

NOTAS SOBRE TEORÍA DE PERTURBACIÓN

Las ecuaciones de la mayoría de los sistemas mecánicos no pueden resolverse exactamente, por lo que es importante desarrollar métodos que permitan obtener soluciones aproximadas. Uno de ellos -muchas veces el único que permite soluciones analíticas- es el de la teoría de perturbación, ampliamente utilizado en todas las ramas de la física. La idea es resolver un sistema por medio de otro resoluble muy cercano a él. El sistema a resolver se define entonces como una “perturbación” del segundo, lo que permite ir aproximándonos paso a paso a la solución. El procedimiento usual define esta perturbación como una serie -de igual modo que aproximamos una función analítica por una serie de potencias- y el objetivo de la teoría es ir resolviendo consistentemente cada término de la serie.

Como veremos, un cálculo perturbativo involucra pequeños parámetros. Por otra parte, los métodos numéricos permiten en la actualidad resolver problemas con gran precisión sin necesidad de restringirse al ámbito de pequeñas perturbaciones de un sistema conocido. Eso hace pensar que la teoría de perturbación deja de tener sentido. Sin embargo, no es así. Ésta sigue siendo necesaria como comprobante de los resultados numéricos (por lo menos en el rango de parámetros pequeños) y para establecer una buena comprensión teórica de estos mismos.

Procederemos en estas notas dividiendo la exposición en dos partes. En una primera, se trata la teoría elemental de perturbaciones. Corresponde a la versión no canónica de la perturbación dependiente del tiempo que se desarrolla en la sección 11-2 del Goldstein. Existe una buena razón para hacerlo así. La serie de Lindstedt -así se denomina- es más fácil de entender que la alternativa canónica, además de poner de manifiesto en su génesis los problemas que pueden derivarse de una construcción indebida de la serie perturbativa. Así, el alumno que lo desee, puede sustituir el estudio de las secciones 11-2 y 11-3 del Goldstein por la sección que sigue.

La segunda parte de estas notas trata de aclarar el esquema básico de la teoría canónica de perturbación independiente del tiempo (sección 11-4 del Goldstein). La falta de tiempo nos obliga a detenernos en el cálculo en primer orden de perturbación en sistemas de un solo grado de libertad. Con ello se ilustra la maquinaria básica, aunque,

bien está decirlo, los problemas interesantes empiezan justamente allí donde nos paramos. Desgraciadamente, somos esclavos de las contingencias de un cuatrimestre – el primero- con el tiempo útil muy recortado.

Un ejemplo del particular cuidado que hay que tener en teoría de perturbaciones:
Series de potencias de Lindstedt

A modo de ilustración, escogemos el ejemplo de un oscilador integrable de un grado de libertad cuya ecuación del movimiento es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{6} \epsilon \omega_0^2 x^3 \quad (1)$$

obtenida expandiendo el hamiltoniano del péndulo ($H = \frac{1}{2} G p^2 - F \cos f$) hasta incluir términos de tercer orden en f . Por comodidad rescribimos f como x y introducimos la notación $\omega_0^2 = FG$. ϵ es un parámetro adimensional que pone de manifiesto la pequeña magnitud del término cúbico, que pasa a ser considerado como una perturbación. Al final del proceso se hace $\epsilon = 1$. Expandimos x de forma directa

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (2)$$

y sustituimos la expresión (2) en la ecuación (1). Igualando términos en potencias iguales de ϵ , obtenemos en orden cero

$$x_0 = A \cos \omega_0 t, \quad (3)$$

o solución del oscilador armónico, mientras que para orden uno en ϵ , obtenemos la ecuación

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{1}{6} \epsilon \omega_0^2 A^3 \cos^3 \omega_0 t \quad (4)$$

La ecuación (4) puede rescribirse como

$$\ddot{x}_1 + \mathbf{w}_0^2 x_1 = \frac{1}{24} \mathbf{e} \mathbf{w}_0^2 A^3 (\cos 3\mathbf{w}_0 t + 3 \cos \mathbf{w}_0 t)$$

(5)

El término en $\cos 3\mathbf{w}_0 t$ da como solución particular

$$x_{1,a} = -\frac{A^3}{192} \cos 3\mathbf{w}_0 t$$

(6)

