

Apuntes de un curso de

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Espacio de funciones | 1 |
| 1.1. Definiciones | 1 |
| 1.2. Sucesiones de funciones | 3 |
| 1.3. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt | 9 |
| 1.4. Coeficientes de Fourier | 10 |
| 1.5. Integrales impropias (valor principal) | 14 |
| 1.6. Convergencia según Cesàro | 15 |
| 2. Series de Fourier | 19 |
| 3. Transformada de Fourier | 35 |
| 3.1. Definiciones | 35 |
| 3.2. Ejemplos | 36 |
| 3.3. Propiedades | 41 |
| 3.4. Aplicaciones | 43 |
| 4. Convolución | 45 |
| 4.1. Espacio \mathcal{S} | 45 |
| 4.2. Producto de convolución | 46 |
| 4.3. El espacio \mathcal{S} como anillo | 49 |
| 5. Distribuciones temperadas | 53 |
| 5.1. Definiciones | 53 |
| 5.2. Sucesión de distribuciones | 61 |
| 5.3. Producto de distribuciones | 71 |
| 5.4. Distribuciones y ecuaciones diferenciales | 72 |
| 5.5. Convergencia débil | 73 |
| 6. Distribuciones y transformada de Fourier | 79 |
| 7. Convolución de distribuciones | 87 |
| 7.1. Definiciones | 87 |
| 7.2. Propiedades de la convolución de distribuciones | 89 |
| 7.3. Uso de convolución en Física | 91 |

| | |
|---|------------|
| 8. La función Gamma | 93 |
| 8.1. La función factorial | 93 |
| 8.2. La función Gamma | 94 |
| 8.3. Función Beta | 96 |
| 8.4. Notación doble factorial | 99 |
| 8.5. Fórmula de Stirling | 99 |
| 8.6. Otras funciones relacionadas | 101 |
| 9. Transformada de Laplace | 103 |
| 9.1. Definición | 103 |
| 9.2. Inversión de la transformada de Laplace | 105 |
| 9.3. Propiedades de la transformada de Laplace | 109 |
| 9.4. Lista de transformadas de Laplace | 111 |
| 10. Aplicaciones de la transformada de Laplace | 113 |
| 10.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes | 114 |
| 10.2. Ecuaciones integrales | 116 |
| 10.3. Ecuaciones en derivadas parciales | 118 |
| 10.4. Sistema de ecuaciones lineales | 120 |
| 11. Polinomios ortogonales | 123 |
| 11.1. Definiciones | 123 |
| 11.2. Teoremas | 123 |
| 11.3. Relación de recurrencia | 125 |
| 12. Polinomios de Hermite | 127 |
| 12.1. Definición | 127 |
| 12.2. Función generatriz | 127 |
| 12.3. Ortogonalidad | 130 |
| 12.4. Algunos resultados interesantes | 131 |
| 12.5. Solución por serie de la ecuación de Hermite | 131 |
| 13. Polinomios de Laguerre | 133 |
| 13.1. Definición | 133 |
| 13.2. Función generatriz | 133 |
| 13.3. Relaciones de recurrencia | 135 |
| 13.4. Ecuación de Laguerre | 135 |
| 13.5. Ortogonalidad | 136 |
| 13.6. Polinomios asociados de Laguerre | 138 |
| 14. El problema de Sturm-Liouville | 139 |
| 14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos | 139 |
| 14.2. Operadores autohermíticos | 141 |
| 14.3. Problema de autovalores | 141 |
| 14.4. Ejemplos de funciones ortogonales | 143 |

| | |
|---|------------|
| 15.Ecuaciones diferenciales con singularidades | 145 |
| 15.1. Puntos singulares | 145 |
| 15.2. Solución por serie: método de Frobenius | 146 |
| 15.3. Limitaciones del método. Teorema de Fuchs | 149 |
| 15.4. Una segunda solución | 151 |
| 16.Ecuaciones diferenciales del tipo... | 155 |
| 16.1. Soluciones en puntos regulares | 155 |
| 16.2. Soluciones en la vecindad de puntos singulares | 159 |
| 16.3. Singularidades en infinito | 167 |
| 16.4. Ejemplos | 168 |
| 16.5. Ecuaciones con $n \leq 3$ singularidades Fuchsianas | 171 |
| 17.Funciones hipergeométricas | 177 |
| 17.1. La ecuación hipergeométrica general | 177 |
| 17.2. Ecuación indicial | 178 |
| 17.3. Ecuación diferencial de Gauss | 179 |
| 17.4. La serie hipergeométrica | 181 |
| 17.5. Ecuación hipergeométrica confluyente | 183 |
| 18.Polinomios de Legendre | 187 |
| 18.1. Función generatriz | 187 |
| 18.2. Relaciones de recurrencia | 189 |
| 18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$ | 190 |
| 18.4. Fórmula de Rodrigues | 191 |
| 18.5. Ecuación diferencial de Legendre | 192 |
| 18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$ | 193 |
| 18.7. Relación de ortogonalidad | 193 |
| 18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$ | 194 |
| 18.9. Serie de Legendre | 196 |
| 18.10 Funciones asociadas de Legendre | 199 |
| 18.11 Problema de Sturm-Liouville asociado | 201 |
| 18.12 Armónicos esféricos | 203 |
| 18.13 Segunda solución de la ecuación de Legendre | 205 |
| 19.La ecuación diferencial de Bessel | 211 |
| 19.1. La ecuación diferencial de Bessel | 211 |
| 19.2. Funciones de Bessel de índice no entero | 212 |
| 19.3. Funciones de Bessel de índice entero | 213 |
| 19.4. Comportamiento asintótico | 214 |
| 19.5. Función generatriz | 215 |
| 19.6. Fórmulas de adición | 216 |
| 19.7. Representaciones integrales | 217 |
| 19.8. Relaciones de recurrencia | 219 |
| 19.9. Relaciones de ortogonalidad | 220 |
| 19.10 Problema de Sturm-Liouville asociado | 221 |

| | |
|--|------------|
| 20. Diversos tipos de funciones cilíndricas | 223 |
| 20.1. Segunda solución de la ecuación de Bessel | 223 |
| 20.2. Funciones de Hankel | 226 |
| 21. Aplicaciones a la Electrostática | 229 |
| 21.1. Coordenadas rectangulares | 229 |
| 21.2. Coordenadas polares, dos dimensiones | 233 |
| 21.3. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas | 236 |
| 21.4. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas | 240 |
| 21.5. Otras aplicaciones | 243 |
| 21.6. Ecuación de difusión | 246 |
| 21.7. Difusión con creación de partículas | 248 |

