$ de la función. Por tanto una vez calculados para unos nodos determinados pueden ser utilizados para interpolar cualquier función en esos nodos.

Ejemplo de interpolación usando los polinomios de Lagrange.–

Supongamos que queremos estimar el valor de ciertas funciones f, g en el punto $x = 2.12$ para lo cual disponemos de los valores dados en la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$g(x)$
2.0	0.69315	0.56931
2.1	0.74194	0.57884
2.2	0.78846	0.67419

entonces procedemos de la siguiente forma: primero evaluamos los polinomios de Lagrange en los nodos, lo cual puede hacerse directamente escribiendo solamente:

$$L_0(2.12) = \frac{(2.12-2.1)(2.12-2.2)}{(2.0-2.1)(2.0-2.2)} = \frac{(0.02)(-0.08)}{(-0.1)(-0.2)} = -0.08$$
$$L_1(2.12) = \frac{(2.12-2.0)(2.12-2.2)}{(2.1-2.0)(2.1-2.2)} = \frac{(0.12)(-0.08)}{(0.1)(-0.1)} = 0.96$$
$$L_2(2.12) = \frac{(2.12-2.0)(2.12-2.1)}{(2.2-2.0)(2.2-2.1)} = \frac{(0.12)(0.02)}{(0.2)(0.1)} = 0.12$$

(Observación: $L_0(2.12) + L_1(2.12) + L_2(2.12) = 1$. ¿Casualidad?)
y ahora es inmediato calcular el valor estimado de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(2.12) &\simeq p_2(2.12) \\ &= 0.69315 \times (-0.08) + 0.74194 \times 0.96 + 0.78846 \times 0.12 \\ &= 0.75142, \end{aligned}$$

y el valor estimado de $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(2.12) &\simeq q_2(2.12) \\ &= 0.56931 \times (-0.08) + 0.57884 \times 0.96 + 0.67419 \times 0.12 \\ &= 0.59104. \end{aligned}$$

4.2.3 Fórmula baricéntrica para el polinomio de interpolación

El cálculo de un punto de interpolación mediante la fórmula de Lagrange es excesivamente costoso si se compara con el número de operaciones necesarias para evaluar un polinomio de grado n (a saber, n sumas y n multiplicaciones).

Ejercicio 4.5
La evaluación de un punto de interpolación mediante la fórmula de Lagrange del polinomio de interpolación para $n+1$ puntos requiere

$$\begin{aligned} n(2n+3) &\ \textit{sumas (o } n(n+2) \textit{ si se guardan} \\ &\ \textit{los resultados intermedios)} \\ (n+1)(2n-1) &\ \textit{multiplicaciones} \\ n+1 &\ \textit{divisiones} \end{aligned}$$

lo cual representa un número de operaciones del orden de $4n^2$ (o $3n^2$ si se guardan resultados intermedios).

Por supuesto, al aplicar la fórmula de Lagrange no sólo estamos evaluando el polinomio de interpolación sino que también estamos, de alguna manera y hasta cierto punto, hallando ese polinomio. Esto nos indica que si necesitamos hacer varias interpolaciones con los mismos nodos estaremos de alguna forma repitiendo innecesariamente algunos cálculos. Así

pues podemos preguntarnos si existe alguna forma de disponer los cálculos para reducir al máximo el número de operaciones que hemos de realizar o para ahorrar trabajo en el caso de que necesitemos interpolar en varios puntos. La fórmula baricéntrica es una forma de escribir el polinomio de interpolación que da una solución parcial a esta cuestión.

En primer lugar notemos que los $n+1$ polinomios de Lagrange $L_k(x)$ están relacionados por el hecho de que su suma vale 1 en cualquier punto. Esto es consecuencia del hecho observado más arriba de que el polinomio de interpolación de la función constante $f(x) = 1$ es ella misma y por lo tanto

$$1 = \sum_{k=0}^{n} L_k(x).$$

Además de esto si definimos el polinomio de grado $n+1$

$$q(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n),$$

entonces para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$ tenemos $q_k(x) = q(x)/(x - x_k)$ lo cual permite escribir el polinomio de interpolación como

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{q(x) f(x_0)}{(x - x_0) q_0(x_0)} + \cdots + \frac{q(x) f(x_n)}{(x - x_n) q_n(x_n)} \\ &= q(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k) q_k(x_k)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ejercicio 4.6
Demostrar que el polinomio $q(x)$ definido más arriba tiene la propiedad de que para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$ su derivada verifica $q'(x_k) = q_k(x_k)$.

Sugerencia: *Derivar $q(x) = q_k(x)(x - x_k)$ respecto a x.*

Ejercicio 4.7
De la relación $1 = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)$ se deduce que el polinomio $q(x)$ puede expresarse como

$$q(x) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x - x_k) q_k(x_k)}}. \tag{4.5}$$

Como consecuencia de estos resultados, se llega a la fórmula baricéntrica del polinomio de interpolación:

Teorema 22 (Fórmula baricéntrica) *Dados* $n+1$ *puntos* (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) *y definidas las cantidades*

$$a_k = \frac{1}{q_k(x_k)},$$

el valor en x *del polinomio de interpolación para los puntos* (x_0, y_0), ..., (x_n, y_n) *es el promedio ponderado o baricentro de las ordenadas* y_k *con pesos* $\frac{a_k}{(x-x_k)}$, *es decir,*

$$p(x) = \frac{\frac{a_0}{(x-x_0)}y_0 + \cdots + \frac{a_n}{(x-x_n)}y_n}{\frac{a_0}{(x-x_0)} + \cdots + \frac{a_n}{(x-x_n)}}$$

Demostración: Esto no es más que la fórmula (4.4) en la que se ha expresado $q(x)$ según (4.5). ■

En consecuencia si se evalúa el polinomio de interpolación mediante esta fórmula y se guardan los valores de las cantidades a_k, así como los de las cantidades $b_k = a_k y_k$, posteriores evaluaciones para distintos valores de x sólo cuestan $3n+1$ sumas y $2(n+1)+1 = 2n+3$ divisiones, es decir, del orden de $5n$ operaciones.

4.2.4 Análisis de errores

Nos proponemos ahora estimar el error que se comete al realizar una interpolación polinómica. Sea $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de $f(x)$ en los puntos $x_0, \ldots, x_n$ y sea $R_n(x)$ el *resto* o error cometido al tomar $P_n(x)$ por $f(x)$, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Evidentemente R_n es una función que se anula en los $n+1$ puntos $x_0, \ldots, x_n$ por lo que podemos poner

$$R_n(x) = C(x)(x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

Fijamos ahora el punto $x \in [x_0, x_n]$, distinto de cualquiera de los nodos $x_0, \ldots, x_n$, y definimos, para este x fijo, la función

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - C(x)(t-x_0)\cdots(t-x_n).$$

Esta función se anula para $t = x_0, \ldots, x_n$ y también para $t = x$, luego tiene $n+2$ ceros distintos en el intervalo $[x_0, x_n]$. En consecuencia, según el teorema de Rolle, su derivada tiene $n+1$ ceros distintos en $[x_0, x_n]$. Por la misma razón la derivada segunda $F''(t)$ tiene n ceros distintos en $[x_0, x_n]$ y siguiendo de esta forma llegamos a que la derivada $n+1$, $F^{(n+1)}(t)$, tiene un cero en $[x_0, x_n]$ que denotaremos η. Pero, teniendo en cuenta que la derivada $n+1$ de un polinomio de grado n es cero y que $\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\{(t-x_0)\cdots(t-x_n)\} = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}t^n = (n+1)!$, tenemos

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - C(x)\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\big\{(t-x_0)\cdots(t-x_n)\big\} \\ &= f^{(n+1)}(t) - C(x)(n+1)!, \end{aligned}$$

en consecuencia

$$f^{(n+1)}(\eta) - C(x)(n+1)! = 0$$

de donde deducimos

$$C(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}.$$

Con esto la fórmula del resto queda

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n) \tag{4.6}$$

para algún $\eta \in [x_0, x_n]$. Nótese la semejanza de esta fórmula con la fórmula del resto del polinomio de Taylor (véase, por ejemplo (4.16)).

El valor de $f^{(n+1)}(\eta)$ que aparece en la fórmula (4.6) es desconocido (entre otras razones porque el punto η es desconocido). Sin embargo, con frecuencia es posible dar una acotación de $f^{(n+1)}$ en el intervalo $[x_0, x_n]$ donde sabemos se encuentra η. En tal caso podemos utilizar la fórmula del resto (4.6) para estimar el error de interpolación como ilustramos con el siguiente ejemplo:

Supongamos que estimamos el valor de $\log_{10} 7$ mediante interpolación en la siguiente tabla

x	$\log_{10}(x)$
5	0.69897
6	0.77815
8	0.90309
9	0.95424
10	1

El error es

$$R_4(7) = C(7)(7-5)(7-6)(7-8)(7-9)(7-10) = -12\,C(7)$$

donde $C(7) = \frac{1}{5!}\frac{d^5 \log_{10}(x)}{dx^5}\Big|_{x=\eta} = \frac{1}{5!}\frac{1}{\ln 10}\frac{4!}{\eta^5} = \frac{1}{5\ln 10 \eta^5}$. Ahora bien, como $\eta > 5$, $\frac{1}{\eta^5} < \frac{1}{5^5}$ y por tanto

$$|R_4(7)| = |-12\,C(7)| = \frac{12}{5\ln 10\,\eta^5} < \frac{12}{5^6 \ln 10} \simeq 0.000334.$$

Este resultado nos indica que podemos esperar tres decimales exactos en el valor de $\log_{10} 7$ hallado por interpolación.

4.3 Método de Newton para simplificar el añadir nuevos puntos

Hemos visto que la fórmula baricéntrica representa una economía de operaciones respecto a la fórmula de Lagrange, especialmente si necesitamos interpolar la misma función en varios puntos con los mismos nodos. Sin embargo en ocasiones uno desearía hacer una interpolación de una misma función en un mismo punto pero con unos nodos diferentes. Por ejemplo, podemos encontrarnos en la situación de poder elegir entre unos nodos u otros, o, en caso de trabajar con una tabla en la que los nodos son fijos, podemos haber calculado una interpolación basándonos en ciertos puntos de la tabla y desear repetir la interpolación usando algún valor adicional con la intención de aumentar la exactitud. En este segundo caso ¿sería necesario repetir los cálculos desde el principio otra vez? ¿Podremos aprovechar parte de los cálculos ya realizados? Newton observó que se puede expresar el polinomio de interpolación, P_n, de $n+1$ puntos, como una suma de

términos tal que el último término sea igual a $P_n - P_{n-1}$. De esta forma, al añadir más puntos de interpolación no es necesario recalcular todos los términos, sino simplemente añadir unos nuevos.

