REPASO DE ESTADÍSTICA I

Antalcides Olivo

Medidas de tendencia central

Medias

Media aritmética La media aritmética de una muestra es la suma de cada uno de los valores posibles multiplicado por su frecuencia, es decir.

Si la siguiente tabla representa la tabla de frecuencia de la muestra

M	n_i	f_i
x_1	n_1	f_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	f_k

La media es el valor :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} \tag{1}$$

y si los datos no están ordenados entonces

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{n} \tag{2}$$

Observación 1 ***En la definición de media se consideró que la variable de interés X es discreta, pero si la variable X no es discreta sino continua. En la fórmula se reemplaza cada valor x_i por la marca de clase correspondiente es decir***

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{k} = 1 m_i n_i}{n} \tag{3}$$

Este proceso hace que la media aritmética difiera de la media obtenida según (2.1), es decir habrá una perdida

de precisión que será mayor en cuanto mayor sea la diferencia entre las marcas de clase y los valores reales, o sea entre mayor sea la longitud a_i de los intervalos

Desventajas de la media La media es una medida muy usada en estadística, pero a pesar de eso posee ciertas desventajas

- La media aritmética es muy sensible a los valores extremos, es decir si una medida se aleja mucho de las otras hará que la media se aproxime mucho a ella
- No se recomienda usar cuando los datos se desplazan hacia los extremos
- En el caso de variables continuas depende de los intervalos de clase
- en le caso de variables discretas el valor puede no ser un valor de la muestra.

Otra media es la llamada media cuadrática $\bar{x}_c$la cual es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados

$$\bar{x}_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

La mediana

Sea X una variable discreta cuyas observaciones han sido ordenadas de mayor de mayor a menor, entonces se le llama mediana $\widetilde{x}$ al primer valor de la variable que deja por debajo de si el $50\,\%$ de las observaciones es decir si n es el número de observaciones, la mediana será la observación $\left[\left|\frac{n}{2}\right|\right] + 1$

Definición 1 ***Sea*** $x_{(1)},x_{(2)}, x_{(3)}, \cdots, x_{(n)}$ ***las observaciones de una muestra para una variable*** X ***donde*** $x_{(1)}$ ***representa la observación más pequeña,*** $x_{(2)}$ ***la observación que le***

sigue en valor y así sucesivamente $x_{(n)}$ denota la observación de mayor valor, entonces la mediana se define

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x_{([n+1]/2)} & \textbf{\textit{si } } n \textbf{\textit{ impar}} \\ \frac{x_{(n/2)}+x_{([n/2]+1)}}{2} & \textbf{\textit{si } } n \textbf{\textit{ par}} \end{cases}$$

En el caso de variables continuas, las clases vienen dadas por intervalos como se indicó en el capítulo anterior por tal razón para determinar la mediana se escoge el intervalo donde se encuentra el valor para el cual están debajo de él la mitad de los datos. Entonces a partir de ese intervalo se observan las frecuencias absolutas acumuladas y se aplica la siguiente fórmula

$$\widetilde{x} = x_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} a_i$$

de aquí se puede deducir que $\widetilde{x}$ el “punto” que divide al histograma en dos partes de áreas iguales

Propiedades y desventajas de la mediana

1. **Tiene la ventaja de no ser afectada por los valores extremos y por eso se aconseja para distribuciones para las cuales los datos no se concentran en el centro**
2. **Es fácil de calcular**
3. **En el caso de variables discretas el valor de la mediana es un valor de la variable**
4. **El mayor defecto es que las propiedades matemáticas son muy complicadas y esto hace que muy poco se use para realizar inferencias**
5. **Es función de los intervalos escogidos en el caso de variables continuas**

La moda **Llamaremos moda $\widehat{x}$ a cualquier máximo relativo de la distribución de frecuencias, es decir, cualquier**

valor de la variable que posea una frecuencia mayor que su anterior y posterior valor.

En el caso de variables continuas es más correcto hablar de intervalos modales. Luego de determinar el intervalo de clase o intervalo modal,que es aquel para el cual la distribución de frecuencia posee un máximo relativo, se determina la moda utilizando la siguiente fórmula

$$\widehat{x} = x_{i-1} + \frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})} a_i$$

Propiedades de la moda

La moda posee la siguientes propiedades

- Es muy fácil de calcular
- Puede no ser única
- Es función de los intervalos de su amplitud,número y límites

Back
Close

Relación entre la media, la moda y la mediana En el caso de distribuciones unimodales, la mediana está con frecuencia comprendida entre la media y la moda (incluso más cerca de la media).

