

## Capítulo 2

# Electrostática y Conductores

### 2.1 Conductores

Sin entrar en detalles microscópicos, un conductor es un material que posee cargas de movilidad en su volumen. Estas cargas se desplazan distancias apreciables tan pronto es aplicado un campo eléctrico.

Electrostática es el estudio de cargas y campos bajo la condición que los campos no varíen en el tiempo, lo que en particular implica que no debe haber movimiento de cargas. Así, bajo la presencia de un campo eléctrico, las cargas en un conductor se mueven hasta que se ubican de tal manera que el movimiento de cargas desaparece. Esto es posible solo si el campo eléctrico en el interior del conductor se hace exactamente cero,

$$\vec{E}_{\text{interior}} = \vec{0} \quad (2.1.1)$$

El lapso durante el cual las cargas se reubican para dar campo interior nulo escapa a los marcos de lo que es la electrostática.

Dentro de cada elemento de volumen de un conductor la carga neta es nula porque de lo contrario ellas producirían campo en el interior. En situaciones electrostáticas, un conductor cargado tiene todo su exceso de cargas en la superficie. Dicho de otra manera,  $\rho = 0$  ya que  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  y si  $\rho \neq 0$  entonces el campo no podría ser nulo.

Si el campo en el interior es nulo entonces el potencial en el interior de un conductor tiene un valor único: el conductor es un *volumen equipotencial*.

En particular, *la superficie de un conductor es una superficie equipotencial*. Por lo tanto, de la superficie de un conductor cargado nace un campo que es perpendicular a esa superficie. La ley de Gauss puede aplicarse a un cilindro infinitesimal con eje perpendicular a la superficie y se demuestra que el campo en una vecindad infinitesimal

al conductor tiene un valor totalmente determinado por la densidad superficial de cargas en ese punto:

$$\begin{aligned}\vec{D}(\text{infinitesimalmente cerca a la} \\ \text{superficie conductora}) \\ = \sigma_\ell \hat{n}\end{aligned}$$

que es equivalente a decir que

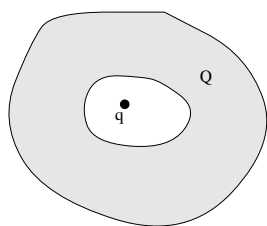
$$\begin{aligned}\vec{E}(\text{muy cerca a la su-} \quad (2.1.2) \\ \text{perficie conductora}) &= \frac{\sigma_\ell}{\epsilon} \hat{n} \\ &= \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \hat{n}\end{aligned}$$

tal como ya fue obtenido en (1.10.6).

AFIRMACIÓN 1. Si un conductor cargado (carga total  $Q$ ) tiene un hueco interior

(totalmente rodeado de materia conductora), entonces la carga se distribuye exclusivamente en la superficie externa.

AFIRMACIÓN 2. Si un conductor carga (carga  $Q$ ), pero hueco como el anterior, contiene



Conductor hueco con carga  $Q$  conteniendo en el hueco una carga puntual  $q$ .

una carga  $q$  en la cavidad interna (ver figura), entonces aparece una densidad de carga en la superficie interior cuya

integral da exactamente  $-q$  y en la superficie externa aparece otra densidad de carga, cuya integral es  $Q + q$ .

AFIRMACIÓN 3. Si se tiene un conductor hueco y neutro y una carga puntual  $q$  fuera del conductor, se induce una densidad de carga en la superficie externa (cuya integral es cero) pero el campo en el hueco interior es idénticamente nulo.

Este último fenómeno suele ser denominado *blindaje electrostático*.

CONTACTO A TIERRA. Se dice que un conductor está en *contacto a tierra* si su diferencia de potencial con infinito es nula.

EJEMPLO ILUSTRATIVO: Se tiene una placa conductora de ancho  $\delta$  que separa a dos medios semiinfinitos con constantes dieléctricas  $\epsilon_A$  el de arriba y  $\epsilon_B$  el de abajo (ver figura). Su superficie superior la llamamos 1 y a la inferior la llamamos 2. La placa está cargada (carga libre) pero no se sabe el valor de  $\sigma_{\ell 1}$  ni de  $\sigma_{\ell 2}$  sino tan solo del total

$$\sigma_\ell = \sigma_{\ell 1} + \sigma_{\ell 2} \quad (2.1.3)$$

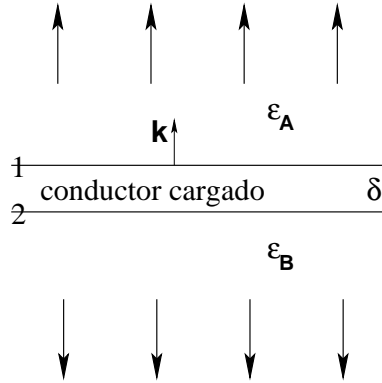
Gracias a (2.1.2) se sabe que el campo eléctrico en los material  $A$  y  $B$  es

$$\vec{E}_A = \frac{\sigma_{\ell 1}}{\epsilon_A} \hat{k}, \quad \vec{E}_B = -\frac{\sigma_{\ell 2}}{\epsilon_B} \hat{k} \quad (2.1.4)$$

