

**Állománynév:** aramkorok\_02elemek\_lti26.pdf

**Irodalom:** Tankönyv: R. J. Smith & R. C. Dorf, „Circuits, Devices and Systems,” Wiley, 5<sup>th</sup> Edition, pp. 4-32.

Előadó jegyzetei: <http://users.itk.ppke.hu/~kolumban/aramkorok/>

## 2. A KONCENTRÁLT PARAMÉTERŰ LINEÁRIS ÉS IDŐINVARIÁNS (LTI) HÁLÓZATOK, AZ ÁRAMKÖRI ÉPÍTŐELEMÉK ÉS AZOK MODELLJEI

**Koncentrált paraméterű LTI dekódolása**

- **Koncentrált:** feszültség  $v(t)$  és áram  $i(t)$  csak az idő függvénye
- **Lineáris:** (1) szuperpozíció  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  és  
(2) első rendű homogenitás  $f(Cx) = Cf(x) \forall C$ -re

**Megoldás zárt alakban** (átviteli függvények, tervezési egyenletek) **generálható**

- **Időinvariáns:** alkotó elemek értékei (pl. ellenállás, kapacitás) nem függnék az időtől

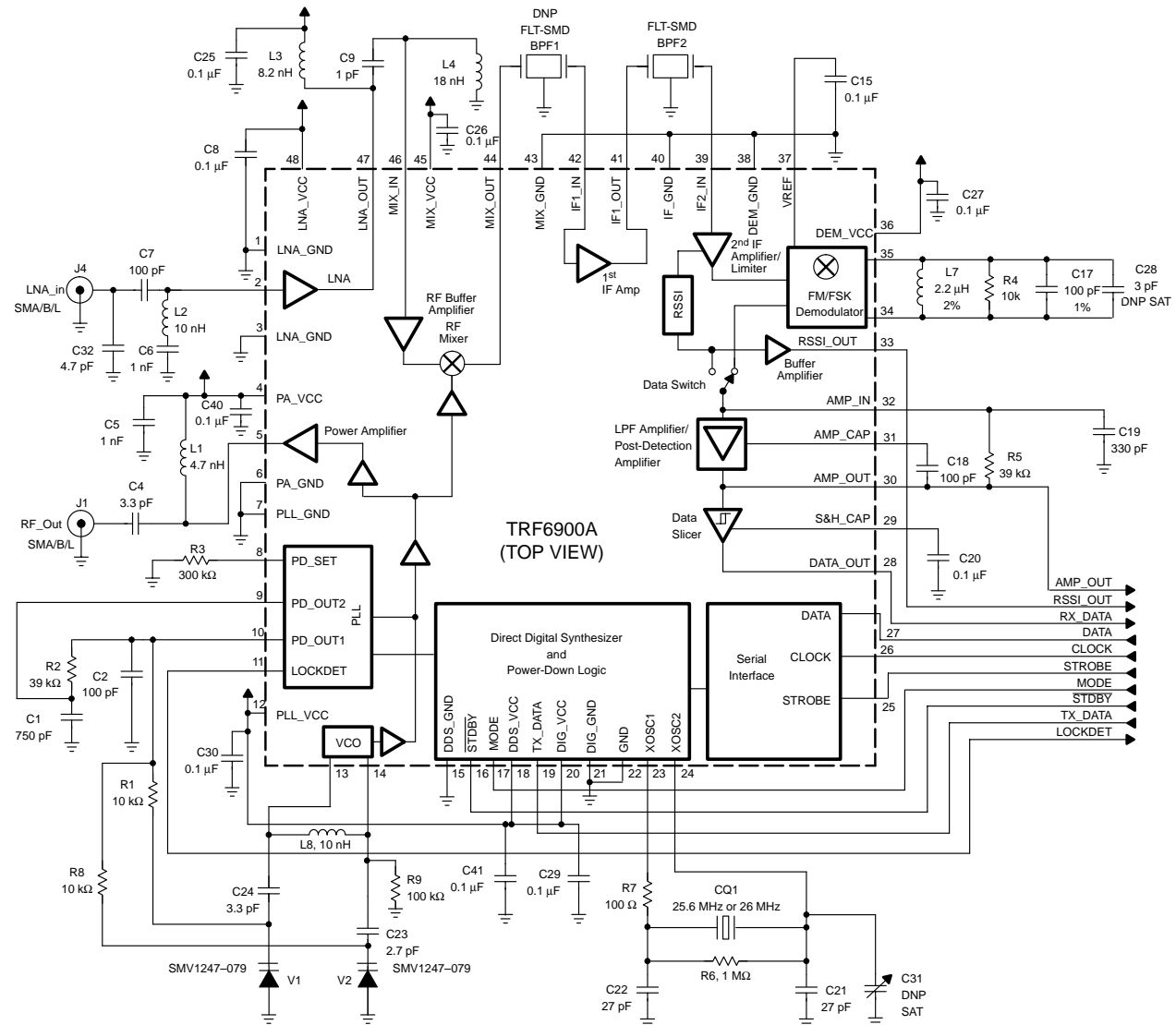
## Oktatási célkitűzés

1. LTI rendszerek definíciója
2. A rendszer viselkedését leíró matematikai modell származtatása  
Kirchhoff egyenletek
3. Lineáris áramköri elemek (az építőelemek) definíciója

## Egy TRF6900A típusú Texas adó-vevő áramkör kapcsolási rajza

## Vedd észre:

- A legbonyolultabb rendszer ill. áramkör is felépíthető néhány alkatrészből (kondenzátor, ellenállás, stb)