Capítulo 18

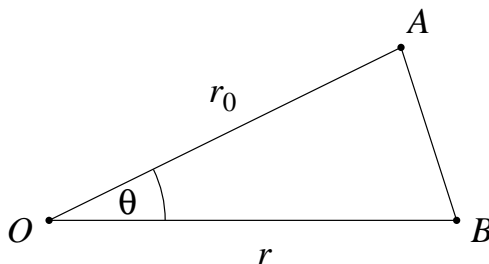
Polinomios de Legendre

versión preliminar 3.5-30 diciembre 2002

18.1. Función generatriz

En diversos problemas físicos (gravitación, electrostática, etc.) nos encontramos con fuerzas que dependen del inverso de la distancia entre dos cuerpos. Los polinomios de Legendre aparecen naturalmente en el problema geométrico de determinar esta distancia inversa, lo cual los vincula con numerosas situaciones de interés físico.

Consideremos dos radios r_0 y r que unen un punto O con dos puntos, A y B , respectivamente:



La distancia $d = \overline{AB}$ está dada por:

$$d = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta} .$$

Definamos

$$x = \cos \theta , \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

Si $r > r_0$ y $s = r_0/r < 1$, conviene escribir

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}} .$$

Si, por el contrario, $r < r_0$, y $s = r/r_0 < 1$:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2sx}} .$$

En ambos casos, la segunda fracción es la misma y resulta ser precisamente la función generatriz de los polinomios de Legendre.

Definición 18.1

$$\psi(x, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2xs}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) s^n \quad (18.1)$$

es la función generatriz de los polinomios de Legendre $P_n(x)$.

Observemos que $\psi(x, s)$ puede ser expandida en serie de Taylor en el argumento $(s^2 - 2xs)$:

$$\begin{aligned} \psi(x, s) &= [1 + (s^2 - 2xs)]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(s^2 - 2xs) + \frac{3}{8}(s^2 - 2xs)^2 - \dots \\ &= 1 + xs + \frac{1}{2}(3x^2 - 1)s^2 - \dots , \end{aligned}$$

lo cual nos permite encontrar expresiones explícitas para los polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1 , \quad (18.2a)$$

$$P_1(x) = x , \quad (18.2b)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) , \quad (18.2c)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \dots \quad (18.2d)$$

Considerando el caso particular $x = 1$ en (18.1):

$$\psi(1, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 - 2s}} = \frac{1}{1 - s} = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) s^n .$$

Luego

$$P_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 . \quad (18.3)$$

Análogamente, tomando $x = -1$:

$$\psi(-1, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 + 2s}} = \frac{1}{1 + s} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1) s^n .$$

Luego

$$P_n(-1) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 . \quad (18.4)$$

También es inmediato evaluar $P_n(0)$:

$$\psi(0, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} = 1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{8}s^4 + \dots = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} s^{2\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) s^n ,$$

luego

$$\begin{aligned} P_n(0) &= 0 \quad \text{si } n \text{ es impar,} \\ P_{2\nu}(0) &= (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \quad \text{si } \nu \geq 1, \\ P_0(0) &= 1. \end{aligned}$$

18.2. Relaciones de recurrencia

1) Derivemos (18.1) respecto a s .

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{1}{2}(1+s^2-2xs)^{-3/2}(2s-2x) = \frac{x-s}{1+s^2-2xs} \psi = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) s^{n-1},$$

es decir

$$(1+s^2-2xs) \frac{\partial \psi}{\partial s} - (x-s)\psi = 0.$$

Introduciendo la expansión (18.1) e igualando coeficientes de s^n , se obtiene la relación de recurrencia

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0}, \quad n \geq 1, \quad (18.5a)$$

$$P_1 - xP_0 = 0. \quad (18.5b)$$

2) Escribamos los polinomios de Legendre en la forma

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^n a_{n,m} x^m. \quad (18.6)$$

Reemplazando en (18.5) y comparando coeficientes de x^{m+1} se sigue que:

$$\begin{aligned} (n+1) a_{(n+1),(n+1)} &= (2n+1) a_{n,n}, \\ a_{m,m} &= \frac{2m-1}{m} a_{m-1,m-1}, \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (18.7)$$

Ésta es una relación de recurrencia entre los coeficientes supremos de los polinomios de Legendre. Puesto que $a_{00} = 1$ [relaciones (18.2)], se sigue que

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}, \quad a_{33} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots$$

y en general

$$a_{nn} = \frac{(2n-1)!!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \quad (18.8)$$

3) Derivando (18.1) respecto a x se obtiene:

$$\boxed{xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)} \quad (18.9)$$

Derivando (18.5) respecto a x , y combinándola con (18.9) para eliminar el término en $P'_n(x)$:

$$\boxed{P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)} \quad (18.10)$$

Restando (18.9) y (18.10):

$$\boxed{P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)} \quad (18.11)$$

18.3. Coeficientes del polinomio $P_n(x)$

Consideremos (18.1) y expandamos $\psi(x, s)$ en serie de Taylor:

$$\psi(x, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + (s^2 - 2sx)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (s^2 - 2sx)^k ,$$

donde

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)!}{k!(-\frac{1}{2} - k)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{k!(-\frac{1}{2} - k)!} .$$

Por su parte,

$$(s^2 - 2sx)^k = \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} s^{2\mu} (-2sx)^{k-\mu} ,$$

