

# SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO, ONDAS Y ÓPTICA: ELECTROMAGNETISMO Y ONDAS 1-40

## 1 Problemas de aplicación de la ley de Coulomb: 1-9, 12

Campo eléctrico  $d\vec{E}$  creado en el punto  $\vec{r}$  por una carga diferencial  $dq$  situada en  $\vec{r}'$ :

$$\boxed{d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

**P.1** La carga situada en  $y=a$  crea un campo en  $(x, y=0)$  igual a

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + a^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \hat{i} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + a^2} \left( \frac{-a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \hat{j},$$

con  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$ ; notar que el vector  $\vec{r} - \vec{r}'$  que va desde la carga hasta el punto donde queremos calcular el campo eléctrico es igual a  $\vec{r} - \vec{r}' = (x - 0)\hat{i} + (y - a)\hat{j}$  y por tanto el vector unitario en esa dirección es  $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\hat{i} + \frac{-a}{\sqrt{x^2 + a^2}}\hat{j}$ . La componente vertical del campo eléctrico anterior es compensada por la componente vertical del campo creado por la carga situada en  $y=-a$  (para verlo, basta con sustituir en la ecuación anterior  $a$  por  $-a$ ). El campo eléctrico resultante es entonces

$$\vec{E}_{\text{total}} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}. \quad (1)$$

Para  $x \approx 0$  se cumple  $\sqrt{x^2 + a^2} \approx \sqrt{a^2} = a$  y entonces  $E_{\text{total}} \approx 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{a^3}$ . Para  $x \gg a$  podemos escribir  $\sqrt{x^2 + a^2} \approx x$  y el campo resultante es entonces

$$\vec{E}_{\text{total}} \approx 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \hat{i}, \quad (2)$$

que es el campo creado por una única carga puntual de  $2q$  situada en el eje horizontal: esto es debido a que a grandes distancias comparadas con la distancia  $2a$  que separa las dos cargas, el efecto es como si estas dos cargas se “vieran” juntas.

**P.2** Por el mismo motivo que en el problema anterior, la dos cargas  $Q$  colocadas en la vertical del punto donde queremos calcular el campo (donde está situada la carga  $q$ ) compensan entre sí el campo eléctrico que crean en el centro del círculo. La dos cargas siguientes crean un campo que viene dado por la ecuación (1) para  $x = \frac{R}{\sqrt{2}} = a$ ; y la carga que está sobre el eje horizontal crea un campo también dado por (1) con  $x=R$  y  $a=0$ . El campo resultante en el centro del círculo es entonces

$$\vec{E}_{\text{total}} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{2} R^2} \hat{i} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(1 + \sqrt{2})}{R^2} \hat{i}, \quad (3)$$

y la fuerza a la que está sometida la carga  $q$  puesta en ese punto es  $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{total}}$ .

**P.3** Midamos el ángulo  $\alpha$  a partir del eje vertical. Un elemento diferencial de arco situado a un ángulo  $\alpha$  de la vertical crea un campo en el origen de coordenadas

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} (-\sin\alpha \hat{i} - \cos\alpha \hat{j}), \quad (4)$$

con  $dq = \lambda R d\alpha$  ya que  $R d\alpha$  es la longitud del elemento diferencial de arco. El campo creado por el arco completo en su centro es entonces

$$\vec{E} = \int_{\alpha=-\theta}^{\alpha=\theta} d\vec{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{R} \hat{j}, \quad (5)$$

ya que la componente horizontal del campo resultante es cero por simetría, algo que se puede comprobar directamente al hacer la integral  $\int_{\alpha=-\theta}^{\alpha=\theta} \sin\alpha d\alpha = 0$ .

**P.4** Un elemento diferencial  $dx$  situado a una distancia  $x$  del origen de coordenadas crea en este último punto un campo  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2} (-\hat{i})$  ya que la carga que tiene dicho elemento diferencial es  $dq = \lambda dx$ . El campo resultante de sumar toda la distribución continua de carga es

$$\vec{E} = -\hat{i} \int_{x=d}^{x=l+d} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0(x-d)}{d} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{d} \left( \ln\left(\frac{l+d}{d}\right) - \frac{l}{l+d} \right) \hat{i}. \quad (6)$$

**P.5** En el vértice inferior izquierdo el campo creado por cada una de las cargas (sin contar la carga que está situada en dicho punto) es

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{L^2} (-\hat{i} + 0\hat{j})}_{+q \text{ infer. dcha.}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{(\sqrt{2}L)^2} \left( -\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{j}}{\sqrt{2}} \right)}_{-q \text{ sup. dcha.}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{L^2} (0\hat{i} - \hat{j})}_{+q \text{ sup. izq.}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L^2} \left( -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) (\hat{i} + \hat{j}), \end{aligned} \quad (7)$$

y por tanto la fuerza que siente una carga  $-q$  situada en dicho punto es  $\vec{F} = (-q)\vec{E}_1$ .

Para el segundo caso, el campo eléctrico creado por las cuatro cargas es

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 = & \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \hat{j}}_{-q \text{ infer. izq.}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} \left(-\frac{2\hat{i}}{\sqrt{5}} + \frac{\hat{j}}{\sqrt{5}}\right)}_{+q \text{ infer. dcha.}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+q)}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} (-\hat{j})}_{+q \text{ sup. izq.}} + \\ & \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} \left(-\frac{2\hat{i}}{\sqrt{5}} - \frac{\hat{j}}{\sqrt{5}}\right)}_{-q \text{ sup. dcha.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L^2} \left(-8 + \frac{8}{5\sqrt{5}}\right) \hat{j}.\end{aligned}\quad (8)$$

Notar que el vector que va, por ejemplo, de la carga inferior derecha al punto medio del tramo vertical izquierdo es  $\vec{r} = -L\hat{i} + \frac{L}{2}\hat{j}$  y por tanto el vector unitario en tal dirección es  $-\frac{2\hat{i}}{\sqrt{5}} + \frac{\hat{j}}{\sqrt{5}}$ .

**P.6** El campo eléctrico  $\vec{E} = E_0\hat{j}$  con  $E_0 = 3.5 \times 10^3 \text{ N/C}$  indica que la placa superior del condensador plano está cargada negativamente y por tanto va a repeler al electrón. Dentro del condensador la fuerza que actúa sobre el electrón es  $\vec{F} = (-e)\vec{E}$ , donde  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  es la carga del electrón, y por tanto estará sometido a una aceleración

$$\begin{cases} \vec{a}_y = \frac{(-e)E_0}{m_e} \hat{j} & a_y = \frac{(-e)E_0}{m_e}, \\ \vec{a}_x = 0 \hat{i} & a_x = 0, \end{cases}$$

con  $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . En la anterior ecuación se ha despreciado la fuerza gravitatoria sobre el electrón ya que su masa es muy pequeña. Puesto que por definición la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, la velocidad se obtiene a partir de la aceleración integrando con respecto al tiempo

$$\begin{cases} v_y = v_{0,y} + \frac{(-e)E_0}{m_e} t, \\ v_x = v_{0,x}, \end{cases}$$

donde  $v_{0,y} = v_0 \sin \theta$  y  $v_{0,x} = v_0 \cos \theta$  con  $v_0 = 5 \times 10^6 \text{ m/s}$  y  $\theta = \pi/4 \equiv 45^\circ$ . Y la posición se obtiene integrando una vez más con respecto al tiempo

$$\begin{cases} y = v_{0,y}t + \frac{(-e)E_0}{2m_e}t^2, \\ x = v_{0,x}t, \end{cases}$$

en la que despejando el tiempo obtenemos un tiro parabólico de ecuación

$$y = \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} x - \frac{eE_0}{2m_e v_{0,x}^2} x^2. \quad (9)$$

