Állománynév: aramkorok_04fourier22.pdf

Irodalom: Előadó jegyzetei: http://users.itk.ppke.hu/∼kolumban/aramkorok/

Fodor Gy., „Hálózatok és rendszerek," Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2004, pp. 210-216, 235-248.

4. ANALÍZIS A FREKVENCIATARTOMÁNYBAN: A FOURIER SOR ÉS A FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ

Érvényesség és alkalmazás:

- Lineáris (szuperpozició érvényes), időinvariáns, koncentrált paraméterű áramkörök, rendszerek és hálózatok esetén alkalmazható
- Mivel a kezdeti feltételek nem vehetők figyelembe, csak állandósult állapotú hálózatok és rendszerek vizsgálatára alkalmas
- A gerjesztéseket szinuszos jelek lineáris kombinációjaként/integráljaként állítjuk elő
- Frekvenciatartománybeli vizsgálatra alkalmas, leginkább a híradástechnikában és jelfeldolgozásban alkalmazzuk

Áramkör $\Longrightarrow$ Egyszerűsített áramkör		
$\Downarrow$ Matematikus		$\Downarrow$ Mérnök
Időtartomány		**Transzformált-tartomány**
$\Downarrow$ Lineáris rendszer $\downarrow$ Differenciál egyenlet $\downarrow$ Diff. egy. megoldása $\downarrow$ Válaszjel	$\Longrightarrow$ Transzformáció Matematikus $\Longleftarrow$ Inverz transzformáció	$\Downarrow$ Transzformált rendszer (Pl. impedancia) $\downarrow$ Algebrai egyenlet $\downarrow$ Algebrai módszerek $\downarrow$ Megoldás a transzformált tartományban

Mit tettünk az egyszerű megoldhatóság (algebrai egyenletek) érdekében?

- **Korlátoztuk** a gerjesztéseket az következő függvényosztályokra: 1. DC gerjesztések 2. AC gerjesztések

Vedd észre, a komplex exponenciálisok a lineáris, állandó együtthatós, közönséges differenciál egyenletek (LTI rendszerek) sajátfüggvényei

$$Ae^{st} \qquad \frac{d}{dt}\left(Ae^{st}\right) = sAe^{st} \qquad \frac{d^n}{dt^n}\left(Ae^{st}\right) = s^n Ae^{st}$$

A Kirchhoff egyenletek alapján felírt rendszerjellemző differenciál egyenlet:

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = b_m\frac{d^mx}{dt^m} + \cdots + b_0x$$

ahol $x(t)$ a gerjesztés és $y(t)$ a válaszjel

Ha a gerjesztésket korlátozzuk a komplex exponenciálisok függvényosztályára, akkor (i) mind a tranziens, (ii) mind az állandósult állapot felírható komplex exponenciálisokkal, amelyek a differenciál egyenletek **sajátfüggvényei**

A színuszos gerjesztések szuperpozicióval állíthatók elő:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + \left(e^{j\omega t}\right)^*\right]$$

Analóg rendszerek analízisének mérnöki módszere

ÁRAMKÖRI OLDAL

1. Matematikai modell: **Differenciál egyenlet**
2. **Impedancia** módszer bevezetése
   - Diff. egy. helyett **algebrai egyenlet**
   - **Átviteli függvények**
3. Impedancia módszer csak akkor használható, ha **korlátozzuk a gerjesztéseket** a komplex exponenciálisok osztályára

GERJESZTÉSEK OLDALA

1. **Tetszőleges gerjesztés**
2. Lineáris rendszer => **szuperpozíció**
3. **Szinuszos bázis** függvények:
   - Fourier sor
   - Fourier transzformáció

Szinuszos gerjesztés esete (Rövid ismétlés):

Állandósult állapotú, LTI hálózatok AC analízise (a követendő eljárás pontokba szedve):

