

# *MAGUA*

**REVISTA DE MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO**

Volumen I Número 1

• Enero-Junio 2014

• ISSN:2389-7422 (En linea)



**REVISTA DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO—MATUA**

ISSN

Volumen 1 Nro. 1 Año 2014

**POR**TADA

Imagen de la banda de Moebius. Tomada de: <http://home.online.no/~t-o-k/>

DIRECTORES

**JORGE LUIS RODRÍGUEZ CONTRERAS**

**ALEJANDRO URIELES GUERRERO**

EDITORIA

**SONIA VALBUENA DUARTE**



**UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO**

RECTORA

**ANA SOFIA MESA DE CUERVO**

VICERECTOR ADMINISTRATIVO Y FINANCIERO

**FREDDY DÍAZ MENDOZA**

VICERECTOR DE DOCENCIA

**REMBERTO DE LA HOZ REYES**

VICERECTORA DE INVESTIGACIONES, EXTENSIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL

**RAFAELA VOS OBESO**

DECANO FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

**LUIS CARLOS GUTIERREZ MORENO**

El material de esta publicación no puede ser reproducido sin la autorización de los autores y editores. La responsabilidad de este texto corresponde a los autores.

©UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

BARRANQUILLA, 2014



## **COMITÉ EDITORIAL**

### **1. Comité Editorial**

**Jorge Rodríguez Contreras** (Universidad del Atlántico) – Director  
**Alejandro Urielles Guerrero** (Universidad del Atlántico) – Director.  
**Sonia Valbuena** (Coordinadora Editora)  
**Jorge Robinson** (Editor de la sección de Matemáticas Computacionales)  
**Ramiro Peña Galezo** (Editor de la sección de Matemáticas aplicadas)  
**Julio Cesar Romero** (Editor de la sección de Matemática educativa)  
**Lesly Salas Medina** (Editora de la sección de Estadística)  
**Gabriel Vergara Ríos** (Editor de la sección de Matemática pura)

### **2. Comité Científico**

**Dr. Carlos Carpintero** (Universidad de Oriente, Venezuela)  
**Dr. José Manuel Rodríguez** (Universidad Carlos III de Madrid, España.)  
**Dr. Alfonso Castro.** (Department of Mathematics. Harvey Mudd College. Claremont).  
**Dr. Miguel Caro** (Universidad del Atlántico - Colombia)  
**M.C. María del Pilar Rosado.** (Universidad Autónoma de Yucatán, México)  
**M.C. Jesús David Berrio** (Universidad Industrial de Santander- Colombia)  
**Dr. Ramón Matos** (Universidad del Atlántico- Colombia)

### **3. Comité de diagramación y Diseño**

**María Angélica Serje** (Coordinadora de Diagramación y Diseño)  
**Antalcides Olivos**  
**Laura Rua**  
**Diana Vargas**

### **4. Apoyo Administrativo**

Decanatura de Ciencias Básicas.

Vicerrectoría de Investigación

## ÍNDICE GENERAL

Los textos escolares y el error en Matemáticas.....	1
Conjuntos débilmente semi abiertos con respecto a un ideal .....	26
Una caracterización de la $\gamma$ - normalidad a través de cierta clase de funciones.....	31
Simulación numérica por MDF para la solución de la ecuación diferencial parcial que modela el flujo de contaminantes de un acuífero .....	40
Sobre una extensión de los polinomios de Apóstol- Euler generalizados.....	52
Introducción a la presentación de grupos.....	58
Sobre el teorema de Burnside para anillos de matrices .....	66
Estudio numérico de la propagación de ondas electromagnéticas 2-D por FDTD .....	71
Espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ .....	77
Eventos académicos y la investigación en el programa de Matemáticas.....	86

## **EDITORIAL**

La Revista de Matemáticas de la Universidad del Atlántico, MATUA, editada por la Universidad del Atlántico tiene por objeto el posicionarse como un referente en la publicación de resultados de investigaciones locales, nacionales e internacionales en las diferentes áreas de la Matemática, incluida su enseñanza.

Este primer número la Revista MATUA, presenta una interesante colección de trabajos inéditos en las diferentes secciones que contiene tales como artículos de investigación extensos y cortos, notas y artículos de revisión. Al respecto, se pueden encontrar contribuciones relacionadas con la Enseñanza de las Matemáticas, las Matemáticas Aplicadas y de Matemática pura. Escritos por investigadores que poseen formación desde el nivel de Doctorado hasta trabajos desarrollados por estudiantes de Matemáticas o ciencias puras en compañía de sus tutores u orientadores.

Es importante destacar el profundo agradecimiento que el comité editorial manifiesta a las directivas de la Universidad del Atlántico, la Vicerrectoría de Investigaciones y su personal de apoyo, a la Decanatura de Ciencias Básicas por su incondicional apoyo sin el cual no se hubiera podido llevar acabo esta publicación. También agradecemos a todos los investigadores evaluadores que nos colaboraron con sus revisiones oportunas, eficientes y de calidad sin la cual no hubiésemos podido alcanzar la calidad de artículos que hoy presentamos a la comunidad académica.

# Los textos escolares y el error en matemáticas

## Textbooks and mathematical errors

Walter O. Beyer K.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Instituto Pedagógico de Caracas- Venezuela  
E-mail: nowarawb@gmail.com*

*Received / Recibido: 22/12/2013. Accepted / Aceptado: 15/04/2014*

---

### Resumen

El presente trabajo es un estudio acerca de los errores, malentendidos y obstáculos en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, enfatizando su presencia en los textos escolares. Sin entrar en una teorización profunda de las nociones de error y malentendido se definirán ambos, mostrando similitudes y diferencias entre ellos. Asimismo, se estudia el constructo obstáculo, poniendo atención a los obstáculos didácticos. Se presentan una serie de situaciones en las cuales aparecen errores, malentendidos y obstáculos. Se muestra la posibilidad de categorizar los errores, a cuyo fin se presentan varias clasificaciones. Se seleccionó un grupo de textos escolares usados en Venezuela y de ellos fue extraída una selección representativa de situaciones de aprendizaje, las cuales son analizadas a la luz de los elementos discutidos con anterioridad en el trabajo. Como resultado de la revisión de los textos se obtuvo un cúmulo de errores, fundamentalmente aquellos de tipo conceptual están presentes en ellos. En algunos temas, como el relacionado con las medidas, esto puede dar una explicación parcial de los deficientes resultados que muestran los estudiantes de ese país en este tema del currículum. Finalmente, se exponen algunas estrategias para enfrentar los errores y los malentendidos, alternativas que se distancian enormemente de la clásica penalización; así como se muestra también la posibilidad de construcción de situaciones didácticas partiendo de los errores, convirtiendo a éstos en una oportunidad para el aprendizaje.

*Palabras claves:* Errores en el aula, malentendidos, concepciones erróneas, obstáculos didácticos, errores en textos escolares.

### Abstract

The present work is a study about errors, misunderstandings and obstacles in math's teaching and learning, emphasizing their presence in textbooks. Without going into a deep theorization of the notions of error and misunderstanding we define both, showing similarities and differences between them. Also, the construct obstacle is studied, paying attention to the didactical obstacles. A number of situations in which errors appear and misunderstandings and obstacles occur are presented. The possibility to categorize errors is shown, for which purpose several classifications are presented. A group of school textbooks used in Venezuela was selected and of them was extracted a representative selection of learning situations, which are analyzed in the light of the elements discussed above at that work. As a result of the revision of these texts a wealth of errors was obtained, fundamentally those of conceptual type are present in them. For some topics, such as the related to measures, this can give a partial explanation for the poor results that show students in the country on this curricular subject. Finally, some strategies are discussed to face the errors and misunderstandings, alternatives that are distanced greatly from classical penalty; and it also we show the possibility of construction of teaching situations starting from errors, turning them into an opportunity for learning.

*Keywords:* Errors in the classroom, misunderstandings, misconceptions, didactical obstacles, errors in textbooks

---

## 1. Introduction

Ya son un lugar común las constantes quejas en torno al bajo rendimiento en matemáticas por parte de los docentes, de los padres y aún de la sociedad en general. Pero, ¿Es acaso el bajo rendimiento, manifestado usualmente mediante las malas calificaciones de los alumnos, el único y el más acusante de los problemas que confronta la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas? ¿Cuál es el nivel real de aquellos que aprueban la asignatura? ¿Manejan estos últimos realmente el aparato conceptual de la disciplina? ¿Cuáles son las fuentes de los errores y de las concepciones erróneas que manejan los estudiantes? ¿Cómo enfrentar estas situaciones?

Las respuestas posibles a estas y otras interrogantes son temas que han ocupado a los estudiantes de la problemática educativa, pueden ser diversas y aún admitir distintas interpretaciones; todo ello de acuerdo con las concepciones que de la educación, sobre la sociedad y acerca de la matemática tenga quien aborde los problemas antes planteados.

Una de las manifestaciones más palpables de los problemas que confronta una persona con su comprensión del conocimiento matemático tiene que ver con la aparición de lo que comúnmente se llaman errores. Estos se muestran o aparecen en diversos contextos: en las pruebas y exámenes; en los cuadernos de los alumnos; en estudios e investigaciones. Pero, en el aula los errores no están restringidos sólo a la actuación de los estudiantes: también los docentes los cometen y aún los libros de texto los tienen en abundancia. Podemos agregar que en los medios de comunicación masiva (TV, prensa, etc.) es altamente frecuente el encontrarnos con ellos. No escapan a ello los discursos de los políticos y aún las obras de los intelectuales.

Hay quienes se han propuesto recopilar errores presentes en el medio escolar, algunos con fines investigativos y otros con fines meramente divulgativos. En particular, varias obras escritas por docentes españoles se dedican a esto último. Así, Diez Jiménez (1970) recoge en su libro diversos errores a los cuales tuvo acceso mediante su labor docente. En otro libro del mismo tenor, Tapia Rodríguez (s/f), hay una nueva colección de errores producidos en la actividad escolar.

Por su lado, Claudi Alsina, destacado didacta de la matemática catalán, se decidió a recolectar una buena suma de errores matemáticos cometidos por individuos famosos de diferentes ámbitos, desde periodistas, pasando por políticos y hasta de reconocidos científicos, colección que dio lugar a su obra *Asesinatos matemáticos* (Alsina, 2010).

En el Prólogo de la obra (Alsina, 2010) se pregunta “¿Y quién comete estos errores?”, a lo cual él se responde:

Políticos, médicos, economistas, periodistas, técnicos, científicos, profesores, estudiantes, cocineros, ciudadanos de a pie... e incluso los propios matemáticos. Los disparates numéricos están presentes en todos los ámbitos de la vida, afectan a todos (como la gripe) sin distinción de clases... pues todos somos usuarios de las matemáticas.

Y para confirmar la afirmación anterior de Alsina veamos los siguientes casos.

El 7 de noviembre de 1940, en Tacoma (EE.UU.), el puente recién construido allí colapsó al poco tiempo de haber sido inaugurado debido a problemas en su diseño, a pesar de que su diseñador había sido Leon Moisseiff, un experto internacional en el tema. El puente colapsó debido a vibraciones inducidas por el viento: entró en resonancia, según se señala en muchos libros de física. Aunque, de acuerdo con el ingeniero Bertero (2002) “no fué, sin embargo, un caso de reso-

nancia sino una consecuencia del fenómeno aerodinámico conocido posteriormente como flameo torsional" (p. 1). En todo caso hubo una falla en su diseño que ocasionó el desastre y tras la cual se encuentran las matemáticas.

Otro caso paradigmático lo constituye el hundimiento del RMS Titanic el 15 de abril de 1912, luego de colisionar con un iceberg. Este navío, calificado de ser imposible que alguna vez sufriera un percance que condujera a su hundimiento, sin embargo sucumbió en su primer viaje y todo parece apuntar a que hubo fallas en su diseño, lo cual causó a fin de cuentas el desastre con las lamentables pérdidas humanas. Nuevamente tras bambalinas están las matemáticas. Más recientemente, el 23 de septiembre de 1999, la NASA sufrió la pérdida de la cápsula Mars Climate Orbiter, la cual debido a un error de navegación se estrelló en Marte. La causa indicada fue que un equipo usó unidades inglesas (e. g., pulgadas, pies y libras) mientras que otro equipo usó unidades métricas para una operación clave de la nave espacial con la consiguiente pérdida de varios millones de dólares invertidos en el proyecto.

## 2. El error en las aulas escolares: una primera aproximación

A pesar de lo antes señalado, pareciera ser que en las aulas de nuestros centros de estudios es donde el error campea con su presencia. Allí, generalmente una vez cometido por el alumno es penalizado por el docente; mas cuando es cometido por el enseñante no es penalizado y muy rara vez es rectificado por éste.

En este trabajo miraremos ambas caras del asunto, pero enfatizaremos en los errores, malentendidos y obstáculos que genera el propio docente, bien sea en su clase o a través del material escrito, como es el caso de los libros. Para comenzar, de seguidas presentamos algunos errores cometi-

tidos por alumnos y recopilados por varios docentes, para luego abordar los errores que aparecen en los textos escolares.

Entre los errores que compiló Diez Jiménez (1970) están unos que aparecen bajo el subtítulo de Disparates anotados por otros compañeros; de éstos extraemos tres:

"Medida de un ángulo.- Se mide con el kilómetro" (op. cit., p. 124). "Área del triángulo.- Es igual a la cuarta parte de la mitad de su lado por la semisuma de la raíz cuadrada de 3" (Ibíd.). "¿Qué es la hipotenusa? - Lo que está entre los dos paletos" (op. cit., p. 127).

Más adelante, en la misma obra y bajo un subtítulo similar, encontramos:

"¿Qué es logaritmo? - logaritmo o silogismo es una hipérbola, pero menor" (op. cit., p. 139). "Ángulos opuestos por el vértice.- Son los que son iguales, pero desiguales" (Ibíd.).

El autor del texto del cual hemos tomado los extractos anteriores era profesor de ciencias naturales cuando hizo su recopilación. Al comienzo del libro, en el Prólogo a la primera edición, la cual data de 1965, presenta una catalogación de los errores encontrados, luego de realizar algunas reflexiones sobre la actividad docente basadas en su experiencia. Son de interés las palabras con que inicia el Prólogo de la edición consultada (la 3<sup>a</sup>):

Podría iniciar de un modo muy clásico este prólogo -comentario a la Antología del disparate- aludiendo a los sentimientos contrapuestos que en mí ha suscitado. Leído solo, o acompañado, la sarta de disparates se ensarta con las carcajadas del lector y de los oyentes.

Cuando la risa cesa y la reflexión sobreviene, nos inunda la preocupación y hasta la tristeza, porque esos disparates provienen de exámenes y reválidas de nuestros alumnos presentes y futuros.

(Diez Jiménez, 1970, p. 7)

Por su lado, en su libro Tapia Rodríguez (s/f) muestra expresiones similares a las anteriormente expuestas por Diez Jiménez (1970). A continuación se consideran algunas.

“¿En qué consiste el Teorema de Pitágoras? En que los catetos saben sumar lo mismo que las hipotenusas”(Tapia Rodríguez, s/f, p. 37).

“¿Cuáles son los números reales? Los que se pueden ver y tocar. [...] ¿Qué es un tetraedro? Cuatro triángulos equidistantes”(op. cit., p. 38).

“¿Qué es la trigonometría? Es la parte de las matemáticas que sirve para medir los cuerpos tres veces”(op. cit., p. 39).

“¿Cuáles son los números enteros? Los que no se fraccionan fácilmente”(op. cit., p. 41).

La muestra anterior de respuestas obtenida en España, pensamos, no sería muy distinta si hiciésemos en algún otro país una recopilación similar de las contestaciones proporcionadas por los estudiantes a preguntas semejantes a las que formularon los autores antes citados. Sirva la lista antes presentada como una motivación al tema que se pretende discutir aquí.

### 3. Los gazapos más allá de las aulas

En franco apoyo a lo expresado por Alsina (2010) podemos agregar algunas situaciones que hemos podido recopilar en diversos contextos. El primer caso se refiere al ámbito familiar en donde está involucrado un camión cisterna similar al que se muestra en la Figura (1)

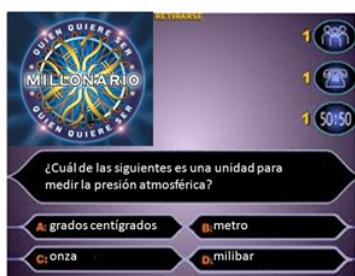


**Figura 1:** Imagen de un camión con cisterna en forma (aproximada) de cilindro elíptico

Es el caso que se requirió conocer, con cierto nivel de exactitud, la capacidad de tal cisterna. Un ingeniero de cierta empresa, que había contratado el camión, insistía en calcular el volumen co-

mo si de un paralelepípedo se tratara: largo x ancho x altura. Este profesional desconocía absolutamente cómo calcular el volumen de un cilindro elíptico, para luego transformar esta cantidad en litros. Cometía en sus cálculos un error de alrededor del 21,5Un segundo caso, casi anecdótico, se refiere al tamaño de cierto caimán. El habitante de los llanos venezolanos es por tradición algo exagerado en muchas de sus apreciaciones, algunas vinculadas a mitos y creencias transmitidas oralmente. Así, existe en los llanos una conseja acerca de un caimán, que algunos sitúan en el río Apure y otros en el Arauca, según la cual dicho saurio tiene una enorme longevidad y una longitud desmesurada. Se le atribuye un largo de 10, 12 y hasta 30 metros. La primera referencia a este asunto se la escuchamos a un alumno nuestro que se formaba para ser profesor de matemáticas. La segunda oportunidad ello era parte de la conversación entre un señor mayor y un joven, siendo este último quien insistía en el monstruoso tamaño del animal. La tercera vez apareció la historia dentro de dos discursos políticos. Sin embargo, revisando los estudios biológicos se encuentra que, por ejemplo, el caimán del Orinoco llega a alcanzar una longitud máxima de 6-7 metros y esto en ejemplares muy longevos que es bastante difícil de encontrar por la caza indiscriminada a la que es sometida la especie.

Una nueva situación digna de ser referida aconteció el domingo 16 de octubre de 2011, en el programa televisivo Quién quiere ser millonario. A un concursante, con título de Licenciado en Administración, se le planteó la interrogante con las alternativas que se muestran en la Figura (2)



**Figura 2:** Pregunta y alternativas de respuesta en programa televisivo

El concursante no supo la respuesta y acudió al comodín vota la audiencia. La votación arrojó los siguientes resultados: 43 % seleccionó la alternativa A (grados centígrados); 11 % seleccionó las alternativas B o C (metro y onza); y el 46 % escogieron D (el milibar). Vale decir, el 54 % desconocía nuestro sistema de unidades de medida. Los casos presentados, conformados por situaciones no escolares, muestran a las claras un mal manejo de las matemáticas, muy asociado al analfabetismo numérico; pero también corroboran los resultados obtenidos en 1998 a través del Sistema Nacional de Medición y Evaluación del Aprendizaje (SINEA).

#### 4. Errores, disparates, malentendidos y obstáculos: ¿Qué son?

Aunque no se centrará aquí la discusión en la teorización acerca de las distintas concepciones que sobre los errores han tenido educadores, filósofos, psicólogos y otros estudiosos, no obstante han de ser aclarados algunos puntos y es necesario hacer una ligera diferenciación entre errores y malentendidos.

Si se quisiera hacer un mínimo de análisis al tipo de respuestas erróneas, dadas por estudiantes, profesionales, políticos, etc., no basta simplemente catalogarlas todas como errores o como disparates o lograr un mecanismo clasificatorio

de las mismas. Es necesario precisar un poco ciertos términos, amén de tratar de establecer su etiología, para en una subsiguiente etapa puedan considerarse los modos de enfrentar dichas circunstancias -cuando acontecen en el ámbito educativo- y cómo éstas pudiesen ser empleadas -en muchos casos- como punto de partida para establecer interesantes discusiones con los alumnos y diseñar apropiadas y novedosas situaciones de aprendizaje.

Gómez Alfonso (1995) expone que en la enseñanza tradicional, especialmente en la orientada por el conductismo, el error era algo sin interés para el acto educativo y que por lo tanto era ignorado; pero que los nuevos puntos de vista, especialmente aquellos de tipo constructivista le han dado relevancia, proponiendo que los errores deben ser analizados para diagnosticar las dificultades de los alumnos y poder remediarlas o pueden ser explotados para generar experiencias nuevas de enseñanza. Así, trabajos como el de Radatz (1979) van orientados en la primera dirección; mientras que investigaciones como la de Borasi (1986) se enfocan encaminadas hacia la segunda vía. El error puede ser apreciado desde distintas visiones: la filosófica, la psicológica, la didáctica, etc. Desde el punto de vista filosófico cabe incluso la pregunta: ¿Existe realmente el error?

Apelando al filósofo Ferrater Mora (1974) encontramos que de acuerdo con Zenón de Elea (490-430 a.C.), uno de los presocráticos,

solamente puede hablarse del ser. Del no ser no puede enunciarse nada. Por lo tanto, el error es imposible. Una proposición que no sea verdadera no puede recibir el nombre de proposición; es, a lo sumo, un conjunto de signos carente de sentido [negrillas añadidas] (p. 139).

Otro punto de vista es el sostenido por Aristóteles. Así, para este pensador

a veces nos equivocamos en la posición de los términos pero que también erramos en el juicio expresado sobre ellos. Como según

Aristóteles nosotros vemos las cosas particulares por medio del conocimiento de lo general el error es posible sin excluir el conocimiento, pues el conocimiento se refiere a lo general, en tanto que el error alcanza lo particular [negrillas añadidas] (op. cit., pp. 139-140).

Tomemos como punto de partida la existencia del error aseverada en la manida frase *Errare humanum est*, colocada en el epígrafe del presente trabajo.

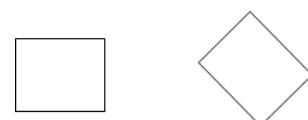
Vayamos primero a la definición de diccionario. Según el Larousse (1982) “error.<sup>es</sup>” “equivocación”, y tiene como sinónimos: “descuido, inexactitud, errata, falta, lapsus, yerro, aberración.” Mientras que “malentendido.<sup>es</sup>” un “equívoco, mala interpretación, mal entendimiento, incomprensión.” Por otra parte, un “disparate.<sup>es</sup>” un “hecho o dicho disparatado [vale decir, contrario a la razón].” También significa “contrasentido y desatino”. Popularmente se usan los vocablos *gazapo* y *pifia* como sinónimos de error. A su vez, un obstáculo es un “impedimento”, siendo sinónimos “barrera”, “dique”, “freno”, “valla”, entre otros. Por su lado Vallota (1994) expresa que “hemos de reconocer que el error es un hecho. ¿Cómo se explica el error? ¿Cómo se justifica? ¿Cómo se lo distingue? ¿Cómo se lo evita, si es evitable? Estos son los temas que Descartes desarrolla en la Meditación IV”(p. 110).

Profundizando un poco más en la idea cartesiana sobre el error, Vallota (1994) señala que “La posibilidad de error se puede clarificar como un problema epistemológico-psicológico, ubicado en el plano humano”(p. 119). Agrega que dentro de la concepción cartesiana “el error es algo diferente a la ignorancia, el error es una privación. Privación es ausencia de algo, pero de algo que debería estar”(op. cit., p. 123). Asimismo, “pensar el error como privación significa no solamente que para superarlo hay que llenar un vacío, lo que sería eliminar la ignorancia, sino

que hay que sustituir, corregir, rectificar”(op. cit., p. 124). Estas reflexiones de Vallota (1994), aunque expuestas en el campo de la filosofía tienen -si se asume este punto de vista cartesiano- enormes implicaciones para la didáctica.

En el campo educativo los errores están asociados básicamente con la obtención de respuestas incorrectas a una cuestión dada o a la aplicación de métodos inapropiados para la solución de un problema. No obstante, pudieran asociarse también a la comprensión incompleta o imprecisa de un concepto o noción matemática.

A los didactas les ha llamado poderosamente la atención la consistencia con que algunos estudiantes aplican ciertos procedimientos incorrectos, así como la regularidad en la aparición en diferentes poblaciones de ciertos errores. Algunas de estas regularidades son expuestas por Smith (1981). Un ejemplo del primer caso es el siguiente. Una alumna considera que la figura de la izquierda tiene 0 diagonales, mientras que la de la derecha (la cual es simplemente una rotación de la primera) posee 4. Esta alumna tiene una confusión entre el concepto de diagonal y el de línea oblicua. Sin embargo, ella consistentemente aplica su concepción errónea.



**Figura 3:** Un rectángulo y rotación del mismo un cierto ángulo

La situación descrita es una simplificación de un caso de estudio reportado por Pimm (1990). En lo que se refiere a errores que regularmente aparecen en poblaciones disímiles están los casos en que los alumnos escriben  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ , omitiendo el término  $2ab$  en el desarrollo del cuadrado o colocan  $\log(ab) = (\log a)(\log b)$ , seleccionando una operación incorrecta en el lado

derecho de la igualdad o escribir  $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y)$ . Forman parte de una familia de errores. Y son considerados por algunos como errores sistemáticos. Estos errores los denomina Maron (1979) la ley distributiva universal de los estudiantes.

Estas situaciones son producto de diversos factores, entre los cuales están el excesivo uso (¿abuso?) de la linealidad, la descontextualización con la que se enseñan las funciones (logarítmicas, trigonométricas,...), la falta de significado matemático de la simbología empleada, por sólo citar los más resaltantes. Sobre el tema de los errores Brousseau (1994) expresa que:

La epistemología genética ha ofrecido en ese sentido los argumentos más serios y más cercanos al conocimiento, pero otros trabajos son necesarios para utilizar sus aportes. Frecuentemente, los errores del alumno son interpretados por el docente como una incapacidad para razonar en general o, al menos como un error de lógica: en un contrato didáctico amplio, el docente se hace cargo de las representaciones, del sentido de los conocimientos. Pero, en condiciones más estrictas, simplemente es llevado a señalar dónde la respuesta del alumno se contradice con los saberes anteriores, evitando con cuidado todo diagnóstico sobre las causas del error. Este, reducido a su aspecto más formal, tiende a convertirse ya sea en un "error de lógica" "su razonamiento es incorrecto o en la ignorancia de un teorema o de una definición. (pp. 84-85)

Notamos aquí que el papel del error en el aula forma parte intrínseca del contrato didáctico. Contrariamente a algunas de las ideas antes expuestas los didactas adscritos a la corriente denominada Didáctica Fundamental, Brousseau entre ellos, han partido de la noción de obstáculo de Bachelard y la han incorporado al campo de la didáctica. También aquí notamos la génesis de una idea didáctica partiendo del campo filosófico. Si se adopta como herramienta de análisis el modelar el sistema didáctico mediante los constructos aportados por la Didáctica Fundamental, hay que apelar a la noción de obstáculo en lugar de considerar la idea de error tal como es tomada por otras corrientes de la Educación. Un tratamiento profundo de esta noción se encuentra en Astolfi (1999). Aquí sólo presentamos algunas ideas de carácter general acerca de dicha noción.

Siguiendo a Godino (1991) tenemos que

un "obstáculo" es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar concepciones y para ayudarles en conseguirlo (p. 134).

Continúa diciendo Godino (op. cit.): "observamos que, frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores pueden ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera vía de solución [negrillas añadidas]"(p. 135). La Didáctica Fundamental postula la existencia de diversos obstáculos:

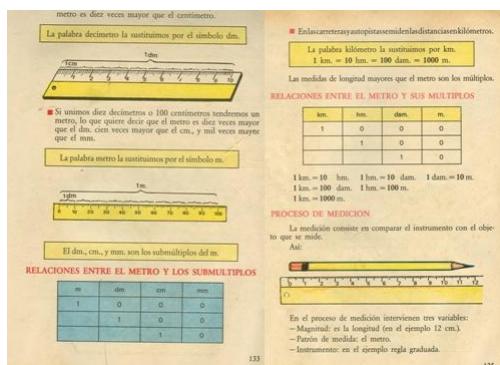
- Ontogenéticos: son debidos a las características del desarrollo del niño.
- Didácticos: resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.
- Epistemológicos: intrínsecamente relacionados con el propio concepto. Se puede evidenciar por medio de un análisis histórico que tal tipo de obstáculo debe ser considerado como parte del significado del concepto.

La idea de obstáculo epistemológico es tomada del filósofo Gastón Bachelard, quien en su obra La formación del espíritu científico plantea esta noción como la explicación para la aparición inevitable de algunos errores.

## 5. El caso de un verdadero disparate (en un texto escolar)

A título de ejemplo, y como preámbulo para una discusión más detallada en el presente trabajo de

las incorrecciones en las obras escolares, mostramos a continuación la digitalización de dos páginas de un manual escolar (Rodríguez, 1987, pp. 133 y 135). Se trata de un texto para el 4º Grado de Educación Básica. El tema tratado “Medidas de longitud” (Capítulo 17).



**Figura 4:** Dos páginas de un texto escolar de Rodríguez (1987)

Como se puede apreciar en la Figura 4, en la parte inferior de la página 133 se coloca un cuadro de equivalencias (“Relaciones entre el metro y los submúltiplos”), según el cual, en la fila 1 se lee que a 1 metro le corresponden 0 decímetros, 0 centímetros y 0 milímetros: a todas luces un absurdo. Si leemos las siguientes filas no obtenemos mejor resultado. En la página 135, nuevamente aparece un cuadro. Esta vez para las “Relaciones del metro y sus múltiplos”. Aquí, si leemos en la primera fila se tiene que 1 kilómetro son cero hectómetros; equivale a cero decámetros y a cero metros. Las siguientes filas siguen el mismo patrón. ¿Qué pensar al respecto? De manera optimista pudiera creerse que se trata de un error tipográfico. ¡Pero no! En el resto de los cuadros que se presentan, incluso para otras unidades de medida en capítulos subsiguientes -como las de peso- se sigue haciendo exactamente lo mismo. Pero, en la página 134, en sus primeras líneas, se señala que:

$$1m. = 10dm.$$

$$1dm. = 10cm.$$

$$1cm. = 10mm.$$

$$1m. = 100cm.$$

$$1dm. = 100mm.$$

$$1m. = 1000mm.$$

(op. cit., p. 134)

Algo similar puede apreciarse en la página 135, justo debajo de la tabla. Es decir, en la tabla (p. 133) se lee que 1 metro son 0 decímetros, 0 centímetros y 0 milímetros; y de seguidas nos dicen que 1 metro es igual a 10 decímetros; igual a 100 centímetros y a 1000 milímetros.

¿Alguna semejanza con el alumno español que responde que los ángulos opuestos por el vértice “son los que son iguales, pero desiguales”? Evidentemente ninguna. **¡Un disparate, pero dentro de un libro de texto!** Para colmo de males, en la página 138 se propone la siguiente actividad:

6 Completa:

	dm.	cm.	mm.
3 m.			
18 m			
37 m.			
50 m.			

Es inmediato preguntarse: ¿Qué alumno podría bajo estas circunstancias tener una comprensión de este tema? ¿Qué puede hacer un docente si un alumno llena la tabla propuesta en la Actividad con puros ceros? El estudio de los aspectos vinculados a la medida es uno en los que se manifiesta a las claras la forma atropellada en que se enseñan muchos tópicos matemáticos. Y es por ello que muchos ejemplos aquí presentados tienen que ver con esta temática; y, además, en estudios realizados (como el del SINEA) resalta por el bajo nivel de logro. A pesar del discurso teórico que podemos encontrar en los documentos curriculares, bien sea de tipo cognitivista o bien sea de tipo constructivista o ecléctico, el método de enseñanza empleado tradicionalmente en este tópico se reduce a seguir un proce-

dimiento mecánico, muchas veces representado mediante una escalera, por la que se asciende o desciende, y de acuerdo al caso se divide o multiplica.

## 6. Las representaciones prototípicas y los malentendidos

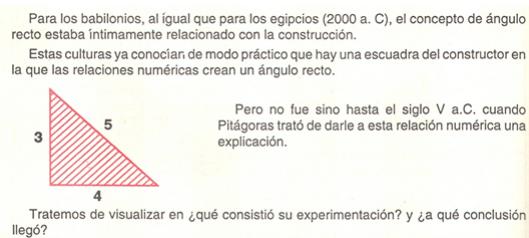
De seguidas se le dará un poco más de precisión a la noción de malentendido para que queden indicadas de manera clara sus diferencias con respecto a la noción de error, y a la vez las interrelaciones entre ambas. Una fuente notable de malentendidos -desde nuestra óptica- lo constituyen las gráficas y algunos otros tipos de representaciones que Beyer (2006) denomina prototípicas. También coincidimos con Adda (1987) quien señala que la fuerte imbricación entre significante y significado es una fuente de errores los cuales “nacen de malentendidos entre el maestro y el alumno provocados por los efectos parásitos de la comunicación didáctica en la enseñanza de las ás” (p. 1). Un ejemplo de lo afirmado por Adda (1987) lo encontramos en un alumno que entendía “máximo como un divisor” en lugar de “máximo común divisor”. Esta situación me fue reportada por la Dra. Lelis Páez (comunicación personal, marzo de 1994). En otra oportunidad otro profesor nos hizo similar comentario de otro alumno que le ocurrió exactamente esto mismo. Es decir, la confusión no es infrecuente. El hecho se debía a una dicción deficiente del docente, aunado esto a que el mismo mencionaba la expresión en forma oral pero no la colocaba en forma escrita. Pasemos a estudiar un poco las representaciones prototípicas, los posibles malentendidos que pueden surgir como consecuencia de ellas y sus potenciales efectos. Así, por ejemplo, en la Figura 5 que mostramos a continuación aparecen dos triángulos.



**Figura 5:** Dos representaciones de triángulos en distintas posiciones

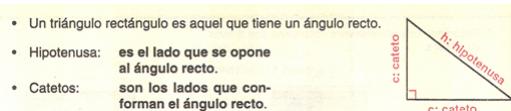
Una representación como la del lado izquierdo es la que se muestra usualmente en los textos escolares. Muy infrecuente es la aparición de la representación del lado derecho en los libros de estudio de los alumnos. La del lado izquierdo es la representación prototípica. ¿Qué problemas puede generar (¿genera?) la representación prototípica de los triángulos? En primer lugar, puede fijar (¿fija?) en el alumno la idea equivocada (un malentendido) de que siempre los triángulos se apoyan en una de sus bases y que ésta está situada de manera horizontal. Esto hace que para muchos alumnos la representación del lado derecho no corresponda a un triángulo. El alumno va interiorizando, de manera equivocada, que una propiedad intrínseca de los triángulos es estar en esa posición y no en otra como la del lado derecho. En segundo lugar, en la generalidad de los casos los autores de textos escolares optan por colocar o bien triángulos rectángulos, o bien triángulos isósceles y hasta equiláteros. Nuevamente se agregan características que corresponden a triángulos particulares como si fuesen parte integrante de la noción general de triángulo. En tercer término, los triángulos se presentan en la inmensa mayoría de los casos sin relleno. Entonces, ¿cuál es el sentido de la noción de área para tal figura? ¿Por qué sí diferenciamos la circunferencia del círculo llenando este último y por qué no hacemos lo mismo entre el borde del triángulo y la región encerrada por ese borde? Por si se abriga alguna duda de que esto ocurre, mostramos a continuación varios extractos de textos suficientemente representativos de las observaciones antes formuladas. Comen-

cemos con un extracto sobre el tema Teorema de Pitágoras tomado de Amelii y Lemmo (1994, p. 234), autores cuyos libros han tenido un uso relativamente extendido.



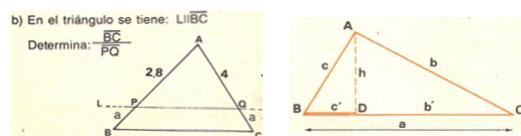
**Figura 6:** Extracto de Amelii y Lemmo (1994), p. 234

Como se puede observar, el triángulo mostrado posee una base horizontal, aunque en este caso se rellena no es lo usual en este texto. Sin embargo, ya en la siguiente página (y salvo en un anexo de ésta, en todas las páginas siguientes) los triángulos aparecen con la línea base horizontal, pero sin relleno. Justamente, este texto escolar usa casi exclusivamente representaciones prototípicas para los triángulos. Veamos otro ejemplo de lo que presentan Ameli y Lemmo (op. cit., p. 235):



**Figura 7:** Extracto de Amelii y Lemmo (1994), p. 235

Pasemos a otro texto, el de Flores de Tovar y otros (1988, pp. 146 y 148).



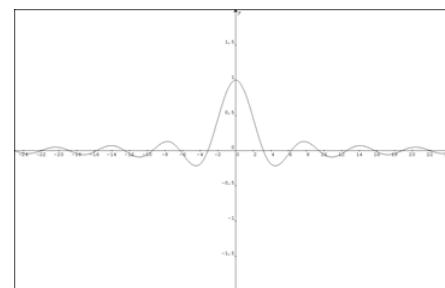
**Figura 8:** Extracto de Flores de Tovar y otros (1988), pp. 146 y 148

Nuevamente, como en el caso del texto preci-

tado, prevalecen las representaciones prototípicas, tanto en la posición del triángulo como en la ausencia de relleno. Aunque en descargo de estos autores ellos presentan algunos (muy pocos) triángulos en posición no prototípica, pero sin relleno. Una situación similar se presenta en las superiores con la noción de asíntota. La representación prototípica adoptada por los libros corresponde generalmente a la consideración de representaciones gráficas de hipérbolas, caso en el cual la recta y la curva de la cual ésta es asíntota nunca se cortan. Pero, esto no es parte de la noción de asíntota. Para comprobarlo basta el siguiente ejemplo.

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

La representación gráfica de la función y su respectiva asíntota horizontal se muestran a continuación:



**Figura 9:** Representación gráfica de una función cuya asíntota la corta infinitas veces

Como puede observarse, no sólo la curva y su asíntota se cortan, ¡sino que lo hacen infinitas veces! Puede apreciarse en las situaciones antes planteadas que, estrictamente hablando, no existe en ellas un error matemático como tal. Así, cuando un autor de texto está trabajando el tema de triángulos y los representa en forma prototípica no existe ninguna incorrección apropiamente dicha; pero, sí está generando en el alumno un patrón de representación que éste interpreta equivocadamente como el patrón general de representación de dichos objetos: he ahí el

malentendido. Y de allí al error, hay sólo un paso. Análogamente ocurre con la situación planteada referida a las asíntotas: las representaciones prototípicas generan en muchos casos malentendidos, y éstos dan frecuentemente paso al error. Otro caso de mal entendido se genera con el cero. Algunos autores de texto y algunos docentes lo incluyen en el conjunto de los números naturales; mientras que otros lo excluyen, todo ello sin explicación alguna. El problema se genera cuando un alumno en un año escolar se le enseña de una de estas maneras y en el siguiente de otra.

## 7. Cuando es el docente el que se equivoca: ¿Quién repara el error?

Una profesora en servicio, formada como docente en ás y con postgrado en su especialidad, a la cual tuvimos la oportunidad de observarle su clase, para demostrar que la función definida por  $f(x) = 2x$  es creciente razonaba así:

$$\begin{aligned} -1 < 0 &\Rightarrow 2(-1) = -2 < 2(0) = 0 \\ 1 < 2 &\Rightarrow 2(1) = 2 < 2(2) = 4 \\ 2 < 3 &\Rightarrow 2(2) = 4 < 2(3) = 6 \end{aligned}$$

Entonces, como cuando  $x < y$ , se tiene  $f(x) < f(y)$ , la función es creciente.

En guías elaboradas por la misma docente ella reincide en este procedimiento. Si bien es cierto que la función trabajada es creciente, la demostración que se pretende hacer de ello no es tal. Sólo ha verificado para unos pocos casos que si  $x < y$ , entonces  $f(x) < f(y)$ .

La situación planteada guarda un interés particular, por cuanto una de las competencias importantes dentro del campo de la á consiste en ser capaz de realizar demostraciones. Pero, por otra parte, un precepto básico en las demostraciones es que los casos particulares de validez de

una proposición á no son suficientes para garantizar la validez de ésta en general, y ello obliga a la realización de una prueba con cierto nivel de formalidad, la cual es variable de acuerdo con el nivel educativo en el cual se esté. La docente muestra que la propiedad que se quiere demostrar es válida para los casos expuestos: ergo lo realizado por ella no es una demostración, sino una verificación de algunos casos.

Como la docente hace pasar esta verificación como si fuese una demostración, estamos ante la presencia de un grave error metodológico. Los alumnos tendrán una idea errónea de lo que es una demostración, la cual se verá potenciada ante experiencias similares con otros docentes y con libros de texto que hagan lo mismo. Lamentable y difícilmente este error es reparado alguna vez, más aún cuando los alumnos son rara vez expuestos a la experiencia de tener que demostrar como consecuencia de los procedimientos memorísticos y algorítmicos a los cuales son sometidos casi todo el tiempo.

## 8. Algunos resultados reportados por el estudio del SINEA

En general, el común de la población tiene escasas nociones acerca de las medidas, y en las pruebas aplicadas por el SINEA fue justamente este tópico el que salió peor librado. En SINEA (1998a) se reporta, en las Conclusiones, que

en relación con el tópico de Medida, en ambas pruebas, los alumnos se encuentran también en el nivel de No Logro. El análisis de las respuestas pone en evidencia que no han adquirido los conocimientos, ni disponen de las herramientas mínimas para establecer relaciones entre múltiplos y submúltiplos, de cada una de las unidades de medida contempladas en los programas oficiales (p. 148).

Esto es lo que se obtuvo al realizar el estudio para la Primera Etapa de la Escuela Básica (Primeros tres años de escolaridad). Si vamos al segundo corte, en 6º Grado que marca el final de la Se-

gunda Etapa, los resultados no son más alentadores. Se señala en SINEA (1998b) que “en los tópicos Medida y Organización y Representación de Datos, el mayor porcentaje en todos los Estados se ubicó en el nivel de No Logro.” (p. 29) Se agrega que

en relación con el tópico de Medida, los alumnos se encuentran también en el nivel de No Logro. El análisis de las respuestas pone en evidencia que no han adquirido los conocimientos, ni disponen de las herramientas mínimas para establecer relaciones entre múltiplos y submúltiplos, de cada una de las unidades de medida contempladas en los programas oficiales (p. 139).

Es decir, se arriba exactamente a la misma conclusión que en el informe anterior; y esto ¡para alumnos con tres años más de escolaridad! En conclusión: los alumnos en su gran mayoría son incapaces de resolver problemas sencillos de conversión. Tomemos dos ejemplos de cada uno de los informes del SINEA antes citados.

1. “Rosa compró dos metros de tela roja y medio metro de tela azul, ¿cuántos medios metros de tela compró?” (SINEA, 1998a, p. 103)
2. “Luis recorre 29 kilómetros para ir al trabajo. ¿Cuántos metros recorre Luis?” (SINEA, 1998a, p. 104)
3. “La hacienda del abuelo de Ana mide 2 hectáreas y media. ¿Cuánto mide la hacienda en metros cuadrados?” (SINEA, 1998b, p. 131)
4. “¿Cuántos metros hay de la Escuela a la casa de Pedro, si la distancia es de 12,3 km?” (SINEA, 1998b, p.132).

Entre las dificultades detectadas se señalan: Para la pregunta 1) “la equivalencia entre metro y medio metro” (SINEA, 1998a, p. 103). Para la pregunta 2), “desconocen la relación entre el kilómetro y el metro. Desconocen que un kilómetro es mayor que un metro” (op. cit., p. 104). Para la pregunta 3) “la aplicación de la

equivalencia entre hectárea y metro cuadrado.” (SINEA, 1998b, p. 131) Para la pregunta 4) “el manejo de la equivalencia entre el metro y el kilómetro” (op. cit., p. 132). Como puede apreciarse las dificultades señaladas para la correcta solución de los problemas propuestos son esencialmente las mismas. Si nos ubicamos cuantitativamente, los resultados para dichas preguntas son:

PREGUNTA	% DE RESPUESTAS CORRECTAS	% DE RESPUESTAS INCORRECTAS
1	32,2	67,8
2	44,7	55,3
3	30,8	69,2
4	29,7	70,3

Fuente: SINEA (1998a, 1998b)

Es destacable que, desde el punto de vista cuantitativo, los resultados del segundo informe sean peores que los del primero. Creemos que los datos son elocuentes con respecto a lo que se está planteando. Adicionalmente al reporte del SINEA hay varios interesantes estudios realizados por educadores matemáticos venezolanos como los de Solís de Cabello (1982), Cardelle Elawar y Ruiz Bolívar (1983), Páez (1986), Andonegui (1992) que aportan al análisis de esta temática.

## 9. Errores y malentendidos (revisitados): Una precisión necesaria

Ya en las páginas precedentes se han hecho diversos señalamientos en torno a las incorrecciones que pueden ser encontrados en el uso de las matemáticas en ámbitos muy diversos que abarcan desde el ciudadano común hasta llegar a individuos formados en áreas científico-tecnológicas. Esto conduce irremisiblemente a formularse las siguientes interrogantes: ¿Cuándo ocurre un error en matemáticas? ¿Cuándo ocurre un malentendido? ¿Por qué ocurre el error? ¿Qué importancia le podemos atribuir a los errores? Como ha podido apreciarse, dentro del universo de las incorrecciones existe una gama bastante extensa. ésta va desde el caso en el cual un alumno

escribe  $4-7 = 3$ , omitiendo el signo menos en la respuesta y proporcionando, por ende, un resultado incorrecto; hasta la aparición de expresiones como  $3x = 6 = x = 2$  en donde la persona emplea de manera incorrecta el segundo signo de igualdad, sustituyendo con él la implicación que debería ligar la expresión  $3x = 6$  con la expresión  $x = 2$ , luego de realizada la operación de dividir ambos lados de la primera igualdad por 3. En este ejemplo se nota una pérdida total de sentido para el signo de igualdad, así como de la propiedad transitiva que posee esta relación. Este tipo de situación la hemos visto repetidas veces: en un comercial de TV de una cadena de ropa; en un juego didáctico presentado en un congreso educativo en la Universidad Central de Venezuela en 2012 y reiteradamente en un antiguo libro de Aritmética Comercial (Iradi, 1874).