4.3.1 La fórmula de Newton

Sea $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de los $n+1$ puntos

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n).$$

El cálculo de este polinomio puede hacerse con un mínimo de operaciones adicionales si se conoce ya el polinomio $P_{n-1}(x)$ de interpolación para los n puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. Para ver lo que hemos de añadir a $P_{n-1}(x)$ para obtener $P_n(x)$ estudiemos la diferencia $P_n(x) - P_{n-1}(x)$. Claramente esta diferencia es un polinomio de grado menor o igual que n que se anula en los n puntos $x_0, \ldots, x_{n-1}$ por lo tanto es de la forma

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = A_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

para alguna constante A_n que hemos de determinar a partir de los datos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Ejercicio 4.8
Demostrar que la constante A_n es igual al coeficiente del término de grado n del polinomio $P_n(x)$. Usar el resultado del ejercicio 4.4 para deducir la fórmula

$$A_n = \frac{y_0}{q_0(x_0)} + \cdots + \frac{y_n}{q_n(x_n)} \tag{4.7}$$

Así pues, dados los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, para cada $k \in \{0, \ldots, n\}$ podemos calcular la constante A_k la cual es, por definición, el coeficiente principal del polinomio de interpolación de grado k en los puntos (x_0, y_0), $\ldots, (x_k, y_k)$. Estas constantes tienen una importancia especial y reciben un nombre que indica una forma alternativa de calcularlas:

Definición: Las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se denominan *diferencias divididas* de los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. Cuando los y_k se obtienen como los valores de una función f en los x_k, estas diferencias divididas se representan con la notación

$$\boxed{A_k = f[x_0, \ldots, x_k]}.$$

Evidentemente esta definición implica la siguientes expresiones para los sucesivos polinomios de interpolación:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= f(x_0)\\
P_1(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0)\\
P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&\vdots\\
P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

Esta forma de expresar los polinomios de interpolación se conoce como *fórmula de Newton*. Podemos expresarla en forma más compacta así:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0,\ldots,x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)} \tag{4.8}$$

Ejercicio 4.9
Utilizar el resultado del ejercicio 4.8 para establecer la fórmula

$$f[x_0,\ldots,x_n] = \frac{1}{n!}\frac{d^nP_n(x)}{dx^n} \tag{4.9}$$

Vamos ahora a estudiar la forma más eficaz de calcular las diferencias divididas $f[x_0,\ldots,x_i]$ que aparecen en la fórmula de Newton.

4.3.2 Las diferencias divididas

Dando a x los valores $x_0,\ldots,x_n$ en la fórmula de Newton obtenemos

$$\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0)\\
y_1 &= y_0 + f[x_0,x_1](x_1-x_0)\\
y_2 &= y_0 + f[x_0,x_1](x_2-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x_2-x_0)(x_2-x_1)\\
&\vdots\\
y_n &= y_0 + f[x_0,x_1](x_n-x_0) + \cdots + f[x_0,\ldots,x_n](x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})
\end{aligned}$$

De esto, suponiendo que los nodos son distintos dos a dos, deducimos:

$$f[x_0,x_1] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0} - f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1},$$

y continuando de esta manera se puede llegar a establecer en general:

$$f[x_0,\ldots,x_{k+1}] = \frac{f[x_0,\ldots,x_{k-1},x_{k+1}] - f[x_0,\ldots,x_{k-1},x_k]}{x_{k+1}-x_k} \tag{4.10}$$

que es la fórmula que expresa $f[x_0,\ldots,x_{k+1}]$ como diferencia dividida. Sin embargo esta fórmula puede demostrarse mucho más sencillamente de la siguiente forma:

Ejercicio 4.10
Sean $x_0,\ldots,x_{k+1}$ nodos de interpolación distintos entre si. Si $p(x)$ es el polinomio de interpolación de f en $x_0,\ldots,x_{k-1},x_{k+1}$, y $q(x)$ es el polinomio de interpolación de f en $x_0,\ldots,x_k$, entonces el polinomio

$$\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}p(x) + \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}q(x)$$

tiene grado $\le k+1$ y coincide con f en $x_0,\ldots,x_{k+1}$ (y por lo tanto es el polinomio de interpolación de f en los puntos $x_0,\ldots,x_{k+1}$).

Sugerencia: *Ver la demostración del Lema de Aitken.*

Utilizando el resultado de este ejercicio se llega fácilmente al siguiente resultado:

Ejercicio 4.11
Sean $f[x_0,\ldots,x_{k-1},x_{k+1}]$ y $f[x_0,\ldots,x_k]$ los coeficientes del término de grado k de los polinomios p y q del ejercicio 4.10. Entonces, suponiendo que $x_{k+1}\neq x_k$, el coeficiente del término de grado $k+1$ del polinomio de interpolación de f en $x_0,\ldots,x_{k+1}$ es igual a

$$\frac{f[x_0,\ldots,x_{k-1},x_{k+1}] - f[x_0,\ldots,x_{k-1},x_k]}{x_{k+1}-x_k}.$$

En realidad, la fórmula (4.10) es sólo una de las posibles fórmulas de las diferencias divididas. Todas esas fórmulas pueden deducirse a la vez al demostrar, con un razonamiento análogo al de los ejercicios 4.10 y 4.11, el siguiente teorema,

Teorema 23 *Si los nodos de interpolación son todos distintos entre si, entonces la n-ésima diferencia dividida $f[x_0,\dots,x_n]$ puede calcularse, para cualesquiera $i, j \in \{0,\dots,n\}$ con $i \neq j$, mediante*

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n] - f[x_0,\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n]}{x_j - x_i} \quad (4.11)$$

donde el circunflejo indica una variable que no se considera incluida en la lista, por ejemplo,

$$f[x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n] = f[x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n].$$

El caso particular de la fórmula (4.11) más utilizado es el que resulta al tomar $i = 0$ y $j = n$, es decir

$$\boxed{f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_n] - f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}.} \quad (4.12)$$

Este teorema se deduce (con un razonamiento análogo al que nos lleva del ejercicio 4.10 al ejercicio 4.11) de un teorema conocido con el nombre de *Lema de Aitken*.

Teorema 24 (Lema de Aitken) *Sea f una función continua en un intervalo I y sean $\{x_0,\dots,x_n\} \in I$. Para cada subconjunto $S \subset \{x_0,\dots,x_n\}$ denotemos $P_S(x)$ el polinomio de interpolación de f en los nodos que son elementos de S. Si $x_i, x_j \in S$ y $x_i \neq x_j$ entonces*

$$P_S(x) = \frac{(x - x_j)P_{S-\{x_j\}}(x) - (x - x_i)P_{S-\{x_i\}}(x)}{x_i - x_j}.$$

Demostración: Sea $m + 1$ el número de elementos de S. Lo que hay que probar es que P_S tiene grado $\leq m$ y que coincide con f en los elementos de S. Lo último es evidente para x_i y para x_j porque lo cumplen $P_{S-\{x_i\}}$

y $P_{S-\{x_j\}}$. Para un $x_k \in S$ distinto de x_i y de x_j, dado que $P_{S-\{x_i\}}(x_k) = f(x_k)$ y $P_{S-\{x_j\}}(x_k) = f(x_k)$, tenemos

$$\begin{aligned} P_S(x_k) &= \frac{(x_k - x_j)f(x_k) + (x_i - x_k)f(x_k)}{x_i - x_j} \\ &= \frac{-x_j f(x_k) + x_i f(x_k)}{x_i - x_j} = f(x_k). \end{aligned}$$

Sólo falta demostrar que P_S tiene grado $\leq m$. Por ser polinomios de interpolación en m nodos tanto $P_{S-\{x_i\}}$ como $P_{S-\{x_j\}}$ tienen grado $\leq m - 1$ y al multiplicarlos por polinomios de primer grado se obtienen polinomios de grado $\leq m$, por lo que P_S tiene grado $\leq m$. En consecuencia P_S es el polinomio de interpolación en los nodos que son elementos de S. ∎

4.3.3 Propiedades de simetría

Una propiedad importante de las diferencias divididas de un conjunto de puntos es el ser independientes del orden en que los puntos estén dados.

Teorema 25 (Propiedad de simetría de las diferencias divididas) *Dados $n + 1$ números $x_0,\dots,x_n$ en el dominio de una función f, para cualquier permutación $\sigma : \{0,\dots,n\} \to \{0,\dots,n\}$ de los índices $\{0,\dots,n\}$ se verifica*

$$f[x_0,\dots,x_n] = f[x_{\sigma(0)},\dots,x_{\sigma(n)}]$$

Demostración: Una demostración inmediata se basa en la fórmula (4.7) en la que una reordenación de los puntos $x_0,\dots,x_n$ sólo cambia el orden de los sumandos. Otra demostración puede hacerse por inducción en el número de puntos. La simetría es trivial para el caso de un punto ($n = 0$) y es evidente en el caso de dos puntos:

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f[x_1,x_0].$$

Supongamos que se cumple para el caso de n puntos y consideremos los $n+1$ puntos $x_0,\dots,x_n$ y la permutación $\sigma : \{0,\dots,n\} \to \{0,\dots,n\}$. Sean $i = \sigma(0)$, $j = \sigma(n)$, entonces (por la hipótesis de inducción) $f[x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n] = f[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}]$ e igualmente $f[x_0,\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n] = f[x_{\sigma(0)},\dots,x_{\sigma(n-1)}]$

donde el circunflejo sobre una variable indica que esa variable no se considera incluida en la lista. Entonces, según las fórmulas (4.11) y (4.12),

$$\begin{aligned} f[x_0,\dots,x_n] &= \frac{f[x_0,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n] - f[x_0,\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n]}{x_j - x_i} \\ &= \frac{f[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}] - f[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n-1)}]}{x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(0)}} \\ &= f[x_{\sigma(0)},\dots,x_{\sigma(n)}] \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el teorema. ■

