*Apuntes de un curso de*

# MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA II

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Víctor Muñoz G.
José Rogan C.

# Índice

# Capítulo 14

# El problema de Sturm-Liouville

versión preliminar 1.0-28 octubre 2002

Una gran cantidad de problemas físicos están descritos por ecuaciones diferenciales en las que interviene un operador Laplaciano (la ecuación de Laplace, la ecuación de onda, la ecuación de Schrödinger, etc.). Matemáticamente, estas ecuaciones corresponden a casos particulares del *problema de Sturm-Liouville*, vale decir, ecuaciones de autovalores para un un operador diferencial autoadjunto. Las propiedades que demostramos en general para los polinomios ortogonales (Cap. 11), y reencontramos en dos casos particulares (Caps. 12 y 13), son en realidad propiedades generales de las soluciones de problemas de Sturm-Liouville, como veremos en este capítulo.

## 14.1. Operadores diferenciales autoadjuntos

Consideremos el operador diferencial $\mathcal{L}$ de la forma:

$$\mathcal{L}u(x) = \left[p_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_2(x)\right] u(x) \ , \tag{14.1}$$

donde $u(x)$ es una función compleja dos veces diferenciable, y los $\{p_j(x)\}$ son funciones reales que cumplen:

- $p_0''(x)$, $p_1'(x)$, $p_2(x)$ existen y son continuas en $[a,b]$.
- $p_0(x)$ no tiene ceros en $(a,b)$.

$p_0(x)$ puede (y suele) tener ceros en los extremos del intervalo, y el intervalo $[a,b]$ podría ser semi-infinito o infinito.

Consideremos una segunda función derivable dos veces, $v(x)$. Definimos

$$\langle v \,|\, \mathcal{L} \,|\, u \rangle \equiv \langle v, \mathcal{L}u\rangle = \int_a^b dx\, v^*(x)\mathcal{L}u(x) \ . \tag{14.2}$$

Integrando por partes y usando la continuidad de $p_0'(x)$ y $p_1(x)$,

$$\int_a^b dx\, v^*(x)p_1(x)u'(x) = \quad v^*(x)u(x)p_1(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, u(x)[v^*(x)p_1(x)]' \ ,$$

y

$$\begin{aligned}
\int_a^b dx\, v^*(x)p_0(x)u''(x) = &\quad v^*(x)u'(x)p_0(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, u'(x)[v^*(x)p_0(x)]' \\
= &\quad \{v^*(x)u'(x)p_0(x) - u(x)[v^*(x)p_0(x)]'\}\Big|_a^b + \int_a^b dx\, u(x)[v^*(x)p_0(x)]'' \ .
\end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\langle v \,|\, \mathcal{L} \,|\, u \,\rangle = &\int_a^b dx\, u(x)\overline{\mathcal{L}}v^*(x) \\
&+ \quad \Big\{u(x)v^*(x)[p_1(x) - p_0'(x)] + p_0(x)[u'(x)v^*(x) - u(x)v^{*\prime}(x)]\Big\}\Big|_a^b \ , \quad (14.3)
\end{aligned}$$

donde

$$\overline{\mathcal{L}}u(x) = \frac{d^2}{dx^2}[p_0(x)u(x)] - \frac{d}{dx}[p_1(x)u(x)] + p_2(x)u(x) \ , \tag{14.4a}$$

$$\overline{\mathcal{L}}u(x) = \left\{p_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + [2p_0'(x) - p_1(x)]\frac{d}{dx} + [p_2(x) - p_1'(x) + p_0''(x)]\right\} u(x) \tag{14.4b}$$

es el *operador adjunto* a $\mathcal{L}$.

Si

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \ , \tag{14.5}$$

decimos que $\mathcal{L}$ es *autoadjunto*.

Comparando (14.1) y (14.4), se sigue que $\mathcal{L}$ es autoadjunto si y sólo si

$$2p_0'(x) - p_1(x) = p_1(x)$$

y

$$[p_1(x) - p_0'(x)]' = 0 \ ,$$

es decir, si

$$p_0'(x) = p_1(x) \ . \tag{14.6}$$

Muchos problemas interesantes corresponden a operadores autoadjuntos; por ejemplo, el oscilador armónico simple, mientras que otros, como las ecuaciones de Hermite y Laguerre, no. Sin embargo la teoría de operadores diferenciales autoadjuntos de segundo orden es completamente general, pues cualquier operador de segundo orden puede ser transformado a una forma autoadjunta. En efecto, puesto que $p_0(x)$ no tiene ceros en $(a,b)$, consideremos

$$h(x) = \frac{1}{p_0(x)} \exp\left[\int_{x_0}^x dt\, \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\right] \ ,$$

y definamos

$$\begin{aligned}
\overline{p_0}(x) &= h(x)p_0(x) \ , \\
\overline{p_1}(x) &= h(x)p_1(x) \ .
\end{aligned}$$

Entonces

$$\overline{p_0}'(x) = \frac{d}{dx}\exp\left[\int_{x_0}^{x} dt\,\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\right] = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\exp\left[\int_{x_0}^{x} dt\,\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\right] = \overline{p_1}(x) \ ,$$

es decir, $h(x)\mathcal{L}$ es autoadjunto.