En distribuciones que presentan cierta inclinación, es más aconsejable el uso de la mediana. Sin embargo en estudios relacionados con propósitos estadísticos y de inferencia suele ser más apta la media.

Veamos un ejemplo de cálculo de estas tres magnitudes.

Medidas de posición

A veces es importante obtener los valores de la variable que dividen la población en cuatro,diez o cien partes iguales,usualmente llamados cuartiles deciles y percentiles respectivamente.

El procedimiento es similar al utilizado para determinar la mediana, como lo indicaremos ahora.

Percentil **Para una variable discreta, se define el percentil de orden k, como la observación que deja por debajo de si el $k\,\%$ de la población es decir**

$$N_k = n\frac{k}{100}, \text{ si } n \text{ es impar}$$

$$\text{es decir } p_k = x_{[|(n+1)\frac{k}{100}|]}$$

donde en sub índice $[|(n+1)\frac{k}{100}|]$ indica que es la posición k a la que le corresponde ese valor de la frecuencia absoluta acumulada. Si n es par

$$p_k = \frac{x_{[|n\frac{k}{100}|]} + x_{[|n\frac{k}{100}|]+1}}{2}$$

En el caso de variables continuas se busca el intervalo donde se encuentra p_k, es decir se busca el valor que deja por debajo de si el $k\,\%$ de las observaciones y se determina el intervalo $(x_{i-1},x_i]$ donde se encuentra y se utiliza la relación

$$p_k = x_{i-1} + \frac{n\frac{k}{100} - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i$$

Quartiles Los cuartiles son tres y se definen:

- $Q_1 = p_{25}$
- $Q_2 = p_{50}$

- $Q_3 = p_{75}$

Deciles

De manera análoga se definen los deciles

los deciles son los valores que dividen las observaciones en 10 grupos de igual tamaño es decir son el conjunto

$D_1, D_2, D_3, \cdots, D_{10}$ **y se definen**

$D_i = p_{10 \cdot i} \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, 10$

Medidas de variabilidad o dispersión

Varianza y desviación típica

Como forma de medir la dispersión de los datos hemos descartado:

La varianza, S_n^2, se define como la media de las diferencias cuadráticas de n puntuaciones con respecto a su media aritmética, es decir

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Para datos agrupados en tablas, usando las notaciones establecidas en el capítulo anterior, la varianza se puede escribir como

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i$$

Una fórmula equivalente para el cálculo de la varianza está basada en lo siguiente:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \overline{x}^2$$

La varianza no tiene la misma magnitud que las observaciones (ej. si las observaciones se miden en metros, la varianza lo hace en $metros^2$ **). Si queremos que la medida de dispersión sea de la misma dimensionalidad que las observaciones bastará con tomar su raíz cuadrada. Por ello se define la desviación típica,** S_n, **como**

$$S_n = \sqrt{S_n^2}$$

Teoría de probabilidades

Experimentos y sucesos aleatorios

Definición 2 ***Diremos que un experimento es aleatorio si se verifican las siguientes condiciones,***

1. ***Se puede repetir indefinidamente, siempre con las mismas condiciones.***
2. ***Antes de realizarlo no se puede predecir el resultado.***
3. ***El resultado "e" que se obtiene pertenece a un conjunto de resultados posibles conocido previamente el cual llamaremos espacio muestral y lo denotaremos con la letra Ω o S. Los elementos del espacio muestral se denominan sucesos elementales.***

Es decir si $e_1, e_2 \in S \Longrightarrow e_1, e_2$ son sucesos elementales o puntos muestrales.En otras palabras: Un suceso es ele-

mental si su ocurrencia o no ocurrencia no está relacionada con ningún otro suceso.

Cualquier subconjunto A de S se denomina suceso o evento aleatorio.