4.3.4 La tabla de diferencias divididas y adición de nuevos nodos

Si calculamos las diferencias divididas de una función f en los puntos $x_0,\dots,x_n$ mediante (4.12) podemos disponerlas en una tabla de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \\
 & & f[x_2,x_3] & & f[x_1,x_2,x_3,x_4] & \\
x_3 & f[x_3] & & f[x_2,x_3,x_4] & & \\
 & & f[x_3,x_4] & & & \\
x_4 & f[x_4] & & & &
\end{array}$$

Esta tabla nos indica la forma de calcular cada diferencia dividida: la diferencia de las dos que están a su izquierda dividida entre la correspondiente diferencia de las x. Por ejemplo, la tabla de diferencias divididas para los datos

x	$f(x)$
1	1.5709
4	1.5727
6	1.5751

es

$$\begin{array}{llll}
1 & 1.5709 & & \\
 & & 0.0006 & \\
4 & 1.5727 & & 0.00012 \\
 & & 0.0012 & \\
6 & 1.5751 & &
\end{array}$$

Supongamos ahora que nos dan el punto (0, 1.5708) como información adicional. Entonces sólo tenemos que hacer un poco más de trabajo para completar la tabla

$$\begin{array}{lllll}
1 & 1.5709 & & & \\
 & & 0.0006 & & \\
4 & 1.5727 & & 0.00012 & \\
 & & 0.0012 & & -0.000001 \\
6 & 1.5751 & & 0.000121 & \\
 & & 0.000717 & & \\
0 & 1.5708 & & &
\end{array}$$

4.4 El algoritmo de interpolación de Aitken

Gran parte del error cometido al hacer una interpolación proviene del redondeo en las operaciones aritméticas realizadas. Veremos a continuación un algoritmo para la evaluación del polinomio de interpolación, que está especialmente adaptado para reducir los errores de cálculo.

Antes de introducir dicho algoritmo, llamado el *algoritmo de Aitken*, vamos a introducir la siguiente notación para los polinomios de interpolación. Denotaremos por $P_{0,\dots,n}$ el polinomio de interpolación de una función f en los nodos $x_0,\dots,x_n$. Es decir, usamos como subíndices en el polinomio de interpolación el conjunto de índices correspondientes a los nodos de interpolación. De acuerdo con esto tenemos:

$$P_{0,1} = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \qquad \text{(Lagrange)}$$

$$P_{0,1} = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0), \qquad \text{(Newton)}$$

$$\begin{aligned} P_{0,1} &= \frac{(x-x_0)f(x_1)-(x-x_1)f(x_0)}{x_1-x_0} \qquad \text{(Aitken)} \\ &= \frac{(x-x_0)P_1(x)-(x-x_1)P_0(x)}{x_1-x_0}. \end{aligned}$$

Para tres puntos la fórmula de Aitken es

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{(x-x_1)P_{0,2}(x)-(x-x_2)P_{0,1}(x)}{x_2-x_1}$$

y en general, de acuerdo con la fórmula del lema de Aitken, tenemos

$$P_{0,\dots,k+1}(x) = \frac{(x - x_k)P_{0,\dots,k-1,k+1}(x) - (x - x_{k+1})P_{0,\dots,k}(x)}{x_{k+1} - x_k}.$$

Esta fórmula es la base del algoritmo de Aitken:

Algoritmo de interpolación de Aitken

1 Datos: n (número de intervalos o segmentos)**,** $x_0, \dots, x_n$ (nodos de interpolación)**,** $y_0, \dots, y_n$ (ordenadas en los nodos)**,** x (punto en el que se desea interpolar la función)**.**

2 Para $k = 0, n$

$A(k, 0) = y_k$**;**

$D(k) = x - x_k$**;**

3 Siguiente k

4 Para $i = 1, n$

Para $j = 1, i$

$A(i, j) = [D(j-1)A(i, j-1) - D(i)A(j-1, j-1)]/(x_i - x_{j-1})$**;**

Siguiente j

5 Imprimir $A(i, i)$

6 Siguiente i

7 Imprimir "Solución es: **"; $A(n, n)$; "." y PARAR**

En este algoritmo se imprimen todos los valores intermedios, $A(i, i)$, con el objetivo de tener una idea de la convergencia. Dichos valores de la diagonal de A forman una sucesión de aproximaciones al valor deseado. Si esta sucesión se acerca a un valor fijo podemos tomar ese valor como el valor de la interpolación deseado. Normalmente dichos valores parecen converger al cabo de unos pocos pasos y llegados a un punto empiezan a diverger con un empeoramiento de la estimación. Esto nos indica que pasado cierto punto no se gana precisión al utilizar más nodos de interpolación.

Cuando se hacen cálculos con una calculadora de bolsillo, se pueden sistematizar los cálculos según un esquema sencillo fácil de memorizar. Por ejemplo, el cálculo de $P_{0,1,2} = [(x - x_1)P_{0,2} - (x - x_2)P_{0,1}]/(x_2 - x_1)$ es como el de un determinante 2×2 dividido por $x_2 - x_1$. En esta situación conviene disponer los cálculos en una tabla de la siguiente forma:

x_i	$x - x_i$	$f(x_i)$			
x_0	$x - x_0$	P_0			
x_1	$x - x_1$	P_1	$P_{0,1}$		
x_2	$x - x_2$	P_2	$P_{0,2}$	$P_{0,1,2}$	
x_3	$x - x_3$	P_3	$P_{0,3}$	$P_{0,1,3}$	$P_{0,1,2,3}$

Ejercicio 4.12
Comprobar la siguiente tabla de interpolaciones de la función f en el punto $x = 4.5$,

x_i	$x - x_i$	$f(x_i)$				
4.0	0.5	0.60206				
4.2	0.3	0.62325	0.65504			
4.4	0.1	0.64345	0.65380	0.65318		
4.6	−0.1	0.66276	0.65264	0.65324	0.65321	
4.8	−0.3	0.68124	0.65155	0.65330	0.65321	0.65321

4.5 Interpolación con nodos igualmente espaciados

Vamos a suponer ahora que los nodos de interpolación están igualmente espaciados, es decir (suponiendo los nodos dados en orden creciente, $x_0 < \cdots < x_n$), las diferencias $x_{i+1} - x_i$ son todas iguales a un valor fijo que denotamos h. Entonces, si $a = x_0$ y $b = x_n$, tenemos $h = (b - a)/n$.

Dado un punto x definimos la variable $s = (x - x_0)/h$, de forma que $x = x_0 + sh$. Con este cambio de variable los nodos corresponden a los valores enteros no negativos de s, $s = 0, \dots, n$ y podemos aplicar este cambio de variable a la función f para obtener la función de variable entera F tal que para valores correspondientes de x y s, $F(s) = f(x) = f(x_0 + sh) = f_s$.

Ahora definimos los incrementos de órdenes sucesivos,

$$\Delta^1 f_s = f_{s+1} - f_s = F(s+1) - F(s)$$
$$\Delta^2 f_s = \Delta^1 f_{s+1} - \Delta^1 f_s$$

y, en general

$$\Delta^{i+1} f_s = \Delta^i f_{s+1} - \Delta^i f_s.$$

Estos incrementos se llaman *diferencias progresivas* y se pueden calcular para cualquier conjunto de puntos (x_i, y_i) en los que las abscisas estén igualmente espaciadas. En base a estas diferencias progresivas se pueden calcular fácilmente las diferencias divididas correspondientes a los nodos dados mediante la fórmula que se establece en el siguiente teorema:

Teorema 26 *Si las abscisas de los puntos $(x_i, f(x_i))$ están igualmente espaciadas siendo el espaciamiento $h = x_{i+1} - x_i$, entonces*

$$f[x_k, \ldots, x_{k+n}] = \frac{\Delta^n f_k}{n!h^n}$$

Demostración: Por inducción. Si $n = 0$, $f[x_k] = f(x_k) = \Delta^0 f_k/h^0 = f_k$. También se puede comprobar inmediatamente que la fórmula es válida para $n = 1$. Supongamos el resultado cierto para cierto n. Entonces

$$\begin{aligned} f[x_k, \ldots, x_{k+n+1}] &= \frac{f[x_{k+1}, \ldots, x_{k+n+1}] - f[x_k, \ldots, x_{k+n}]}{x_{k+n+1} - x_k} \\ &= \frac{\frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_{k+1} - \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_k}{(n+1)h} \\ &= \frac{\Delta^n f_{k+1} - \Delta^n f_k}{(n+1)!h^{n+1}} = \frac{\Delta^{n+1} f_k}{(n+1)!h^{n+1}} \end{aligned}$$

con lo que se completa la demostración. ■

Corolario 7 *Si P_n es el polinomio de interpolación de f en nodos igualmente espaciados $x_0, \ldots, x_n$ con $x_k = x_0 + kh$ entonces*

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = \frac{\Delta^n f_0}{h^n}$$

Demostración:

Según la fórmula (4.9) que aparece en el ejercicio 4.9, tenemos $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} d^n P_n(x)/dx^n$. Ahora bien, según el teorema anterior

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!}\Delta^n f_0/h^n,$$

por tanto, igualando términos y cancelando el factorial se obtiene la fórmula del corolario. ■

Vamos a ver ahora la forma que adopta la fórmula de Newton del polinomio de interpolación para nodos igualmente espaciados con espaciamiento igual a $h = (x_n - x_0)/n$. Utilizando la expresión de las diferencias divididas dada en el teorema anterior, la fórmula de Newton queda

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta^1 f_0}{h}(x - x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

y teniendo en cuenta que para cada k, $x - x_k = (s-k)h$ (usando la variable s definida por $s = (x - x_0)/h$), podemos poner

$$P_n(x) = f_0 + s\Delta^1 f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0.$$

Ahora bien, podemos definir los números combinatorios $\binom{s}{k}$ para s no necesariamente entero mediante

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!},$$

con lo cual el polinomio de interpolación queda

$$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta^1 f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0,$$

o en forma más compacta

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0.$$

4.5.1 Problemas de la interpolación con nodos igualmente espaciados

Si nos fijamos en la función $q(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$ que determina el comportamiento del error de interpolación, nos encontramos con una función que, para nodos igualmente espaciados, tiene grandes oscilaciones hacia los extremos del intervalo de interpolación. Como ejemplo obsérvese el comportamiento de $q(x)$ para las abscisas obtenidas al dividir el intervalo $[-1, 1]$ en 9 subintervalos iguales:

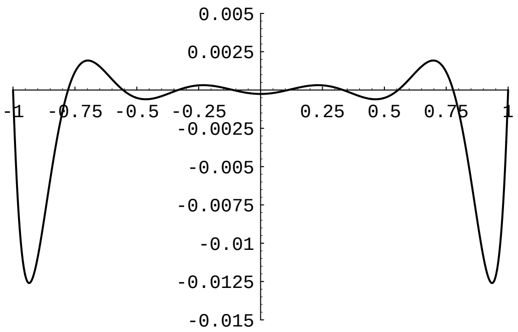

Figura 4.1: Gráfica del poinomio $q(x) = (x+1)(x+\frac{7}{9})(x+\frac{5}{9})(x+\frac{3}{9})(x+\frac{1}{9})(x-\frac{1}{9})(x-\frac{3}{9})(x-\frac{5}{9})(x-\frac{7}{9})(x-1)$

Por lo dicho, la interpolación mediante un solo polinomio que pase por todos los nodos suele ser de poca utilidad, especialmente cuando el número de nodos es elevado y están igualmente distribuidos. Vemos en las siguientes gráficas varios ejemplos del fenómeno conocido como fenómeno Runge, que consiste en las excesivas oscilaciones que aparecen en el polinomio de interpolación cerca de los extremos del intervalo de interpolación.