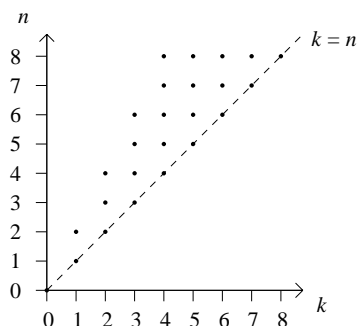
de modo que

$$\psi(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^k \binom{-1/2}{k} \binom{k}{\mu} (-2x)^{k-\mu} s^{k+\mu} .$$

Sea $n = k + \mu$. Entonces

$$\psi(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{2k} \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n} s^n .$$

Deseamos intercambiar el orden de las sumas. Para ello observemos la siguiente figura:



Efectuar la doble suma equivale a sumar sobre los pares ordenados (k, n) indicados con puntos en la figura. El orden en que se realizan las sumas corresponde a desplazarnos sobre el eje horizontal, escoger un valor de k , y luego desplazarnos sobre el eje vertical, recorriendo los valores de n entre $n = k$ y $n = 2k$. Equivalentemente, podemos desplazarnos primero sobre el eje vertical, escoger un valor de n , y luego recorrer los puntos horizontalmente entre los límites $k = [(n+1)/2]$ y $k = n$. Así, la doble suma se puede escribir:

$$\psi(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^n \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n} s^n ,$$

donde

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil &\equiv \frac{n}{2} && \text{si } n \text{ es par,} \\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil &\equiv \frac{n+1}{2} && \text{si } n \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Comparando con (18.1), identificamos

$$P_n(x) = \sum_{k=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^n \binom{-1/2}{k} \binom{k}{n-k} (-2x)^{2k-n} .$$

Definiendo $\mu = n - k$, el límite inferior de la suma corresponde a $\mu = n - [(n+1)/2] = [n/2]$, de modo que

$$P_n(x) = \sum_{\mu=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^0 = \binom{-1/2}{n-\mu} \binom{n-\mu}{\mu} (-2)^{n-2\mu} x^{n-2\mu} ,$$

o bien

$$P_n(x) = \sum_{\mu=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{(-1)^\mu (2n-2\mu)!}{2^n (n-\mu)! (n-2\mu)! \mu!} x^{n-2\mu} \quad (18.12)$$

De (18.12) es fácil deducir que:

- $P_n(x)$ es par si n es par.
- $P_n(x)$ es impar si n es impar.

18.4. Fórmula de Rodrigues

Puesto que

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-\mu)} = \frac{(2n-2\mu)!}{(n-2\mu)!} x^{n-2\mu} ,$$

(18.12) se puede reescribir en la forma:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\mu \frac{1}{\mu!(n-\mu)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2(n-\mu)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\mu \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} x^{2(n-\mu)} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n ,
 \end{aligned}$$

obteniéndose la *fórmula de Rodrigues*:

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n} \quad (18.13)$$

La fórmula de Rodrigues nos permite demostrar fácilmente diversas propiedades de los polinomios de Legendre, como veremos en las siguientes secciones.

18.5. Ecuación diferencial de Legendre

Nos interesa ahora determinar la ecuación diferencial de la cual los polinomios de Legendre son solución. Sea

$$u(x) = (x^2 - 1)^n .$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= n(x^2 - 1)^{n-1} 2x , \\
 (x^2 - 1)u'(x) &= 2nx(x^2 - 1)^n = 2nxu(x) , \\
 \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [(x^2 - 1)u'(x)] &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} 2nxu(x) .
 \end{aligned}$$

Desarrollando las derivadas de productos a ambos lados de esta expresión:

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1} 2xu^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{2} 2u^{(n)}(x) = \\
 2nxu^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} 2nu^{(n)}(x) ,
 \end{aligned}$$

$$(x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2xu^{(n+1)}(x) - n(n+1)u^{(n)}(x) = 0 .$$

Luego, con (18.13), obtenemos la *ecuación diferencial de Legendre*:

$$\boxed{(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0} \quad (18.14)$$

18.6. Lugares nulos de $P_n(x)$

Proposición 18.1 $P_n(x)$ tiene lugares nulos simples en el intervalo $(-1, 1)$.

Demostración Sea $u(x) = (x^2 - 1)^n$. Entonces $u(x)$ tiene lugares nulos de multiplicidad n en $x = \pm 1$. Como $u(-1) = u(1) = 0$, por el teorema del valor medio $u'(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in (-1, 1)$. Pero $u'(-1) = u'(1) = 0$, luego también es cierto que $u''(x)$ se anula dos veces en $(-1, 1)$, una vez en $(-1, x_0)$ y otra vez en $(x_0, 1)$. Procediendo sucesivamente, se encuentra que $u^{(n)}(x)$ se anula n veces en $(-1, 1)$.

Estos ceros son necesariamente simples, dada la condición de polinomios ortogonales de los polinomios de Legendre (sección 18.7 y teorema 11.2).

q.e.d.

18.7. Relación de ortogonalidad

Supongamos $0 \leq m < n$, y observemos que, por la fórmula de Rodrigues (18.13):

$$2^n n! \int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = \int_{-1}^1 t^m u^{(n)}(t) dt ,$$

donde $u(t) = (t^2 - 1)^n$. Integrando por partes:

$$2^n n! \int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = t^m u^{(n-1)}(t) \Big|_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 t^{m-1} u^{(n-1)}(t) dt .$$

El término de borde es cero pues $u^{(m)}(\pm 1) = 0$ si $m < n$. Análogamente, integrando por partes m veces:

$$2^n n! \int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = (-1)^m m! \int_{-1}^1 u^{(n-m)}(t) dt = (-1)^m m! u^{(n-m-1)}(t) \Big|_{-1}^1 = 0 .$$

Luego $P_n(x)$ es ortogonal a todo polinomio de grado $m < n$ en el intervalo $[-1, 1]$, en particular a $P_m(x)$.