Para que el electrón llegue a la placa superior se tiene que cumplir que  $y=h=2 \text{ cm}$  sea solución de la ecuación (9): puesto que la solución de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  es

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , el que exista solución depende de si lo que hay dentro de la integral es mayor que cero, ya que la raíz cuadrada de un número negativo es un número imaginario. En nuestro caso, es necesario que

$$\left(\frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}\right)^2 \geq 4h \frac{eE_0}{2m_e v_{0,x}^2} \iff v_0^2 \sin^2 \theta \geq 2h \frac{eE_0}{m_e}. \quad (10)$$

Y como  $v_0^2 \sin^2 \theta = 1.25 \times 10^{11} \text{m}^2/\text{s}^2$  pero  $2h \frac{eE_0}{m_e} = 2.46 \times 10^{11} \text{m}^2/\text{s}^2$ , no llega a la placa superior.

*\*Suplemento.* Otra manera de obtener el mismo resultado es partiendo de que si el electrón no parte con energía cinética suficiente, no llegará a alcanzar la placa superior: de acuerdo con la conservación de la energía mecánica, lo que varía la energía cinética del electrón es igual a menos lo que varía la energía potencial

$$\Delta E_{\text{cin}} = \frac{m_e}{2} v_f^2 - \frac{m_e}{2} v_0^2 = -\Delta U_{\text{pot}} = (-e)\Delta V,$$

donde  $\Delta V$  es la diferencia de potencial entre las placas del condensador, que en el caso de un condensador plano es igual al campo eléctrico multiplicado por la distancia entre las placas,  $\Delta V = hE_0 = 3.5 \times 10^3 \text{V/m} \times 0.02 \text{m} = 70 \text{V}$ . La condición mínima para que el electrón justo llegue a la placa superior es que su velocidad final sólo tenga componente horizontal (acordarse de que como no hay ninguna fuerza en el eje horizontal, la velocidad en este eje no puede disminuir):  $v_f = v_0 \cos \theta$  con lo que la velocidad mínima con la que tiene que partir el electrón para alcanzar la placa superior es

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{2} (v_0)_{\min}^2 \cos^2 \theta - \frac{m_e}{2} (v_0)_{\min}^2 &= -ehE - 0, \\ (v_0)_{\min}^2 \sin^2 \theta &= \frac{2heE_0}{m_e}, \end{aligned} \quad (11)$$

que es el mismo resultado que (10).

El electrón no alcanza la placa superior y choca contra la placa de la que partió a una distancia  $x$  que viene dada por la ecuación (9) para  $y=0$ :  $x=0.04 \text{m}$ .

**P.7** El campo creado por un elemento diferencial  $\lambda d\theta$  de carga en un punto a una altura  $x$  del eje viene dado  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\theta}{a^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \hat{i} + d\vec{E}_{\perp}$ , donde  $\lambda$  es la densidad lineal de carga  $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$ ;  $d\vec{E}_{\perp}$  es la componente del campo eléctrico perpendicular al eje  $X$  y que al sumar todos los elementos diferenciales de arco se van a compensar unos con otros, quedando así

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a 2\pi}{a^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i}, \quad (12)$$

y para  $x \ll a$

$$\vec{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} x \hat{i}. \quad (13)$$

La fuerza que actúa sobre un electrón situado en la posición en la que acabamos de calcular el campo eléctrico es

$$\vec{F} = (-e)\vec{E} \approx -\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 a^3} x \hat{i},$$

que tiene que ser igual, de acuerdo con la segunda Ley de Newton, a la masa del electrón por su aceleración

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eQ}{a^3} x \hat{i} = m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i},$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eQ}{m_e a^3} \right) x = 0. \quad (14)$$

Esta última ecuación es la de un movimiento armónico  $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$  con frecuencia natural  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eQ}{m_e a^3}}$ ; la frecuencia  $f$  viene definida por  $\omega_0/2\pi$ .

**P.8** La fuerza de repulsión entre las dos cargas,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2}$ , lleva dirección horizontal y en la posición de equilibrio tiene que ser compensada por la componente horizontal de la tensión,  $T \sin \theta$ . Por otro lado, la componente vertical de la tensión,  $T \cos \theta$ , equilibra el peso de cada bola, y por lo tanto

$$\frac{T_x}{T_y} = \tan \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2 mg}, \quad (15)$$

de donde se despeja  $q$ .

**P.9** Teniendo en cuenta que la tensión viene dada por  $\vec{T} = -T \sin \theta \hat{i} + T \cos \theta \hat{j}$ , el peso por  $\vec{P} = -mg \hat{j}$ , y la fuerza debida al campo eléctrico constante

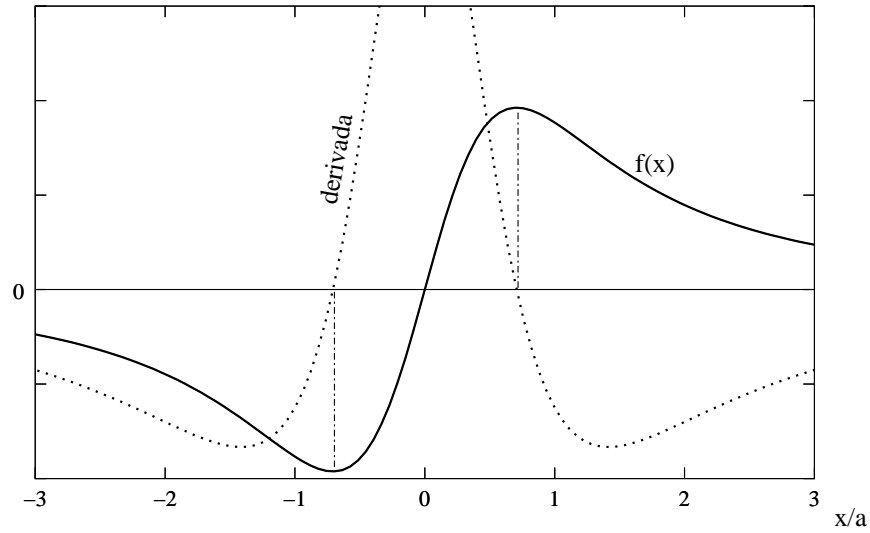
$$\vec{F} = q\vec{E} = 3 \times 10^5 q \hat{i} + 5 \times 10^5 q \hat{j},$$

el valor de  $T$  y  $q$  en la posición de equilibrio se obtiene directamente de la condición que la suma de las tres fuerzas es cero:

$$\begin{cases} -T \sin \theta + 3 \times 10^5 q = 0, \\ T \cos \theta + 5 \times 10^5 q - mg = 0, \end{cases} \quad (16)$$

con  $m = 10^{-3}$  kg y  $\theta = 37^\circ$ .

