Universidad Nacional de Colombia

http://www.unalmed.edu.co

El Principio del Máximo en Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas y Aplicaciones

Autor: BIENVENIDO BARRAZA MARTINEZ

Director: DR. VOLKER STALLBOHM

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al título de Magister en Matemáticas

email: `bbarraza@uninorte.edu.co`

RESUMEN

En este trabajo se estudian principios del máximo para ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden y sus aplicaciones.

Principio del máximo generalizado

En lo siguiente Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ de clase C^1, y se considera el operador diferencial L en forma de divergencia

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} D_i \left(a^{ij}(x)\, D_j + b^i(x) \right) + \sum_{i=1}^{n} c^i(x)\, D_i + d(x)\,, \tag{1}$$

donde

a) L es estrictamente elíptico, es decir, existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 |\xi|^2 \text{ para todo } x \in \Omega \text{ y } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

b) Los coeficientes a^{ij}, b^i, c^i y d $(i, j = 1, \ldots, n)$ son funciones medibles sobre Ω. Además son **acotadas**, esto es existen constantes positivas

Λ y ρ tales que para todo $x \in \Omega$ y λ_0 en (2) se cumple

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left|a^{ij}(x)\right|^2 \leq \Lambda, \quad \lambda_0^{-2} \sum_{i=1}^{n} \left(\left|b^i(x)\right|^2 + \left|c^i(x)\right|^2\right) + \lambda^{-1} \left|d(x)\right| \leq \rho^2 \tag{3}$$

c)

$$\int_\Omega \left(dv - \sum_{i=1}^{n} b^i D_i v\right) dx \leq 0 \quad \forall v \geq 0, v \in C_0^1(\Omega). \tag{4}$$

Definición 1 *Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$, u es una solución débil (subsolución débil, supersolución débil), de*

$$Lu = f \quad \textit{en } \Omega,$$

si para cada $v \in C_0^1(\Omega)$ con $v \geq 0$ se cumple

$$\mathcal{L}(u,v) = F(v) \quad (\leq F(v), \geq F(v)), \tag{5}$$

donde

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij} D_j u + b^i u\right) D_i v - \left(\sum_{i=1}^{n} c^i D_i u + du \right) v \right\} dx. \tag{6}$$

$\mathcal{L}$ se denomina la **forma bilineal asociada** *a L, y*

$$F(v) := -\int_\Omega f v dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \tag{7}$$

Teorema 2 *(Principio del máximo generalizado) Sea* L *el operador dado en* (1)*, cuyos coeficientes satisfacen* $(2),(3)$ *y* (4)*. Si* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *es una solución débil de* $Lu \geq 0\,(\leq 0)$ *en* Ω*, entonces*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^{+} \quad \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^{+}\right).$$

Corolario 3 *Si* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *y* $Lu = 0$ *en* Ω *en el sentido débil, entonces* $u = 0$ *en* Ω *en el sentido débil.*

Problema de Dirichlet generalizado

Con el principio del máximo generalizado (colorario) se sigue que existe solución débil única para el problema de Direchlet generalizado. Adicionalmente en la prueba se utilizan los siguientes teoremas: la alternativa Fredholm, Lax-Milgram, y Rellich-Kondrackov el cual establece que

$$W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \quad \text{si } n > 2,$$

y Ω es abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ de clase C^1.

Definición 4 *Sean $f \in L^2(\Omega)$, $g \in W^{1,2}(\Omega)$ y L el operador diferencial definido en (1), $u \in W^{1,2}(\Omega)$ es una* **solución débil** *de*

$$\begin{cases} Lu = f & \textit{en } \Omega, \\ u = g & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

si $u-g\in W_0^{1,2}(\Omega)$ *y además*

$$\mathcal{L}(u,v)=F(v)=-\int_\Omega fvdx,\ \forall v\in C_0^1(\Omega),\tag{8}$$

donde $\mathcal{L}$ *viene dado por* (6).

Lema 5 *Si* $I:W_0^{1,2}(\Omega)\longrightarrow\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$, $u\longrightarrow Iu$, *donde*

$$Iu(v):=\int_\Omega uvdx,\ v\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Entonces I *es una inmersión compacta.*

Teorema 6 *Sea* L *el operador diferencial dado en* (1) *con coeficientes satisfaciendo* $(2)\,,(3)$ *y* (4), *y* $g \in W^{1,2}(\Omega)$. *Entonces para cualquier* $f \in L^2(\Omega)$ *el* **problema de Dirichlet generalizado**

$$(P.D.)\begin{cases} Lu = f \ \text{ en } \Omega, \\ u = g \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene solución débil única.

Principio del máximo clásico

Ahora las funciónes $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ y el operador L es

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u + c(x) u, \qquad (9)$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i y c estàn definidos en un abierto, no vacio, Ω en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, y son acotados. Además $A = [a_{ij}(x)]$ simétrica $\forall x \in \Omega$ y L es estrictamente elíptico, (2).