En el caso $m = n$, el producto interno entre los polinomios de Legendre es:

$$(2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \int_{-1}^1 u^{(n)}(t) u^{(n)}(t) dt .$$

Integrando por partes:

$$(2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = u^{(n)} u^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u^{(n+1)}(t) u^{(n-1)}(t) dt = - \int_{-1}^1 u^{(n+1)}(t) u^{(n-1)}(t) dt ,$$

pues el término de borde es nulo. Así, integrando por partes n veces:

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= (-1)^n \int_{-1}^1 u^{(2n)}(t) u(t) dt \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} [(t^2 - 1)^n] (t^2 - 1)^n dt . \end{aligned}$$

Usando que $\frac{d^{2n}}{dt^{2n}} [(t^2 - 1)^n] = (2n)!$,

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (-1)^n (1 - t^2)^n dt \\ &= (2n)! \int_{-1}^1 (1 - t)^n (1 + t)^n dt . \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= (2n)! \left[(1 - t)^n \frac{(1 + t)^{n+1}}{n + 1} \Big|_{-1}^1 + \frac{n}{n + 1} \int_{-1}^1 (1 - t)^{n-1} (1 + t)^{n+1} dt \right] \\ &= (2n)! \frac{n}{n + 1} \int_{-1}^1 (1 - t)^{n-1} (1 + t)^{n+1} dt \end{aligned}$$

Análogamente, integrando por partes n veces:

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= (2n)! \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2) \cdots 2n} \int_{-1}^1 1 \cdot (1 + t)^{2n} dt \\ &= (2n)! n! \frac{n!}{(2n)!} \frac{1}{2n + 1} (1 + t)^{2n+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n + 1} . \end{aligned}$$

Obtenemos así la *relación de ortogonalidad*:

$$\boxed{\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm}} \quad (18.15)$$

18.8. Expresiones integrales para $P_n(x)$

Sabemos, por el Teorema de Cauchy, que una función analítica se puede escribir en términos de una integral de contorno:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(u)}{(u - z)^{n+1}} du .$$

Sea

$$f(z) = \frac{1}{2^n n!} (z^2 - 1)^n .$$

Entonces los polinomios de Legendre se pueden escribir en la forma:

$$P_n(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \frac{1}{2^n n!} \oint \frac{(u^2 - 1)^n}{(u - z)^{n+1}} du ,$$

obteniéndose la *fórmula de Schläfli*:

$$\boxed{P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(u^2 - 1)^n}{(u - z)^{n+1}} du} \quad (18.16)$$

Integremos sobre una circunferencia de centro z y radio ρ . Entonces

$$\begin{aligned} u &= z + \rho e^{i\phi} , & 0 \leq \phi < 2\pi , \\ du &= i\rho e^{i\phi} d\phi = i(u - z)d\phi , \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{u^2 - 1}{u - z} &= \frac{z^2 + 2z\rho e^{i\phi} + \rho^2 e^{2i\phi} - 1}{\rho e^{i\phi}} \\ &= \frac{1}{\rho} [(z^2 - 1)e^{-i\phi} + 2z\rho + \rho^2 e^{i\phi}] , \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^n} [(z^2 - 1)e^{-i\phi} + 2z\rho + \rho^2 e^{i\phi}]^n i d\phi \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^n} \int_0^{2\pi} [(z^2 - 1)e^{-i\phi} + 2z\rho + \rho^2 e^{i\phi}]^n d\phi . \end{aligned}$$

Si $z \neq \pm 1$ podemos tomar $\rho = \sqrt{z^2 - 1}$, con lo cual la relación anterior queda:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^n} \int_0^{2\pi} [\rho^2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + 2z\rho]^n d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi})}{2} + \frac{2z\rho}{2\rho} \right]^n d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\rho \cos \phi + z]^n d\phi . \end{aligned}$$

Se obtiene así la *relación de Laplace*:

$$\boxed{P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \phi]^n d\phi} \quad (18.17)$$

Para $z = \pm 1$ tenemos simplemente

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n .$$

Corolario $|P_n(x)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \forall x \in [-1, 1]$.

Demostración Sea $x \in [-1, 1]$. Adoptamos la convención de que la raíz cuadrada es un número positivo, y escribimos

$$\sqrt{x^2 - 1} = i\sqrt{1 - x^2}.$$

El integrando en (18.17) satisface:

$$\left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \phi \right|^2 = x^2 + (1 - x^2) \cos^2 \phi \leq x^2 + 1 - x^2 = 1,$$

luego

$$\left(\left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \phi \right|^2 \right)^{n/2} \leq 1.$$

Así,

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \phi \right|^n d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = 1.$$

q.e.d.

Poniendo $z = \cos \theta$ en (18.17), $\sqrt{z^2 - 1} = i \sin \theta$, se obtiene la representación adicional:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^n d\phi,$$

$$\boxed{P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^n d\phi} \quad (18.18)$$

18.9. Serie de Legendre

Los polinomios de Legendre, siendo ortogonales en $[-1, 1]$, son candidatos a ser una base en ese intervalo, de modo que una función arbitraria podría ser escrita como una combinación lineal de los P_n . Estudiemos esta posibilidad.

Si la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$ converge uniformemente en $[-1, 1]$ y representa allí a $f(x)$, es decir,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x),$$

entonces

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_{-1}^1 P_\nu(x) P_n(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \delta_{\nu n} \frac{2}{2n+1} = \frac{2a_n}{2n+1}.$$

Entonces los *coeficientes de Fourier* de $f(x)$ respecto a los polinomios de Legendre están dados por:

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (18.19)$$

A la inversa: Sea $f(x)$ una función dada, acotada y seccionalmente continua en $[-1, 1]$. Entonces se pueden calcular los coeficientes de Fourier a_ν respecto a P_ν y construir la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) .$$

¿Converge la serie? Si converge, ¿representa a $f(x)$?