En la situación en la cual falta el signo menos precediendo al número 3 la respuesta incorrecta podría haber sido originada por un simple “descuido” (por una distracción o por cansancio) de la persona al resolver la operación; pero, también podría ser el no haber aprendido la suma de números enteros o un conocimiento deficiente de ésta. Con la sola observación de la respuesta escrita en el papel o en la pizarra no se puede discriminar si se trata de un desconocimiento del procedimiento o esto es producto de una omisión involuntaria. La segunda situación presentada ocurre con mucha frecuencia. A todas luces estamos ante un error. Este es un caso en el cual el error no es de fácil erradicación, más aún por la circunstancia de que el resultado obtenido al final ( $x = 2$ ) es la solución de la ecuación dada inicialmente.

Las dos situaciones antes planteadas permiten hacer ver que el docente debe tomar actitudes diversas ante los resultados, procedimientos y/o

demostraciones erróneas proporcionadas por los estudiantes. Además, es necesario hacer una primera distinción entre las fallas de tipo operativo y aquellas cuyo origen está en una pobre adquisición de conceptos y propiedades. Ambas, en principio, son cualitativamente distintas. Así, por ejemplo, retomando la situación reportada por Pimm (1990), ésta se corresponde con una confusión entre dos conceptos matemáticos: el de diagonal y el de línea oblicua. Es importante destacar aquí que la niña en cuestión era absolutamente consistente en sus respuestas al emplear la noción que ella suponía era la de diagonal, lo cual fue determinado por el investigador que reporta el caso. Este tipo de errores se suscita como consecuencia de un modelo de enseñanza-aprendizaje pobre, de tipo memorístico y centrado en lo operativo, con poca atención hacia lo conceptual. No se discuten a fondo los conceptos, discusión que debería estar acompañada de ejemplos y contraejemplos para una mejor comprensión de los alumnos.

Las anteriores situaciones conforman ejemplos de lo que en el presente trabajo está catalogado como error. Por otro lado, retomado la situación reportada por Páez (comunicación personal, marzo de 1994), ésta es un caso típico de lo que catalogamos (siguiendo a Adda, 1987) como un malentendido. Por una o diversas causas posibles (mala dicción del profesor, exceso de ruido, distracción del estudiante, mala audición del alumno, o alguna combinación de las anteriores) el alumno entiende que el docente dice “máximo como un divisor” en lugar de “máximo común divisor”. El elemento trascendente tiene que ver con la predominancia del lenguaje oral por sobre el escrito en nuestros salones de clase, por lo cual el alumno a lo mejor nunca había visto escrita la expresión “máximo común divisor”. Por ejemplo, en Beyer (2003, 2006) se

analiza con más detalle esta situación. Esto último nos indica que también debemos distinguir entre las categorías error y malentendido.

Pero, un asunto más de fondo es el que trata con la etiología del error; vale decir el estudio de las causas que los originan. Esto conduce indefectiblemente a realizar investigaciones profundas cuyos resultados permitan subsanar los errores y a la vez profundizar en el conocimiento matemático de nuestros alumnos. Ello a su vez conduce a atribuirle a los errores una importancia didáctica que, entre otras cosas, conduzca a diseñar interesantes y novedosas situaciones de aprendizaje para los estudiantes. Por supuesto que la ocurrencia del error y su etiología pueden ser analizadas de diversas maneras, dependiendo del lente teórico que se emplee para ello. Sin embargo, un primer paso para su estudio es establecer una taxonomía de los mismos.

## 10. Algunos comentarios acerca de la clasificación de errores

¿Tendrán todos los errores las mismas características o es posible categorizarlos? Al respecto podemos señalar que existen muchas clasificaciones posibles para categorizar los errores. Ya se ha señalado al inicio de este artículo que Diez Jiménez (1970) realiza un procedimiento empírico, no muy técnico, para catalogar los errores que recopila. Una categorización interesante, desde la óptica de la Teoría del Procesamiento de la Información, es la que nos presenta Radatz (1979, p. 168). Las categorías que nos proporciona este autor son las siguientes:

- Errores debidos a dificultades del lenguaje.
- Errores debidos a dificultades en obtener información espacial.
- Errores debidos a la deficiente maestría con herramientas, hechos y conceptos los

cuales son pre-requisito para un conocimiento dado.

- Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

El autor pudo detectar en innumerables ocasiones en cursos de probabilidad y estadística las dificultades que presentaban los alumnos con expresiones típicas de esta área de las matemáticas como “al menos”, “a lo sumo”, en problemas con enunciado verbal. Corresponden estos, pues, a la categoría Errores debidos a dificultades del lenguaje. De la misma índole son aquellos que ocurren por mala interpretación de la simbología como es el caso del mal uso de los cuantificadores por falta de comprensión de los mismos. Otra clasificación es la propuesta por Movshovitz-Hadar y otros (1987). Las categorías que proponen son:

- Datos mal usados.
- Lenguaje mal interpretado.
- Inferencia lógicamente inválida.
- Teorema o definición distorsionada.
- Solución no verificada.
- Error técnico.

Así, por ejemplo, si un alumno al resolver un problema sobre rectángulos en el cual no se indique el tipo de rectángulo y asuma sin ninguna base que éste es de una clase particular (rectángulo, equilátero, isósceles, etc.) cae en el caso de Datos mal utilizados; mientras que el caso de la niña que confunde diagonal con línea oblicua corresponde, de acuerdo con esta clasificación, a una definición distorsionada.

En opinión de Rico (1995) esta última categorización se funda más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Por su lado, Gómez Alfonso (1995) centra más la atención en clasificar los procedimientos erróneos que los propios errores que cometan los alumnos al realizar cálculos mentales, lo cual le conduce a considerar:

- Extrapolaciones: consiste esto en extraer pasos de un método válidos dentro de un contexto e insertarlos dentro de otro método en el cual no funcionan.
- Generalizaciones: Extensiones de métodos completos a situaciones para las cuales no funcionan.
- Centramientos: Interferencias que le ocurren al resolutor en un paso o resultado intermedio y que desvían el proceso del camino correcto.

Si nos enfocamos por la visión de la Didáctica Fundamental habría que considerar la idea de obstáculo con sus tres tipos: ontogenéticos, didácticos y epistemológicos, a los cuales ya aludimos con anterioridad en el presente escrito.

## 11. La presencia del error en los textos escolares de matemáticas

Si examinamos los textos escolares de matemáticas es posible que nos encontremos muchas sorpresas. Una de ellas es hallar en muchos de ellos un buen número de errores, algunos de los cuales incluso son de tipo conceptual. Muchos más son los malentendidos; y mayor aún son las deficiencias didácticas presentes en una buena cantidad de textos en uso en las aulas venezolanas. A continuación se mostrará una selección de algunos de ellos.

### CASO 1:

Consideremos en primer término la conocida Aritmética de Baldor. En la sección numerada 579 (Baldor, 1940, p. 495; Baldor, 1955, p. 536; Baldor, s/f, p. 436) al resolver un problema sobre densidades se escribe como respuesta:  $\frac{4,74\text{Kgs}}{0,79\text{Kgs}} = 6\text{ls.}$ , capacidad de la vasija.

Se comete, pues, un error en la manipulación de las unidades de medida. Como puede apreciarse, si se dividieran dos cantidades expresadas en la misma unidad de medida, la cantidad resultante sería adimensional. El error radica en este caso que ya desde el inicio de la solución se escribía la densidad sin unidades (“Siendo la densidad del alcohol 0,79”) y luego se magnifica el error al hacer la división antes señalada.

En la sección Ejercicio 272 el enunciado 36 reza así: “¿Qué velocidad es mayor, 50 millas por hora u 80 Kms. por hora?” (Baldor, 1940, pp. 507 y 740; Baldor, 1955, p. 551; Baldor, s/f, p. 447) En ambas ediciones se da por respuesta “50 mill.” Lo cual es incorrecto ya que la milla no es una unidad de velocidad.

Un hecho que llama poderosamente la atención es que estos errores han permanecido en el tiempo a través de las diversas ediciones de la obra como ha podido constatarse revisando tres ediciones de la misma.

### CASO 2:

Tomemos un libro de fines de la década de los 50. Aunque, en general, la obra tiene pocos errores no está exenta de ellos. En el libro se plantea la siguiente situación:

“Un barco recorre 8 millas y 8 nudos y otro 6 millas y 14 nudos. ¿Cuál es la distancia

recorrida entre los dos?" (Pascual Rodríguez, 1957, p. 26).

La incorrección está en el mal empleo de las unidades por cuanto un nudo es una unidad de velocidad (representa una milla náutica por hora, vale decir 1852 metros por hora), mientras que la milla es una unidad de distancia. Esto convierte al problema en irresoluble.

### CASO 3:

Tomemos por ejemplo un libro muy empleado en la educación venezolana, el de Mendiola (1982). En dicha obra, escrita para la Educación Media (Ciclo Básico), se encuentra la siguiente definición:

"**FUNCIÓN INYECTIVA** A elementos diferentes del dominio le corresponden imágenes diferentes en el rango.

$$Rango(f) \subset B \quad (op.cit, p,144).$$

Aquí B representa el conjunto de llegada. Si se analiza la definición proporcionada, se nota que la afirmación  $Rgo f \subset B$  no es un equivalente simbólico de lo dicho en palabras en las líneas precedentes. Además, la inclusión del rango en el conjunto de llegada B siempre ocurre, es una propiedad que cumplen todas las funciones, y no una propiedad diferenciadora entre una función arbitraria y una que sea inyectiva. En consecuencia, la definición dada en el texto es errónea. Así, por ejemplo, la función definida por  $f(x)=\sin(x)$ , considerada de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  cumple con lo señalado en el recuadro, pero evidentemente no es inyectiva.

En otra de sus obras (Mendiola, 1991) se reitera la misma situación: ¿Qué puede decirse? Si empleamos la categorización de Movshovitz-Hadar y otros (1987) estamos en presencia de la

categoría *Teorema o definición distorsionada*.

### CASO 4:

A continuación copiamos textualmente el siguiente desarrollo, tomado de un texto elaborado por Rincón y Gómez (1994):

$$\boxed{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$$

**Figura 10:** Extracto de la página 129 de Rincón y Gómez

¿Qué podemos detectar aquí? ¿Qué consecuencias didácticas puede acarrear esta situación? Observamos que la actividad planteada es una suma de fracciones con distinto denominador. Los autores realizan un proceso mediante el cual se pretende amplificar ambas fracciones y reducirlas a un común denominador. Sin embargo, dicho proceso está plagado de errores: mal uso de la igualdad, noción equivocada de cómo se amplifica una fracción confundiéndolo con la multiplicación de una fracción por un número entero.

Justamente son los mismos errores que con alta frecuencia cometen los estudiantes; pero, ¡esta vez están plasmados en el libro de texto! Analicemos con más detalle la situación:

Los autores escriben:

$$\frac{3}{4} * 3 = \frac{3 * 3}{4 * 3}$$

Esta igualdad no es cierta por cuanto

$$\frac{3}{4} * 3$$

significa multiplicar la fracción por tres lo cual daría como resultado

$$\frac{9}{4}$$

mientras, el lado derecho corresponde a una amplificación de la fracción, obteniéndose la fracción

$$\frac{9}{12}$$

equivalente a la original. El mismo error se reitera al tratar de amplificar el segundo sumando de la adición planteada. Asimismo, los autores escriben:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} * 3$$

Luego, al escribir lo que citamos en la línea de arriba, el signo de igualdad está mal empleado ya que el resultado del lado izquierdo evidentemente no es igual al del lado derecho. Es sumamente común encontrar este mal empleo del signo igual en muchos estudiantes, cuando éstos al realizar operaciones sobre una expresión, transformándola, utilizan el signo = como un conector en lugar del signo  $\Rightarrow$  que simboliza “implica que” o “se deduce que”.

#### CASO 5:

En esta oportunidad tomamos un texto para la Tercera Etapa de Educación Básica. Se trata de una obra de Amelii y Lemmo (2003) para 7º Grado el cual está plagado de situaciones erróneas. En aras de la brevedad de la presentación lo haremos mediante una tabla.

Extracto de la obra	Página(s)	Comentario
Luego de mostrar una imagen de una recta numérica sobre la cual se han marcado los números enteros, los autores escriben: “ $Z' < 0 < Z''$ ”	21	Evidentemente esto es un exabrupto. En los extremos de la desigualdad aparecen conjuntos, y para éstos la relación $<$ no tiene sentido; además se les compara con un número.
Toda potencia elevada al exponente cero (0) es igual a la unidad: $a^0=1 \quad a \in Z''$	29	No se señala que la base debe ser distinta de 0. El error está tanto en lo expresado en palabras como en la expresión simbólica.
“Cuando decimos que $b$ es divisible entre $a$ o simplemente que $b$ es divisor de $a$ , estamos afirmando que $b$ divide a $a$ exactamente.”	33	Tenemos aquí un bártirillo. Esta frase es un verdadero sinsentido. No puede calificarse de otra manera que como un disparate.
“Una fracción de denominador cero no existe: $\frac{n}{0} \not\exists$ ”	41	Se emplea el simbolismo de manera equivocada. Hay un mal uso del cuantificador existencial y de la igualdad. Nuevamente un disparate.
Se quiere comprobar que dos fracciones son equivalentes y se escribe: “ $\frac{1}{2} \times \frac{8}{16} = 1.16 = 8.2$ ”	45	Mal uso de la igualdad.

Fuente: Amelii y Lemmo (2003)

Puede apreciarse, con la selección de extractos de la obra, los cuales no recogen sino una pequeña parte de los errores y malentendidos presentes en ella, que éstos muestran a las claras las profundas deficiencias conceptuales que son transmitidas a los alumnos; el desconocimiento en el uso correcto del lenguaje matemático; así como que el alumno quede con la percepción de que la matemática está compuesta por un conjunto de afirmaciones, reglas y propiedades autocontradicitorias e incoherentes.

#### CASO 6:

Consideremos otro libro el cual ha sido ampliamente usado por el profesorado venezolano. Se trata de una obra de Brett y Suárez (2002) para el 9º Grado de Educación Básica (actual 3º de Educación Media, de acuerdo con la última reforma). El libro, de manera similar a otros analizados tiene un sinnúmero de errores conceptuales y de cálculo; malos usos de la nomenclatura del sistema internacional de medidas y del lenguaje matemático; profusión de ambigüedades y de explicaciones confusas, por sólo citar algunas de las falencias y errores de dicho texto. Al trabajar con los números reales encontramos lo siguiente:

Caso (b): Adición de dos números racionales. Dados los números racionales  $5/3 ; 1/4$ , hallar la suma.  
 $5/3 + 1/4 = (20 + 3)/12 = 1,666\dots; 1/4 = 0,25$   
 $1,6 + 0,2 = 1,8$  con aproximación a las décimas.  
 $1,66 + 0,25 = 1,91$  con aproximación a las centésimas.  
 $1,666 + 0,250 = 1,916$  con aproximación a las milésimas.  
Sin aproximar  $5/3 + 1/4 = (20 + 3)/12 = 23/12$  (es el valor real) En conclusión... La adición de dos irracionales es un racional. (Brett y Suárez, 2002, p. 24)

Como puede apreciarse, en la tercera línea del extracto hay un error de cálculo ya que  $23/12$  no es igual a  $1,666\dots$  El resultado de esta operación es:  $1,91666\dots$  Pero, obviando dicho error de cálculo, lo más grave es la afirmación que le sigue. La cual se resalta en negrillas dentro de un recuadro con fondo para hacerla lo más visible posible y con una mano señalándola. Podríamos darle a los autores el beneficio de la duda y suponer que allí hubo simplemente un error de transcripción y lo que se quería decir es que el conjunto de los números racionales es cerrado para la adición. Sin embargo, esto se desvanece al observar lo que sigue en dicha página y que transcribimos a continuación.

Caso (c): Adición de dos irracionales. Dados los irracionales  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{8}$ , hallar la suma.  $\sqrt{3} = 1,732$ ;  $\sqrt{8} = 2,828$   
 $1,7 + 2,8 = 4,5$  con aproximación a las décimas.  
 $1,73 + 2,82 = 4,55$  con aproximación a las centésimas.  
 $1,732 + 2,828 = 4,560$  con aproximación a las milésimas.

En conclusión... La adición de dos irracionales es otro irracional.(Brett y Suárez, 2002, p. 24)

Si analizamos esta segunda parte encontramos un mal empleo de la igualdad al señalar que cada una de las raíces dadas es igual a lo que se escribe en el lado derecho, desdiciendo de lo que se intenta hacer debajo, ya que se trata sólo de una aproximación y así debiera estar indicado empleando el símbolo de aproximadamente igual y no el de igualdad.

Por otra parte, en ambos extractos se pretende llegar a conclusiones generales a partir de meras verificaciones de unos casos particulares: craso

error. Por último, se coloca como conclusión que los números irracionales forman un conjunto cerrado para la adición, lo cual es absolutamente falso, para lo cual basta adicionar cualquier irracional con su opuesto (que también es irracional) lo cual da cero que es un número racional. En otra parte del texto, se indica: "el dominio de la función pertenece al conjunto de los números reales". Hay aquí un mal empleo del lenguaje matemático y una falla conceptual al confundir la relación de pertenencia con la de inclusión.

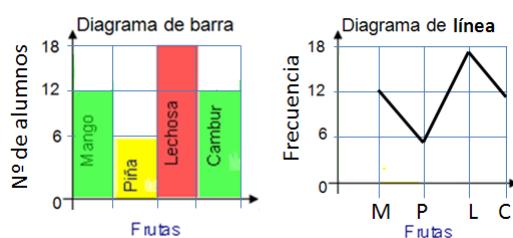
### CASO 7:

Consideremos a continuación una situación planteada en un texto para el 6ºGrado (Salazar, Navarro y López, 2000). En la obra en cuestión se proporciona, en la página 165, una información acerca de la preferencia de ciertas frutas por parte de los alumnos y se pide construir un diagrama de barras y uno de líneas para dicha situación. Seguidamente se presenta la tabla que mostramos a continuación:

Frutas	Frecuencia
Mango	12
Piña	6
Lechosa	18
Cambur	12
Total	48

Fuente: Salazar, Navarro y López, 2000, p. 165

En la respuesta proporcionada encontramos las siguientes gráficas:



**Figura 11:** Diagramas mostrados en Salazar, Navarro y López, 2000, p.165

Puede apreciarse aquí que los autores confunden un diagrama de barras con un histograma, objetos que conceptualmente son distintos, colocando los nombres de las frutas sobre un continuum, cuando esta variable es simplemente una etiqueta (variable nominal). La anterior confusión conduce al segundo error: tratar de construir un diagrama de líneas lo cual no tiene sentido en la situación dada ya que ni siquiera existe un ordenamiento entre las categorías (frutas): éstas pudieran colocarse en cualquier posición por lo que tendríamos  $4!$  posibilidades para ello.

## 12. Los errores como fuente para el diseño de actividades didácticas

¿Cuál debe ser nuestra actitud ante los errores? ¿Tienen alguna utilidad didáctica? La respuesta a estas interrogantes juega un papel de gran importancia en la actividad docente y es un buen indicador del estilo y de las concepciones que maneja el profesor.

La escuela tradicional opta por la penalización. Pero ¿a quién se penaliza? En general, la penalización recae sobre el alumno; y como hemos mostrado a través de las líneas anteriores, éste es tal vez uno de los menos responsables de tal situación. La presencia del error debemos asumirla como algo consustancial al hecho educativo. Pero, ello no implica asumir una actitud pasiva ante su presencia, sino todo lo contrario. Por un

lado, ha de investigarse el fenómeno para determinar los posibles factores de su producción, así como desarrollar estrategias que permitan subsanarlo. Por otro lado, el error y también los malentendidos al ser estudiados pueden dar pistas importantes o ser generadores de ideas que permitan el diseño de actividades didácticas, son una importante oportunidad para aprender. En la literatura didáctica podemos encontrar un buen número de situaciones erróneas exploradas didácticamente.

Así, por ejemplo, Borasi (1986) en un pequeño pero interesante escrito nos conduce a explorar situaciones como las siguientes:

$$\frac{1\cancel{4}}{\cancel{4}} = \frac{1}{4} \quad \frac{4\cancel{8}}{\cancel{8}} = \frac{4}{8}$$

**Figura 12:** Dos simplificaciones erróneas que conducen a resultados ciertos

En ambos casos se ha cancelado, por un automatismo de escritura adquirido, un dígito del numerador con el mismo dígito que aparece en el denominador, desconociendo que la concatenación de las cifras no indica un producto. Lo curioso es que los resultados en ambos casos son los correctos. Podríamos interrogarnos acerca de cuántos números de dos cifras (distintas) menores que 100 cumplen tal propiedad. El desarrollo de esta actividad conlleva a estudiar con profundidad el sistema de numeración posicional, amén de tener que resolver ecuaciones con soluciones enteras.

Trabajo similar realiza Allen (1970) al explorar dos soluciones incorrectas dadas por alumnos. Retomemos de seguidas el caso de la alumna que tenía la confusión entre diagonal y línea oblicua el cual hemos citado anteriormente. Nuevamente existe aquí la oportunidad

para efectuar un trabajo didáctico profundo, más allá de clarificar los conceptos para algún alumno que sufra una confusión semejante a la chica del caso reportado. Así, por ejemplo, una pregunta que puede surgir es cuántas diagonales tiene una figura dada. ¿Existirá una fórmula o mecanismo para contar el número  $D_n$  de diagonales de un polígono dado el número de lados?

Esta pregunta conduce a la combinatoria. Supongamos que nuestro polígono tiene  $n$  lados. Como cada diagonal queda definida por dos vértices, hemos de calcular las combinaciones de  $n$  elementos tomados dos a dos:  $C_n$ , 2. Pero, al hacer esto estamos incluyendo los lados del polígono que también están determinados por un par de vértices. Hemos pues de calcular el número  $C_n$ , 2 y luego restarle  $n$  (el número de lados). Obtenemos que el número de diagonales viene dado por:

$$D_n = C_{n,2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n \frac{n(n-3)}{2}$$

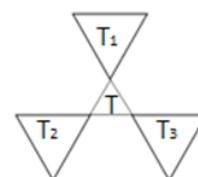
Podemos seguir en esta dirección y preguntarnos en cuántas regiones queda dividido nuestro polígono si trazamos todas las diagonales. ¿Habrá una fórmula general para ello? ¿Influirá el hecho de que nuestro polígono sea regular? ¿Habrá casos en los cuales se intersequen tres diagonales? ¿Podemos evitar esto? ¿Cuáles son las condiciones para que ocurra esto último? Y así, un sinfín de preguntas cuyas respuestas además de acrecentar el conocimiento matemático permite también adquirir otras destrezas como la resolución de problemas y las competencias para hacer demostraciones.

### 13. Un disparate interesante

Volvamos a la muestra de situaciones compiladas por Diez Jiménez (1970). Si bien es cierto que

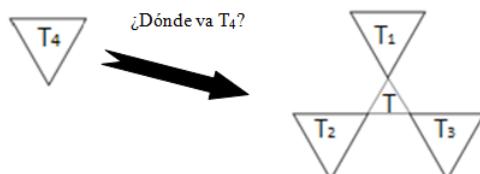
algunas respuestas son un contrasentido, como la que señala que los ángulos opuestos por el vértice “son los que son iguales, pero desiguales”, ya que algo no puede ser simultáneamente igual y desigual; en otros casos ha de realizarse un examen más detallado antes de calificarlas como un mero disparate. Por ejemplo, si consideramos la respuesta dada a la pregunta de qué es un tetraedro, aunque ésta es incorrecta, ya que ésta no es la definición de tetraedro, porque no lo caracteriza; pero, no obstante un tetraedro cumple con esas condiciones por cuanto presenta cuatro triángulos (cada una de sus caras lo es) y la distancia entre éstos es cero, vale decir son equidistantes. En consecuencia, la afirmación de que hay cuatro triángulos equidistantes en el tetraedro no es un disparate.

A primeras luces es pertinente preguntarse si en un plano o en el espacio se podría crear una disposición de cuatro triángulos equidistantes y que tal construcción no sea un tetraedro. Para poder estudiar la situación planteada es necesario, en primer término, tener clara la noción de distancia entre dos conjuntos. Partamos del plano y construyamos una primera configuración con tres triángulos equidistantes con distancia mayor que cero. Para ello consideramos un triángulo equilátero  $T$  de lados de longitud  $d$ . Consideraremos además otros tres triángulos (supongámoslos equiláteros y congruentes)  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ , los cuales adosamos al triángulo  $T$  (ver Figura (13)).



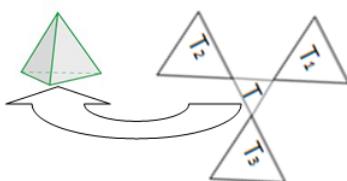
**Figura 13:** Configuración con tres triángulos equidistantes (a distancia  $d$ )

Sea  $T_4$  un triángulo congruente con los anteriores. ¿Existirá en el plano una configuración tal que el nuevo triángulo sea equidistante a los tres anteriores? El problema planteado es cómo agregar un cuarto triángulo que sea equidistante a los tres anteriores.



**Figura 14:** Interpretación de la construcción deseada

Si el triángulo  $T_4$  se ubicará en el mismo plano en el cual está la figura antes construida no sería posible resolver el problema. Sin embargo, nada nos compele a restringirnos al plano. A continuación daremos la idea general de una construcción de cuatro triángulos equidistantes que conforman una configuración en el espacio de tres dimensiones y en la cual la distancia no es nula. Consideraremos un tetraedro regular de aristas de longitud  $d$ . Podemos entonces suponer que  $T$  es una de sus caras. Supongamos que dicho tetraedro se apoya en la cara  $T$  y hagamos con  $T$  una construcción como la mostrada en la Figura (13).

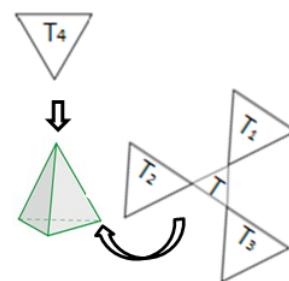


**Figura 15:** Configuración base para la construcción

Coloquemos ahora  $T_4$  de forma que uno de sus vértices coincida con el vértice superior del tetraedro (aquel que está fuera del plano que contiene al triángulo  $T$ ), de forma que los lados

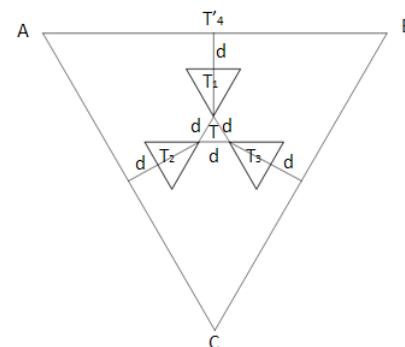
del triángulo queden sobre las prolongaciones de dos aristas del tetraedro incidentes en dicho vértice (ver Figura (16)).

Una vez realizado el procedimiento anterior podemos desprendernos del tetraedro y prescindir del triángulo  $T$  los cuales hemos empleado como herramientas auxiliares y así hemos logrado una configuración espacial conformada por cuatro triángulos equidistantes (separados por una distancia no nula). Aunque la configuración encontrada no es un tetraedro, curiosamente, nos hemos apoyado para su construcción en un tetraedro.



**Figura 16:** Esquema para construir la configuración

Retomemos el problema en el plano. Cambiamos las condiciones: supongamos que el cuarto triángulo no es congruente con los tres anteriores. Podemos ahora considerar la construcción que se muestra en la Figura (17).



**Figura 17:** Configuración de cuatro triángulos equidistantes en el plano

Podemos ahora formularnos la interrogante: ¿Habrá alguna otra configuración de cuatro triángulos equidistantes? Como puede apreciarse, a partir de la respuesta equivocada del alumno hemos construido una actividad matemática. Mediante actividades como ésta entran en juego, entre otras cosas, el papel de las definiciones en matemática, así como también el de la demostración.

Hemos hecho la anterior construcción con bastante informalidad. Necesitaríamos probar, entre otras cosas, que efectivamente los cuatro triángulos de esa configuración son equidistantes.

#### **14. Algunas conclusiones**

En primer lugar hay que señalar que el muestrario de errores presentado es suficientemente elocuente, y además bastante preocupante, de la situación que hemos discutido en este escrito.

En diferentes estudios, realizados en Venezuela, podemos encontrar inventarios de situaciones similares y algunas otras que no se han presentado aquí en lo que respecta a los errores cometidos por los alumnos. Por ejemplo, en Beyer (1994, 1999, 2003, 2006), Serrano (2004, 2005a, 2005b); como también en estudios hechos en otras latitudes, como en Mancera (1998). La comparación entre diversos estos y otros estudios permite aseverar que existe una amplia gama de errores los cuales aparecen con alta frecuencia y en diversidad de países. Si revisamos las situaciones planteadas en el presente trabajo ellas son bastante disímiles; pero, a pesar de ello tienen algo en común: hay incorrecciones matemáticas presentes en todas y cada una de ellas y además todas tienen que ver con la incomprendión matemática del alumno.

La masificación de la producción editorial ha ido aparejada con un enorme incremento de los errores en los libros producidos. La revisión de obras escolares de diferentes épocas ha permitido detectar que a medida en que los libros son más recientes se ha ido incrementando el número de errores presentes en ellos así como la gravedad de los mismos. Más aún, ha podido apreciarse la aparición y proliferación de verdaderos disparates.

Más allá de las incorrecciones matemáticas, buena parte de las obras adolecen de calidad didáctica, notándose que ellas no se incorporan los grandes avances producidos en la investigación en Educación Matemática. El análisis de aspectos importantes para la formación matemática de los alumnos da como resultado el que en la presentación de muchos tópicos hay abundante presencia de obstáculos didácticos.

En muchos de los objetos matemáticos estudiados en los libros hay gran presencia de representaciones prototípicas. En buena parte de las empresas editoriales ha habido poco interés por la calidad académica de sus productos, notándose que en diversas ediciones -las cuales se anuncian como revisadas- persisten la mayoría de los errores encontrados en las ediciones anteriores de las mismas. Se nota, pues, poco cuido y escaso esmero en la revisión de las obras por parte de quienes supuestamente se han ocupado de ello dando además la impresión de que no se trata de expertos en contenidos y en los aspectos didácticos. Puede afirmarse que para las empresas editoriales y para buena parte de los autores privan sólo el aspecto mercantilista de la producción en franco desmedro de los aspectos educativos.

El estudio de las obras escolares ha permitido

determinar la escasa formación matemática y didáctica de buena parte de los autores, con el agravante de que en muchos casos un autor o equipo de éstos produce obras para todos los grados y años de la enseñanza, desde primaria hasta la educación media y, una vez agotada la edición, básicamente se procede a hacer reimpresiones de las mismas, manteniéndose las mismas mucho tiempo en el mercado.

Ha existido mucha lenidad en lo que concierne a la revisión de las obras por parte de los organismos competentes del Estado venezolano a los fines de permitir el uso de los libros de texto en el sistema educativo del país. Más aún, en un momento dado incluso dejaron de hacerse las revisiones correspondientes. A lo antes señalado hay que agregar que tampoco la comunidad académica (matemáticos, educadores matemáticos, científicos, etc.) ni los gremios profesionales han tomado cartas en el asunto, dejando pasar una serie de situaciones refiriadas con la calidad de la educación que el país se merece.

Otro elemento importante es el que tiene que ver con la concepción que los docentes tienen del error. Se ha mantenido a través del tiempo la visión tradicional de penalizar el error tanto en la formación de los futuros docentes como en la praxis de aula una vez que se aborda el campo profesional. A futuro es necesario despenalizar el error y convertirlo en una oportunidad de aprendizaje para el estudiante y en una fuente generadora de actividades didácticas para el profesor.

Puede señalarse que hay muchas técnicas las cuales coadyuvan al trabajo fructífero en la corrección de errores. Entre éstas cabe mencionar: el uso efectivo de contraejemplos; el enfatizar el reconocimiento de patrones abstractos por parte

de los alumnos; la realización de trabajo individual con algunos estudiantes; el estímulo a que los estudiantes discutan entre ellos las soluciones que obtienen así como los pasos en los procedimientos de obtención de dichas soluciones; el énfasis en la comprensión de los conceptos; educar el sentido crítico de los alumnos.

Ha de agregarse que el tema de los errores es uno de esos tópicos que debiera ser abordado por los docentes de aula como tema de investigación.

Como ha podido apreciarse a lo largo de esta exposición, no cualquier libro de texto es necesariamente bueno como elemento de apoyo para el docente en su labor didáctica. éstos deben ser escogidos por el docente de acuerdo con ciertos criterios y asumiendo una postura crítica ante ellos.

## Referencias

- [1] Adda, J. Erreurs provoquées par les représentations. CIEAEM 39. Publication Université de Sherbrooke (Canadá). Documento miemografiado, 6 p.
- [2] Allen, M. C. (1970). Two incorrect solutions explored correctly. *The Mathematics Teacher*, 53(3), 257-258.
- [3] Alsina, C. (2010). Asesinatos matemáticos. España: Ariel.
- [4] Amelli, M<sup>a</sup>. R. y Lemmo, J. (1994). Arco Iris Básico. Matemática 9. Caracas: Librería Editorial Salesiana, S. A.
- [5] Amelli, M<sup>a</sup>. R. y Lemmo, J. (2003). Arco Iris Básico. Matemática 7. Caracas: Librería Editorial Salesiana, S. A.
- [6] Andonegui, M. (1992). Aportes a un marco teórico para el análisis de errores en el aprendizaje de la matemática. Ponencia presentada en el II Encuentro de Profesores de Matemática de las Regiones Nor-Oriental, Insular y Guayana. Maturín.
- [7] Astolfi, J. P. (1999). El “error”, un medio para enseñar. Sevilla, España: Díada Editora.
- [8] Baldor, A. (1940). Aritmética Teórico-Práctica. La Habana: Cultural.
- [9] Baldor, A. (1955). Aritmética Teórico-Práctica. La Habana: Cultural.
- [10] Baldor, A. (s/f). Aritmética Teórico-Práctica. La Habana: Cultural.

- [11] Bertero, R. (2002). El colapso del puente de Tacoma. *Revista de la Asociación de Ingenieros Estructurales*, 10(25). Disponible en: <http://materias.fi.uba.ar/6418/download/Colapso>
- [12] Beyer, W. (1994). El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula. Trabajo de Grado de Maestría (no publicado), Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.
- [13] Beyer, W. (1999). El significado en matemática: Un problema didáctico. *Enseñanza de la Matemática*, 8(1), 3-13.
- [14] Beyer, W. (2003). Didáctica de la Matemática. Mérida: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.
- [15] Beyer, W. (2006). El Laberinto del Significado: La Comunicación en el Aula de Matemáticas. En: D. Mora y Serrano, W. (Eds.).
- [16] Lenguaje, comunicación y significado en educación matemática (pp. 61-157). La Paz: GIDEM.
- [17] Borasi, R. (1986). Algebraic explorations of the error . *Mathematics Teacher*, 79(4), 247-248.
- [18] Brett C., E. y Suárez, W. (2002). Actividades de Matemática 9no. Caracas: Distribuidora Escolar.
- [19] Brousseau, G (1994). Los diferentes roles del maestro. En: Parra, Cecilia y Saiz, Irma (Comps.). Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones. (Cap. IV, pp. 65-94). Buenos Aires: Paidós.
- [20] Cardelle Elawar, M. y Ruiz Bolívar, C. (1983). El error como fuente de aprendizaje en el mejoramiento de la habilidad matemática en alumnos de Sexto Grado de Educación Primaria. Ponencia presentada en el 2ºEncuentro Nacional de Profesores de Didáctica de la Matemática de Institutos de Educación Superior. (Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC). Caracas.
- [21] Diez Jiménez, L. (1970). Antología del disparate. Contestaciones disparatadas en exámenes y reválidas. Madrid: STVDIVM. Ferrater Mora, J. (1974). Diccionario de filosofía abreviado. Buenos Aires: Sudamericana.
- [22] Flores de Tovar, O. y otros. (1988). Matemáticas 9. Caracas: TEDUCA y Santillana, S.A.
- [23] Gómez Alfonso, B. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(3), 313-325.
- [24] Iradi, R. (1874). Aritmética comercial de reglas breves para todos los cálculos que se efectúen con los números. Caracas: Rojas Hermanos.
- [25] Mancera, E. (1998). Errar es un placer: el uso de los errores para el desarrollo del pensamiento matemático. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- [26] Godino, J. D. (1991) Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En: Gutiérrez Rodríguez, ángel (Ed.) área de Conocimiento Didáctica de la Matemática. (Cap. 3, pp. 105-148). Madrid: Editorial Síntesis.
- [27] Maron, M. (1979). The student's universal distributive law. *MathematicsTteacher*, 72(1), 46-47.
- [28] Mendiola, E. (1982). Matemáticas. 3er Año (Ciclo Básico). Caracas: Editorial Biósfera.
- [29] Mendiola, E. (1991). Matemática. 4ºAño (1er Año de Ciencias). Caracas: Editorial Biósfera.
- [30] Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. e Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14.
- [31] Páez, L. (1986). Etiología del error en la matemática escolar. Ponencia presentada en el V Encuentro sobre Enseñanza de la Matemática. (Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC). Caracas.
- [32] Pascual Rodríguez, O. (1957). Matemáticas para 5ºy 6ºgrados. Caracas: Ediciones CO-BO.
- [33] Pequeño Larousse Ilustrado. (1982). París: Ediciones Larousse.
- [34] Pimm, D. (1990). El lenguaje matemático en el aula. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia-Ediciones Morata.
- [35] Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-172.
- [36] Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En: J. Kilpatrick; P. Gómez, y L. Rico (1995). Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes; Resolución de problemas; Evaluación; Historia. (pp. 69-108). Bogotá: "Una Empresa Docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.
- [37] Rincón, L. E. y Gómez, D. (1994). Horizontes, Educación Básica, 5ºGrado. Caracas: Ediciones ENEVA.
- [38] Rodríguez, R. (1987). Matemática. 4ºGrado Escuela Básica. Caracas: Editorial Larense.
- [39] Salazar, L.; Navarro, C. y López, I. (2000). Matemática 6º. Caracas: Santillana.
- [40] Serrano, W. (2004). Elementos de álgebra. Unidad didáctica diseñada para el curso Introducción al álgebra del Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez". Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.
- [41] Serrano, W. (2005a). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía*, XXVI(75), 131-164.
- [42] Serrano, W. (2005b). Juegos de lenguaje en educación matemática. Trabajo de Ascenso no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Miranda "José Manuel Siso Martínez".

- [43] SINEA. (1998a). Informe para el Docente. 3º. Caracas: Ministerio de Educación.
- [44] SINEA. (1998b). Informe para el Docente. 6º. Caracas: Ministerio de Educación.
- [45] Solís de Cabello, M. (1982). Detección y papel del error en la enseñanza de la matemática. Trabajo de Grado de Maestría (no publicado), Instituto Universitario Pedagógico de Caracas.
- [46] Smith, B. D. (1981). Misguided mathematical maxim-makers. *The Two-year College Mathematics Journal*, 12(5), 309-316.
- [47] Tapia Rodríguez, J. (s/f). Barbaridades y disparates en clase. Barcelona, España: Edicomunicación, S. A.
- [48] Vallota, A. (1994). La cuarta meditación (Primera parte). *Revista Venezolana de Filosofía*, 30, 109-129.

Para citar este artículo: Walter O. Beyer K. 2014, "Los textos escolares y el error en matemáticas". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:  
<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

# Conjuntos débilmente semi abiertos con respecto a un ideal

## Weakly semi open sets with respect to an ideal

Ennis Rosas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias Universidad de Oriente, Cumaná (Venezuela)

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

E-mail: ennisrafael@gmail.com

Carlos Carpintero<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias Universidad de Oriente, Cumaná (Venezuela)

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

E-mail: carpintero.carlos@gmail.com

Alvaro Farith Muñoz<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

E-mail: almuoz@hotmail.com

Received / Recibido: 20/12/2013. Accepted / Aceptado: 16/03/2014

---

### Resumen

En este artículo se introducen las nociones de conjuntos débilmente semi abiertos con respecto a un ideal, se caracterizan y finalmente se encuentran algunas propiedades de éstos.

*Palabras claves:* conjunto débilmente; semi abierto con respecto a un ideal; conjunto semi abierto  
2010 *Mathematics Reviews* Primary 54A05. Secondary 54C08, 54D65.

### Abstract

In this article we introduce the notions of weakly semi open sets with respect to an ideal, characterize its and find some properties.

*Keywords:* weakly semi; open set with respect to an ideal; semi open set.  
2010 *Mathematics Reviews* Primary 54A05. Secondary 54C08, 54D65.

---

### 1. Introducción

La noción de conjunto semi abierto fue introducida por Levine en [3]. Recientemente Friday Ifeanyi Michael en [1] estudiaron los conjuntos semi abiertos con respecto a un ideal y se prueba que la noción de conjuntos semi abiertos es equivalente a la noción de conjunto semi abierto con respecto a un ideal. S. Jafari et al. [2], introducen

y estudian el concepto de conjuntos g-cerrados con respecto a un ideal como una extensión de los conjuntos g-cerrados. Al igual como se obtiene la noción de topología generalizada a partir de la noción de topología, vamos a proceder a generalizar la definición de conjunto semi abierto con respecto a un ideal para estudiar sus propiedades y dar algunas caracterizaciones. Recor-

demos que un ideal  $I$  sobre un espacio topológico  $(X, \tau)$  es una colección no vacía de subconjuntos de  $X$  que satisface las siguientes propiedades: si  $A \in I$  y  $B \subset A$  entonces  $B \in I$  y si  $A, B \in I$  entonces  $A \cup B \in I$ .

## 2. Conjuntos débilmente semi abiertos con respecto a un ideal

Sea  $X$  un espacio topológico. Recordemos que  $A \subset X$  es un conjunto semi abierto[3], si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $U \subset A \subset Cl(U)$ . Un subconjunto  $A$  de  $X$  es semi abierto con respecto a un ideal  $I$ [1], si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $U \setminus A \in I$  y  $A \setminus Cl(U) \in I$ . La anterior noción motiva a la siguiente definición.

**Definición 1.** Un subconjunto  $A$  de  $X$  se dice que es débilmente semi abierto con respecto a un ideal  $I$  (denotado por débilmente  $I$ -semi abierto) si  $A = \emptyset$  ó si  $A \neq \emptyset$  existe un conjunto abierto  $U \neq \emptyset$  tal que  $U \setminus A \in I$ .

Es de notar que la razón fundamental de hacer consideraciones sobre el conjunto  $A$  en la definición 1, es para no obtener siempre que todo subconjunto  $A$  de  $X$  es débilmente  $I$ -semi abierto para cualquier ideal  $I$ .

**Ejemplo 2.1.** Sea  $I$  cualquier ideal, si  $A$  es un conjunto abierto cualquiera, entonces  $A$  es un conjunto débilmente  $I$ -semi abierto.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $I$  cualquier ideal. Si  $A$  es un conjunto semi abierto, entonces  $A$  es un conjunto débilmente  $I$ -semi abierto.

**Ejemplo 2.3.** Sea  $I$  cualquier ideal. Si  $A$  es un conjunto  $I$ -semi abierto, entonces  $A$  es un conjunto débilmente  $I$ -semi abierto.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ . El conjunto  $A = \{a, b\}$  es débilmente  $I$ -semi abierto pero no es un conjunto semi abierto, ni tampoco  $I$ -semi abierto

El siguiente teorema da una caracterización de los conjuntos no vacíos  $A$  que son débilmente  $I$ -semi abiertos.

**Teorema 2.5.** Sea  $A \neq \emptyset$  un subconjunto de  $X$  e  $I$  un ideal.  $A$  es débilmente  $I$ -semi abierto si y sólo si existe un conjunto abierto  $U$  y  $C \in I$  tal que  $(U \setminus C) \subset A$

*Demostración.* Supongamos que  $A \neq \emptyset$  es un conjunto débilmente  $I$  semi abierto, entonces existe un conjunto abierto  $U \neq \emptyset$  tal que  $U \setminus A \in I$ . Sea  $C = U \setminus A = U \cap (X \setminus A)$ . Entonces  $U \setminus C \subset A$ . Recíprocamente supongamos que existe un conjunto abierto  $U$  y  $C \in I$  tal que  $(U \setminus C) \subset A$ , luego  $(U \setminus A) \subset C$  sigue entonces que  $U \setminus A \in I$   $\square$

**Definición 2.** Un subconjunto  $A$  de  $X$  se dice que es débilmente  $I$ -semi cerrado, si  $X \setminus A$  es débilmente  $I$ -semiabierto.

**Teorema 2.6.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $I$  un ideal y  $A$  un subconjunto de  $X$ . Si  $A$  es débilmente  $I$ -semi cerrado entonces  $A \subset (K \cup B)$  para algún conjunto cerrado  $K$  de  $X$  y  $B \in I$ .