1. Különböző frekvenciás gerjesztések esetén szuperpozició az időtartományban (Egyszerre csak egy gerjesztő frekvenciához tartozó generátorok hatását vizsgáljuk)
2. Az azonos frekvenciájú gerjesztésekhez hozzárendeljük valamennyi jel komplex amplitúdóját
3. A kapcsolási rajz alapján felírjuk a valamennyi frekvenciára érvényes, és a ki- és bemenetek közti kapcsolatot megadó impedanciát, admittanciát vagy frekvenciaválasz függvényt
4. Komplex mennyiségek szorzataként előállítjuk a válasz komplex amplitúdóját
5. Inverz transzformációval visszatérünk az időtartományba, és ha kell a választ az egyes gerjesztő frekvenciák lineáris kombinációjaként állítjuk elő

Állandósult állapotú AC analízis feltételei:

- Lineáris hálózat
- Gerjesztőfüggvényeket a végtelen hosszú szinuszos függvényekre korlátozzuk
- Állandósult állapotú $\Longrightarrow$ tranzienst nem vizsgál!!!

A módszer alkalmazható minden olyan jelre, amely előállítható végtelen hosszú szinuszos jelek lineáris kombinációjaként

Vannak ilyen jelek? Igen, a PERIÓDIKUS JELEK

4.1. Periódikus jelek Fourier sora

4.1(a) A PERIÓDIKUS JEL DEFINICIÓJA

Az $x(t)$ analóg jelet periódikusnak nevezzük, ha létezik $T > 0$ amelyre

$$x(t+T) = x(t) \quad \forall t - \text{re}$$

A T_0 alapperiódus az a legkisebb pozitív T, amelyre a fenti egyenlet teljesül

Az alapfrekvencia definiciója

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

4.1(b) PERIÓDIKUS JELEK FOURIER SOROS REPREZENTÁCIÓJA

- Valamennyi periódikus jel reprezentálható egy végtelen tagszámú Fourier sorral
- A kellően kis teljesítményű tagokat elhanyagoljuk és véges hosszúságú Fourier sorokkal számolunk
- A Fourier soros analízis során mindig az alábbi periódikus jelet vizsgáljuk:

$$x(t+T_0) = x(t)$$

A Fourier sor trigonometrikus alakja

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad \text{ahol} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

A Fourier együtthatók értéke

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \qquad \text{és} \qquad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

Fourier sor mérnöki (harmonic form) alakja

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$$

A Fourier együtthatók értéke a

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \qquad \text{és} \qquad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

kifejezésekből, az alábbi összefüggésekkel számítható

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \qquad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \text{és} \qquad \theta_k = \tan^{-1}\frac{b_k}{a_k}$$

Vedd észre:

- C_k és θ_k a k-ik harmonikus komponens amplitúdóját és fázisát adja meg
- Komplex amplitúdó: $V = V_{eff} \exp(j\theta) \quad \Longrightarrow \quad V_k = \frac{C_k}{\sqrt{2}} \exp(j\theta_k)$
- A mérnöki alak közvetlenül kombinálható az állandósult állapotú AC hálózatok analízisére kidolgozott megoldással

Periódikus gerjesztésekre adott válasz meghatározása a mérnöki alak alapján:

1. A periódikus meghajtó jelet mérnöki alakban adott Fourier sorral reprezentáljuk az időtartományban

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$$

2. A kapcsolási rajz alapján felírjuk a valamennyi frekvenciára érvényes, a ki- és bemenetek közti kapcsolatot megadó impedanciát, admittanciát vagy frekvenciaválasz függvényt
3. Az egyes harmónikus frekvenciákon meghatározzuk a hálózat átvitelének abszolút értékét és fázisát

$$H(jk\omega_0) = |H(jk\omega_0)| \angle H(jk\omega_0)$$

4. Felírjuk a válaszjelet az időtartományban

$$y(t) = H(0)\,C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{|H(jk\omega_0)|\,C_k}_{} \cos\left[k\omega_0 t \underbrace{-\theta_k + \angle H(jk\omega_0)}_{}\right]$$

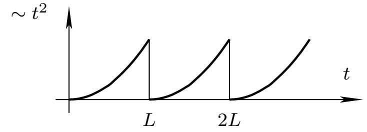
Vedd észre: Egyszerűsítés végett nem tüntettük fel a komplex amplitúdok használatát