4.6 Interpolación mediante varillas flexibles (*splines*)

4.6.1 Introducción

Para evitar los problemas de la interpolación polinómica con un número elevado de nodos (sobre todo si están igualmente espaciados), surge la idea de interpolar por distintas funciones en intervalos adyacentes imponiendo condiciones de contorno entre cada dos de ellos para asegurar la continuidad, diferenciabilidad, etc. Es éste un desarrollo reciente, pero que está relacionado con un artilugio mecánico muy antiguo.

Los artesanos han usado desde hace mucho varillas flexibles (inglés: *splines*) hechas de algún material elástico como madera o (más recientemente) plástico, para trazar curvas que tomen una forma predeterminada al hacerlas pasar por unos puntos

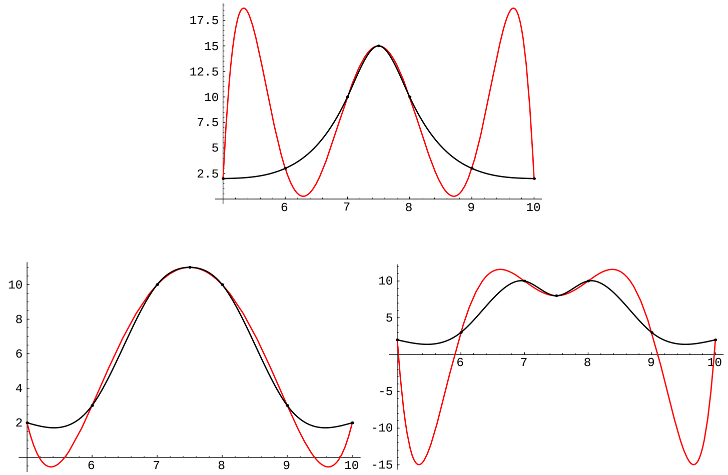

Figura 4.2: Ejemplos de oscilaciones del polinomio de interpolación. En gris el correspondiente polinomio de interpolación para las abscisas $x_0 = 5$, $x_1 = 6$, $x_2 = 7$, $x_3 = 7.5$, $x_4 = 8$, $x_5 = 9$, $x_6 = 10$.

dados (puntos de interpolación). Estas varillas se sujetan fijamente a los puntos de interpolación y automáticamente adoptan la forma que minimiza su energía potencial elástica, obteniéndose una curva suave y estéticamente agradable que pasa por todos los puntos prefijados.

Como la densidad lineal de energía elástica de una varilla es en cada uno de sus puntos proporcional al cuadrado de la curvatura $\kappa(x)$ en ese punto, la forma de la varilla será la solución del problema variacional $\delta \int \alpha\kappa(x)^2\, dl = 0$ (α = constante elástica), la cual, suponiendo que las fuerzas que los nodos ejercen sobre la varilla sean perpendiculares a ésta (ausencia de rozamiento), resulta ser una función que, entre cada dos nodos consecutivos, está dada por un polinomio de tercer grado cuyos coeficientes pueden calcularse fácilmente resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

Estas funciones polinómicas a trozos son también la solución de un problema similar: El de la trayectoria de un móvil que ha de pasar por unos puntos dados en el menor tiempo posible y de la forma más suave (esto es, minimizando en cada punto la curvatura).

La teoría de interpolación mediante "varillas flexibles" se ha desarrollado enormemente alcanzando un gran nivel de generalidad. Hoy día las varillas cúbicas son sólo un caso particular de unos métodos mucho más generales, que se salen del alcance de este curso. A pesar de ello el caso de las varillas cúbicas es de gran interés y utilidad práctica. Por ejemplo, en las artes gráficas se siguen utilizando las varillas flexibles cúbicas, en su versión de software de diseño gráfico, bajo el nombre de *Curvas de Bezier*, que son el caso más sencillo ya que son curvas que pasan por dos puntos determinados y con tangentes en esos puntos de pendiente determinada. Así, las curvas de Bezier son polinomios de tercer grado que quedan completamente determinados por 3 puntos del plano; los *dos extremos* y un *punto de control*, que es el punto de intersección de las dos rectas tangentes en los extremos, como se indica en la figura 4.3.

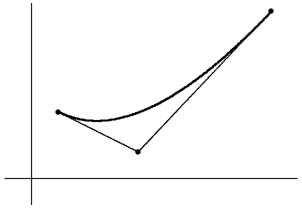

Figura 4.3: Curva de Bezier

4.6.2 Varillas flexibles cúbicas

Condiciones para su determinación.–

Sean $x_0 < \cdots < x_n$ nodos de interpolación en los que conocemos los valores $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$ de cierta función f. Nuestro problema es hallar n polinomios de tercer grado, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, tales que para cada $k = 1, \ldots, n$, p_k pase por los puntos (x_k, y_k) y (x_{k-1}, y_{k-1}) y además de tal forma que en cada nodo los dos polinomios que coinciden en él tengan la misma pendiente y la misma curvatura. De esta forma obtenemos una "varilla flexible" como la que se muestra en la figura 4.4, es decir una curva polinómica de grado tres a trozos y con derivada segunda continua en todos los puntos del intervalo de x_0 a x_n.

Así pues, las condiciones que deben cumplir los polinomios $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ para que constituyan una varilla flexible que pase por los puntos (x_0, y_0), $\ldots, (x_n, y_n)$ son:

1. Que pasen por los puntos dados:

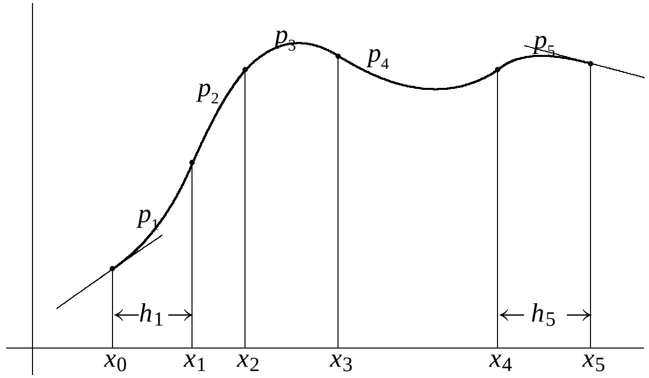

Figura 4.4: Varilla flexible

$p_1(x_0) = y_0$ y para cada $j = 1, \ldots, n$, $p_j(x_j) = y_j$.

2. Continuidad de la varilla:
Para cada $j = 1, \ldots, n-1$, $p_j(x_j) = p_{j+1}(x_j)$.

3. Continuidad de la pendiente o derivada:
Para cada $j = 1, \ldots, n-1$, $p'_j(x_j) = p'_{j+1}(x_j)$ y finalmente

4. Continuidad de la curvatura:
Para cada $j = 1, \ldots, n-1$, $p''_j(x_j) = p''_{j+1}(x_j)$.

Aquí hemos hecho un esfuerzo por expresar las tres condiciones de continuidad según fórmulas semejantes. En lugar de ello podríamos haber expresado las dos primeras condiciones conjuntamente como:

Para cada $j = 1, \ldots, n$,

1. $p_j(x_j) = y_j$, y
2. $p_j(x_{j-1}) = y_{j-1}$.

En cualquier caso lo que tenemos son un total de $4n-2$ ecuaciones para determinar los $4n$ coeficientes desconocidos de los n polinomios cúbicos

$$p_1(x), \ldots, p_n(x).$$

Necesitamos dos condiciones adicionales las cuales suelen imponerse en los extremos x_0, x_n de la varilla. Estas condiciones adicionales pueden imponerse de varias maneras, dependiendo del contexto de nuestro problema.

Una de las condiciones más naturales, satisfecha por una varilla física que sólo está restringida a pasar sin rozamiento por los nodos (lo que da lugar al nombre de *condición de extremos libres*), consiste en tener curvatura cero en los extremos. Puesto que la curvatura es un múltiplo de la derivada segunda esta condición es equivalente a

$$p_1''(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad p_n''(x_n) = 0.$$

Una segunda condición utilizada con frecuencia consiste en imponer en cada uno de los extremos la misma derivada segunda que en su nodo adyacente, es decir:

$$p_1''(x_0) = p_1''(x_1) \quad \text{y} \quad p_n''(x_n) = p_n''(x_{n-1}).$$

Por último veremos una condición en los extremos consistente en asignar en ellos una pendiente predeterminada a la curva, es decir, imponer un valor predeterminado a las derivadas

$$p_1'(x_0) = y_0' \quad \text{y} \quad p_n'(x_n) = y_n'.$$

Aunque estas tres condiciones son las más comunes, en modo alguno son las únicas posibles. Según las necesidades se pueden emplear distintas combinaciones de estas u otras condiciones.

Cálculo de las varillas flexibles cúbicas.–

Para el cálculo eficaz de los polinomios $p_1, \ldots, p_n$ que componen la varilla flexible los expresaremos en la forma $p_k(x) = a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + d_k$ de manera que las condiciones $p_k(x) = y_k$ nos proporcionan automáticamente el valor de los coeficientes de grado cero: $d_k = y_k$, con lo cual nos queda

$$p_k(x) = a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + y_k$$

y sólo necesitamos determinar tres coeficientes en cada polinomio.