El segundo, por su parte, da

$$x_{1,b} = \frac{A^3}{64} (\mathbf{w}_0 t \sin \mathbf{w}_0 t + 2 \cos \mathbf{w}_0 t)$$

(7)

Mientras que la solución (6) corresponde a una solución de buen comportamiento, la (7) tiene un término lineal en t que la hace crecer indefinidamente. Este tipo de términos se denominan *seculares*, y no cabe duda de que no son algo esperable en un sistema como el de la ecuación (1), cuyo movimiento debería estar confinado y ser periódico. En otras palabras, el término forzante en $\cos \mathbf{w}_0 t$ provoca una resonancia en el oscilador armónico –lado izquierdo de la ecuación (5)– que es totalmente indeseable desde el punto de vista físico.

El resultado anterior indica que hemos hecho algo mal en el tratamiento. Analizándolo con detenimiento, nos damos cuenta de que hemos supuesto que la frecuencia del oscilador cúbico era \mathbf{w}_0 , igual a la del oscilador armónico. Esto no parece muy adecuado, en tanto en cuanto es de esperar que el oscilador cúbico tenga frecuencia propia (sabemos que depende de la amplitud), distinta de \mathbf{w}_0 . Es, en consecuencia, consistente suponer la frecuencia de nuestro oscilador cúbico distinta de \mathbf{w}_0 , pero no muy alejada de esta última, de forma a que sea resultado, tal como lo es $x(t)$, de una expansión en \mathbf{e} :

$$\mathbf{w}(\mathbf{e}) = \mathbf{w}_0 + \mathbf{e} \mathbf{w}_1 + \mathbf{e}^2 \mathbf{w}_2 + \dots$$

(8)

Ahora, podemos repetir todo el proceso anterior con esta nueva hipótesis y ver si desaparecen los términos seculares. Sustituimos (2) y (8) en (1), y simplificamos la notación definiendo la derivada $x' = \frac{dx}{d(\mathbf{w}t)} = \mathbf{w}^{-1} \dot{x}$. Obtenemos en orden cero

$$x_0'' + x_0 = 0$$

(9)

mientras que para orden uno

$$x_1'' + \frac{2w_1}{w_0} x_0'' + x_1 - \frac{1}{6} x_0^3 = 0 \quad (10)$$

Sustituyamos ahora en (10) la solución de (9)

$$x_1'' + x_1 = \left(\frac{A^3}{8} + \frac{2Aw_1}{w_0} \right) \cos w_0 t + \frac{A^3}{24} \cos 3w_0 t \quad (11)$$

Recordemos ahora cuál era el problema con la ecuación (5). La contribución a la forzante en $\cos w_0 t$ era la responsable del término secular –resonante. Sin embargo, la ecuación (11), a diferencia de la (5), nos permite “eliminar” esta contribución, y de hecho la secularidad, haciendo su coeficiente idénticamente nulo. Despejando w_1 , queda

$$w_1 = -\frac{1}{16} A^2 w_0 \quad (12)$$

Ahora la solución de (11) es completamente regular y periódica –tal como era de esperar–

$$x_1 = C \cos w_0 t + D \sin w_0 t - \frac{A^3}{192} \cos 3w_0 t \quad (13)$$

La moraleja de este ejemplo es clara: ¡cuidado con los cálculos perturbativos! Requieren un esmero especial para no caer en resultados no físicos. En nuestro caso se descubrió con facilidad el error. El ejemplo era de un solo grado de libertad y la inconsistencia trivial. Sin embargo, en problemas de más de un grado de libertad las apariencias no son tan llamativas y el control del procedimiento se hace más dificultoso.

Teoría canónica clásica de perturbación

La mayoría de los sistemas multidimensionales –o forzados– no son integrables: no existe solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi. Sin embargo, en sistemas que no difieran mucho de un sistema integrable, se puede intentar obtener soluciones expandiendo la función generatriz en potencias de un pequeño parámetro ϵ y tratar de encontrar la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi por aproximaciones sucesivas.