A partir de estos campos se puede calcular los respectivos vectores  $\vec{P}$  y con ellos se obtiene las densidades superficiales de polarización

$$\sigma_{P1} = -\frac{\epsilon_A - \epsilon_0}{\epsilon_A} \sigma_{\ell 1},$$

$$\sigma_{P2} = -\frac{\varepsilon_B - \varepsilon_0}{\varepsilon_B} \sigma_{\ell 2} \quad (2.1.5)$$



Las densidades de carga en cada una de las dos superficies es la suma de la densidad de carga libre y de polarización. Si sumamos las expresiones que ya sabemos se obtiene

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 \sigma_{\ell 1}}{\varepsilon_A}, \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_0 \sigma_{\ell 2}}{\varepsilon_B} \quad (2.1.6)$$

Con estas densidades de carga total en las caras 1 y 2 de la placa se puede calcular el campo eléctrico que ellas implican en el interior del conductor. Resulta que tal campo es proporcional a  $\sigma_2 - \sigma_1$ , y como el campo debe ser cero (interior de un conductor) se deduce que  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Usando (2.1.6) lo anterior implica

$$\varepsilon_B \sigma_{\ell 1} = \varepsilon_A \sigma_{\ell 2}$$

Combinando esta expresión con (2.1.3) se logra deducir que

$$\sigma_{\ell 1} = \frac{\varepsilon_A \sigma_{\ell}}{\varepsilon_A + \varepsilon_B}, \quad \sigma_{\ell 2} = \frac{\varepsilon_B \sigma_{\ell}}{\varepsilon_A + \varepsilon_B}$$

con lo que se ha logrado dar una solución en base a los datos  $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \sigma_{\ell}$ .

Ahora es directo, por ejemplo, que el campo eléctrico a ambos lados tiene la misma magnitud pero distinto signo:

$$\vec{E}_A = -\vec{E}_B = \frac{\sigma_{\ell}}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} \hat{k}$$

pero si se usa la notación  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  es muy fácil demostrar que

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{\ell}}{\varepsilon_A + \varepsilon_B}$$

lo que conduce a ver que se ha reobtenido (1.2.6). Nótese que  $\sigma$  es toda la carga por unidad de superficie que tiene la placa, esto es,  $\sigma = \sigma_{\ell 1} + \sigma_{P1} + \sigma_{\ell 2} + \sigma_{P2}$ .

Hacemos notar que ya teniendo esta solución se puede comprobar que

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{\ell 1}}{\varepsilon_A}, \quad \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{\ell 2}}{\varepsilon_B}$$

que ilustra, esta vez con densidades superficiales, el comentario que se hizo bajo (1.9.3).

Con los resultados ya obtenidos demuestre que

$$\frac{\sigma_{\ell}}{\varepsilon_A + \varepsilon_B} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

donde  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ .

OTRO EJEMPLO: Consideremos una situación semejante a la anterior, pero esta vez se tiene dos placas conductoras infinitas paralelas con cargas de igual magnitud y signo opuesto. Las cuatro superficies las denominamos desde abajo hacia arriba 1, 2, 3

y 4. La carga por unidad de superficie es  $\sigma$  en la placa inferior y  $-\sigma$  en la superior, es decir,

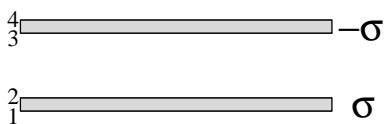
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_3 + \sigma_4 = -\sigma$$

La exigencia de que el campo eléctrico es nulo en el interior de los dos conductores lleva a dos condiciones más:

$$\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma = 0, \quad \sigma + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

Estas cuatro ecuaciones dan como solución que

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0, \quad \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma \quad (2.1.7)$$



Esto significa que la carga de estas placas se concentra únicamente en las caras enfrentadas, es decir, en la cara inferior (3) de la placa de arriba y en la cara superior (2) de la placa de abajo. Para obtener este resultado en ningún momento se necesito el valor de las constantes dieléctricas de los distintos medios.

### 2.1.1 Ecuación de Poisson. Unicidad de la solución

Si se tiene un conjunto de  $N$  conductores cargados interesa poder determinar la función potencial eléctrico. Puede adivinarse que  $V(\vec{r})$

depende de las cargas  $Q_k$  de cada conductor y de la configuración geométrica del sistema. Normalmente se usará la convención  $V(\infty) = 0$ . El problema consiste en resolver la ecuación de Poisson con condiciones de borde que correspondan al sistema en estudio, es decir,

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(\vec{r}) &= \rho(\vec{r})/\varepsilon \\ V(S_k) &= V_k \quad (k = 1 \dots N) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

donde  $S_k$  representa la superficie del  $k$ -ésimo conductor, y  $V_k$  es el valor del potencial en la superficie de él.