*Demostración.* Si  $A$  es débilmente  $I$ -semi cerrado, entonces  $X \setminus A$  es débilmente  $I$ -semi abierto. Si  $X \setminus A = \emptyset$ , entonces  $A = X$ , en consecuencia,  $\emptyset$  es débilmente  $I$ -semi cerrado. Si  $X \setminus A \neq \emptyset$ , entonces existe  $U$  abierto y  $B \in I$  tal que  $(U \setminus B) \subset (X \setminus A)$  sigue que  $A \subset X \setminus (U \setminus B) = X \subset (U \cap (X \setminus B)) = (X \setminus U) \cap B$ . Tomemos  $K = (X \setminus U)$  y sigue que  $A \subset K \cup B$   $\square$

El recíproco del Teorema anterior no es necesariamente cierto, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.7.** Sea  $X = \{a, b, c, d\}$  dotado de la topología  $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ . tomemos  $I = \{\emptyset\}$  y  $A = \{a, c\}$ . Si  $K = X$  y  $B = \emptyset$ ,  $A \subset K \cup B$  pero  $A$  no es débilmente  $I$ -semi cerrado ya que  $X \subset A$  no es débilmente  $I$ -semi abierto.

**Teorema 2.8.** La unión arbitraria de cualquier familia de conjuntos débilmente  $I$ -semi abiertos es débilmente  $I$ -semi abierto.

*Demostración.* Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  una colección de conjuntos débilmente  $I$ -semi abiertos, entonces para cada  $A_\alpha$  con  $\alpha \in J$ , existe  $U_\alpha$ ,  $\alpha \in J$  tal que  $U_\alpha \setminus A_\alpha \in I$ , ahora tomemos  $\alpha'$  fijo en  $J$  luego tenemos que  $U'_{\alpha'} \setminus \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \subset U'_{\alpha'} \setminus A'_{\alpha'} \in I$ . En consecuencia,  $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$  es débilmente  $I$ -semi abierto.  $\square$

La intersección de conjuntos débilmente  $I$ -semi abiertos no es necesariamente débilmente  $I$ -semi abierto como se muestra a continuación.

**Ejemplo 2.9.** Sea  $X = \{a, b, c\}$  con la topología  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$  e  $I = \{\emptyset\}$ , consideremos  $A = \{a, b\}$  y  $B = \{b, c\}$  es fácil ver que  $A$  y  $B$  son conjunto débilmente  $I$ -semi abierto pero  $A \cap B = \{b\}$  no lo es.

**Observación 2.10.** Si denotamos  $SO_I(X, \tau)$  como la familia de los conjunto débilmente  $I$ -semi abierto de espacio topológico  $(X, \tau)$  entonces  $SO_I(X, \tau)$  es un estructura minimal que satisface las condiciones de Maki[4].

De la Definición 1, se obtiene que si  $\emptyset \neq A \subset B$  y  $A$  es débilmente  $I$ -semiabierto, entonces  $B$  también es débilmente  $I$ -semi abierto y en consecuencia, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.11.** Si  $A$  es débilmente  $I$ -semiabierto, entonces cualquier subconjunto  $B$  que contiene a  $A$  es débilmente  $I$  semi abierto, en particular,  $Cl(A)$  es débilmente  $I$ -semiabierto.

El recíproco del corolario anterior no es necesariamente cierto como se prueba en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.12.** Sea  $X = \{a, b, c, d\}$  dotado de la topología  $\tau = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$  e  $I = \{\emptyset\}$ . Sea  $A = \{b, c\}$ , entonces  $Cl(A) = X$  es débilmente  $I$ -semiabierto pero  $A$  no es débilmente  $I$ -semiabierto.

El siguiente teorema nos da un condición suficiente para que  $SO_I(X, \tau) = P(X)$ .

**Teorema 2.13.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico e  $I$  un ideal tal que existen un conjunto unitario que pertenece tanto a la topología como al ideal, entonces  $SO_I(X, \tau) = P(X)$ .

*Demostración.* Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $I$  un ideal y supongamos que el conjunto unitario  $\{a\} \in I$ . Sea  $\{b\}$  cualquier conjunto unitario en  $X$ , entonces  $\{b\} \in SO_I(X, \tau)$ , ya que  $\{a\} \setminus \{b\} \in I$ . Ahora usando Teorema 2.8, obtenemos que cualquier subconjunto  $A$  de  $X$  esta en  $SO_I(X, \tau)$ .  $\square$

Estamos interesados en determinar bajo que condiciones se cumple que si  $Cl(A)$  es débilmente  $I$ -semi abierto entonces  $A$  es débilmente  $I$ -semi abierto, para  $A \subseteq X$ .

Aquí podemos enunciar lo siguiente:

1. Si  $Cl(A) = X$  entonces  $A$  no es necesariamente débilmente  $I$ -semi abierto.
2. Si existe  $A \subset X$ , tal que  $Cl(A)$  es un conjunto clopen entonces  $A$  no es necesariamente débilmente  $I$ -semi abierto. Si tomamos  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ . Para  $A = \{a\}$ ,  $Cl(A) = \{a, b\}$  es débilmente  $I$ -semi abierto pero  $A$  no lo es.

**Teorema 2.14.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico e  $I$  un ideal tal que la colección de conjuntos abiertos satisface la propiedad de intersección finita, entonces si  $A$  y  $B$  son débilmente  $I$ -semi abierto entonces lo es  $A \cap B$ .

*Demostración.* Dado que  $A$  y  $B$  son conjuntos débilmente  $I$ -semi abiertos entonces existen conjuntos  $U, V$  abiertos tal que  $U \setminus A \in I$ ,  $V \setminus B \in I$ , por lo tanto  $(U \cap V) \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cap (V \setminus B) \in I$   $\square$

**Observación 2.15.** En la Proposición 6 de [1], se enuncia que si  $I$  es un ideal sobre  $(X, \tau)$  tal que la colección de conjuntos abierto satisface la propiedad de intersección finita y cada subconjunto abierto no vacío de  $X$  es denso entonces  $Cl(A)$  es  $I$ -semi abierto si soló si  $A$  es  $I$ -semi abierto.

Este resultado no es cierto en general, como se ve en el Ejemplo 2.12, donde la topología  $\tau$  satisface la propiedad de intersección finita y todo subconjunto abierto no vacío de  $X$  es denso, tomando  $A = \{b, c\}$ , obtenemos que  $Cl(A) = X$  es  $I$ -semiabierto pero  $A$  no es  $I$ -semiabierto.

**Teorema 2.16.**  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $I \neq \emptyset$ ,  $\tau$  satisface la propiedad de la intersección finita y  $A \subset X$  tal que  $Cl(A) \neq X$ , entonces  $Cl(A)$  es débilmente  $I$ -semi abierto si soló si  $A$  es débilmente  $I$ -semi abierto.

*Demostración.* Si  $A$  es débilmente  $I$ -semi abierto, entonces  $Cl(A)$  es débilmente  $I$ -semi abierto, usando Corolario 2.11. Recíprocamente, supongamos que  $Cl(A)$  es débilmente  $I$ -semi abierto, entonces  $Cl(A) = \emptyset$  o  $Cl(A) \neq \emptyset$ : Si  $Cl(A) = \emptyset$ , entonces  $A = \emptyset$  y por lo tanto  $A$  es débilmente  $I$ -semi abierto. Ahora si  $Cl(A) \neq \emptyset$  existe un conjunto abierto  $U \neq \emptyset$  tal que  $U \setminus Cl(A) \in I$ . Tómese el conjunto abierto  $V = U \setminus Cl(A)$ ,  $V \neq \emptyset$ ,  $V \in I$  y además  $V \setminus A = (U \setminus Cl(A)) \setminus A = U \setminus Cl(A) \in I$ .  $\square$

Para citar este artículo: Rosas E. et all, 2014, “Conjuntos débilmente semi abiertos con respecto a un ideal”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:  
<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

**Observación 2.17.** Observe que si en el Teorema 2.16:

1.  $I \neq \emptyset$  y  $Cl(A) \neq X$  son omitidas, el resultado no necesariamente es cierto, (vease Ejemplo 2.12).
2. Si cambiamos  $Cl(A) \neq X$  por  $Cl(A) = X$ , el resultado no necesariamente es cierto. En Ejemplo 2.12, tómese  $I = \{\emptyset, \{c\}\}$  y  $A = \{a, d\}$ , obtenemos que  $Cl(A)$  es débilmente  $I$ -semi abierto pero  $A$  no es débilmente  $I$ -semi abierto.
3.  $I = \emptyset$  y  $Cl(A) \neq X$  nunca puede ocurrir, si esto ocurre, entonces  $Cl(A)$  nunca puede ser débilmente  $I$ -semi abierto.

## Referencias

- [1] Friday Ifeanyi Michael K., On some open sets with respect to an ideal, *European Journal of Pure and Applied Mathematics* **6(1)** (2013), 53-58.
- [2] S. Jafari and N. Rajesh, Generalized closed sets with respect to an ideal, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, **4(2)** (2011), 147-151.
- [3] N. Levine, semi open sets and semi continuity in topological spaces, *American Mathematical Monthly* **70** (1963), 36-41.
- [4] H. Maki, R. Chandrasekhara Rao and A. Nagoor Gani, On generalizing semi-open sets and preopen sets, *Pure Appl. Math. Math. Sci.*, 49 (1999), pp 17-29.

# Una Caracterización de la $\gamma$ -normalidad a través de cierta clase de funciones

## A Characterization of $\gamma$ -normality through certain class of functions

Carlos Carpintero<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela  
E-mail: carpintero.carlos@gmail.com

Ennis Rosas<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela  
E-mail: ennisrafael@gmail.com

Jorge Robinson<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia  
E-mail: jorge.is.robinson@gmail.com

Yhonnatan Salazar<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela  
E-mail: yhonnatansalazar@yahoo.es

Received / Recibido: 8/10/2013. Accepted / Aceptado: 11/03/2014

---

### Resumen

En este trabajo se considera una generalización del clásico concepto de normalidad, conocido como  $\gamma$ -normalidad [7], mediante la noción de operador asociado a una topología. También se extiende la noción clásica de función continua y se demuestra un resultado análogo al Lema de Urysohn que caracteriza los espacios  $\gamma$ -normales.

*Palabras claves:*

operador asociado; conjunto  $\gamma$ -abierto; espacio  $\gamma$ -normal  
2010 Mathematics Reviews Primary 54A05. Secondary 54C08, 54D65.

**Abstract**

In this article we consider a generalization of the classic normality concept, called  $\gamma$ -normality [7], by using the notion of associated operator to a topology. Also we extend the classic notion of continuous function and prove an analogues to the Urysohn's Lemma which characterize the  $\gamma$ -normal spaces.

*Keywords:*

associated operator;  $\gamma$ -open set;  $\gamma$ -normal space  
2010 Mathematics Reviews Primary 54A05. Secondary 54C08, 54D65.

---

## 1. Introduction

En 1963, Norman Levine comenzó el estudio de la generalización de conjuntos abiertos de un espacio topológico con la introducción de los conjuntos semi-abiertos. Su trabajo [12], fue fuente de inspiración no sólo para la generalización de la noción de conjunto abierto en otros contextos, sino que también sirvió de motivación o inicio para que muchos matemáticos abordaran la investigación de formas generalizadas de otras nociones de la topología general que se pueden expresar en términos de éstas, tales como las nociones de continuidad, compacidad, propiedades de separación, entre otras. Es así como se ha originado una extensa literatura respecto a estos temas, entre los que se tienen como referencia básica los trabajos de Abd El-Monsef et al. [1], Andrijević [5], Mashhour et al. [13] y Njastad [14], en los que se definen los conjuntos  $\beta$ -abiertos,  $b$ -abiertos, preabiertos y  $\alpha$ -abiertos, respectivamente. Posteriormente, S. Kasahara introduce en [11] la noción de operación u operador asociado a una topología  $\tau$  sobre un conjunto  $X$ , la cual resultó una herramienta muy versátil, pues abrió mayores posibilidades y nuevos enfoques para el estudio de nuevas clases de conjuntos y propiedades generalizadas de separación, continuidad, compacidad y otras nociones clásicas de la topología general, presentadas ahora en un contexto más amplio. En este sentido, H. Ogata [15] define la noción de conjunto  $\tau_\gamma$ -abierto para un operador  $\gamma$  asociado a una topología  $\tau$  sobre  $X$ . En una forma similar Á. Császár también introduce en [10] y [9], para ciertas clases de operadores  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$ , la noción de conjunto  $\gamma$ -abierto, que le permite definir y estudiar los espacios  $\gamma$ -compactos. Si bien en este contexto se han estudiado exhaustivamente tanto generalizaciones, como axiomas débiles de separación, recientemente han aparecido investigacio-

nes relacionadas con la generalización de otras propiedades de separación como normalidad y regularidad, tal es el caso de B. Ahmad y S. Hussain, quienes introducen en [2], los espacios  $\gamma^s$ -normales, así como también los matemáticos C. Basu et al. [6] que presentaron y caracterizaron los espacios  $\gamma$ - $\beta$ -normales, éstos como una generalización de los espacios  $\beta$ -normales introducidos anteriormente por S. Tahiliani en [16]. Otras formas generalizadas de normalidad son estudiadas en [3], [4], [8] y [17]. Todas las formas de normalidad citadas anteriormente son unificadas por C. Carpintero et al. en [7], usando la noción de  $\gamma$ -normalidad.

En este trabajo se continúa el estudio de los espacios  $\gamma$ -normales introducidos en [7]. Se extiende la noción clásica de función continua y en base a los resultados obtenidos en [7], se muestra un resultado análogo al Lema de Urysohn que permite obtener otra caracterización alternativa para los espacios  $\gamma$ -normales.

## 2. Conjuntos $\gamma$ -Abiertos y Espacios $\gamma$ -normales

En esta sección se introduce y estudia la noción de conjunto  $\gamma$ -abierto en el sentido de A. Császár, en un espacio topológico  $(X, \tau)$ , dotado de una aplicación  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$ . Se presentan además, ciertas nociones de clausura e interior de un conjunto y algunas propiedades básicas de éstas. Finaliza esta sección con la introducción de los espacios  $\gamma$ -normales y algunas caracterizaciones.

**Definición 2.1.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Un operador asociado a la topología  $\tau$  sobre  $X$  es una aplicación  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  tal que  $U \subseteq \gamma(U)$ , para todo  $U \in \tau$ .

**Definición 2.2.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológi-

co y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  un operador asociado a  $\tau$ . Se dice que  $\gamma$  es monótono, si dados  $A, B \subseteq X$  tales que  $A \subseteq B$  se cumple que  $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$ .

**Observación 2.3.** Dadas dos aplicaciones  $\gamma, \gamma' : P(X) \rightarrow P(X)$ . Se define  $\gamma \preceq \gamma'$ , si  $\gamma(A) \subseteq \gamma'(A)$  para todo  $A \subseteq X$ . En particular, si  $\gamma$  y  $\gamma'$  son operadores asociados a una topología  $\tau$  sobre  $X$ , la relación  $\gamma \preceq \gamma'$  define un orden parcial sobre la colección de todos los operadores asociados a una misma topología  $\tau$  sobre  $X$ . También pueden determinarse otros operadores asociados a partir de  $\gamma$  y  $\gamma'$ , a través de las operaciones conjuntistas básicas de unión e intersección. Es así como resultan:

$$\begin{aligned} (\gamma \vee \gamma')(A) &= \gamma(A) \cup \gamma'(A) \quad \forall A \subseteq X; \\ (\gamma \wedge \gamma')(A) &= \gamma(A) \cap \gamma'(A) \quad \forall A \subseteq X, \end{aligned}$$

o mediante la composición

$$(\gamma \circ \gamma')(A) = \gamma(\gamma'(A)) \quad \forall A \subseteq X.$$

En lo sucesivo, se denotará  $\gamma\gamma'$  en lugar de  $\gamma \circ \gamma'$ .

De manera natural, sobre un espacio topológico  $(X, \tau)$ , siempre se cuenta con los operadores clausura  $cl : P(X) \rightarrow P(X)$  e interior  $int : P(X) \rightarrow P(X)$  asociados a  $\tau$ . El siguiente ejemplo ilustra como se obtienen otros operadores asociados a  $\tau$ , mediante las operaciones anteriormente descritas.

**Ejemplo 2.4.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$ , definido por:

- (1)  $\gamma(A) = A$ , para todo subconjunto  $A \subseteq X$ ;
- (2)  $\gamma(A) = cl(A)$ , para todo  $A \subseteq X$ ;
- (3)  $\gamma(A) = int(A)$ , para todo  $A \subseteq X$ ;
- (4)  $\gamma(A) = clint(A) = cl(int(A))$ , para todo  $A \subseteq X$ ;
- (5)  $\gamma(A) = intcl(A) = int(cl(A))$ , para todo  $A \subseteq X$ ;

- (6)  $\gamma(A) = intclint(A) = int(cl(int(A)))$ , para todo  $A \subseteq X$ ;
- (7)  $\gamma(A) = clintcl(A) = cl(int(cl(A)))$ , para todo  $A \subseteq X$ ;
- (8)  $\gamma(A) = (clint \vee intcl)(A) = cl(int(A)) \cup int(cl(A))$ , para todo  $A \subseteq X$ .

Note que en cada uno de los casos anteriores  $\gamma$  es un operador monótono asociado a  $\tau$ . En los siguientes ejemplos, se muestran otras formas de obtener operadores asociados a una topología, y además se exhibe la existencia de operadores asociados que no son monótonos.

**Ejemplo 2.5.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $f : X \rightarrow X$  una función. Considere la aplicación  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$ , definida por  $\gamma(A) = f^{-1}(f(A))$  para todo  $A \subseteq X$ . Observe que  $\gamma$  es un operador monótono cualquiera sea la función  $f$ . Mientras que  $\gamma$  es el operador identidad sobre  $P(X)$ , si  $f$  es inyectiva.

**Ejemplo 2.6.** Considere  $\mathbb{R}$  con la topología usual y  $\gamma : P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$  la aplicación definida por  $\gamma(U) = \mathbb{R} - \partial(U)$ , donde  $\partial(U)$  denota la frontera topológica de  $U$ . Considere  $A = \{1\}$  y  $B = \mathbb{R} - \{0\}$ . Entonces  $A \subseteq B$ , pero  $\gamma(A)$  no está contenido en  $\gamma(B)$ , pues  $\gamma(A) = \mathbb{R} - \{1\}$  y  $\gamma(B) = \mathbb{R} - \{0\}$ . Por lo tanto,  $\gamma$  no es monótono.

En lo sucesivo, se considera un espacio topológico  $(X, \tau)$ , junto con una aplicación  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  que satisface:

$$A \subseteq B \Rightarrow \gamma(A) \subseteq \gamma(B), \quad (1)$$

$$\gamma(\emptyset) = \emptyset, \gamma(X) = X, \quad (2)$$

$$G \cap \gamma(A) \subseteq \gamma(G \cap A); \forall G \in \tau, A \subseteq X \quad (3)$$

**Observación 2.7.** Según las condiciones (2) y (3), resulta

$$G = G \cap X = G \cap \gamma(X) \subseteq \gamma(G \cap X) = \gamma(G).$$

Así  $G \subseteq \gamma(G)$ , para todo abierto  $G$ , en consecuencia  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  es un operador asociado a  $\tau$  en el sentido de la Definición 2.1. Además por la condición (1),  $\gamma$  es monótono. Note también que toda aplicación  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  que satisfaga (1), (2) y (3) es tal que  $\gamma \preceq cl$ . En efecto,

$$(X - cl(A)) \cap \gamma(A) \subseteq \gamma((X - cl(A)) \cap A) = \gamma(\emptyset) = \emptyset.$$

Para la clase de aplicaciones antes descritas, Á. Császár [9] introduce la siguiente noción.

**Definición 2.8.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Un subconjunto  $A \subseteq X$  se dice  $\gamma$ -abierto, si  $A \subseteq \gamma(A)$ . El complemento de un conjunto  $\gamma$ -abierto, se dice  $\gamma$ -cerrado.

**Observación 2.9.** Todo conjunto abierto es un conjunto  $\gamma$ -abierto, pues de la Observación 2.7,  $G \subseteq \gamma(G)$  para todo abierto  $G$ . En consecuencia, la colección de los conjuntos  $\gamma$ -abiertos contiene, no sólo a la clase de los conjuntos abiertos, si no también a la clase de los conjuntos  $\tau_\gamma$ -abiertos estudiados en [15].

Seguidamente, se enuncian una serie de propiedades básicas de los conjuntos  $\gamma$ -abiertos (resp.  $\gamma$ -cerrados).

**Teorema 2.10.** [7, Lema 3.1]. Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). La unión (resp. intersección) arbitraria de conjuntos  $\gamma$ -abiertos (resp.  $\gamma$ -cerrados) es un conjunto  $\gamma$ -abierto (resp.  $\gamma$ -cerrado).

Los operadores descritos en el Ejemplo 2.4, satisfacen las condiciones (1), (2) y (3). En el siguiente ejemplo, se muestra que existen operadores asociados que son monótonos, pero que no satisfacen la condición (3).

**Ejemplo 2.11.** Sea  $\mathbb{R}$  con la topología usual. Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida

por  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Defina  $\gamma$  como sigue  $\gamma(A) = f^{-1}(f(A))$ , para todo  $A \subseteq X$ , entonces  $A \subseteq f^{-1}(f(A)) = \gamma(A)$ . Así,  $\gamma$  es un operador asociado a la topología  $\tau$ . Observe que  $\gamma$  satisface las condiciones (1) y (2), pero no la condición (3). Pues si se considera  $U = (0, 2)$  y  $A = [3, 4]$ , entonces se tiene que  $U \cap f^{-1}(f(A)) = (0, 2)$  y  $f^{-1}(f(U \cap A)) = \emptyset$ .

Para las nociones de conjuntos  $\gamma$ -abiertos y conjuntos  $\gamma$ -cerrados, Á. Császár introduce las definiciones del  $\gamma$ -interior y la  $\gamma$ -clausura de un conjunto como siguen.

**Definición 2.12.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). El  $\gamma$ -interior de  $A$ , denotado por  $int^\gamma(A)$ , es la unión de todos los conjuntos  $\gamma$ -abiertos contenidos en  $A$ . Es decir,

$$int^\gamma(A) = \bigcup\{U : U \text{ es } \gamma\text{-abierto y } U \subseteq A\}.$$

La  $\gamma$ -clausura de  $A$ , denotada por  $cl^\gamma(A)$ , es la intersección de todos los conjuntos  $\gamma$ -cerrados que contienen a  $A$ . Es decir,

$$cl^\gamma(A) = \bigcap\{F : F \text{ es } \gamma\text{-cerrado y } A \subseteq F\}.$$

**Observación 2.13.** Como consecuencia del Teorema 2.10, se obtiene que el  $\gamma$ -interior de un conjunto  $A$  es un conjunto  $\gamma$ -abierto y la  $\gamma$ -clausura de  $A$  es un conjunto  $\gamma$ -cerrado.

Seguidamente se muestran algunas propiedades básicas del  $\gamma$ -interior y la  $\gamma$ -clausura.

**Teorema 2.14.** [7, Teorema 3.1]. Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Para cualquier par de subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $X$ , se satisfacen las siguientes propiedades:

- (1)  $A$  es  $\gamma$ -abierto si y sólo si  $A = int^\gamma(A)$ .
- (2) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $int^\gamma(A) \subseteq int^\gamma(B)$ .
- (3)  $int^\gamma(A) \cup int^\gamma(B) \subseteq int^\gamma(A \cup B)$ .
- (4)  $int^\gamma(A \cap B) \subseteq int^\gamma(A) \cap int^\gamma(B)$ .

$$(5) \text{ } int(A) \subseteq int^\gamma(A).$$

**Teorema 2.15.** [7, Teorema 3.4]. Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Para cualquier par de subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $X$ , se satisfacen las siguientes propiedades:

- (1)  $A$  es  $\gamma$ -cerrado si y sólo si  $A = cl^\gamma(A)$ .
- (2) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $cl^\gamma(A) \subseteq cl^\gamma(B)$ .
- (3)  $cl^\gamma(A \cap B) \subseteq cl^\gamma(A) \cap cl^\gamma(B)$ .
- (4)  $cl^\gamma(A) \cup cl^\gamma(B) \subseteq cl^\gamma(A \cup B)$ .
- (5)  $cl^\gamma(A) \subseteq cl(A)$

**Teorema 2.16.** [7, Teorema 3.2]. Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $A \subseteq X$  y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Entonces para cualquier  $x \in X$ ,  $x \in cl^\gamma(A)$  si y sólo si  $U \cap A \neq \emptyset$ , para cada conjunto  $\gamma$ -abierto  $U$  de  $X$  que contiene a  $x$ .

**Teorema 2.17.** [7, Teorema 3.3]. Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Para cualquier subconjunto  $A$  de  $X$ , se tiene que  $X - cl^\gamma(A) = int^\gamma(X - A)$ .

Obviamente de las leyes de De Morgan, sigue que

$$cl^\gamma(X - A) = X - int^\gamma(A)$$

$\Updownarrow$

$$int^\gamma(X - A) = X - cl^\gamma(A)$$

**Teorema 2.18.** [7, Lema 4.2]. Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Si  $U \in \tau$  y  $A$  es un conjunto  $\gamma$ -abierto, entonces  $U \cap A$  es un conjunto  $\gamma$ -abierto.

A continuación se introducen los espacios  $\gamma$ -normales.

**Definición 2.19.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Se dice que  $X$  es un espacio  $\gamma$ -normal si para cada par de subconjuntos  $\gamma$ -cerrados y disjuntos  $A$  y  $B$  de  $X$ , existen conjuntos  $\gamma$ -abiertos y disjuntos  $U$  y  $V$  de  $X$  tales que  $A \subseteq U$  y  $B \subseteq V$ .

Es importante destacar que conforme a lo indicado en [7, Observación 3.4], la definición anterior unifica las formas de normalidad estudiadas en [6], [2], [3], [4], [8], [16] y [17]. En el siguiente teorema se caracterizan los espacios  $\gamma$ -normales.

**Teorema 2.20.** [7, Teorema 5.10]. Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1)  $X$  es un espacio  $\gamma$ -normal.
- (2) Para cada subconjunto  $\gamma$ -cerrado  $A$  de  $X$  y cada subconjunto  $\gamma$ -abierto  $U$  de  $X$  tal que  $A \subseteq U$ , existe un subconjunto  $\gamma$ -abierto  $V$  tal que  $A \subseteq V \subseteq cl^\gamma(V) \subseteq U$ .
- (3) Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos  $\gamma$ -cerrados disjuntos de  $X$ , existe un subconjunto  $\gamma$ -abierto  $V$  de  $X$  tal que  $A \subseteq V$  y  $cl^\gamma(V) \cap B = \emptyset$ .

Todo espacio normal es un espacio  $\gamma$ -normal, pero no todo espacio  $\gamma$ -normal es un espacio normal. Como se exhibe en el ejemplo que sigue.

**Ejemplo 2.21.** Sean  $X = \{a, b, c\}$  y  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ . Considere el operador  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  definido por  $\gamma(A) = cl(A)$ . Entonces,  $X$  es un espacio  $\gamma$ -normal pero no es normal.

### 3. $\gamma$ -Normalidad bajo Funciones $\gamma$ -Continuas

En esta sección se introduce la clase de funciones  $\gamma$ -continuas y se presenta una caracterización de la  $\gamma$ -normalidad a través de esta clase de funciones.

**Definición 3.1.** Sean  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$  dos espacios topológicos y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Una función  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es  $\gamma$ -continua si  $f^{-1}(V)$  es un conjunto  $\gamma$ -abierto para cualquier  $V \in \sigma$ .

**Observación 3.2.** De acuerdo a la Observación 2.9, se tiene que toda función continua es una función  $\gamma$ -continua. En el siguiente ejemplo se demuestra que el recíproco no siempre es cierto.

**Ejemplo 3.3.** Considere  $\mathbb{R}$  con la topología usual y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \infty), \\ -1, & \text{si } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Defina  $\gamma : P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$  como  $\gamma(A) = cl(A)$ . Es fácil ver que  $f$  es una función  $\gamma$ -continua pero no es una función continua.

En el siguiente teorema se caracteriza las funciones  $\gamma$ -continuas.

**Teorema 3.4.** Sean  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$  espacios topológicos y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisfaga (1), (2) y (3). Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1)  $f : X \rightarrow Y$  es una función  $\gamma$ -continua.
- (2) Si  $x \in X$  y  $V$  es un conjunto abierto que contiene a  $f(x)$ , entonces existe un conjunto  $\gamma$ -abierto  $U$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subseteq V$ .

Demostración

(1)  $\Rightarrow$  (2) Sean  $x \in X$  y  $V$  un conjunto abierto que contiene a  $f(x)$ . Como  $f$  es una función  $\gamma$ -continua, entonces  $U = f^{-1}(V)$  es un conjunto  $\gamma$ -abierto tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subseteq V$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Sean  $x \in X$  y  $V$  un conjunto abierto tal que  $x \in f^{-1}(V)$ . Entonces  $V$  es un conjunto abierto y contiene a  $f(x)$ , por hipótesis, existe un conjunto  $\gamma$ -abierto  $U$  tal que  $x \in U$  y  $f(U) \subseteq V$ . Así  $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$ , en consecuencia  $x \in int^\gamma(f^{-1}(V))$ . Luego  $f^{-1}(V) = int^\gamma(f^{-1}(V))$ . Por el Teorema 2.14, sigue que  $f^{-1}(V)$  es un conjunto  $\gamma$ -abierto.

El siguiente resultado constituye el aporte principal de este trabajo, en él se extiende el clásico Lema de Uryshom, así como también se proporciona una nueva caracterización para los espacios  $\gamma$ -normales.

**Teorema 3.5.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisface las condiciones (1), (2) y (3). Entonces  $X$  es un espacio  $\gamma$ -normal si y sólo si para cada par de subconjuntos  $\gamma$ -cerrados y disjuntos  $A, B$  de  $X$ , existe una función  $\gamma$ -continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(A) = \{0\}$  y  $f(B) = \{1\}$ .

Demostración

(Suficiencia) Suponga que  $(X, \tau)$  es un espacio  $\gamma$ -normal. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos  $\gamma$ -cerrados y disjuntos en  $X$ . Se construirá una familia  $\{U_r : r \in D\}$  de conjuntos  $\gamma$ -abiertos, con  $D = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}\}$ , tal que:

$$A \subseteq U_r \text{ y } cl^\gamma(U_r) \cap B = \emptyset, \text{ para todo } r \in D \quad (4)$$

y

$$cl^\gamma(U_r) \subseteq U_s \text{ siempre que } r, s \in D \text{ y } r < s. \quad (5)$$

Puesto que  $X$  es un espacio  $\gamma$ -normal, por el Teorema 2.20, existe un  $\gamma$ -abierto  $V$  de  $X$  tal que  $A \subseteq V$  y  $cl^\gamma(V) \cap B = \emptyset$ . Note que para  $n = 1$ ,  $D = \{\frac{1}{2}\}$ . Si se considera  $V = U_{\frac{1}{2}}$ , obviamente  $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$  y  $cl^\gamma(U_{\frac{1}{2}}) \cap B = \emptyset$ . Por lo tanto,  $U_r$ ,

para  $r = \frac{1}{2}$  satisface las condiciones (4) y (5).

Ahora para  $n = 2$ ,  $D = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ . Puesto que  $U_{\frac{1}{2}} = V$ , se tiene que definir  $U_r$ , para  $r = \frac{1}{4}$  y  $r = \frac{3}{4}$ . Como  $U_{\frac{1}{2}}$  es  $\gamma$ -abierto y  $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ , entonces  $A$  y  $X - U_{\frac{1}{2}}$  son conjuntos  $\gamma$ -cerrados disjuntos en  $X$ . Como  $X$  es  $\gamma$ -normal, según el Teorema 2.20, existe un conjunto  $\gamma$ -abierto  $V'$  tal que

$$A \subseteq V' \quad \text{y} \quad cl^\gamma(V') \cap (X - U_{\frac{1}{2}}) = \emptyset.$$

Tomando  $V' = U_{\frac{1}{4}}$ , entonces

$$A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \quad \text{y} \quad cl^\gamma(U_{\frac{1}{4}}) \subseteq U_{\frac{1}{2}}.$$

Además, de la última inclusión se tiene

$$cl^\gamma(U_{\frac{1}{4}}) \cap B \subseteq U_{\frac{1}{2}} \cap B \subseteq cl^\gamma(U_{\frac{1}{2}}) \cap B = \emptyset,$$

es decir,  $cl^\gamma(U_{\frac{1}{4}}) \cap B = \emptyset$ . Por otro lado, como  $cl^\gamma(U_{\frac{1}{2}})$  y  $B$  son  $\gamma$ -cerrados disjuntos. En consecuencia, existe un conjunto  $\gamma$ -abierto  $V''$  tal que

$$cl^\gamma(U_{\frac{1}{2}}) \subseteq V'' \quad \text{y} \quad cl^\gamma(V'') \cap B = \emptyset.$$

Tomando  $V'' = U_{\frac{3}{4}}$ , entonces

$$cl^\gamma(U_{\frac{1}{2}}) \subseteq U_{\frac{3}{4}} \quad \text{y} \quad cl^\gamma(U_{\frac{3}{4}}) \cap B = \emptyset.$$

De esto y de lo anterior se tiene que

$$A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq cl^\gamma(U_{\frac{1}{4}}) \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq cl^\gamma(U_{\frac{1}{2}}) \subseteq U_{\frac{3}{4}}.$$

Es decir, en el caso  $n = 2$  las condiciones (4) y (5) también valen. Procediendo por inducción matemática se deduce que las condiciones (4) y (5) valen para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \notin \bigcup_{r \in D} U_r, \\ \inf\{r \in D : x \in U_r\} & , \text{ si } x \in \bigcup_{r \in D} U_r. \end{cases}$$

Observe que si  $x \in B$ , usando la condición  $cl^\gamma(U_r) \cap B = \emptyset$ , entonces  $x \notin cl^\gamma(U_r) \supseteq U_r$ , es decir,  $x \notin U_r$ , para todo  $r \in D$ . Por lo tanto,  $x \notin \bigcup_{r \in D} U_r$ . Usando esto y la definición de  $f$ , obtenemos que  $f(x) = 1$ . Es decir,  $f(B) = \{1\}$ .

Por otro lado, sea  $x \in A$ . Como  $A \subseteq U_r$  para  $r \in D$ , sigue que  $x \in \bigcup_{r \in D} U_r$  y entonces

$$0 \leq f(x) = \inf\{r \in D : x \in U_r\} \leq \frac{1}{2^n},$$

para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . En consecuencia  $f(x) = 0$ . Por lo tanto,  $f(A) = \{0\}$ .

Además,  $f$  satisface las siguientes condiciones:

$$x \in cl^\gamma(U_r) \Rightarrow f(x) \leq r \quad (6)$$

y

$$x \notin U_s \Rightarrow f(x) \geq s. \quad (7)$$

En el primer caso, observe que es imposible que  $x \in cl^\gamma(U_r)$  y  $f(x) > r$ . Puesto que  $D$  es denso en  $[0, 1]$ ,  $(r, f(x)) \subseteq [0, 1] = \overline{D}$  y existe así  $s \in D$  tal que  $r < s < f(x)$ . Ahora usando la condición (5),  $cl^\gamma(U_r) \subseteq U_s$ . Como  $x \in cl^\gamma(U_r)$ , entonces  $x \in U_s$ , para  $s \in D$ . Por lo tanto  $x \in \bigcup_{t \in D} U_t$  y entonces

$$f(x) = \inf\{t \in D : x \in U_t\} \leq s.$$

De aquí se obtiene que  $f(x) \leq s$ , pero esto contradice el hecho de que  $f(x) > s$ .

En el segundo caso,  $f(x) \neq 1$ , porque  $f(x) = 1$  implicaría  $1 \leq s \in D$ . Entonces

$$f(x) = \inf\{r \in D : x \in U_r\} < s,$$

usando la propiedad de aproximación al infinito existe  $t \in \{r \in D : x \in U_r\}$  tal que  $f(x) < t \leq s$ . Luego, por la condición (5), se obtiene que  $cl^\gamma(U_t) \subseteq U_s$ . Ya que  $x \in U_t \subseteq cl^\gamma(U_t)$ , entonces se concluye que  $x \in U_s$ , pero esto contradice el hecho de que  $x \notin U_s$ .

Finalmente se prueba que  $f : X \rightarrow [0, 1]$  es una función  $\gamma$ -continua. Para tal fin se consideran los casos siguientes:

Caso 1.  $f$  es  $\gamma$ -continua en el caso que  $f(x) \in (a, 1]$ , con  $0 \leq a < 1$ : bajo estas condiciones, existe  $r \in D$  tal que  $a < r < f(x) \leq 1$ . De esto se obtiene que  $f(x)$  no es menor o igual a  $r$ . Usando la condición (6),  $x \notin cl^\gamma(U_r)$ . Sea  $V = X - cl^\gamma(U_r)$ , entonces  $V$  es un conjunto  $\gamma$ -abierto que contiene a  $x$ . También  $f(V) \subseteq (a, 1]$ , pues dado  $y \in V = X - cl^\gamma(U_r)$ , implica que  $y \notin U_r$ . Usando la condición (7), se obtiene que

$$a < r \leq f(y) \leq 1.$$

Caso 2.  $f$  es  $\gamma$ -continua en el caso que  $f(x) \in [0, b)$ , con  $0 \leq b < 1$ : bajo estas condiciones, existe  $s \in D$  tal que  $0 \leq f(x) < s < b$ . Así,  $f(x)$  no es mayor o igual a  $s$ . Usando la condición (7),  $x \in U_s$ . Entonces  $V = U_s$  es un conjunto  $\gamma$ -abierto que contiene a  $x$  y además  $f(V) \subseteq [0, b)$ , pues si  $y \in U_s$  implica  $y \in cl^\gamma(U_s)$ . Usando la condición (6), se obtiene que

$$0 \leq f(y) \leq s < b.$$

Caso 3.  $f$  es  $\gamma$ -continua en el caso que  $f(x) \in (a, b)$ , con  $0 \leq a < b \leq 1$ : bajo estas condiciones, existe  $r, s \in D$  tal que  $a < r < f(x) < s < b$ . Luego, usando las condiciones (6) y (7), se tiene que  $x \in int(U_s)$  y  $x \notin cl^\gamma(U_r)$ . Por lo tanto, en

virtud del Teorema 2.18, se tiene que

$$V = int(U_s) - cl^\gamma(U_r) = int(U_s) \cap (X - cl^\gamma(U_r)),$$

es un conjunto  $\gamma$ -abierto que contiene a  $x$  y además  $f(V) \subseteq (a, b)$ , pues si  $y \in V$ , entonces  $y \in U_s \subseteq cl^\gamma(U_s)$  y  $y \notin cl^\gamma(U_r) \supseteq U_r$ . Usando las condiciones (6) y (7), se tiene que

$$a < r \leq f(y) \leq s < b.$$

De los casos anteriores y usando el Teorema 3.4, se llega a la conclusión de que  $f : X \rightarrow [0, 1]$  es una función  $\gamma$ -continua.

(Necesidad) Observe que  $[0, 1/2)$  y  $(1/2, 1]$  son abiertos disjuntos en  $[0, 1]$ . Puesto que  $f$  es una función  $\gamma$ -continua,  $U = f^{-1}([0, 1/2))$  y  $V = f^{-1}((1/2, 1])$  son  $\gamma$ -abiertos en  $X$ . Observe, por hipótesis, dado  $x \in A, f(x) = 0 \in [0, 1/2)$  en consecuencia  $x \in f^{-1}([0, 1/2)) = U$ , por lo tanto  $A \subseteq U$ . En una forma similar  $B \subseteq V$ . Se deduce que  $X$  es un espacio  $\gamma$ -normal.

Como una inmediata consecuencia del resultado anterior se obtiene el siguiente,

**Corolario 3.6.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\gamma : P(X) \rightarrow P(X)$  una aplicación que satisface las condiciones (1), (2) y (3). Entonces  $X$  es un espacio  $\gamma$ -normal si y sólo si para cada par de subconjuntos  $\gamma$ -cerrados y disjuntos  $A, B$  de  $X$ , existe una función  $\gamma$ -continua  $f : X \rightarrow [a, b]$  tal que  $f(A) = \{a\}$  y  $f(B) = \{b\}$ .

## Referencias

- [1] Abd. El-Monsef M. E., El-Deeb S. N. y Mahmood R. A.,  $\beta$ -open sets and  $\beta$ -continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Asuit Univ, 12 (1966), 77-90.
- [2] Ahmad B. y Hussain S.,  $\gamma_0$ -compact,  $\gamma^s$ -regular and  $\gamma^s$ -normal spaces, Canadian Jr. Pure Appl. Sci. 2 (2) (2008), 459-462.
- [3] Ahmad B. y Hussain S.,  $\gamma$ -regular and  $\gamma$ -normal spaces, Math. Today, 22 (1) (2006), 37-44.

- [4] Ahmad B. y Hussain S.,  *$\gamma^*$ -regular,  $\gamma$ -locally compact and  $\gamma$ -normal spaces*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 46 (2) (2008), 293-302.
- [5] Andrijević D., *On b-open sets*, Mat. Vesnik, 48 (1996), 59-64.
- [6] Basu C. K., Uzzal B. M. y Ghosh M. K., *A class of functions and separations axioms with respect to an operation*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 38 (2) (2009).
- [7] Carpintero C., Hussain S., Rosas E., Salazar Y y Ramírez N.,  *$\gamma$ -regularity and  $\gamma$ -normality via extended notions of  $\gamma$ -open sets due to Császár*, Creat. Math. Inform., 2 (21)(2012), 143-150.
- [8] Carpintero C., Rosas E., Sanabria J., Salazar Y. y Ramírez N., *On weakly  $\gamma$ -normal spaces*, Tecnocienicia, 2 (1)(2011), 37-41.
- [9] Császár Á.,  *$\gamma$ -compact spaces*, Acta Math. Hungar., 87 (1-2)(2000), 99-107.
- [10] Császár Á., *Generalized open sets*, Acta Math. Hungar., 75(1997), 65-87.
- [11] Kasahara S., *Operator-compact spaces*. Math. Japon., (1979), 97-105.
- [12] Levine N., *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 36-41.
- [13] Mashhour A. S, Abd. El-Monsef M. E. y El-Deeb S. N., *On precontinuous and weak precontinuous mappings*, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53 (1982), 47-53.
- [14] Njastad O., *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math. 15 (1965), 961-970.
- [15] Ogata H., *Operations on topological spaces and associated topology*, Math. Japon., 36 (1) (1991), 175-184.
- [16] Tahiliani S., *Generalized  $\beta$ -closed functions*, Bull. Cal. Math. Soc., 98 (4) (2006), 367-376.
- [17] Vadivel A.; Vijayalakshmi R. y Krishnaswamy D., *B-generalized regular and B-generalized normal spaces*, Inter. Math. Forum, 5(54)(2010), 2699-2706.

Para citar este artículo: Carpintero C. et all, 2014, “Una Caracterización de la  $\gamma$ -normalidad a través de cierta clase de funciones”. Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:  
<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

# Simulación numérica por MDF para la solución de la ecuación diferencial parcial que modela el flujo de contaminantes de un acuífero

## Numerical simulation for MDF for solving the partial differential equation modeling the flow of contaminants from an aquifer

Diana C. Roca Arroyo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Programa de Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia  
Email: dcroca@mail.uniatlantico.edu.co*

Sonia Valbuena D.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>*Programa de Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia  
Email: soniabalbuena@mail.uniatlantico.edu.co*

*Received / Recibido: 2/10/2013. Accepted / Aceptado: 18/12/2013*

---

### Resumen

Mediante el método de diferencias finitas, MDF, daremos una buena aproximación numérica de la solución de la ecuación diferencial parcial que modela el flujo de contaminantes de un acuífero. Para esto, discretizamos el dominio y usando las aproximaciones adecuadas a las derivadas parciales de la ecuación reescribiremos el problema como un sistema algebraico de ecuaciones.

Examinaremos la efectividad de dos esquemas de diferencias finitas: un método explícito y el método de Crank-Nicolson para el problema a resolver, analizando su consistencia, estabilidad y convergencia. El problema se implementa computacionalmente haciendo uso de software científico.

*Palabras claves:* MDF, acuífero, simulación, flujo hídrico, contaminantes.

### Abstract

By the method of finite differences, MDF, give a good numerical approximation of the solution of the partial differential equation modeling the flow of contaminants from an aquifer. For this, we discretize the domain and using appropriate approaches to the partial derivatives of the equation rewrite the problem as an algebraic system of equations.

Examine the effectiveness of two finite difference schemes: an explicit method and the Crank-Nicolson method for the problem to be solved by analyzing their consistency, stability and convergence. The problem is computationally implemented using scientific software

*Keywords:* MDF, aquifer, simulation, water flow, contaminants.

---

## 1. Introduction

Los acuíferos son formaciones geológicas naturales capaces de almacenar y transmitir agua susceptible de ser explotada en cantidades apreciables para atender diversas necesidades. Son de suma importancia, ya que representan para poblaciones con poco avance tecnológico un gran suministro de agua para el desarrollo de actividades diarias; estos contienen más del 95 % del agua dulce disponible del planeta e incluso en muchas regiones son a menudo la única fuente de agua disponible. Ante esta situación, es de interés estudiar matemáticamente el comportamiento del agua en el interior de esta formación geológica y para esto recurriremos a las herramientas que nos proporciona el análisis numérico.