Usando (14.6), y definiendo $A(x) = p_0(x)$, $B(x) = p_2(x)$, se sigue que todo operador autoadjunto se puede escribir en la forma:

$$\mathcal{L}u(x) = \frac{d}{dx}\left[A(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + B(x)u(x) \ . \tag{14.7}$$

Además, para operadores autoadjuntos (14.3) queda

$$\langle v \,|\, \mathcal{L} \,|\, u \,\rangle = \int_a^b dx\, u(x)\overline{\mathcal{L}}v^*(x) + \quad A(x)[u'(x)v^*(x) - u(x)v^{*\prime}(x)]\Big|_a^b \ . \tag{14.8}$$

## 14.2. Operadores autohermíticos

Limitémonos ahora a un subespacio $\mathcal{H}$ de nuestro espacio de funciones, en el cual se cumple

$$A(x)\frac{du(x)}{dx}v^*(x)\Big|_{x=a} = A(x)\frac{du(x)}{dx}v^*(x)\Big|_{x=b} \quad , \quad \forall\, u, v \in \mathcal{H} \ . \tag{14.9}$$

Es inmediato mostrar que $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial.

Entonces, de (14.8) se sigue que, si $u(x), v(x) \in \mathcal{H}$, y si $\mathcal{L}$ es autoadjunto, entonces

$$\langle v, \mathcal{L}u\rangle = \int_a^b dx\, u(x)\mathcal{L}v(x) = \langle \mathcal{L}v, u\rangle \ . \tag{14.10}$$

Se dice entonces que $\mathcal{L}$ es *autohermítico* en $\mathcal{H}$.

## 14.3. Problema de autovalores

Sea $w(x)$ una función real positiva, la cual a lo más puede tener ceros aislados en $[a, b]$ (*función de peso*). Consideremos la ecuación

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0 \ , \quad \lambda \in \mathbb{C} \ , \tag{14.11}$$

con determinadas condiciones de borde (en este caso, nos interesarán las condiciones que determinan el subespacio $\mathcal{H}$). Las soluciones de (14.11), debido precisamente a las condiciones de borde, no existen para todo $\lambda$, sino para cierto número discreto $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, asociados a ciertas funciones $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Los $\lambda_i$ se denominan *autovalores* y las funciones asociadas $u_i$, *autofunciones*.

Se pueden mostrar las siguientes propiedades:

**Proposición 14.1** Los autovalores de un operador autohermítico son reales.

**Demostración** Sean $\lambda_j$, $\lambda_k$ autovalores asociados a autofunciones $u_j(x)$, $u_k(x)$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}u_j(x) + \lambda_j w(x) u_j(x) &= 0 \ , \\ \mathfrak{L}u_k^*(x) + \lambda_k^* w(x) u_k^*(x) &= 0 \ .\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $u_k^*(x)$ e integrando en $[a,b]$:

$$\langle u_k, \mathfrak{L}u_j \rangle + \lambda_j \int_a^b dx\, u_k^*(x) w(x) u_j(x) = 0 \ .$$

Haciendo algo similar con la segunda ecuación, pero multiplicando por $u_j^*(x)$,

$$\langle \mathfrak{L}u_k, u_j \rangle + \lambda_k \int_a^b dx\, u_j(x) w(x) u_k^*(x) = 0 \ .$$

Restando ambas expresiones, y usando (14.10),

$$(\lambda_j - \lambda_k^*) \int_a^b u_k^*(x) w(x) u_j(x) = 0 \ . \tag{14.12}$$

Ahora, si $j = k$,

$$0 = (\lambda_j - \lambda_j^*) \int_a^b |\, u_j(x)\,|^2\, w(x) \ .$$

Como $w(x) \geq 0$, existen soluciones $u_j(x)$ no triviales si sólo si

$$\lambda_j = \lambda_j^* \ ,$$

es decir, $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

q.e.d.

**Proposición 14.2** Las autofunciones de un operador autohermítico se pueden elegir ortogonales entre sí.

**Demostración** Si escogemos ahora $\lambda_j \neq \lambda_k$, entonces de (14.12) se sigue que

$$0 = \int_a^b dx\, u_k^*(x) w(x) u_j(x) \ ,$$

es decir $u_k(x)$ y $u_j(x)$ son ortogonales con función de peso $w(x)$. (Incidentalmente, vemos que la generalización del producto interno introducida en (11.1) emerge naturalmente al considerar el problema de autovalores de un operador autohermítico.)