Para saberlo, tomemos el módulo de (18.19):

$$|a_n| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 |f(x)| |P_n(x)| dx .$$

Sea $M = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$. Como $|P_n(x)| \leq 1$,

$$|a_n| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) 2M = (2n + 1)M .$$

Por otra parte, si f' existe y es continua en $[-1, 1]$, entonces para $n > 0$ se tiene

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx .$$

Integrando por partes,

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[f(x) \int_{-1}^x P_n(x') dx' \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(x) \int_{-1}^x P_n(x') dx' dx .$$

Pero, de la relación de recurrencia (18.10),

$$\int_{-1}^x P_n(x') dx' = \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] ,$$

con lo cual

$$a_n = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(x) [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] dx .$$

Así,

$$|a_n| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f'(x)| (|P_{n+1}(x)| + |P_{n-1}(x)|) dx \leq \int_{-1}^1 |f'(x)| dx \equiv 2M' ,$$

donde

$$M' = \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| .$$

Realizando el mismo procedimiento suponiendo que f'' es seccionalmente continua en $[-1, 1]$ se obtiene que

$$|a_n| \simeq \frac{1}{n^2} A ,$$

para n suficientemente grande, y A cierta constante. Por tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, luego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge uniformemente.

Ahora nos preguntamos: Dada una función f , calculamos los coeficientes a_n y sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ converge uniformemente. ¿Representa esta serie de Legendre la función $f(x)$? Para responder, consideremos la diferencia entre la serie y la función $f(x)$:

$$g(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}(x) .$$

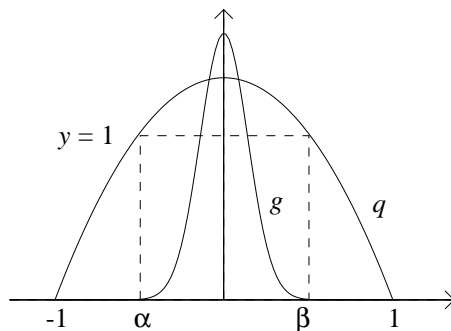
Los coeficientes de Fourier de $g(x)$ son:

$$\begin{aligned} b_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \int_{-1}^1 P_{\nu}(x) P_n(x) dx \right] \\ &= a_n - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \delta_{n\nu} = 0 . \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$g(x) \equiv 0 .$$

Demostración Supongamos que $g(x) \neq 0$ en un intervalo $[\alpha, \beta] \in [-1, 1]$. Sin pérdida de generalidad, supongamos además que $g(x) > 0$ en este intervalo. Sea $q(x)$ un polinomio de grado dos tal que $q(\alpha) = q(\beta) = 1$ y $q(x) < 1$ en $[-1, \alpha] \cup [\beta, 1]$. Gráficamente:



Luego

$$\int_{-1}^1 g q^k \xrightarrow{k \gg 1} \int_{\alpha}^{\beta} g q^k > 0 .$$

Pero $g(x)$ es ortogonal a todos los polinomios $P_n(x)$, y por tanto a todo polinomio, luego

$$\int_{-1}^1 g q^k = 0 ,$$

lo que contradice nuestro resultado anterior.

Por lo tanto $g(x) \equiv 0$.

q.e.d.

Luego,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}(x) .$$

18.10. Funciones asociadas de Legendre

Una manera de obtener la ecuación asociada de Legendre es partir de la ecuación regular de Legendre (18.14)

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 , \quad (18.14)$$

y con la ayuda de la fórmula de Leibniz, para la derivada n -ésima de un producto de funciones,

$$\frac{d^n}{dx^n}[A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^n \frac{n!}{(n-s)!s!} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x) , \quad (18.20)$$

diferenciála m veces obteniendo:

$$(1 - x)^2 u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0 , \quad (18.21)$$

donde

$$u(x) \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) .$$

Reemplazando

$$\psi(x) = (1 - x^2)^{m/2} u(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) ,$$

resolviendo para u y diferenciando,

$$\begin{aligned} u' &= \left(\psi' + \frac{mx\psi}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{-m/2} , \\ u'' &= \left[\psi'' + \frac{2mx\psi'}{1-x^2} + \frac{m\psi}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2\psi}{(1-x^2)^2} \right] (1-x^2)^{-m/2} . \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (18.21), encontramos que ψ satisface la ecuación diferencial

$$\boxed{(1 - x^2) \psi'' - 2x \psi' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \psi = 0 .} \quad (18.22)$$

La cual es conocida como *la ecuación asociada de Legendre*. Para reobtener la ecuación de Legendre (18.14) basta tomar $m = 0$. Haciendo el cambio de variable $x = \cos \theta$, obtenemos la ecuación expresada en coordenadas polares, que es la forma usual en que nos la vamos a encontrar

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \psi = 0 . \quad (18.23)$$

Las soluciones regulares, denotadas por $P_n^m(x)$, son:

$$\psi(x) = P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) . \quad (18.24)$$

Ocasionalmente los $P_n^m(x)$ aparecen en su definición con un factor $(-1)^m$, por ejemplo en *Classical Electrodynamics, Second Edition* de J.D. Jackson, esta elección es conocida como fase de Magnus y Oberhettinger o de Condon y Shortley. Nosotros incluiremos esta fase en la definición de los armónicos esféricos, al estilo seguido en *Mathematical Methods for Physicists*,

Fourth Edition de G.B. Arfken y H.J. Weber. A pesar de que el factor de fase se introduce en distintos puntos de las definiciones los armónicos esféricos resultantes son iguales.