4.1(b) PERIÓDIKUS JELEK FOURIER SOROS ELŐÁLLíTÁSA

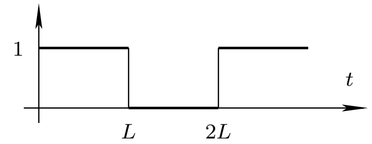
Fourier soros reprezentációk animációja

http://www.physics.miami.edu/∼nearing/mathmethods/animations.html

L periódusú, t^2 típusú jel



$2L$ periódusú, négyszöghullám

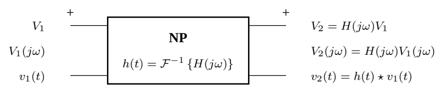


4.2. Tetszőleges jelek: A Fourier transzformáció

Impedancia koncepció lényege: válasz kompl. ampl. = frekvenciaválasz fgv. × gerjesztés kompl. ampl.

- **Kérdés:** Kiterjeszthető a Fourier sorra alapozott vizsgálat a tetszőleges jelekre is?
- **Válasz:** Igen, a Fourier transzformációval az analízis a **frekvencia tartományba** tehető át

Tetszőleges LTI hálózat kimenete



ahol:
- $h(t)$ az LTI hálózat $\delta(t)$ Dirac-impulzusra adott válaszjele, amit súlyfüggvénynek vagy impulzusválasz-függvénynek nevezünk
- $h(t)$ hálózatjellemző függvény, azaz ha $h(t)$ ismert, akkor a válaszjel **konvolúcióval** tetszőleges gerjesztés mellett meghatározható
- $V_1(j\omega) = V_1(\omega)$, $V_2(j\omega) = V_2(\omega)$ és $H(j\omega) = H(\omega)$ a be-, kimenő jelek és az impulzusválasz-függvény **Fourier transzformáltjai**

A Fourier transzformáció legfőbb előnye:

Két valós időfüggvény konvolúcióját komplex függvények szorzásába viszi át

4.2(a) A Fourier transzformáció definiciója

Az $x(t)$ időfüggvény (akár gerjesztés vagy impulzusválasz-függvény) **Fourier transzformáltja**, azaz áttérés a frekvenciatartományba

$$X(j\omega) = X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \quad \left[\frac{\text{amplitudó}}{\text{Hz}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{\text{Hz}}\right]$$

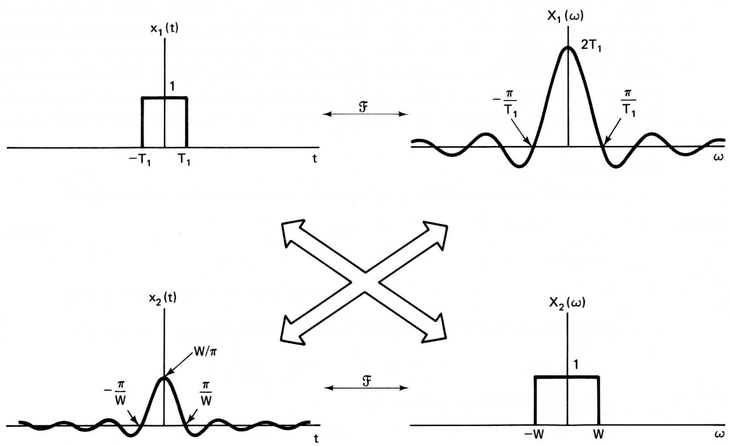
Az **inverz Fourier transzformáció**, azaz visszatérés az időtartományba

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \quad [\text{amplitudó} \quad \text{vagy} \quad -]$$

ahol
- j-t csak az áramköranalízissel foglalkozó kollégák tüntetik fel
- Dimenziókat az esetek döntő többségében nem tüntetjük fel
- $X(j\omega)$ a spektrum
- $|X(j\omega)|$ az amplitúdó spektrum
- $\angle X(j\omega)$ a fázis spektrum

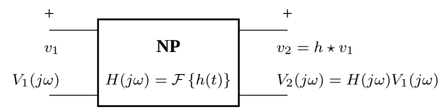
4.2(b) A dualitás tétele ill. példa a Fourier transzformáltakra