En lo que sigue utilizaremos frecuentemente los valores de las distancias entre nodos consecutivos, las cuales denotaremos mediante $h_1, \ldots, h_n$, definidas por

$$h_k = x_k - x_{k-1}.$$

En términos de estas cantidades las condiciones de continuidad de la varilla (a saber: $p_k(x_{k-1}) = y_{k-1}$ para $k = 2, \ldots, n$) dan lugar a las ecuaciones

$$a_k(x_{k-1}-x_k)^3 + b_k(x_{k-1}-x_k)^2 + c_k(x_{k-1}-x_k) + y_k = y_{k-1},$$

es decir:

$$a_k h_k^3 - b_k h_k^2 + c_k h_k = y_k - y_{k-1} \tag{4.13}$$

para $k = 1, \ldots, n$.

Nuestro objetivo ahora es expresar cada uno de los coeficientes incógnita a_k, b_k, c_k en términos de una misma variable o parámetro, s_k, para reducir nuestro problema a un sistema de $n+1$ ecuaciones en las $n+1$ incógnitas $s_0, s_1, \ldots, s_n$. Estas nuevas incógnitas serán las derivadas segundas de los polinomios p_k en los nodos, es decir, definimos

$$s_k = p_k''(x_k),$$

para $k = 1, \ldots, n$, y además, el parámetro s_0 que es igual a la derivada segunda de p_1 en x_0, esto es,

$$s_0 = p_1''(x_0). \tag{4.14}$$

Teniendo en cuenta que las dos primeras derivadas de los p_k son

$$\begin{aligned} p_k'(x) &= 3a_k(x-x_k)^2 + 2b_k(x-x_k) + c_k \\ p_k''(x) &= 6a_k(x-x_k) + 2b_k \end{aligned}$$

la definición anterior implica

$$\boxed{b_k = \tfrac{1}{2}s_k}$$

para $k = 1, \ldots, n$. Además,

Ejercicio 4.13
Las condiciones de continuidad de la curvatura (expresadas en términos de las s_k), junto con la definición de s_0 dada por la fórmula (4.14) *implican*

$$\boxed{a_k = \frac{s_k - s_{k-1}}{6h_k}}$$

para $k = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 4.14
Sustituyendo en las ecuaciones (4.13) *la expresión de los coeficientes* a_k *dada en el ejercicio 4.13, así como las expresiones de los coeficientes* b_k*, obtenemos*

$$\boxed{c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \tfrac{1}{6}(s_{k-1} + 2s_k)h_k}$$

para $k = 1, \ldots, n$.

Con las expresiones dadas en estos dos ejercicios podemos obtener los coeficientes de los polinomios $p_1, \ldots, p_n$ una vez conocidos los parámetros s_k. Para hallar éstos usamos la condición de continuidad de la derivada, según la cual para $k = 1, \ldots, n-1$, $p'_k(x_k) = p'_{k+1}(x_k)$, es decir, $3a_k(x_k - x_k)^2 + 2b_k(x_k - x_k) + c_k = 3a_{k+1}(x_k - x_{k+1})^2 + 2b_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + c_{k+1}$, lo que nos da

$$c_k = 3a_{k+1}h_{k+1}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}.$$

Introduciendo en esta ecuación las expresiones de los coeficientes a_k, b_k, c_k en términos de los parámetros s_k obtenemos las siguientes $n-1$ ecuaciones lineales en las $n+1$ incógnitas $s_0, \ldots, s_n$

$$\begin{aligned} &\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \tfrac{1}{6}(s_{k-1} + 2s_k)h_k \\ &= \tfrac{1}{2}(s_{k+1} - s_k)h_{k+1} - s_{k+1}h_{k+1} + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + \tfrac{1}{6}(s_k + 2s_{k+1})h_{k+1} \end{aligned}$$

y ordenando según los s_k,

$$h_k s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_{k+1}s_{k+1} = \hat{b}_k, \tag{4.15}$$

donde hemos introducido los términos independientes

$$\hat{b}_k = 6\Big(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\Big).$$

En forma matricial las ecuaciones anteriores son:

$$\begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Necesitamos dos ecuaciones adicionales, las cuales, como hemos dicho, se obtienen generalmente de las condiciones en los extremos. Nosotros nos vamos a limitar a tres posibles conjuntos de condiciones:

Varillas de extremos libres.–

Este es el caso en el que se imponen las dos condiciones adicionales $s_0 = 0$ y $s_n = 0$. Entonces en nuestro sistema de ecuaciones se eliminan la primera (s_0) y última (s_n) incógnitas (lo que conlleva eliminar la primera y última columnas de la matriz de coeficientes) y queda

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-2} \\ s_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-1} \end{pmatrix}$$

Nótese que el sistema que resulta tiene una matriz de coeficientes simétrica, de tipo Hessenberg y con diagonal dominante. Esto último por sí sólo garantiza la existencia de solución única.

Varillas de extremos con pendiente prefijada.–

Supongamos que se quiere imponer un valor determinado a la pendiente de la varilla flexible en los extremos x_0 y x_n: $p'_1(x_0) = y'_0$ y $p'_n(x_n) = y'_n$. Esto nos proporciona dos ecuaciones adicionales que podemos utilizar en lugar de las condiciones de extremos libres y el problema tendrá una solución que en general será distinta de la de extremos libres. Sólo se obtendrá la misma solución si los valores de y'_0 e y'_n son precisamente los $p'_1(x_0)$ y $p'_n(x_n)$ de la varilla de extremos libres. En todo caso está claro que las varillas de extremos libres pueden considerarse un caso particular de la situación más general de varillas con pendiente prefijada en los extremos.

Por otro lado, se da la circunstancia de que este caso aparentemente más general de varillas flexibles puede obtenerse como un caso particular de las varillas de extremos libres. Una justificación geométrica de este hecho se basa en lo siguiente: Consideremos dos abscisas accesorias adicionales que denotamos x_{-1} y x_{n+1} y que haremos variar según los valores de un parámetro positivo ϵ del siguiente modo: $x_{-1} = x_0 - \epsilon$ y $x_{n+1} = x_n + \epsilon$. Asociada a cada una de estas abscisas consideramos la ordenada que nos da el punto sobre la recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente y'_0 (o, en el extremo opuesto, que pasa por (x_n, y_n) con pendiente y'_n), es decir, consideramos las ordenadas $y_{-1} = y_0 - y'_0\epsilon$ e $y_{n+1} = y_n + y'_n\epsilon$.

Ejercicio 4.15
La varilla de extremos libres que pasa por los puntos descritos más arriba

$$(x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$$

tiene como posición límite cuando ϵ tiende a cero la de la varilla que pasa por $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ con pendientes y'_0 e y'_n respectivamente en los extremos x_0 y x_n.

Teniendo en cuenta que los parámetros asociados con la varilla de extremos libres correspondiente a un cierto ϵ son:

$$h_0 = \epsilon, \quad h_{n+1} = \epsilon,$$

$$\hat{b}_0 = 6\Big(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\Big), \quad \hat{b}_n = 6\Big(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\Big)$$

podemos concluir que el sistema de ecuaciones que determina la varilla flexible con pendiente prefijada en los extremos es

$$\begin{pmatrix} 2h_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n \\ & & & & h_n & 2h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{pmatrix}.$$

Naturalmente el mismo resultado se puede justificar algebraicamente a partir de las ecuaciones adicionales impuestas por las pendientes asignadas a los extremos, las cuales son,

$$3a_1h_1^2 - 2b_1h_1 + c_1 = y'_0 \qquad \text{y} \qquad c_n = y'_n$$

en las que hemos de expresar los coeficientes en términos de los s_k. Haciendo esto se obtienen las ecuaciones

$$\tfrac{1}{2}(s_1 - s_0)h_1 - s_1h_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_1} + \tfrac{1}{6}(s_0 + 2s_1)h_1 = y'_0$$

y

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \tfrac{1}{6}(s_{n-1} + 2s_n)h_n = y'_n,$$

que después de reordenar sus términos se pueden escribir como

$$2h_1s_0 + h_1s_1 = 6\Big(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\Big) \equiv \hat{b}_0$$

y

$$h_ns_{n-1} + 2h_ns_n = 6\Big(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\Big) \equiv \hat{b}_n.$$

Unidas éstas a las (4.15) se llega al sistema de $n+1$ ecuaciones lineales en las $n+1$ incógnitas $s_0, \ldots, s_n$ que obtuvimos por el razonamiento geométrico.

Varillas con $s_0 = s_1$ y $s_n = s_{n-1}$.–

Al utilizar esta condición el sistema de ecuaciones (4.15) toma la forma

$$\begin{pmatrix} 3h_1+2h_2 & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2h_{n-1}+3h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-2} \\ s_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La matriz de coeficientes sigue siendo simétrica, de tipo Hessenberg y con diagonal dominante.

4.6.3 Un algoritmo para obtener varillas flexibles cúbicas de extremos libres

Para terminar esta sección sobre aproximación mediante varillas flexibles vamos a dar un algoritmo que evalúa varillas flexibles de extremos libres.

Algoritmo para evaluar varillas flexibles de extremos libres

1 Datos: n (número de intervalos o segmentos), $x_0, \ldots, x_n$ (abscisas de los nodos), $y_0, \ldots, y_n$ (ordenadas de los nodos), x (punto en el que se desea evaluar la varilla flexible).
2 $s_0 = 0$; $s_n = 0$;
3 Para $k = 1, n$
  $h_k = x_k - x_{k-1}$;
4 Siguiente k
5 Para $k = 1, n-1$
  $A(k, k) = 2(h_k + h_{k+1})$;
  $A(k, k+1) = h_{k+1}$;
  $A(k+1, k) = h_{k+1}$;
  $\hat{b}_k = 6[(y_{k+1} - y_k)/h_{k+1} - (y_k - y_{k-1})/h_k]$;
6 Siguiente k
7 Para $i = 2, n-1$
  $m = A(i, i-1)/A(i-1, i-1)$;
  $A(i, i) = A(i, i) - mA(i-1, i)$;
  $\hat{b}_i = \hat{b}_i - m\hat{b}_{i-1}$;
8 Siguiente i
9 Para $k = n-1, 1$ **incremento** -1
  $s_k = (\hat{b}_k - A(k, k+1)s_{k+1})/A(k, k)$;
10 Siguiente k

11 Para $k = 1, n$
  $a_k = (s_k - s_{k-1})/(6h_k)$;
  $b_k = s_k/2$;
  $c_k = (y_k - y_{k-1})/h_k + (s_{k-1} + 2s_k)h_k/6$;
12 Siguiente k
13 Si $x < x_0$ **entonces ir a 16**
14 Para $k = 1, n$
  Si $x \le x_k$ **entonces ir a 17**
15 Siguiente k
16 Imprimir "x no está contenido en el intervalo de interpolación.**" y PARAR**
17 $h = x - x_k$
18 $y = y_k + h(c_k + h(b_k + ha_k))$
19 Imprimir "Solución es: **";** y**; "." y PARAR**

4.7 Interpolación Óptima y Polinomios de Chebyshev

4.7.1 Introducción y motivación

Estudiamos ahora un problema relacionado con el problema de interpolación polinómica pero planteado desde el punto ligeramente distinto de la teoría de la aproximación. Queremos poder evaluar una función dada, f, en cualquier punto de un intervalo $[a, b]$ contenido en su dominio de definición. En general no disponemos de una fórmula algebraica sencilla para evaluar una función dada a menos que ésta sea de un tipo muy especial. Por "fórmula sencilla" nos referimos a una fórmula que involucre solamente las operaciones aritméticas (como en los polinomios), lo cual descarta todas las funciones trascendentes.