Existe, sin embargo, una dificultad, y es la aparición de pequeños denominadores que impiden la convergencia de la serie. Estos pequeños denominadores están ligados a resonancias entre grados de libertad, en el entorno de las cuales ocurre la destrucción total de los invariantes y de la generación de movimientos caóticos. En este curso, no vamos a hacernos eco de estas dificultades y sólo señalaremos que aún a pesar de ellas las series son útiles ya que describen bastante bien el comportamiento en muchas zonas del espacio de fases. Ilustraremos el método canónico para problemas de un grado de libertad. Aunque aquí, todos los sistemas son integrables de oficio y debe existir una solución cerrada, independientemente de la dificultad que entraña su obtención, las series de potencias son útiles para aproximar con un cálculo sencillo la solución real, y para obtener una transformación preparatoria a variables acción-ángulo en sistemas de más de un grado de libertad.

Supongamos un problema de un grado de libertad escrito en la forma siguiente:

$$H = H_0(J) + \epsilon H_1(J, \mathbf{q}) + \epsilon^2 H_2(J, \mathbf{q}) + O(\epsilon^3) \quad (14)$$

$H_0(J)$ es un hamiltoniano cuya forma acción-ángulo –variables (J, \mathbf{q}) –es conocida y cuya solución

es:

$$\begin{aligned} J &= J_0 \\ \mathbf{q} &= \mathbf{w}t + \mathbf{b} \\ \mathbf{w} &= \partial H_0 / \partial J \end{aligned} \quad (15)$$

H es otro hamiltoniano que “cercano” a H_0 y cuya forma puede aproximarse por la serie (14) –escrita hasta segundo orden. Por ahora nos ocuparemos de los aspectos puramente formales del problema, sin preguntarnos cómo se obtiene la serie anterior.

Nuestro problema consiste en hallar una transformación a unas nuevas variables $(\bar{J}, \bar{\mathbf{q}})$ para las cuales el hamiltoniano transformado \bar{H} es función sólo de la acción \bar{J} . Para ello necesitamos hallar la correspondiente función generatriz $S(\bar{J}, \mathbf{q})$, que vamos a suponer, al igual que el hamiltoniano problema \bar{H} , susceptible de expansión en ϵ

$$S(\bar{J}, \mathbf{q}) = \bar{J}\mathbf{q} + \epsilon S_1(\bar{J}, \mathbf{q}) + O(\epsilon^3) \quad (16)$$

$$\bar{H}(\bar{J}) = \bar{H}_0(\bar{J}) + \epsilon \bar{H}_1(\bar{J}) + O(\epsilon^2) \quad (17)$$

Obsérvese que la aproximación de orden cero a la función generatriz es la transformación identidad $J = \bar{J}$ y $q = \bar{q}$. A partir de (16), definimos las ecuaciones de transformación entre los pares de variables (J, q) y (\bar{J}, \bar{q})

$$J = \bar{J} + e \frac{\partial S_1(\bar{J}, q)}{\partial q} + O(e^2) \quad (18)$$

$$\bar{q} = q + e \frac{\partial S_1(\bar{J}, q)}{\partial \bar{J}} + O(e^2) \quad (19)$$

Para hallar las viejas variables en función de las nuevas necesitamos invertir apropiadamente (18) y (19), obteniendo:

$$J = \bar{J} + e \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{q})}{\partial \bar{q}} + O(e^2) \quad (20)$$

$$q = \bar{q} - e \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{q})}{\partial \bar{J}} + O(e^2) \quad (21)$$

Obsérvese que las formas (20) y (21) proceden de (18) y (19), respectivamente. Hay, sin embargo, un detalle importante. Contrariamente a (18) y (19), S_1 aparece en (20) y (21) como función de las nuevas variables. Lo que hemos hecho es sustituir en (18) y (19) q por su aproximación de orden cero \bar{q} . Las aproximaciones de orden superior en e afectarán a términos de orden superior en (20) y (21). Ahora nuestro objetivo es encontrar la forma para S_1 que haga que el hamiltoniano

$$\bar{H}(\bar{J}) = H(J(\bar{J}, \bar{q}), q(\bar{J}, \bar{q})) \quad (22)$$

sea sólo función de \bar{J} . Para ello vamos a trabajar el lado izquierdo de la ecuación (22). Recordamos la forma que tiene H dada por (14). Cogemos los dos primeros términos de aquella, $H_0(J)$ y $e H_1(J, q)$, y aplicamos la transformación (20)-(21).