El espacio muestral puede ser de dos tipos:

- **Discreto si está formado por un conjunto finito o numerable de resultados.**
- **Continuo si está compuesto por un conjunto no numerable de elementos.**

Definición 3 (Suceso determinista) ***Se denomina experimento determinista a el experimento que al realizarlo varias veces con las mismas condiciones iniciales obtenemos siempre el mismo resultado***

Cuando en un experimento no se puede predecir el resultado final, decimos que el experimento es aleatorio

Probabilidad

Probabilidad de laplace

Si un experimento cualquiera se puede repetir obteniendo un número finito de resultados posibles y no existe ninguna razón para pensar que un resultado tiene privilegios sobre otro, se calcula la probabilidad del suceso A según la regla de Laplace

$$P(A) = \frac{número\, de\, casos\, favorables\, para\, A}{número\, de\, casos\, posibles} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Definición axiomática de la probabilidad

Como en toda rama de las matemáticas debemos establecer una serie de axiomas y definiciones básicas

Definición 4 ***Definición axiomática de probabilidad***
D
ado un espacio muestral S, y una $\sigma - \acute{a}lgebra$ de sucesos $\mathcal{A}$ sobre él, diremos que P es una probabilidad sobre $\mathcal{A}$ si cumple las siguientes propiedades

A$_1$ ***La probabilidad es una función definida sobre $\mathcal{A}$, que toma solo valores positivos comprendidos entre 0 y 1, es decir***

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{A} & \rightarrow & [0,1] \subset IR \\ A \in \mathcal{A} & \mapsto & 1 \geq P\left(A\right) \geq 0 \end{array}$$

A$_2$ ***La probabilidad del suceso seguro es 1***

$$P\left(S\right) = 1$$

A$_3$ ***Para cualquier sucesión infinita $A_1, A_2, A_3, \cdots$ de sucesos disjuntos de $\mathcal{A}$ se tiene que la probabilidad de el evento $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es la serie infinita de las probabilidades, es decir***

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

Teorema 6.1 $P\left(\phi\right) = 0$

Teorema 6.2 ***Para cualquier sucesión finita de*** n ***eventos disjuntos*** $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \in \mathcal{A}$

$$P\left(\bigcup_i = 1^n A_i\right) = \sum_i = 1^n P\left(A_i\right)$$

Teorema 6.3 ***para cualquier suceso*** $A \in \mathcal{A}$ ***se tiene que*** $P\left(A'\right) = 1 - P\left(A\right)$

Teorema 6.4 ***Si*** $A, B \in \mathcal{A}$ ***y*** $A \subset B$, ***entonces*** $P\left(B\right) \geq P\left(A\right)$

Teorema 6.5 ***Para dos sucesos*** $A, B \subset \mathcal{A}$ ***cualesquiera***

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)$$

Técnica para la enumeración de puntos muestrales

Teorema 7.1 ***Considérese un experimento que tiene las dos características siguientes***

- ***El experimento se realiza en dos partes***
- ***La primera parte del experimento tiene*** m ***resultados posibles*** $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ ***independientemente del resultado*** x_i ***obtenido la segunda parte del experimento tiene*** n ***resultados posibles*** $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$***.***
  Cada resultado del espacio muestral S del experimento será por tanto, un par de la forma (x_i, y_j) ***es decir***

$$S = \{(x_i, y_j) \,|i = 1, 2, 3, \cdots m; j = 1, 2, 3 \cdots n\}$$

$$n(S) = mn$$

Definición 5 ***Una permutación es un arreglo de objetos distintos de tal manera que una permutación difiere de otra si el orden del arreglo o su contenido difieren***

Conviene observar que el orden es una característica de especial importancia en una permutación. Cuando cambiamos el orden de los elementos de este arreglo, se dice que permutamos dichos elementos

Muestreo sin reemplazo

Consideremos un experimento en el cual se selecciona un objeto de n objetos distintos, y luego se selecciona un segundo objeto de los $n-1$ objetos restantes, y así sucesivamente hasta seleccionar el último objeto Este proceso se llama muestreo sin reemplazo de acuerdo con el

teorema anterior los n objetos se pueden seleccionar de $n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ formas diferentes

Ahora si no se escogen todos los objetos, si no k objetos, los k objetos se pueden seleccionar

$$p_{n,k} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad r \leq n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$p_{n,n} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 1 = n!$$

Combinación

Una combinación es un arreglo de objetos distintos donde una combinación difiere de otra si difiere el contenido del arreglo. Si nos interesa determinar el número de combinaciones cuando en n objetos distintos deben selec-

cionarse r a la vez entonces

$$C_{n,r} = \frac{p_{n,r}}{r!} = \binom{n}{r} \quad r \leq n$$

ya que el numerador es el número de permutaciones al escoger r objetos de n posibles, pero hay que descontar los casos en que el orden determina para la combinación el mismo elemento, que es exactamente $r!$.