Algunos ejemplos de funciones asociadas de Legendre

$$\begin{aligned}
P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} = \sin \theta , \\
P_2^1(x) &= 3x (1-x^2)^{1/2} = 3 \cos \theta \sin \theta , \\
P_2^2(x) &= 3(1-x^2) = 3 \sin^2 \theta , \\
P_3^1(x) &= \frac{3}{2} (5x^2-1) (1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta , \\
P_3^2(x) &= 15x (1-x^2) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta , \\
P_3^3(x) &= 15 (1-x^2)^{3/2} = 15 \sin^3 \theta , \\
P_4^1(x) &= \frac{5}{2} (7x^3-3x) (1-x^2)^{1/2} = \frac{5}{2} (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta , \\
P_4^2(x) &= \frac{15}{2} (7x^2-1) (1-x^2) = \frac{15}{2} (7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta , \\
P_4^3(x) &= 105x (1-x^2)^{3/2} = 105 \cos \theta \sin^3 \theta , \\
P_4^4(x) &= 105 (1-x^2)^2 = 105 \sin^4 \theta .
\end{aligned} \tag{18.25}$$

La relación entre P_n^m y P_n^{-m} es:

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) . \tag{18.26}$$

La función generatriz de las funciones asociadas de Legendre

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu+m}^m(x) t^\nu . \tag{18.27}$$

Las relaciones de recurrencia que satisfacen las funciones asociadas de Legendre

$$P_n^{m+1} - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m + [n(n+1) - m(m-1)] P_n^{m-1} = 0 , \tag{18.28}$$

$$(n+m) P_{n-1}^m + (n-m+1) P_{n+1}^m = (2n+1) x P_n^m , \tag{18.29}$$

$$\frac{1}{2} P_n^{m+1} - \frac{1}{2} (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1} = (1-x^2)^{1/2} P_n^m , \tag{18.30}$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{1/2} P_n^m = P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m-1} , \tag{18.31}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+m)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1} \\
&\quad - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1} .
\end{aligned} \tag{18.32}$$

La relación de paridad satisfecha por las funciones asociadas de Legendre es

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x) . \tag{18.33}$$

Además, se satisface en los extremos que

$$P_n^m(\pm 1) = 0 \quad \text{para } m \neq 0. \tag{18.34}$$

Las funciones asociadas de Legendre satisfacen distintas relaciones de ortogonalidad dependiendo sobre cual índice se tomen. La primera:

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq} , \quad (18.35)$$

en coordenadas polares

$$\int_0^\pi P_p^m(\cos \theta) P_q^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq} . \quad (18.36)$$

Sobre el otro índice

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^k(x) (1-x^2)^{-1} dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{mk} . \quad (18.37)$$

18.11. Problema de Sturm-Liouville asociado

La ecuación asociada de Legendre (18.22) o (18.23) se puede reescribir en la forma

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] - \frac{m^2}{1-x^2} y + n(n+1)y = 0 . \quad (18.38)$$

La condición de borde

$$y(\pm 1) \text{ finito} \quad (18.39)$$

asegura que las soluciones sean las funciones asociadas de Legendre [ver (18.34), (18.3) y (18.4)]. Claramente, esto corresponde a un problema de autovalores de un operador diferencial autoadjunto de la forma general (14.7), con $A(x) = (1-x^2)$, $B(x) = -m^2/(1-x^2)$, y donde el problema de autovalores está caracterizado por una función de peso $w(x) = 1$, y autovalores $\lambda = n(n+1)$ (ver tabla en Sección 14.4).

La relevancia física de este problema se aprecia al considerar ecuaciones que contengan el laplaciano:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + f(r) \Psi(\vec{r}) = 0 , \quad (18.40)$$

Estas ecuaciones aparecen frecuentemente en Física, ya sea para encontrar el potencial electrostático debido a una distribución de cargas [$f(r) = 0$], los modos normales de oscilación de un medio continuo (una cavidad esférica, una membrana, etc.) [$f(r) = k^2$], o, en Mecánica Cuántica, la dependencia espacial de una función de onda en un potencial central dado por $f(r)$.

Si el problema tiene simetría esférica (potencial fuera de un conductor esférico, ondas en una cavidad esférica, problema cuántico con potencial coulombiano, etc.), conviene resolver este problema mediante separación de variables, en coordenadas esféricas. Como la única dependencia angular proviene del operador laplaciano, se obtiene la siguiente ecuación tras la separación de variables:

$$\frac{\Phi(\phi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \lambda \Theta(\theta) \Phi(\phi) = 0 . \quad (18.41)$$

La dependencia azimutal satisface

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = m^2, \quad (18.42)$$

con soluciones

$$\Phi(\phi) = \{e^{-im\phi}, e^{im\phi}\}. \quad (18.43)$$

Las cuales satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{m_1}^*(\phi) \Phi_{m_2}(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} e^{-im_1\phi} e^{im_2\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m_1 m_2}. \quad (18.44)$$

En la mayoría de los problemas físicos requerimos que m sea un entero para que $\Phi(\phi)$, sea una función monovaluada del ángulo azimutal. Dada la relación (18.44)

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad (18.45)$$

es un conjunto de funciones ortonormales con respecto a la integración sobre el ángulo azimutal ϕ . Separando la dependencia azimutal, la dependencia en el ángulo polar θ conduce a una ecuación asociada de Legendre

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0. \quad (18.46)$$

Nos aseguramos de que las soluciones no diverjan en $\cos \theta = \pm 1$ poniendo $\lambda = n(n+1)$, pues en ese caso esta ecuación tiene por solución las funciones asociadas de Legendre $\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta)$. Por tanto, cualquier problema laplaciano con simetría esférica corresponde a un problema de autovalores de un operador autoadjunto (problema de Sturm-Liouville). Las soluciones de este problema serán ortogonales para distintos autovalores, y se podrá construir una base del espacio de soluciones con ellas. En otras palabras, la parte angular de cualquier solución de la ecuación diferencial (18.40) se podrá escribir como una combinación lineal de los $P_n^m(\cos \theta)$.

Puesto que los polinomios de Legendre se reobtienen con $m = 0$, se sigue que gran parte de la discusión en las secciones 18.7 y 18.9 es sólo una manifestación de estas conclusiones generales.

18.12. Armónicos esféricos

En la sección anterior mostramos que la parte angular de un problema laplaciano con simetría esférica consta de dos partes:

$$\Theta(\theta)\Phi(\phi) = A_{nm}P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi} ,$$

con A_{nm} una cierta constante de normalización, m entero, positivo o negativo, si la función debe ser monovaluada en la variable ϕ , y n entero para que las soluciones no diverjan en $\cos\theta = \pm 1$.