**P.12** El campo eléctrico creado por el anillo en puntos a lo largo del eje que pasa por su centro ya ha sido calculado en (12):  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i}$ , con  $Q$  la carga del anillo. La función  $f(x) = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$ , representada en trazo continuo en la siguiente figura, presenta un extremo (máximo o mínimo) en aquellos valores de  $x$  para los que



la derivada (representada en trazo discontinuo)  $\frac{df}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{(a^2 + x^2)^{5/2}}$  sea cero, es decir, cuando  $a^2 - 2x^2 = 0$ . Así se obtiene

$$\begin{cases} \vec{E}(x = a/\sqrt{2}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{2}{3\sqrt{3}} \hat{i}, \\ \vec{E}(x = -a/\sqrt{2}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{2}{3\sqrt{3}} \hat{i}. \end{cases} \quad (17)$$

## 2 Problemas de aplicación de la Ley de Gauss: 10-11, 13-16

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{dentro de } S}}{\epsilon_0} \quad \text{con } d\vec{S}: \text{ vector elem. diferencial de superf.}$$

**P.10** En los problemas en los que se quiera utilizar la Ley de Gauss, lo primero es estudiar qué simetría tiene el campo eléctrico  $\vec{E}$ : esférica (si radialmente sale de, o apunta hacia, un único punto), cilíndrica, ... A continuación se aplica la Ley de Gauss eligiendo con “ojo” como superficie de integración  $S$  una superficie cerrada que tenga una simetría lo más parecida a la del campo eléctrico: así  $\vec{E}$  tendrá la misma dirección que el vector  $d\vec{S}$ ,  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ , y además  $\vec{E}$  tendrá el mismo valor en todos los puntos de dicha superficie con lo que  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS$ . Notar que no siempre se va a poder escoger una superficie *cerrada* que cumpla esta propiedad para *todos* sus puntos. Sin embargo, si el campo eléctrico tiene la suficiente simetría, sí que se va a poder elegir una superficie cerrada tal que la propiedad de arriba se cumpla para muchos de sus puntos, mientras que para el *resto* de los puntos de la superficie sobre la que integramos se obtenga que  $\vec{E} \perp d\vec{S}$  y estos últimos puntos no den ninguna contribución a  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ . Ver por ejemplo el problema 11 y el problema 13.

En nuestro caso, puesto que la distribución de carga es uniforme, la dirección del campo eléctrico es radial y por lo tanto la superficie más útil para aplicar sobre ella el teorema de Gauss es una esfera

$$\oint_{S=\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2,$$

con  $r$  el radio de la esfera. Lo único que queda por resolver es la carga que queda dentro de la superficie cerrada sobre la que hemos integrado:

- Si la esfera sobre la que estamos integrando tiene un radio menor que  $R_1$ , no contiene nada de carga.
- Si la esfera de radio  $r$  contiene la corteza interior pero no llega a la corteza exterior,  $R_1 < r < R_2$ , entonces dentro de la superficie cerrada de integración hay una carga  $q_1$ .
- Si la superficie  $S$  cerrada contiene a las dos cortezas,  $r > R_2$ , entonces la carga en su interior es  $q_1 + q_2$ .

$$E_r = \begin{cases} 0 & r < R_1, \\ \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q_1}{\varepsilon_0} & R_1 \leq r < R_2, \\ \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} & r \geq R_2. \end{cases} \quad (18)$$

**P.11** De forma similar al problema anterior, la distribución uniforme de carga hace que  $\vec{E}$  lleve dirección radial y perpendicular al eje del cilindro: *a)*  $\vec{E}$  vale lo mismo en módulo para todos los puntos que estén a la misma distancia del eje del cilindro, y *b)* por tratarse de un cilindro de longitud infinita,  $\vec{E}$  no tiene componente paralela al eje del cilindro. Una manera de ver esta última propiedad es darse cuenta que puesto que el cilindro es infinito y su carga está distribuida uniformemente, tenemos tanta carga a lo largo del eje a la izquierda de un punto cualquiera como a su derecha; y por lo tanto, la componente longitudinal a lo largo del eje creada por la parte izquierda se compensa con la creada por la parte derecha. Otra manera es a través de un argumento que se discutirá en el siguiente problema.

La superficie cerrada de integración es en este caso un cilindro de radio  $r$ , concéntrico con el cilindro cargado, longitud  $L$  y cerrado por dos tapas perpendiculares al eje del cilindro. Ya que la dirección de  $\vec{E}$ , al ser radial, es perpendicular al vector  $d\vec{S}$  de las dos tapas, entonces

$$\begin{aligned} \oint_{S=\text{cilindro con tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{S=\text{tapas}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0} + \underbrace{\int_{S=\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=E_r \int_{S=\text{lateral}} dS} = E_r 2\pi r L. \end{aligned}$$

Como en el problema anterior, para terminar de aplicar la Ley de Gauss sólo queda por calcular la carga que queda dentro de este cilindro cerrado con tapas: para  $r < R_1$  no hay carga dentro ya que la superficie cargada más cercana está fuera; para  $R_1 < r < R_2$ , una

parte de longitud lateral  $L$  de la superficie cargada interior queda dentro del cilindro con tapas sobre el que estamos integrando, luego  $Q_{\text{dentro de } S} = 2\pi R_1 L \sigma_1$ ; y por último, para  $r > R_2$  la superficie de integración contiene una parte de longitud lateral  $L$  tanto de la superficie cargada interior como de la exterior, luego  $Q_{\text{dentro de } S} = 2\pi R_1 L \sigma_1 + 2\pi R_2 L \sigma_2$ . Recordar que la superficie lateral de un cilindro de radio  $R$  y longitud  $L$  es  $2\pi RL$ . Con todo esto tenemos

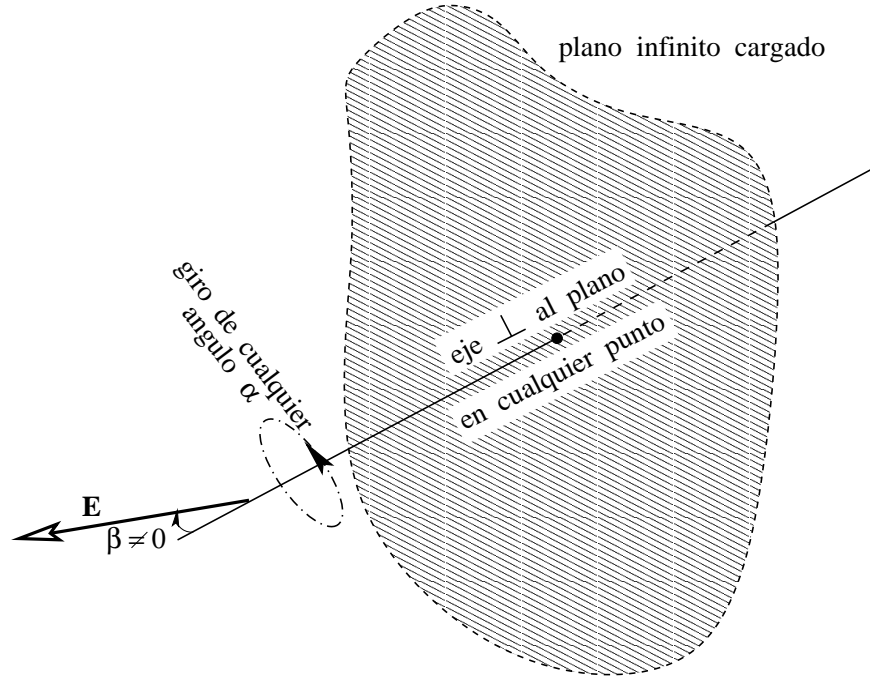
$$E_r = \begin{cases} 0 & r < R_1, \\ \frac{1}{2\pi r L} \frac{2\pi R_1 L \sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon_0 r} & R_1 < r < R_2, \\ \frac{1}{2\pi r L} \frac{2\pi R_1 L \sigma_1 + 2\pi R_2 L \sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2}{\varepsilon_0 r} & r > R_2. \end{cases} \quad (19)$$

Y la relación entre las densidades de carga de las dos superficies para que el campo en el exterior  $r > R_2$  sea cero debe ser

$$\sigma_2 = -\frac{R_1}{R_2} \sigma_1, \quad (20)$$

y como es lógico, de signo opuesto.