Probabilidad condicionada e independencia de eventos

Definición 6 ***Sean*** $A, B \in \mathcal{A}$ ***y sea*** B ***un evento de probabilidad no nula para el evento*** A***, llamamos probabilidad condicionada de*** A ***a*** B ***a la cantidad que representamos*** $P\left(A|B\right)$ ***y que definimos***

$$P\left(A|B\right) = \frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)},$$

la cantidad $P\left(A|B\right)$ ***se lee la probabilidad de*** A ***dada la ocurrencia de*** B

Definición 7 ***Sean*** $A, B \in \mathcal{A}$ ***dos eventos de probabilidad no nula se dice que son independientes si y solo si***

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right)P\left(B\right)$$

Teorema 8.1 ***(Bayes) Sea*** $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n \in \mathcal{A}$ ***un sistema exhaustivo y excluyente de eventos. Sea*** $B \subset \mathcal{A}$ ***un suceso del que conocemos todas las cantidades***

$$P\left(B|A_i\right), i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

a las que denominamos verosimilitudes, entones se verifica

$$\forall j = 1, 2, 3, \cdots, n, \qquad P\left(A_j|B\right) = \frac{P\left(B|A_j\right) P\left(A_j\right)}{\sum_i = 1^n P\left(B|A_i\right) P\left(A_i\right)}$$

Variables aleatorias

- **Variable aleatoria discreta. Si toma un número finito o numerable de valores, por ejemplo**

$$X :\longrightarrow I\!N$$

- **Variable aleatoria continua. Si toma un número de valores no numerables, por ejemplo**

$$X :\longrightarrow I\!R$$

Variables aleatorias discretas

Definición 8 ***Si*** X ***es una variable aleatoria discreta, asociamos un número***

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

como cada resultado x_i ***en*** R_X ***para*** $i = 1, 2, 3 \cdots, n, \cdots,$ ***donde los números*** $f(x_i)$ ***satisfacen***

1. $f(x_i) \geq 0$ ***para toda*** i
2. $\sum_{i=1}^{x} f(x_i) = 1$

   La función $f(x_i)$ ***se llama función de probabilidad o ley de probabilidad de la variable aleatoria, y la colección de pares*** $(x_i, f(x_i))$ ***se llama distribución de probabilidad de*** X

3. ***Dada una variable aleatoria discreta*** $X : S \longrightarrow I\!N$***, su función de probabilidad*** f ***se define de modo que*** $f(x_i)$ ***es la probabilidad de que*** X ***tome ese valor***

$$\begin{aligned} f : I\!N &\longrightarrow [0,1] \\ x_i &\longmapsto f(x_i) = P(X = x_i) \end{aligned}$$

si x_i ***no es uno de los valores que puede tomar*** X***, entonces*** $f(x_i) = 0$

Definición 9 (Función de distribución) ***De una variable aleatoria discreta,*** F ***que se define de modo que si*** $x_i \in I\!R, F(x_i)$ ***es igual a la probabilidad de que*** X ***tome un valor inferior o igual a*** x_i***, es decir,***

$$\begin{aligned} F : I\!N &\longrightarrow [0,1] \\ x_i &\longmapsto F(x_i) = P(x_i \geq X) \end{aligned}$$

Observación 2 ***La función de distribución*** F***, es una función no decreciente, es decir. Si***

$$x_{1<}x_2 \Longrightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$$

Además, es continua a la derecha

$$\lim_{x\longrightarrow a^+} F(x) = F(a)$$

y

$$F(-\infty) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} F(x_i) = 0$$
$$F(+\infty) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} F(x_i) = 1$$

Ejemplo 1 ***Supóngase que tenemos una variable aleatoria X con una distribución de probabiliadad dada por la relación***

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 & \textbf{\textit{de otro modo}} \end{cases}$$

donde n es un entero positivo y $0 \leq p \leq 1$. El ejemplo anterior es un caso pareticular de ésta distribución de probabilidad llamada Binomial

Variables aleatorias continuas

Cuando tenemos una variable aleatoria continua no tiene sentido realizar una suma de las probabilidades de cada uno de los valores que toma, ya que el conjunto es no enumerable por lo que hay que introducir otro concepto.