Időtartomány Frekvenciatartomány



4.2(c) A frekvenciaválasz- és impulzusválasz-függvények kapcsolata

- **Emlékezz:** Az AC impedanciákkal a kapcsolási rajzból közvetlenül felírtuk a $H(j\omega)$ **frekvenciaválasz-függvényt**



Egy NP $h(t)$ impulzusválasz-függvénye

- nem más, mint a $\delta(t)$ Dirac-impulzusra adott $h(t)$ válasza
- alapján **konvolúcióval** kiszámíthatjuk egy tetszőleges $x(t)$ meghajtásra adott válaszjelet

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

A Fourier transzformáció a konvolúciót szorzásba viszi át, azaz

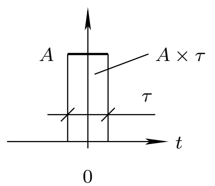
$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right\} = H(j\omega)\times X(j\omega)$$

ahol $H(j\omega)$ az AC analízisből ismert **frekvenciaválasz-függvény**

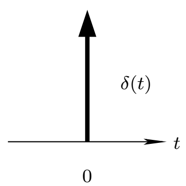
A frekvenciaválasz-, impulzusválasz-fügvények és a Dirac-impulzus tulajdonságai

- A $h(t)$ impulzusválasz- és a $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ frekvenciaválaszfüggvények hálózatjellemző függvények
- Ismeretükben az LTI rendszer tetszőleges bemenetre adott válasza meghatározható
- A $h(t)$ impulzusválaszfüggvény (másik neve súlyfüggvény) nem más, mint a $\delta(t)$ Dirac-impulzusra adott válasz
- Ahol a $\delta(t)$ függvény matematikailag egy szinguláris disztribúció

A $\delta(t)$ Dirac-impulzus mérnöki realizációja

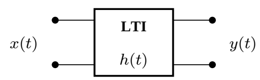


Ahol $\tau \to 0$
azonban $A \times \tau = 1$



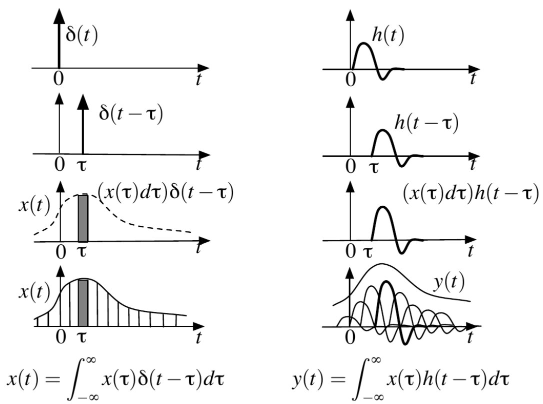
LTI NP válaszjelének meghatározása konvolúcióval

Szuperpozició alkalmazása az időtartományban



$$x(t) = \lim_{\tau\to 0} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k\tau)\delta(t-k\tau)\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



4.2(d) A válaszjel meghatározása a Fourier transzformáció segítségével

Alapelv: A számításokat a **frekvenciatartományban**, azaz egy transzformált tartományban végezzük el azért, hogy ne kelljen differenciál egyenleteket és konvolúciót megoldani az **időtartományban**.
Fourier transzformáció a konvolúciót szorzásba viszi át!

A megoldás lépései:

1. Az időtartományban megadott $x(t)$ gerjesztéshez hozzárendeljük annak $X(j\omega)$ Fourier transzformáltját, azaz spektrumát
2. A kapcsolási rajz alapján az AC impedanciákkal felírjuk a NP $H(j\omega)$ frekvenciaválasz függvényét
3. $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ alakban előállítjuk a válaszjel Fourier transzformáltját, azaz spektrumát
4. A válaszjel $Y(j\omega)$ spektrumából inverz Fourier transzformációval előállítjuk a $y(t)$ válaszjelet az időtartományban

Vedd észre: A transzformáció célja ugyanaz mint korábban, a differenciál egyenletek megoldásának elkerülése