Demostraremos que la solución a este problema es *única* si se adopta alguna convención como que  $V(\infty) = 0$ . Con el objeto de hacer esta demostración se supone que existen dos soluciones  $V_1(\vec{r})$  y  $V_2(\vec{r})$ , es decir ambas funciones satisfacen el sistema de ecuaciones (1.4.5). Se define entonces la función diferencia,

$$\phi(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) - V_2(\vec{r})$$

y la idea es demostrar que  $\phi$  es idénticamente nula. Para ello conviene notar que  $\phi$  satisface un sistema semejante a (1.4.5) pero con lados derechos nulos,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec{r}) &= 0 \\ \phi(S_k) &= 0 \quad (k = 1 \dots N) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Si se define ahora,  $\vec{F}(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi$  se observa que  $\nabla \cdot \vec{F} = (\vec{\nabla} \phi)^2$ , es decir, la divergencia de  $\vec{F}$  es no negativa. Si se hace la integral de la divergencia de  $\vec{F}$  en un volumen  $\mathcal{V}$ , el teorema de Gauss permite convertir la integral en una integral de superficie de  $\vec{F}$  mismo y si el volumen  $\mathcal{V}$  se toma arbitrariamente grande, de modo que su superficie se aleje indefinidamente, entonces se ve que la integral de superficie es nula porque  $\vec{F}$  decrece cerca de infinito al menos como  $r^{-3}$ . En efecto, todo potencial de una fuente finita decrece cerca de infinito como  $1/r$  (ver (1.5.8)), lo que implica que  $\vec{F}$  decrece como ya se ha dicho.

Pero si la integral es nula, y lo que se está integrando es el cuadrado de la divergencia de  $\phi$ , entonces necesariamente se tiene que

cumplir que  $\nabla\phi = 0$  en todas partes, lo que implica que  $\phi$  es constante. Y como se sabe que  $\phi$  es cero sobre la superficie de cada uno

de los conductores, entonces  $\phi$  es una función idénticamente nula, es decir, (1.4.5) tiene una sola solución.

## 2.2 Energía Electroestática

### 2.2.1 Energía en términos de cargas y potenciales

La energía potencial asociada a un par de partículas cargadas  $q_1$  y  $q_2$  es,

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}} \quad (2.2.1)$$

Similarmente, la energía asociada a tres partículas es,

$$U_{123} = U_{12} + U_{23} + U_{31} \quad (2.2.2)$$

donde al lado derecho aparecen funciones como la que se escribió en (2.2.1) para cada uno de los tres pares que se pueden formar. En ambos casos se ha considerado el cero de energía potencial a distancia infinita.

Si se trata de un sistema de  $N$  partículas cargadas, entonces el resultado es,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j(\neq i)=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} \quad (2.2.3)$$

El factor  $1/2$  es necesario porque la doble suma está contando dos veces cada pareja y la condición  $j \neq i$  en la suma interior evita que se considere la energía potencial de una partícula debido a su propio campo (lo que daría un infinito ya que  $r_{ii} = 0$ ).

De (1.4.7), puede verse que el potencial de todas las  $N$  partículas, excepto por la  $i$ -ésima, evaluado en la posición de la  $i$ -ésima partícula es

$$V_i = \sum_{j(\neq i)=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} \quad (2.2.4)$$

(se ha tomado con  $\vec{r}_0$  en infinito) lo que implica que

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (2.2.5)$$

Esta es la energía de un conjunto discreto de  $N$  cargas puntuales. El resultado puede ser generalizado a distribuciones continuas reemplazando la suma por una integral sobre la distribución y reemplazando  $q_i$  por un elemento de carga  $dq$ ,

$$U = \frac{1}{2} \int V(\vec{r}') dq(\vec{r}'), \quad (2.2.6)$$

ver (1.2.3)

Naturalmente que en general una fuente puede ser una mezcla de un conjunto discreto de cargas puntuales y de distribuciones continuas, por lo que la energía electrostática debe ser escrita como una suma de las expresiones (2.2.5) y (2.2.6).

Si, en particular se tiene un sistema que solo consta de  $N$  conductores cargados, entonces su energía es la

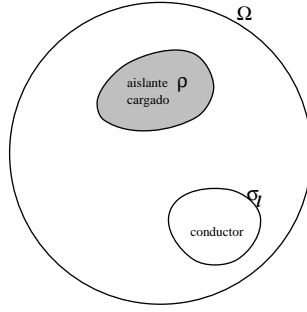
semisuma de integrales de productos  $V_k \sigma_k$ , donde  $k$  es el índice que se usa para numerar los conductores. Puesto que en la superficie de cada conductor el potencial es constante (no depende del punto de la superficie), entonces los factores  $V_k$  pueden ser escritos fuera de cada una de las  $N$  integrales, lo que finalmente da que,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N V_k Q_k . \quad (2.2.7)$$

### 2.2.2 Energía en términos de los campos

Consideremos ahora el caso en que se tiene una fuente que consta de dos fuentes continuas: un volumen finito  $\mathcal{V}$  dentro del cual hay una distribución de carga libre  $\rho(\vec{r})$ , y un conductor con superficie  $\mathcal{S}$  con densidad de carga libre  $\sigma(\vec{r})$ . La energía de este sistema es

$$U = \frac{1}{2} \left( \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') d\mathcal{V}' + \int_{\mathcal{S}} \sigma(\vec{r}') V(\vec{r}') dS' \right) . \quad (2.2.8)$$



La primera de estas dos integrales, que se denotará  $I_1$ , puede hacerse sobre una región arbitraria que contenga al volumen  $\mathcal{V}$ , ya que la densidad de carga volumétrica es nula fuera de  $\mathcal{V}$ . Conviene integrar  $I_1$  sobre una región  $\Omega$ . Esta es una región esférica pero con un hueco. El centro de esa esfera está en un punto arbitrario de  $\mathcal{V}$  y con radio  $R$  que se hará finalmente tender a infinito.