Una posible idea es la de representar la función dada (supuesta diferenciable de orden suficientemente alto) mediante su polinomio de Taylor de cierto grado en torno a algún punto del intervalo de interés:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n$$

donde el resto R_n está dado por

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{4.16}$$

para algún η que dista de x_0 menos que x. Ya que los polinomios son funciones que se pueden evaluar fácilmente, el polinomio de Taylor nos ofrece una forma sencilla de evaluar aproximadamente f en cualquier punto cerca de x_0 siempre que podamos obtener con suficiente precisión el valor de f y el de sus derivadas en x_0.

El problema de este método es que, en general, el error aumenta rápidamente a medida que nos alejamos de x_0. Esto se deduce de la fórmula del error (4.16) que nos proporciona la fórmula de acotación

$$|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

donde $M = \max_{a \leq \eta \leq b} |f^{(n+1)}(\eta)|$.

Intuitivamente este aumento del error se comprende fácilmente al pensar que el polinomio de Taylor de grado 1 representa la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x_0 y cómo ésta aproxima en general peor y peor a f a medida que nos alejamos de x_0.

Como ilustración consideremos la evaluación de la función *seno* mediante su polinomio de Taylor de grado tres en torno al origen

$$\operatorname{sen} x \simeq x - \frac{x^3}{3!} = x\Big(1 - \frac{x^2}{6}\Big).$$

Los resultados se muestran en la tabla 4.1, donde se ve que el error aumenta muy rápidamente a medida que nos alejamos de $x = 0$.

Se plantea, pues, la cuestión de hallar un polinomio que aproxime una función dada en un intervalo $[a, b]$ con más uniformidad que el polinomio de Taylor. Una posible idea es utilizar un polinomio de interpolación. Para ello necesitamos elegir los nodos de interpolación y evaluar la función dada en esos nodos.

4.7.2 El concepto de interpolación óptima

Surge, pues, la cuestión de cómo elegir los nodos de interpolación y de si habrá algún criterio según el cual una elección es mejor que otra. Si aproximamos la función f mediante un polinomio de interpolación de grado prefijado, digamos n, el error cometido en un punto x está dado por una

x	$p_3(x)$	$\operatorname{sen} x$	Error
0.1	0.0998333	0.0998334	0.0000001
0.2	0.1986667	0.1986693	0.0000027
0.3	0.2955000	0.2955202	0.0000202
0.4	0.3893333	0.3894183	0.0000850
0.5	0.4791667	0.4794255	0.0002589
0.6	0.5640000	0.5646425	0.0006425
0.7	0.6428333	0.6442177	0.0013844
0.8	0.7146667	0.7173561	0.0026894
0.9	0.7785000	0.7833269	0.0048269

Tabla 4.1: Aproximación de Taylor de grado 3, $p_3(x) = x - x^3/6$.

expresión parecida a (4.16):

$$|f(x) - P_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n)\right|$$

donde $x_0, \ldots, x_n$ son los nodos de interpolación y η es algún punto del intervalo de interpolación. Supongamos que la derivada $n+1$ de la función f está acotada en el intervalo de interés, o sea, que existe un número M tal que para todo $x \in [a, b]$, se cumple $|f^{n+1}(x)| \leq M$. Entonces el error cometido al interpolar f en los nodos $x_0, \ldots, x_n$ está acotado por

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0)\cdots(x - x_n)|$$

y nuestra mejor estrategia es elegir los nodos $x_k \in [a, b]$ de tal forma que la cantidad

$$\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0)\cdots(x - x_n)| \tag{4.17}$$

sea lo más pequeña posible. Los $n+1$ puntos del intervalo $[a, b]$, $x_0, \ldots, x_n$, que minimizan la cantidad (4.17) serán llamados los *nodos de interpolación óptima de grado n en* $[a, b]$. Dado que la condición que define los nodos de interpolación óptima no depende de la función a aproximar, una vez hallados, éstos servirán para interpolar de forma óptima cualquier función en el intervalo $[a, b]$.

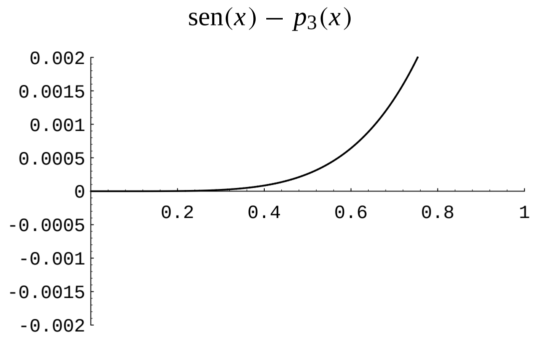

Figura 4.5: Error en la aproximación de la función seno mediante el polinomio de Taylor de grado 3, $p_3(x) = x - x^3/6$.

Podemos replantear nuestro problema como el problema de hallar un polinomio mónico de grado $n+1$, cuyos ceros estén en un intervalo dado $[a, b]$ y cuyo máximo valor absoluto en $[a, b]$ sea lo más pequeño posible.

Se puede reducir el problema de hallar los nodos de interpolación óptima en un intervalo arbitrario $[a, b]$ al mismo problema en el intervalo $[-1, 1]$. Los resultados se pueden trasladar después al intervalo $[a, b]$ mediante la transformación compuesta de la homotecia que convierte la longitud del intervalo $[-1, 1]$ en la longitud del intervalo $[a, b]$ (es decir, la razón $r = (b-a)/2$), seguida de la traslación que lleva el origen al centro del intervalo $[a, b]$ (o sea, "sumar $h = (a+b)/2$"), en resumen, la transformación:

$$t(x) = rx + h = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}.$$

Así pues, el problema toma ahora la siguiente forma: encontrar $n+1$ puntos $x_0, , \ldots, x_n \in [-1, 1]$ tales que la cantidad

$$\max_{-1 \le x \le 1} |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|$$

tenga el menor valor posible. Equivalentemente: encontrar el polinomio mónico de grado $n+1$ (que denotaremos $\hat{T}_{n+1}(x)$) cuya norma ∞ en el intervalo $[-1, 1]$ sea lo más pequeña posible. No es difícil descubrir cuáles son dichos polinomios para valores pequeños de n como $n = 0$, $n = 1$, e incluso $n = 2$. En el caso general los polinomios de interpolación óptima

están directamente relacionados con los llamados *polinomios de Chebyshev* que estudiamos a continuación.

4.7.3 Los polinomios de Chebyshev

¿Qué son los polinomios de Chebyshev? Pensemos por un momento en el siguiente hecho conocido:

Ejercicio 4.16
Para $n = 0, 1, \ldots$ el coseno de $n\alpha$ puede expresarse como combinación lineal de las potencias

$$(\cos\alpha)^0, \ldots, (\cos\alpha)^n.$$

Definición: El *polinomio de Chebyshev* de grado n, $T_n(x)$, es el polinomio cuyos coeficientes son los de las potencias $(\cos t)^k$ en la expresión de $\cos nt$ en términos de $\cos t$. Es decir, $T_n(x)$ está definido por la propiedad

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Ejemplos:

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x; \quad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

ya que $\cos 0\theta = 1$; $\cos\theta = \cos\theta$; y $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

La importancia de los polinomios de Chebyshev para nuestro problema radica en el siguiente resultado:

Teorema 27 (Nodos de Chebyshev) *Los nodos de interpolación óptima de grado n en el intervalo $[-1, 1]$ son los $n+1$ ceros del polinomio de Chebyshev de grado $n+1$, $T_{n+1}(x)$.*

Es decir, los nodos de Chebyshev para el grado n son los puntos $x_k = \cos\theta_k$ donde $\theta_0, \ldots, \theta_n$ son los ángulos tales que

$$\cos[(n+1)\theta_k] = 0$$

o sea,

$$\theta_0 = \tfrac{1}{n+1}\cdot\tfrac{\pi}{2}, \ \theta_1 = \tfrac{3}{n+1}\cdot\tfrac{\pi}{2}, \ \ldots, \ \theta_k = \tfrac{2k+1}{n+1}\cdot\tfrac{\pi}{2}, \ \ldots, \ \theta_n = \tfrac{2n+1}{n+1}\cdot\tfrac{\pi}{2}$$

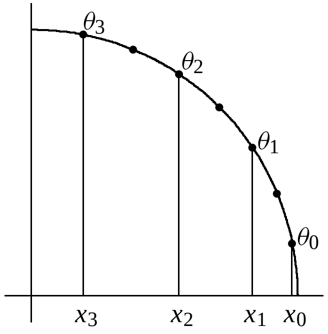

Figura 4.6: Nodos de Chebyshev no negativos para interpolar con polinomio de grado $n = 7$.

con lo que los nodos de interpolación óptima son

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)}.$$

Nótese que estos puntos son las abscisas de los puntos del círculo unitario determinados por los ángulos θ_k. Dicho de otra forma, los x_k son las partes reales de los números complejos unitarios $e^{i\theta_k}$. En consecuencia pueden dibujarse fácilmente sin más que dividir la semicircunferencia cuyo diámetro es el intervalo $[-1, 1]$ en $n + 1$ arcos iguales y hallando las abscisas de los puntos medios de dichos arcos. En realidad, habida cuenta de la simetría, es suficiente hallar los nodos correspondientes a la parte positiva como se muestra en la figura 4.6.