**P.13** El campo eléctrico creado por un plano infinito cargado con una densidad superficial de carga  $\sigma$  *uniforme* se puede calcular aplicando la Ley de Gauss. Por simetría, la dirección esta vez de  $\vec{E}$  tiene que ser perpendicular al plano y con sentido hacia afuera del plano si éste está cargado positivamente o con sentido apuntando al plano si la carga es negativa. Esto se deduce del siguiente argumento: el plano por ser infinito tiene



la simetría de que si giramos cualquier ángulo  $\beta$  en torno a un eje que corte *perpendicularmente* al plano en cualquiera de sus puntos, el plano permanece invariante; por



supuesto, esto funciona siempre que la distribución de carga en el plano sea uniforme. Ahora supongamos que la dirección del campo  $\vec{E}$  no es exactamente perpendicular al plano, es decir, forma un ángulo  $\alpha \neq 0$  con un eje que corte perpendicularmente al plano (ver figura). Entonces un giro de cualquier ángulo en torno a tal eje hace que las componentes de  $\vec{E}$  aunque el plano no ha cambiado para nada. Luego  $\vec{E}$  debe ser completamente perpendicular al plano.

Para el caso de un cilindro infinito de densidad de carga uniforme, el argumento funciona de forma similar para un eje cortando en perpendicular al eje del cilindro en cualquiera de sus puntos, esto es, en dirección radial al eje del cilindro. La conclusión es que el vector  $\vec{E}$  lleva la dirección radial al eje del cilindro.

Volviendo al plano infinito, para aplicar la Ley de Gauss lo útil es tomar una superficie cerrada que tenga alguna parte paralela al plano: así el vector diferencial  $d\vec{S}$  de esta parte será paralelo a  $\vec{E}$  y además  $\vec{E}$  será constante en todos los puntos de esta parte de la superficie cerrada. Ejemplo de superficie: un cilindro tapado cuyas dos tapas planas sean paralelas al plano cargado

$$\oint_{S=\text{cilindro tapado}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{S=\text{tapa superior}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{E_{\perp} S_{\text{tapa}}} + \underbrace{\int_{S=\text{tapa inferior}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{E_{\perp} S_{\text{tapa}}} + \int_{S=\text{lateral}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0} = 2E_{\perp} S_{\text{tapa}} ,$$

donde  $S_{\text{tapa}}$  es el área de cada una de las tapas del cilindro.  $E_{\perp}$  denota que el vector del campo eléctrico es normal al plano, y por ello, el área lateral del cilindro no contribuye a la integral de arriba ya que para el  $d\vec{S}$  para el lateral es paralelo al plano y por tanto perpendicular a  $\vec{E}$ . Ya sólo queda calcular la carga que hay dentro del cilindro tapado: esta carga sólo puede estar en la parte del plano infinito cargado que “corta” el cilindro, y la carga que contiene esta parte del plano infinito es  $Q_{\text{dentro}} = \sigma S_{\text{tapa}}$ . De acuerdo con la Ley de Gauss obtenemos entonces

$$2E_{\perp} S_{\text{tapa}} = \frac{Q_{\text{dentro}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{tapa}}}{\varepsilon_0} \implies E_{\perp} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} . \quad (21)$$

Es importante notar que este campo *no* disminuye con la distancia al plano, a diferencia del campo creado por un hilo infinito cargado o el campo creado por una carga puntual.

*\*Suplemento.* Otra forma de obtener (21) es la siguiente: de acuerdo con el resultado (12), el campo creado por un anillo de radio  $a$  a una distancia  $x$  sobre el eje perpendicular al centro del anillo es igual a  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$  donde  $Q$  es la carga que porta el anillo; la dirección de este campo es perpendicular al plano del anillo. Consideremos que el anillo tiene un grosor infinitesimal  $da$  y por tanto un área  $2\pi a da$ : un plano infinito lo podemos construir sumando estos anillos cuyo radio varíe de  $a = 0$  hasta  $a = \infty$ . La carga que lleva cada anillo es  $Q = \sigma 2\pi a da$  y el campo creado entonces por un plano infinito es

$$E = \int_{a=0}^{a=\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \sigma 2\pi a da = \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0} \int_{a=0}^{a=\infty} \frac{da}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} , \quad (22)$$

que es el resultado buscado; notar que  $\int \frac{da}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ .

En el problema, los dos campos creados por los planos verticales son

$$\vec{E}_a = \begin{cases} \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0} \hat{i} & x > -2 \text{ m} \\ -\frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0} \hat{i} & x < -2 \text{ m}, \end{cases}$$

$$\vec{E}_b = \begin{cases} \frac{\sigma_b}{2\varepsilon_0} \hat{i} & x > 2 \text{ m}, \\ -\frac{\sigma_b}{2\varepsilon_0} \hat{i} & x < 2 \text{ m}, \end{cases}$$

con  $\sigma_a = -3.5 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$  y  $\sigma_b = 6 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . Calcular el campo resultante se hace ahora directamente

$$\vec{E}_a + \vec{E}_b = \begin{cases} -\frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\varepsilon_0} \hat{i} & x < -2 \text{ m} \\ \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2\varepsilon_0} \hat{i} & -2 \text{ m} < x < 2 \text{ m} \\ \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\varepsilon_0} \hat{i} & x > 2 \text{ m} \end{cases} \quad (23)$$

**P.14** La carga que hay dentro de una esfera de radio  $r$  es

$$Q_{\text{dentro}} = \int_{R=0}^{R=r} \rho 4\pi R^2 dR \stackrel{\rho=\text{const}}{=} \rho \int_{R=0}^{R=r} 4\pi R^2 dR = \begin{cases} 0 & r < a, \\ \rho \frac{4\pi}{3} (r^3 - a^3) & a \leq r \leq b, \\ \rho \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3) & r \geq b, \end{cases}$$

teniendo en cuenta que el volumen de una corteza esférica de radio  $R$  y grosor infinitesimal  $dR$  es igual a  $4\pi R^2 dR$ . Puesto que la densidad de carga sólo depende de la distancia radial, la simetría del campo eléctrico es igual a la del problema 10: el campo es radial. Por lo tanto, tomando como superficie cerrada de integración una esfera de radio  $r$ , se cumple que  $\oint_{S=\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2$  y la Ley de Gauss aplicada a este caso nos da:

$$E_r = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q_{\text{dentro}}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 0 & r < a, \\ \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} & a \leq r \leq b, \\ \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} & r \geq b, \end{cases} \quad (24)$$

sustituyendo el valor de la carga que queda dentro de la superficie de radio  $r$  sobre la que estamos integrando. El resultado anterior también se puede escribir en función de la carga total  $Q_{\text{total}} = \int_{R=0}^{R=\infty} \rho 4\pi R^2 dR = \rho \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3)$

$$E_r = \begin{cases} 0 & r < a, \\ \frac{Q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \left( \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} \right) & a \leq r \leq b, \\ \frac{Q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} & r \geq b, \end{cases} \quad (25)$$

en vez de en función de la densidad de carga.