$$H_0(J) = H_0\left(\bar{J} + e \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{q})}{\partial \bar{q}} + \dots\right) = H_0(\bar{J}) + e \frac{\partial H_0}{\partial J} \bigg|_{J=\bar{J}} \frac{\partial S_1}{\partial \bar{q}} + O(e^2) \quad (23)$$

$$H_1(J, q) = H_1\left(\left(\bar{J} + e \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{q})}{\partial \bar{q}} + \dots\right), \left(\bar{q} - e \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{q})}{\partial \bar{J}} + \dots\right)\right) =$$

$$H_1(\bar{J}, \bar{q}) + O(e) \quad (24)$$

Insertamos las expresiones (23) y (24) en el lado izquierdo de la ecuación (22)

$$H(\bar{J}) = H_0(\bar{J}) + e \left(\frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}} \frac{\partial S_1}{\partial \bar{q}} + H_1(\bar{J}, \bar{q}) \right) + O(e^2) \quad (25)$$

que hemos de comparar, término a término, con la serie (17). El término de orden cero no ofrece problemas

$$\bar{H}_0 = H_0(\bar{J}) \quad (26)$$

A su vez, para el término de primer orden

$$\bar{H}_1(\bar{J}) = \left(\frac{\partial H_0(\bar{J})}{\partial \bar{J}} \right) \cdot \left(\frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{q})}{\partial \bar{q}} \right) + H_1(\bar{J}, \bar{q}) \quad (27)$$

El lado izquierdo de (27) depende solo de \bar{J} , por lo que debemos escoger S_1 tal que desaparezca en el lado derecho de la misma ecuación la dependencia en \bar{q} . Para ello definimos el promedio sobre la fase de H_1

$$\hat{H}_1(\bar{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(\bar{J}, \bar{q}) d\bar{q}, \quad (28)$$

función exclusivamente de \bar{J} , y el resto

$$\tilde{H}_1(\bar{J}, \bar{q}) = \bar{H}_1(\bar{J}, \bar{q}) - \hat{H}_1(\bar{J}), \quad (29)$$

denominada usualmente parte oscilante de H_1 . Ahora podemos introducir (28) y (29) en (27) de forma a definir

$$\bar{H}_1(\bar{J}) \equiv \hat{H}_1(\bar{J}) \quad (30)$$

y definir S_1 como solución

$$w(\bar{J}) \frac{\partial S_1(\bar{J}, \bar{q})}{\partial \bar{q}} + \tilde{H}_1(\bar{J}, \bar{q}) = 0 \quad (31)$$

Recordamos que $w(\bar{J}) = \partial H_0(\bar{J}) / \partial \bar{J}$. Si (31) tiene solución, el nuevo hamiltoniano queda, a primer orden,

$$\bar{H}(\bar{J}) = H_0(\bar{J}) + e \hat{H}_1(\bar{J}) + O(e^2) \quad (32)$$

Queda, consecuentemente, por resolver la ecuación (31). Lo hacemos expandiendo S_1 y \tilde{H}_1 en serie de Fourier

$$S_1 = \sum_n S_{1n}(\bar{J}) e^{in\bar{q}} \quad (33)$$

$$\tilde{H}_1 = \sum_{n \neq 0} \tilde{H}_{1n}(\bar{J}) e^{in\bar{q}} \quad (34).$$

Sustituyendo en (31) vemos que, si $w(\bar{J}) \neq 0$, $S_{10} = \text{constante}$ y

$$S_{1n} = \frac{\tilde{H}_{1n}}{inw}, \quad n \neq 0 \quad (35)$$

Con esto queda completada la evaluación de la serie perturbativa hasta primer orden de perturbación. La teoría de perturbación de Poincaré-Zeipel (que es así como se llama) puede, en principio, evaluarse en cualquier orden de perturbación, aunque órdenes mayores que el primero empiezan a ser muy tediosos. Existen métodos acelerados de cálculo, así como técnicas más modernas (transformaciones de Lie), que evitan las dificultades de la técnica de Poincaré-Zeipel. Evitan especialmente el problema de la mezcla de variables nuevas y viejas que nos hemos encontrado en las ecuaciones (18)-(19). Sin embargo, las limitaciones de tiempo no nos van a permitir abordar estas técnicas. Aquella persona que desee ampliar conocimientos puede ponerse en contacto con el profesor de la asignatura para discutir este extremo.