4.7.4 Demostración del teorema de los nodos de Chebyshev

Para demostrar el teorema 27 observemos primero lo siguiente:

Proposición 8 *Supongamos que $T(x)$ es un polinomio mónico de grado n que tiene n raíces reales en el intervalo $[a, b]$ y tal que todos sus extremos en $[a, b]$ tienen el mismo valor absoluto. Entonces sus raíces son los nodos de interpolación óptima en $[a, b]$.*

Demostración: Tenemos que demostrar que todo otro polinomio mónico de grado n alcanza en $[a, b]$ valores (absolutos) mayores que $m = \max_{a \le x \le b} T(x)$. Sea, pues, $P(x)$ un polinomio mónico de grado n distinto de $T(x)$. Evidentemente la diferencia

$$Q(x) = T(x) - P(x)$$

es un polinomio de grado estrictamente menor que n. Supongamos que en todo punto $x \in [a, b]$ fuese $|P(x)| \le m$, entonces, tanto en los puntos críticos de T como en los extremos a, b del intervalo el signo de $Q(x)$ es igual al signo de $T(x)$. En consecuencia $Q(x)$ tiene al menos tantos cambios de signo como $T(x)$ y por tanto tiene también al menos tantas raíces como T, esto es, n. Pero como $Q(x)$ tiene grado menor que n, es necesariamente el polinomio nulo; esto es, $P(x)$ es igual a $T(x)$. ■

El siguiente es un simple ejercicio de máximos y mínimos. Con él se establece el hecho de que en el intervalo $[-1, 1]$ todo polinomio de Chebyshev toma sus valores entre -1 y 1. Éste es un importante resultado que se utilizará en la demostración del teorema de los nodos de Chebyshev.

Ejercicio 4.17
Evaluar $T_n(x)$ para $x = \pm 1$ y usar el resultado para demostrar que

$$\max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1.$$

Ejercicio 4.18
Demostrar que los extremos relativos del polinomio de Chebyshev de grado n son los números de la forma $\bar{x}_k = \cos(k\pi/n)$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Además también son extremos los puntos $a = -1$ y $b = 1$, que se obtienen de la fórmula de los $\bar{x}_k$ para $k = 0$ y $k = n$. Por lo tanto podemos decir que los extremos son los $\bar{x}_k$ para $k \in \{0, \ldots, n\}$, pero cuidado: para $k = 0$ y $k = n$ $T_n'(\bar{x}_k) \neq 0$ (demuéstrese).

Estamos ahora en condiciones de demostrar nuestro teorema. La demostración es muy sencilla; sólo necesitamos demostrar lo siguiente:

Proposición 9 *El máximo valor de $|\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)|$ en $[-1, 1]$ es $\frac{1}{2^{n-1}}$ y para todo otro polinomio mónico de grado n, $P_n(x)$, su valor absoluto alcanza, en alguno de los puntos $\bar{x}_k = \cos(k\pi/n)$, valores $\ge \frac{1}{2^{n-1}}$.*

Demostración: Por reducción al absurdo. Supongamos que para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$ se verifica $|P_n(\bar{x}_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Esto es lo mismo que decir que el polinomio

$$Q(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) - P_n(x)$$

tiene en cada $\bar{x}_k$ el mismo signo que T_n (esto es, $(-1)^k$ —ejercicio (4.18)). Vamos a ver que bajo la suposición hecha el polinomio $Q(x)$ tendría grado menor que n y, al mismo tiempo, n cambios de signo en $[-1, 1]$, lo cual es absurdo ya que *"el número total de cambios de signo de un polinomio de grado n es menor o igual que n"*. El polinomio $Q(x)$ no es cero y, por ser diferencia de dos polinomios mónicos de grado n, su grado es menor que n. Por otra parte

$$Q(\bar{x}_k) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\bar{x}_k) - P_n(\bar{x}_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(\bar{x}_k)$$

y el signo de la diferencia es el mismo que el del minuendo porque, por hipótesis, el sustraendo tiene menor valor absoluto. En consecuencia $Q(x)$ tiene n cambios de signo en $[-1, 1]$ y por ser una función continua ha de tener n ceros en $[-1, 1]$. Pero es un polinomio no nulo de grado menor que n. Contradicción. Luego para algún $\bar{x}_k \in [-1, 1]$ se verifica $|P_n(\bar{x}_k)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. ■

Con esto queda establecida la fórmula de los nodos de Chebyshev o nodos de interpolación óptima en el intervalo $[-1, 1]$. Nuestra tarea ahora es obtener las fórmulas correspondientes para un intervalo arbitrario.

4.7.5 Interpolación óptima en un intervalo arbitrario

Si necesitamos aproximar una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ distinto de $[-1, 1]$ hemos de trasladar los nodos de Chebyshev

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$$

del intervalo $[-1, 1]$ al intervalo $[a, b]$. El resultado es:

Ejercicio 4.19
Demostrar que los nodos de interpolación óptima de grado n en un intervalo $[a, b]$ son

$$\boxed{y_k = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{b+a}{2}}$$

x	$P_3(x)$	sen x	Error
0.1	0.0999441	0.0998334	−0.0001107
0.2	0.1987851	0.1986693	−0.0001158
0.3	0.2955310	0.2955202	−0.0000108
0.4	0.3893151	0.3894183	0.0001033
0.5	0.4792708	0.4794255	0.0001548
0.6	0.5645314	0.5646425	0.0001111
0.7	0.6442302	0.6442177	−0.0000125
0.8	0.7175005	0.7173561	−0.0001444
0.9	0.7834758	0.7833269	−0.0001489

Tabla 4.2: Interpolación de Chebyshev de grado 3

Nótese que, como dijimos más arriba, el resultado no es más que el de aplicar al intervalo $[-1, 1]$ la homotecia que cambia su longitud de ser 2 a ser la del intervalo $[a, b]$ y después aplicar una traslación al resultado para que sus extremos coincidan con los del intervalo $[a, b]$, es decir, después de la homotecia, trasladar el origen al punto medio del intervalo $[a, b]$. En consecuencia, dado que las homotecias y las traslaciones convierten circunferencias en circunferencias y rectas en rectas, la construcción geométrica dada para los nodos de Chebyshev puede aplicarse a cualquier intervalo.

Ejercicio 4.20
Demostrar que para una función $f(x)$ cuya derivada $n+1$ está acotada en el intervalo $[a, b]$ por la constante M, el error cometido en la aproximación de Chebyshev de grado n en el intervalo $[a, b]$, $P_n(x)$, está acotado por

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{2M}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

4.7.6 Ejemplo de la interpolación de Chebyshev

Vamos a comparar el resultado de aproximar la función *seno* en $[0, 1]$ por el método de Chebyshev con un polinomio de grado tres que interpole en los nodos óptimos con la aproximación de la misma función en el mismo intervalo por el polinomio de Taylor de grado cinco hecha al principio de esta lección.

Los cuatro nodos en el intervalo [0, 1] están dados por $x_k = \frac{1}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{8} + \frac{1}{2}$, o sea que son:

$$x_0 = 0.5\Big(1+\cos\frac{\pi}{8}\Big) = 0.9619398\,, \quad x_1 = 0.5\Big(1+\cos\frac{3\pi}{8}\Big) = 0.6913417$$
$$x_2 = 0.5\Big(1+\cos\frac{5\pi}{8}\Big) = 0.3086583\,, \quad x_3 = 0.5\Big(1+\cos\frac{7\pi}{8}\Big) = 0.0380602$$

Para hallar el polinomio de interpolación calculamos las diferencias divididas

x	$\operatorname{sen} x$			
0.9619398	0.8203025			
		0.6752862		
0.6913417	0.6375714		−0.3014799	
		0.8722374		−0.1444449
0.3086583	0.3037806		−0.1680302	
		0.9820084		
0.0380602	0.0380510			

con lo que el polinomio de interpolación es

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0.8203025 + (x-0.9619398)[0.6752862 \\ &\qquad + (x-0.6913417)(-0.3014799 - 0.1444449(x-0.3086583))] \\ &= -0.1444449x^3 - 0.01808759x^2 + 1.003947x - 0.0001252498 \\ &= [-(0.1444449x + 0.01808759)x + 1.003947]x - 0.0001252498. \end{aligned}$$

Podemos ahora evaluar este polinomio en varios puntos del intervalo [0, 1] para comparar los resultados con los valores exactos de la función *seno* en esos puntos. El resultado se muestra en la tabla 4.2. Compárese con la tabla 4.1.

Ejercicio 4.21
Utilizar la fórmula del error dada en el ejercicio 4.20 para estimar la cota del error correspondiente a la aproximación de Chebyshev de grado 3 de la función seno *en el intervalo* [0, 1]. *Comprobar que los errores obtenidos en la tabla 4.2 concuerdan con la cota de error estimada. ¿Cuál sería la cota del error si se usase el polinomio de grado 5?*

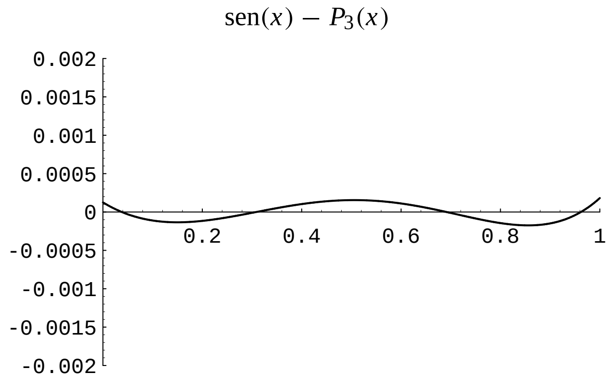

Figura 4.7: Error en la aproximación de Chebyshev de grado 3 de la función seno.