El hueco dentro de esta esfera—que no forma parte de  $\Omega$ —está definido por una superficie  $\mathcal{S}_C$  que rodea al

conductor infinitesimalmente cerca sin llegar a tocarlo. Es decir el borde de  $\Omega$  está formado por dos superficies cerradas disjuntas.

Para trabajar el integrando de  $I_1$  se reemplaza la densidad  $\rho$  por la divergencia del campo del desplazamiento eléctrico, usando (1.8.6). De modo que ahora el integrando tiene el producto  $V(\vec{r}') \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}')$ . Se hace uso de la identidad,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (V \vec{D}) &= \vec{D} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \vec{D} \\ &= -\vec{E} \cdot \vec{D} + V \nabla \cdot \vec{D} \end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad se hizo uso de (1.4.4). De modo que ahora  $I_1$  se puede escribir como,

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \vec{E} \cdot \vec{D} + \nabla \cdot (V \vec{D}) \right) d\mathcal{V}' \quad (2.2.9)$$

La primera integral se va a convertir, en el límite final, en una integral sobre

todo el espacio, incluido si se quiere, el interior de  $S$ , ya que ahí el campo eléctrico es nulo. La segunda integral es una integral de volumen de una divergencia, lo que permite usar el teorema de Gauss para reducirla a una integral de superficie. Pero la superficie de  $\Omega$  es claramente separable en dos porciones: la superficie esférica exterior  $S_R$  y la superficie interior que podemos identificar con la superficie del conductor,  $S$ . La integral sobre  $S_R$  se hace cero en el límite (el integrando decrece como  $r^{-3}$ ). La integral sobre  $S$  es muy sencilla porque  $V(\vec{r}')$  sobre  $S$  tiene un valor fijo, lo que permite tomar este valor fuera de la integral, quedando por calcular una integral del tipo  $\int \vec{D} \cdot d\vec{S}$ , que es una integral de flujo. El  $d\vec{S}$ , sin embargo, apunta hacia afuera de la región  $\Omega$ , es decir, hacia adentro del conductor, lo que da finalmente un signo menos y así, esa última integral da, debido a la ley de Gauss (1.8.5), la carga total del con-

ductor  $Q_S$ ,

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV' - V_S Q_S \right) \quad (2.2.10)$$

La otra contribución a la energía que hay en (2.2.8) es una integral sobre la superficie  $S$ , en la cual el potencial vale siempre  $V_S$ , por lo que puede ser escrito fuera de la integral, quedando por hacer una integral de la densidad de carga  $\sigma$  en toda la superficie, lo que da  $Q_S$ . Así, entonces, se ve que la última integral de (2.2.8) se cancela con el último término de  $I_1$ . En resumen, se ha obtenido que,

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV, \quad (2.2.11)$$

integral que se hace sobre todo el espacio. La densidad de energía electrostática entonces es

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (2.2.12)$$

## 2.3 Condensadores

Se entiende por condensador un sistema de dos conductores  $A$  y  $B$  con cargas  $Q_A = +Q$  y  $Q_B = -Q$ . La característica más interesante de un condensador es su *capacidad*, definida por

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.3.1)$$

donde  $V$  es la diferencia de potencial

que existe entre ellos:

$$V = V_{AB} = V_A - V_B > 0 \quad (2.3.2)$$

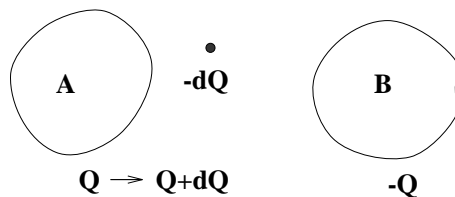
De lo anterior, la energía de un condensador es,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} QV \\ &= \frac{Q^2}{2C} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$= \frac{1}{2} C V^2 \quad (2.3.4)$$

Por definición  $C$  es una cantidad positiva. Lo usual es construir los condensadores con conductores que enfrentan una gran área separada por una distancia muy pequeña. Esto garantiza que prácticamente toda la densidad de carga esté en las caras enfrentadas y por lo tanto, que casi todo el campo eléctrico esté concentrado en el volúmen que queda entre esas dos caras cargadas. Así, la densidad de energía de un condensador está principalmente en ese volumen.

A continuación se demostrará que la capacidad efectivamente es una cantidad que no depende de la carga  $Q$  del condensador. Con este propósito se estudiará la forma como varía la energía de un condensador cuando la carga de éste es aumentada:  $Q \rightarrow Q + dQ$ . Puesto que al aumentar la carga la magnitud del campo eléctrico aumenta, entonces (ver (2.2.11)), la energía aumenta:  $dU > 0$ .