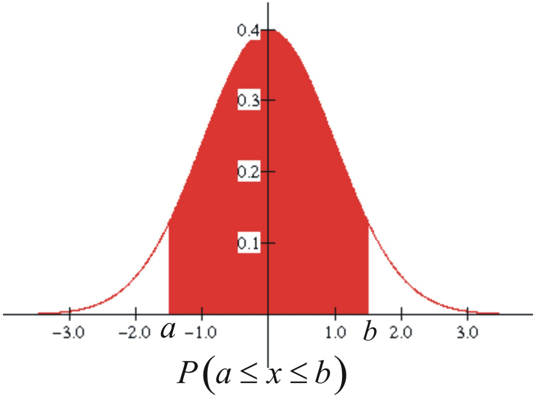
Sea $f : IR \longrightarrow IR$ **una función llamada función de densidad de una variable aleatoria continua, integrable que cumple las propiedades**

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

además para todo $[a, b]$ **se tiene**

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$



Observación 3 ***Al observar la gráfica vemos que*** $P(a \leq x \leq b)$ ***es el área bajo la curva de*** f

Observación 4 ***Por ser*** f ***integrable entonces la la probabilidad en un punto es nula, es decir***

$$P(X = a) = P(a \leq x \leq a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

Observación 5 ***Debido a lo anterior se tiene que***

- ***La función de densidad no es única***

- $P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b)$
- $P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b)$

La función de distribución de una variable aleatoria, F, continua se define de modo que dado $x \epsilon\ IR$, $F(x)$ es la probabilidad de que X sea mayor o igual que x, es decir

$$\begin{array}{rcl} F : IR & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & F(x) = P(x \geq X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \end{array}$$

Proposición 1 ***Dado un intervalo de la forma*** $(a, b]$***, tenemos***

$$\begin{aligned} P(X \in (a,b]) &= \int_a^b f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Se puede observar que la cantidad $F(b)-F(a)$ ***representa la masa de probabilidad extendida alo largo del intervalo*** $(a,b]$ ***. Si dividimos esta cantidad por la longitud del intervalo,***

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

tenemos la masa media de probabilidad por unidad de longitud en $(a,b]$***, es decir, su densidad media de probabilidad, ahora si***

$$\lim_{a\longrightarrow b}\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(b)=f(b)$$

que es la densidad de probabilidad en el punto b

Observación 6 ▪ ***Si*** X ***es una variable continua la función de distribución*** F ***es no decreciente, es decir si***

$$x_1<x_2\Longrightarrow F(x_2)\geq F(x_1)$$

- ***esta función es absolutamente convergente y se verifica***

$$F(-\infty) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x)\,(1)$$

Definición 10 ***Funciones de probabilidad bivariada***

1. ***Caso discreto: para cada resultado*** (x_{1i}, x_{2j}) ***de*** (X_1, X_2), ***asociamos un número***

$$f(x_{1i}, x_{2j}) = P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2j})$$

donde

$$f(x_{1i}, x_{2j}) \geq 0$$

para todo $i \in I, j \in J$ ***siendo*** I, J ***conjuntos de subíndices***

y

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f(x_{1i}, x_{2j}) = 1$$

Los valores $((x_{1i}, x_{2j}), f(x_{1i}, x_{2j}))$ ***para todo*** $i \in I$ ***y*** $j \in J$ ***forman la distribución de probabilidad de*** (X_1, X_2)