## 2. Método de Diferencias Finitas

El Método de Diferencias Finitas, está basado en las propiedades de los desarrollos de Taylor y en la definición de derivada y sus requerimientos son un dominio acotado y un alto grado de regularidad de la malla. Dicha malla esta formada por un conjunto de puntos llamados *nodos*, los cuales son el resultado de las intersecciones de las  $n$  familias de líneas rectas, para el caso de un espacio  $n$  dimensional. Escribir una EDP en diferencias finitas equivale a escribir una nueva ecuación algebraica evaluada en los puntos llamados nodos. La solución en diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial se obtiene al reemplazar cada una de las derivadas parciales exactas en la ecuación diferencial por su correspondiente aproximación en diferencias finitas. Al aplicar la ecuación discretizada en cada punto de la malla se obtiene un sistema de ecuaciones denominado sistema de ecuaciones de diferencias finitas. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones de diferencias finitas se obtiene el va-

lor de la función en los nodos de la malla, es decir, que al emplear el método de diferencias finitas se obtiene una solución aproximada discreta.

## 3. Planteamiento del Problema

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$  un dominio con borde poligonal y sea  $T$  un intervalo de tiempo dado,  $T = (0, t)$ . El problema que modela los niveles piezométricos de un acuífero que ocupa una región  $\Omega$ , esta dado por:

Hallar  $h$ , los niveles piezométricos del acuífero, tales que:

$$\alpha \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

donde  $\alpha = \frac{K}{S}$  equivale al cociente entre la conductividad hidráulica (o permeabilidad del suelo) y el coeficiente específico de almacenamiento de agua y dicha ecuación satisface las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} h(0, y, t) &= 0 & \forall t \in T \\ h(a, y, t) &= 0 & \forall t \in T \\ h(x, 0, t) &= 0 & \forall t \in T \\ h(x, b, t) &= 0 & \forall t \in T \\ h(x, y, 0) &= f(x, y) & \forall x \in (0, a), y \in (0, b), t > 0 \end{aligned}$$

## 4. Esquema de Diferencias Finitas

Sea  $h(x, y, t)$  la función que modela nuestro problema a resolver con variables espaciales  $x$  e  $y$  y una variable temporal  $t$ , con derivadas finitas y continuas. Supongamos ahora  $y, t$  fija, entonces  $h$  es una función dependiente de  $x$ , como  $h$  es una función que tiene derivadas finitas y continuas, si desarrollamos el teorema de Taylor para la función  $h$  alrededor del punto  $x$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} h(x + \Delta x) &= h(x) + (\Delta x)h'(x) + \\ &\quad \frac{(\Delta x)^2}{2}h''(x) - \dots \quad (2) \end{aligned}$$

y

$$h(x - \Delta x) = h(x) - (\Delta x)h'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2}h''(x) + \dots \quad (3)$$

Sumando (2) y (3) tenemos:

$$h(x + \Delta x) + h(x - \Delta x) = 2h(x) + (\Delta x)^2 h''(x) + \dots \quad (4)$$

Si truncamos los términos de la serie de orden mayor que dos y despejando  $h''(x)$ , obtenemos:

$$h''(x) \simeq \frac{1}{(\Delta x)^2} [h(x + \Delta x) - 2h(x) + h(x - \Delta x)] \quad (5)$$

A la anterior ecuación (5) se le conoce con el nombre de aproximación a la segunda derivada por diferencias centrales. De forma análoga como hicimos para la variable  $x$ , fijamos ahora  $x$  e  $t$  y hallamos una aproximación a segunda derivada de la función  $h$  con respecto a la variable  $y$ :

$$h''(y) \simeq \frac{1}{(\Delta y)^2} [h(y + \Delta y) - 2h(y) + h(y - \Delta y)] \quad (6)$$

Finalmente, para la variable independiente  $t$ , se procede de la misma forma, fijando las variables  $x$  e  $y$

$$h'(t) \approx \frac{1}{\Delta t} [h(t + \Delta t) - h(t)] \quad (7)$$

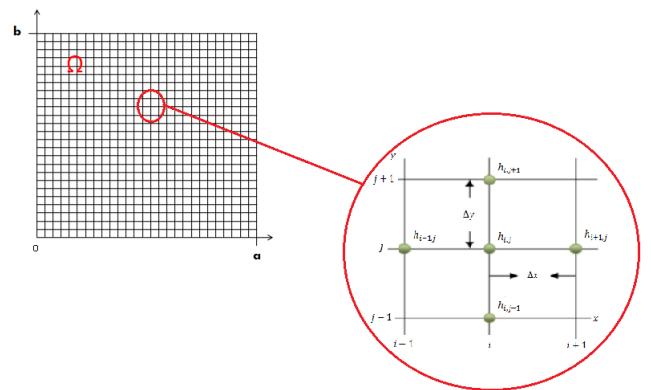
y también

$$h'(t) \approx \frac{1}{\Delta t} [h(t) - h(t - \Delta t)] \quad (8)$$

Las cuales son las aproximaciones a la primera derivada de la función  $h$  correspondiente a la variable  $t$ .

#### 4.1. Discretización del Dominio del Problema

La discretización consiste en trasladar el problema continuo (complejo) a uno discreto más sencillo de resolver, esto es, reemplazar el dominio continuo del problema,  $\Omega \times T$ , por un dominio discreto llamado malla, esto es, con la discretización en vez de obtener el valor de la función  $h$  para cada punto del dominio (problema continuo), se calcula una aproximación de  $h$ ,  $h_{i,j}^n$  en los nodos  $(i, j)$  organizados en una malla para un determinado tiempo  $t$ .



**Figura 1:** Malla del dominio  $\Omega$  para un tiempo  $t_0$

Utilizamos los subíndices  $i, j$  para designar las variables espaciales  $x, y$  y el supraíndice  $n$  para designar la variable temporal  $t$ . Como se ve en la figura, la malla de puntos es el resultado de subdividir el plano  $x - y$  en un conjunto de rectángulos de lados  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , mediante líneas paralelas al eje  $y$ , definidas por  $x_i = i\Delta x$ , con  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y líneas paralelas al eje  $x$  definidas por  $y_j = j\Delta y$ , para  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y todo esto para un determinado tiempo  $t_n$ . De modo que para un tiempo fijo en particular tendremos como resultado un conjunto de mallas tales como el de la figura (1) en donde aproximaremos el valor de la función  $h$  en cada nodo.

**Nota:** Para facilitar y simplificar la escritura, de ahora en adelante notaremos  $k_1 = \Delta x$ ,  $k_2 = \Delta y$  y  $k_3 = \Delta t$ . Al evaluar  $h$  en los nodos usaremos

notaciones como  $h_{i,j}^n, h_{i+1,j}^n, h_{i,j-1}^n, \dots$  para entender de que se trata de:

$$h_{i,j}^n = h(x_i, y_j, t_n) = h(ik_1, jk_2, nk_3)$$

De modo que podemos reescribir las ecuaciones (5), (6), (7) y (8) de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n \approx \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{(k_1)^2} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_{i,j}^n \approx \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{(k_2)^2} \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{i,j}^{n+1} \approx \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{k_3} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{i,j}^n \approx \frac{h_{i,j}^n - h_{i,j}^{n-1}}{k_3} \quad (12)$$

Una vez ya discretizadas las derivadas de la función  $h$  involucradas en la ecuación que modela el flujo hídrico de una acuífero, pasamos a hacer el reemplazo de dichas aproximaciones en la ecuación a resolver, obteniendo así los siguientes esquemas de diferencias finitas.

#### 4.2. Esquema de Diferencias Explícito

Al reemplazar (9), (10) y (11) en la ecuación (1), y haciendo  $\lambda_1 = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2}$  y  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  obtenemos lo que se conoce como **Esquema de Diferencias Explícito**:

$$\begin{aligned} \lambda_1(h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n) + (1 - 2\lambda)h_{i,j}^n + \\ \lambda_2(h_{i,j+1}^n + h_{i,j-1}^n) = h_{i,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (13)$$

Dado el anterior esquema de diferencias, desarrollamos para así obtener el sistema matricial de ecuaciones, entonces para un tiempo  $t_{n+1} = t_1$ , ( $n = 0$ ) tenemos:

$$\begin{aligned} h_{i,j}^1 = \lambda_1(h_{i+1,j}^0 + h_{i-1,j}^0) + (1 - 2\lambda)h_{i,j}^0 + \\ \lambda_2(h_{i,j+1}^0 + h_{i,j-1}^0) \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $h_{i,j}^0$  con  $i = 1, \dots, r - 1$  y  $j = 1, \dots, s - 1$  son valores previamente conocidos, dados por

las condiciones iniciales y de frontera determinados en el problema. Si fijamos  $j = 1$  para un tiempo  $t_1$  tenemos el siguiente sistema matricial:

$$\begin{aligned} h_{1,1}^1 = \lambda_1(h_{2,1}^0 + h_{0,1}^0) + (1 - 2\lambda)h_{1,1}^0 + \\ \lambda_2(h_{1,2}^0 + h_{1,0}^0) \end{aligned} \quad (15)$$

entonces,  $\forall i = 1, \dots, r - 1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} h_{1,1}^1 = \lambda_1(h_{2,1}^0 + h_{0,1}^0) + (1 - 2\lambda)h_{1,1}^0 + \\ \lambda_2(h_{1,2}^0 + h_{1,0}^0) \\ h_{2,1}^1 = \lambda_1(h_{3,1}^0 + h_{1,1}^0) + (1 - 2\lambda)h_{2,1}^0 + \\ \lambda_2(h_{2,2}^0 + h_{2,0}^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{3,1}^1 = \lambda_1(h_{4,1}^0 + h_{2,1}^0) + (1 - 2\lambda)h_{3,1}^0 + \\ \lambda_2(h_{3,2}^0 + h_{3,0}^0) \\ \vdots \end{aligned}$$

El anterior método de solución explícito se puede plantear matricialmente para un tiempo  $t_1$ , con  $j = 1$  fijo como:

$$\begin{bmatrix} h_{1,1}^1 \\ h_{2,1}^1 \\ h_{3,1}^1 \\ \vdots \\ h_{r-2,1}^1 \\ h_{r-1,1}^1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} h_{1,0}^0 \\ h_{2,0}^0 \\ h_{3,0}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,0}^0 \\ h_{r-1,0}^0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} h_{1,1}^0 \\ h_{2,1}^0 \\ h_{3,1}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,1}^0 \\ h_{r-1,1}^0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} h_{1,2}^0 \\ h_{2,2}^0 \\ h_{3,2}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,2}^0 \\ h_{r-1,2}^0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} (1 - 2\lambda) & \lambda_1 & \dots & & 0 \\ \lambda_1 & (1 - 2\lambda) & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & (1 - 2\lambda) & \lambda_1 \\ 0 & \dots & & \lambda_1 & (1 - 2\lambda) \end{bmatrix}$$

es una matriz tridiagonal de coeficientes.

Si fijamos  $j = 2$  para un tiempo  $t_1$  tenemos el siguiente sistema matricial:

$$\begin{aligned} h_{i,2}^1 = \lambda_1(h_{i+1,2}^0 + h_{i-1,2}^0) + (1 - 2\lambda)h_{i,2}^0 + \\ \lambda_2(h_{i,3}^0 + h_{i,1}^0) \end{aligned} \quad (16)$$

entonces,  $\forall i = 1, \dots, r-1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} h_{1,2}^1 &= \lambda_1(h_{2,2}^0 + h_{0,2}^0) + (1-2\lambda)h_{1,2}^0 + \\ &\quad \lambda_2(h_{1,3}^0 + h_{1,1}^0) \\ h_{2,2}^1 &= \lambda_1(h_{3,2}^0 + h_{1,1}^0) + (1-2\lambda)h_{2,2}^0 + \\ &\quad \lambda_2(h_{2,3}^0 + h_{2,1}^0) \\ h_{3,2}^1 &= \lambda_1(h_{4,2}^0 + h_{2,1}^0) + (1-2\lambda)h_{3,2}^0 + \\ &\quad \lambda_2(h_{3,3}^0 + h_{3,1}^0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Análogamente podemos plantear matricialmente el anterior esquema para un tiempo  $t_1$ , con  $j = 2$  fijo como:

$$\begin{bmatrix} h_{1,2}^1 \\ h_{2,2}^1 \\ h_{3,2}^1 \\ \vdots \\ h_{r-2,2}^1 \\ h_{r-1,2}^1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} h_{1,1}^0 \\ h_{2,1}^0 \\ h_{3,1}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,1}^0 \\ h_{r-1,1}^0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} h_{1,2}^0 \\ h_{2,2}^0 \\ h_{3,2}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,2}^0 \\ h_{r-1,2}^0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} h_{1,3}^0 \\ h_{2,3}^0 \\ h_{3,3}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,3}^0 \\ h_{r-1,3}^0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & (1-2\lambda) & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & (1-2\lambda) & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_1 & (1-2\lambda) \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente para  $j = 4, 5, \dots, s-1$ . De modo que para un tiempo  $t_1$  hemos hallado todos los valores de la función en cada uno de sus nodos,  $(i, j)$  para  $i = 1, \dots, r-1$  y  $j = 1, \dots, s-1$ , a partir de los valores nodales de la función  $h$  para un tiempo  $t_0$ , las cuales son conocidas puesto que son las condiciones iniciales y de frontera determinados para el problema.

Ahora para un tiempo  $t_{n+1} = t_2$ , ( $n = 1$ ) tenemos:

$$\begin{aligned} h_{i,j}^2 &= \lambda_1(h_{i+1,j}^1 + h_{i-1,j}^1) + (1-2\lambda)h_{i,j}^1 + \\ &\quad \lambda_2(h_{i,j+1}^1 + h_{i,j-1}^1) \quad (17) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} h_{i,j}^1 &= h_{x_i, y_j}^{t_1} \quad \forall i = 1, \dots, r-1; j = 1, \dots, s-1 \\ h_{0,j}^1 &= h_{x_0, y_j}^{t_1} \quad \forall j = 0, \dots, s; y \in [0, b] \\ h_{r,j}^1 &= h_{x_r, y_j}^{t_1} \quad \forall j = 0, \dots, s; y \in [0, b] \\ h_{i,0}^1 &= h_{x_i, y_0}^{t_1} \quad \forall i = 0, \dots, r; x \in [0, a] \\ h_{i,s}^1 &= h_{x_i, y_s}^{t_1} \quad \forall i = 0, \dots, r; x \in [0, a] \end{aligned}$$

son valores conocidos previamente obtenidos para el caso  $t_1$ . Si fijamos  $j = 1$  para un tiempo  $t_2$  tenemos el siguiente sistema matricial:

$$\begin{aligned} h_{i,1}^2 &= \lambda_1(h_{i+1,1}^1 + h_{i-1,1}^1) + (1-2\lambda)h_{i,1}^1 + \\ &\quad \lambda_2(h_{i,2}^1 + h_{i,0}^1) \quad (18) \end{aligned}$$

Procedemos de manera análoga como se hizo para un tiempo  $t_1$ , desarrollamos el esquema para  $\forall i = 1, \dots, r-1$  para cada  $j$ , con  $j = 1, \dots, s-1$ . De tal forma que para un tiempo  $t_2$  hallamos todos los valores de la función en cada uno de sus nodos,  $(i, j)$ , a partir de los valores nodales de la función  $h$  para un tiempo  $t_1$ .

Iteramos el mismo procedimiento para cada tiempo  $t_{n+1}$  con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$ , teniendo en cuenta que calculamos los valores de la función  $h$  para un tiempo  $t_{n+1}$  respectivo a partir de los valores de la función  $h$  para un tiempo  $t_n$  ya conocidos, entonces podemos expresar de forma general el sistema matricial para un tiempo  $t_{n+1}$  respectivo de la siguiente forma:

$$h_{i,j}^{(n+1)} = \lambda_2 h_{i,j-1}^{(n)} + Ah_{i,j}^{(n)} + \lambda_2 h_{i,j+1}^{(n)} \quad (19)$$

donde  $A$  es una matriz tridiagonal definida a partir del desarrollo del sistema de ecuaciones obtenido para el tiempo  $t_n$  correspondiente.

#### 4.3. Esquema de Diferencias de Crank Nicolson

Si promediamos el esquema de diferencias progresivas en el  $n$ -ésimo paso en  $t$  y el esquema de diferencias regresivas en el  $n+1$ -ésimo paso en  $t$ , usando las aproximaciones (9), (10) y (12) en el nodo  $(i, j)$  para un tiempo  $n+1$ , obtenemos el

### Esquema de Diferencias Finitas Crank Nicolson.

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda_1}{2}[h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1}] + (1+\lambda)h_{i,j}^{n+1} - \\ & \frac{\lambda_2}{2}[h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1}] = \frac{\lambda_1}{2}[h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n] + \\ & (1+\lambda)h_{i,j}^n + \frac{\lambda_2}{2}[h_{i,j+1}^n + h_{i,j-1}^n] \quad (20) \end{aligned}$$

Para un tiempo  $t_{n+1} = t_1$ , ( $n = 0$ ) tenemos:

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda_2}{2}h_{i,j-1}^1 + [-\frac{\lambda_1}{2}h_{i-1,j}^1 + (1+\lambda)h_{i,j}^1 + \\ & \frac{\lambda_1}{2}h_{i+1,j}^1] - \frac{\lambda_2}{2}h_{i,j+1}^1 = \frac{\lambda_2}{2}h_{i,j-1}^0 + \frac{\lambda_1}{2}h_{i-1,j}^0 + \\ & (1-\lambda)h_{i,j}^0 + \frac{\lambda_2}{2}h_{i+1,j}^0 + \frac{\lambda_2}{2}h_{i,j+1}^0 \end{aligned}$$

donde:

$$h_{i,j}^0 = h_{x_i,y_j}^{t_0} \quad \forall i = 1, \dots, r-1; j = 1, \dots, s-1$$

$$h_{0,j}^0 = h_{x_0,y_j}^{t_0} \quad \forall j = 0, \dots, s; y \in [0, b]$$

$$h_{r,j}^0 = h_{x_r,y_j}^{t_0} \quad \forall j = 0, \dots, s; y \in [0, b]$$

$$h_{i,0}^0 = h_{x_i,y_0}^{t_0} \quad \forall i = 0, \dots, r; x \in [0, a]$$

$$h_{i,s}^0 = h_{x_i,y_s}^{t_0} \quad \forall i = 0, \dots, r; x \in [0, a]$$

son valores previamente conocidos, dados por las condiciones iniciales y de frontera determinados en el problema. Si fijamos  $j = 1$  para un tiempo  $t_1$  tenemos el siguiente sistema matricial:

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda_2}{2}h_{i,0}^1 - \frac{\lambda_1}{2}h_{i-1,1}^1 + (1+\lambda)h_{i,1}^1 + \frac{\lambda_1}{2}h_{i+1,1}^1 \\ & -\frac{\lambda_2}{2}h_{i,2}^1 = \frac{\lambda_2}{2}h_{i,0}^0 + \frac{\lambda_1}{2}h_{i-1,1}^0 + (1-\lambda)h_{i,1}^0 + \\ & \quad \frac{\lambda_2}{2}h_{i+1,1}^0 + \frac{\lambda_2}{2}h_{i,2}^0 \end{aligned}$$

entonces desarrollando el anterior sistema matricial  $\forall i = 1, \dots, r-1$  obtenemos el siguiente esquema para un tiempo  $t_1$ , con  $j = 1$  fijo como:

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda_2}{2} \begin{bmatrix} h_{1,0}^1 \\ h_{2,0}^1 \\ h_{3,0}^1 \\ \vdots \\ h_{r-2,0}^1 \\ h_{r-1,0}^1 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} h_{1,1}^1 \\ h_{2,1}^1 \\ h_{3,1}^1 \\ \vdots \\ h_{r-2,1}^1 \\ h_{r-1,1}^1 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_2}{2} \begin{bmatrix} h_{1,2}^1 \\ h_{2,2}^1 \\ h_{3,2}^1 \\ \vdots \\ h_{r-2,2}^1 \\ h_{r-1,2}^1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda_2}{2} \begin{bmatrix} h_{1,0}^0 \\ h_{2,0}^0 \\ h_{3,0}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,0}^0 \\ h_{r-1,0}^0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} h_{1,1}^0 \\ h_{2,1}^0 \\ h_{3,1}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,1}^0 \\ h_{r-1,1}^0 \end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{2} \begin{bmatrix} h_{1,2}^0 \\ h_{2,2}^0 \\ h_{3,2}^0 \\ \vdots \\ h_{r-2,2}^0 \\ h_{r-1,2}^0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\frac{\lambda_1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda_1}{2} & (1+\lambda) & -\frac{\lambda_1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{2} & (1+\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{\lambda_1}{2} & (1+\lambda) & -\frac{\lambda_1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda_1}{2} & (1+\lambda) & -\frac{\lambda_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \frac{\lambda_1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda_1}{2} & (1-\lambda) & \frac{\lambda_1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\lambda_1}{2} & (1-\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{\lambda_1}{2} & (1-\lambda) & \frac{\lambda_1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\lambda_1}{2} & (1-\lambda) \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente para  $j = 3, 4, 5, \dots, s-1$ . Para un tiempo  $t_{n+1} = t_2$ , ( $n = 1$ ) tenemos:

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda_2}{2}h_{i,j-1}^1 - \frac{\lambda_1}{2}h_{i-1,j}^1 + (1+\lambda)h_{i,j}^1 + \frac{\lambda_1}{2}h_{i+1,j}^1 \\ & -\frac{\lambda_2}{2}h_{i,j+1}^1 = \frac{\lambda_2}{2}h_{i,j-1}^0 + \frac{\lambda_1}{2}h_{i-1,j}^0 + (1-\lambda)h_{i,j}^0 + \\ & \quad \frac{\lambda_2}{2}h_{i+1,j}^0 + \frac{\lambda_2}{2}h_{i,j+1}^0 \end{aligned}$$

De modo que para un tiempo  $t_2$  hemos hallado todos los valores de la función en cada uno de sus nodos,  $(i, j)$ , a partir de los valores nodales de la función  $h$  para un tiempo  $t_1$ .

Iteramos el mismo procedimiento para cada tiempo  $t_{n+1}$  con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$ , teniendo en cuenta que calculamos los valores de la función  $h$  para un tiempo  $t_{n+1}$  respectivo a partir de los valores de la función  $h$  para un tiempo  $t_n$  ya

conocidas, entonces podemos expresar de forma general el sistema matricial para un tiempo  $t_{n+1}$  respectivo de la siguiente forma:

$$-\frac{\lambda_2}{2}h_{i,j-1}^{(n+1)} + Ah_{i,j}^{(n+1)} - \frac{\lambda_2}{2}h_{i,j+1}^{(n+1)} = \lambda_2 h_{i,j-1}^{(n)} + Bh_{i,j}^{(n)} + \lambda_2 h_{i,j+1}^{(n)} \quad (21)$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices tridiagonales definidas a partir del desarrollo del sistema de ecuaciones obtenido para el tiempo  $t_n$  correspondiente.

## 5. Consistencia, Estabilidad y Convergencia

### 5.1. Consistencia

**Definición 5.1.** Dada una ecuación diferencial parcial  $Ph = F$  y un esquema de diferencias finitas  $P_\Delta h_{i,j}^n = F_{i,j}^n$ , decimos que el esquema de diferencias finitas es un esquema consistente con la ecuación diferencial parcial si para cualquier función suave  $\phi(x, y, t)$ ,  $P\phi_{i,j}^n - P_\Delta\phi_{i,j}^n$  converge puntualmente a cero cuando  $k_1, k_2$  y  $k_3$  convergen a cero.

**Teorema 5.1.** El esquema de diferencias Explícito (13) es un esquema consistente con la ecuación diferencial parcial  $h_t = \alpha(h_{xx} + h_{yy})$ .

**Demostración:** Sea  $\phi$  una función suave. Definamos los siguientes operadores  $P\phi$  y  $P_\Delta\phi_{i,j}^n$  por

$$P\phi = \phi_t - \alpha(\phi_{xx} + \phi_{yy})$$

y

$$P_\Delta\phi_{i,j}^n = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{k_3} - \alpha\left(\frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{k_1} + \frac{\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n}{k_2}\right) \quad (22)$$

Claramente  $\phi$  es una función de tres variables,  $x, y, t$ ; si fijamos dos de sus variables podemos aplicar el teorema de Taylor, ya que  $\phi$  es diferenciable por ser suave. En efecto, dejemos variando a  $t$ , fijando a  $x, y$  y apliquemos el teorema de

Taylor alrededor del punto  $(i, j, n)$ , entonces obtenemos la siguiente aproximación evaluada en el punto  $(i, j, n+1)$ :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + k_3\phi_t|_{i,j}^n + O(k_3)^2$$

Análogamente obtenemos las siguientes aproximaciones para  $\phi_{i+1,j}^n$  y  $\phi_{i-1,j}^n$ , así:

$$\begin{aligned} \phi_{i+1,j}^n &= \phi_{i,j}^n + k_1\phi_x|_{i,j}^n + \frac{(k_1)^2}{2}\phi_{xx}|_{i,j}^n + \\ &\quad \frac{(k_1)^3}{3!}\phi_{xxx}|_{i,j}^n + O(k_1)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{i-1,j}^n &= \phi_{i,j}^n - k_1\phi_x|_{i,j}^n + \frac{(k_1)^2}{2}\phi_{xx}|_{i,j}^n - \\ &\quad \frac{(k_1)^3}{3!}\phi_{xxx}|_{i,j}^n + O(k_1)^4 \end{aligned}$$

y las aproximaciones para  $\phi_{i,j+1}^n$  y  $\phi_{i,j-1}^n$ , así:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j+1}^n &= \phi_{i,j}^n + k_2\phi_y|_{i,j}^n + \frac{(k_2)^2}{2}\phi_{yy}|_{i,j}^n + \\ &\quad \frac{(k_2)^3}{3!}\phi_{yyy}|_{i,j}^n + O(k_2)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,j-1}^n &= \phi_{i,j}^n - k_2\phi_y|_{i,j}^n + \frac{(k_2)^2}{2}\phi_{yy}|_{i,j}^n - \\ &\quad \frac{(k_2)^3}{3!}\phi_{yyy}|_{i,j}^n + O(k_2)^4 \end{aligned}$$

donde  $\phi_x|_{i,j}^n, \phi_y|_{i,j}^n, \phi_t|_{i,j}^n, \phi_{xx}|_{i,j}^n, \phi_{yy}|_{i,j}^n, \phi_{xxx}|_{i,j}^n$  y  $\phi_{yyy}|_{i,j}^n$  representan las derivadas de  $\phi$  de primer, segundo y tercero orden con respecto a  $x, y$  y  $t$ .

Como  $k_1, k_2$  y  $k_3 \neq 0$ , tenemos:

$$\frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{k_3} = \phi_t|_{i,j}^n + O(k_3) \quad (23)$$

$$\frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{(k_1)^2} = \phi_{xx}|_{i,j}^n + O(k_1)^2 \quad (24)$$

$$\frac{\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n}{(k_2)^2} = \phi_{yy}|_{i,j}^n + O(k_2)^2 \quad (25)$$

Reemplazando (23), (24) y (25) en (22) tenemos

$$\begin{aligned} P_\Delta\phi_{i,j}^n &= \phi_t|_{i,j}^n - \alpha\left(\phi_{xx}|_{i,j}^n + \phi_{yy}|_{i,j}^n\right) + \\ &\quad O(k_1)^2 + O(k_2)^2 + O(k_3) \end{aligned}$$

Evaluando  $P\phi$  en el punto  $(ik_1, jk_2, nk_3)$ , se tiene que

$$P\phi_{i,j}^n - P_\Delta\phi_{i,j}^n = O(k_1)^2 + O(k_2)^2 + O(k_3)$$

Ahora bien, si  $k_1, k_2, k_3$  tienden a cero, entonces  $O(k_1)^2, O(k_2)^2, O(k_3)$  convergen a cero.

Por lo anterior  $P\phi_{i,j}^n - P_\Delta\phi_{i,j}^n$  converge a cero, y por lo tanto el esquema de diferencias finitas explícito es consistente con la ecuación diferencial  $h_t = \alpha(h_{xx} + h_{yy})$ .  $\square$

**Teorema 5.2.** El esquema de diferencias finitas de Crank Nicolson (20) es un esquema consistente con la ecuación diferencial parcial  $h_t = \alpha(h_{xx} + h_{yy})$ .

**Demostración:** Se sabe de la sección (4.3) que el esquema de diferencias finitas de crank nicolson es el resultado de promediar los esquemas en diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás. Tomando los promedios de esas aproximaciones en un procedimiento análogo al del teorema (5.1) se tiene que el esquema de diferencias finitas de Crank Nicolson es consistente con la ecuación diferencial  $h_t = \alpha(h_{xx} + h_{yy})$ .  $\square$

## 5.2. Estabilidad

**Definición 5.2.** Análisis de estabilidad de Fourier

La condición de estabilidad de un esquema de diferencias finitas será satisfecho si la amplitud de cualquier error  $\xi^n$  no crece con el tiempo, es decir la relación:

$$|G| \equiv \left| \frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \right| \leq 1 \quad (26)$$

donde la cantidad  $G$ , definida:

$$G = \frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} \quad (27)$$

es el denominado factor de amplificación del error, y está en función del intervalo de tiempo y de las particiones espaciales.

**Teorema 5.3.** El esquema de diferencias Explícito (13) es un esquema estable para  $\lambda \leq 1/2$ .

**Demostración:** Cualquier condición de estabilidad para el caso del esquema de diferencias Explícito puede ser determinado usando la expresión (28) en la ecuación de diferencias finitas.

$$E_{\hat{i},j,n} = \xi^n e^{i\beta i k_1} e^{j\beta j k_2} \quad (28)$$

El cual representa en nuestro análisis, el comportamiento del error en un nodo arbitrario  $(i, j)$  para un tiempo arbitrario discreto  $t$ . De acuerdo al análisis de Fourier, cualquier error que se obtenga durante el proceso de diferencias finitas es parte de la solución y también debe resolver la ecuación de diferencias finitas algebraica. Debido a que la ecuación en diferencias finitas es lineal, podemos considerar el error por separado. Luego (28) debe resolver (13), y al sustituir y simplificar la expresión finalmente obtenemos:

$$\xi = 1 - 4 \left[ \lambda_1 \sin^2 \frac{(\beta k_1)}{2} - \lambda_2 \sin^2 \frac{(\beta k_2)}{2} \right]$$

como  $\sin^2(\theta) \leq 1$ , se tiene:

$$\xi \leq 1 - 4 [\lambda_1 - \lambda_2]$$

Ahora por la condición de estabilidad dada en (26) se debe cumplir que:

$$-1 \leq 1 - 4 [\lambda_1 - \lambda_2]$$

$$4(\lambda_1 + \lambda_2) \leq 2$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \leq 1/2 \quad (29)$$

De modo que si hacemos  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ , entonces  $\lambda \leq 1/2$ ,  $\lambda_1 \leq 1/2$  y  $\lambda_2 \leq 1/2$ . La cual es la condición de estabilidad del método explícito.  $\square$

**Teorema 5.4.** El esquema de diferencias finitas de Crank Nicolson (20) es un esquema estable para todo  $\lambda > 0$ .

**Demostración:** La prueba de esta demostración es análoga al procedimiento usado para probar (5.3). Por lo que se sigue que el método de Crank Nicolson es incondicionalmente estable para cualquier  $\lambda > 0$ .  $\square$

### 5.3. Convergencia

**Definición 5.3.** Un esquema en diferencias finitas que aproxima una ecuación diferencial parcial es un esquema convergente si para cualquier solución de la ecuación diferencial parcial,  $H(x, y, t)$ , y las soluciones del esquema en diferencias finitas,  $h(x_i, y_j, t_n)$  son tal que  $h(x_i, y_j, 0) \rightarrow H(x, y, 0)$  cuando  $ik_1 \rightarrow x$ ,  $y jk_2 \rightarrow y$  se cumple que

$$\lim_{k_1, k_2, k_3 \rightarrow 0} h(x_i, y_j, t_n) = H(x, y, t)$$

**Teorema 5.5 (Teorema de Equivalencia de Lax-Richtmyer).** Un esquema de diferencias finitas consistente para una ecuación diferencial parcial tal que el problema de valor inicial esta bien planteado es convergente si y solo es estable.

**Demostración:** Véase texto [2].  $\square$

**Teorema 5.6.** El esquema de diferencias finitas Explícito (13) es un esquema convergente si  $\lambda \leq 1/2$ .

**Demostración:** En secciones anteriores se mostró la consistencia y estabilidad de el esquema de diferencias progresivas para  $\lambda \leq 1/2$ , de modo que por el teorema anterior se sigue que el esquema de diferencias progresivas converge siempre que  $\lambda \leq 1/2$ .  $\square$

**Teorema 5.7.** El esquema de diferencias finitas de Crank Nicolson (20) es un esquema convergente para  $\lambda > 0$ .

**Demostración:** Se sigue directamente del teorema 5.2 y 5.4 y el teorema de Lax-Richtmyer.  $\square$

## 6. Aplicaciones, análisis y resultados

Simularemos mediante el lenguaje de programación MatLab el problema de hallar los niveles piezométricos de un acuífero para un caso particular de un acuífero cuyo suelo esta formado por gravas limpias, en este caso la conductividad hidráulica oscila de 1 a 100  $cm/seg$ . Fijemos

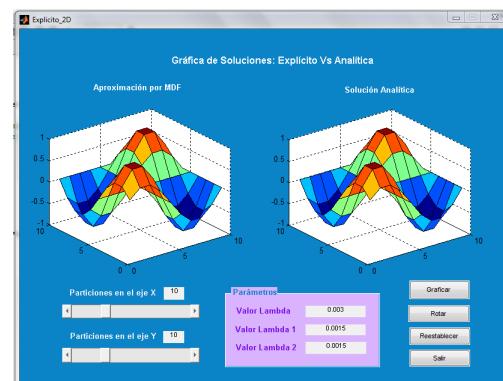
$K = 15 cm/seg$  y una capacidad de almacenamiento de  $10000 cm^3$  y definimos los valores de los parámetros. Ahora para el caso en que usamos el esquema de diferencias explícito primero que todo definamos los

- Tomamos 10 particiones espaciales en un dominio  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  de modo que  $k_1 = k_2 = 0.1$ .
- Tomamos  $k_3 = 0.01$  como la variación para el tiempo.
- Tomamos  $\alpha = 0.0015$  el cual es el cociente entre los dos parámetros hidráulicos, por lo cual tenemos que  $\lambda = 0.003$ ,  $\lambda_1 = 0.0015$ ,  $\lambda_2 = 0.0015$ .
- Consideraremos valores para los niveles piezométricos en un tiempo inicial dados por la función  $f(x) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ .

La solución exacta de la ecuación con estos parámetros esta dada por la función

$$H(x, y, t) = \exp(0.0015\pi^2 t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$

Ahora para el caso en que usamos el método explícito graficamos la solución aproximada y la solución analítica para efectos de comparación obteniendo una buena aproximación como se ve en la figura (2)

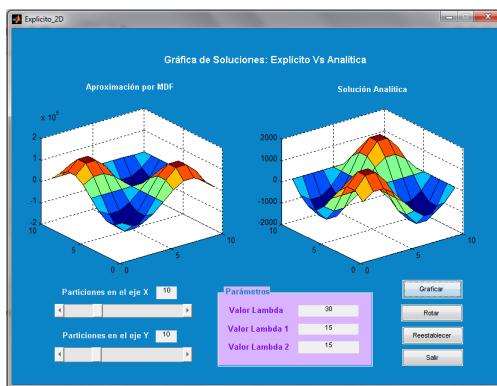


**Figura 2:** Aproximación por Esquema Explícito

Podemos ver que hemos obtenido una buena aproximación con respecto a la solución analítica, pues los valores de  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \leq 1/2$  y por

teorema 5.6 se tiene que este esquema explícito converge.

Sin embargo, si variamos el parámetro en  $\alpha = 15$  (con  $K > 100$  y un bajo coeficiente de almacenamiento) tenemos que los valores de  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1/2$ , de tal forma que sobrepasan los límites de estabilidad especificados en el teorema (5.3), lo que significa que el esquema de diferencias explícito es condicionalmente estable, como se observa en la figura (3).



**Figura 3:** Estudio de la condición de estabilidad para el método explícito

El error absoluto obtenido en este caso nos confirma la condición de estabilidad del método como se puede observar en las tablas a seguir.

**Figura 4:** Error absoluto para el método explícito para  $t = 0.01$

nº	soluciones		Error Absoluto
	Exacta	Aproximada usando Explícito	
1	1.5184	-3.6135	5.132
2	2.4568	-5.8467	8
3	2.4568	-5.8467	8.304
4	1.5184	-3.6135	5
5	0	0	0
6	-1.5184	3.6135	-5
7	-2.4568	5.8467	-8.304
8	-2.4568	5.8467	-8
9	-1.5184	3.6135	-5.132

**Figura 5:** Error absoluto para el método explícito para  $t = 0.02$

nº	soluciones		Error Absoluto
	Exacta	Aproximada usando Explícito	
1	6.6732	37.7934	-31.120
2	10.7974	61.151	-50.354
3	10.7974	61.151	-50.354
4	6.6732	37.7934	-31.120
5	0	0	0.000
6	-6.6732	-37.7934	31.120
7	-10.7974	-61.151	50.354
8	-10.7974	-61.151	50.354
9	-6.6732	-37.7934	31.120

**Figura 6:** Error absoluto para el método explícito para  $t = 0.03$

nº	soluciones		Error Absoluto
	Exacta	Aproximada usando Explícito	
1	29.3278	-395.3	424.63
2	47.4533	-639.6	687.05
3	47.4533	-639.6	687.05
4	29.3278	-395.3	424.63
5	0	0	0.00
6	-29.3278	395.3	-424.63
7	-47.4533	639.6	-687.05
8	-47.4533	639.6	-687.05
9	-29.3278	395.3	-424.63

**Figura 7:** Error absoluto para el método explícito para  $t = 0.04$

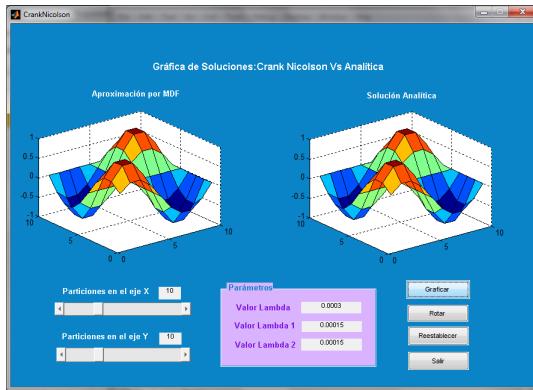
nº	soluciones		Error Absoluto
	Exacta	Aproximada usando Explícito	
1	128.892	4134	-4,005.108
2	208.552	6689	-6,480.448
3	208.552	6689	-6,480.448
4	128.892	4134	-4,005.108
5	0	0	0.000
6	-128.892	-4134	4,005.108
7	-208.552	-6689	6,480.448
8	-208.552	-6689	6,480.448
9	-128.892	-4134	4,005.108

**Figura 8:** Error absoluto para el método explícito para  $t = 0.05$

nº	soluciones		Error Absoluto
	Exacta	Aproximada usando Explícito	
1	566.5	-43240	43,806.500
2	916.6	-69960	70,876.600
3	916.6	-69960	70,876.600
4	566.5	-43240	43,806.500
5	0	0	0.000
6	-566.5	43240	-43,806.500
7	-916.6	69960	-70,876.600
8	-916.6	69960	-70,876.600
9	-566.5	43240	-43,806.500

**Nota:** En las anteriores tablas se muestra el error para el método explícito cuando los valores de los parámetros son mayores a los permitidos por la condición de estabilidad de dicho método. Este error fue hallado mediante la diferencia entre los valores exactos de la solución y los aproximados usando explícito. La anterior tabla solo muestra los valores del error para una porción de los valores tomados de la matriz solución para el instante de tiempo especificado.

Por otro lado al usar el esquema de diferencias de crank nicolson, si graficamos ambas soluciones la aproximada por método crank nicolson y la exacta obtenemos:



**Figura 9:** Aproximación por esquema de crank nicolson

Notemos que al igual que en el esquema de diferencias anteriormente utilizado hemos hallado una buena aproximación con respecto a la solución analítica que, a diferencia del método anterior, el método de crank nicolson es incondicionalmente estable. De la figura (10) a la (14) se muestra una comparación sobre la efectividad de cada método con base en el cálculo de sus errores. Para esto usamos los valores registrados entre la tabla de valores exactos de la solución y los aproximados usando explícito y nicolson en cada instante de tiempo.

**Figura 10:** Tabla comparativa Explícito - Nicolson para  $t = 0.01$

nº	soluciones			Error Absoluto	
	Exacta	Aproximada usando Explícito	Aproximada usando Crank Nicolson	Explícito	Nicolson
1	0.3455	0.3451	0.3448	0.0004	0.0003
2	0.5591	0.5594	0.5579	0.0015	0.002
3	0.5591	0.5584	0.5574	0.0007	0.003
4	0.3455	0.3451	0.3447	0.0004	0.001
5	0	0	0.0003	0.0000	0.000
6	-0.3455	-0.3451	-0.3443	-0.0004	-0.001
7	-0.5591	-0.5584	-0.5573	-0.0007	-0.002
8	-0.5591	-0.5584	-0.5574	-0.0007	-0.002
9	-0.3455	-0.3451	-0.3447	-0.0004	-0.001

**Figura 11:** Tabla comparativa Explícito - Nicolson para  $t = 0.02$

nº	soluciones			Error Absoluto	
	Exacta	Aproximada usando Explícito	Aproximada usando Crank Nicolson	Explícito	Nicolson
1	0.3456	0.3447	0.343	0.0009	0.003
2	0.5592	0.5577	0.5556	0.0015	0.004
3	0.5592	0.5577	0.5559	0.0003	0.002
4	0.3454	0.3447	0.3439	0.0007	0.002
5	0	0	0.0005	0.0000	-0.001
6	-0.3456	-0.3447	-0.343	-0.0009	-0.003
7	-0.5592	-0.5577	-0.5556	-0.0015	-0.003
8	-0.5592	-0.5577	-0.5559	-0.0015	-0.003
9	-0.3456	-0.3447	-0.3439	-0.0009	-0.002

**Figura 12:** Tabla comparativa Explícito - Nicolson para  $t = 0.03$

nº	soluciones			Error Absoluto	
	Exacta	Aproximada usando Explícito	Aproximada usando Crank Nicolson	Explícito	Nicolson
1	0.3456	0.3443	0.3418	0.0013	0.004
2	0.5593	0.5571	0.5556	0.0022	0.006
3	0.5593	0.5571	0.5553	0.0001	0.001
4	0.3456	0.3443	0.3431	0.0012	0.003
5	0	0	0.0008	0.0000	-0.001
6	-0.3456	-0.3443	-0.3418	-0.0013	-0.004
7	-0.5593	-0.5571	-0.5558	-0.0022	-0.006
8	-0.5593	-0.5571	-0.5543	-0.0022	-0.005
9	-0.3456	-0.3443	-0.3431	-0.0013	-0.003

**Figura 13:** Tabla comparativa Explícito - Nicolson para  $t = 0.04$

nº	soluciones			Error Absoluto	
	Exacta	Aproximada usando Explícito	Aproximada usando Crank Nicolson	Explícito	Nicolson
1	0.3457	0.3439	0.3406	0.0018	0.005
2	0.5593	0.5565	0.5521	0.0028	0.007
3	0.5593	0.5565	0.5527	0.0028	0.007
4	0.3457	0.3439	0.3422	0.0018	0.004
5	0	0	0.001	0.0000	-0.001
6	-0.3457	-0.3439	-0.3406	-0.0018	-0.005
7	-0.5593	-0.5565	-0.5521	-0.0028	-0.007
8	-0.5593	-0.5565	-0.5527	-0.0028	-0.007
9	-0.3457	-0.3439	-0.3422	-0.0018	-0.004

**Figura 14:** Tabla comparativa Explícito - Nicolson para  $t = 0.05$

nº	soluciones			Error Absoluto	
	Exacta	Aproximada usando Explícito	Aproximada usando Crank Nicolson	Explícito	Nicolson
1	0.3457	0.3435	0.3404	0.0022	0.005
2	0.5594	0.5558	0.5504	0.0036	0.009
3	0.5594	0.5558	0.5512	0.0036	0.008
4	0.3457	0.3435	0.3414	0.0022	0.004
5	0	0	0.0013	0.0000	-0.001
6	-0.3457	-0.3435	-0.3394	-0.0022	-0.005
7	-0.5594	-0.5558	-0.5504	-0.0036	-0.009
8	-0.5594	-0.5558	-0.5512	-0.0036	-0.008
9	-0.3457	-0.3435	-0.3414	-0.0022	-0.004

**Nota:** En las anteriores tablas se muestra el error absoluto para cada método. La anterior tabla solo muestra los valores del error para una porción de los valores tomados de la matriz solución para el instante de tiempo especificado.

## 7. Conclusiones

Luego de conocer y aplicar el método de diferencias finitas, es posible afirmar que este es un recurso efectivo al momento de encontrar la solución del problema de los niveles piezométricos del acuífero con determinadas condiciones iniciales y de frontera de dirichlet homogénea, pues gráficamente y numéricamente hemos podido observar los errores de aproximación que nos arrojan al momento de usar cualquiera de los esquemas bien sea explícito o de crank nicolson son muy pequeños con respecto a la solución analítica.

Por otra parte aplicar éste método, suele ser más conveniente, ya que usando MDF nuestro problema continuo se convierte en un sencillo sistema de ecuaciones algebraicas el cual es resuelto utilizando conocimientos de cálculo y álgebra lineal. Además, podemos concluir que el esquema de diferencias progresivas es sencillo de implementar computacionalmente y eficientemente convergente, teniendo en cuenta su condición de estabilidad para el parámetro  $\lambda$  de dicha ecuación. Por otra parte el esquema de crank nicholson es incondicionalmente estable, puesto que para este método no hay restricciones para los valores de  $\lambda$ , aunque exige más computacionalmente y requiere de más nodos para aproximar la solución que el explícito.