Respuestas a Algunos Ejercicios del Capítulo 4

Ejercicio 4.1 Esto se puede hacer por inducción en n con ayuda de la sugerencia dada. Para $n = 1$ se cumple $\det\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1\end{pmatrix} = x_0 - x_1$. Supuesto cierto para n puntos (distintos) $x_0, \ldots, x_{n-1}$, y añadamos a éstos un nuevo punto variable t, de forma que obtenemos una matriz variable

$$M(t) = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \cdots & x_{n-1} & 1 \\ t^n & t^{n-1} & \cdots & t & 1 \end{pmatrix}$$

y nos preguntamos qué tipo de función es la definida por $p(t) = \det M(t)$. Evidentemente es un polinomio en t. Su grado es n, tiene a cada una de las $x_0, \ldots, x_{n-1}$ como raiz (por lo que, dado su grado, no tiene más raices que esas) y su coeficiente principal es

$$(-1)^n \det \begin{pmatrix} x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^{n-1} & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n \prod_{0\le i<j\le n-1} (x_i - x_j)$$

Todo esto determina completamente el polinomio $p(t)$ como

$$\begin{aligned} p(t) &= (\text{coef. ppal}) \times (t - x_0)\cdots(t - x_{n-1}) \\ &= (-1)^n \prod_{0\le i<j\le n-1} (x_i - x_j) \times (t - x_0)\cdots(t - x_{n-1}), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\det M(x_n) = p(x_n) = \prod_{0\le i<j\le n} (x_i - x_j).$$

Ejercicio 4.2 Que estén sobre la gráfica de un polinomio de grado menor que n.

Ejercicio 4.3 Uno.

Ejercicio 4.4 Según la fórmula

$$p(x) = \frac{f(x_0)}{q_0(x_0)} q_0(x) + \cdots + \frac{f(x_n)}{q_n(x_n)} q_n(x)$$

el coeficiente del término de grado n de p es la suma de los coeficientes de los términos de grado n de los sumandos, es decir, suma de los $\frac{f(x_k)}{q_k(x_k)}$ ya que los $q_k(x)$ son polinomios mónicos de grado n.

Ejercicio 4.5

Ejercicio 4.6 Usando la fórmula de Leibnitz para la derivada de un producto se obtiene $q'(x) = \sum_{k=0}^n q_k(x)$ de donde $q'(x_k) = q_k(x_k)$. Alternativamente el resultado se obtiene de forma inmediata derivando $q(x) = q_k(x)(x - x_k)$ y evaluando el resultado en x_k.

Ejercicio 4.7 Es evidente que los polinomios de Lagrange son

$$L_k(x) = \frac{q(x)}{(x - x_k)q_k(x_k)},$$

de lo cual se deduce inmediatamente la fórmula dada.

Ejercicio 4.8 Evidentemente A_n es el coeficiente del término de grado n del polinomio $A_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$, que es el polinomio diferencia $P_n(x) - P_{n-1}(x)$. Pero esta diferencia tiene el mismo coeficiente del término de grado n que $P_n(x)$ ya que $P_{n-1}(x)$ tiene grado estrictamente menor que n. La fórmula dada no es más que una reescritura de (4.2).

Ejercicio 4.9 Para todo polinomio $p(x) = a_n x_n + \cdots$ de grado menor o igual que n la derivada n-ésima de p es la constante $d^n p/dx^n = n! a_n$. Si p tuviese grado menor que n la derivada n-ésima de p sería cero. En cualquier caso $\frac{1}{n!} d^n p/dx^n$ es igual al coeficiente del término de grado n de p.

Ejercicio 4.10 Evidentemente es un polinomio de grado $\le k+1$ ya que p y q tienen grado $\le k$ y van multiplicados por polinomios de grado 1. Que coincide con f en x_k y en x_{k+1} es inmediato porque p coincide con f en x_{k+1} y q en x_k. En los demás puntos $x_i \in \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{x_i - x_k}{x_{k+1} - x_k} p(x_i) + \frac{x_{k+1} - x_i}{x_{k+1} - x_k} q(x_i) &= \frac{x_i - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_i) + \frac{x_{k+1} - x_i}{x_{k+1} - x_k} f(x_i) \\ &= \left(\frac{x_i - x_k}{x_{k+1} - x_k} + \frac{x_{k+1} - x_i}{x_{k+1} - x_k} \right) f(x_i) = f(x_i). \end{aligned}$$

Ejercicio 4.11 Usando la forma

$$\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} p(x) + \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} q(x)$$

del polinomio de interpolación de f en $x_0, \ldots, x_{k+1}$ (ver ejercicio 4.10) y sustituyendo los coeficientes del término de grado k en p y en q, se obtiene inmediatamente la expresión dada para el término de grado $k+1$ del polinomio de interpolación en $x_0, \ldots, x_{k+1}$.

Ejercicio 4.12

$$0.65504 = \frac{0.5\times0.62325 - 0.3\times0.60206}{0.5-0.3}, \quad 0.65380 = \frac{0.5\times0.64345 - 0.1\times0.60206}{0.5-0.1}$$

$$0.65264 = \frac{0.5\times0.66276 + 0.1\times0.60206}{0.5+0.1}, \quad 0.65155 = \frac{0.5\times0.68124 + 0.3\times0.60206}{0.5+0.3}$$

$$0.65318 = \frac{0.3\times0.65380 - 0.1\times0.65504}{0.5-0.3}, \quad 0.65324 = \frac{0.3\times0.65264 + 0.3\times0.65504}{0.5-0.3}$$

$0.65330 = \frac{0.3\times 0.65155 - 0.3\times 0.65504}{0.5-0.3}$, $0.65321 = \frac{0.1\times 0.65324+0.1\times 0.65318}{0.1+0.1}$

$0.65321 = \frac{0.1\times 0.65330+0.3\times 0.65318}{0.1+0.3}$,

y dado que los dos últimos coinciden, el siguiente debe ser también igual a ellos.

Ejercicio 4.13 Según la definición de los s_k, $p_k''(x) = 6a_k(x - x_k) + s_k$. Por tanto, la condición de continuidad de la curvatura, $p_{k+1}''(x_k) = p_k''(x_k)$, $(k = 1, \ldots, n-1)$ implica que $6a_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + s_{k+1} = s_k$, de donde $s_{k+1} - s_k = 6a_{k+1}h_{k+1}$ para $k = 1, \ldots, n-1$, lo que es equivalente a la fórmula dada.

Ejercicio 4.14 Las ecuaciones (4.13) son $a_k h_k^3 - b_k h_k^2 + c_k h_k = y_k - y_{k-1}$ para $k = 2, \ldots, n$. Poniendo en ellas $a_k = (s_k - s_{k-1})/6h_k$ y $b_k = \frac{1}{2}s_k$ obtenemos $((s_k - s_{k-1})/6h_k)h_k^3 - \frac{1}{2}s_k h_k^2 + c_k h_k = y_k - y_{k-1}$, de donde $\frac{1}{6}(s_k - s_{k-1})h_k - \frac{1}{2}s_k h_k + c_k = (y_k - y_{k-1})/h_k$ y despejando c_k, $c_k = (y_k - y_{k-1})/h_k - \frac{1}{6}(s_k - s_{k-1})h_k + \frac{3}{6}s_k h_k$.

Ejercicio 4.15

Ejercicio 4.16 Esto puede hacerse fácilmente por inducción. Es claramente cierto para $n = 0, 1$. Si lo es para $n-1$ y para n entonces

$$\begin{aligned}\cos\big((n+1)\alpha\big) &= \cos\big((n\alpha + \alpha\big) \\ &= \cos n\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen} n\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ &= 2\cos n\alpha\cos\alpha - \big(\cos n\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen} n\alpha\operatorname{sen}\alpha\big) \\ &= 2\cos n\alpha\cos\alpha - \cos\big((n-1)\alpha\big).\end{aligned}$$

Ejercicio 4.17 Sabemos que $\max_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| \le 1$ porque en ese intervalo x es el coseno de un ángulo y por lo tanto T_n también. Evaluando, $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos n0 = 1$, $T_n(-1) = T_n(\cos\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$. En consecuencia $\max_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| = 1$.

Ejercicio 4.18 No hay más que derivar $T_n(x)$ e igualar a cero para obtener que la condición de extremo es $\operatorname{sen}(n\theta)/\operatorname{sen}\theta = 0$, de donde $x = \cos\theta$ con $\theta \ne m\pi$ y $\operatorname{sen} n\theta = 0$ y por tanto $\bar{x}_k = \cos(k\pi/n)$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. En estos puntos tenemos $T_n(\cos\frac{k\pi}{n}) = \cos(n\frac{k\pi}{n}) = \cos k\pi = (-1)^k$. Además, en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ tenemos

$T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos 0 = 1$ y $T_n(-1) = T_n(\cos\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$ y por tanto el máximo valor absoluto de $T_n(x)$ para x en el intervalo $[-1, 1]$ es 1.

Ejercicio 4.19 La transformación lineal $y = px + q$ que lleva -1 en a y 1 en b es $y = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$, con lo que se obtiene la fórmula dada.

Ejercicio 4.20 Sabemos que el error del polinomio de interpolación en los nodos $y_0, \ldots, y_n$ está acotado por:

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|(x-y_0)\cdots(x-y_n)|$$

en nuestro caso los nodos son, según el ejercicio 4.19, $y_k = px_k + q$ donde x_k son los correspondientes nodos de Chebyshev, $p = (b-a)/2$ y $q = (b+a)/2$. Entonces

$$x - y_k = x - (px_k + q) = x - q - px_k = p\Big(\frac{x-q}{p} - x_k\Big)$$

luego

$$\begin{aligned}|(x-y_0)\cdots(x-y_n)| &= \Big|p^{n+1}\Big(\frac{x-q}{p} - x_0\Big)\cdots\Big(\frac{x-q}{p} - x_n\Big)\Big| \\ &= \Big|p^{n+1}\frac{1}{2^n}T_{n+1}\Big(\frac{x-q}{p}\Big)\Big| = p^{n+1}\frac{1}{2^n}\Big|T_{n+1}\Big(\frac{x-q}{p}\Big)\Big| \\ &\le p^{n+1}\frac{1}{2^n} = \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^{n+1}\frac{1}{2^n} = 2\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{n+1}\end{aligned}$$

donde hemos usado que para $x \in [a, b]$ se cumple $\frac{x-q}{p} \in [-1, 1]$ y por lo tanto $|T_{n+1}(\frac{x-q}{p})| \le 1$. Así pues,

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{2M}{(n+1)!}\Big(\frac{b-a}{4}\Big)^{n+1}.$$

Ejercicio 4.21 El error estará acotado en valor absoluto por

$$\frac{2M}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{M}{3\times 4^5} = \frac{\operatorname{sen} 1}{3072} = \frac{0.84147}{3072} = \boxed{0.000274},$$

donde hemos acotado la función $d^4\operatorname{sen}(x)/dx^4 = \operatorname{sen} x$ por su valor en $x = 1$. Si interpolamos con grado 5, tenemos que acotar la función $d^6\operatorname{sen}(x)/dx^6 =$