2. ***Caso continuo . Si*** (X_1, X_2) ***es un vector aleatorio continuo con espacio del rango,*** R, ***en*** $I\!R^2$, ***entonces*** f, ***la función de densidad conjunta, tiene las siguientes propiedades***

$$f(x_1, x_2) \geq 0 \;\forall (x_1, x_2) \in R$$

y

$$\int \int_R f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$$

Definición 11 ***Se dice que*** n ***variables aleatorias*** $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$,***tiene una distribución discreta conjunta si el vector aleatorio*** $X = (X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k)$ ***puede tomar solamente un número finito o una sucesión finita de valores distintos posibles***$(x_1, x_2, x_3$ ***en*** $I\!R^k$. ***La función de probabilidad cunjunta de*** $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$

se define entonces como la función f ***tal que para cualquier punto*** $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k) \in A \subset I\!R^k$,

$$f(x) = P(X = x) \qquad \forall x \in A$$

donde A ***es cualquier subconjunto de*** $I\!R^k$

$$P(x \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

Definición 12 ***Distribuciones continuas. se dice que n varibles aleatorias*** $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$ ***tienen una distribución conjunta continua si existe una función no negativa f definida sobre*** $I\!R^k$ ***tal que para cualquier subconjunto*** $A \subset I\!R^k$

$$P((X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k) \in A)$$
$$= \int \cdots \int_A f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_k$$

Definición 13 ***La f.d conjunta de k variables aleatorias*** $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$, ***se define como la función*** F ***cuyo valor en cualquier punto*** $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ ***de un espacio k-dimensional*** IR^k ***está dado por la relación***

$$F(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k) = P(X_1 \leq x_1, \cdots X_k \leq x_k)$$

Observación 7 ***Ésta f.d satisface todas las propiedades de la f.d univariada.***

En el caso bivariado. Si X **y** Y **son variables aleatorias con f.d.p conjunta** f **se tiene que**

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du dv$$

Si la disribución conjunta de $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$ **es continua, entonces la f.d.p conjunta f se puede obtener a partir de la f.d conjunta F utilizando la relación**

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k) = \frac{\partial^k F(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k}$$

para todos los puntos $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ donde exista la derivada.

En el caso bivariado

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$\forall (x,y)$ donde exista la derivada parcial de 2^o orden

Ejemplo 2 ***Supóngase que la variable aleatoria X puede tomar solamente los valores 1,2,3, y que la variable Y puede tomar solamente los valores 1,2,3,4, donde la f.p conjunta de X e Y es como indica la tabla***

$X \vert Y$	*1*	*2*	*3*	*4*
1	*0.1*	*0*	*0.1*	*0*
2	*0.3*	*0*	*0.1*	*0.2*
3	*0*	*0.2*	*0*	*0*

determine los valores de $P(X \geq 2, Y \geq 2)$ y $P(X = 1)$

Solución 2.1 ***Sumando $f(x.y)$ sobre todos los valores de***

$x \geq 2$ ***y de*** $y \geq 2$, ***se obtiene***

$$\begin{aligned} p\left(X \geq 2, Y \geq 2\right) &= f\left(2,2\right) + f\left(2,3\right) + f\left(2,4\right) + \\ &+ f\left(3,2\right) + f\left(3,3\right) + f\left(3,4\right) \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

$$P\left(X = 1\right) = \sum_{y=1}^{4} f\left(1, y\right) = 0{,}2$$

Ejemplo 3 ***Supóngase que la f.d.p conjunta de x e Y es la siguiente***

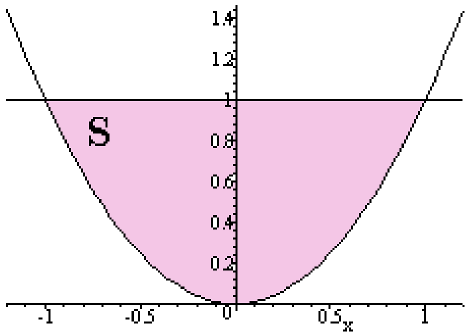
$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} cx^2y \ \ para & x^2 \leq y \leq 1 \\ \quad 0 & \textbf{\textit{en otro caso}} \end{cases}$$