Para aumentar la carga se quita al conductor  $A$  una carga  $-dQ$ , esto es  $Q_A = Q \rightarrow Q - (-dQ)$ . Esa carga, sobre la que hay una fuerza eléctrica de atracción hacia  $A$  es llevada por un agente externo (por ejemplo, una batería) hacia el conductor  $B$ . El trabajo del agente externo se efectúa por

medio de una fuerza externa  $\vec{F}_{\text{ext}}$  que en todo momento se opone a la fuerza electrostática  $\vec{F}_e = dQ \vec{E}$ , es decir,  $\vec{F}_{\text{ext}} = -dQ \vec{E}$ . El trabajo  $dW$  es el cambio de energía  $dU = dW$ ,

$$\begin{aligned} dU &= + \int_A^B dQ \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= V dQ \quad \text{que se reescribe:} \\ &= \left(2 \frac{dQ}{Q}\right) \left(\frac{1}{2} Q V\right) \\ &= \left(2 \frac{dQ}{Q}\right) U \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Esto es,

$$\frac{dU}{U} = 2 \frac{dQ}{Q} \quad (2.3.6)$$

Al integrar se obtiene  $\ln(U) = 2 \ln(Q) + \ln(\lambda)$ , donde  $\ln(\lambda)$  es el nombre que se le da a la *constante* de integración. Puesto que es constante, no depende de la variable de integración  $Q$ , y así, se ha demostrado que  $U = \lambda Q^2$ , donde  $\lambda$  es independiente de  $Q$ . Al comparar esto con (2.3.3) se reconoce que  $\lambda = 1/2C$ , lo que muestra que la capacidad de un condensador no depende de la carga  $Q$  sino que es una propiedad intrínseca del condensador, esto es, depende de su geometría y la constante dieléctrica,  $\epsilon$ .

**EJERCICIO 2.3-1.** Calcule la capacidad de un condensador de caras planas paralelas de área enfrentada  $A$  y a distancia  $d$ , suponiendo que los efectos de borde son despreciables, esto es, el campo eléctrico entre las



placas se supone uniforme. Demuestre que ésta es,

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \quad (2.3.7)$$

**EJERCICIO 2.3-2.** Calcule la capacidad de un condensador que consta de dos conductores cilíndricos concéntricos de radios  $a$  y  $b$  y de altura  $h$  despreciando los efectos de borde. Demuestre que,

$$C = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln(b/a)} \quad (2.3.8)$$

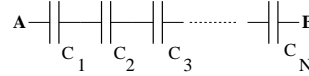
**EJERCICIO 2.3-3.** Calcule la capacidad de un condensador que consiste en dos esferas concéntricas de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ) y demuestre que,

$$C = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b - a} \quad (2.3.9)$$

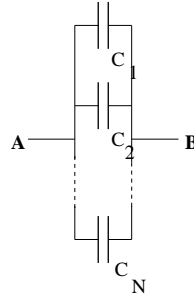
Nótese que las capacidades siempre resultan proporcionales a  $\varepsilon$  y a un factor con dimensiones de longitud.

En el caso del condensador esférico se puede estudiar el límite  $b \rightarrow \infty$ , lo que da la capacidad de un condensador que consiste de una esfera sola:

$$C = 4\pi\varepsilon a \quad (2.3.10)$$



Condensadores conectados en serie



Condensadores conectados en paralelo.

**EJERCICIO 2.3-4.** Demuestre que las expresiones para las capacidades equivalentes de una serie de condensadores conectados en serie o en paralelo (ver figura) son

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad (2.3.11)$$

conectados en serie

$$C_{eq} = C_1 + \dots + C_N \quad (2.3.12)$$

conectados en paralelo

## 2.4 Energía y Fuerzas entre Conductores Cargados

Si se tiene un conjunto de  $N$  conductores cargados y se ha adoptado la convención  $V(\infty) = 0$ , entonces la energía del sistema es,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k \quad (2.4.1)$$

donde  $V_k$  es el valor del potencial sobre el  $k$ -ésimo conductor. La energía del sistema, entonces, cambia si varían las cargas, o los potenciales o ambos,

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (V_k dQ_k + Q_k dV_k) \quad (2.4.2)$$

Sobre cada uno de estos conductores está actuando una fuerza de naturaleza eléctrica que se calculará a continuación. Se supondrá que los conductores permanecen normalmente en reposo debido a que existe alguna fuerza no eléctrica que los mantiene fijos.

Si por un instante se deja que el  $k$ -ésimo conductor modifique su posición en un  $d\vec{r}_k$  por efecto de la fuerza electrostática  $\vec{F}_k$  que está actuando sobre él, la energía del sistema cambia en

$$dU = \nabla_k U \cdot d\vec{r}_k \quad (2.4.3)$$

El subíndice  $k$  en  $\nabla_k$  quiere decir que se toma el gradiente de  $U$  derivando con respecto a las coordenadas del conductor  $k$ .

Se estudiará dos casos: (a) conductores aislados, es decir,  $dQ_j = 0$  para todo  $j$  y (b) conductores cuyos potenciales permanecen constantes,  $dV_j = 0$ .

(a) **Conductores aislados.** En este caso el sistema efectúa un trabajo mecánico (positivo)  $dW$  al desplazar al conductor  $k$ , lo cual lo hace perder energía:  $dU < 0$ . Ese trabajo es,

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k \\ &= -dU \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Al comparar las dos expresiones para  $dU$  se obtiene directamente que,

$$\vec{F}_k = -\nabla_k U \quad (2.4.5)$$

(b) **Conductores potenciales fijos.** Esta situación podría darse interconectando los conductores con baterías, cuidando que no haya circuitos cerrados que provoquen la existencia de corrientes eléctricas. Además se conecta una batería entre uno de los conductores y *tierra*. Las baterías aseguran que las diferencias de potencial permanezcan fijas y la batería a tierra asegura que uno de los conductores tenga potencial fijo. Eso basta para que todos los potenciales queden fijos.