- A rendszer/áramkör jellemzett, ha minden ponton ismerjük a  $v(t)$  és  $i(t)$  időfüggvényeket
- Ha a belső felépítés nem érdekes, akkor átviteli függvényeket írunk fel (ekkor a linearitás követelmény)



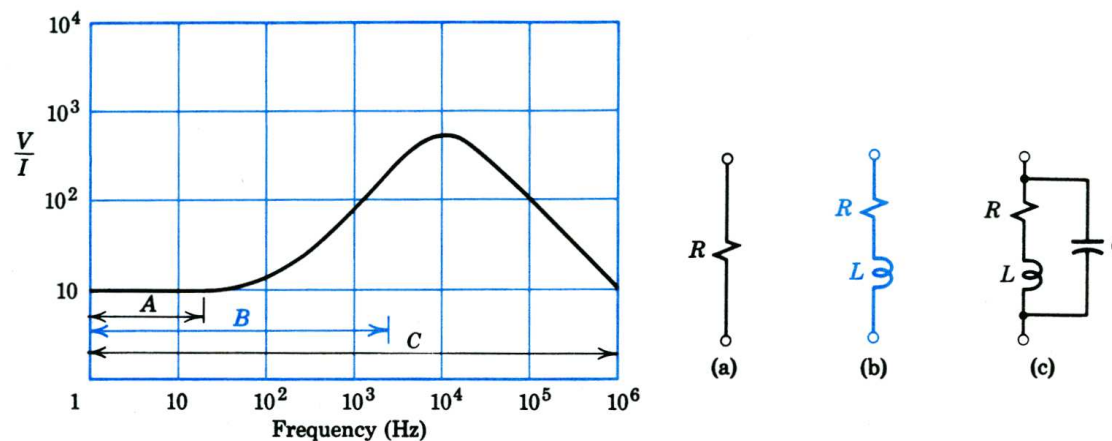
## LTI rendszer matematikai modelljének (lineáris és állandó együtthatós differenciál egyenlet) megoldása

Időtartomány (Matematikus)		Transzformált-tartomány (Informatikus)
<p style="text-align: center;">⇓</p> <p style="text-align: center;">LTI rendszer</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center; margin: 10px auto; width: fit-content;">Differenciál egyenlet</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">Diff. egy. megoldása</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">Válaszjel</p>	<p>⇐</p> <p>Inverz transzformáció</p>	<p style="text-align: center;">⇓</p> <p style="text-align: center;">Transzformált rendszer (Közvetlenül a kapcsolási rajzból, pl. impedancia)</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center; margin: 10px auto; width: fit-content;">Algebrai egyenlet</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">Algebrai módszerek</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">Megoldás a transzformált tartományban</p>