Ejemplo

Para ilustrar el procedimiento anterior calcularemos el movimiento de libración de un péndulo de longitud l hasta primer orden. Recordemos su hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} A p^2 - B \cos f$$

con $A = 1/ml^2$ y $B = mgl$. El problema es no-lineal y se puede resolver por cuadraturas, dándonos un buen caso de prueba del rango de validez de nuestra aproximación. Recordemos los dos movimientos admisibles, libración y rotación, separados por una

separatriz de energía $E = B$, que “une” los dos puntos de equilibrio inestable $\mathbf{f} = \pm \mathbf{p}$.

Para $E < B$ tenemos libración, mientras que la rotación aparece para $E > B$. La resolución exacta del problema es bien conocida e invoca la función elíptica,

$$K(\mathbf{k}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\mathbf{x}}{(1 - \mathbf{k}^2 \sin^2 \mathbf{x})^{1/2}}, \quad (36)$$

para expresar la dependencia de la frecuencia con la energía

$$\frac{w(\mathbf{k})}{w_0} = \frac{p}{2} [K(\mathbf{k})]^{-1}, \quad \mathbf{k} < 1 \quad \text{libración} \quad (37)$$

$$\frac{w(\mathbf{k})}{w_0} = \frac{kp}{K(\mathbf{k}^{-1})}, \quad \mathbf{k} > 1 \quad \text{rotación} \quad (38)$$

con $w_0 = (AB)^{1/2}$ como la frecuencia del movimiento linearizado alrededor del punto de equilibrio $\mathbf{f} = 0$, y $2\mathbf{k}^2 = 1 + E/B$, como medida de la relación entre la energía total E y la energía de la separatriz B .

Es el turno ahora de la aproximación perturbativa. La estableceremos en primer orden de perturbación y compararemos con los resultados exactos que acabamos de dar.

Expandimos en serie de Taylor el hamiltoniano del péndulo alrededor del punto de equilibrio $\mathbf{f} = 0$

$$H_p = \frac{1}{2} A p^2 + \frac{1}{2} B \mathbf{f}^2 - \mathbf{e} \cdot \frac{1}{4!} B \mathbf{f}^4 + \mathbf{e}^2 \cdot \frac{1}{6!} B \mathbf{f}^6 - \dots \quad (39)$$

Los dos primeros términos constituirán nuestra aproximación de orden cero.

$$H_{p0} = \frac{1}{2} A p^2 + \frac{1}{2} B \mathbf{f}^2$$

Hemos intercalado en la expansión (39) potencias de un parámetro \mathbf{e} . Ésta es una práctica habitual en teoría de perturbación y tiene como objetivo identificar los distintos órdenes de perturbación. Al final del proceso se elimina haciendo $\mathbf{e} = 1$. Ahora podemos preparar el sistema para aplicar la teoría anterior. Para empezar, deberemos obtener la ecuación (14) para este ejemplo. Utilizamos para ello las variables acción-ángulo del hamiltoniano “no perturbado”, H_{p0} , correspondiente al oscilador armónico.

Recordamos que en este caso: $q = (2J/R)^{1/2} \sin \mathbf{q}$; $p = (2JR)^{1/2} \cos \mathbf{q}$, con $R = (A/B)^{1/2}$ y $H_{p0}(J) = (AB)^{1/2} J = \mathbf{w}_0 J$.

Quedará

$$H_p = \mathbf{w}_0 J - \mathbf{e} \cdot \frac{1}{6} B J^2 \sin^4 \mathbf{q} + \mathbf{e}^2 \cdot \frac{B^2 J^3}{90 \mathbf{w}_0} \sin^6 \mathbf{q} + \dots \quad (40)$$

Puede ahora aplicarse el procedimiento de perturbación hasta primer orden.

$$H_{p1} = -\frac{1}{6} B J^2 \sin^4 \mathbf{q} = -\frac{B J^2}{48} (3 - 4 \cos 2\mathbf{q} + \cos 4\mathbf{q}) \quad (41)$$

El procedimiento se deja como ejercicio. El nuevo hamiltoniano en primer orden es:

$$\bar{H}_p(\bar{J}) = \mathbf{w}_0 \bar{J} - \frac{1}{16} B \bar{J}^2 \quad (42)$$

En (42) \mathbf{e} ha sido igualado a 1.