La definición (18.24) en principio sólo contempla $m > 0$. Para incluir valores negativos de m usamos la fórmula de Rodrigues en la definición de $P_n^m(\cos\theta)$:

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n , \quad -n \leq m \leq n . \quad (18.47)$$

Normalizando las función asociadas de Legendre

$$\mathcal{P}_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) , \quad -n \leq m \leq n . \quad (18.48)$$

Ahora bien, la función $\Phi_m(\phi) = e^{im\phi}/\sqrt{2\pi}$ es ortonormal con respecto al ángulo azimutal ϕ , y la función $\mathcal{P}_n^m(\cos\theta)$ es ortonormal con respecto al ángulo polar θ . Consideramos entonces el producto de ambas y definimos los *armónicos esféricos*:

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = Y_n^m(\theta, \phi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} , \quad (18.49)$$

que son funciones en los dos ángulos, ortonormales sobre la superficie esférica. La integral completa de ortogonalidad es

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1*}(\theta, \phi) Y_{n_2}^{m_2}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2} , \quad (18.50)$$

o bien,

$$\int_{4\pi} Y_{n_1}^{m_1*}(\Omega) Y_{n_2}^{m_2}(\Omega) d\Omega = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2} , \quad (18.51)$$

donde Ω es el ángulo sólido.

A continuación, una lista de los primeros armónicos esféricos:

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} , \\
Y_1^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{i\phi} , \\
Y_1^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta , \\
Y_1^{-1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen} \theta e^{-i\phi} , \\
Y_2^2(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2 \theta e^{2i\phi} , \\
Y_2^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{i\phi} , \\
Y_2^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) , \\
Y_2^{-1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta e^{-i\phi} , \\
Y_2^{-2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \operatorname{sen}^2 \theta e^{-2i\phi} .
\end{aligned} \tag{18.52}$$

Parte de la importancia de los armónicos esféricos yace en la propiedad de completitud. Esta propiedad, en este caso, significa que cualquier función $f(\theta, \phi)$, con las suficientes propiedades de continuidad, evaluada sobre la superficie de la esfera puede ser expandida en una uniformemente convergente doble serie de armónicos esféricos, conocida como serie de Laplace,

$$f(\theta, \phi) = \sum_{m,n} a_{mn} Y_n^m(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{mn} Y_n^m(\theta, \phi) . \tag{18.53}$$

Si $f(\theta, \phi)$ es conocida, los coeficientes pueden ser inmediatamente encontrados por el uso de la integral de ortogonalidad (18.50).

Una propiedad importante que satisfacen los armónicos esféricos es:

$$Y_n^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_n^{m*}(\theta, \phi) . \tag{18.54}$$

Consideremos a continuación dos direcciones en coordenadas polares esféricas en un espacio tridimensional, (θ_1, ϕ_1) y (θ_2, ϕ_2) . El ángulo entre las dos direcciones lo denotamos γ . Este ángulo satisface la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) . \tag{18.55}$$

El *teorema de adición para los armónicos esféricos* afirma que

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n (-1)^m Y_n^m(\theta_1, \phi_1) Y_n^{-m}(\theta_2, \phi_2) , \tag{18.56}$$

o equivalentemente

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_1, \phi_1) Y_n^{m*}(\theta_2, \phi_2) . \quad (18.57)$$

En términos de los polinomios de Legendre

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \theta_1) P_n(\cos \theta_2) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_1) P_n^m(\cos \theta_2) \cos[m(\phi_1 - \phi_2)] . \quad (18.58)$$

La ecuación (18.55) es un caso especial de la ecuación (18.58).

18.13. Segunda solución de la ecuación de Legendre

Los polinomios de Legendre son solución de la ecuación diferencial (18.14). Pero ésta es una ecuación de segundo grado, y por tanto debe existir otra solución, linealmente independiente a los $P_n(x)$. La encontraremos observando que los polinomios de Legendre son un caso particular de la función hipergeométrica. En efecto, consideremos la ecuación hipergeométrica general:

$$W'' + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-A} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-B} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-C} \right) W' - \left(\frac{\alpha\alpha'}{(z-A)(B-C)} + \frac{\beta\beta'}{(z-B)(C-A)} + \frac{\gamma\gamma'}{(z-C)(A-B)} \right) \frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{(z-A)(z-B)(z-C)} W = 0 ,$$

con soluciones

$$P \left\{ \begin{matrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right\} .$$

Considerando el caso particular

$$\begin{aligned} A &= -1 , & B &= 1 , & C &= \infty , \\ \alpha &= \alpha' = 0 , & \beta &= \beta' = 0 , & \gamma &= -n , & \gamma' &= n+1 , \end{aligned} \quad (18.59)$$

que satisface la condición $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$, la ecuación hipergeométrica queda

$$W'' + \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \right) W' - \frac{n(n+1)}{(z+1)(z-1)} W = 0 ,$$

es decir

$$\boxed{(z^2 - 1)W'' + 2zW' - n(n+1)W = 0} \quad (18.60)$$

que es la *ecuación diferencial de Legendre* ya encontrada en (18.14).

Los polinomios de Legendre se pueden escribir entonces como la función

$$P_n(z) = P \left\{ \begin{matrix} -1 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & n+1 \end{matrix} \right\} . \quad (18.61)$$

Así pues, la ecuación de Legendre tiene singularidades Fuchsianas en -1 , 1 e ∞ . Las raíces de la ecuación indicial en torno a ± 1 son ambas cero, por lo tanto estamos en el caso incómodo, en que el método de Frobenius sólo puede darnos una solución por serie, y la otra tiene un término logarítmico.

