TELJES FV. VIZSGÁLAT

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x}}$$

1. **ÉT**: $x \in R$; $x \neq 0$; $x \neq -1$

2. **ÉK**: $y \in R$ ~~...~~ ← vázlat alapján

3. **folytonosság**: folytonos kivéve $x = 0$ és $x = -1$-ben ahol szakadási helye van:

$\boxed{x=0}$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x} = \lim_{x \to 0+} \frac{2-x}{x^2+x} = \text{"}\frac{2}{0+}\text{"} \mapsto \infty$$

másodfajú nem megszüntethető

$$\lim_{x \to 0-} \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x} = \text{"}\frac{2}{0-}\text{"} = -\infty$$

$\boxed{x=-1}$

$$\lim_{x \to -1+} \frac{2-x}{x^2+x} = \text{"}\frac{3}{0+}\text{"} = \infty$$

— " —

$$\lim_{x \to -1-} \frac{2-x}{x^2+x} = \text{"}\frac{3}{0-}\text{"} = -\infty$$

(**paritás**: nem páros, nem páratlan

periodikusság: nem periodikus)

3. **határértékek**: szakadási helynél és ÉT szélein

korlátosság: nem korlátos

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{3}{1+x}}_{\to 0} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{2-x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x^2+x}_{\to \infty}} \xrightarrow{LH'} \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\underbrace{2x+1}_{\to \infty}} = \text{"}-0\text{"}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2-x}{x^2+x} \xrightarrow{LH'} \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\underbrace{2x+1}_{\to -\infty}} = \text{"}0\text{"}$$

4. **monotonitás**

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1+x)^2} \cdot 1$$

$$f'(x) = 0 = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1+x)^2}$$

$$\frac{-2(1+x)^2 + 3x^2}{x^2(1+x)^2} = 0 \quad \Big/ \cdot x^2 \quad / \cdot (1+x)^2$$

$x \neq 0$, $x \neq -1$ miatt leonthatók

$$3x^2 - 2(1 + 2x + x^2) = 0$$

$$\cancel{3x^2 - 2x^2} - 4x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \begin{cases} 2 + \sqrt{6} \approx 4{,}449 \\ 2 - \sqrt{6} \approx -0{,}449 \end{cases}$$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<2-\sqrt{6}$	$x=2-\sqrt{6}$	$2-\sqrt{6}<x<0$	$x=0$	$0<x<2+\sqrt{6}$	$x=2+\sqrt{6}$	$x>$
$f'(x)$	+	X	+	0	−	X	−	0	+
$f(x)$	↗	n.h	↗	lokális max	↘	n.h	↘	lokális min	↗
	1.		2.		3.		4.		5.

1. x legyen −2 :

$$f'(x) = \frac{3}{(1+x)^2} - \frac{2}{x^2} \longrightarrow \frac{3}{(-1)^2} - \frac{2}{(-2)^2} = 3 - 1 = 2 \quad +$$

2. $x = -0{,}5$ $\quad \frac{3}{0{,}25} - \frac{2}{0{,}25} = \frac{1}{0{,}25} \quad +$

3. $x = -0{,}2$ $\quad \frac{3}{0{,}64} - \frac{2}{0{,}04} = -45{,}3125 \quad -$

4. $x = 1$ $\quad \frac{3}{4} - \frac{2}{1} = -\frac{5}{4} \quad -$

5. $x = 9$ $\quad \frac{3}{100} - \frac{2}{81} = \frac{43}{8100} \quad +$

$f(2-\sqrt{6}) = -9{,}89\ldots$

$P_{\substack{max \\ loc}}(2-\sqrt{6}, -9{,}89)$

$f(2+\sqrt{6} = -0{,}10\ldots$

$P_{\substack{min \\ loc}}(2+\sqrt{6}, -0{,}10)$

(– azért lokális max/min mert szélsőértékben $\pm\infty$-be tart.)