Finalmente, se puede concluir que el método de diferencias finitas es efectivo, confiable, sencillo y rápido para resolver problemas en los que se requiera hallar aproximaciones de ecuaciones diferenciales parciales de acuerdo a las características propias del problema que modela el flujo de contaminantes disueltos en un acuífero.

## Referencias

- [1] Valéria de Magalhaes Iório. *EDP um curso de graduação*. Instituto de matemática pura y aplicada IMPA, Rio de janeiro, 1991.
- [2] Moysey Brio, Aramais Zakharian & Gary M. Webb. *Numerical Time-Dependent Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. C.K Chui, Stanford University, 2010.
- [3] Jorge Molinero Huguet. *Clase: hidrogeología: Tipos de acuíferos*. [Documento en línea] Sevilla 7 julio del 2005, <<http://blog.pucp.edu.pe/media/3815/20110520-Tiposdeacuiferos.pdf>>. Consultado: Mayo 2013.
- [4] Dr. Ingeniero Tupak Obando R, Geólogo. *Fundamentos y métodos de la Hidrogeología*. [Documento en línea]. Managua, Marzo 2010 <<http://www.monografias.com/trabajos-pdf/fundamentos-metodos-hidrogeologia.pdf>>. Consultado: Mayo 2013.
- [5] F. Javier Sánchez San román, Univ de Salamanca (España). *Conceptos fundamentales de hidrogeología*. [Documento en línea]. España noviembre 2012. <<http://hidrologia.usal.es/temas/ConceptosHidrogeol.pdf>>. Consultado: Junio 2013.
- [6] F. Javier Sánchez San román, Dpto. de geología, Univ. de Salamanca (España). *Ley de Darcy. Conductividad hidráulica*. [Documento en línea]. España noviembre 2012. <<http://ocw.usal.es/eduCommons/ciencias-experimentales/hidrologia/LeyDarcy.pdf>>. Consultado: Junio 2013.
- [7] Univ. de Extremadura. *Apuntes de ecuaciones diferenciales*, Dpto. de Matemáticas. Badajoz-España, Mayo 2013.[Documento en línea]. <<http://matematicas.unex.es/ricarfr/EcDiferenciales/LibroEDlat.pdf>>.

Valbuena S. et all, 2014, "Simulación numérica por MDF para la solución de la ecuación diferencial parcial que modela el flujo de contaminantes de un acuífero". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en: <http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

# Sobre una Extensión de los Polinomios de Apostol-Euler Generalizados

## On an Extension of the Generalized Apostol-Euler Polynomials

Pedro L. Hernández Llanos<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Programa de Matemáticas

Universidad del Atlántico, Colombia

E-mail: phernandezllanos@mail.uniallantico.edu.co

Alejandro Urielés Guerrero<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Dpto. Matemáticas Puras y Aplicadas

Universidad Simón Bolívar, Venezuela

Programa de Matemáticas

Universidad del Atlántico, Colombia

E-mail: alejandrourieles@mail.uniallantico.edu.co

Received / Recibido: 18/12/2013. Accepted / Aceptado: 25/01/2014

---

### Resumen

En este artículo se estudia una extensión conocida de los polinomios de Apostol-Euler generalizados y algunas de sus propiedades, su relación con los números de Stirling de segundo orden, los polinomios de Genocchi y los polinomios ortogonales clásicos.

**Palabras claves:** Polinomios de Genocchi; funciones generatrices; polinomios de Apostol-Euler generalizados; Polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite; números de Stirling de segundo orden.

### Abstract

In this article is studied an known extension of generalized Apostol-Euler polynomials and some properties, its relationship with the Stirling numbers of the second kind, Genocchi polynomials and the classics orthogonal polynomials.

**Keywords:** Genocchi polynomials; generating function; generalized Apostol-Euler polynomials ; Jacobi, Laguerre and Hermite polynomials; Stirling numbers of the second kind.

---

### 1. Introducción

Denotamos por  $E_n^\alpha(x)$  los polinomios de Euler generalizados de orden  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Siguiendo las ideas de Apostol en el estudio de los polinomios de Bernoulli [1], Luo y Srivastava estudian los polinomios de Apostol-Euler [8]; en un trabajo

posterior Luo [9] introduce una generalización de los polinomios de Apostol-Euler  $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$  con  $\lambda$  real o complejo. En el presente trabajo realizamos inicialmente un estudio de una extensión de los polinomios  $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$  tomando como base un trabajo reciente de Chen, Cai y Luo (ver [2]), di-

cha extensión la notamos por  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$ . En la sección 2 damos algunos resultados y observaciones conocidas que serán utilizados en el trabajo.

Finalmente, en la sección 3 estudiamos las relaciones entre los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  y los números de Stirling de segundo orden, los polinomios de Genocchi y los polinomios clásicos de Jacobi, Hermite y Laguerre.

## 2. Resultados Previos y Notación

Sea  $E_n(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Euler. Para  $\alpha \in \mathbb{C}$ , denotamos por  $E_n^{(\alpha)}(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Euler generalizado,  $S(n, k)$  los números de Stirling de segundo orden,  $G_n(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Genocchi,  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ,  $L_n^{(\alpha)}(x)$  y  $H_n(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Jacobi, Laguerre y Hermite respectivamente. En la presente sección damos algunos resultados conocidos, necesarios para nuestro estudio, los cuales pueden consultarse en [3, 4, 5], entre otros.

**DEFINICIÓN 2.1.** Los polinomios de Euler  $E_n(x)$  están definidos por la siguiente función generatriz:

$$\frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (1) \quad (|t| < \pi).$$

**DEFINICIÓN 2.2.** Los polinomios de Euler generalizados  $E_n^{\alpha}(x)$  de orden  $\alpha \in \mathbb{Z}$  están definidos por la siguiente función generatriz:

$$\left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (|t| < \pi). \quad (2)$$

**OBSERVACIÓN 2.1.** Para  $\alpha = 1$  tenemos  $E_n^{(1)}(x) = E_n(x)$ .

**DEFINICIÓN 2.3.** Los polinomios de Apostol-Euler generalizados  $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$  de orden  $\alpha \in \mathbb{N}$  son definidos mediante la siguiente función generatriz:

$$\left( \frac{2}{\lambda e^t + 1} \right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (3)$$

( $|t| < \pi$  cuando  $\lambda = 1$ ;  $|t| < |\log(-\lambda)|$ , donde  $\lambda \neq 1$ ).

**DEFINICIÓN 2.4.** Los polinomios de Apostol-Euler generalizados  $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$  de orden  $\alpha \in \mathbb{C}$  son definidos mediante la siguiente función generatriz:

$$\left( \frac{2}{\lambda e^t + 1} \right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (4)$$

( $|t| < |\log(-\lambda)|$ ).

**OBSERVACIÓN 2.2.** Los polinomios de Apostol-Euler  $E_{n,\lambda}(x) = E_{n,\lambda}^{(1)}(x)$  y polinomios de Apostol-Euler generalizados  $E_n^{(\alpha)}(x) = E_{n,1}^{(\alpha)}(x)$ .

**DEFINICIÓN 2.5.** Los polinomios de Euler generalizados  $E_n^{[m-1,\alpha]}(x)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  están definidos en un entorno de  $t = 0$ , mediante la función generatriz:

$$\left( \frac{2^m}{e^t + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{t^l}{l!}} \right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{[m-1,\alpha]}(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (5)$$

**OBSERVACIÓN 2.3.** Si tomamos  $m = 1$ , en (5) obtenemos (2).

**DEFINICIÓN 2.6.** Para parámetros arbitrarios reales o complejos  $\lambda$  y los números  $m, \alpha \in \mathbb{N}$ , los polinomios de Apostol-Euler generalizados  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  están definidos en un entorno de  $t = 0$ , mediante la función generatriz:

$$\left( \frac{2^m}{\lambda e^t + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{t^l}{l!}} \right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6)$$

**OBSERVACIÓN 2.4.** Si hacemos  $m = 1$ , en (6) obtenemos (3).

**DEFINICIÓN 2.7.** Para números  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , los polinomios de Euler generalizados  $E_n^{[m-1,\alpha]}(x)$ , están definidos en un entorno de  $t = 0$ , mediante la función generatriz:

$$\left( \frac{2^m}{e^t + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{t^l}{l!}} \right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{[m-1,\alpha]}(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (7)$$

**OBSERVACIÓN 2.5.** Si tomamos  $m = 1$ , en (7) obtenemos (2).

**DEFINICIÓN 2.8.** Los polinomios de Genocchi  $G_n(x)$  son usualmente definidos a través de la siguiente función generatriz:

$$\frac{2te^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (|t| < \pi). \quad (8)$$

**LEMA 1.** Los polinomios de Genocchi  $G_n(x)$  verifican la siguiente relación:

$$\begin{aligned} x^m &= \frac{1}{2(m+1)} \\ &\times \left[ \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} G_{k+1}(x) + G_{m+1}(x) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

**DEFINICIÓN 2.9.** Los números de Stirling de segundo orden  $S(n, k)$  están definidos por las siguientes funciones generalizadas:

$$\prod_{n=1}^k (1 - nt)^{-1} = \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) t^{n-k}, \quad (10)$$

$$(e^t + 1)^k = k! \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad (11)$$

$$z^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) (t)_k, \quad (12)$$

con  $(|t| < k^{-1})$ ,  $(t)_k = t(t-1) \cdots (t-k+1)$ .

$S(n, k)$  denota el número de formas de particionar un conjunto de  $n$  elementos en  $k$  subconjuntos no vacíos.

**LEMA 2.** Los números de Stirling  $S(n, k)$  verifican la siguiente relación:

$$x^m = \sum_{k=0}^m \binom{x}{k} k! S(m, k). \quad (13)$$

**DEFINICIÓN 2.10.** Los polinomios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  se definen a través de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{1}{(-2)^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \\ &\times \frac{d^n}{(dx)^n} [(1-x)^\alpha + n (1+x)^\beta], \end{aligned} \quad (14)$$

con  $x \in (-1, 1)$ .

**LEMA 3.** Los polinomios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  verifican la siguiente relación:

$$\begin{aligned} x^m &= m! \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m+\alpha}{m-k} \\ &\times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{m+1}} P_k^{(\alpha, \beta)}(1-2x). \end{aligned} \quad (15)$$

**DEFINICIÓN 2.11.** Los polinomios de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  son definidos a través de la siguiente expresión:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x}{n! x^\alpha} \frac{d^n}{(dx)^n} [e^{-x} x^{n+\alpha}]. \quad (16)$$

**LEMA 4.** Los polinomios de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  verifican la siguiente relación:

$$x^m = m! \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m+\alpha}{m-k} L_k^{(\alpha)}(x). \quad (17)$$

**DEFINICIÓN 2.12.** Los polinomios de Hermite  $H_n(x)$  son usualmente definidos a través de la siguiente función generatriz:

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (18)$$

y pueden ser generados mediante la fórmula:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{(dx)^n} [e^{-x^2}]. \quad (19)$$

**LEMA 5.** Los polinomios de Hermite  $H_n(x)$  verifican la siguiente relación:

$$(2x)^m = \sum_{k=0}^{[m/2]} \binom{m}{2k} \frac{(2k)!}{k!} H_{m-2k}(x). \quad (20)$$

Los siguientes teoremas establecen relaciones entre la base canónica de los polinomios y la extensión de los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  (ver [2]).

**TEOREMA 1.** Los polinomios de Apostol-Euler generalizados  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  satisfacen las siguientes relaciones:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x) E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\beta]}(y), \quad (21)$$

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) x^{n-j}. \quad (22)$$

**TEOREMA 2.** Los polinomios de Apostol-Euler generalizados  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  satisfacen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_{k,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x) E_{k,\lambda}^{(-1)}(0) &= \lambda E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+1) \\ &+ E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x). \end{aligned} \quad (23)$$

### 3. Algunas Fórmulas De Conexión De Los Polinomios $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$

En esta sección estudiaremos algunas conexiones existentes entre los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  y otras familias de polinomios como los de Genocchi, Jacobi, Laguerre y Hermite, además estudiaremos la relación de los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  con los números de Stirling de segundo orden. Para llevar a cabo todo lo anterior seguimos las mismas ideas utilizadas en la demostración del Teorema 1, además usamos las siguientes propiedades básicas de las sumatorias:

$$\sum_{j=0}^n A_{n-j} B_n = \sum_{j=0}^n A_j B_{n-j}, \quad (24)$$

$$\sum_{j=0}^{n-k} A_j = \sum_{j=k}^n A_{n-j}, \quad (25)$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j a_k = \left( \sum_{j=0}^n a_j \right) \left( \sum_{k=0}^n a_k \right), \quad (26)$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} a_{jk}. \quad (27)$$

**TEOREMA 3.** Los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  y los polinomios de Genocchi  $G_{n,\lambda}(x)$  definidos en (8) verifican la siguiente relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \\ \times \left( A^{(\alpha,\lambda)}(x, n, k) + B^{(\alpha,\lambda)}(x, n, k) \right) G_{k+1}(x), \quad (28)$$

con

$$A^{(\alpha,\lambda)}(x, n, k) = \binom{n}{k} E_{n-k,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y), \\ B^{(\alpha,\lambda)}(x, n, k) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y).$$

*Demostración.* Por sustitución de (9) en el miembro de la derecha de (22), tenemos

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(n-j+1)} \\ \times \left[ \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j+1}{k+1} G_{k+1}(x) + G_{n-j+1}(x) \right] \\ = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(n-j+1)} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j+1}{k+1} G_{k+1}(x) \\ + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(n-j+1)} G_{n-j+1}(x)$$

usando (26) se sigue que

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(n-j+1)} \binom{n-j+1}{k+1} G_{k+1}(x) \\ + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(n-j+1)} G_{n-j+1}(x)$$

aplicando (27) en la primera suma y cambiando  $j$  por  $k$  tenemos

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(n-j+1)} \binom{n-j+1}{k+1} G_{k+1}(x) \\ + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_{k,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(n-k+1)} G_{n-k+1}(x)$$

ahora, usando (25) en la primera suma y (24) en la segunda suma, se sigue que

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \binom{n}{n-j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(j+1)} \binom{j+1}{k+1} G_{k+1}(x) \\ + \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} E_{n-k,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \frac{1}{2(k+1)} G_{k+1}(x)$$

finalmente amplificando por  $\binom{j}{k}$  en la primera suma, desarrollando los combinatorios y factorizando  $G_{k+1}(x)$  finalizamos la prueba.  $\square$

**TEOREMA 4.** Los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  y los polinomios de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  definidos por (14) satisfacen la relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\mu]}(x+y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{j=k}^n j! \binom{j+\alpha}{j-k} \binom{n}{j} \\ \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{j+1}} E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\mu]}(y) P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x). \quad (29)$$

*Demostración.* Por sustitución de (15) en el miembro de la derecha de (22), tenemos

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) \\ = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) (n-j)! \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j+\alpha}{n-j-k} \\ \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{n-j+1}} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$$

aplicando (26), se sigue que

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) (n-j)! (-1)^k \binom{n-j+\alpha}{n-j-k} \\ \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{n-j+1}} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$$

usando (27) tenemos

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) (n-j)! (-1)^k \binom{n-j+\alpha}{n-j-k} \\ \times \frac{\alpha+\beta+2k+1}{(\alpha+\beta+k+1)_{n-j+1}} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)$$

nuevamente por uso de (26), aplicando después (25) y ordenando los combinatorios finalizamos la prueba.  $\square$

**TEOREMA 5.** Los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  y los polinomios de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  definidos por (16) satisfacen la relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\mu]}(x+y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{j=k}^n j! \binom{n}{j} \binom{j+\alpha}{j-k} E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\mu]}(y) L_k^{(\alpha)}(x). \quad (30)$$

*Demostración.* Si hacemos  $m = n - j$  en (17), tenemos:

$$x^{n-j} = (n-j)! \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j+\alpha}{n-j-k} L_k^{(\alpha)}(x). \quad (31)$$

Ahora, al sustituir (31) en el miembro de la derecha de (22) se sigue que:

$$\begin{aligned} & E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) (n-j)! \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j+\alpha}{n-j-k} L_k^{(\alpha)}(x) \end{aligned}$$

por aplicación de (26), obtenemos

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) (n-j)! (-1)^k \binom{n-j+\alpha}{n-j-k} L_k^{(\alpha)}(x)$$

usando (27), tenemos

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) (n-j)! (-1)^k \binom{n-j+\alpha}{n-j-k} L_k^{(\alpha)}(x).$$

Finalmente al aplicar nuevamente (26) y luego (25) concluimos la prueba.  $\square$

**TEOREMA 6.** Los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\mu]}(x)$  y los polinomios de Hermite  $H_n(x)$  definidos por (18) verifican la relación:

$$\begin{aligned} E_{n,\lambda}^{[m-1,\mu]}(x+y) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{[(n-j)/2]} 2^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{2k} \\ &\times \frac{(2k)!}{k!} E_{j,\lambda}^{[m-1,\mu]}(y) H_{n-j-2k}(x). \end{aligned} \quad (32)$$

*Demostración.* Consideramos la expresión (20), despejamos  $x^m$  y hacemos  $m = n - j$  tenemos:

$$x^{n-j} = \sum_{k=0}^{[n-j/2]} 2^{-(n-j)} \binom{n-j}{2k} \frac{(2k)!}{k!} H_{n-j-2k}(x), \quad (33)$$

luego al sustituir (33) en el miembro de la derecha de (22) y haciendo uso de (26) concluimos la prueba.  $\square$

**TEOREMA 7.** Los polinomios  $E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x)$  y los números de Stirling  $S(n, k)$  de segundo orden definidos en (12) satisfacen la relación:

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{k=0}^n k! \binom{x}{k} \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} E_{n-j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) S(j, k) \quad (34)$$

*Demostración.* Al sustituir (13) en el miembro de la derecha de (22), tenemos

$$E_{n,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \sum_{k=0}^{n-j} \binom{x}{k} k! S(n-j, k)$$

por (26), se sigue que

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \binom{x}{k} k! S(n-j, k)$$

ahora por (27), entonces

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} E_{j,\lambda}^{[m-1,\alpha]}(y) \binom{x}{k} k! S(n-j, k).$$

Finalmente usando de nuevo (26) y luego (25) finalizamos la prueba.  $\square$

**OBSERVACIÓN 3.1.** Si hacemos  $m = 1$  en (28), (34), (29), (30) y (32), entonces obtenemos los resultados correspondientes de los polinomios de Apostol-Euler generalizados  $E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)$ .

**OBSERVACIÓN 3.2.** Si hacemos  $m = 1$ ,  $\lambda = 1$  en (28), (34), (29), (30) y (32), entonces obtenemos los resultados correspondientes de los polinomios de Euler generalizados  $E_n^{(\alpha)}(x)$ .

## Referencias

- [1] Apostol, T: *On the Lerch Zeta function.* Pacific J. Math. **1**, 161-167 (1951)
- [2] Chen, S, Cai, Y, Luo, Q: *An extension of generalized Apostol-Euler polynomials.* **2013:61**, Chen et al. Advances in Difference Equations (2013)
- [3] Erdélyi, A, Magnus, W, Oberhettinger, F, Tricomi, F: *Higher Transcendental Functions.* **Vol 1** (1953)
- [4] Erdélyi, A, Magnus, W, Oberhettinger, F, Tricomi, F: *Higher Transcendental Functions.* **Vol 2** (1953)
- [5] Erdélyi, A, Magnus, W, Oberhettinger, F, Tricomi, F: *Higher Transcendental Functions.* **Vol 3** (1953)
- [6] Kurt, B: *A further generalization of the Bernoulli polynomials and on the 2D-Bernoulli polynomials  $B_n^2(x, y)$ .* Appl. Math. **233**, 3005-3017 (2010)
- [7] Luke, Y: *The Special Functions and their Approximations.* (1969)
- [8] Luo, Q-M, Srivastava, HM: *Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials.* J. Math. Anal. Appl. **308**, 290-302 (2005)
- [9] Luo, Q-M: *Apostol-Euler polynomials of higher order and Gaussian hypergeometric functions.* Taiwan, J. Math. **10**(4), 917-925 (2006)
- [10] Luo, Q-M, Srivastava, HM: *Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials* Comput. Math. Appl. **51**, 631-642 (2006)
- [11] Luo, Q-M: *Some generalizations of the Apostol-Genocchi and Stirling numbers of the second kind.* Appl. Math. Comput. **217**, 5702-5728 (2011)

- [12] Luo, Q-M: *Extension for the Genocchi polynomials and its Fourier expansions and integral representations.* Osaka J. Math. **48**, 291-309 (2011)
- [13] Natalini, P, Bernardini, A: *A generalization of the Bernoulli polynomials.* J. Appl. Math.)**3**, 155-163 (2003)
- [14] Rainville, ED: *Special Functions.* Macmillan Company, New York (1960); Reprinted by Chelsea publishing Company, Bronx (1971)
- [15] Srivastava, HM, Choi, J: *Series Associated with the Zeta and Related Functions.* Kluwer Academic, Dordrecht (2001)
- [16] Srivastava, HM, Kurt, B, Simsek, Y: *Corrigendum to some families of Genocchi type polynomials and their interpolation functions.* Integral Transforms Spec. Funct. **23**, 939-940 (2009)
- [17] Szego, G: *Orthogonal Polynomials.* American Math. Soc. Providence, Rhode Island. (1939)
- [18] Tremblay, R, Gaboury, S, Fugére, B-J: *A new class of generalized Apostol-Bernoulli polynomials and some analogues of the Srivastava. Pintér addition theorem* Appl. Math. Lett. **24**, 1888-1893 (2011)
- [19] Wang, W, Jia, C, Wang, T: *Some results on the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials.* Comput. Math. Appl. **55**, 1322-1332 (2008)

Para citar este artículo: Hernández P. et all, 2014, "Sobre una Extensión de los Polinomios de Apostol-Euler Generalizados". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:  
<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

# INTRODUCCIÓN A LA PRESENTACIÓN DE GRUPOS

## Introduction to the presentation of groups

Gabriel Mauricio Vergara Rios<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico  
Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín, Colombia  
E-mail: gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co*

Julio Cesar Romero Pabón<sup>2</sup>

<sup>2</sup> *Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico  
Univ. Rafael Belloso Chacín, Colombia  
E-mail: julioromero@mail.uniatlantico.edu.co*

Amy Toscano Esmeral<sup>3</sup>

<sup>3</sup> *Programa de Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia  
amytoscanoe@hotmail.com*

*Received / Recibido: 30/11/2013. Accepted / Aceptado: 13/03/2014*

---

### Resumen

Uno de los resultados más importantes de la Teoría combinatoria de grupos garantiza que dado un conjunto no vacío  $X$ , existe un grupo que es libre en  $X$ , a saber el grupo  $F := F(X)$  de palabras reducidas en  $X$ . Así las cosas, nuestro propósito fundamental en este trabajo es mostrar como a este grupo se le puede dotar de un buen orden y posteriormente usar este hecho para probar que todo subgrupo  $H$  de  $F$  tiene una transversal de Schreier. Finalmente trataremos algunos apartes respecto a la libre presentación de grupos y al test de sustitución, el cual nos permite encontrar presentaciones isomórficas a una presentación dada de un grupo.

*Palabras claves:* Grupo libre, palabra reducida, transversal de Schreier y presentación de grupos.

### Abstract

One of the most important combinatorial group theory guarantees that given a nonempty set  $X$ , there is a group who is free on  $X$ , namely the group  $F := F(X)$  of reduced words in  $X$ . So, our fundamental purpose in this paper is to show how this group can provide a good order and subsequently use this fact to prove that every subgroup  $H$  of  $F$  has a Schreier transversal. Finally we discuss some asides about the free submission of test groups and substitution, which allows us to locate an isomorphic presentations given to the presentation of a group.

*Keywords:* Free group, reduced word, Schreier transversal and group presentation.

---

### 1. Preliminares

En esta sección definiremos los tópicos necesarios para poder abordar con mayor precisión los temas que serán tratados a través de este trabajo.

**Definición 1.1.** *Un grupo  $F$  se dice libre en un subconjunto  $X \subseteq F$  si para todo grupo  $G$  y toda función  $\theta : X \rightarrow G$ , existe un único homomorfismo*

$\varphi : F \longrightarrow G$  que extiende a  $\theta$ , es decir  $\varphi|_X = \theta$ . Decir que  $\varphi$  extiende  $\theta$  equivale a que el siguiente diagrama commute:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow \theta & \downarrow \varphi \\ & G & \end{array}$$

donde  $i : X \rightarrow F$  es la función inclusión. En tal caso decimos que  $X$  genera libremente a  $F$  y que  $X$  es un **conjunto generador** para  $F$  o una **base** para  $F$ . Si  $X$  es finito decimos que  $F$  es **finitamente generado**.

La notación  $F = \langle X \rangle$  indica que  $F$  es libre con base  $X$ . En particular, si  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , escribimos  $F = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ .

**Lema 1.1.** Si  $F$  es libre en  $X$ , entonces  $F = \langle X \rangle$ .

Demostración. Ver [1].  $\square$

**Definición 1.2.** Sea  $X$  un conjunto. Una **palabra** en  $X$  es una sucesión  $w = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_i \in (X \cup \{1\})^\pm$  y  $1^\pm = 1$ . Si  $x_i = 1$  para todo  $i$ , diremos que  $w$  es la **palabra vacía** y escribiremos  $w = 1$ .

A lo largo de este trabajo, en lugar de  $w = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , escribiremos  $w = x_1 x_2 \dots x_n$  o  $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ , donde  $x_i \in X \cup \{1\}$  y  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ .

**Definición 1.3.** Sea  $X$  un conjunto arbitrario y  $w = x_1 x_2 \dots x_n$  una palabra en  $X$ .

- La **inversa** de  $w$ , denotada  $w^{-1}$  se define como  $w^{-1} = x_n^{-1} x_{n-1}^{-1} \dots x_1^{-1}$ .
- A una palabra de la forma  $w' = x_i x_{i+1} \dots x_j$ , donde  $1 \leq i \leq j \leq n$ , la llamaremos una **subpalabra** de  $w = x_1 x_2 \dots x_n$ .
- Si  $w' = x_1 x_2 \dots x_j$ , diremos que  $w'$  es el segmento inicial de  $w$  que finaliza en  $x_j$ .
- Diremos que  $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$  con  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ , es una palabra **reducida** si no contiene subpalabras de la forma  $x^{\varepsilon_i} x^{-\varepsilon_i}$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
- Si  $v = y_1 y_2 \dots y_m$  es otra **palabra reducida** en  $X$ , definimos el producto de  $w$  con  $v$  como la palabra  $wv = x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$ .
- Una **transformación elemental** sobre  $w$  consiste en insertar o eliminar palabras de la forma  $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$  con  $\varepsilon = \pm 1$ . Si al aplicar una transformación elemental a  $w$  obtenemos una palabra  $w'$ , decimos que  $w'$  se **deriva** de  $w$  y escribiremos  $w \rightarrow w'$ .
- Si denotamos por  $W$  al conjunto de todas las palabras reducidas en  $X$ , diremos que  $v, w \in W$  son **equivalentes** si existen palabras  $w_1, w_2, \dots, w_n$  en  $W$  tales que  $w \rightarrow w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_n = v$ . En este caso escribiremos  $w \sim v$ .
- Dado un conjunto arbitrario  $X$ , denotamos por  $F(X)$  al conjunto de palabras reducidas en  $X$ ; es decir,  $F(X) = \{\bar{w} | w \in W\}$ , donde  $W$  está definido como arriba.

**Teorema 1.1.** Dado un conjunto  $X$ , existe un grupo  $F$  que es libre en  $X$ .

Demostración. Ver [1].  $\square$

**Definición 1.4.** Sea  $F$  un grupo libre en  $X$ ,  $R \subset F$  y  $N$  la clausura normal de  $R$  en  $F$  (es decir el subgrupo normal más pequeño de  $F$  que contiene a  $R$ ). Si  $G$  es un grupo tal que  $G \cong F/N$ , diremos que  $G$  tiene la presentación  $\langle X|R \rangle$  y escribiremos  $G = \langle X|R \rangle$ . A los elementos de  $X$  los llamaremos **generadores** de  $G$  y los elementos de  $R$ , **relaciones**. Además, si tanto  $X$  como  $R$  son finitos, diremos que  $G$  es **finitamente presentado**.

**Observación.** Abusando de la notación, supondremos que  $X \subset F$  es un conjunto generador de  $G$  y los elementos de  $R$  son relaciones que equivalen a la identidad en  $G$ ; i.e  $r = e$  para todo  $r \in R$ .

**Definición 1.5.** Sea “<” un buen orden en  $X^\pm$ , y sean  $a = x_1 x_2 \dots x_l$ ,  $b = y_1 y_2 \dots y_m$  con  $a \neq b$ , palabras reducidas en  $F$ . Escribiremos  $a < b$  si se cumple exactamente una de las siguientes condiciones:

- i)  $l < m$
- ii)  $l = m$  y  $x_r < y_r$  en  $X^\pm$ , donde  $r = \min\{i : x_i \neq y_i\}$

**Proposición 1.1.** Con la relación “<” definida arriba,  $F$  es un conjunto bien ordenado

Demostración.

- i) Para todo  $a = x_1 x_2 \dots x_l$ , palabra reducida en  $F$ , claramente no se cumple que  $a < a$  pues  $a = a$ .
- ii) Sean  $a = x_1 x_2 \dots x_l$ ,  $b = y_1 y_2 \dots y_m$  y  $c = z_1 z_2 \dots z_n$  palabras reducidas en  $F$  tales que  $a < b$ ,  $b < c$ ,  $l < m$  y  $m < n$ . Entonces  $l \leq n$  y por tanto  $a < c$ .
- iii) Para todo  $a, b \in F$ ,  $a = x_1 x_2 \dots x_l$ ,  $b = y_1 y_2 \dots y_m$ , de la definición de “<”, es claro que  $a < b$  o  $a = b$  o  $b < a$ .
- iv) Sea  $F^*$  un subconjunto no vacío de  $F$ . Como  $F$  es grupo (bajo la operación yuxtaposición de palabras),  $F^*$  también es grupo (con la operación de  $F$  restringida a  $F^*$ ), luego  $e$  (la palabra vacía) está en  $F^*$ , aún mas,  $e < a = x_1 x_2 \dots x_l$  para todo  $a \in F^*$  con  $a \neq e$ . Por tanto  $e$  es el elemento mínimo de  $F^*$ .

$\square$

## 2. La transversal de Schreier

Un resultado clásico de Dedekind afirma que si  $G$  es un grupo libre, así también lo es cualquier subgrupo de  $G$ . Probaremos el análogo para el caso no conmutativo, conocido como el Teorema de **Nielsen-Schreier**; sin embargo en el caso no abeliano, el rango del subgrupo puede exceder al rango del grupo. Los dos métodos de prueba, el dado por Nielsen (1921) y el de Schreier (1927) son muy diferentes y proveen los fundamentos para diferentes aspectos de los desarrollos subsiguientes de esta teoría. Por ejemplo, el método de Nielsen conduce de manera natural a la teoría de automorfismos de grupos libres, mientras que el método de Schreier es la llave para encontrar presentaciones de subgrupos.

Sea  $H$  un subgrupo fijo de  $F$  y sea  $w \in F$ . Sabemos que una clase lateral (derecha) de  $H$  es un subconjunto de  $F$  de la forma  $Hw := \{hw \mid h \in H\}$ ; además dos clases laterales cualesquiera o son iguales o son disjuntas esto es, para  $u, v \in F$  se tiene o que  $Hu = Hv$  o  $Hu \cap Hv = \emptyset$ . Por tanto las clases laterales de  $H$  forman una partición de  $F$ , es decir

$$F = \bigcup_{w \in F} Hw$$

**Definición 2.1.** Una transversal (derecha)  $U$  para  $H$  en  $F$  es el conjunto formado eligiendo un elemento de cada clase lateral de  $H$ , esto es,

$$U := \{a_j \mid a_j \in Hw_j\}.$$

Nótese que para cada  $w \in F$ ,  $Hw \cap U$  consiste de un solo elemento, el cual denotaremos por  $\bar{w}$ .

**Definición 2.2.** Un subconjunto no vacío  $S$  de  $F$  tiene la **propiedad de Schreier** si contiene todos los segmentos iniciales de cada uno de sus elementos, es decir

$$\forall w = x_1x_2 \dots x_n \in S \text{ se tiene que } x_1x_2 \dots x_{n-1} \in S.$$

**Definición 2.3.** Una transversal de Schreier para  $H$  en  $F$  es una transversal (derecha) para  $H$  con la propiedad de Schreier.

**Observación.** Cada conjunto  $S$  de Schreier y por lo tanto cada transversal de Schreier contiene la palabra vacía  $w = 1$ . En efecto, como  $S$  es no vacío entonces existe  $w_j = x_1x_2 \dots x_j \in S$  tal que  $l(w_j) \geq 1$ . Tenemos los siguientes casos:

- i) Si  $l(w_j) = 1$ , entonces  $w = x_1$  y como  $S$  tiene la propiedad de Schreier, el segmento inicial de  $w$  está en  $S$ , es decir  $x_{1-1} = x_0 = 1 \in S$ .
- ii) Si  $l(w_j) > 1$ , entonces  $w_j = x_1x_2 \dots x_j$ . Como  $S$  tiene la propiedad de Schreier entonces  $x_1x_2 \dots x_{j-1} \in S$  y nuevamente por la propiedad de Schreier,  $x_1x_2 \dots x_{j-2} \in S$ . Continuando con este proceso de manera reiterada, llegamos a que  $x_1 \in S$  y por tanto  $x_0 = 1 \in S$ .

**Lema 2.1.** Sea  $w = x_1x_2 \dots x_n$  una palabra reducida en  $X^\pm$  con  $n > 1$  y sea  $v \in F$ . Entonces

$$v < x_1x_2 \dots x_{n-1} \Rightarrow vx_n < w$$

*Demostración.* Consideremos los siguientes casos:

caso i:  $l(v) < l(x_1x_2 \dots x_{n-1}) = n - 1$ . Esto se puede dar pues  $x_1x_2 \dots x_{n-1}$  es una palabra reducida en  $X^\pm$ . Tenemos que  $l(v) < n - 1$ , luego

$$l(vx_n) \leq n - 1 < n = l(w).$$

Así  $l(vx_n) < l(w)$  y por tanto  $vx_n < w$ .

caso ii:  $l(v) = l(x_1x_2 \dots x_{n-1}) = n - 1$  y  $v = x_1x_2 \dots x_{r-1}y_r y_{r+1} \dots y_{n-1}$  con  $1 \leq r \leq n - 1$  y  $x_r < y_r$ . Luego  $vx_n = x_1x_2 \dots x_{r-1}y_r y_{r+1} \dots y_{n-1}x_n$ .

Si  $y_{n-1} = x_n^{-1}$ ,  $l(vx_n) = n - 2 < n = l(w)$ , por tanto  $vx_n < w$ .

Si  $y_{n-1} \neq x_n^{-1}$ ,  $l(vx_n) = n = l(w)$  y  $x_r < y_r$ ,  $1 \leq r \leq n - 1$  por tanto  $vx_n < w$ .

□

**Lema 2.2.** Cada subgrupo  $H$  de  $F$  tiene una transversal de Schreier, por ejemplo, la obtenida tomando el menor elemento de cada clase lateral derecha de  $H$ , con el orden definido en  $F$ .

*Demostración.* Sea  $H < F$ . Dado  $w \in F$ ,  $Hw$  es un subconjunto no vacío de  $F$  y como  $F$  tiene la propiedad del buen orden, para cada  $w \in F$ ,  $Hw$  contiene un elemento mínimo. Sea  $U = \{\bar{w}_i \mid \bar{w}_i = \min(Hw_i)\}$ , es decir  $U$  es el subconjunto de  $F$  consistente del menor elemento de cada clase lateral derecha  $Hw$  de  $H$  en  $F$ . Debemos probar que  $x_1x_2 \dots x_{n-1} \in U$  para todo  $\bar{w} = x_1x_2 \dots x_n \in U$ . En efecto, si  $x_1x_2 \dots x_{n-1} \notin U$  consideremos la clase lateral derecha  $Hx_1x_2 \dots x_{n-1}$  y sea  $v \in U$  tal que  $v$  es el menor elemento de  $Hx_1x_2 \dots x_{n-1}$ . Como  $x_1x_2 \dots x_{n-1} \in Hx_1x_2 \dots x_{n-1}$ , entonces  $v < x_1x_2 \dots x_{n-1}$  y como  $x_1x_2 \dots x_{n-1}$  es una palabra reducida en  $X^\pm$  por el Lema 2.1,

$$vx_n < x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = \bar{w};$$

además,  $Hv = Hx_1x_2 \dots x_{n-1}$  (esto es pues en general: Si  $G$  es un grupo,  $a, b \in G$  y  $a \in Hb \Rightarrow Ha = Hb$ ). Luego  $Hvx_n = Hx_1x_2 \dots x_{n-1}x_n$ , es decir  $Hvx_n = H\bar{w}$ , de donde se sigue que  $vx_n \in H\bar{w}$  y  $vx_n < \bar{w}$ , por lo que  $\bar{w}$  no es el elemento mínimo de  $H\bar{w}$ . Por tanto  $\bar{w} \notin U$  ( $\rightarrow \leftarrow$ ). En consecuencia,  $x_1x_2 \dots x_{n-1} \in U$  siempre que  $\bar{w} = x_1x_2 \dots x_n \in U$ . Por tanto  $U$  es una transversal de Schreier. □

**Ejemplo.** Sea  $X = \{x, y\}$  y sea  $F$  ordenado con el orden definido anteriormente. Además, sea  $S = \{x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy\} \subset F$  y sea

$$H = \overline{S} = \bigcap_{K \triangleleft F, K \supset S} K$$

la clausura normal de  $S$  en  $F$ . Mostraremos que  $[F : H] = 6$  y encontraremos una transversal de Schreier para  $H$  en  $F$ .

**Solución.** Consideremos el grupo cíclico de orden 6,  $Z_6 = \{e, a^2, \dots, a^5\}$  donde  $a^6 = e$ . En realidad,  $Z_6 = \langle a \mid a \in \mathbb{Z}, |a| = 6 \rangle$ . Como  $F$  es libre en  $X = \{x, y\}$ , para la función

$$\begin{aligned}\theta : \{x, y\} &\rightarrow Z_6 \\ x &\rightarrow a^2 \\ y &\rightarrow a^3,\end{aligned}$$

existe un único homorfismo  $\theta' : F \rightarrow Z_6$  que extiende a  $\theta$ , es decir  $\theta' \mid_X = \theta$ . Como  $x, y \in X$  y  $\theta'$  es homomorfismo, entonces:

$$\theta'(yx^{-1}) = \theta'(y)\theta'(x)^{-1} = \theta(y)\theta(x)^{-1} = a^3a^{-2} = a$$

$$\begin{aligned}y \\ \theta'(x^3) &= (\theta'(x))^3 = (\theta(x))^3 = a^6 = e \\ \theta'(y^2) &= (\theta'(y))^2 = (\theta(y))^2 = a^6 = e \\ \theta'(x^{-1}y^{-1}yx) &= e\end{aligned}$$

Nótese que:

- i)  $\theta'$  es sobreyectiva, pues para todo  $y \in Z_6 = \langle a \rangle$ ,  $y = a^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq n \leq 5$ . Además, como  $a = \theta'(yx^{-1})$  entonces

$$y = a^n = (\theta'(yx^{-1}))^n = \theta'((yx^{-1})^n).$$

- ii)  $S \subseteq \ker\theta'$ , pues para todo  $s \in S$ ,
- $$\theta'(s) = e, (\theta'(x^2) = e, \theta'(y^2) = e, \theta'(x^{-1}y^{-1}xy) = e)$$
- iii) Sabemos que  $\ker\theta' \triangleleft F$  y  $S \subseteq \ker\theta'$ , por lo que  $H = \overline{S} \leq \ker\theta'$ , esto pues  $\overline{S}$  es el subgrupo normal más pequeño de  $F$  que contiene a  $S$ .
- iv) Tenemos la cadena de subgrupos

$$H \leq \ker\theta' \trianglelefteq F,$$

por lo que

$$\begin{aligned}[F : H] &= [F : \ker\theta'][\ker\theta' : H] \\ &\geq [F : \ker\theta'] = |F/\ker\theta'| \\ &= |\text{Im}\theta'| \\ &= |Z_6| \\ &= 6.\end{aligned}$$

Por el primer teorema de isomorfismos,  $F/\ker\theta' \cong \text{Im}\theta' = Z_6$ , por tanto  $[F : H] \geq 6$ . De otro lado, dado que  $F = \langle \{x, y\} \rangle$  entonces  $x$  y  $y$  generan a  $F/H = \{gH : g \in F\}$ , es decir  $F/H = \langle \{Hx, Hy\} \rangle$ . Además,  $x'y' = HxHy = Hxy; y'x' = HyHx = Hyx$ , pero

$$x^{-1}y^{-1}xy = (yx)^{-1}xy \in S \subseteq \overline{S} = H$$

es decir  $(yx)^{-1}xy \in H$ , lo que equivale a que  $Hxy = Hyx$ . Por tanto  $x'y' = Hxy = Hyx = y'x'$ .

De otra parte,

$$(x')^3 = (Hx)^3 = HxHxHx = Hx^3 =$$

$$He = H = e_{F/H}$$

y como  $Hx \neq He, Hx^2 \neq He, (x \neq e, x^2 \neq e$  y las clases son disjuntas),  $x' = Hx$  tiene orden 3.

**Nota:**  $x^3 \in H \Rightarrow x^3e \in H \Rightarrow Hx^3 = He$ .

Análogamente, como  $y^2 \in H$  entonces  $y^2e \in H$  y  $Hy^2 = He = H = e_{F/H}$ . Luego  $(y')^2 = (Hy)^2 = HyHy = Hy^2 = e_{F/H}$  y como  $Hy \neq He$ , necesariamente  $y' = Hy$  tiene orden 2.

De otro lado, como  $F/H = \langle \{x', y'\} \rangle$  y  $O(x') = 3, O(y') = 2$ , entonces cualquier elemento de  $F/H$  es igual a una de las seis palabras  $e, x', (x')^2, y', x'y', (x')^2y'$  es decir cualquier elemento de  $F/H$  es igual a una de las seis clases  $H, Hx, Hx^2, Hy, Hxy, Hx^2y$ , pero como  $|F/H| = [F : H] \geq 6$ , esas seis clases deben ser distintas. Por tanto  $|F/H| \geq [F : H] = 6$ , y una transversal para  $H$  en  $F$  es:

$$T = \{e, x, x^2, y, xy, x^2y\}.$$

Nótese que  $T$  tiene la propiedad de Schreier, por lo que  $T$  es una transversal (derecha) de Schreier, pero  $T$  no coincide con el conjunto  $U$  construido en el lema 2.2. Esto se evidencia si usamos las siguientes reglas:

$$Hx^2 = Hx^{-1}, Hy^{-1} = Hy, Hxy = Hyx$$

vemos que los mínimos de las seis clases laterales para  $H$  son:

$$U = \{e, x, x^{-1}, y, xy, yx^{-1}\}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}H &= \{h, e : h \in H, h \neq e\}; \min(H) = e. \\ Hx &= \{hx : h \in H\} = \{x\} \cup \{hx : h \in H, h \neq e\}; \\ \min(Hx) &= x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hx^2 &= Hx^{-1} \Rightarrow Hx^2 \\ &= \{hx^{-1} : h \in H\} \\ &= \{x^{-1}\} \cup \{hx^{-1} : h \in H - \{e\}\}, \end{aligned}$$

por lo que  $\min(Hx^2) = x^{-1}$ .

$$\begin{aligned} Hy &= \{hy : h \in H\} \\ &= \{y\} \cup \{hy : h \in H - \{e\}\}, \\ \min(Hy) &= y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hxy &= \{h(xy) : h \in H\} \\ &= \{xy\} \cup \{h(xy) : h \in H - \{e\}\}, \end{aligned}$$

por lo que  $\min(Hxy) = xy$ .

Finalmente,

$$Hx^2y = Hyx^2 = HyHx^2 = HyHx^{-1} = Hyx^{-1}$$

por lo que  $\min(Hx^2y) = \min(Hyx^{-1}) = yx^{-1}$ .

### 2.1. Los generadores de Schreier

Dada una transversal de Schreier  $H$  de  $F$ , podemos encontrar unos generadores adecuados para  $H$ , haciendo uso de la función  $\bar{f} : F \rightarrow U$  definida para todo  $w \in F$  por  $\bar{f}(w) = \bar{w}$ , donde  $\bar{w} = Hw \cap U$ .  $\bar{f}$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $Hw = H\bar{w}, \forall w \in F$ .
2.  $\bar{\bar{w}} = \bar{w}$ .
3.  $\bar{w} = w$  si y solo si  $w \in U$ .

En efecto,

1. Como  $\bar{w} = Hw \cap U$  entonces  $\bar{w} \in Hw$  y esto ocurre si y solo si  $\bar{w} = hw, h \in H$  por lo que  $\bar{w}w^{-1} \in H$ , lo que equivale a que  $H\bar{w} = Hw$ .
2. Tenemos que  $\bar{\bar{w}} = H\bar{w} \cap U$ . Si  $x \in \bar{\bar{w}}$  entonces  $x \in H\bar{w} \cap U = Hw \cap U = \bar{w}$ , luego  $x \in \bar{w}$ . Por tanto  $\bar{\bar{w}} \subset \bar{w}$ . De otra parte,  $\bar{w} = Hw \cap U = H\bar{w} \cap U = \bar{\bar{w}}$ . Por tanto  $\bar{\bar{w}} = \bar{w}$ .
3. Si  $\bar{w} = w$  entonces  $Hw \cap U = \{w\}$ . Luego  $w \in U$  (pues  $w \in Hw$ ). Si  $w \in U$ , como  $w \in Hw$  entonces  $Hw \cap U = \{w\}$  es decir  $\bar{w} = w$ .