Teorema 7 *(Principio del máximo débil para $c \leq 0$) si $Lu \geq 0$ $(Lu \leq 0)$ en Ω y $c \leq 0$, entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \quad \left(\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-\right).$$

Lema 8 *(de Frontera de Hopf) Supóngase que* Ω *satisface la condición de bola interior en* $x_0 \in \partial\Omega$ *y* $c \equiv 0$ *en* L *dado en* (9). *Si* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \{x_0\})$ *satisface* $Lu \geq 0$ *en* Ω *y* $u(x_0) > u(x)\ \forall x \in \Omega$, *entonces*

$$\liminf_{t \to 0^-} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} > 0,$$

donde ν *es la normal exterior a la bola interior en* x_0.

Si en las hipótesis iniciales se cambia $c = 0$ *en* Ω *por* $c \leq 0$ *en* Ω *y* $u(x_0) \geq 0$, *se obtiene la misma conclusión.*

Si en las hipótesis iniciales se cambia $c = 0$ *en* Ω *por* $u(x_0) = 0$ *en* Ω, *se obtiene la misma conclusión (independiente del signo de* c*).*

Teorema 9 *Ω es un dominio, no necesariamente acotado, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, no constante, satisface $Lu \geq 0$ $(Lu \leq 0)$ en Ω. Si $c = 0$, u no alcanza un máximo (mínimo) en el interior de Ω. Si $c \leq 0$, u no alcanza un máximo no negativo (mínimo no positivo) en el interior de Ω. Independiente del signo de c, u no puede ser cero en un máximo (mínimo) interior.*

Aplicación a la teoría de valores propios

Teorema 10 *Dado* Ω *abierto acotado,* $a_{ij} \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$*,* $a_{ij} = a_{ji}$*,* $-L$ *estrictamente elíptico, donde*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_j}u\right),$$

entonces

$a)$ *El primer valor propio de* L*,* λ_1*, es positivo y además*

$$\lambda_1 = min\left\{\mathcal{L}\left(u,u\right) : u \in H_0^1\left(\Omega\right),\ \left\|u\right\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\} \tag{10}$$

$b)$ *El mínimo en* (10) *es alcanzado por una función* w_1 *positiva en* Ω*, que es solucióin débil de*

$$\begin{cases} Lw_1 = \lambda_1 w_1 & \text{en } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Un principio del máximo donde c puede ser positivo

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, L el operador diferencial definido en (9) y (S_Ω) la condición:

$$(S_\Omega)\begin{cases} \text{Existen constantes } \lambda_0 \text{ y } \Lambda_0 \text{ tales que:} \\ \lambda_0 \in \xi^2 \leq \xi^T a(x)\,\xi \leq \Lambda_0 \xi^2 \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ |b_i(x)| \leq \Lambda_0 \text{ y } -\Lambda_0 \leq c(x) \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Adicionalmente se considera la siguiente definición.

Definición 11 *Usando la notación $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$, $x \in \Omega$, se dice que el conjunto Ω satisface la* **condición de bola interior uniforme en el sentido fuerte**, *si para algún $r > 0$, y todo $x \in \Omega$ con $d(x) \leq r$ le corresponde un punto más cercano $y \in \partial\Omega$, $d(x) = |x - y|$,con la propiedad que $B_r(z) \subset \Omega$, donde $z = y + \frac{r(x-y)}{|x-y|}$.*

Teorema 12 *Supóngase que* Ω *satisface la condición de bola interior uniforme en el sentido fuerte,* L *dado por* (9), (S_Ω) *se cumple,* $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *satisfaciendo*

$$Lu \leq 0 \ \ \text{en } \Omega \ \ \text{y } u \geq 0 \ \ \text{sobre } \partial\Omega$$

es Lipschitz continua en $\overline{\Omega}$. *Si* $h \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *satisface*

$$Lh \leq 0 \ \ \text{y} \ \ h > 0 \ \text{en } \Omega,$$

entonces

$$u = \beta h \ \ \text{en } \Omega \text{ para un } \beta < 0 \ \ \text{ó} \ \ u \equiv 0 \ \ \text{en } \Omega \ \ \text{ó } u > 0 \ \ \text{en } \Omega.$$

Extensión del principio del máximo

Se considera el operador elíptico simétrico

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u\right), \qquad (12)$$

donde $a_{ij}(x) \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ y $\partial\Omega$ es suave.

Del teorema 10 se tiene que λ_1, valor propio principal de $-L$, es positivo y existe $w_1 > 0$ tal que

$$\begin{cases} Lw_1 + \lambda_1 w_1 = 0 \ \text{ en } \Omega, \\ w_1 = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Además se sabe que

$$(PMF)\begin{cases} Lu + cu \leq 0 \ \text{ en } \Omega \text{ y } u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \text{implica} \\ u \equiv 0 \ \text{ en } \Omega \ \text{ ó } \ u > 0 \ \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

es verdadera si $c \leq 0$ y falsa si $c \equiv \lambda_1$.