**P.15** Se sigue aplicando que la simetría de  $\vec{E}$  es radial y por tanto al integrar sobre una superficie esférica de radio  $r$  se obtiene

$$\oint_{S=\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{dentro de } S}}{\varepsilon_0}.$$

Puesto que la densidad volumétrica de carga sólo depende de la distancia radial (pero no de ningún ángulo), la carga que queda dentro de la esfera de radio  $r$  es

$$Q_{\text{dentro}} = \int_{r'=0}^{r'=r} \rho 4\pi r'^2 dr' = \begin{cases} A \int_{r'=0}^{r'=r} r' 4\pi r'^2 dr' = A\pi r^4 & r < R \\ A \int_{r'=0}^{r'=R} r' 4\pi r'^2 dr' + 0 \int_{r'=R}^{r'=r} 4\pi r'^2 dr' = A\pi R^4 & r \geq R \end{cases}$$

de donde se obtiene el módulo del campo eléctrico

$$E_r = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q_{\text{dentro}}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0} & r < R, \\ \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2} & r \geq R. \end{cases} \quad (26)$$

O expresado en función de la carga total  $Q_{\text{total}} = \int_{R=0}^{R=\infty} \rho 4\pi R^2 dR = A\pi R^4$

$$E_r = \begin{cases} \frac{Q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^4} & r < R, \\ \frac{Q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} & r \geq R. \end{cases} \quad (27)$$

El potencial en un punto a una distancia  $r$  viene definido por  $V(\vec{r}) = - \int_{r'=\infty}^{r'=r} \vec{E}(r') \cdot d\vec{r}'$  (ver ecuación (32)) y así para fuera de la esfera,  $r \geq R$ , tenemos

$$V(r) = - \int_{r'=\infty}^{r'=r} E_r(r') dr' = - \int_{r'=\infty}^{r'=r} \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r'^2} dr' = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r} = \frac{Q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (28)$$

Y para dentro de la esfera, o  $r < R$ ,

$$V(r) = - \int_{r'=\infty}^{r'=R} \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r'^2} dr' - \int_{r'=R}^{r'=r} \frac{Ar'^2}{4\varepsilon_0} dr' = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} + \frac{A(R^3 - r^3)}{12\varepsilon_0}, \quad (29)$$

o bien

$$V(r) = \frac{Q_{\text{total}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left( \frac{4}{3} - \frac{r^3}{3R^3} \right) \quad r < R. \quad (30)$$

**P.16** La línea cargada está fuera de la esfera: el campo eléctrico creado por la esfera de carga uniforme fuera se calcula por la Ley de Gauss integrando sobre una esfera cerrada de radio  $r > R$  que contiene completamente toda la carga de la esfera cargada

$$\oint_{S=\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{dentro de } S}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Por lo tanto, la fuerza que siente un elemento de longitud  $dr$  de la línea cargada es  $dF = E_r dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \lambda dr$  donde  $\lambda$  es la densidad lineal de carga de la línea. Así

$$F = \int_{r=R}^{r=R+d} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \lambda dr = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right). \quad (31)$$

### 3 Problemas de diferencia de potencial: 17-24

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_{\text{posición A}}^{\text{posición B}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Antes de empezar con los problemas de esta sección, consideremos una carga puntual  $q$  situada en el origen de coordenadas y calculemos el potencial creado por tal carga en un punto  $P$  situado a una distancia  $R$  de la carga. El campo eléctrico creado por esta carga a una distancia  $r$  cualquiera es  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ . La diferencia de potencial entre un punto alejado infinitamente (al que se le asigna un potencial igual a cero) y el punto que estamos considerando es la siguiente integral a través de un camino en dirección radial desde el punto  $P$  hasta el infinito

$$\begin{aligned} V_\infty - V_P &\equiv 0 - V_P = - \int_{\text{posición P}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\text{posición P}} \overbrace{\vec{E} \cdot d\vec{r}}^{E dr}, \\ V_P &= - \int_{\infty}^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \end{aligned} \quad (32)$$

De la misma forma, el potencial creado por una carga  $q$  situada en  $\vec{r}'$  en un punto situado en  $\vec{r}$  es igual a  $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ .

**P.17** Empecemos con la carga  $q_1$ , que a una distancia  $r$  crea un potencial (=energía potencial por unidad de carga) igual a  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$ : el traer una carga  $q_2$  desde el infinito hasta una distancia  $r_{12}$  de la carga  $q_1$  hace que el sistema adquiera una energía potencial de  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ . Si traemos ahora otra carga  $q_3$  desde el infinito hasta un punto que está a una distancia  $r_{13}$  de la carga  $q_1$  y a una distancia  $r_{23}$  de la carga  $q_2$ , el aumento en energía potencial será  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$ . Por tanto lo que ha ganado en energía potencial el sistema durante este proceso es

$$U_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad (33)$$

con  $r_{ij} = r_{ji}$ . En este problema,  $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$  m.

**P.18** Dividamos el disco en anillos concéntricos de radio  $r$  y grosor  $dr$ : si el punto  $P$  donde queremos calcular el potencial está a una distancia  $x$  sobre el eje del disco, cada

elemento de tal anillo de radio  $r$  está a una distancia  $\sqrt{r^2 + x^2}$  del punto  $P$  y por tanto el potencial creado por el anillo en  $P$  es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}}, \quad (34)$$

donde  $dq = \sigma 2\pi r dr$  es la carga que tiene tal anillo de radio  $r$  y grosor  $dr$ ;  $\sigma$  es la densidad superficial de carga que es igual a la constante  $\sigma = 7.5 \times 10^{-9} \text{ nC/m}^2$ . El potencial creado por todo el disco será la suma(=integral) de las contribuciones de todos los anillos con radio desde  $r=0$  hasta  $r=R$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{r^2 + x^2} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2 + x^2} - x \right), \quad (35)$$

donde  $R=6.25 \text{ cm}$  es el radio del disco.

**P.19** Puesto que el potencial a una distancia  $a=2.5 \text{ m}$  se toma como cero, lo que nos están pidiendo en el problema es la diferencia de potencial entre un punto cualquiera y un punto situado a  $a$  de la línea cargada. Consideraremos que el punto  $P$  donde queremos calcular tal diferencia de potencial está situado sobre el plano  $XY$  a una distancia  $r$  en perpendicular a la línea infinita de carga. Consideremos un elemento diferencial de longitud  $dz$  de esta línea, elemento situado a una distancia  $z$  del origen de coordenadas y por lo tanto alejado una distancia  $\sqrt{z^2 + r^2}$  del punto  $P$ : la diferencia de potencial creada por tal elemento  $dz$  es  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{\sqrt{z^2 + a^2}}$  ya que la carga que lleva  $dz$  es  $\lambda dz$  con  $\lambda = 1.5 \times 10^{-6} \text{ C/m}$  la densidad lineal de carga, que es constante. La diferencia de potencial que piden en el problema es por tanto

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=-\infty}^{z=\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) dz = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=0}^{z=\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) dz = \\ & = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln(z + \sqrt{z^2 + r^2}) \right]_{z=0}^{z=\infty} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln(z + \sqrt{z^2 + a^2}) \right]_{z=0}^{z=\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Otra forma de obtener el mismo resultado es la siguiente. Primero calculamos el campo creado por la línea infinita cargada y para ello utilizamos la Ley de Gauss: por la simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico va en dirección radial perpendicular a la línea; y la superficie sobre la que vamos a integrar  $\vec{E}$  es un cilindro de longitud finita  $L$  con su eje coincidiendo con la línea cargada, igual que en el problema 11. Puesto que la carga contenido dentro de este cilindro sólo está sobre su eje y vale  $\lambda L$ , la Ley de Gauss nos da

$$\oint_{S=\text{cilindro con tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (37)$$

Aplicando ahora la definición de diferencia de potencial entre un punto alejado  $r$  y otro punto alejado  $a$  de la línea cargada, se obtiene

$$V(r) - V(a) = - \int_{r'=a}^{r'=r} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr'}{r'} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right), \quad (38)$$

como en (36).

