

Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

1. Espacio de funciones	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Sucesiones de funciones	3
1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt	9
1.4. Coeficientes de Fourier	10
1.5. Integrales impropias (valor principal)	14
1.6. Convergencia según Cesàro	15
2. Series de Fourier	19
3. Transformada de Fourier	35
3.1. Definiciones	35
3.2. Ejemplos	36
3.3. Propiedades	41
3.4. Aplicaciones	43
4. Convolución	45
4.1. Espacio \mathcal{S}	45
4.2. Producto de convolución	46
4.3. El espacio \mathcal{S} como anillo	49
5. Distribuciones temperadas	53
5.1. Definiciones	53
5.2. Sucesión de distribuciones	61
5.3. Producto de distribuciones	71
5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales	72
5.5. Convergencia débil	73
6. Distribuciones y transformada de Fourier	79
7. Convolución de distribuciones	87
7.1. Definiciones	87
7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones	89
7.3. Uso de convolución en Física	91

8. La función Gamma	93
8.1. La función factorial	93
8.2. La función Gamma	94
8.3. Función Beta	96
8.4. Notación doble factorial	99
8.5. Fórmula de Stirling	99
8.6. Otras funciones relacionadas	101
9. Transformada de Laplace	103
9.1. Definición	103
9.2. Inversión de la transformada de Laplace	105
9.3. Propiedades de la transformada de Laplace	109
9.4. Lista de transformadas de Laplace	111
10. Aplicaciones de la transformada de Laplace	113
10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	114
10.2. Ecuaciones integrales	116
10.3. Ecuaciones en derivadas parciales	118
10.4. Sistema de ecuaciones lineales	120
11. Polinomios ortogonales	123
11.1. Definiciones	123
11.2. Teoremas	123
11.3. Relación de recurrencia	125
12. Polinomios de Hermite	127
12.1. Definición	127
12.2. Función generatriz	127
12.3. Ortogonalidad	130
12.4. Algunos resultados interesantes	131
12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite	131
13. Polinomios de Laguerre	133
13.1. Definición	133
13.2. Función generatriz	133
13.3. Relaciones de recurrencia	135
13.4. Ecuación de Laguerre	135
13.5. Ortogonalidad	136
13.6. Polinomios asociados de Laguerre	138
14. El problema de Sturm-Liouville	139
14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos	139
14.2. Operadores autohermíticos	141
14.3. Problema de autovalores	141
14.4. Ejemplos de funciones ortogonales	143

15. Ecuaciones diferenciales con singularidades	145
15.1. Puntos singulares	145
15.2. Solución por serie: método de Frobenius	146
15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs	149
15.4. Una segunda solución	151
16. Ecuaciones diferenciales del tipo...	155
16.1. Soluciones en puntos regulares	155
16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares	159
16.3. Singularidades en infinito	167
16.4. Ejemplos	168
16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas	171
17. Funciones hipergeométricas	177
17.1. La ecuación hipergeométrica general	177
17.2. Ecuación indicial	178
17.3. Ecuación diferencial de Gauss	179
17.4. La serie hipergeométrica	181
17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente	183
18. Polinomios de Legendre	187
18.1. Función generatriz	187
18.2. Relaciones de recurrencia	189
18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$	190
18.4. Fórmula de Rodrigues	191
18.5. Ecuación diferencial de Legendre	192
18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$	193
18.7. Relación de ortogonalidad	193
18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$	194
18.9. Serie de Legendre	196
18.10. Funciones asociadas de Legendre	199
18.11. Problema de Sturm-Liouville asociado	201
18.12. Armónicos esféricos	203
18.13. Segunda solución de la ecuación de Legendre	205
19. La ecuación diferencial de Bessel	211
19.1. La ecuación diferencial de Bessel	211
19.2. Funciones de Bessel de índice no entero	212
19.3. Funciones de Bessel de índice entero	213
19.4. Comportamiento asintótico	214
19.5. Función generatriz	215
19.6. Fórmulas de adición	216
19.7. Representaciones integrales	217
19.8. Relaciones de recurrencia	219
19.9. Relaciones de ortogonalidad	220
19.10. Problema de Sturm-Liouville asociado	221