- ***Determine el valor de la constante c***
- $P\left(X \geq Y\right)$

Solución 3.1 ***Sea el conjunto S de puntos*** (x,y) ***para los que f***$(x,y)>0$ ***está representado en la figura 4.8 . puesto que*** $f\,(x,y)=0$ ***fuera de S, resulta que***

$$\int\int_{s} f\,(x,y)\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} cx^2ydydx=\frac{4}{21}c$$

y como esta integral debe ser 1, entonces c=$\frac{21}{4}$

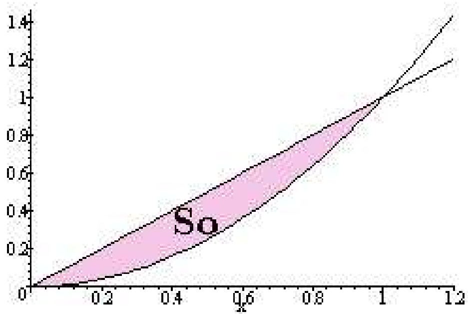


fig(a) Ejemplo 4.8

- ***Sea S_0 el conjunto donde $x \geq y$, entonces***

$$\int\int_{S_0} f(x,y)\,dxdy =$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{21}{4} x^2 y\,dydx = \frac{3}{20}$$



- **En el caso discreto la distribución marginal para X_1 y**

Back
Close

X_2 **es**

$$f\left(x_1\right)=\sum_{todo\, j} f\left(x_{1i}, x_{2j}\right)\ \forall i=1,2,\cdots$$
$$f\left(x_2\right)=\sum_{todo\, i} f\left(x_{1i}, x_{2j}\right)\ \forall j=1,2,\cdots$$

- **En el caso continuo la distribución marginal para** X_1 **y** X_2 **es**

$$f\left(x_1\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2\right) dx_2$$
$$f\left(x_2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2\right) dx_1$$

Distribuciones

Algunas distribuciones discretas importantes

Distribución binomial Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución binomial de prámetros n, p si $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donde cada $X_i \rightsquigarrow \mathbb{B}\left(p, pq\right)$ y se denota $B\left(np, npq\right)$

Definición 14 ***Supongase que se realiza un experimento de Bernoulli n veces , donde en todas ellas, la probabilidad de éxito es la misma (p), y queremos calcular el número de éxitos, X obtenidos en el total de n pruebas, entonces su función de probabilidad es***

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^n - x \quad si \quad x = 0, 1, 2, \cdots, n \\ 0 \qquad \qquad \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto, su función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \sum_k = 0^{[}x]\binom{n}{k}p^k q^n - k & si \quad n \geq x \geq 0 \\ 1 & si \quad x \geq n \end{cases}$$

La esperanza y la varianza se calcularon en los ejemplos 4.23 y 4.27

$$E(X) = np, V(X) = npq$$

Distribucción de Poisson **Sea X una variable aleatoria con una distribución discreta y supóngase que el valor de X debe ser un entero no negativo. Se dice que X tiene una distribución de Poisson con media λ si la f.p de X es**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & si \quad x = 1, 2, 3, \cdots \\ 0 & \textbf{en otro caso} \end{cases}$$

Se denota $X \rightsquigarrow P(\lambda, \lambda)$

Distribución exponencial La distribución exponencial es el equivalente continuo por asi decirlo de la distribución geométrica discreta, Esta describe un proceso en el que.

Nos interesa saber el tiempo hasta que ocurre determinado evento, sabiendo que el tiempo que pueda ocurrir desde cualquier instante dado t, hasta que ello acurra en un instante t_f, no depende del tiempo trascurrido anteriormente en el que no pasó nada

Si X es una v.a se dice que tiene una distribución exponencial si

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x > 0 \\ 0 & \textbf{si no} \end{cases}$$

Su experanza y su varianza son

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribución normal o Gaussiana

Se dice que una v.a tiene una distribución normal de paramétros μ y σ^2 lo que se denota $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$ si su función de densidad es

$$F(x) = P(x \geq X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

La media y la varianza son

$$E(X) = \mu$$
$$V(X) = \sigma^2$$

- **Estas variables tienen una propiedad importante que se llama reproductividad, es decir la suma de varia-**

bles aleatorias e independientes normales también es normal

- **Una propiedad de esta distribución es que es simétrica con respecto a la media**
- **Si** $X \rightsquigarrow N(0,1)$ **se dice que** X **tiene una distribución normal estándar y su f.d se denota** $\varphi(X)$ **y su funciòn de distribución** $\Phi(X)$
- **Los puntos de inflexión están en** $x = \mu \pm \sigma$
- $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$ **y** $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$