### Lema 2.3. Los elementos del conjunto

$$A := \{ux(\bar{u}\bar{x})^{-1} \mid u \in U; x \in X^\pm\}$$

generan a  $H$ .

*Demuestra*ción. Debemos probar que  $H = \langle A \rangle$ . En efecto, dado que  $Hux = H\bar{u}\bar{x}$  entonces  $ux(\bar{u}\bar{x})^{-1} \in H$  y por tanto  $A \subseteq H$ . Ahora sea  $h \in H$ , debemos probar que  $h$  se expresa como producto finito de elementos de  $A$ . Sea  $h = x_1x_2 \dots x_n$ ,  $x_i \in X^\pm$ ,  $1 \leq i \leq n$  una palabra reducida en  $X^\pm$ , por el Lema 2.2,  $H$  tiene una transversal de Schreier  $U$ . Definamos una sucesión de elementos de  $U$  inductivamente como sigue:

$$u_1 = e, \quad u_{i+1} = \bar{u}_i\bar{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (e \in U)$$

Sea  $a_i = u_i x_i u_{i+1}^{-1} = u_i x_i (\bar{u}_i \bar{x}_i)^{-1} \in A$ ,  $1 \leq i \leq n$ , así que:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_n &= u_1 x_1 u_2^{-1} u_2 x_2 u_3^{-1} u_3 x_3 u_4^{-1} \cdots u_n x_n u_{n+1}^{-1} \\ &= u_1 x_1 x_2 \dots x_n u_{n+1}^{-1} \\ &= ehu_{n+1}^{-1} \end{aligned}$$

Dado que  $a_1 a_2 \cdots a_n \in A \subseteq H$  entonces  $a_1 a_2 \cdots a_n \in H$ , luego  $u_{n+1} \in H$ , pero  $u_{n+1} \in U$ , por lo que  $u_{n+1} \in U \cap H = \{e\}$  y así  $u_{n+1} = e$ . Por tanto  $h = a_1 a_2 \cdots a_n$ , es decir  $h$  es producto de elementos de  $A$ . En consecuencia  $H = \langle A \rangle$ .  $\square$

**Teorema 2.1.** (Nielsen-Schreier). *Sea  $F$  un grupo libre y  $H$  un subgrupo de  $F$ . Entonces  $H$  es libre. Aún más, si  $|F : H| = g$  y  $r(F) = r$  son ambos finitos, entonces*

$$r(H) = (r-1)g + 1.$$

*Demuestra*ción. Ver ([1], pag. 22).  $\square$

El siguiente Teorema es considerado como uno de los resultados más importantes en teoría combinatoria de grupos, garantiza que todo grupo tiene una presentación. Este resultado fué un pilar fundamental en la solución del problema de la palbra de Gauss.

**Proposición 2.1.** *Todo grupo tiene una presentación y todo grupo finito es finitamente presentado.*

*Demuestra*ción. Sea  $G$  un grupo,  $X \subset G$  un conjunto generador para  $G$  y  $F$  el grupo libre en  $X$ . Como  $F$  es libre en  $X$ , para la función  $\theta : X \rightarrow G$  existe un único homomorfismo  $\varphi : F \rightarrow G$  tal que  $\varphi|_X = \theta$ . Ahora, puesto que  $X$  genera a  $G$  entonces  $\varphi$  es sobreyectiva, es decir  $\text{Im } \varphi = G$ . Por el primer Teorema de isomorfismos,  $F/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$ , es decir  $F/N \cong G$  donde  $N = \text{Ker } \varphi$ . Por tanto  $\langle X | N \rangle$  es una presentación para  $G$ , es decir  $G = \langle X | N \rangle$ .

Supongamos ahora que  $G$  es finito, luego  $F$  es libre de rango finito, i.e  $r(F) = |X| < \infty$ . Además,  $[F : N] = |F/N| = |G| < \infty$ . Por el Teorema de Nielsen-Schreier  $r(N) = (|X| - 1)|G| + 1$ , es decir  $N = \text{Ker } \varphi$  es libre de rango finito; luego existe  $R \subset N$  conjunto finito de generadores para  $N$ , es decir  $N = \langle R \rangle$  y como  $\bar{R}$  es el subgrupo normal más pequeño de  $N$  que contiene a  $R$  entonces  $N = \bar{R}$ . Tenemos que  $F/N \cong G$  con  $N = \bar{R}$ , por lo que  $G = \langle X | R \rangle$  con  $X$  y  $R$  finitos. Por tanto  $G$  es finitamente presentado.  $\square$

**Ejemplo 2.1.**  $\langle X | \{1\} \rangle$  es una presentación del grupo libre en  $X$  de rango  $|X|$ . En efecto, sea  $F$  un grupo libre en  $X$ ,  $R \subset F$  y  $N = \bar{R}$ , la clausura normal de  $R$  en  $F$  y  $\varphi : F \rightarrow F$  definida para todo  $x \in F$  por  $\varphi(x) = x$ . Claramente  $\varphi$  es un homomorfismo,  $\text{Ker}(\varphi) = \{x \in F \mid \varphi(x) = 1\} = \{x \in F \mid x = 1\} = \{1\}$  y  $\text{Im}(\varphi) = F$ . Por el primer teorema de isomorfismos,  $F/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$ , es decir  $F \cong F/\{1\}$ . Por tanto  $\langle X | \{1\} \rangle$  es una presentación para el grupo  $F$  libre en  $X$ .

**Ejemplo 2.2.**  $\langle x, y | x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$  es una presentación para  $\mathbf{Z}_6$  el grupo cíclico de orden 6. En efecto, recordemos que  $\mathbf{Z}_6 = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ , por lo que  $|\mathbf{Z}_6| = 6$  y  $a^6 = 1$ . Sean  $X = \{x, y\}$ ,  $N = \bar{R}$  donde  $R = \{x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy\}$ . Probemos que  $\mathbf{Z}_6 \cong F/N$  donde  $F$  es el grupo libre en  $X$ . Sea  $\theta : X \rightarrow \mathbf{Z}_6$  definida por  $\theta(x) = a^2$  y  $\theta(y) = a^3$ . Como  $F$  es libre en  $X$ , existe un único homomorfismo  $\varphi : F \rightarrow \mathbf{Z}_6$  tal que  $\varphi|_X = \theta$ .

Afirmación 1:  $\varphi$  es sobre. Sea  $a \in \mathbf{Z}_6$ , como  $F$  es libre en  $X = \{x, y\}$  entonces  $F = \langle X \rangle$ ; además  $z = yx^{-1} \in F$  y  $\varphi(z) = \varphi(yx^{-1}) = \varphi(y)\varphi(x^{-1}) = \varphi(y)(\varphi(x))^{-1} = a^3a^{-2} = a$ . Hemos probado que dado  $a \in \mathbf{Z}_6$ , existe  $z \in F$  tal que  $a = \varphi(z)$ , es decir  $\varphi$  es sobre. Por tanto  $\text{Im}\varphi = \mathbf{Z}_6$  y por el primer teorema de isomorfismos  $F/\text{Ker}\varphi \cong \mathbf{Z}_6$ .

Afirmación 2:  $N = \bar{R} = \text{Ker}\varphi$ . Tenemos que  $R = \{x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy\}$ ; además, nótese que:

$$\varphi(x^3) = (\varphi(x))^3 = (\theta(x))^3 = (a^2)^3 = a^6 = 1,$$

$$\varphi(y^2) = (\varphi(y))^2 = (\theta(y))^2 = (a^3)^2 = a^6 = 1,$$

y

$$\begin{aligned} \varphi(x^{-1}y^{-1}xy) &= \varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1})\varphi(x)\varphi(y) \\ &= (\theta(x))^{-1}(\theta(y))^{-1}\theta(x)\theta(y) \\ &= (a^2)^{-1}(a^3)^{-1}a^2a^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que  $R \subset \text{Ker}\varphi$ . Además, como  $\text{Ker}\varphi \triangleleft F$  y  $\bar{R}$  es el subgrupo normal más pequeño de  $F$  que contiene  $R$ , entonces  $N = \bar{R} \subset \text{Ker}\varphi := H$ . De otra parte, como  $N < H$  y  $H \triangleleft F$ , entonces  $N < H \triangleleft F$  y por una consecuencia de los teoremas de isomorfismo, tenemos que

$[F : N] = [F : H][H : N] \geq [F : H] = |F/H| = |\mathbf{Z}_6| = 6$ ; la penúltima igualdad se debe a que  $F/H \cong \mathbf{Z}_6$ .

De otra parte, como  $X = \{x, y\}$  genera a  $F$ , necesariamente  $\bar{x} = Nx$  y  $\bar{y} = Ny$  generan a  $F/N$ .

Sea  $S = \{\bar{x}, \bar{x}^2, \bar{y}, \bar{xy}, \bar{x}^2\bar{y}\}$ . Veamos que  $F/N = S$ , en efecto, como  $\bar{x}, \bar{y}$  generan a  $F/N$ , es claro que  $S \subset F/N$ . Ahora, para probar que  $F/N \subset S$ , basta ver que  $\bar{x}S \subset S$  y  $\bar{y}S \subset S$ . En realidad,

$$\begin{aligned} \bar{x}S &= \{\bar{x}, \bar{xy}, \bar{x}\bar{x}^2, \bar{xy}, \bar{x}\bar{xy}, \bar{x}\bar{x}^2\bar{y}\} \\ &= \{\bar{x}, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{xy}, \bar{x}^2\bar{y}, \bar{x}^3\bar{y}\} \\ &= \{\bar{x}, \bar{x}^2, 1, \bar{xy}, \bar{x}^2\bar{y}, \bar{y}\} = S \end{aligned}$$

Como  $x^3 = 1$  en  $F$  y  $R \subset N$ , entonces  $\bar{x}^3 = 1$  en  $F/N$ .

$$\begin{aligned} \bar{y}S &= \{\bar{y}, \bar{xy}, \bar{y}\bar{x}^2, \bar{yy}, \bar{y}\bar{xy}, \bar{y}\bar{x}^2\bar{y}\} = \\ &= \{\bar{y}, \bar{xy}, \bar{x}^2\bar{y}, 1, \bar{x}, \bar{x}^2\} = S. \end{aligned}$$

Como  $x^{-1}y^{-1}xy = 1$  y  $y^2 = 1$  en  $F$  y  $R \subset N$ , entonces  $\bar{xy} = \bar{yx}$  y  $\bar{y}^2 = 1$  en  $F/N$ . Así,  $F/N \subset S$  y como  $S \subset F/N$  entonces  $F/N = S$ . En consecuencia  $[F : N] = |F/N| = |S| = 6$  y como  $[F : N] = [H : F][H : N]$  con  $[H : F] = 6$ , entonces  $[H : N] = 1$ . Así, como

$[H : N] = 1$  y  $N \subset H$ , necesariamente  $N = H$ , es decir  $N = \text{Ker}\varphi$ . Por tanto  $F/N \cong \mathbf{Z}_6$  y en consecuencia  $\mathbf{Z}_6 = \langle X | R \rangle$ .

### 3. Homomorfismos Inducidos y el Test de Sustitución

El Test de sustitución juega un papel importante al momento de determinar cuando dado un grupo  $G$  con una presentación  $G = \langle X | R \rangle$ , un grupo  $H$  y una función  $\theta : X \rightarrow H$ , esta extiende a un homomorfismo  $\alpha : G \rightarrow H$ , es decir para determinar cuando  $\theta$  induce un homomorfismo  $\alpha : G \rightarrow H$ . Veremos que tal extensión ocurre si y sólo si para todo  $x \in X$  y para todo  $r \in R$ , el hecho de sustituir  $x$  por  $\theta(x)$  en  $r$  da la identidad en  $H$ .

**Lema 3.1.** Sean  $F, G, H$  grupos y sean  $v : F \rightarrow G$ ,  $\alpha : F \rightarrow H$  homomorfismos tales que:

- i)  $\text{Im}v = G$  y
- ii)  $\text{Ker}v \subset \text{Ker}\alpha$ .

Entonces existe un homomorfismo  $\alpha' : G \rightarrow H$  tal que  $\alpha' \circ v = \alpha$

**Nota:** Lo anterior equivale a que el siguiente diagrama commute

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{v} & G \\ & \searrow \alpha & \downarrow \alpha' \\ & & H \end{array}$$

**Demostración.** Como  $v : F \rightarrow G$  es sobre, dado  $g \in G$  existe  $f \in F$  tal que  $g = v(f)$ . Sea  $\alpha' : G \rightarrow H$  definida para todo  $g \in G$  por  $\alpha'(g) = \alpha(f)$ . Respecto a  $\alpha'$  podemos afirmar que:

- i)  $\alpha'$  está bien definida. En efecto, sean  $g_1, g_2 \in G$  tales que  $g_1 = g_2$ . Como  $g_1, g_2 \in G$  y  $v : F \rightarrow G$  es sobre, existen  $f_1, f_2 \in F$  tales que  $g_1 = v(f_1)$  y  $g_2 = v(f_2)$ ; pero  $g_1 = g_2$ , por lo que  $v(f_1) = v(f_2)$ .

Luego,

$$\begin{aligned}
 v(f_1) = v(f_2) &\Rightarrow v(f_1)v(f_2)^{-1} = 1 \\
 &\Rightarrow v(f_1)v(f_2^{-1}) = 1 \\
 &\Rightarrow v(f_1f_2^{-1}) = 1 \\
 &\Rightarrow f_1f_2^{-1} \in \text{Ker}\nu \subset \text{Ker}\alpha \\
 &\Rightarrow \alpha(f_1f_2^{-1}) = 1 \\
 &\Rightarrow \alpha(f_1) = \alpha(f_2) \\
 &\Rightarrow \alpha'(g_1) = \alpha'(g_2).
 \end{aligned}$$

ii)  $\alpha'$  es un homomorfismo. En efecto, sean  $g_1, g_2 \in G$ . Como  $v : F \rightarrow G$  es sobre, existen  $f_1, f_2 \in F$  tales que  $g_1 = v(f_1)$  y  $g_2 = v(f_2)$ . Luego,  $g_1g_2 = v(f_1)v(f_2) = v(f_1f_2)$  y  $\alpha'(g_1g_2) = \alpha(f_1f_2) = \alpha(f_1)\alpha(f_2) = \alpha'(g_1)\alpha'(g_2)$ .

iii)  $\alpha' \circ v = \alpha$ . En efecto, para toda  $f \in F$ ,  $(\alpha' \circ v)(f) = \alpha'(v(f)) = \alpha(f)$ . Por tanto  $\alpha' \circ v = \alpha$ .  $\square$

### Proposición 3.1. (Test de Sustitución).

Sean  $G = \langle X \mid R \rangle$ ,  $H$  un grupo y  $\theta : X \rightarrow H$  una función, entonces  $\theta$  extiende a un homomorfismo  $\alpha : G \rightarrow H$  si y sólo si para todo  $x \in X$  y para todo  $r \in R$ , el hecho de sustituir  $x$  por  $\theta(x)$  en  $r$  da la identidad en  $H$ .

*Demostración.* Sean  $\eta : R \rightarrow F$ ,  $\varphi : X \rightarrow F$  las funciones inclusión de  $R$  en  $F$  y de  $X$  en  $F$ , respectivamente y sea  $\pi : F \rightarrow G$  el homomorfismo canónico al cociente, viendo a  $G$  como  $F/N$  donde  $N = \bar{R}$ .

De otra parte, como  $F$  es libre en  $X$ , para la función  $\theta : X \rightarrow H$  existe un único homomorfismo  $\nu : F \rightarrow H$  tal que  $\nu|_X = \theta$ .

$\Rightarrow$ ) Supongamos que existe  $\alpha : G \rightarrow H$  homomorfismo que extiende a  $\theta$ . Luego, para  $f \in F$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha(\pi(f)) &= \alpha(\pi(x_1x_2 \dots x_n)) \\
 &= \alpha(x_1x_2 \dots x_n) \\
 &= \alpha(x_1)\alpha(x_2) \dots \alpha(x_n) \\
 &= \theta(x_1)\theta(x_2) \dots \theta(x_n) \\
 &= \nu(x_1)\nu(x_2) \dots \nu(x_n) \\
 &= \nu(x_1x_2 \dots x_n) \\
 &= \nu(f),
 \end{aligned}$$

donde  $f = x_1x_2 \dots x_n$ . Así, para probar el resultado, basta ver que  $R \subset \text{Ker}\nu$ . En efecto, puesto que  $G \cong F/N$ , entonces  $R \subset \bar{R} = N = \text{Ker}\pi \subset \text{Ker}(\alpha \circ \pi) = \text{Ker}\nu$ .

Note que si  $x \in \text{Ker}\pi$ , entonces  $\pi(x) = 1_G$ . Luego  $(\alpha \circ \pi)(x) = \alpha(\pi(x)) = \alpha(1_G) = 1_H$ , es decir  $x \in \text{Ker}(\alpha \circ \pi) = \text{Ker}\nu$ . Por tanto,  $\text{Ker}\pi \subset \text{Ker}(\alpha \circ \pi)$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que para todo  $r \in R$  el hecho de sustituir  $x$  por  $\theta(x)$  en  $r$  da la identidad en  $H$ , es decir

supongamos que  $R \subset \text{Ker}\nu$ . En efecto, como  $\bar{R}$  es el subgrupo normal más pequeño de  $F$  que contiene a  $R$ , entonces  $\bar{R} \subset \text{Ker}\nu$  y como  $\bar{R} = \text{Ker}\pi$ , entonces  $\text{Ker}\pi \subset \text{Ker}\nu$ . Además, como  $\nu : F \rightarrow H$  y  $\pi : F \rightarrow G$  son homomorfismos con  $\text{Im}\pi = G$ , por el Lema 3.1 se sigue que existe  $\alpha : G \rightarrow H$  homomorfismo tal que  $\alpha \circ \pi = \nu$ . Veamos ahora que  $\alpha|_X = \theta$ . En efecto, para todo  $x \in X$ ,  $\alpha(x) = \alpha(\pi(x)) = (\alpha \circ \pi)(x) = \nu(x) = \theta(x)$  (La ultima igualdad se tiene pues  $\nu|_X = \theta$ ). Por tanto  $\alpha|_X = \theta$ , es decir  $\alpha$  es una extensión de  $\theta$ .  $\square$

El siguiente resultado nos permite calcular una presentación del producto directo  $G \times H$  de dos grupos, conocidas las presentaciones de cada uno de ellos.

**Proposición 3.2.** Sean  $G$  y  $H$  grupos con presentaciones  $\langle X \mid R \rangle$  y  $\langle Y \mid S \rangle$  respectivamente, entonces su producto directo  $G \times H$  tiene una presentación dada por  $\langle X, Y \mid R, S, [X, Y] \rangle$  donde  $[X, Y] = \{x^{-1}y^{-1}xy \mid x \in X, y \in Y\}$ .

### Demostración.

Sean  $T = R \cup S \cup [X, Y]$  y  $D = \langle X \cup Y \mid T \rangle$ . Por el Test de Sustitución, las inclusiones  $\iota_1 : X \rightarrow D$  y  $\iota_2 : Y \rightarrow D$  inducen homomorfismos  $\phi : G \rightarrow D$  y  $\varphi : H \rightarrow D$ . Sea  $\alpha : G \times H \rightarrow D$  definida por  $\alpha(g, h) = \phi(g)\varphi(h)$ . Respecto a  $\alpha$  podemos afirmar que:

i)  $\alpha$  está bien definida. Esto es claro pues  $\phi$  y  $\varphi$  lo están.

ii)  $\alpha$  es homomorfismo. Sean  $(g_1, h_1)$  y  $(g_2, h_2)$  elementos de  $G \times H$ . Como  $G = \langle X \mid R \rangle$  y  $H = \langle Y \mid S \rangle$ , entonces  $h_1 = y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n}$  y  $g_2 = x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \dots x_m^{\delta_m}$ , donde  $x_i \in X$ ,  $y_i \in Y$  y  $\varepsilon_i, \delta_i \in \{1, -1\}$  para  $1 \leq i \leq n, m$ . Luego,

$$\begin{aligned}
 \alpha((g_1, h_1)(g_2, h_2)) &= \alpha(g_1g_2, h_1h_2) = \phi(g_1g_2)\varphi(h_1h_2) \\
 &= \phi(g_1)\phi(g_2)\varphi(h_1)\varphi(h_2) \\
 &= \phi(g_1)\phi(x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \dots x_m^{\delta_m})\varphi(y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n})\varphi(h_2) \\
 &= \phi(g_1)x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \dots x_m^{\delta_m}y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n}\varphi(h_2) \\
 &= \phi(g_1)y_1^{\varepsilon_1}y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n}x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \dots x_m^{\delta_m}\varphi(h_2) \\
 &= \phi(g_1)\varphi(h_1)\phi(g_2)\varphi(h_2) \\
 &= \alpha(g_1, h_1)\alpha(g_2, h_2)
 \end{aligned}$$

Por tanto  $\alpha$  es homomorfismo.

Por otro lado, sea  $\nu : X \cup Y \rightarrow G \times H$  definida por  $\nu(x) = (x, 1_H)$  y  $\nu(y) = (1_G, y)$  para todo  $x \in X$  y todo  $y \in Y$ . Por el Test de Sustitución, existe  $\beta : D \rightarrow G \times H$  homomorfismo que extiende a  $\nu$ .

Afirmación:  $\beta = \alpha^{-1}$ . En efecto, sea  $f \in D$ . Como  $D = \langle X \cup Y \mid T \rangle$ , entonces  $f = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2} \dots x_r^{\varepsilon_r}$  donde  $x_i \in X \cup Y$  y  $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ . Luego

$$\begin{aligned}
 (\alpha \circ \beta)(f) &= \alpha(\beta(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2} \dots x_r^{\varepsilon_r})) \\
 &= \alpha(\beta(x_1)^{\varepsilon_1}\beta(x_2)^{\varepsilon_2} \dots \beta(x_r)^{\varepsilon_r}) \\
 &= \alpha(\beta(x_1)^{\varepsilon_1})\alpha(\beta(x_2)^{\varepsilon_2}) \dots \alpha(\beta(x_r)^{\varepsilon_r}), \quad (*)
 \end{aligned}$$

Como  $x_i \in X \cup Y$  entonces  $x_i \in X$  ó  $x_i \in Y$ .

Caso i) Si  $x_i \in X$ , entonces  $\beta(x_i) = \nu(x_i) = (x_i, 1_H)$  y por tanto

$$\alpha(\beta(x_i)^{e_i}) = \alpha((x_i^{e_i}, 1_H)) = \pi(x_i)^{e_i} \varphi(1_H) = x_i^{e_i} 1_H = x_i^{e_i}$$

Caso ii) Si  $x_i \in Y$ , entonces  $\beta(x_i) = \nu(x_i) = (1_G, x_i)$  y por tanto

$$\alpha(\beta(x_i)^{e_i}) = \alpha(1_G, x_i^{e_i}) = \phi(1_G)\varphi(x_i^{e_i}) = 1_G x_i^{e_i} = x_i^{e_i}.$$

Así en (\*) se tiene que:

$$(\alpha \circ \beta)(f) = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_r^{e_r} = f = id_D.$$

Sea  $(g, h) \in G \times H$ , entonces  $g \in G = \langle X \mid R \rangle$  y  $h \in H = \langle Y \mid S \rangle$ , entonces  $g = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$  y  $h = y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_m^{e_m}$  con  $x_i \in X$  y  $y_i \in Y$ . Luego,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(g, h) &= \beta(\alpha(g, h)) = \\ &\quad \beta(\phi(g)\varphi(h)) \\ &= \beta(\phi(g))\beta(\varphi(h)) \\ &= \beta(\phi(x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}))\beta(\phi(y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_m^{e_m})) \\ &= \beta(x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n})\beta(y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_m^{e_m}) \\ &= \nu(x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n})\nu(y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_m^{e_m}) \\ &= (x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}, 1_H)(1_G, y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_m^{e_m}) \\ &= (x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}, y_1^{e_1} y_2^{e_2} \dots y_m^{e_m}) \\ &= (g, h) \end{aligned}$$

Así,  $\beta \circ \alpha = id_{G \times H}$ . Por tanto  $\beta = \alpha^{-1}$

De i), ii) y de la afirmación anterior se sigue que  $\alpha : G \times H \rightarrow D$  es un isomorfismo. Por tanto  $G \times H \cong D = \langle X \cup Y \mid T \rangle$ ; es decir,  $G \times H$  tiene la presentación  $\langle X, Y \mid R, S, [X, Y] \rangle$ .  $\square$

**Ejemplo 3.1.** Dado que  $\mathbf{Z}_2$  el grupo cíclico de orden 2 tiene la presentación  $\langle a \mid a^2 \rangle$  y que  $\mathbf{Z}_3$  el grupo

cíclico de orden 3 tiene la presentación  $\langle b \mid b^3 \rangle$ , por el Teorema anterior se sigue que una presentación para  $\mathbf{Z}_6 \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$  está dada por

$$\langle a, b \mid a^2, b^3, [a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \rangle,$$

lo que coincide con lo mostrado en el Ejemplo 2.2, donde vimos que  $\langle x, y \mid x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$  es una presentación para  $\mathbf{Z}_6$ .

#### 4. Conclusiones

1. Dado cualquier grupo  $F$  y cualquier subgrupo  $H$  de  $F$ , existe una transversal de Schreier para  $H$ .
2. El Teorema de Nielsen-Schreier nos permite establecer una conexión entre la teoría combinatoria y la teoría geométrica de grupos, pues a partir de este podemos probar que todo grupo tiene una presentación.
3. A futuro creemos que se pueden explorar mas propiedades de la transversal de Schreier, usando los generadores de la transversal en términos de la libre presentación de grupos.

#### Referencias

- [1] JOHNSON, D.I. *Presentations of groups*. London Mathematical Society, Cambridge, 1990.
- [2] Vergara Gabriel and Salazar Olga. *Introducción a la teoría geométrica de grupos*, Revista Integración. **29** (2011), 15-30.
- [3] HARPE, P. *Topics in geometric group theory*. A series of comprehensive studies in mathematics, Chicago Lectures in Mathematics Series, 2000.
- [4] WEST, D. *Introduction to Graph Theory*. Editorial Prentice-Hall
- [5] DUMMIT, D. and FOOTE, R. *Abstract Algebra*, Third Edition. John Wiley, 2003.
- [6] HUNGERFORD, T. *Algebra*. Graduate texts in Mathematics, Springer, 1974.

Para citar este artículo: Vergara G. et all, 2014, "Introducción a la Presentación de Grupo". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:  
<http://investigaciones.uniallantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

# Sobre el Teorema de Burnside para Anillos de Matrices

## On Burnside Theorem for Matrix Rings

Oswaldo Dede Mejía<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Programa de Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia  
E-mail: dedemejia@gmail.com*

María J. Ortega Wilches<sup>2</sup>

<sup>2</sup>*Universidad Pedagógica Libertador, IPC Caracas, Venezuela  
E-mail: mariajoseow@gmail.com*

Alejandro Urielés Guerrero<sup>3</sup>

<sup>3</sup>*Programa de Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia  
Dpto. Matemáticas Puras y Aplicadas  
Universidad Simón Bolívar, Venezuela  
E-mail: alejandrourielles@mail.uniatlantico.edu.co*

*Received / Recibido: 22/12/2013. Accepted / Aceptado: 6/02/2014*

---

### Resumen

Sea  $n$  un entero positivo y sea  $\mathbb{C}$  el campo de los complejos, denotemos por  $M_n(\mathbb{C})$  el anillo de matrices  $n \times n$  con entradas en  $\mathbb{C}$ . En el presente artículo se realiza un estudio del Teorema de Burnside en el contexto de los anillos de matrices  $M_n(\mathbb{C})$ , dando una demostración alternativa con herramientas básicas del álgebra.

*Palabras claves:* Campo de los números complejos, anillo de matrices  $n \times n$  sobre el campo de los complejos, operadores lineales, matriz unitaria, subespacio propio.

### Abstract

Let  $n$  be a integer non-negative and let  $\mathbb{C}$  be field of the complex, we denote  $M_n(\mathbb{C})$  the matrix rings  $n \times n$  with entries in  $\mathbb{C}$ . In the present paper we study the theorem of Burnside in the context of matrix rings  $M_n(\mathbb{C})$ , giving a alternative proof using basic concepts of the algebra.

*Keywords:* Field of the complex, the matrix rings  $n \times n$  on  $\mathbb{C}$ , linear operators, unitary matrix, proper subspace.

---

### 1. Introducción

En 1905 William Burnside publica el siguiente teorema conocido como Teorema de Burnside para grupos finitos de matrices invertibles  $n \times n$ : Si  $G$  es un grupo de matrices invertibles  $n \times n$

con entradas en  $\mathbb{C}$ , entonces  $\{0\}$  y  $\mathbb{C}^n$  son los únicos subespacios de  $\mathbb{C}^n$  invariantes por  $G$  si y sólo si  $G$  contiene  $n^2$  matrices linealmente independientes. Este trabajo permitió que investigadores como Frobenius y Schur avanzaran en el estudio de la teoría de representación de grupos finitos,

demostrando ser un resultado fundamental para esta teoría (ver [6]).

En el presente trabajo se realiza un estudio del Teorema de Burnside en el contexto de los anillos de matrices tomando como base [3, 6, 7]. En la sección 2 damos algunas observaciones y resultados conocidos del álgebra que serán utilizados durante el trabajo.

Finalmente en la sección 3 estudiamos la demostración de una versión del Teorema de Burnside para anillos de matrices.

## 2. Preliminares

Las definiciones y resultados presentadas en esta sección pueden consultarse en [1, 2, 4]. Consideramos  $M_n(\mathbb{C})$  el conjunto de matrices  $n \times n$  con entradas en  $\mathbb{C}$ , es decir,

$$M_n(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} : a_{i,j} \in \mathbb{C}, 1 \leq i, j \leq n \right\} \quad (1)$$

Es sabido que (1) con las operaciones usuales tiene estructura de anillo.

OBSERVACIÓN 2.1. Para  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un campo  $K$  y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal se tiene:

- i) La imagen de  $T$  es  $Im(T) = \{w \in W : T(v) = w, v \in V\}$ ,
- ii) El núcleo de  $T$  es el conjunto  $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ ,
- iii) El rango de  $T$  se define como la dimensión de su imagen. Así,  $\text{rang}T = \dim(ImT)$ ,
- iv) La nulidad de  $T$  se define como la dimensión de su núcleo. Así, nulidad  $T = \dim(\ker(T))$ ,
- v) Si  $V$  es de dimensión finita y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  entonces cada  $v \in V$  tiene

la forma  $\sum_{i=1}^n c_i v_i$  para  $c_i \in K$ . Consecuentemente si  $T \in L(V, W)$ , se tiene

$$T(v) = \sum_{i=1}^n c_i T(v_i).$$

Por lo tanto, el conjunto  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  es un conjunto de generadores de  $ImT$ . Si este conjunto es linealmente independiente, entonces,

$$\text{rang}T = \dim(ImT) = n.$$

OBSERVACIÓN 2.2. Para  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un campo  $K$  y  $L(V, W)$  el conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $W$  las siguientes afirmaciones se cumplen:

- i)  $\dim V = \dim(\ker(T)) + \dim(ImT)$ ,
- ii) Si  $W$  es un subespacio de  $V$  entonces  $W$  es de dimensión finita y  $\dim W \leq \dim V$ ,
- iii) Si  $W$  es un subespacio de  $V$  y  $\dim V = n$  y  $\dim W = n$ , entonces  $W = V$ ,
- iv) Si  $W$  es un espacio vectorial sobre un campo  $K$ , entonces  $L(V, W)$  es también un espacio vectorial sobre  $K$ ,
- v) Si dimensión de  $V$  es  $n$  y si  $W$  es un espacio vectorial de dimensión finita  $m$  sobre  $K$  entonces el espacio  $L(V, W)$  es de dimensión finita  $mn$ .

DEFINICIÓN 2.1. Sean  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y  $T$  un operador lineal sobre  $V$ . Se dice que un subespacio  $W$  de  $V$ , es invariante por  $T$  si  $T$  aplica  $W$  en si mismo, esto es, si para todo  $v \in W$ ,  $T(v) \in W$ .

DEFINICIÓN 2.2. Sean  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal. Un escalar  $k \in K$  se llama un valor propio de  $T$  si existe un vector diferente de cero,  $v \in V$ , tal que  $T(v) = kv$ . Si  $k$  es un valor propio de  $T$  entonces cualquier vector  $v \in V$  tal que  $T(v) = kv$  se llama un vector propio de  $T$  asociado al valor propio  $k$ .

LEMÁ 1. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal y  $k$  un valor propio. El conjunto

$$E = \{v \in V : T v = k v\}, \quad (2)$$

es un subespacio de  $V$ .

OBSERVACIÓN 2.3. El conjunto dado en (2) se denomina subespacio propio de  $T$  asociado al valor propio  $k$ .

LEMÁ 2. Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de un espacio vectorial  $W$  sobre un campo  $K$  y sea  $w$  cualquier vector no cero de  $W$ . Existen escalares,  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , no todos cero, tales que

$$w = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad a_i \in K.$$

Si  $a_k$  es diferente de cero, donde  $k = \{1, \dots, n\}$ , entonces  $\{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ , es también una base de  $W$ .

DEFINICIÓN 2.3. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial con producto interno y dimensión finita. Una base  $\beta$  de  $V$  se dice base ortogonal si  $\beta$  es un conjunto ortogonal. Se dice que  $\beta$  es una base ortonormal si  $\beta$  es un conjunto ortonormal.

DEFINICIÓN 2.4. Una matriz cuadrada  $A$  sobre el campo de los números complejos se dice unitaria si  $AA^* = I$  y  $A^*A = I$  donde  $A^*$  es la adjunta de  $A$ . Es decir,  $A^* = A^{-1}$ .

OBSERVACIÓN 2.4. Una matriz cuadrada sobre un campo de los números complejos es unitaria si y sólo si sus columnas (filas) son vectores unitarios mutuamente ortogonales.

### 3. Teorema de Burnside para Anillos de Matrices Invertibles

En el contexto de la estructura de anillos de matrices, el Teorema de Burnside [3, 6] se enuncia así:

TEOREMA 1. Sea  $A$  un subanillo de  $M_n(\mathbb{C})$  que contiene todas las matrices escalares. Si  $\mathbb{C}^n$  no contiene subespacios propios no triviales invariantes por  $A$ , entonces  $A = M_n(\mathbb{C})$ .

Para llegar a la demostración del teorema 1 se estudian los siguientes resultados.

LEMÁ 3. Sea  $\mathcal{R} = M_n(\mathbb{C})$ , el anillo de matrices  $n \times n$  sobre  $\mathbb{C}$  y sea  $A$  un subanillo de  $\mathcal{R}$  que contiene todas las matrices escalares tal que  $\mathbb{C}^n$  no contiene subespacios no triviales invariantes por  $A$ . Si  $g \in \mathcal{R}$ , y para todo  $f \in A$ ,  $gf = fg$ , entonces  $g$  es una matriz escalar, es decir  $g = kI$  para algún  $k \in \mathbb{C}$ .

Demostración. Sea  $g \in \mathcal{R}$ , tal que  $g$  conmuta con todo elemento de  $\mathcal{R}$ . Sea  $k \in \mathbb{C}$  un valor propio de  $g$ , el subespacio propio asociado a  $k$  es

$$E_k = \{v \in \mathbb{C}^n : g(v) = kv\} \subseteq \mathbb{C}^n,$$

sea además  $f \in A$ . Como por hipótesis  $gf = fg$ , entonces,  $g(fv) = f(gv) = f(kv) = kf v$ , para  $v \in E$ , esto es,

$$gfv = kf v,$$

se observa que  $fv \in E_k$  y  $fE_k \subseteq E_k$ , es decir,  $E_k$  es invariante por  $f$ .

Ahora bien, como  $E_k \neq \{0\}$  y por hipótesis,  $\mathbb{C}^n$  no contiene subespacios no triviales invariantes por  $A$ , entonces,  $E_k = \mathbb{C}^n$ . Esto significa que para todo  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $gv = kv = kv$ , esto es,  $g = kI$ , es decir,  $g$  es una matriz escalar como se quería demostrar.

□

LEMÁ 4. Sea  $\mathcal{R} = M_n(\mathbb{C})$  el anillo de matrices  $n \times n$  sobre  $\mathbb{C}$  y sea  $A$  un subanillo de  $\mathcal{R}$  que contiene todas las matrices escalares, tal que  $\mathbb{C}^n$  no contiene subespacios no triviales invariantes por  $A$ . Si  $v \in \mathbb{C}^n$  y  $W$  es un subespacio de  $\mathbb{C}^n$  tales que para cualquier  $f \in A$ ,  $f(W) = 0$  implica  $fv = 0$ , entonces  $v \in W$ .

Demostración. Se procede por inducción sobre  $\dim W$ , la dimensión de  $W$ .

Si  $\dim W = 0$ ;  $0 = W$ . Como por hipótesis,  $A$  es un subanillo de  $M_n(\mathbb{C})$  que contiene las matrices escalares, entonces  $A$  contiene  $I_n$ , elemento identidad para la multiplicación, el cual satisface

$$I_n W = I_n 0 = 0,$$

en consecuencia, si  $v \in \mathbb{C}^n$  es tal que para todo  $f \in \mathcal{R}, fW = 0$  implica  $fv = 0$ , en particular,  $I_nv = 0$ , esto es  $v = 0$ . Así  $v \in W$ .

Se considera ahora el caso en que  $\dim W = k > 1$ .

Sea  $W_0$  un subespacio propio de  $W$ , tal que  $\dim W_0 = \dim W - 1$ . Una base  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  de  $W_0$  se puede extender a una base  $\{v_1, \dots, v_{k-1}, w\}$  para algún  $w \in W$ , entonces, si  $u \in W$ , existen escalares  $c_1, \dots, c_{k-1}, c$  tales que

$$u = (c_1 v_1 + \dots + c_{k-1} v_{k-1}) + cw,$$

pero  $w_0 = c_1 v_1 + \dots + c_{k-1} v_{k-1} \in W_0$ , esto es  $u = w_0 + cw$ , donde  $w_0 \in W_0$  y  $cw \in C_w = \{aw : a \in \mathbb{C}\}$ , entonces  $W = W_0 + C_w$ .

Sea

$$H = \{h \in A : hW_0 = 0\} \subseteq A,$$

$H$  es un subespacio de  $A$ , para verlo, sean  $h_1, h_2 \in H$ , y  $w_0 \in W_0$ . Entonces se tiene

$$(h_1 + h_2)(w_0) = h_1(w_0) + h_2(w_0) = 0 + 0 = 0.$$

Así,  $h_1 + h_2 \in H$ . Además, si  $c \in \mathbb{C}$  y  $h \in A$ ,

$$(ch)(w_0) = c(h(w_0)) = c0 = 0,$$

es decir,  $ch \in H$ .

Al aplicar la hipótesis inductiva a  $W_0$ , se tiene que, si para todo  $f \in A, f(W_0) = 0$  implica que  $f(v) = 0$ , entonces  $v \in W_0 = 0$ .

Como  $w \notin W$ , para algún  $f \in A, f(w) \neq 0$  entonces,  $Hw = \{hw : h \in H\} \neq 0$ .

Además, si  $f \in A, h \in H$  y  $w_0 \in W_0$  entonces

$$(fh)(w_0) = f(h(w_0)) = f(0) = 0.$$

Esto es,  $fh \in H$  con lo que  $AH \subseteq H$ , en consecuencia

$$A(H(w)) \subseteq H(w),$$

esto significa que  $H(w)$  es un subespacio no trivial invariante por  $A$ , lo cual implica que  $H(w) = \mathbb{C}^n$ .

Se considera ahora la transformación lineal

$$g : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

tal que,

$$g(h(w)) = h(v), \forall h \in H.$$

$g$  está bien definida, ya que, si  $h_1, h_2 \in H$  y  $h_1(w) = h_2(w)$ , entonces

$$(h_1 - h_2)v = 0.$$

Así,  $h_1v - h_2v = 0$ , entonces,  $h_1v = h_2v$ , por lo tanto  $g(h_1w) = g(h_2w)$ .

Se verifica ahora que  $g$  es lineal, ya que,

$$\begin{aligned} g(h_1w + h_2w) &= g((h_1 + h_2)w) = (h_1 + h_2)v \\ &= h_1v + h_2v = g(h_1w) + g(h_2w). \end{aligned}$$

También,

$$g(ch_1w) = (ch_1)v = ch_1(v) = cg(h_1w).$$

Ahora se prueba que  $g$  commuta con cualquier  $f \in A$ , en efecto,

$$\begin{aligned} gf(h(w)) &= g((fh)(w)) = (fh)(v) \\ &= f(h(v)) = f(gh(w)) \\ &= (fg)(h(w)) \quad \forall h \in H. \end{aligned}$$

De acuerdo al lema, 3

$g = kI$  para algún  $k \in \mathbb{C}$ , con lo que

$$\begin{aligned} h(v) &= g(h(w)) = kI(h(w)) \\ &= k(Ih(w)) = k(Ih)w = kh(w). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$h(v) - kh(w) = h(v - kw) = 0, \quad \forall h \in H.$$

De donde,  $v - kw \in W_0$ , así,  $v - kw = w_0 \in W_0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} v &= w_0 + kw, \quad k \in \mathbb{C} \\ v &= w_0 + w_1, \end{aligned}$$

donde  $w_0 \in W_0$  y  $w_1 \in C_w$ , es decir,  $v \in W$ , como se deseaba demostrar.

□

Ahora, podemos demostrar el teorema 1 usando los resultados anteriores.

entonces  $H(e_1) = \mathbb{C}^n$ . En particular, para cada  $i$  existe  $h_i \in H$  tal que  $h_i(e_{j,i}) = 0$ , para  $j \neq i$ .

La matriz de  $h_i$  es  $E_{i,1}$ . Por lo tanto,  $E_{i,j} \in A$  como se deseaba demostrar.

□

#### 4. Demostración del Teorema 1

Si se prueba que  $A$  contiene a  $\{E_{i,j} : i, j = 1, \dots, n\}$ , la base canónica de  $M_n(\mathbb{C})$ , se tiene que  $M_n(\mathbb{C}) \subseteq A$  y por tanto  $M_n(\mathbb{C}) = A$ . Así, para probar el teorema 1 basta probar que  $A$  contiene todas las matrices  $E_{i,j}$ .

Sea  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ , la base canónica de  $\mathbb{C}^n$ .  $\beta$  es una base ortonormal. Sea  $W_0$  el subespacio generado por  $\{e_2, e_3, \dots, e_n\}$  y sea

$$H = \{h \in A : hW_0 = 0\}.$$

$H$  es subespacio de  $A$ .

Puesto que  $e_1 \notin W$  entonces existe  $h \in H$  tal que  $h(e_1) \neq 0$  y, dado que  $H(e_1)$  es invariante por  $A$

#### Referencias

- [1] M.A. Armstrong, Groups and Symmetry. Springer - Verlag, 1988.
- [2] J. Dorronsoro, E. Hernández, Números, Grupos y Anillos, Editorial Addison-Wesley, 1996.
- [3] I.Halperin and P. Rosenthal, Burnside theorem on Algebras of Matrices. Amer. Math. Monthly 87 (1980) 810.
- [4] K. Hofman y R. Kunze, Álgebra Lineal. Prentice Hall, 1973.
- [5] T. Hungerford, Álgebra. Springer - Verlag, 1974.
- [6] T.Y. Lam, A theorem of Burnside on Matrix Rings. AmerMath. Math. Monthly 105(1998).651-653.
- [7] V. Lomonosov, P. Rosenthal, The Simplest Proof of Burnside Theorem on Matrix Álgebras, Linear Álgebra and Its Applications 386 (2004) 45-47.

Para citar este artículo: Uriel A et all. 2014, "Sobre el Teorema de Burnside para Anillos de Matrices". Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:  
<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

# Estudio Numérico De La Propagacion De Ondas Electromagnéticas 2-D Por FDTD

## Numerical study of the propagation of electromagnetic waves 2D for DTD

Larry Theran <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

E-mail: latheran@gmail.com

René Alvarez <sup>2</sup>

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

E-mail: ralvarez@gmail.com

Sonia Valbuena <sup>3</sup>

<sup>3</sup>Profesora departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

E-mail: svalbuena@gmail.com

Francisco Racedo <sup>4</sup>

<sup>4</sup>Profesor departamento de Física

Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla (Colombia)

Email: fran@mail.uniatlantico.edu.co

### Resumen

En este trabajo se presenta una simulación en Matlab de la propagación de ondas electromagnéticas en un dominio bidimensional. Para esto se discretizaron las ecuaciones rotacionales de Maxwell usando la celda elemental de Yee para el espacio y el algoritmo Leapfrog para el tiempo. Con esto se obtuvo valores del campo eléctrico y magnético, más cercanos a los reales que con otros métodos. Como se trabajó con un problema de evolución en el tiempo con dominios no acotados se introdujo las Absorbing Boundary Condition (ABC) para evitar reflexiones en la frontera del dominio debido a las limitaciones computacionales.

*Palabras claves:* Simulación, Discretización, condición de frontera absorbente, celda elemental.

### Abstract

This paper presents a Matlab simulation of the propagation of electromagnetic waves in two-dimensional domain. For this discretized Maxwell rotational equations using elementary Yee's cell for space and the Leapfrog algorithm for time. Thus obtained values of electric and magnetic field, and obtained higher accuracy than other methods. As we worked with a problem of evolution over time with unbounded domains is introduced Absorbing Boundary Condition (ABC) to avoid reflections on the boundary of the domain due to computational limitations.