20. Diversos tipos de funciones cilíndricas	223
20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel	223
20.2. Funciones de Hankel	226
21. Aplicaciones a la Electrostática	229
21.1. Coordenadas rectangulares	229
21.2. Coordenadas polares, dos dimensiones	233
21.3. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas	236
21.4. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas	240
21.5. Otras aplicaciones	243

Capítulo 20

Diversos tipos de funciones cilíndricas

versión preliminar 3.2-23 diciembre 2002

La ecuación de Bessel, que estudiamos en el capítulo anterior, da origen a una serie de funciones que genéricamente denominamos “cilíndricas”, debido a que la ecuación de Bessel aparece de modo natural en diversos problemas físicos con simetría cilíndrica, pues corresponde a la parte radial del Laplaciano en dichas coordenadas. Una de ellas es la función de Bessel $J_\alpha(z)$, que estudiamos en el capítulo anterior. En éste revisaremos brevemente algunas otras funciones y sus propiedades.

20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel

Consideremos la ecuación de Bessel, con solución centrada en $z = 0$. Escojamos además $n = 0$:

$$f'' + \frac{1}{z}f' + f = 0 . \quad (20.1)$$

Esta ecuación hipergeométrica tiene dos soluciones linealmente independientes, una de las cuales es la ya conocida $J_0(z)$. Determinemos ahora la segunda solución. Observando la forma de la segunda solución en (15.26), proponemos una solución de la forma

$$f(z) = J_0(z) \int^z u(t) dt . \quad (20.2)$$

Luego

$$\frac{1}{z}f'(z) = \frac{1}{z}J'_0(z) \int^z u(t) dt + \frac{1}{z}J_0(z)u(z) , \quad (20.3)$$

$$f''(z) = J''_0(z) \int^z u(t) dt + 2J'_0(z)u(z) + J_0(z)u'(z) . \quad (20.4)$$

Reemplazando en (20.1), y puesto que $J_0(z)$ es solución de ella,

$$u'(z)J_0(z) + u(z) \left[2J'_0(z) + \frac{1}{z}J_0(z) \right] = 0 ,$$

esto es,

$$\begin{aligned} u'(z) &= - \left[\frac{2J'_0(z)}{J_0(z)} + \frac{1}{z} \right] u(z) , \\ u(z) &= C \exp \left[- \int^z \left(\frac{2J'_0(t)}{J_0(t)} + \frac{1}{t} \right) dt \right] , \\ u(z) &= \exp \left[- \ln J_0^2(z) - \ln z \right] , \end{aligned}$$

es decir,

$$u(z) = \frac{1}{zJ_0^2(z)} = \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\nu} z^{2\nu} \right) . \quad (20.5)$$

La solución linealmente independiente a $J_0(z)$ es entonces

$$N_0(z) = J_0(z) \int^z \frac{dt}{tJ_0^2(t)} , \quad (20.6)$$

lo que reescribimos como

$$N_0(z) = J_0(z) \left[\ln z + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{2\nu} z^{2\nu} \right] = J_0(z) \ln z + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \left(\frac{z}{2} \right)^{2\nu} .$$

Reemplazando en la ecuación diferencial (20.1) determinamos los coeficientes $c_{2\nu}$. Para ello, notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} N'_0(z) &= \frac{1}{z} J'_0(z) \ln z + \frac{1}{z^2} J_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \frac{2\nu}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2\nu-2} \frac{1}{2} \\ N''_0(z) &= J''_0(z) \ln z + 2J'_0(z) \frac{1}{z} - J_0(z) \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \frac{2\nu(2\nu-1)}{4} \left(\frac{z}{2} \right)^{2\nu-2} . \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de potencias iguales de z , se tiene la relación de recurrencia

$$c_{2\nu} = -\frac{c_{2\nu-2}}{\nu^2} - \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \frac{1}{\nu} , \quad \nu \geq 1 . \quad (20.7)$$

Tomamos $c_0 = 0$, y notamos que sólo nos interesan los índices pares. Entonces

$$\begin{aligned} c_2 &= 1 , \\ c_4 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \right) . \end{aligned}$$