Teorema 13 *Dado L en (12), los coeficientes de L, Ω y u satisfaciendo las mismas hipótesis del teorema 12. Entonces (PMF) es verdadero si $c(x) \lneqq \lambda_1$ en Ω.*

Aplicación: Estimaciones para la solución de una ecuación diferencial

Teorema 14 *Sea* $|\kappa| \lneqq \lambda_1$ *(*λ_1 *valor propio principal de* $-\Delta$*), y supóngase que*
$u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ *Lipschitz continua en* $\overline{B}$ *satisface*

$$(P.V.F.) \begin{cases} \Delta u + \kappa u = C_0 & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

donde $B := B_R(0)$. *Si* $C_0 \leq 0$, $-\lambda_1 \leq \kappa \leq 0$ *y existe un* $\gamma > 0$ *tal que* $u(x) \geq \gamma > 0$ *en* $B_\rho(0)$, *para un* $0 < \rho < R$, *entonces existen* $M > 0$ *y* $\delta > 0$ *tales que*

$$\delta(R - |x|) \leq u(x) \leq M\left(M - x^2\right) \quad \text{en } B.$$

Simetría esférica y monotonía radial de soluciones positivas para la ecuacion de Poisson no-lineal en $\mathbb{R}^n$

Lema 15 *Sean* $R > 0$, $u \in C^2(|x| > R) \cap C(|x| \geq R)$, $u > 0$ *en* $|x| \geq R$, *tendiendo a cero en el infinito y satisfaciendo*

$$Lu \equiv \left(\Delta + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\, \partial_j + c(x) \right) u \leq 0 \quad \text{en } |x| > R,$$

donde $b_j = O\left(|x|^{1-p}\right)$, $c(x) = O\left(|x|^{-p}\right)$ *en el infinito,* $p > 2$, *y además continuas en* $|x| \geq R$. *Entonces, existe un* $\mu > 0$, *tal que*

$$u(x) \geq \frac{\mu}{|x|^{n-2}}.$$

Lema 16 *Sean* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es positiva y* C^2 *en* $\mathbb{R}^n$, $u = O(|x|^{-m})$, *en el infinito*, $m > 0$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *acotado y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es tal que en el intervalo* $0 \leq u \leq u_0 = \max u$, $g = g_1 + g_2$ *con* $g_1 \in C^1$, g_2 *continua y monótona no decreciente.* u *es solución de*

$$\Delta u + b(x)\, u_1 + g(u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Supóngase que existe un $\lambda \in [0, \infty)$ *tal que*

1. $b(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$

2. $u_1(x) \leq 0$ *y* $u(x) \leq u\left(x^\lambda\right)$ *para todo* $x \in \Sigma(\lambda)$,

3. $u(z) \neq u\left(z^\lambda\right)$ *para algún* $z \in \Sigma(\lambda)$.

Entonces

$$u(x) < u\left(x^\lambda\right) \quad \text{para todo } \; x \in \Sigma(\lambda),$$
$$u_1(x) < 0 \quad \text{para todo } \; x \in T_\lambda.$$

Lema 17 *Si* $f \in C(\mathbb{R}^n)$ *satisface* $f(y) = O\left(|y|^{-q}\right)$ *cerca al infinito,* $q > n+1$, $u \in C^2$ *y existe un* $C > 0$ *tal que*

$$u(x) = C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces

a)

$$|x|^{n-2} u(x) \longrightarrow C \int f(y)\, dy, \quad \text{cuando } |x| \to \infty.$$

b)

$$\frac{|x|^n}{x_1} u_1(x) \longrightarrow -(n-2)\, C \int f(y)\, dy, \quad \text{cuando } |x| \to \infty, \text{ con } x_1 \to \infty.$$

c) *Si* $\{\lambda^i\} \subset \mathbb{R}$ *con* $\lambda^i \longrightarrow \lambda$ *y* $\{x^i\}$ *es una sucesión en* $\mathbb{R}^n$ *tendiendo* *al infinito, con* $x_1^i < \lambda^i$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\frac{\left|x^i\right|^n}{\lambda^i - x_1^i}\left(u\left(x^i\right) - u\left(x^{i^{\lambda^i}}\right)\right) \longrightarrow 2\left(n-2\right)C\int f\left(y\right)\left(\lambda - y_1\right)dy.$$

Teorema 18 *Sea u solución positiva y de clase C^2 de*

$$-\Delta u = g\left(u\right) \quad \text{en } \mathbb{R}^n,\ n \geq 3, \tag{15}$$

con $u\left(x\right) = O\left(\left|x\right|^{-m}\right)$ en el infinito, $m > 0$.

Supóngase: **(i)** *En el intervalo $0 \leq u \leq u_0$ donde $u_0 = \max u$, $g = g_1 + g_2$ con $g_1 \in C^1$, g_2 continua y monótona no decreciente.* **(ii)** *Para algún $\alpha > \max\left\{\frac{n+1}{m}, \frac{2}{m} + 1\right\}$, $g\left(u\right) = O\left(u^{\alpha}\right)$ cerca de $u = 0$. Entonces $u\left(x\right)$ es esféricamente simétrica alrededor de algún punto de $\mathbb{R}^n$ y $u_r < 0$ para $r > 0$, donde r es la coordenada radial alrededor de ese punto. Además*

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|x\right|^{n-2} u\left(x\right) = k > 0. \tag{16}$$

¡Gracias!

bbarraza@uninorte.edu.co