Esta vez el cambio de energía  $dU$  que experimenta el sistema se debe a dos razones: i) la fuerza  $\vec{F}_k$  efectúa un trabajo que implica una pérdida de energía para el sistema y ii) las baterías trabajan para mantener fijos los potenciales. Aun así, (2.4.2) se reduce a

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i dQ_i \quad (2.4.6)$$

La pérdida de energía debido al trabajo mecánico es, igual que en el caso anterior,

$$(dU)_{\text{Mec}} = -\vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k \quad (2.4.7)$$

La determinación de la variación de la energía debido al trabajo de las baterías requiere de un análisis un poco más delicado.

Conviene pensar primero en un sistema de tan solo dos conductores con

$V_A - V_B$  fijo. Supongamos que, debido a un pequeño movimiento de uno de los conductores, el conductor  $A$  pierde una cantidad  $-dQ_{AB}$  de carga, es decir,  $Q_A \rightarrow Q_A - (-dQ_{AB}) = Q_A + dQ_{AB}$  y que la carga de  $B$  cambia en  $Q_B \rightarrow Q_B + dQ_{BA}$ . Debido a que la carga se conserva,

$$dQ_{AB} = -dQ_{BA} \quad (2.4.8)$$

El trabajo que efectúa la batería en acarrear  $-dQ_{AB}$  de  $A$  a  $B$  es

$$\begin{aligned} dW_{\text{bat}} &= \int_A^B dQ_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= dQ_{AB}(V_A - V_B) \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Esta es la cantidad de energía que el sistema toma de las baterías ( $dW_{\text{bat}} = dU_{\text{bat}}$ ). La energía total que el sistema toma de las baterías es una superposición de expresiones como (2.4.9) sumando sobre todas las parejas de sub-sistemas de dos conductores,

$$\begin{aligned} (dU)_{\text{bat}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_i - V_j) dQ_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_i dQ_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_j dQ_{ji} \\ &= \sum_{i,j} V_i dQ_{ij} \\ &= \sum_i V_i dQ_i \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

El factor  $1/2$  en la primera igualdad toma en cuenta que cada pareja es contada dos veces. En el segundo paso se hizo uso de (2.4.8). En el último paso se utilizó la relación que expresa el

cambio total de carga que experimenta en conductor  $i$ , es

$$dQ_i = \sum_j dQ_{ij} \quad (2.4.11)$$

La cambio total de energía el sistema entonces es,

$$\begin{aligned} dU &= (dU)_{\text{Mec}} + (dU)_{\text{bat}} \\ &= -\vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k + \sum_i V_i dQ_i \\ &= -\vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k + 2dU \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

La última igualdad se debe a (2.4.6). De aquí se despeja que

$$dU = \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k \quad (2.4.13)$$

que se compara con (2.4.3) para obtener que,

$$\vec{F}_k = \nabla_k U \quad (2.4.14)$$

Es interesante observar que esta expresión difiere del resultado (2.4.5) del caso anterior solo en el signo. Pero sería falso concluir que un sistema de conductores  $(Q_1, V_1), (Q_2, V_2), \dots, (Q_N, V_N)$  implica fuerzas de signo contrario sobre el conductor  $k$  solo por el hecho de tener cargas fijas (conductores aislados) o potenciales fijos (conductores interconectados con baterías). Lo contrario es lo correcto, en ambos casos la fuerza es exactamente la misma a pesar de las apariencias.

Por ejemplo, la energía de un condensador plano es,

$$U = \frac{xQ^2}{2A\epsilon} \quad (2.4.15)$$

donde  $x$  es la distancia entre las placas. obteniéndose,  
Si  $Q$  permanece constante entonces la fuerza es,

$$U = \frac{\varepsilon AV^2}{2x} \quad (2.4.18)$$

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{Q^2}{2A\varepsilon} \quad (2.4.16) \quad \text{y esta vez debe calcularse,}$$

Pero si es  $V$  el que permanece constante, conviene hacer el reemplazo,

$$V = \frac{xQ}{A\varepsilon} \quad (2.4.17)$$

$$F = +\frac{dU}{dx} = -\frac{\varepsilon AV^2}{2x^2} \quad (2.4.19)$$

Si se compara ambas expresiones para la fuerza se puede constatar que se obtiene una identidad.

## 2.5 Integración numérica de la ecuación de Poisson

### 2.5.1 Caso unidimensional

Recordemos que la noción de primera derivada de una función  $V$  proviene de considerar el límite de

$$V' \sim \frac{V(x+\epsilon) - V(x)}{\epsilon}$$

o bien  $\frac{V(x) - V(x-\epsilon)}{\epsilon}$

Similarmente la segunda derivada se puede expresar como la diferencia de primeras derivadas,

$$V'' \sim \frac{\frac{V(x+\epsilon) - V(x)}{\epsilon} - \frac{V(x) - V(x-\epsilon)}{\epsilon}}{\epsilon} = \frac{V(x+\epsilon) - 2V(x) + V(x-\epsilon)}{\epsilon^2}$$

Si se quisiera integrar numéricamente la ecuación diferencial ordinaria  $V'' = p(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  con condiciones de borde  $V(a) = V_a$  y  $V(b) = V_b$  se procede como sigue. Se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $N$  partes iguales de largo  $\epsilon$ , de tal modo que  $\epsilon N = b - a$ .