**P.20** Sea un elemento diferencial  $dx'$  situado a una distancia  $x'$  del origen, portador de una carga  $\lambda dx'$  con  $\lambda = Q/L$  la densidad lineal de carga. Tal elemento crea un potencial  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q/L}{x - x'}$  en un punto situado a una distancia  $x$  del origen, fuera de la barra, y por tanto separado una distancia  $x - x'$  del elemento diferencial  $dx'$ . Así el potencial en  $x$  debido a toda la barra será la suma(=integral) de las contribuciones de cada elemento diferencial

$$V_{\text{en } x} = \int_{x'=-L/2}^{x'=L/2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \frac{dx'}{x - x'} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{x - L/2}{x + L/2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{1 + \frac{L}{2x}}{1 - \frac{L}{2x}}\right). \quad (39)$$

Para  $x \gg L/2$ , y por tanto  $L/2x \ll 1$ , se puede utilizar la siguiente aproximación:  $\ln(1 \pm z) \approx \pm z$  para  $z \ll 1$ . Aplicando esto al resultado anterior

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left[ \ln\left(1 + \frac{L}{2x}\right) - \ln\left(1 - \frac{L}{2x}\right) \right] \stackrel{x \gg L/2}{\approx} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left[ \frac{L}{2x} - \left(-\frac{L}{2x}\right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x}, \quad (40)$$

que es el potencial creado a una distancia  $x$  por una carga puntual  $Q$  situada en el origen de coordenadas.

**P.21** En (34) ya se ha calculado el potencial creado por un anillo de carga uniforme  $q$  (con  $q = 2 \times 10^{-9}$  C) y radio  $r$  (con  $r=0.1$  m) a una distancia  $x$  sobre el eje

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + x^2}}, \quad (41)$$

obtenido dándose cuenta que todos los puntos del anillo cargado están a la misma distancia,  $\sqrt{r^2 + x^2}$ , del punto donde queremos calcular el potencial. El trabajo que hace el *campo eléctrico* para mover una carga  $q' = 1 \times 10^{-9}$  C desde la posición  $x \neq 0$  hasta el origen es igual a *menos* la variación de la energía potencial (este menos es el mismo que aparece en la definición de la diferencia de potencial):

$$W_{\text{por campo}} = -\Delta U_{\text{pot}} = -q' \Delta V = -q' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right). \quad (42)$$

Si hubiéramos querido calcular el trabajo hecho *por nosotros* para mover la carga  $q'$  hasta el origen, el resultado sería (42) pero con el signo opuesto. Recordar que  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

**P.22** Puesto que el campo electrostático es conservativo y ya que las cargas no tienen velocidad inicial, la energía potencial que tiene cada una de las cargas inicialmente sobre el cuadrado es igual a la energía cinética final con la que llegan al infinito (en el infinito la energía potencial es cero). Para la primera carga que sale tenemos que inicialmente está bajo la acción del potencial de las otras tres cargas (ver problema 17), luego

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q^2}{L} + \frac{Q^2}{\sqrt{2}L} + \frac{Q^2}{L} \right) = E_{\text{cin final}, 1}. \quad (43)$$

De la misma forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q^2}{L} + \frac{Q^2}{\sqrt{2}L} \right) &= E_{\text{cin final}, 2} , \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{L} &= E_{\text{cin final}, 3} , \\ 0 &= E_{\text{cin final}, 4} . \end{aligned} \quad (44)$$

**P.23** Este problema se resuelve siguiendo los mismos pasos que en el problema 15. Por la simetría radial del problema,  $\vec{E}$  lleva dirección radial y la Ley de Gauss la aplicaremos a una esfera de radio  $r$ , concéntrica con la bola cargada

$$\oint_{S=\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{dentro de } S}}{\epsilon_0} .$$

Como la densidad volumétrica de carga es igual a  $\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}$  y es constante, entonces

$$Q_{\text{dentro}} = \int_{r'=0}^{r'=r} \rho 4\pi r'^2 dr' = \begin{cases} Q \frac{r^3}{R^3} & r < R \\ Q & r \geq R \end{cases}$$

y por tanto

$$E_r = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r & r < R , \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & r \geq R . \end{cases} \quad (45)$$

El potencial en un punto a una distancia  $r \geq R$  viene dado por

$$V(r) = - \int_{r'=\infty}^{r'=r} E_r(r') dr' = - \int_{r'=\infty}^{r'=r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} , \quad (46)$$

y para  $r < R$ , es decir, dentro de la bola cargada

$$V(r) = - \int_{r'=\infty}^{r'=R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'^2} dr' - \int_{r'=R}^{r'=r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r' dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} - \frac{Q(r^2 - R^2)}{4\pi\epsilon_0 R^3} , \quad (47)$$

que es continuo en  $r=R$ .

**P.24** Este problema es similar al problema 15, con la sustitución  $A \leftrightarrow \rho_0/R$ .

## 4 Problemas de aplicación de la Ley de Biot-Savart: 25-29

Campo magnético  $d\vec{B}$  creado en el punto  $\vec{r}$  por un elemento diferencial de circuito  $I d\vec{l}$  situado en  $\vec{r}'$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Una integral útil:  $\int \frac{dx}{(x^2 + m^2)^{3/2}} = \frac{x}{m^2 \sqrt{x^2 + m^2}}$ , con  $m^2$  una constante.

**P.25** El conductor en forma de cigüeñal tiene una longitud  $a=1$  cm en el tramo corto vertical y una longitud  $2b=2$  cm en el tramo corto horizontal. Por el conductor circula una corriente  $I=8$  A. El tramo más largo que está alineado con el punto  $P$  donde queremos calcular el campo magnético no produce ninguna contribución al campo en  $P$  debido al producto vectorial en la definición de  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ : el elemento diferencial de longitud  $d\vec{l}$  de este tramo más largo es paralelo al vector de posición  $\vec{r} - \vec{r}'$  que va desde  $d\vec{l}$  hasta el punto  $P$ .

El campo  $\vec{B}$  en  $P$  va hacia dentro de la página y es la suma de las contribuciones de cada uno de los tramos cortos. El tramo vertical produce un campo en  $P$  igual a  $B_{\text{tramo vertical}} = \int_{y=0}^{y=a} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I b dy}{(y^2 + b^2)^{3/2}}$ . Y el horizontal  $B_{\text{tramo horizontal}} = \int_{x=-b}^{x=b} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I a dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$ . La suma de las contribuciones de los tramos cortos es por tanto

$$B_{\text{en } P} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right), \quad (48)$$

que es también el campo creado en  $P$  por todo el conductor.