Afirmación

$$c_{2\nu} = \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} \right) . \quad (20.8)$$

Demostración La demostración es fácil por inducción. Suponiendo que la afirmación es cierta para $\nu = n$, podemos calcular

$$c_{2n+2} = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \frac{1}{n+1}$$

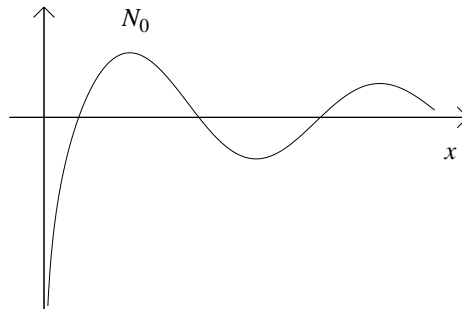
$$c_{2n+2} = -\frac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

q.e.d.

Con este resultado, podemos escribir una solución linealmente independiente de $J_0(x)$ en la forma:

$$N_0(z) = J_0(z) \ln(z) + \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^6 - \dots \quad (20.9)$$

Gráficamente:



Análogamente, asociadas a las funciones de índices superiores $J_n(z)$, será posible encontrar la segunda solución, $N_n(z)$.

En general, $N_n(z)$ se puede encontrar notando que la función

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{\sin \alpha \pi} [J_\alpha(z) \cos \alpha \pi - J_{-\alpha}(z)], \quad (20.10)$$

es linealmente independiente a $J_\alpha(z)$ si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, y por tanto puede ser usada como segunda solución. Las $N_\alpha(z)$ se conocen como *funciones de Bessel de segunda especie*, o *funciones de Neumann*. Lo interesante es que, al contrario de $J_{-\alpha}(z)$, $N_\alpha(z)$ continúa siendo linealmente independiente cuando α es entero. Para mostrarlo (no lo haremos aquí), se puede considerar $\alpha = n + \epsilon$, y tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Resulta finalmente

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{z}{2}\right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l [\Psi(l+1) + \Psi(n+l+1)]}{l!(l+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-l-1)!}{l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l-n}, \quad (20.11)$$

donde

$$\Psi(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{d\Gamma(\lambda)}{d\lambda}. \quad (20.12)$$

20.2. Funciones de Hankel

En el capítulo anterior, vimos que las funciones de Bessel se pueden representar en la forma integral

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(z \sen \phi - n\phi)] d\phi .$$

Hagamos el cambio de variable $\phi = -\psi$, de modo que

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(z \sen \psi - n\psi)] d\psi .$$

Consideremos ahora una generalización de lo anterior al plano complejo, la función

$$\Phi(z) = \int_C e^{-iz \sen s} e^{i\alpha s} ds . \quad (20.13)$$

Sea

$$g(s) = e^{i\alpha s} . \quad (20.14)$$

Entonces

$$g'' + \alpha^2 g = 0 . \quad (20.15)$$

Sea además

$$f(z, s) = e^{-iz \sen s} , \quad (20.16)$$

de modo que

$$z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial f}{\partial z} + z^2 f = -\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} . \quad (20.17)$$

Afirmación $\Phi(z)$ satisface la ecuación de Bessel (bajo ciertas restricciones),

$$z^2 \Phi'' + z \Phi' + (z^2 - \alpha^2) \Phi = 0 . \quad (20.18)$$

Demostración Si (20.18) se satisface, entonces

$$0 = \int_C \left[z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + z \frac{\partial f}{\partial z} + (z^2 - \alpha^2) f \right] g .$$

Con (20.17),

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha^2 \int_C f g - \int_C \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right) g \\ &= -\alpha^2 \int_C f g + \int_C \frac{\partial f}{\partial s} g' - \left[\frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C \\ &= -\alpha^2 \int_C f g - \int_C f g'' + \left[f g' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C \\ &= - \int_C f (g'' + \alpha^2 g) + \left[f g' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C . \end{aligned}$$

Con (20.15),

$$0 = \left[fg' - \frac{\partial f}{\partial s} g \right] \Big|_C .$$

Por lo tanto, Φ es solución de la ecuación de Bessel si f y $\partial f / \partial s$ son despreciables en el contorno de integración C .

q.e.d.