Se puede mostrar que la expresión

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt \quad (18.62)$$

es solución de la ecuación de Legendre. En efecto,

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) &= \int_{-1}^1 (z^2 - 1) \frac{P_n(t)}{(z-t)^3} dt - \int_{-1}^1 z \frac{P_n(t)}{(z-t)^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{t^2 - 1}{(z-t)^3} + \frac{t(z-t)}{(z-t)^3} \right] P_n(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P_n(t) \cdot \frac{dt}{(z-t)^3} + \int_{-1}^1 \frac{tP_n(t)}{(z-t)^2} dt . \end{aligned}$$

Integrando por partes la primera integral:

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) &= \left[(t^2 - 1)P_n(t) \frac{1}{2(z-t)^2} \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)P_n'(t) + 2tP_n(t)] \frac{dt}{2(z-t)^2} + \int_{-1}^1 \frac{tP_n(t)}{(z-t)^2} dt \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - 1)P_n'(t)}{2(z-t)^2} dt . \end{aligned}$$

Integrando nuevamente por partes:

$$(z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) = \left[(t^2 - 1)P_n'(t) \frac{1}{2(z-t)} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - 1)P_n''(t) + 2tP_n'(t)}{z-t} dt .$$

Luego

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) - n(n+1)Q_n(z) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(t^2 - 1)P_n''(t) + 2tP_n'(t) - n(n+1)P_n(t)}{z-t} dt . \end{aligned}$$

Pero el integrando es precisamente la ecuación de Legendre, que es satisfecha por los P_n , luego el integrando es cero y

$$(z^2 - 1)Q_n''(z) + 2zQ_n'(z) - n(n+1)Q_n(z) = 0 . \quad (18.63)$$

Las funciones $Q_n(z)$ son la *segunda solución de la ecuación de Legendre*. (18.62) se puede reescribir:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) I(z) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Q_n^*(z, t) dt , \quad (18.64a)$$

con

$$I(z) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{z-t}, \quad (18.64b)$$

$$Q_n^*(z, t) = \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z-t}. \quad (18.64c)$$

Se tiene

$$I(z) = -\ln(z-t) \Big|_{t=-1}^{t=1} = \ln(z+1) - \ln(z-1) = \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right),$$

que es univaluado en todo el plano complejo, salvo en la recta $-1 \leq z \leq 1$, luego

$$I(z) = \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right), \quad \text{salvo en } -1 \leq z \leq 1. \quad (18.65)$$

El numerador de Q_n^* es un polinomio de grado n , y su denominador es un polinomio de grado 1. Se puede mostrar que Q_n^* es un polinomio de grado $n-1$ en t y z . Así, la segunda integral en (18.64a) es un polinomio en z de grado $n-1$. Finalmente,

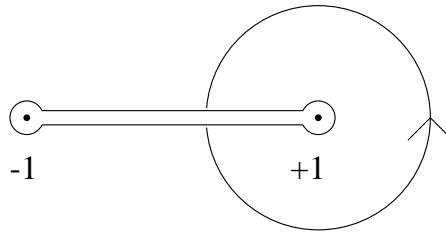
$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - q_n(z), \quad (18.66)$$

con $q_n(z)$ un polinomio de grado $n-1$ con coeficientes reales, que tiene el término logarítmico que esperábamos.

Para $-1 < \xi < 1$, (18.66) nos permite afirmar que

$$Q_n(\xi + 0i) = Q_n(\xi - 0i) - \pi i P_n(\xi). \quad (18.67)$$

Basta considerar el circuito en torno al polo en $z = 1$:



Afirmación Si x es real, $|x| > 1$, entonces $Q_n(x) \in \mathbb{R}$.

Demostración Basta observar que el argumento del logaritmo en (18.66) es siempre positivo, pues el numerador y el denominador son positivos (negativos) si $x > 1$ ($x < 1$).

q.e.d.

Denominamos a las soluciones Q_n de la ecuación de Legendre, *funciones de Legendre de segunda especie*.

De las expresiones explícitas (18.64a), (18.64c) y (18.66), notamos que

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) , \quad (18.68)$$

$$Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - 1 . \quad (18.69)$$

Expansión en serie

Podemos utilizar (18.62) para encontrar una expansión en serie para Q_n . En efecto,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2z} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 - \frac{t}{z}} P_n(t) dt .$$

Si $|z| > 1$,

$$Q_n(z) = \frac{1}{2z} \sum_{\nu=n}^{\infty} \int_{-1}^1 \left(\frac{t}{z} \right)^{\nu} P_n(t) dt .$$

Observemos que todos los términos con $\nu < n$ en la suma son cero, debido a la ortogonalidad de $P_n(t)$ y t^{ν} . Obtenemos así

$$Q_n(z) = \frac{b_{n+1}}{z^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{z^{n+2}} + \cdots ,$$

con

$$b_{\mu} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^{\mu-1} P_n(t) dt .$$

En particular,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^n P_n(t) dt .$$

Como

$$P_n(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n} t^n + \cdots ,$$

se tiene, dada la ortogonalidad de $P_n(t)$ con polinomios de grado menor que n ,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \int_{-1}^1 P_n(t) P_n(t) dt = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \frac{2}{2n+1} .$$

Es decir,

$$b_{n+1} = \frac{n!}{(2n+1)!!} .$$

Relación de recurrencia

Obtengamos una relación de recurrencia para $Q_n(z)$. En general,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n Q_n(z) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Sea $n \geq 1$. Entonces

$$(n+1)Q_{n+1} - z(2n+1)Q_n + nQ_{n-1} = \frac{1}{2}[(n+1)P_{n+1} - z(2n+1)P_n + nP_{n-1}] \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - (\text{polinomio}).$$

El factor entre paréntesis cuadrados es cero. Sea $|z| \rightarrow \infty$. Entonces

$$0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} -(\text{polinomio}),$$

luego el polinomio es nulo. Por tanto, para todo z ,

$$(n+1)Q_{n+1} - z(2n+1)Q_n + nQ_{n-1} = 0 \quad (18.70)$$

Ejemplo Sea $z \notin [-1, 1]$. Entonces

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t),$$

al menos en $-1 \leq t \leq 1$. Los coeficientes de la expansión están dados por

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt = (2n+1)Q_n(z),$$

luego

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(t)Q_n(z). \quad (18.71)$$

Afirmación (Sin demostración) El desarrollo (18.71) es válido en el interior de la elipse con focos en ± 1 que pasa por z :