**P.26** El tramo circular tiene un radio  $R=20$  cm y por todo el conductor circula una corriente  $I=15$  A. Este problema es más sencillo que el anterior ya que cada elemento diferencial de longitud en el tramo circular es perpendicular al vector de posición  $\vec{r}$  que va desde ese elemento a  $P$ . Como en el problema anterior, el tramo largo alineado con  $P$  no produce ningún campo en  $P$ . Éste es igual a

$$B_{\text{en } P} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4R}, \quad (49)$$

y va hacia dentro de la página.

**P.27** Supongamos que la corriente circula por el arco exterior en sentido antihorario. El campo creado por el arco exterior en  $P$  va hacia fuera mientras que el creado por el arco interior. Puesto que los dos tramos cortos horizontales alineados con  $P$  no producen nada de campo magnético en  $P$ , y ya que los radios de cada uno de los arcos es conocido, aplicando el resultado (49) del problema anterior obtenemos

$$B_{\text{en } P} = -\frac{\mu_0 I}{4R_1} + \frac{\mu_0 I}{4R_2}, \quad (50)$$

siendo la dirección del campo magnético en  $P$  hacia dentro de la página.



**P.28** La espira circular tiene un radio  $R=10\text{cm}$  y el campo creado por ella en su centro  $P$  tiene un módulo

$$B_{\text{espira}} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

y una dirección hacia dentro de la página. El conductor infinito horizontal también crea un campo en  $P$  ya que esta vez  $P$  no está sobre la línea del conductor como en los tres casos anteriores. El campo creado por el conductor horizontal en  $P$  es

$$B_{\text{tramo horizontal infinito}} = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

y va en dirección hacia fuera de la página. La fórmula anterior también se puede obtener aplicando la Ley de Ampere. El campo total creado en  $P$  por todo el conductor viene dado por

$$B_{\text{en } P} = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (51)$$

con dirección hacia dentro de la página. Y por tanto, el valor de  $r$  buscado es  $\frac{R}{\pi}$ .

**P.29** Sólo el tramo horizontal de longitud  $2a$  crea campo magnético en el punto  $P$ , mientras que los dos tramos inclinados no lo hacen ya que  $P$  está sobre cada una de las líneas prolongación de los tramos inclinados. La contribución del tramo horizontal viene dada por

$$B_{\text{tramo horizontal}} = \int_{x=-a}^{x=a} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} (2a),$$

con dirección hacia dentro. Por tanto el campo magnético creado por un polígono cerrado formado por  $N$  lados de longitud  $2a$  cada lado en su centro  $P$  será  $N$  veces el resultado anterior

$$B_{\text{en } P} = \frac{\mu_0 I C}{4\pi R \sqrt{R^2 + a^2}},$$

donde  $C=N2a$  es el perímetro del polígono. Si ahora tomamos el límite  $\begin{cases} N \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0 \end{cases}$  manteniendo el perímetro  $N2a$  finito, o sea, convertimos el polígono en una circunferencia, entonces en el resultado anterior obtendremos

$$B_{\text{en } P} = \frac{\mu_0 I (2\pi R)}{4\pi R \sqrt{R^2}} = \frac{\mu_0 I}{2R}, \quad (52)$$

donde el perímetro del polígono es ahora el perímetro  $2\pi R$  de la circunferencia resultante. El resultado que se obtiene es el campo magnético creado por una espira de radio  $R$  en su centro.

## 5 Problemas de aplicación de la Ley de Ampère: 30-32

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{dentro de } C}$$

**P.30** La simetría del campo magnético en este problema es la siguiente: puesto que para puntos alejados de los extremos podemos considerar al cable como infinito, entonces  $\vec{B}$  se “enrolla” en circunferencias alrededor del cable coaxial, dependiendo su intensidad en un punto  $P$  sólo de la distancia que separa a dicho punto del eje del cable. Esto nos permite utilizar la Ley de Ampère, integrando  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$  a lo largo de una circunferencia  $C$  de radio  $r$  que esté puesta perpendicularmente al cable y con centro en el cable. De esta forma, y por lo dicho para la simetría de  $\vec{B}$  para este problema, podemos escribir

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = B 2\pi r ,$$

y aplicando la Ley de Ampère a este caso

$$B = \frac{1}{2\pi r} \mu_0 I_{\text{dentro de } C} . \quad (53)$$

En el caso en que estemos integrando sobre puntos entre el centro y la corteza, la corriente que queda dentro del círculo  $C$  es la intensidad  $I$  que circula por el cable del centro. Para el caso de que los puntos del camino de integración  $C$  estén fuera del cable, la intensidad que atraviesa el área de  $C$  es cero, ya que tenemos la  $I$  que circula por el cable del centro menos la intensidad  $I$  que circula por la corteza.

**P.31** La simetría del campo magnético  $\vec{B}$  es la misma que en el problema anterior y por tanto podemos seguir utilizando el resultado anterior  $B = \frac{1}{2\pi r} \mu_0 I_{\text{dentro de } C}$ . Para  $r < a$  ningún punto en el interior de  $C$  es atravesado por corriente y por tanto  $I_{\text{dentro de } C} = 0$ . Para  $a < r < b$  la fracción de corriente que atraviesa el interior de  $C$  es igual a  $\frac{\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)}$

y por tanto  $I_{\text{dentro de } C} = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I$ . Y para  $r > b$ , es decir, en el exterior de la corteza, es toda la intensidad  $I$  la que atraviesa  $C$ . Así

$$B = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} & a < r < b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > b \end{cases} \quad (54)$$

es el campo magnético para los tres casos. En todos ellos, el sentido de  $\vec{B}$  es “retorciéndose” en circunferencias alrededor del cable.

**P.32** Es la práctica de laboratorio de medir el campo magnético terrestre. El campo creado por  $N$  espiras de radio  $R$  en su centro es igual a

$$B_{\text{centro espiras}} = N \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 N I}{2R} ,$$

y puesto que está orientado perpendicularmente al campo magnético terrestre entonces

$$\tan \theta = \frac{B_{\text{centro espira}}}{B_{\text{terrestre}}}, \quad (55)$$

de donde se despeja  $I$ .

## 6 Problemas de aplicación de la Fuerza de Lorentz: 33-40

$$\boxed{d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{y} \quad \vec{F} = q_{\text{particula}} \vec{v} \times \vec{B}}$$

**P.33** Tenemos un campo magnético  $\vec{B}$  de módulo constante  $B=3.6 \text{ T}$  y apuntando hacia dentro de la página. Si por el conductor de la figura, que tiene una densidad de masa  $\lambda = 0.04 \text{ kg/m}$ , circula una corriente  $I$  en sentido de izquierda a derecha, la fuerza que está ejerciendo el campo magnético sobre un elemento diferencial de longitud  $d\vec{l}$  del conductor es igual a

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B},$$

que tiene módulo  $IBdl$  y sentido vertical hacia arriba. La fuerza total debida al campo magnético que actúa sobre el conductor es entonces  $IBl$ , con  $l$  la longitud del conductor. Si esta fuerza tiene que equilibrar el peso del conductor para que así no haya tensión en las cuerdas, entonces

$$IBl = \text{Peso} = l\lambda g, \quad (56)$$

de donde se despeja  $I$ .