Por lo tanto, autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales. Sin embargo, puede ocurrir que más de una autofunción esté asociada al mismo autovalor, es decir, que un autovalor sea *degenerado*. Es fácil mostrar que las funciones asociadas a un mismo autovalor forman un espacio vectorial. En efecto, si $u_{j,1}(x)$, $u_{j,2}$ están asociadas al autovalor $\lambda_j$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u_{j,1} + \lambda_j w(x) u_{j,1} &= 0 \ , \\ \mathcal{L}u_{j,2} + \lambda_j w(x) u_{j,2} &= 0 \ .\end{aligned}$$

Entonces una combinación lineal de ellas también es autofunción de $\mathcal{L}$ con el mismo autovalor:

$$\mathcal{L} \sum_{\alpha=1,2} u_{j,\alpha} + \lambda_j w(x) \sum_{\alpha=1,2} u_{j,\alpha} = \sum_{\alpha=1,2} [\mathcal{L}u_{j,\alpha} + \lambda_j w(x) u_{j,\alpha}] = 0 \ .$$

Por lo tanto, es posible encontrar una base ortogonal del subespacio asociado a $\lambda_j$ (vía Gram-Schmidt). Procediendo así con todos los subespacios de degeneración, podemos finalmente construir una base ortogonal para el espacio de funciones completo.

q.e.d.

**Proposición 14.3** Las autofunciones de un operador autohermítico forman una base del espacio $\mathcal{H}$.

**Demostración** (Discusión)

La completitud de un conjunto de funciones usualmente se determina comparando con una serie de Laurent. Por ejemplo, para polinomios ortogonales, es posible encontrar una expansión polinomial para cada potencia de $z$:

$$z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(z) \ ,$$

donde $P_i(z)$ es el $i$-ésimo polinomio. Una función $f(z)$ se puede entonces expandir en una serie de Laurent, y en definitiva en una combinación lineal de los polinomios $P_i(z)$. Así, podemos mostrar que la expansión polinomial existe y que es única. La limitación de este desarrollo en serie de Laurent es que $f(z)$ debe ser analítica. Las funciones pueden ser más generales que eso (recordemos la expansión de la función “dientes de sierra” en series de Fourier, por ejemplo). Una demostración de que nuestras autofunciones de problemas de Sturm-Liouville son completas aparece en el libro de Courant y Hilbert [R. Courant y D. Hilbert, *“Metodos de la Física Matemática”*, Vol. 1, Cap. 6, Sec. 3].

q.e.d.

## 14.4. Ejemplos de funciones ortogonales

Distintas elecciones del operador diferencial $\mathcal{L}$ (es decir, de las funciones $A(x)$ y $B(x)$ en (14.7), de la función de peso $w(x)$ en el problema de autovalores asociado, y del intervalo $[a,b]$ que determina las condiciones de borde (14.9), generan diversas funciones especiales. Algunas de ellas, de interés en problemas físicos, aparecen en la siguiente tabla:

| Función | $A(x)$ | $B(x)$ | $w(x)$ | $a$ | $b$ | $\lambda$ | Fórmula generatriz |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Legendre (polinomios) | $1-x^2$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $l(l+1)$ | $P_l(x) = \frac{1}{2^2 l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$ |
| Legendre (asociados) | $1-x^2$ | $\frac{-m^2}{1-x^2}$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $l(l+1)$ | $P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x)$ |
| Chebyshev I (polinomios) | $\sqrt{1-x^2}$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $-1$ | $1$ | $n^2$ | $T_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ |
| Chebyshev II (polinomios) | $(1-x^2)^{3/2}$ | $0$ | $\sqrt{1-x^2}$ | $-1$ | $1$ | $n(n+2)$ | $U_n(x) = \frac{(n+1)}{(2n+1)!!\sqrt{1-x^2}}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ |
| Gegenbauer (ultraesféricas) | $(1-x^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}$ | $0$ | $(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ | $-1$ | $1$ | $n(n+2\alpha)$ | $C_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}+n)(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2^n n!\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(2\alpha+n)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n (1-x^2)^{\alpha+n-\frac{1}{2}}$ |
| Laguerre (polinomios) | $xe^{-x}$ | $0$ | $e^{-x}$ | $0$ | $\infty$ | $n$ | $L_n(x) = e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x})$ |
| Laguerre (asociados) | $x^{k+1}e^{-x}$ | $0$ | $x^k e^{-x}$ | $0$ | $\infty$ | $n-k$ | $L_n^{(m)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m L_n(x)$ |
| Hermite (polinomios) | $e^{-x^2}$ | $0$ | $e^{-x^2}$ | $-\infty$ | $\infty$ | $2n$ | $H_n(x) = e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$ |
| Bessel[a] | $x$ | $-\frac{\alpha}{x}$ | $x$ | $0$ | $1$ | $a_\nu^2$ | $J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1} dt\,(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(xt)$ |

[a] Las relaciones de ortogonalidad de las funciones de Bessel son atípicas: debemos reemplazar $J_\alpha(x)$ por $J_\alpha(xa_\nu)$ en la ecuación diferencial, con $J_\alpha(a_\nu)=0$, cumpliéndose

$$\int_0^1 dx\, x J_\alpha(a_\mu x) J_\alpha(a_\nu x) = \text{cte.}\cdot \delta_{a_\mu,a_\nu}\ .$$

Ver capítulo (**??**).