Sean ahora $z = x > 0$, $s = s_1 + is_2$, $s_{1,2} \in \mathbb{R}$. En este caso,

$$\operatorname{sen} s = \operatorname{sen} s_1 \cosh s_2 + i \cos s_1 \sinh s_2 .$$

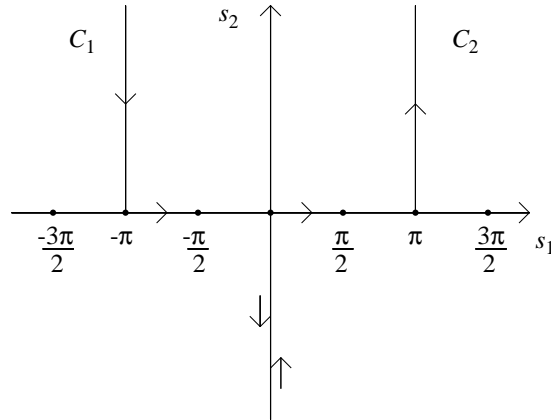
Considerando la afirmación anterior, ¿en qué parte del plano $(\operatorname{Re} s, \operatorname{Im} s)$ tenemos $|f(x, s)| = |e^{ix \operatorname{sen} s}| \rightarrow 0$? Esto es, buscamos un contorno C tal que

$$\operatorname{Re}(-ix \operatorname{sen} s) = x \cos s_1 \sinh s_2 \longrightarrow -\infty .$$

Esta condición equivale a

$$\begin{aligned} \sinh s_2 &\longrightarrow -\infty & \text{si } \cos s_1 > 0 , \\ \sinh s_2 &\longrightarrow \infty & \text{si } \cos s_1 < 0 . \end{aligned} \quad (20.19)$$

Escojamos los contornos de integración:



Sobre estos contornos, f y $\partial f / \partial s$ son despreciables en infinito, y estamos en condiciones de definir dos nuevas funciones, soluciones de la ecuación diferencial de Bessel:

Definición 20.1 *Funciones de Hankel*

$$H_{\alpha}^{(1,2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_{1,2}} e^{-ix \operatorname{sen} s} e^{i\alpha s} ds , \quad x > 0 \quad (20.20)$$

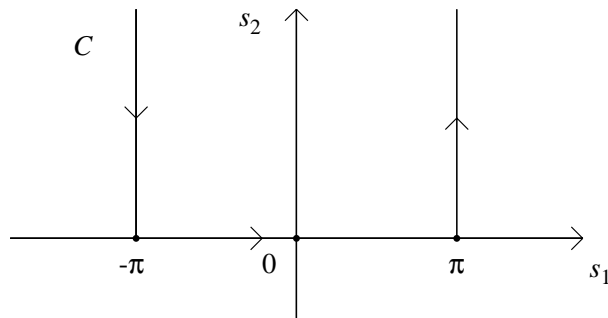
Consideremos el caso particular $\alpha = n$, y la expresión

$$I(x) = H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) \quad (20.21)$$

De (20.20),

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{-ix \operatorname{sen} s} e^{ins} ds ,$$

con



Puesto que

$$e^{in(s+2\pi)} = e^{ins} ,$$

$$\operatorname{sen}(s + 2\pi) = \operatorname{sen} s ,$$

las integraciones sobre los segmentos verticales de C se anulan entre sí. Se tiene entonces

$$H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \operatorname{sen} \phi} e^{in\phi} d\phi .$$

Se siguen las siguientes relaciones entre las funciones cilíndricas que hemos examinado:

$$J_n = \frac{1}{2} [H_n^{(1)} + H_n^{(2)}] , \quad (20.22)$$

$$N_n = \frac{1}{2i} [H_n^{(1)} - H_n^{(2)}] , \quad (20.23)$$

y a la inversa,

$$H_n^{(1)} = J_n + iN_n , \quad (20.24)$$

$$H_n^{(2)} = J_n - iN_n . \quad (20.25)$$