4.2(e) Legfontosabb időfüggvények Fourier transzformáltjai

Időtartomány $x(t)$	Frekvenciatartomány $X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega)-\frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a>0$	$\frac{1}{j\omega+a}$
$te^{-at}u(t), a>0$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$
$e^{-a\|t\|}, a>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$e^{-a\|\omega\|}$
$e^{-at^2}, a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t)=\begin{cases}1 & \|t\|<a\\ 0 & \|t\|>a\end{cases}$	$2a\frac{\sin\omega a}{\omega a}$

Fontos tulajdonságok

- Szuperpozíciót kihasználtuk $\Rightarrow$ csak lineáris rendszerekre alkalmazható
- Unicitás: Egyértelmű megfelelés az időfüggvény és annak Fourier transzformáltja közt
- Lineáris integrál transzformáció $\Rightarrow$ Linearitás megőrződik

Egy példa:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t}\,|_{t=0} = 1$$

4.2(f) Fourier transzformációra vonatkozó tételek

Tulajdonság: Property	Időtartomány: Signal	Frekvenciatartomány: Fourier transform
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Linearity	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
Time shifting	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$
Time scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time reversal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Duality	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Time differentiation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Frequency differentiation	$(-jt)x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integration	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$	$\pi X(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}X(\omega)$
Convolution	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplication	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$
Real signal	$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$	$X(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)$ $X(-\omega)=X^*(\omega)$

Egy példa:

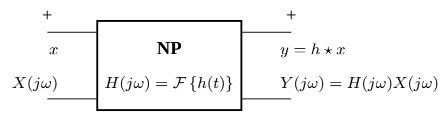
Derivált függvény Fourier transzformáltja:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(\omega)$$

Bizonyítás:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{j\omega X(\omega)}\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

4.2(g) A torzításmentes átvitel feltétele



Kimeneti jelalak egyezzen meg a bemenetivel, azonban egy $K > 0$ konstanssal való szorzás (alakhű erősítés) és egy $t_d \geq 0$ frekvenciafüggetlen késleltetés megengedett

$$y(t) = K\,x(t-t_d)$$

A frekvenciaválasz-függvény értéket a Fourier transzformációval kapjuk meg

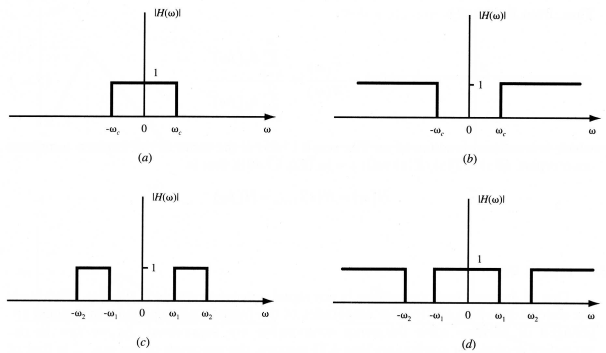
$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = Ke^{-j\omega t_d}\,X(\omega) \equiv H(\omega)X(\omega)$$

Torzítás mentes átvitelt biztosító
- amplitúdó karakterisztika $|H(\omega)| = K$ és
- fázis karakterisztika $\theta_H(\omega) = -\omega t_d$

4.2(h) Ideális szűrőkarakterisztikák definiciója

A (frekvenciaszelektív) szűrőknek mindössze **négy** típusa van

Az ideális szűrőkarakterisztikák amplitúdóválasz-függvénye:
(a): ideális aluláteresztő szűrő, (b): ideális felüláteresztő szűrő, (c): ideális sáváteresztő szűrő (sávszűrő) és (d): ideális sávzáró szűrő (lyukszűrő)



4.2(i) Sávkorlátozott jelek

Egy $x(t)$ jelet **sávkorlátozott** jelnek nevezünk, ha

$$|X(\omega)| = 0, \quad \text{ha} \quad |\omega - \omega_C| > B$$

FIGYELEM!!!

- Az $x(t)$ jel spektruma mindig **kétoldalas** (pozitív és negatív frekvenciás) komponensek, mert ez a feltétele annak, hogy az **időtartományban valós** jelet kapjunk
  Az időtartománybeli valós jelekre mindig igaz, hogy

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

- A Fourier transzformáció csak állandósult állapotú rendszerekre alkalmazható
- Tranziens analízist a Laplace transzformációval kell elvégezni