La coordenada de cada punto discreto es  $x_k \equiv a + k\epsilon$  de tal modo que  $x_0 = a$  y  $x_N = b$ . Los únicos valores de  $V$  que se va a determinar son los  $V_k \equiv V(x_k)$  y las condiciones de borde  $V_0 = V_a$  y  $V_N = V_b$  son datos.

Se escribe la igualdad  $V_{k+1} - 2V_k + V_{k-1} = p_k \epsilon^2$  y se despeja  $V_k$ :

$$V_k = \frac{1}{2} (V_{k+1} + V_{k-1} - \epsilon^2 p_k)$$

y se escribe un programa que tiene dos rutinas. La rutina de inicialización le asocia a  $V_k$  (con  $k = 1, \dots, N-1$ ) valores al azar, mientras que a los valores en los bordes se les da los valores conocidos. La rutina de cálculo es un *loop* que visita ordenadamente los puntos interiores y cambia el valor actual de  $V_k$  por el que resulta de la expresión de arriba.

Se puede demostrar que este procedimiento siempre converge a la solución, independiente de los valores aleatorios asociados a los  $V_k$  inicialmente.

Pero ¿cuando detener el *loop*? Una forma razonable puede ser la siguiente. En cada pasada por todos los puntos interiores que van modificando los valores de  $V_k$  se calcula  $S = \sum_k V_k^2$ . Entonces puede terminar el *loop* cuando la diferencia entre el valor actual de  $S$  y el anterior es menor que alguna cantidad muy pequeña.

Si su programa va mostrando en pantalla el gráfico  $V_k$  versus  $k$  después de cada pasada podrá ver cómo los valores aleatorios iniciales rápidamente son cambiados por otros que van convergiendo a la solución.

## 2.5.2 Dimensiones mayores

Si se desea resolver un problema semejante pero en dos o tres dimensiones entonces el volumen en el cual se quiere calcular  $V$  se cuadrícula en dos dimensiones y se divide en cubos en tres dimensiones. Los puntos ahora se caracterizan por dos o tres enteros:  $x_{ij}$  en dos dimensiones y  $x_{ijk}$  en tres dimensiones.

Para ser más preciso trabajemos el

caso bidimensional de la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = p(x, y) \quad (2.5.1)$$

la que nos lleva a la versión discreta,

$$\frac{\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\epsilon} - \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\epsilon}}{\epsilon} + \frac{\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\epsilon} - \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\epsilon}}{\epsilon} = p_{ij}$$

y que permite despejar

$$V_{ij} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - \epsilon^2 p_{ij})$$

Veamos el pseudocódigo que nos permitirá obtener el potencial en 2D dentro de un cuadrado con coordenadas (0,0) y (10,10) con las siguientes condiciones de borde. El potencial en el perímetro cuadrado es nulo, en el trazo desde (3,4) hasta (7,4) vale  $V = 8$  y en el trazo desde (3,6) hasta (7,6) vale  $V = -8$ . Se trabajará el caso  $p(x) \equiv 0$

```
N      = 100
epsilon = 0.1
/*****Inicializacion*****/
for i=0 to 100
{ for j=0 to 100
  { V[i,j] = numero aleatorio entre -1 y 1
  }
}
for i=0 to 100 do
{ V[i,0] = 0.0
  V[i,10] = 0.0
  V[0,i] = 0.0
  V[10,i] = 0.0
```

```

    }
    for i=30 to 70 do
    { V[i,40] = 8.0
      V[i,60] = -8.0
    }
/*****Loop*****/
/** Tan pronto calcula cada V[i,j] puede ejecutar una **/
/** instruccion tipo pintar_pixel(i,j,color=entero(8+V[i,j])) **/
/** que coloca en el sitio [i,j] de la pantalla un color **/
/** que varia segun el valor del potencial. **/
iter = 0
while (iter<1000) do
{ for i=1 to 29 do
  {
    for j=1 to 99 do
    { V[i,j] = 0.25*(V[i+1,j]+V[i-1,j]+V[i,j+1]+V[i,j-1])
      V[70+i,j] = 0.25*(V[i+1,j]+V[i-1,j]+V[i,j+1]+V[i,j-1])
    }
  }
  for i=30 to 70 do
  { for j=1 to 39 do
    {V[i,j] = 0.25*(V[i+1,j]+V[i-1,j]+V[i,j+1]+V[i,j-1])
      V[i,j+60] = 0.25*(V[i+1,j]+V[i-1,j]+V[i,j+1]+V[i,j-1])
    }
    for j=41 to 59 do
    {V[i,j] = 0.25*(V[i+1,j]+V[i-1,j]+V[i,j+1]+V[i,j-1])
    }
  }
}
iter = iter + 1
}
/*****/

```

## 2.6 Problemas

2.1 Considere un sistema donde distintos medios están separados por superficies esféricas de radios  $a < c < b < g$ . Al centro hay una carga  $q$  en una cavidad vacía de radio  $a$ . Entre los radios  $a$  y  $c$  hay material dieléctrico caracterizado por  $\varepsilon_A$ , entre  $c$  y  $b$  el medio es conductor con carga total  $Q$  y entre  $b$  y  $g$  el material dieléctrico está caracterizado

por  $\varepsilon_B$ . Más allá de  $g$  la constante dieléctrica vale  $\varepsilon_g$ . Las únicas cargas del sistema son las ya mencionadas  $q$  y  $Q$ . Determine  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  y  $\vec{D}$  en todas partes y obtenga las densidades totales de polarización en cada superficie esférica.