*Keywords:* Simulation, Discretization, absorbing boundary condition, elemental cell.

## 1. INTRODUCCION

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales cuya solución describe los fenómenos de naturaleza electromagnética. Estas soluciones no siempre pueden ser determinadas de manera analítica en especial con geometrías complicadas, para este tipo de problemas se emplean métodos numéricos. Entre los métodos más conocidos están el método del elemento finito (MEF), el método de diferencias finitas (MDF) y el método del elemento en la frontera (BEM), en la solución de las ecuaciones de Maxwell se usa con mayor frecuencia un esquema del MDF el cual es llamado método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD). El esquema de FDTD es más usado debido a que calcula las derivadas espaciales y temporales simultáneamente presentando así mayor exactitud en los resultados obtenidos, En este trabajo se presente el FDTD en el estudio de las ondas electromagnéticas teniendo en cuenta las condiciones de frontera absorbentes para evitar reflexiones no deseadas.

## 2. DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo en un medio lineal homogéneo e isotrópico son:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \nabla \times \vec{H} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \nabla \times \vec{E} \quad (2)$$

Donde  $\vec{D}$  es la densidad de flujo eléctrico,  $\mu$  es la permeabilidad magnética,  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica. Desacoplando las ecuaciones rotacionales en sus componentes obtenemos el siguiente grupo de ecuaciones

$$\frac{\partial \vec{D}_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{D}_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{D}_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$-\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \quad (6)$$

$$-\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (8)$$

Las ecuaciones (3),(4),(5) corresponde a las componentes de la ecuación (1) y (6),(7),(8) a las componentes de (2), estas seis ecuaciones desacopladas son la base del algoritmo FDTD. La idea del algoritmo de Yee es convertir las ecuaciones anteriores que están en forma continua a una forma discreta usando diferencias centrales, tales ecuaciones en forma discreta se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{D_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - D_x^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \right. \\ \left. \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - D_y^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\ \left. \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - D_z^{n-1}(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} - \right. \\ \left. \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \right. \\ \left. \frac{E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta z} \right) \quad (13)$$

$$\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right) \quad (14)$$

Las ecuaciones (9)-(11), (12) y (14) representan el conjunto de ecuaciones en diferencias para las ecuaciones de maxwell en el espacio libre. Por último se debe discretizar la ecuación constitutiva en el dominio del tiempo. La cual tiene la siguiente forma:

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\omega) \quad (15)$$

Para lo cual asumiremos un dieléctrico con pérdidas de la forma [2]:

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} \quad (16)$$

Sustituyendo en la ecuación (15)

$$D(\omega) = \epsilon_r E(\omega) + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} E(\omega) \quad (17)$$

Para pasar al dominio de la frecuencia al dominio del tiempo se aplica la trasformada, donde la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$D(t) = \epsilon_r E(t) + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^t E(t') dt' \quad (18)$$

Para discretizar esta ecuación se aproxima la integral a una sumatoria

$$D^n = \epsilon_r E^n + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} E^n + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^{n-1} E^i \quad (19)$$

De lo cual podemos despejar  $E^n$  y obtener el siguiente valor:

$$E^n = \frac{D^n - I^{n-1}}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}} \quad (20)$$

$$I^n = \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} \sum_{i=0}^n E^i \quad (21)$$

Una vez elegido el tamaño de la celda espacial la temporal está determinada por [2]:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2c_0} \quad (22)$$

Donde  $c_0$  es la velocidad de la luz en el vacío.

### 3. IMPLEMENTACION DEL ALGORITMO EN MATLAB

Para realizar la implementación se considerara una onda transversal magnética (TM), para la cual  $E_y = E_x = 0$  y  $H_z = 0$ . Las ecuaciones (3),(4)y (8) se anulan y en las ecuaciones (7) y (8) se anulan las componentes  $x$  y  $y$  del campo eléctrico y las ecuaciones en diferencias que se usan para el algoritmo son entonces:

$$\frac{D_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - D_z^{n-1}(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \quad (23)$$

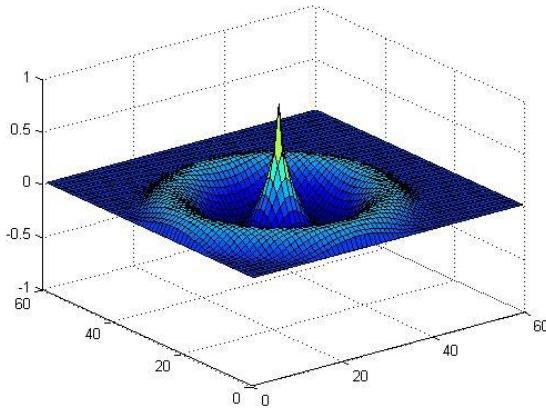
$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \quad (24)$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} \right) \quad (25)$$

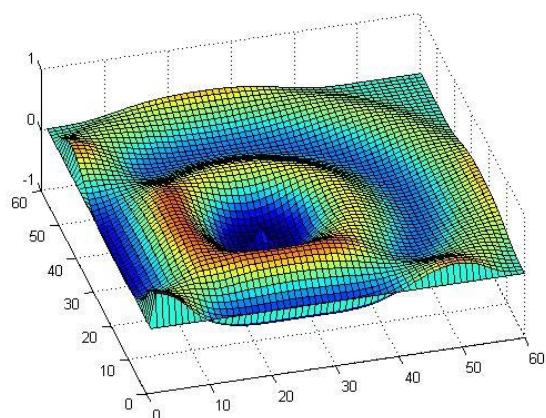
Estas tres ecuaciones conforman la base del algoritmo para la simulación de la onda sinusoidal en el espacio libre. Dicho algoritmo fue implementado en matlab como se muestra en el siguiente código.

```
dz(i, j)=dz(i, j)+0.5*(hy(i, j)-hy(i-1, j))
-hx(i, j)+hx(i, j-1))
hx(i, j)=hx(i, j)+0.5*(ez(i, j)-ez(i, j+1))
hy(i, j)=hy(i, j)+0.5*(ez(i+1, j)-ez(i, j))
ez(i, j)=dz(i, j) para el espacio libre.
```

La primera onda electromagnética que se simuló fue una Onda sinusoidal. Esta es una función temporal que se asemeja un pulso de luz [3], los resultados obtenidos para 50 y 80 pasos en el tiempo se muestran a continuación:



**Figura 1:** Onda sinusoidal para T=50 pasos temporales.



**Figura 2:** Onda sinusoidal para T=80 pasos temporales.

#### 4. IMPLEMENTACION DEL PML AL ALGORITMO DE FDTD

Para evitar las reflexiones se implementa el FDTD con las condiciones de frontera absorbentes (ABC), una de las más flexibles y eficientes ABC, es la de capas perfectamente acopladas

PML por sus siglas en inglés. La idea básica es: si la onda está viajando en un medio A y traspasa a un medio B, la cantidad de reflexión es determinada por la impedancia intrínseca de los dos medios:

$$\Gamma = \frac{\eta_A - \eta_B}{\eta_A + \eta_B} \quad (26)$$

Las cuales son determinadas por las constantes dieléctricas  $\epsilon$  y permeabilidades  $\mu$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (27)$$

Ahora se necesita un medio con perdidas donde la onda se atenué hasta desaparecer por completo antes de alcanzar la frontera de cálculo, condición que se logra haciendo a  $\epsilon$  y  $\mu$  complejos en la ecuación (24) debido a que la parte imaginaria representaría al término que causa la atenuación [2].

Retomando las ecuaciones de Maxwell para una onda TM pero esta vez llevando todo al dominio de la frecuencia se obtiene

$$j\omega D_z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (28)$$

$$j\omega H_x = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (29)$$

$$j\omega H_y = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (30)$$

Para la implementación del PML se agregan constantes dieléctricas y magnéticas ficticias  $\epsilon_{fz}^*$ ,  $\mu_{fx}^*$ ,  $\mu_{fy}^*$  [2] y las ecuaciones (25), (26), (27) se transforman en

$$j\omega D_z \epsilon_{fz}^*(x) \epsilon_{fz}^*(y) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (31)$$

$$j\omega H_x \mu_{fx}^*(y) \mu_{fx}^*(x) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (32)$$

$$j\omega H_y \mu_{fy}^*(y) \mu_{fy}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (33)$$

Con estas nuevas ecuaciones se debe tener en cuenta los siguientes factores:

1. El valor de  $\epsilon_f$  está asociado con la densidad de flujo no con el campo eléctrico.
2. Se agregaron dos valores de  $\epsilon_f$  en la ecuación (26) y  $\mu_f$  en (30) y (31) uno para la dirección  $\text{dex}$  y otro para la de  $y$ .

También se debe tener en cuenta las dos condiciones de un PML [5]

La impedancia al pasar de un medio a otro debe ser constante

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{fx}^*}{\epsilon_{fx}^*}} = 1 \quad (34)$$

La dirección perpendicular de la frontera (la dirección  $x$ , por ejemplo), la constante dieléctrica relativa y la permeabilidad relativa deben ser inversas una de la otra

$$\epsilon_{fx}^* = \frac{1}{\epsilon_{fy}^*} \quad (35)$$

$$\mu_{fx}^* = \frac{1}{\mu_{fy}^*} \quad (36)$$

Se asumirá que estas cantidades son complejas de la forma

$$\epsilon_{fm}^* = \epsilon_{fm} + \frac{\sigma_{Dm}}{j\omega\epsilon_0} \text{ para}$$

$m = x \text{ ó } y$ .(37)

$$\mu_{fm}^* = \mu_{fm} + \frac{\sigma_{Hm}}{j\omega\mu_0} \text{ para}$$

$m = x \text{ ó } y$ .(38)

Para que (32) y (33) se cumplan, las ecuaciones (34) y (35) deben ser de la forma:

$$\epsilon_{fm} = \mu_{fm} = 1 \quad (39)$$

$$\frac{\sigma_{Dm}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{Hm}}{\mu_0} = \frac{\sigma_D}{\epsilon_0} \quad (40)$$

Retomando las ecuaciones (28), (29) y (30)

$$j\omega D_z \epsilon_{fx}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (41)$$

$$\omega H_x \mu_{fx}^*(x) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_y}{\partial y} \quad (42)$$

$$j\omega H_y \mu_{fy}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (43)$$

De las tres ecuaciones anteriores solo se considera la dirección  $x$  de (28), (29) y (30), usando

las cantidades complejas y el hecho que  $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  ( las ecuaciones (38), (39) y (40) se transforman en:

$$j\omega D_z \left( 1 + \frac{\sigma_d(x)}{j\omega\epsilon_0} \right) = c_0 \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (44)$$

$$j\omega H_x \left( 1 + \frac{\sigma_d(x)}{j\omega_0} \right)^{-1} = -c_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (45)$$

$$j\omega H_y \left( 1 + \frac{\sigma_d(x)}{j\omega_0} \right) = c_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (46)$$

Donde se uso (37) para las ecuaciones (42) y (43), las ecuaciones anteriores están en forma continua y se necesitan llevar a la forma discreta para realizar la simulación, para esto se analizará el lado derecho de la ecuación (41)

$$j\omega D_z \left( 1 + \frac{\sigma_d(x)}{j\omega_0} \right) = j\omega D_z + \frac{D_z \sigma_d(x)}{\epsilon_0} \quad (47)$$

Tomando diferencias centrales en la ecuación anterior tenemos que:

$$\frac{D_z^n(i,j) - D_z^{n-1}(i,j)}{\Delta t} = \frac{\sigma D(i) D_z^n(i,j) - D_z^{n-1}(i,j)}{2\epsilon_0} \quad (48)$$

Factorizando y despejando  $D_z^n$  se obtiene:

$$D_z^n = D_z^{n-1} \frac{1 - \frac{\sigma D(i)}{2\epsilon_0} \Delta t}{1 + \frac{\sigma D(i)}{2\epsilon_0} \Delta t} \quad (49)$$

Si llamamos

$$g_{i3}(i) = \frac{1 - \frac{\sigma D(i)}{2\epsilon_0} \Delta t}{1 + \frac{\sigma D(i)}{2\epsilon_0} \Delta t} \quad (50)$$

y

$$g_{i2}(i) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma D(i)}{2\epsilon_0} \Delta t} \quad (51)$$

La ecuación (41) en forma discreta queda:

$$D_z^n(i,j) = g_{i3} D_z^{n-1}(i,j) + g_{i2}(i) * 0,5 H_y^{n-1}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j\right) - H_x^{n-1}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n-1}\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \quad (52)$$

Donde se ha aplicado la identidad

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} c_0 = \frac{1}{2} \quad (53)$$

Con un procedimiento similar se llega a

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( i + \frac{1}{2}, j \right) &= f_{i3} H_y^{n-\frac{1}{2}} \left( i + \frac{1}{2}, j \right) \\ &+ 0,5 * 0,5 (E_z^n(i+1,j) - E_z^n(i,j)) \end{aligned} \quad (54)$$

Donde

$$f_{i3}(i) = \frac{1 - \frac{\sigma D(i+\frac{1}{2})}{2\varepsilon_0} \Delta t}{1 + \frac{\sigma D(i+\frac{1}{2})}{2\varepsilon_0} \Delta t} \quad (55)$$

$$f_{i2}(i) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma D(i+\frac{1}{2})}{2\varepsilon_0} \Delta t} \quad (56)$$

Para la ecuación (42) el tratamiento es un poco diferente

$$j\omega H_x = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\sigma_D(x)}{j\omega\varepsilon_0} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) c_0 \quad (57)$$

Aplicando diferencias centrales a  $\partial E_z / \partial y$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \approx \frac{E_z^n(i,j+1) - E_z^n(i,j)}{\Delta x} = -\frac{\text{curl}_e}{\Delta x} \quad (58)$$

Aplicando diferencias centrales para el lado derecho y remplazando (55) en (54) se obtiene

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) &= H_x^n \left( i, j + \frac{1}{2} \right) \\ &+ 0,5 * \text{curl}_e + \frac{\sigma_D(x) \Delta t}{2\varepsilon_0} I_{Hx}^{n+1} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

La implementación de estas ecuaciones para el campo  $H_x$  es:

$$\text{curl}_e = (E_z^n(i,j) - E_z^{n-1}(i,j+1)) \quad (60)$$

$$I_{Hx}^{n+1} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) = I_{Hx}^{n-1} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) + \text{curl}_e \quad (61)$$

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) &= H_x^{n+\frac{1}{2}} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) \\ &+ 0,5 * \text{curl}_e + f_{i1} I_{Hx}^{n+1} \left( i, j + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

$$f_{i1} = \frac{\sigma_D(i) \Delta t}{2\varepsilon_0} \quad (63)$$

No es necesario calcular los parámetros  $f$  y  $g$  para diferentes conductividades se puede usar el parámetro auxiliar [2]

$$xn = \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon_0} \quad (64)$$

Este parámetro incrementa a medida que se va acercando más al PML. Los parámetros  $f$  y  $g$  son entonces calculados por:

$$xn = 0,333 \left( \frac{i}{\log_{PML}} \right)^3 \quad i = 1, 2, \dots, \log_{PML} \quad (65)$$

$$f_{i1}(i) = xn(i) \quad (66)$$

$$g_{i2}(i) = \left( \frac{1}{1 + xn(i)} \right) \quad (67)$$

$$g_{i3}(i) = \left( \frac{1 - xn(i)}{1 + xn(i)} \right) \quad (68)$$

Los parámetros varían de la siguiente manera:

$f_{i1}(i)$  de 0 a 0.333

$f_{i2}(i)$  de 1 a 0.75

$f_{i3}(i)$  de 1 a 0.5

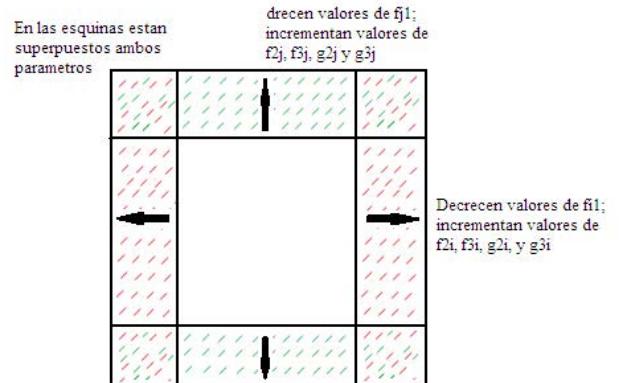


Figura 3: parámetros relacionados al PML.

Implementando las ecuaciones anteriores a los campos se evita la reflexión no deseada, la implementación en Matlab para estas ecuaciones es:

```
dz(i, j)=gi3(i-1,1)*gj3(j-1,1)*dz(i, j)+  
gi2(i-1,1)*gj2(j-1,1)*0.5*(hy(i, j)-  
hy(i-1, j)- hx(i, j)+hx(i, j-1))  
  
rot_e=ez(i, j)-ez(i, j+1);  
ihx(i, j)=ihx(i, j)+f1(i-1,1)*rot_e;  
hx(i, j)=f3(j-1,1)*hx(i, j)+
```

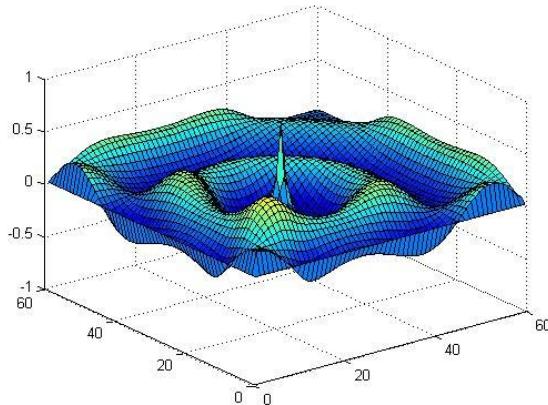
```

fj2(j-1,1)*0.5*(rot_e+ihx(i,j))

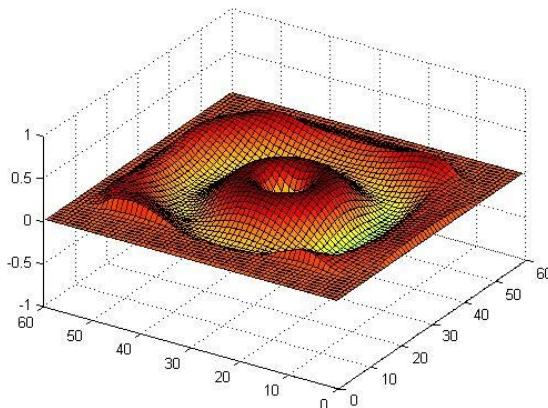
rot_e=ez(i+1,j)-ez(i,j);
ihy(i,j)=ihy(i,j)+fj1(j-1,1)*rot_e;
hy(i,j)=fj3(j-1,1)*hy(i,j)+
fj2(i-1,1)*0.5*(rot_e+ihy(i,j));

```

A continuación se muestra un pulso Gausiano en las fronteras de la malla de simulación con condiciones absorbentes y sin ellas



**Figura 4:** Onda sinusoidal con T=86 pasos, el pulso es reflejado en el límite de la malla.



**Figura 5:** Onda sinusoidal con T=67, el pulso es absorbido por el PML.

## 5. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo, se ha desarrollado un algoritmo en matlab basado en el método FDTD que permito simular la propagación de una onda electromagnética en el espacio libre. Gracias a la implementación de las condiciones de frontera absorbentes tipo PML se logró simular una onda sinusoidal de manera que no fuese reflejada en los límites del mallado computacional, obteniendo así un mejor comportamiento y mejores resultados, lo cual nos permite hacer un mejor análisis de la propagación de la onda a pesar de los limites computacionales.

## Referencias

- [1] A.TAFLOVE, S. HAGNESS (2005) *Computational Electrodynamics the finite-difference time-domain method*. Artech House,Boston, London.
- [2] DENNIS M. SULLIVAN (2000) "Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method". IEEE PRESS.
- [3] Valéria de Magalhaes Iório. *EDP um curso de graduacao*. Instituto de matemática pura y aplicada IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [4] Moysey Brio, Aramais Zakharian & Gary M. Webb. *Numerical Time-Dependent Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. C.K Chui, Stanford University, 2010.
- [5] Univ. de Extremadura. *Apuntes de ecuaciones diferenciales*, Dpto. de Matemáticas. Badajoz-España, Mayo 2013.[Documento en línea]. <http://matematicas.unex.es/ricarfr/EcDiferenciales/LibroEDlat.pdf>.
- [6] Ignacio Gracia Rivas & Narciso Román Roy. *Apuntes de ecuaciones diferenciales*, Departamento de de Matemática Aplicada IV, Barcelona España, Octubre 2008. [Documento en línea]. <http://www-ma4.upc.edu/nrr/docs/edteor.pdf>.

# Espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$

## Sobolev Spaces $W^{m,p}(\Omega)$ with $1 \leq p \leq +\infty$

Jaider E. Blanco Gamarra<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Programa de Maestría en Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia

E-mail: jaiderbalnco@mail.uniatlantico.edu.co

Cristian Rojas Milla<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Programa de Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia  
E-mail: cristianrojas@mail.uniatlantico.edu.co

Received / Recibido: 2/11/2013. Accepted / Aceptado: 11/02/2014

---

### Resumen

En este artículo hacemos una breve revisión de los espacios de Sobolev, para lo cual presentamos su estructura vectorial ligada a los espacios  $L^p$ . Además, Se muestran que dichos espacios son normados, de Banach, separables y algunos son reflexivos (i,e; es isomorfo a su bidual) y finalmente se demostrarán los teoremas de inmersión y de aproximación por funciones suaves en dichos espacios.

*Palabras claves:* Espacios de Sobolev, espacio separables, espacios reflexivos, Desigualdad de Sobolev, Teoremas de Inmersión, desigualdad de Poincaré.

### Abstract

This article is a brief review of Sobolev spaces, for which we present vector structure linked to  $L^p$  spaces. In addition, such spaces are displayed are normed, Banach, and some are separable reflexive (i, e, is isomorphic to its bidual) and finally immersion prove theorems and approximation by smooth functions in such spaces.

*Keywords:* Sobolev space, space separable reflexive spaces, Sobolev inequality, Immersion theorems, Poincaré inequality.

---

### 1. Introducción

La teoría de los espacios de Sobolev se ha originado por el matemático ruso S.L. Sobolev alrededor de 1938 [ SO] . Estos espacios no se introdujeron para algunos propósitos teóricos , sino por la necesidad de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales . Están estrechamente relacionados con la teoría de las distribuciones , ya que los elementos de estos espacios son clases

especiales de distribuciones. Con el fin de discutir la teoría de los espacios de Sobolev vamos a empezar con algunos conceptos básicos simples que son necesarios para la introducción y el estudio de estos espacios [2,4,5].

Los espacios de Sobolev, que pueden ser representados brevemente, como las clases de funciones que poseen derivadas débiles en los espacios, ocupan un lugar destacado en el análisis

funcional. En las últimas tres décadas se ha producido un gran aporte en la teoría y aplicaciones de estos espacios (Ver [4,6,8]). Por otra parte, dada la importancia de los mismos en la teoría moderna de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se han transformado en una herramienta imprescindible para el tratamiento de las mismas. Por ello, últimamente se ha producido un creciente interés por el estudio y uso de parte de ingenieros y físicos para la resolución de sus problemas (Ver [3,7,9]).

La teoría de estos espacios es iniciada por matemáticos a principio del siglo XX y en particular por S. I. Sobolev en el año 1930. Si bien son varios los científicos que hicieron sus aportes, como es el caso de Beppo Levi, actualmente toda esa teoría se conoce como espacios de Sobolev. Estos espacios proporcionan un recurso extraordinario para el planteamiento y la búsqueda de soluciones de problemas de contorno. Esto es así porque estos espacios son completos y porque permiten obtener resultados generales respecto a la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Otra gran ventaja de los espacios de Sobolev radica en que permiten caracterizar el grado de regularidad de funciones y porque muchos de los métodos de aproximación, tales como el método de Ritz o el de los Elementos Finitos, son adecuados y correctamente formulados cuando se lo hace en el ámbito de estos espacios.

## 2. Preliminares

**Definición 2.1.** Sean  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $m$  es un número entero no negativo,  $u \in L^p$  y existe la derivada distribucional  $D^\alpha u$  para cualquier  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq m$ , tal que

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega); \forall |\alpha| \leq m.$$

Entonces se dice que  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ .

$W^{m,p}(\Omega)$  es llamado espacio de Sobolev sobre  $\Omega$ .

Esta clase  $W^{m,p}(\Omega)$  de funciones está dotado de la norma:  $\|u_{m,p}\| = (\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$ . Si  $1 \leq p \leq \infty$ .

El caso  $p = 2$  juega un papel muy importante, estos espacios son denotados por  $H^m(\Omega)$ , así

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

y para  $u \in H^m(\Omega)$ , nosotros denotamos por  $\|u\|_{m,p} = \|u\|_{m,2}$ .

El espacio  $H^m(\Omega)$  tiene un producto interno natural definido por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

**Observación 1.** El espacio  $H^m(\Omega)$  es un espacio de Hilbert lo cual es hereditario debido a que  $L^2$  lo es.

**Teorema 2.1.**  $\|u\|_{m,p}$  es una norma de el espacio de funciones  $W^{m,p}(\Omega)$ .

*Demostración.* Es evidente que  $\|u\|_{(m,p)} \geq 0$ , además  $\|u\|_{(m,p)} = 0 \iff u = 0$ . Además, la homogeneidad del funcional se verifica, dado que la derivada y la norma en  $L^p$  satisfacen dicha propiedad  $\|\beta u\|_{(m,p)} = |\beta| \|u\|_{(m,p)}$  para todo  $u \in W^{(m,p)}(\Omega)$  y todo  $\beta \in \mathbb{R}$ . Y para finalizar, la desigualdad de Hölder, nos garantiza que el funcional satisface la desigualdad triangular. ■  
En el caso en que  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , el espacio  $H^m(\mathbb{R}^n)$  puede ser definido vía transformada de Fourier. Si  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ , entonces por definición  $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  para todo  $|\alpha| \leq m$ . La transformada de Fourier de  $D^\alpha u$  esta bien definido y tenemos

$$(D^\alpha u) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u},$$

Y también  $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  para todo  $|\alpha| \leq m$ . □

**Lema 2.1.** Existen constantes positivas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dependiendo solo de  $m$  y  $n$  tal que  $M_1(1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq M_2(1 + |\xi|^2)^m$  para todo  $\mathbb{R}^n$ .

Por el lema inmediatamente anterior podemos definir el espacio  $H^m(\mathbb{R}^n)$  como sigue:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = u \in L^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad (1)$$

cuya norma  $\|\cdot\|_{(m,\mathbb{R}^n)}$  sobre  $H^m(\mathbb{R}^n)$  es equivalente a la norma:  $\|u\|_H^m(\mathbb{R}^n) = (\int_{(\mathbb{R}^n)} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}$ . Para toda  $m \geq 0$ . La función  $\mathfrak{F} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow (L^p(\omega))^{n+1}$   $u \rightarrow \mathfrak{F}(u) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$  es una isometría de  $W^{(m,p)}(\Omega)$  sobre  $(L^p(\Omega))^{(n+1)}$  si dotamos al espacio con la norma  $\|u\| = \sum_{i=1}^{n+1} |u_i|_{0,p}$  para  $u = (u_i) \in (L^p(\Omega))^{(n+1)}$ .

En el siguiente teorema se establecerá una propiedad fundamental de los espacios de Sobolev  $W^{(m,p)}(\Omega)$ .

**Teorema 2.2.**  $W^{(m,p)}(\Omega)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.* Sea  $(u_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  una sucesión de Cauchy en  $W^{(m,p)}(\Omega)$ , entonces por definición  $D^\alpha u_n \in L^p(\Omega)$  para todo  $|\alpha| \leq m$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dado  $\epsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que si  $x, y \geq N$  entonces  $\|u_x - u_y\|_{m,p}^p < \epsilon$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha(u_x - u_y)\|_p^p &= \\ \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha(u_x) - D^\alpha(u_y)\|_p^p &< \epsilon \end{aligned} \quad (2)$$

De aquí que  $(D^\alpha(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^p(\Omega)$  para  $|\alpha| \leq m$ . Como  $L^p(\Omega)$  es completo existen funciones  $u_0$  y  $u_\alpha$  en  $L^p(\Omega)$  para  $|\alpha| \leq m$  tal que

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ y } D^\alpha(u_n) \rightarrow u_\alpha, n \rightarrow \infty$$

La idea es demostrar que  $u_0 \in W^{m,p}(\Omega)$ .

Además, como  $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  y  $u_n \in L^p(\Omega)$  para todo  $n$ , entonces existe una distribución  $T_{u_n} \in D'(\Omega)$  tal que para cualquier  $\phi \in D(\Omega)$

tenemos

$$\begin{aligned} |T_{u_n}(\phi) - T_{u_0}(\phi)| &= \\ \left| \int_{\Omega} u_n(x) \phi(x) dx - \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx \right| &= \\ \left| \int_{\Omega} (u_n(x) - u_0(x)) \phi(x) dx \right| &\leq \\ \int_{\Omega} |u_n(x) - u_0(x)| |\phi(x)| dx & \\ \leq \|u_n - u_0\|_p \|\Phi\|_{p^*} & \end{aligned} \quad (3)$$

Por tanto,  $T_{u_n}(\phi) \rightarrow T_{u_0}(\phi)$  para todo  $\phi \in D(\Omega)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

De forma similar,

$$|T_{D_{u_n}^\alpha}(\phi) - T_{u_\alpha}(\phi)| \leq \|D^\alpha u_n - u_\alpha\|_p \|\phi\|_{p^*}$$

Por lo tanto  $T_{D^\alpha u_n}(\phi) \rightarrow T_{u_\alpha}(\phi)$  para todo  $\phi \in D(\Omega)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Luego, para cada  $\phi \in D(\omega)$  se tiene

$$\begin{aligned} T_{(u_\alpha)}(\phi) &= \lim_{n \rightarrow \alpha} T_{D_{u_n}^\alpha}(\phi) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha(\phi)) &= \\ (-1)^{|\alpha|} T_{u_0}(D^\alpha) & \end{aligned} \quad (4)$$

así,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_\alpha(x) \phi(x) dx &= \\ (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_0(x) D^\alpha \phi(x) dx & \end{aligned} \quad (5)$$

De esta manera  $D^\alpha(u_0) = u_\alpha$  en el sentido distribución en  $\Omega$  para  $|\alpha| \leq m$ , donde  $u_\alpha W^{(m,p)}(\Omega)$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_{(m,p)} = 0$ , por lo tanto  $W^{(m,p)}(\Omega)$  es un espacio completo.  $\square$

**Ejemplo** Sea  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  un abierto en  $\mathbb{R}^2$ , y sea  $u(x) = u(x_1, x_2) = x_1^\alpha$ , entonces

$$\int_{\Omega} u^2 dx = \int_0^1 \int_1^0 x_1^{2\alpha} dx_1 dx_2 =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\alpha+1} \lim_{a \rightarrow 0^+} (1 - a^{2\alpha+1}) = \frac{1}{2\alpha+1} & \text{si } \alpha > -\frac{1}{2} \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln 1 - \ln a = \infty & \text{si } \alpha = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\alpha+1} \lim_{a \rightarrow 0^+} (1 - a^{2\alpha+1}) = \infty & \text{si } \alpha < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Así  $u \in L^2(\Omega)$  si  $\alpha > -\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ , además  $\frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$  para todo  $\alpha$ . Sin embargo, para

$\alpha \neq 0$ ,

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 \alpha^2 x_1^{2(\alpha-1)} dx_1 dx_2$$

Procediendo de la misma manera como en la integral anterior, obtenemos que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$  si  $\alpha > -\frac{1}{2}$ .

Si  $\alpha = 0$ , entonces  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$  y  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$ . Resumiendo, esto significa que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  cuando  $\alpha > -\frac{1}{2}$  o  $\alpha = 0$ .

**Proposición 2.1.**  $W^{(m,p)}(\Omega)$  es un subespacio cerrado de  $L^p(\Omega)$ .

**Proposición 2.2.** Sea  $\alpha$  un multi-índice,  $(u_n)_{(n \in \mathbb{N})} \in L^p(\Omega)$  y  $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{u_n}^\alpha = v_\alpha$  en  $L^p(\Omega)$  entonces  $D^\alpha u = v_\alpha$ . El siguiente teorema muestra las condiciones bajo las cuales el espacio  $W^{(m,p)}(\Omega)$  es reflexivo y separable.

**Teorema 2.3.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto no vacío,  $m \geq 1$  un entero y  $p \in [1, \infty)$ . Se tiene

- a.  $W^{(m,p)}(\Omega)$  es un espacio reflexivo si  $p \in (1, \infty)$ .
- b.  $W^{(m,p)}(\Omega)$  es un espacio separable si  $p \in [1, \infty)$ .

*Demostración.* Sea  $M = \text{card}\{\alpha \in \mathbb{N} : |\alpha| \leq m\}$  y consideremos el espacio producto  $X = \prod_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega) = L^p(\Omega)^M$  el cual es un espacio de Banach para la norma producto:

$$\|U\| = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|u\|_{m,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

si  $p \in [1, \infty)$ , donde  $U = (u_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in X$ . De hecho, sabemos que  $X$  es reflexivo si y solo si  $L^p(\Omega)$  es reflexivo y  $X$  es separable si y solo si  $L^p(\Omega)$  lo es.

Consideremos la aplicación lineal continua

$$J : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow X$$

definida por

$$J(u) = (D^\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in X$$

y sea  $E = J(W^{m,p}(\Omega)) \subseteq X$ . En virtud de la proposición 2.1 es inmediato comprobar que  $E$  es un subespacio vectorial cerrado de  $X$ .

Así,  $(E, \|\cdot\|_X)$  es un espacio de Banach que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de  $X$ . Además,  $J$  es un isomorfismo isométrico entre  $W^{(m,p)}(\Omega)$  y  $E$ .

Se concluye que  $W^{(m,p)}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p}$  es un espacio de Banach y se obtiene (a) y (b).  $\square$

**Observación 2.** Se tienen que  $W^{m,1}(\Omega)$  y  $W^{m,\infty}(\Omega)$  son espacios no reflexivos. Por otro lado, se tiene que  $W^{m,\infty}(\Omega)$  no es separable. Además,  $D(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$ .

**Definición 2.2.** Sean  $m \geq 0$  y  $p \in [1, \infty)$ . Definimos

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}_{m,p}^{\|\cdot\|}$$

En caso particular de  $p = 2$ , usaremos la notación  $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}_{m,2}^{\|\cdot\|}$ . De la propia definición deducimos que  $W_0^{m,p}(\Omega)$  es un subespacio vectorial cerrado de  $W^{m,p}(\Omega)$  y con la norma  $\|\cdot\|_{m,p}$  es un espacio de Banach que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de  $W^{m,p}(\Omega)$ , además  $H_0^m(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m}$ .

**Observación 3.** Obsérvese que  $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$  es equivalente a decir que existe una sucesión  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$  tal que  $\psi_n \rightarrow u$  en  $L^p(\Omega)$ , es decir  $D^\alpha \psi_n \rightarrow D^\alpha u$  en  $L^p(\Omega)$  para todo  $0 < |\alpha| \leq m$ , con lo que es interesante encontrar una caracterización manejable del espacio  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

**Proposición 2.3.** Para  $k = 0$  y  $1 \leq p < \infty$  demuestra que  $W_0^{0,p}(\Omega) \equiv L^p(\Omega)$ .

**Definición 2.3.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Para un  $\epsilon > 0$ , definimos el subconjunto abierto  $\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{B}(x, \epsilon) \subseteq \Omega\}$ . Entonces para todo  $u \in L^1(\omega)$  la modificación  $u_\epsilon(x) = \int_{B(x, \epsilon)} J_\epsilon(x-y)u(y)dy$  esta bien definida para todo  $x \in \Omega_\epsilon$ .

**Teorema 2.4.** Si  $1 \leq p < \infty$ . Entonces para algún  $m \geq 0$  entero tenemos  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Para el caso en el que  $m = 1$ , tenemos que mostrar que si  $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ , entonces existe una sucesión  $\{\phi_k\}$  en  $D(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\phi_k \rightarrow u$  en  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Paso 1.** Sea  $\{\rho_\epsilon\}$  una familia de mollifiers. Entonces si  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , tenemos  $\rho_{\epsilon*u} \rightarrow u$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Primero, para todo  $\rho_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la convolución esta bien definida. Sea  $\phi$  una función continua con soporte compacto tal que  $|\phi - u|_{0,p} < \frac{\delta}{3}$  donde  $\delta > 0$  es un número pre-assignado. Elijamos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que  $|\phi * \rho_\epsilon - \phi|_{0,p} < \frac{\delta}{3}$ . Así,

$$\begin{aligned} |u - u * \rho_\epsilon|_{0,p} &\leq |u - \phi|_{0,p} + |\phi - \rho_\epsilon * \phi|_{0,p} + \\ &\quad |\phi * \rho_\epsilon - u * \rho_\epsilon|_{0,p} < \delta \end{aligned} \quad (6)$$

Luego,

$$|(\phi - u) * \rho_\epsilon|_{0,p} \leq |\phi - u|_{0,1} < \frac{\delta}{3}$$

lo que prueba la primera parte del proceso.

**Paso 2.** Si  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $u * \rho_\epsilon$  es una función  $C^\infty$  y  $D^\alpha(u * \rho_\epsilon) = D^\alpha u * \rho_\epsilon = u * D^\alpha \rho_\epsilon$ , para algún multi-índice  $\alpha$ . Por el paso 1,  $u * \rho_\epsilon \rightarrow u$  y  $D^\alpha(u * \rho_\epsilon) = D^\alpha u * \rho_\epsilon \rightarrow D^\alpha u$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Por tanto,  $u * \rho_\epsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Paso 3.** Sea  $\zeta$  un función en  $D(\mathbb{R}^n)$  tal que  $0 \leq \zeta \leq 1$ ,  $\zeta \equiv 1$  sobre  $B(0;1)$  y  $\text{supp}(\zeta) \subset B(0,2)$ . Consideremos la sucesión  $\zeta_k$  en  $D(\mathbb{R}^n)$  definida por

$$\zeta_k(x) = \zeta\left(\frac{x}{k}\right).$$

Sea  $\epsilon_k \downarrow 0$ . Sea  $u_k = \rho_{\epsilon_k} * u$ . Entonces  $u_k \in C^\infty$  y  $u_k \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  por el paso 2.

Definamos  $\phi_k \in D(\mathbb{R}^n)$  por

$$\phi_k(x) = \zeta_k(x)u_k(x)$$

Ahora mostraremos que  $\phi_k \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , para completar la demostración. Como  $\zeta_k \equiv 1$

sobre  $B(0;k)$  tenemos  $u_k = \phi_k$  sobre  $B(0;k)$ . Así,

$$\begin{aligned} |u_k - \phi_k|_{0,p} &= \left( \int_{|x|>k} |u_k(x) - \phi_k(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\quad 2 \left( \int_{|x|>k} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (7)$$

puesto que  $|\phi_k| \leq |u_k|$ . Como la integral tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$  puesto que  $u_k \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Así,

$$\frac{\partial_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

sobre  $B(0;k)$ ,  $\frac{\partial_k}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  por un argumento análogo. Así,  $\phi_k \rightarrow u$ , en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

### 3. Aproximación por funciones suaves

**Definición 3.1.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Un operador de extensión  $\Psi$  para  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  es un operador lineal acotado

$$\Phi : W^{1,p}(\omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que  $\Psi|_u = u$  para todo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

**Teorema 3.1.** Sean  $k \geq 0$  y  $1 \leq p < \infty$  y sea  $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ . Definimos  $\tilde{u}$  como la extensión por 0 de  $u$  a  $\mathbb{R}^n - \Omega$ , esto es,  $\phi_k \rightarrow u$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Similarmente, como

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Entonces,

1.  $\tilde{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .
2.  $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ , para todo  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq m$
3.  $\| \tilde{u} \|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \| \tilde{u} \|_{W_0^{m,p}(\Omega)}$

*Demostración.* Por hipótesis  $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ , así existe  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$  de manera que  $\psi_n \rightarrow u$  en  $L^p(\Omega)$ , es decir  $D^\alpha \psi_n \rightarrow D^\alpha u$  en  $L^p(\Omega)$  para todo  $0 < |\alpha| \leq m$ . Consideremos  $\widetilde{\psi_n}$  definida por

$$\widetilde{\psi_n}(x) := \begin{cases} \psi_n(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Que evidentemente verifica que  $\widetilde{\psi_n} \in D(\mathbb{R}^n)$  y  $D^\alpha \widetilde{\psi_n} = \widetilde{D^\alpha \psi_n}$  para  $0 < |\alpha| \leq m$ .

Deducimos que  $\widetilde{\psi_n} \rightarrow \tilde{u}$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  y  $D^\alpha \widetilde{\psi_n} = \widetilde{D^\alpha \psi_n} \rightarrow \widetilde{D^\alpha u}$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $0 < |\alpha| \leq m$ .

Así, en virtud de la proposición se garantiza la existencia de  $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha(u)} \in L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $0 < |\alpha| \leq m$ . Es decir,  $\tilde{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  y  $\|\tilde{u}\|_{W_0^{m,p}}(\mathbb{R}^n) = \|\tilde{u}\|_{W_0^{m,p}}(\Omega)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.** Si  $\Omega$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  tal que el operador extensión  $\Psi : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  existe, entonces dado  $u \in W^{(1,p)}(\Omega)$  existe una sucesión  $\{u_m\}$  en  $D(\mathbb{R}^n)$  tal que  $u_m|_{\Omega} \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Ejemplo** Sea  $\Omega$  es un intervalo abierto, lo llamaremos  $(-1, 1)$ . Sea  $u$  la función definida de la siguiente manera

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces como  $u$  es absolutamente continua, la distribución derivada esta dada por

$$u'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea  $\phi \in C^\infty(\Omega)$  tal que

$$|\phi' - u'|_{0,\infty} < \epsilon.$$

Así, si  $x < 0$ ,  $|\phi'(x)| < \epsilon$  y si  $x > 0$ ,  $|\phi'(x) - 1| < \epsilon$  o  $\phi'(x) > 1 - \epsilon$ . Luego, por la continuidad  $\phi'(0) < \epsilon$  y  $\phi'(0) \geq 1 - \epsilon$  lo cual es imposible si  $\epsilon < \frac{1}{2}$ . Por tanto  $u$  no puede ser aproximada en  $W^{1,\infty}(\Omega)$  por funciones suaves.

**Lema 3.1.** Sea  $1 \leq p < \infty$ . Y sea  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , tal que  $u$  se anula fuera de un conjunto compacto contenido en  $\Omega$ . Entonces  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

*Demostración.* Ver [1].  $\square$

**Teorema 3.3.** Sea  $G$  un función Lipschitz de  $\mathbb{R}$  en si misma tal que  $G(0) = 0$ . Entonces si  $\Omega$  es

acotada,  $1 < p < \infty$ , y  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , tenemos  $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

*Demostración.* Sea  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  y sea  $u_m \in D(\Omega)$  tal que  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Definamos  $v_m = G \circ u_m$  como  $u_m$  tiene soporte compacto y  $G(0) = 0$ ,  $v_m$  tiene soporte compacto. También  $v_m$  es también una función de Lipschitz; para

$$|v_m(x) - v_m(y)| = |G(u_m(x)) - G(u_m(y))| \leq K|u_m(x) - u_m(y)| \leq K_m|x - y|$$

como  $u_m$  es una función suave con soporte compacto y  $G$  es una función Lipschitz. Por tanto  $v_m \in L^p(\Omega)$  también se deduce que  $|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}| \leq K_m$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Y como  $\Omega$  es acotada,  $\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ . Así,  $v_m \in W^{1,p}(\Omega)$  y tiene soporte compacto. Luego por el lema anterior,  $v_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . También a partir de la relación  $|v_m(x) - G(u(x))| \leq K|u_m(x) - u(x)|$  se deduce que  $v_m \rightarrow G \circ u$  en  $L^p(\Omega)$ . Además, si  $e_i$  es el vector base  $i$ -ésimo en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{v_m(x + he_i) - v_m(x)}{|h|} \right| \\ & \leq \frac{K |u_m(x + he_i) - u_m(x)|}{|h|} \quad (8) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right|_{0,p} \\ & \leq K \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|_{0,p} \quad (9) \end{aligned}$$

Pero como  $\{\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\}$  es una sucesión convergente en  $L^p(\Omega)$ , se obtiene  $\{\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\}$  es acotada para cada  $1 \leq i \leq n$ . Así,  $\{v_m\}$  es convergente en  $W^{1,p}(\Omega)$  y  $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .  $\square$

**Definición 3.2.** Se dice que un espacio normado  $X$  esta inmerso en un espacio normado  $Y$ , y escribimos  $X \rightarrow Y$  para designar la inmersión, si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $X$  es un subespacio vectorial de  $Y$ .
2. El operador identidad  $I$  definido en  $X$  sobre  $Y$  por  $I(x) = x$  para todo  $x$  en  $X$  es continua.