**P.34** El campo magnético creado por un conductor rectilíneo infinito a una distancia  $r$  en perpendicular al conductor es igual a  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ; esto se calcula por la Ley de Ampère como en los problemas 30 y 31, o bien por aplicación directa de la Ley de Biot-Savart como en el problema 28. La fuerza que está haciendo el conductor infinito a un elemento  $d\vec{l}$  de otro conductor *paralelo* a una distancia  $r=2 \text{ mm}$  es igual a  $dF = BI_2 dl = \frac{\mu_0 I I_2 dl}{2\pi r}$ , donde  $I_2 = I$  es la corriente que circula por este segundo conductor; la dirección de  $d\vec{F}$  es radial. Si este último conductor tiene una longitud  $L=30 \text{ cm}$  entonces la fuerza total ejercida sobre él es

$$F_{\text{hace } I \text{ sobre } I_2} = \frac{\mu_0 I I_2 L}{2\pi r}.$$

Si tal fuerza debe equilibrar el peso  $mg$  del conductor de longitud  $L$ , entonces

$$I = \sqrt{\frac{2\pi r mg}{\mu_0 L}}, \quad (57)$$

con  $m=2.4$  g.

**35** La fuerza ejercida sobre el segmento paralelo al eje  $X$ , que tiene una longitud de  $s_1 = 3$  cm es igual a

$$\vec{F}_{\text{sobre } s_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ Is_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = -Is_1 B \hat{j},$$

donde  $\vec{B} = B \hat{k} = 1.2 \text{ T } \hat{k}$  e  $I=1.8$  A. La fuerza ejercida sobre el segmento vertical paralelo al eje  $Y$  y con longitud  $s_2 = 4$  cm se calcula de la misma forma

$$\vec{F}_{\text{sobre } s_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & Is_2 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = Is_2 B \hat{i}.$$

Y la fuerza sobre el segmento recto que va de  $a$  a  $b$ , que viene dado por el vector de desplazamiento  $\vec{s} = s_1 \hat{i} + s_2 \hat{j} = 3 \text{ cm } \hat{i} + 4 \text{ cm } \hat{j}$ , viene dada por

$$\vec{F}_{\text{sobre } s} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ Is_1 & Is_2 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = Is_2 B \hat{i} - Is_1 B \hat{j}, \quad (58)$$

que es la suma de  $\vec{F}_{\text{sobre } s_2}$  y  $\vec{F}_{\text{sobre } s_1}$ . Notar que a lo largo de todo este problema se ha estado utilizando la ecuación de la fuerza de Lorentz  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$  que, puesto que los tres factores son constantes, se puede integrar inmediatamente:  $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$ .

**P.36** Puesto que tanto  $I$  como el vector  $\vec{B}$  son constantes, entonces

$$\vec{F} = \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} I d\vec{l} \times \vec{B} = I \underbrace{\left( \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} d\vec{l} \right)}_{\vec{L}} \times \vec{B}, \quad (59)$$

donde  $\vec{L}$  es el vector de desplazamiento que va de  $a$  a  $b$ .

**P.37** El campo magnético creado por el conductor infinito a una distancia  $r$  en perpendicular de él ya ha sido calculado varias veces y es igual a  $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ , con  $I_1 = 20$  A; su sentido es hacia afuera a la parte izquierda del conductor, y hacia adentro a la derecha de él. Para cada uno los 2 tramos paralelos al conductor infinito, la fuerza se calcula inmediatamente ya que el campo magnético creado por el conductor infinito es igual en todos los puntos de cada tramo: así

- Fuerza sobre el tramo a una distancia  $a=2$  cm:  $\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} L \hat{i}$ , donde  $L=10$  cm es la longitud del tramo e  $I_2 = 5$  A es la intensidad que circula por él.
- Fuerza sobre el tramo paralelo a una distancia  $b=2+5$  cm:  $\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} L \hat{i}$ .

En el caso de los dos tramos perpendiculares, puesto que cada uno de sus puntos está a una distancia  $r$  diferente del conductor infinito, tenemos que la fuerza va a ser

$$F_2 = \int_{r=a}^{r=b} I_2 dr B(r) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{r=a}^{r=b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Su sentido es en vertical hacia arriba para el tramo de arriba, e igual pero en sentido contrario para el tramo de abajo. La suma de las fuerzas sobre los cuatro lados es

$$\vec{F}_{\text{total}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi} \left( -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \hat{i}. \quad (60)$$

**P.38 y P.40** Una partícula de carga  $q$  moviéndose con una velocidad  $\vec{v}$  (por ejemplo hacia la derecha en esta hoja) dentro de un campo magnético uniforme perpendicular a la velocidad (por ejemplo hacia adentro de esta hoja) esta sometida a una fuerza igual a  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , que lleva dirección perpendicular tanto a  $\vec{v}$  como a  $\vec{B}$  (en nuestro caso, hacia arriba de la página). Esta fuerza no hace trabajo ya que es perpendicular a la velocidad y por tanto a un desplazamiento  $d\vec{s} = \vec{v} dt$ : así la fuerza no varía la energía cinética de la partícula, no varía el módulo de su velocidad. Esta fuerza es una fuerza centrípeta y por tanto el radio  $R$  de la trayectoria circular que va a llevar la partícula está relacionado con su velocidad de acuerdo con

$$F = qvB = ma_{\text{centr}} = m \frac{v^2}{R} \implies v = \frac{qB}{m} R. \quad (61)$$

El tiempo que tarda en dar una vuelta, o sea, el período del movimiento circular, es

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{qB}. \quad (62)$$

Y la energía cinética de la partícula cargada

$$E_{\text{cin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{q^2 B^2}{2m} R^2, \quad (63)$$

que es proporcional al radio al cuadrado de la órbita circular. Para el problema 38 basta con sustituir  $R=65$  cm,  $q = 1.6 \times 10^{-19}$  C,  $B=0.75$  T y  $m = 1.673 \times 10^{-27}$  kg.

**P.39** La velocidad tiene una componente  $v \cos \theta$  paralela a la dirección de  $\vec{B}$ , componente sobre la que no actúa la Fuerza de Lorentz (el producto vectorial de esta componente de la velocidad por el vector  $\vec{B}$  es cero al ser los dos vectores paralelos) y por tanto, componente que no cambia en módulo. La componente de la velocidad perpendicular al campo magnético, esto es  $v \sin \theta$ , es la que produce un movimiento circular tal y como hemos visto en el problema anterior. La trayectoria que sigue la partícula por lo tanto es una espiral: la partícula va trazando una circunferencia y a la vez se va desplazando a lo largo de la dirección de  $\vec{B}$  con una velocidad  $v \cos \theta$ . Al cabo de una vuelta, las componentes de la velocidad vuelven a estar en la misma dirección que al inicio, y por la ecuación (62), el tiempo que se requiere para dar esa vuelta es  $2\pi \frac{m}{qB}$ , tiempo durante el que la partícula cargada se ha desplazado una distancia

$$s = 2\pi \frac{m}{qB} v \cos \theta, \quad (64)$$

a lo largo de la dirección del campo magnético.

## 7 Soluciones completas en formato PDF

Descarga de las soluciones aquí: apretando la tecla derecha del ratón sobre el enlace subrayado, elegir “Guardar enlace como” (Netscape) o “Guardar objetivo como” (Explorer).

Para usuarios de Linux, el archivo se puede abrir con el programa GhostView: escribir **gv prob\_emo.pdf &** o bien **kghostview prob\_emo.pdf &** en una consola de texto.

Para usuarios de Windows, el archivo se puede abrir con el programa AcrobatReader.