5. konvexitás

$$f(x)'' = (f'(x))' = \left(\frac{3}{(1+x)^2} - \frac{2}{x^2}\right)' = (-2)\left(\frac{3}{(1+x)^3} \cdot 1\right) + 2 \cdot \frac{2}{x^3}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$f''(x) = 0 = \frac{4}{x^3} - \frac{6}{(1+x)^3} \qquad x \neq 0,\ x \neq 1$$

$$4(1+x)^3 - 6 \cdot x^3 = 0$$

$$4 + 12x + 12x^2 + 4x^3 - 6x^3 = 0$$

$$-2x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$-x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$x = 2 + 2^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \approx 6{,}9102$$

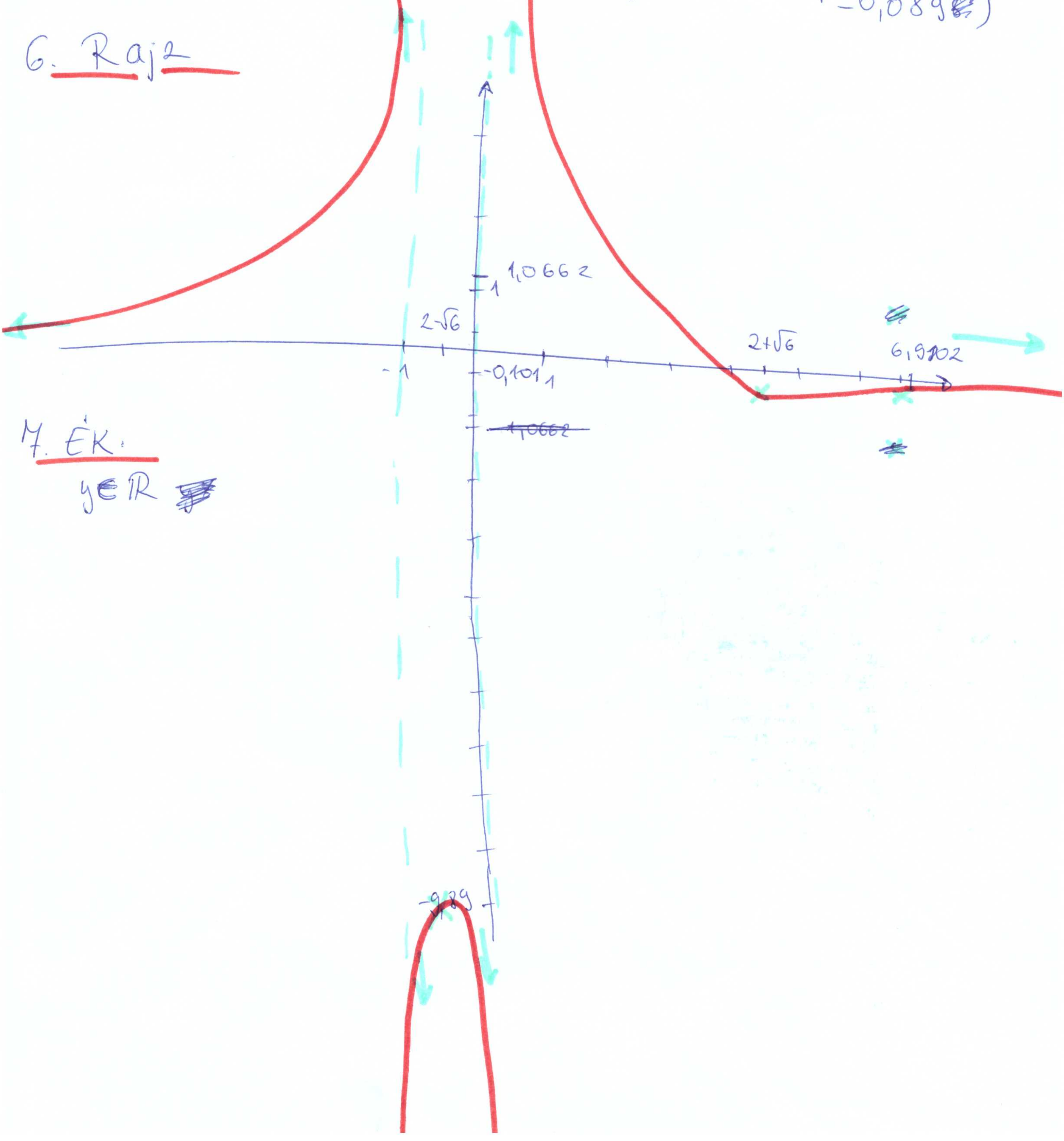
x	<-1	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<6{,}912$	$6{,}9102$	$6{,}9102<$
$f''(x)$	+	×	−	×	+	0	−
$f(x)$	∪	−	∩	−	∪	↑	∩

inflexiós pont

$f(6{,}9102) \approx -0{,}08989$ ~~1,0662~~

$P_{inf}(6{,}9102 \,;\, -0{,}0898)$ ~~1,0662~~

6. Rajz



7. ÉK:

$y \in \mathbb{R}$