En esta parte del artículo trabajaremos el espacio dual de  $W^{m,p}(\Omega)$ . Para ello se dará en un principio algunas definiciones con el fin de profundizar un poco en este tema. Definimos  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ , dado  $p, p'$  es el exponente conjugado definido por  $p' = \begin{cases} \infty & \text{si } p = 1 \\ \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < \infty \\ 1 & \text{si } p = \infty \end{cases}$

Sea  $P : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L_N^p$  definida por  $Pu = (D^\alpha u)_{(0 < |\alpha| \leq m)}$ . P es un isomorfismo isométrico de  $W^{m,p}(\Omega)$  sobre  $W \subseteq L_N^p$ , entonces como  $W^{(m,p)}(\Omega)$  es completo, W es un subespacio cerrado de  $L_N^p$ , además es separable reflexivo y uniformemente convexo.  $W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(L_N^p)$ .

**Lema 3.2.** Sea  $1 \leq p < \infty$ . Para todo  $\sigma \in (L_N^p)'$  existe un único  $v \in L_N^{p'}$  tal que para todo  $u \in L_N^p$ ,

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^N \langle u_j, v_j \rangle$$

Sin embargo,

$$\|\delta\|_{(L_N^p)'} = \|v\|_{(L_N^{p'})}$$

Así,  $(L_N^p)' \cong L_N^{p'}$ .

*Demostración.* Si  $1 \leq j \leq N$  y  $\omega \in L^p(\Omega)$ , sea  $\omega(j) = (0, \dots, \omega, \dots, 0) \in L_N^p$  donde la j-esima componente es  $\omega$  y las demás componentes son 0. Sea  $\delta_j(\omega) = \delta(\omega_j)$ , observemos que  $\delta_j \in (L^p(\Omega))'$ , Luego por el Teorema de Representación para  $L^p(\Omega)$ , existe un único  $v_j \in L^{p'}(\Omega)$  tal que para todo  $\omega \in L^p(\Omega)$

$$\delta(\omega_j) = \delta_j(\omega) = \langle \omega, v_j \rangle$$

Si  $u \in L_N^p$ , entonces

$$\delta(u) = \delta\left(\sum_{j=1}^n u_j\right) = \sum_{j=1}^n \delta(u_j) = \sum_{j=1}^n \langle u_j, v_j \rangle$$

Luego por la desigualdad de Hölder para sumas finitas, tenemos

$$|\delta(u)| \leq \sum_{j=1}^N \|u_j\|_p \|v_j\|_{p'} \leq \|u\|_{L_N^p} \|v\|_{L_N^{p'}} \\ \text{Así que } \|\delta\|_{(L_N^p)'} \leq \|v\|_{L_N^{p'}}. \quad \square$$

**Corolario 3.1.** Demostrar  $\|\delta\|_{(L_N^p)'} \geq \|v\|_{L_N^{p'}}$  ( $\Omega$ ).

**Teorema 3.4.** Sea  $1 \leq p < \infty$ , para todo  $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$  existe un elemento  $v \in L^{p'}(\Omega)$  tal que, escribimos el vector v en la forma  $(v_\alpha)_{0 < |\alpha| \leq m}$ , nosotros tenemos para  $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$L(u) = \sum_{0 < |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

$$\text{Sin embargo, } \|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))'} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

*Demostración.* Sea  $L^*$  el funcional lineal definido sobre el rango W del operador P.  $L^*(Pu) = L(u)$ , para todo  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ . Como P es un isomorfismo isométrico,  $L^* \in W'$ . Y  $\|L^*\|_{W'} = \|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))'}$ . Por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión de  $L^*$  que preserva la norma y por el lema 3.2 existe  $v \in L_N^{p'}$  tal que si  $u = (u_\alpha)_{0 < |\alpha| \leq m}$ , entonces

$$\tilde{L}(u) = \sum_{0 < |\alpha| \leq m} \langle u_\alpha, v_\alpha \rangle$$

Así para  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  obtenemos

$$L(u) = L^*(Pu) = \tilde{L}(Pu) = \sum_{0 < |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

Sin embargo,

$$\|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))'} = \|L^*\|_{W'} = \|L^*\|_{L_N^{p'}} = \|v\|_{L_N^{p'}} \quad \square$$

El siguiente teorema hace referencia a una desigualdad muy importante de este espacio llamada la desigualdad de Poincaré la cual es vital en el estudio de soluciones débiles de problemas elípticos de frontera Dirichlet.

**Teorema 3.5.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto acotado en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces existe una constante positiva  $C = C(\Omega, p)$  tal que  $|u|_{0,p} \leq C|u|_{1,p}$  para todo  $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ .

#### 4. Teoremas de inmersión

Estudiaremos las inmersiones de espacio  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Se Analizará los diferentes casos cuando  $p < n$ ,  $p = n$  y  $p > n$ . Si  $1 \leq p < n$ . Entonces definamos el exponente  $p^*$  por

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

note que  $p^* > p$ . Esencialmente, se demostrará que  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  puede ser inmerso en  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 4.1.** Sea  $1 \leq p < n$ . Entonces existe una constante  $C = C(p, n)$ , tal que

$$|u|_{0,p^*} \leq C|u|_{1,p}$$

para todo  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . En particular tenemos la inclusión continua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

El anterior teorema es conocido como la desigualdad de Sobolev.

**Teorema 4.2.** Sea  $p > n$ . Entonces tenemos la inclusión continua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Además, existe una constante  $C = C(p, n) > 0$  tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha |u|_{1,p}$$

en casi todo punto de  $\mathbb{R}^n$ , donde  $\alpha = 1 - (\frac{n}{p})$

**Teorema 4.3.** Sea  $\Omega = R_+^n$  o un conjunto abierto de clase  $C^1$  con frontera acotada  $\partial\omega$ .

Entonces tenemos las siguientes inclusiones continuas:

- i. Si  $1 \leq p < n$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^{p^*}(\Omega)$ .
- ii. Si  $p = n$ ,  $W^{1,n}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [n, \infty]$ .
- iii. Si  $p > n$ ,  $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ .

Y además,  $u$  es Hölder-continua de exponente  $\alpha = 1 - (\frac{n}{p})$ .

En particular,  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ ,  $p > n$ .

**Teorema 4.4.** Si  $p > n$ . Entonces el espacio  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  es un álgebra de Banach Comutativa.

*Demostración.* Para probar que  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  es un álgebra de Banach, necesitamos mostrar que si  $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  entonces el producto  $uv \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  y que  $\|uv\|_{1,p} \leq C\|u\|_{1,p}\|v\|_{1,p}$ . Sea  $u, v \in D(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $uv \in D(\mathbb{R}^n)$  y por la regla del producto

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}v \in D(\mathbb{R}^n)$$

Sea  $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces como  $p > n$ ,  $u, v \in L^p(\mathbb{R}^n)$  y por consiguiente,  $uv \in L^p(\mathbb{R}^n)$  esta bien definida. También

$$u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}v \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Ahora mostraremos que esta es la distribución derivada  $\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)$ .

Si  $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} uv \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n u_m} v_m \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_m) \phi \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v) \phi \end{aligned} \tag{10}$$

Por el teorema de la Convergencia Dominada, cuando  $u_m \rightarrow u$ ,  $v_m \rightarrow v$  en  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_m, v_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Esto prueba que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}v.$$

También por la continuidad de la inclusión de  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  sobre  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , se sigue que

$$\begin{aligned} |\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)|_{0,p} &\leq \\ |\frac{\partial u}{\partial x_i}|_{0,p} |v|_{0,\infty} + |u|_{0,\infty} |\frac{\partial v}{\partial x_i}|_{0,p} &\\ \leq C \|u\|_{1,p} \|v\|_{1,p}. & \end{aligned} \tag{11}$$

Y así queda probado el teorema.

Del mismo modo se puede probar que  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  es un álgebra de Banach cuando  $m > \frac{n}{p}$ .  $\square$

**Teorema 4.5.** Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un conjunto acotado y conexo de clase  $C^1$ . Sea  $P_m(\Omega)$  denota el espacio de todos los polinomios en  $x_1, \dots, x_n$  sobre  $\Omega$  y de grado menor o igual a  $m$ . Sea  $v \in W^{m+1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  y sea  $\mathbf{v}$  las clases de equivalencia de  $v$  en el espacio cociente  $(W^{m+1,p}(\Omega)) \diagup (P_m(\Omega))$ . Este espacio esta equipado con la norma usual

$$\| v \|_{m+1,p} = \inf_{\tilde{p} \in P_m(\Omega)} \| v + \tilde{p} \|_{m,p}$$

**Corolario 4.1.** Sea  $\Phi : W^{m+1,p}(\Omega) \rightarrow V$  un operador lineal continuo, donde  $V$  es un espacio de Banach conteniendo a  $W^{m+1,p}(\Omega)$ . Supongamos además que

$$\Phi(\tilde{p}) = \tilde{p}$$

para todo  $\tilde{p} \in P_m(\Omega)$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que para cada  $u \in W^{m+1,p}(\Omega)$ ,

$$\| u - \Phi(u) \|_V \leq C |u|_{m+1,p}$$

*Demostración.* Sea  $\tilde{p}$  un polinomio en  $P_m(\Omega)$ . Entonces para algún  $u \in W^{m+1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \| u - \Phi(u) \|_V &= \\ &\| (u + \tilde{p}) - \Phi(u + \tilde{p}) \|_V = \\ &\| (I - \Phi)(u + \tilde{p}) \|_V \leq \\ &\| I - \Phi \| \| u + \tilde{p} \|_{m+1,p} \quad (12) \end{aligned}$$

como  $\tilde{p}$  es arbitrario, tomando  $C_1 = \| I - \Phi \|$ ,

$$\begin{aligned} \| u - \Phi(u) \|_V &\leq C_1 |u|_{m+1,p} \\ &\inf_{\tilde{p} \in P_m(\Omega)} \| v + \tilde{p} \|_{m+1,p} = \\ &C_1 \| u \|_{m+1,p} \\ &\leq C |u|_{m+1,p} \quad (13) \end{aligned}$$

por teorema previo.  $\square$

## Referencias

- [1] R.A. Adams, Sobolev Spaces , Academic Press, New York, 1975.
- [2] Grisvard, P. (1985), Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Pitman, Boston.
- [3] Stein, E.M. (1970), Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, Princeton.
- [4] V.I. Burenkov; Mollifying operators with variable step and their applications to approximation by differentiable functions, In "Nonlinear analysis, function spaces and applications", Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, 49 (1982), 5-37.
- [5] A. Kufner, Weighted Sobolev spaces, John Wiley and Sons 1983.
- [6] A.A. Dezin. On embedding theorems and extension problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR 88(1953-54), 741-743(Russian).
- [7] L.C. Evans, Partial Differential Equations , AMS, Providence, RI, 1998.
- [8] A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [9] A. Friedman, Foundations of Modern Analysis , Dover Publications, Inc., New York, 1982.
- [10] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order , Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [11] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Academic Press, New York, 1980.
- [12] J.T. Martí, Introduction to Sobolev Spaces and Finite Element Solution of Elliptic Boundary Value Problems , Academic Press, London, 1986.
- [13] V.G. Maz'ja, Sobolev Spaces , Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [14] C. B. Morrey, Jr., Multiple Integrals in the Calculus of Variations , Springer-Verlag, New York, 1966.
- [15] J. Nečas, Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations , Teubner, Leipzig, 1983.
- [16] J. Nečas, Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques , Academia, Prague, 1967.
- [17] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analysis , Courant Institute, New York, 1974.
- [18] S.L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, Mat. Sb. 4 (46) 1938, 39-68 (translated into English in 1963).
- [19] H. Tanabe, Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations , Dekker, New York, 1997.
- [20] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators , VebDeutscher, Berlin, 1978.

Para citar este artículo: Gamarra J. et all, 2014, .Espacio de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  con  $1 \leq p \leq +\infty$ . Disponible en Revistas y Publicaciones de la Universidad del Atlántico en:  
<http://investigaciones.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/MATUA>.

# EVENTOS ACADÉMICOS Y LA INVESTIGACIÓN EN EL PROGRAMA DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

Diana C.Roca<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Programa de Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia  
E-mail: dcroca@mail.uniatlantico.edu.co*

María Angélica Serje<sup>2</sup>

<sup>2</sup>*Programa de Matemáticas  
Universidad del Atlántico, Colombia  
E-mail: mariangel3112@hotmail.com*

*Received / Recibido: 2/12/2013. Accepted / Aceptado: 22/12/2013*

En la actualidad, la Ciencia y la Tecnología se han convertido en una herramienta para el desarrollo y progreso de las sociedades; motivo por el cual la investigación ha cobrado un gran auge en los últimos años. Por esta razón, el sistema educativo universitario ha venido revaluando la forma en que se venía impartiendo la enseñanza de la ciencia. Además, ha buscado estrategias para brindar una formación más integral, acorde a las necesidades que impone la sociedad, en la que se integren el conocimiento, la investigación y su práctica [5].

La Universidad del Atlántico, es una universidad de carácter público que forma profesionales integrales e investigadores en el ejercicio autónomo de la responsabilidad social y en la búsqueda de la excelencia académica para propiciar el desarrollo humano, la democracia participativa,

la sostenibilidad ambiental y el avance de las ciencias, la tecnología, la innovación y las artes en la región Caribe colombiana y el país. La universidad del atlántico a través de la oficina administrativa de vicerrectoría de investigaciones, genera y propicia el desarrollo de la investigación, la extensión y proyección social.

La Vicerrectoría de Investigaciones, Extensión y Proyección Social como unidad académico-administrativa considera la investigación como un elemento de misión, responsable de la definición de políticas para desarrollar, asesorar, apoyar y gestionar las actividades de fomento de la investigación, la extensión y la proyección social, a su vez posibilita la apropiación, generación y divulgación de conocimientos, así como la integración de la actividad investigativa a los procesos de Docencia, Innovación, Extensión y Pro-

yección Social [5].

Actualmente, la Universidad del Atlántico cuenta con grupos y semilleros de investigación por cada facultad. Hay 24 grupos de investigación pertenecientes a la facultad de Ciencias Básicas, de los cuales 4 de ellos corresponden al programa de Matemáticas. A continuación se describen los grupos existentes, la categorización y el año de conformación del mismo.

#### 1. Grupo de Investigación de Matemáticas Aplicadas.

- Líder: Msc. Oswaldo Dede Mejía.
- Categoría COLCIENCIAS convocatoria 2011:B.
- Año de creación del grupo: 2001.
- Las líneas de investigación son: Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, Modelación matemática, Análisis aplicado y Espacios de Métricas Indefinidas.

#### 2. Grupo de Investigación de Métodos Estadísticos Aplicados.

- Líder: Msc. Svetlana Ivanovna Rudnykh.
- Categoría COLCIENCIAS convocatoria 2011: C.
- Año de creación 2002.
- Las líneas de investigación del semillero son: Inferencia no paramétrica, Estimación no paramétrica de la función de densidad, Estimación no paramétrica de la función de riesgo o razón de fallo, Selección del parámetro de suavizado, análisis exploratorio de datos, Aplicaciones de la estadística a otras ciencias, Aplicaciones del análisis de supervivencia en biología y medicina, Muestreo, Planeación y ejecución de encuestas y Tratamiento axiomático de la decisión

3. Grupo de Investigación de Sistemas Dinámicos y EDO.

- Líder: Ph.D. Jorge Rodríguez Contreras.
- Categoría COLCIENCIAS convocatoria 2011: C.
- Año de creación del grupo: 2003.
- Las líneas de investigación son: Criptografía, Didáctica de las Matemáticas, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Método de Elementos Finitos, Sistemas Dinámicos y Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Códigos, Teoría de Redes y Robótica, Topología, Teoría de Operadores y Polinomios Ortogonales.

#### 4. Grupo de Investigación de Informática y Matemáticas: INFOMAT.

- Líder: Msc. Claudia Baloco.
- Categoría COLCIENCIAS convocatoria 2011: C.
- Año de creación del grupo: 2001.
- Las líneas de investigación son: Educación Virtual, Matemáticas Computacionales, Sistemas de Computación y Teoría de la Computación.

Por otro lado, la universidad del Atlántico también cuenta con semilleros de investigación, a través de la Red ISIA, una organización adscrita a la Vicerrectoría de Investigación, Extensión y Proyección Social de la Institución, que busca el fortalecimiento de los procesos investigativos de la Universidad del Atlántico, a través de la formación de los integrantes de los diferentes semilleros. Estos semilleros son comunidades de aprendizaje al interior de los grupos de Investigación que promueven la formación investigativa de los estudiantes de pregrado y posgrado de

la Institución y brindan una formación más integral, tanto académica e investigativa, a los estudiantes vinculados a los ellos; de la misma forma la Universidad del Atlántico a través de esta red capacita a los estudiantes en la formulación y desarrollo de proyectos de investigación, fomenta una cultura investigativa en el estudiante, fortalece la capacidad de trabajar en equipo, además sensibiliza a los estudiantes frente a las necesidades del contexto global y del entorno y contribuye a la formación en áreas específicas e interdisciplinarias del conocimiento. Cada semillero consta de un coordinador, un representante y los integrantes del mismo [5].

Actualmente existen 39 semilleros de investigación correspondientes a la facultad de ciencias básicas, de los cuales 4 pertenecen al programa de matemáticas de la Universidad del Atlántico, siendo ellos:

1. Ecuaciones de Evolución de Tipo Fraccionario y Análisis Funcional, a cargo del profesor Edgardo Álvarez Pardo.

Este semillero busca la formación investigativa de sus integrantes generando así el desarrollo de sus capacidades y habilidades en el campo de la investigación logrando una participación permanente con la comunidad universitaria y desarrollando proyectos que permitan afianzar e innovar en el área del Análisis Funcional y las Ecuaciones de Evolución [5].

2. SEMI-INFOMAT, a cargo de las profesoras Sonia Valbuena Duarte y Claudia Balocco Navarro.

Este semillero tiene como finalidad desarrollar proyectos de investigación, fomentando una cultura investigativa en sus integrantes, además sensibiliza a los estudiantes fren-

te a las necesidades del contexto global y del entorno y contribuye a la formación en áreas específicas e interdisciplinarias del conocimiento matemático, la informática, sus aplicaciones y las relaciones entre estas. Se busca generar una comunidad de investigadores matemáticos que se apropien de las nuevas herramientas Computacionales para que sean capaces de entender el mundo y modelarlo a través de sus aptitudes y conocimientos en ciencias, especialmente en Matemáticas [5].

3. Sistemas Dinámicos y EDO, a cargo del profesor Jorge Rodríguez Contreras.

Contribuir con la formación en investigación científica entre los estudiantes de pregrado y postgrado de Matemáticas de la Universidad del Atlántico, en el área de Sistemas Dinámicos y EDO. Generar y ofrecer espacios de reflexión, discusión y análisis sobre los diferentes temas de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos [5].

4. Métodos Estadísticos Aplicados, a cargo de la profesora Svetlana Rdunykh.

M.E.A es una unidad investigativa del programa de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Atlántico dedicada a la generación, transformación, adaptación y aplicación de conocimiento científico y/o tecnológico en el ámbito de la estadística, probabilidad y procesos aleatorios [5].

## **DESTACADOS EVENTOS ACADÉMICOS EN LOS CUALES HEMOS PARTICIPADO: X ENCUENTRO DEPARTAMENTAL DE SEMILLEROS DE INVESTIGACIÓN REDCOLSI NODO ATLÁNTICO**



Del 29 al 31 de mayo del 2013 se llevó a cabo el X Encuentro departamental de Semilleros de Investigación de la Fundación Red Colombiana de Semilleros RedCOLSI - Nodo Atlántico, la cual es una organización no gubernamental, integrado principalmente por estudiantes de educación superior organizados en semilleros de investigación que tratan de dar cuerpo al proceso de formación de una cultura científica para todo el país. A este proceso también se han venido vinculando estudiantes y docentes provenientes de la educación básica. La RedCOLSI se divide por nodos y la Universidad del Atlántico pertenece al Nodo Atlántico. El evento fue realizado en las instalaciones de la Corporación Universitaria Reformada. El objetivo de este encuentro anual fue el de "generar un espacio dinámico e integral de socialización aprendizaje y discusión de la investigación de los semilleros para cualificar su labor, fortalecer el trabajo en red y el intercambio de actividades de formación de estudiantes investigadores."

La Red Institucional de Semilleros de la Universidad del Atlántico REDISIA, tuvo una importante participación al presentar más de 100 proyectos en las modalidades de Investigación (Propuesta, en curso, terminada) y desarrollo empre-

sarial. Además, se presentaron las experiencias de los semilleros GIPIES (Ciencias de la Educación) y KALO (Ciencias Jurídicas) [5].

En total, se socializaron más de 300 proyectos pertenecientes a las 21 instituciones vinculadas al Nodo Atlántico de la Fundación RedCOLSI. En el evento de clausura se dieron a conocer de manera preliminar los proyectos que alcanzaron el puntaje mínimo para clasificar al XVI Encuentro Nacional y X Internacional de Semilleros de Investigación, que se realizó en Montería - Córdoba del 10 al 14 de octubre de 2013. El programa de Matemáticas tuvo su participación en este evento, gracias a la socialización de proyectos de estudiantes de pregrado del programa, bajo la asesoría de calificados docentes en las respectivas áreas del conocimiento matemático; fueron un total de 9 estudiantes que representaron al programa de Matemáticas de los cuales dos obtuvieron calificación meritoria y por tanto clasificaron al Encuentro Nacional de Semilleros de Investigación, el cual se realizó en la ciudad de Córdoba.



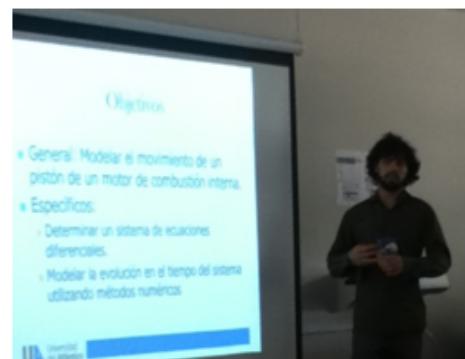
Estudiantes del programa de Matemáticas, UA, asistentes al X Encuentro de Semilleros de investigación de la Red Colombiana de Semilleros de investigación.



Mención MERITORIA, para María Angélica Serje Arias, con el proyecto de investigación Modelado del movimiento de un aeroplano como un cuerpo rígido, del grupo de investigación Sistemas Dinámicos y EDO.



Otros estudiantes que participaron en el Encuentro regional de Semilleros de Investigación de la REDCOLSI: Juan Carlos Sánchez Molina, Luis Ricardo Siado, Johan Manuel Osorio Romero, Pedro Claret, Boris Reyes Cassiani, Álvaro Farith Muñoz Fonseca y Jesús De la Vega, del grupo de investigación Sistemas Dinámicos y EDO.

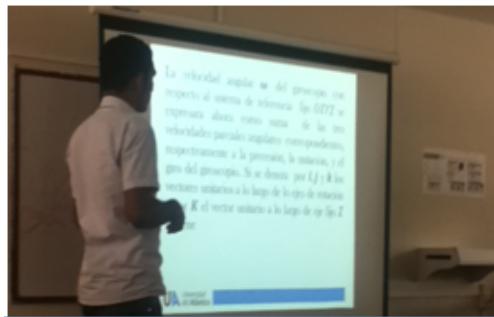


Mención MERITORIA para Diana Carolina Roca Arroyo, Proyecto de investigación: Simulación numérica por MDF para la solución de la ecuación diferencial que modela el flujo de contaminantes de un acuífero, del grupo de investigación INFOMAT.

Pedro Claret, estudiante de Intercambio, Argentina.



Boris Reyes Cassiani y Johan Manuel Osorio Romero.



Álvaro Farith Muñoz Fonseca.

### ESCUELA DE MATEMÁTICAS DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE EMALCA 2013



La EMALCA es la Escuela de Matemáticas de América Latina y del Caribe, creada por la II Asamblea General de la Unión Matemáticas de América Latina y el Caribe (UMALCA), en el año 1998.

Su objetivo principal es el de contribuir al desarrollo de las Matemáticas en todas las regiones del continente, poniendo a los jóvenes estudiantes en contacto con temas relevantes de interés actual y estimulando a los más destacados a continuar estudios de posgrado.

Este importante evento reúne la participación de estudiantes locales, de países vecinos y más distantes. Las actividades de la EMALCA están dirigidas principalmente a estudiantes finales de cursos de grados o iniciales de maestría y tienen por lo general dos etapas básicas [2]:

1. Cursos (como mínimo dos) de por lo menos dos semanas de duración, dictados por notorios especialistas de sus respectivas áreas.
2. Informes de los docentes y del responsable, sobre los alumnos y su posible orientación para estudios posteriores.

En el marco académico de este año, gracias a la colaboración del Centro Internacional de Matemáticas Puras y Aplicadas (CIMPA) y a la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA), la EMALCA Colombia 2013 se realizó en las instalaciones de la Universidad del Atlántico, en la ciudad de Barranquilla del 12 al 24 de agosto, cuya apertura oficial tuvo lugar en el teatro José Consuegra Higgins de la universidad Simón bolívar [1].



Apertura oficial de la Emalca



Intervención del Dr. Luis Carlos Gutiérrez, decano de la Facultad de Ciencias Básicas, en la apertura de la EMALCA

El evento estuvo bajo la dirección de los coordinadores el Dr. Jorge Rodríguez Contreras, Universidad del Atlántico, Colombia y el profesor Alejandro Uriel Guerrero, Universidad del Atlántico, Colombia - Universidad Simón Bolívar, Venezuela y cuyo comité organizador estaba conformado por [1]:

- **José de La Hoz**, Universidad Simón Bolívar, Colombia.

- **Profesores y estudiantes del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Atlántico.**

El comité científico de esta versión de la EMALCA Colombia 2013 estuvo conformado por destacados especialistas como [1]:

- **Dr. Rafael Labarca**, Universidad de Santiago de Chile.
- **Dr. Francisco Marcellán**, Universidad Carlos III de Madrid, España.
- **Dr. Alfonso Castro**, Harvey Mudd College.Clarémont-California, EEUU.
- **Dr. Jorge Cossio Betancur**, Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.
- **Dr. Carlos Di Prisco**, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Venezuela.
- **Dra. Yamilet Quintana**, Departamento de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
- **Dr. Rafael Oswaldo Ruggiero**, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil.
- **Dr. Neptalí Romero**, Departamento de Matemáticas, Decanatura de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Venezuela.
- **Dr. José Manuel Rodríguez**, Universidad Carlos III de Madrid, España.
- **Dr. Herbert Dueñas**, Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá.
- **Dra. Carmen Judith Vanegas**, Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
- **Dr. Primitivo Acosta Humánez**, Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.



Comité científico y organizador del evento

Dentro del evento se realizaron conferencias. La conferencia inaugural estuvo a cargo del Dr. Rafael Labarca (Universidad de Santiago de Chile).



**Dr. Rafael Labarca**, Universidad de Santiago de Chile. Conferencia Inaugural.

Entre otras de las cuales destacamos:

- Plenaria sobre Superficies con Curvatura Negativa y sus Geodésicas [1], a cargo del **Dr. José Manuel Rodríguez** de la Universidad Carlos III de Madrid, España.

En esta conferencia se mostró que es posible descomponer toda superficie Riemanniana (completa y orientable) como la unión de solamente tres tipos de piezas o bloques básicos, dando una precisa descripción tanto de la sencilla estructura de dichas piezas como de la forma en que pueden "pegarse" para construir la superficie.



Plenaria sobre Superficies con Curvatura Negativa y sus Geodésicas. **Dr. José Manuel Rodríguez**, Universidad Carlos III de Madrid, España.



**Dr. José Manuel Rodríguez** y estudiantes de matemáticas de la universidad del atlántico. Plenaria sobre la Estructura Geométrica de las Superficies Riemannianas.

- Plenaria sobre los Métodos Galoianos en Ecuaciones Diferenciales [1], a cargo del **Dr. Primitivo Acosta Humánez** de la Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.

En esta conferencia se realizó un breve recorrido por la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales, haciendo un paralelo entre la teoría de Galois clásica y la versión diferencial establecida por Picard y Vessiot. Seguidamente se presentaron algoritmos que permiten resolver ecuaciones diferenciales tales como el algoritmo de Kovacic y la algebrización, los cuales se basan en los grupos de Galois de tales ecuaciones y finalmente se presentaron algunas aplicaciones

de la teoría de Galois diferencial en sistemas dinámicos y en física matemática.

- Plenaria sobre las Estructuras Algebráicas en Ecuaciones Diferenciales Parciales Relacionadas con el Análisis Complejo [1], a cargo de la **Dra. Carmen Judith Vanegas**, de la Universidad Simón Bolívar, Venezuela.

La conferencia tuvo como fin mostrar la generalización de los métodos del análisis complejo a dimensiones mayores, teniendo en cuenta el concepto de álgebras de Clifford que generaliza el cuerpo de los números complejos. Se trataron las álgebras tipo Clifford dependiendo de parámetros y algunos resultados recientes del correspondiente análisis de Clifford.

- Plenaria sobre Perturbaciones de Polinomios Ortogonales en Varias Variables [1], a cargo del **Dr. Herbert Dueñas** de la Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá.

Aquí se realizó una importante presentación de algunas perturbaciones de funcionales lineales asociados a polinomios ortogonales en una variable y extendidas estas perturbaciones a sucesiones de polinomios ortogonales de varias variables, también se presenta una fórmula de conexión entre los polinomios ortogonales de varios variables asociados a la medida  $\mu$  y los polinomios perturbados.

Durante este evento como es usual se realizaron cursos que abordaron temas relevantes de gran interés por la comunidad matemática.

Cursos realizados durante la EMALCA, Colombia 2013:

1. Introducción al Estudio de Problemas de Frontera para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias [1].

Este curso estuvo a cargo del **Dr. Alfonso**

**Castro**, perteneciente al Department of Mathematics, Harvey Mudd College. El desarrollo de este curso estuvo orientado en demostrar propiedades de existencia, unicidad y dependencia continua de soluciones a problemas de valor inicial regulares y singulares utilizando conceptos básicos de análisis matemático con el fin de establecer la existencia de soluciones para problemas de frontera tanto de ecuaciones diferenciales ordinarias como de soluciones radiales para ecuaciones diferenciales elípticas.

Los objetivos de este curso fueron:

- Entender el papel de la complez en espacios métricos para la existencia de puntos fijos.
- Aprender a utilizar el teorema de valor intermedio para encontrar soluciones a problemas de frontera.
- Comprender el uso de la energía y la iden-tidad de Pohozaev.
- Lectura independiente de artículos recien-tes.



Curso: Introducción al Estudio de Problemas de Frontera para Ecuaciones Diferenciales Ordina-rias. **Dr. Alfonso Castro**.

## 2. Aproximación Polinomial y Ortogonalidad Estándar Sobre la Recta [1].

Este curso estuvo a cargo de la **Dra. Yamilet Quintana**, perteneciente al Departamento

de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar, Venezuela. El desarrollo de este curso estuvo orientado hacia dos cosas, pri-meramente que el participante adquiriera el conocimiento de dos corrientes existentes para estudiar la aproximación de funciones, la cualitativa y la cuantitativa, cada una con sus condiciones y fundamentos ma-temáticos respectivos, haciendo un especial énfasis en la corriente cualitativa cuando se presenta el caso en que  $X$  es el espacio de los polinomios con coeficientes reales; y como segunda parte estudiar las propiedades algebráicas y analíticas de las familias de polinomios ortogonales estándar sobre la recta, tema que ha resurgido en las últimas décadas y en el cual se ha venido realizan-do, desde diferentes contextos, un intenso trabajo de investigación.

Los objetivos de este curso fueron:

- Estudiar, de manera general, algunos resultados y métodos clásicos de aproxima-ción de funciones a variable real.
- Presentar propiedades algebráicas y analíticas de las familias de polinomios ortogonales estándar sobre la recta.
- Presentar distintas nociones de conver-gencia de desarrollos de series de Fourier de sistemas de polinomios ortogonales estándar, en particular los asociados a me-didas soportadas en intervalos compactos.

## 3. Introducción al estudio de las geodésicas en Superficies [1].

Este curso estuvo a cargo del **Dr. Rafael Os-waldo Ruggiero**, perteneciente a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil. El desarrollo de este curso estuvo dividido en dos partes, una primera parte estuvo orientado en tratar geodésicas en superficies del espacio Euclidian, donde

es posible transmitir una intuición física y geométrica más palpable de estos objetos, y la segunda parte en tratar geodésicas en superficies abstractas, con la propiedad de ser globalmente minimizantes (el equivalente variacional en superficies Riemannianas de las rectas euclídeas y las geodésicas hiperbólicas) con ejemplos diferentes al plano Euclíadiano de superficies que poseen estas geodésicas: plano hiperbólico y superficies de revolución en el toro.

Los objetivos de este curso fueron:

- Demostrar resultados básicos e importantes de la teoría de las geodésicas en superficies que no se mencionan normalmente en los cursos regulares de geometría.
- Demostrar que una superficie en el espacio Euclíadiano cuyas geodésicas son todas curvas planas es de hecho un subconjunto de una esfera redonda o de un plano, usando como herramientas para demostrar este resultado el cálculo diferencial en varias variables.
- Demostrar el famoso resultado de Heddlund: el levantamiento en el recubrimiento universal de toda geodésica globalmente minimizante de una métrica Riemanniana en el toro es sombreada por una recta Euclídea en el plano.

#### 4. Una introducción a la Geometría Fractal [1].

Este curso estuvo a cargo del **Dr. Neptalí Romero**, perteneciente al Departamento de Matemáticas, Decanatura de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Venezuela. El desarrollo de este curso introductorio sobre Geometría Fractal estuvo basado principalmente en introducir nociones y propiedades de sistemas dinámicos discretos de algunos conceptos de dimensión fractal.

Los objetivos de este curso fueron:

- Introducir importantes conceptos y resultados básicos relacionados con la Geometría fractal. Se hará en los sistemas iterativos de funciones como herramienta para la construcción de conjuntos con estructura fractal.
- Presentar las ideas elementales de algunos conceptos de dimensión fractal (dimensión caja y de Hausdorff).



**Dr. Neptalí Romero, Dra. Yamilet Quintana,** estudiantes de matemáticas de la Universidad del Atlántico. Curso: Introducción a la geometría Fractal

La realización de la EMALCA también contó con el apoyo de universidades como la Universidad Simón Bolívar, Universidad del Sinú, Universidad del Magdalena, entre otras. Dentro del evento cabe destacar también que muchos de los estudiantes y asistentes participantes en el encuentro, en su gran mayoría de la universidad del Atlántico, fueron patrocinados por la EMALCA para asistir al EIMAT, encuentro que se realizaba simultáneamente en la segunda semana del desarrollo de la EMALCA, con respecto al pago de inscripciones, así como estudiantes de países vecinos, quienes también recibieron una ayuda económica para gastos de viajes y estadía durante el evento, tales es el caso de los estudiantes Melany Echeverría y Federico Hernández, provenientes de Venezuela, quienes estuvieron be-

cados por la EMALCA para asistir al evento.

Este destacado evento no solo proporcionó un ambiente académico y matemático competente sino que generó en muchos de los participantes grandes expectativas sobre posibilidades de continuar estudios de maestría y doctorado en muchas instituciones de prestigio y calidad académica, así como para la gran mayoría del comité científico que participo notaron el gran potencial estudiantil y ambientes propicios para compartir conocimientos con el fin de aportar desarrollo al campo de las matemáticas.

Igualmente, el próximo año tendremos el desarrollo de la EMALCA versión 2014, por lo cual invitamos a toda la comunidad estudiantil y a todos los docentes y especialistas a que participen y asistan a la próxima versión de este evento el cual tiene como gran finalidad contribuir al desarrollo de las Matemáticas en todas las regiones del continente, especialmente en América central y el Caribe, propiciando espacios de grandes conocimientos y experiencias de calidad académica, así como incentivar a muchos jóvenes a seguir avanzando en su desarrollo personal y profesional.



**Dr. Gabriel Vergara**, miembro del comité organizador y estudiantes de matemáticas de la Universidad del Atlántico, EMALCA 2013.

## IX ENCUENTRO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS EIMAT 2013



El Encuentro Internacional de Matemáticas, es un evento académico que se ha realizado desde el año 2004, teniendo como sede de realización la Universidad del Atlántico. El encuentro tiene un sentido amplio académico y está dirigido a estudiantes, profesores e investigadores que trabajan en algún campo de las Matemáticas, bien sea dentro de la teoría, la práctica o la enseñanza. Este año, la IX versión del EIMAT 2013 se realizó del 20 al 23 de agosto y contó con la participación de ponentes nacionales e internacionales [3].

El EIMAT lo integra una amplia lista de conferencias, cursillos, ponencias en las cuales estudiantes y profesores comparten y exponen sus conocimientos en diferentes áreas de las matemáticas y áreas afines con el fin de que los estudiantes participen activamente y adquieran conocimiento de temas de interés actuales sobre el desarrollo de las matemáticas y sus aplicaciones. La amplia lista de temas socializados permite a los estudiantes asistir a los cursillos y ponencias de su interés académico, dictados por grandes especialistas en el área. El encuentro reunió la asistencia y participación de muchos jóvenes y estudiantes de diferentes carreras universitarias, e instituciones académicas tales como Universidad Simón Bolívar, la Corporación Universitaria CUC Y la Universidad del Atlántico como sede anfitriona del evento, entre otras.



Asistentes al evento

El evento fue inaugurado por la Conferencia sobre **Una visión crítica de la investigación en Educación Matemática, desde la óptica de la problemática latinoamericana**, a cargo del **Dr. Walter Beyer**, U. Nacional Abierta-IPC, Venezuela, un espacio donde se debatió y compartió el desarrollo de la investigación matemática visto desde varios puntos de vista. Dentro de la amplia lista de 19 cursillos desarrollados durante el evento destacamos [4]:

- **Cursillo** El problema de Cauchy Fraccionario. **Dr. Carlos Lizama.** Universidad de Santiago de Chile, Chile.
- **Cursillo** Límite de funciones reales, **Dr. Orlando Garía.** Universidad de Oriente, Venezuela.
- **Cursillo** Geometría de curvas y superficies. **Mcs. Richard Malavé.** Universidad Politécnica Territorial del Oeste de Sucre Clodos baldo Russian, Venezuela.
- **Cursillo** Caracterización de los conjuntos-cerrados generalizados. **Dr. Ennis Ro-**

**sas.** Universidad de Oriente, Venezuela-Universidad del Atlántico, Colombia.

- **Cursillo** Números Complejos elípticos. **Dra. Carmen Judith Vanegas.** Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
- **Cursillo** Nociones básicas del cálculo y sus generalizaciones. **Dr. Carlos Carpintero.** Universidad de Oriente, Venezuela-Universidad del Atlántico, Colombia.

También una amplia lista de 43 ponencias de las cuales destacamos [4]:

- Problemas de valores iniciales de sistemas de primer orden en el plano con funciones iniciales holomorfas en los números complejos elípticos. **Dra. Carmen Judith Vanegas.** Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
- Sobre un problema tipo Burgers. **Dr. Christian Rojas.** Universidad del Atlántico, Colombia.
- Operadores de toeplitz angulares en espacios de bergman sobre el semiplano superior. **Msc. Kevin Esmeral.** CINVESTAV, México.
- Multifunciones faintly  $\omega$ -continuas. **Dr. Ennis Rosas.** Universidad de Oriente, Venezuela-Universidad del Atlántico, Colombia.
- sobre los espacios normales. **Dr. Carlos Carpintero.** Universidad de Oriente, Venezuela- Universidad del Atlántico, Colombia.
- Construcción de marcos finitos a través de un operador lineal en espacios de métrica indefinida. **Msc. Osmín Ferrer, Kevin Esmeral, Germán Escobar.** Universidad Surcolombiana, Colombia-CINVESTAV-IPN México.

- Formulación variacional para el contacto entre dos membranas elásticas. **Msc. Jorge Robinson, M.Sc Oswaldo Dede.** Universidad del Atlántico, Colombia.

En especial la ponencia dictada por la estudiante X semestre de matemáticas de la Universidad del Atlántico **Laura Rúa** con el **Teorema de Gauss Markov en el caso de la violación del supuesto de homocedasticidad**. Bajo la dirección de su tutora **Msc. Svetlana Rudnykh**, Universidad del Atlántico, Colombia. Así como ponencias orientadas hacia la enseñanza y educación en matemáticas, de los cuales resaltamos [4]:

- Problemas realistas versus problemas vestidos en textos de matemáticas. **Dr. Walter Beyer.** Universidad Nacional Abierta-IPC, Venezuela.
- Etnomodelagem: Matematizando Prácticas Matemáticas. **Dr. Milton Rosa.** Centro de educação Aberta e a Distância Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil.
- Costo Primo Vs Producción requerido. El software GeoGebra como herramienta en la enseñabilidad y su interpretación con el Cálculo Diferencial. **Diana Gaviria, Juan Arango.** Instituto Tecnológico de Antioquia (TdeA), Instituto Tecnológico de Medellín (ITM), Colombia.
- As Abordagens Émica, Ética e Dialética no Campo de Pesquisa da Etnomodelagem. **Dr. Daniel Clark Orey.** Centro de educação Aberta e a Distância Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil.

El desarrollo del evento contó también con un espacio donde un grupo de 13 estudiantes de la Universidad del Atlántico pudieron socializar sus trabajos de grado por medio de posters y ponencias realizadas por ellos mismos bajo la asesoría de sus respectivos tutores. Un espacio donde quedó demostrada la excelencia de la formación académica de los estudiantes por parte del cuerpo de profesores de la Universidad del Atlántico y el gran trabajo en conjunto que se viene realizando en la contribución del desarrollo de las matemáticas.

Los temas socializados mediante posters durante el desarrollo del evento abarcaron variados temas, en el área de la didáctica y enseñanza de las matemáticas, presentaron los estudiantes de la especialización en didáctica de las matemáticas Eliana Orozco y Margarita Maduro, Heydi Minas, Karold Vazquez, Imelda Santiago en la modalidad de posters [4]:

1. El taller y los mapas conceptuales como estrategias metodológicas para posibilitar el aprendizaje significativo en la resolución de problemas en 9. Por **Elvis Soler**, especialista del programa de Didáctica de las Matemáticas, UA.
2. Fortalecimiento del pensamiento lógico matemático a través de resolución de problemas, por **Karold Vázquez**, e **Imelda Santiago**.
3. Reorientación del currículo de matemáticas con el objeto de incrementar la calidad en el área en el Departamento del Atlántico.



Poster: Reorientación del currículo de matemáticas con el objeto de incrementar la calidad en el área en el Departamento del Atlántico, a cargo de los estudiantes de especialización en didáctica de la matemática **Margarita Maduro, y Eliana Orozco.**

4. Ambientes de Aprendizaje para favorecer el desarrollo de una cultura matemática, por **Heydi Minas.**

Por otro lado, también se presentaron temas de la matemática aplicada a la física, con la participación de los estudiantes del programa de física. Larry Teherán y Oscar Babilonia [4].

5. Estudio numérico de la propagación de ondas electromagnéticas 2-D por FDTD por **Larry Teherán.**

6. Optimización de parámetros para el modelado de un problema de difusión del calor, por **Oscar Babilonia.**

Así como los estudiantes del pregrado de Matemáticas: Amy Toscano Esmeral, Diana C. Roca Arroyo, Estefanny Ruiz González, María Angélica serge y estudiantes de maestría en matemáticas como Pedro Hernandez y Luis del Valle, cada uno con sus respectivos posters [4]:

7. La transversal de Schreier, por **Amy Toscano Esmeral.**



Amy toscano esmeral, estudiante de matemáticas de la Universidad del Atlántico

8. Solución por MDF de la ecuación diferencial que modela el flujo de contaminantes de un acuífero, por **Diana C. Roca Arroyo.**



Diana C. Roca Arroyo, estudiante de matemáticas de la Universidad del Atlántico.

9. Sobre conjuntos  $S_h$  de vectores binarios y códigos lineales. Por **Estefanny Ruiz González.**



Estefanny Ruiz González, estudiante de matemáticas de la Universidad del Atlántico

10. Modelado del movimiento de un aeroplano como un cuerpo rígido, por **María Angélica Serge**.
11. Problema parabólico con coeficiente de difusión discontinuo por **Luis del Valle**.
12. Polinomios Ortogonales de Jacobi - Algunas propiedades, por **Pedro Hernández**.

## PROGRAMACIÓN EVENTOS ACADÉMICOS 2014

X EIMAT 2014, Encuentro Internacional de Matemáticas, versión 2014, organizado por el programa de Matemáticas UA.



ESCUELA DE MATEMÁTICA DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE- EMALCA- versión 2014, organizada por EMALCA- UMALCA y el programa de Matemáticas UA.



REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA-RELME, organizada por el CLAME y el programa de Matemáticas UA.



Por lo cual invitamos a toda la comunidad estudiantil, a todos los estudiantes, docentes investigadores y especialistas a participar y asistir donde sin duda serán encuentros que continuarán en la misión que se ha trazado el programa como es crear los espacios para promulgar, incentivar y difundir el conocimiento matemático en pro del desarrollo y avance del mismo.

## Referencias

- [1] Programa de Matemáticas de la Universidad del Atlántico (2013). Escuela de Matemáticas de América Latina y del Caribe. Citado 28 Noviembre de 2013, desde <http://www.emalcacolombia.co/>.
- [2] Unión Matemática de América Latina y del Caribe. Citado 28 Noviembre de 2013, desde <http://www.umalca.org/web/>.
- [3] Programa de Matemáticas de la Universidad del Atlántico (2013). Encuentro Internacional de Matemáticas. Citado 28 Noviembre de 2013, desde <http://www.matua.co/index.php/84-noticias-del-programa/109-realizacion-del-eimat-2013>.
- [4] Departamento de Matemáticas, Facultad de ciencias básicas de la Universidad del Atlántico.
- [5] Página oficial de la Universidad del Atlántico, sección investigaciones. Citado 03 diciembre de 2013, desde [www.uniatlantico.edu.co](http://www.uniatlantico.edu.co).