2.2 Si el espacio entre dos cilindros conductores coaxiales muy largos

(radios  $a$  y  $b$ ,  $a < b$ ) estuviese lleno con un material dieléctrico,

- ¿cómo tendría que depender la constante dieléctrica de la distancia  $\rho$  al eje para que la magnitud del campo  $\|\vec{E}\|$  fuera independiente de  $\rho$ ?
- ¿Cuál es la densidad volumétrica de polarización?

2.3 Dos placas conductoras rectangulares muy grandes nacen de una misma recta y forman un ángulo  $\theta_0$ . En el espacio entre ellas hay dos materiales dieléctricos caracterizados por  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  separados por una superficie rectangular que también nace de la misma recta y forma ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  con los planos conductores (naturalmente  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_0$ ). Si se tiene una diferencia de potencial  $V_0$  entre las placas conductoras, determine las distintas densidades de carga que aparecen en la geometría.

2.4 Se tiene una distribución de carga con simetría esférica caracterizada por dos radios  $a$  y  $b$ , ( $a < b$ ). Para  $r < a$  la densidad de carga es constante:  $\rho = \rho_0$ . Para  $a < r < b$  hay densidad de carga que no se conoce pero se sabe que el potencial total en esa zona es  $V(r) = -\frac{K}{6}r^2$ . Además se sabe que en la cáscara esférica de radio  $r = a$  hay una densidad superficial de carga  $\sigma_1$  uniforme y en  $r = b$  otra de valor

$\sigma_2$ . Los valores de estas densidades no se conocen. Los datos son  $\rho_0$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $K$ . Sabiendo que no hay otras distribuciones de carga y que el potencial en infinito es cero determine: el campo eléctrico en todas partes, el potencial en todas partes,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\rho(a < r < b)$ .

2.5 Calcule en forma semejante el potencial lejano asociado a un sistema de tres cargas :  $[q_1 = 2q, q_2 = -q, q_3 = -q]$  ubicadas en el eje  $Z$  con coordenadas  $z_1 = a$ ,  $z_2 = 0$  y  $z_3 = -2a$  respectivamente.

2.6 Un plano interfacial infinito separa a dos medios dieléctricos semiinfinitos. Bajo el plano está un medio con constante dieléctrica  $\varepsilon_1$  y sobre al plano la constante dieléctrica es  $\varepsilon_2$ . La única fuente de campo eléctrico del sistema es un disco de radio  $R$  y densidad de carga uniforme  $\sigma_0$  totalmente contenido en el plano interfacial. Calcule el campo eléctrico sobre el eje del disco tanto sobre como bajo el disco.

2.7 El espacio entre dos esferas concéntricas conductoras (con cargas  $Q$  y  $-Q$  y radios  $a$  y  $b$  respectivamente), está lleno con dos materiales dieléctricos, caracterizados por  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , separados por un plano ecuatorial. Determinar la diferencia de potencial entre ambas esferas.

- 2.8 Considere una carga puntual  $q$  sumergida en un medio dieléctrico no lineal, cuyo vector polarización está dado por  $\vec{P} = \eta \|\vec{E}\| \vec{E}$ . El campo eléctrico en el medio se comporta aproximadamente en la forma  $\vec{E} \approx A r^{-n} \hat{r}$  cuando  $r$  es muy chico (posiciones muy cercanas a la carga) y también cuando  $r$  es muy grande. Determine los valores de  $A$  y  $n$  tanto para  $r \approx 0$  como para  $r$  muy grande. [Rsp: Cuando  $r$  es chico  $n = 2$  y cuando  $r$  es grande  $r = \frac{1}{4\pi\eta}$ . En este último caso  $A = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\eta}}$ .]
- 2.9 Los aislantes pierden su calidad de tales cuando son sometidos a los efectos de un campo eléctrico que sobrepasa una magnitud crítica  $E_R$  (campo de ruptura). Se desea construir un cable coaxial constituido por un cable cilíndrico de radio interno  $a = 3[\text{mm}]$ , un cable externo (cilindro hueco de radio interior  $b = 5[\text{mm}]$ ) y, entre ellos, en forma concéntrico se desea poner dos materiales caracterizados por  $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$  y  $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$ . Se sabe que  $E_R = 4000[\text{Volt/metro}]$  para ambos materiales. Determine el valor óptimo del radio de la superficie interfacial entre ambos dieléctricos para que la diferencia de potencial entre los conductores pueda ser la mayor posible sin que se produzca ruptura.
- 2.10 Considere un sistema de simetría cilíndrica compuesto de un alambre rectilíneo infinito con densidad de carga  $\lambda_0$  uniforme rodeado de un cilindro de radio  $a$  de material dieléctrico con constante dieléctrica  $\epsilon_a$ , a su vez rodeado de un cilindro conductor de radio exterior  $c$  el cual, finalmente, está rodeado de un cilindro dieléctrico de radio exterior  $b$  y de constante dieléctrica  $\epsilon_b$ . El cilindro conductor está cargado; su carga es  $\lambda_1$  por unidad de longitud. Determine el campo eléctrico en todas partes y la densidad de carga total en las tres interfaces.