## 2. 1. A rendszer elemeinek modellezése

### MODELLEZÉS FIZIKAI KÉP ALAPJÁN

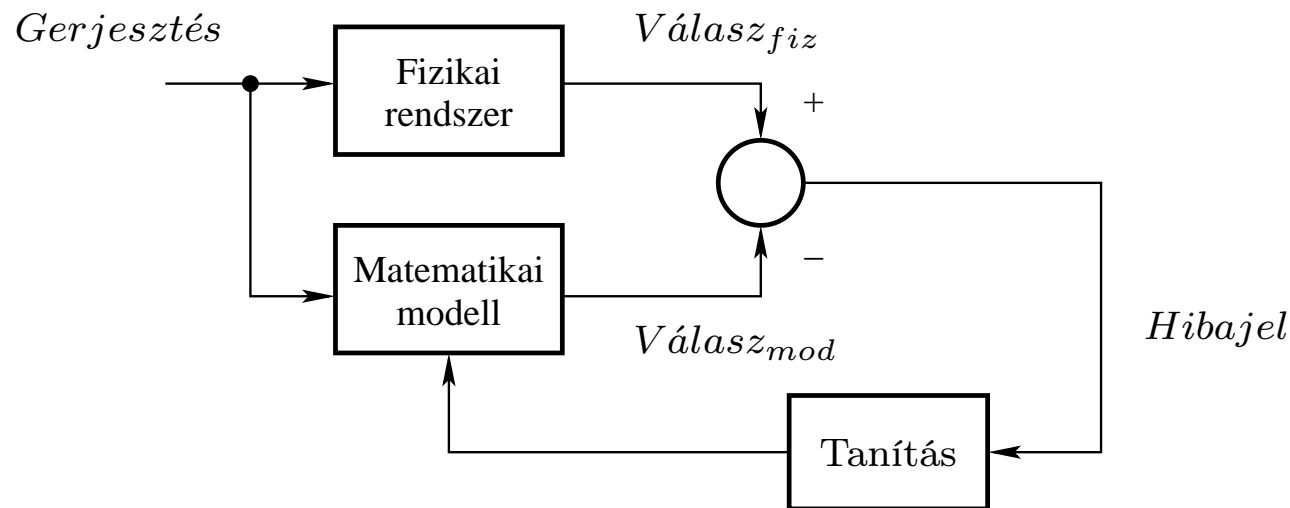
- A modellezni kívánt eszköz fizikai működéséből indulunk ki
- Először a fő jelenséget modellezzük majd figyelembe vesszük a másodlagos hatásokat



**Vedd észre:** • A legbonyolultabb fizikai kép alapján kialakított modellek is néhány elemi, ideális elemből tevődnek össze

## MODELLEZÉS A FEKETE DOBOZ (BLACK BOX) SZEMLÉLETTEL

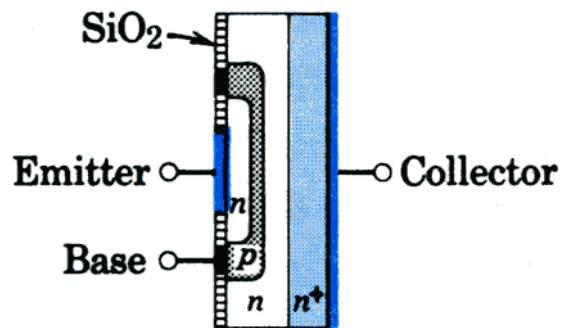
- A modellezendő eszközt egy kellő dimenziójú matematikai modellel írjuk le
- A model *paramétereit* egy tanítási folyamat során határozzuk meg
- Egy példa: Neurális hálózatok



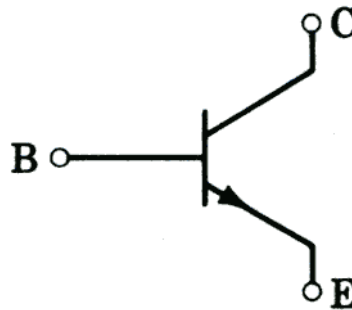
**Vedd észre:** • Ha a matematikai model dimenziója nem elégséges vagy a tanító minták halmaza rossz, akkor nincs megoldás

## AZ ESZKÖZÖK (bipoláris tranzisztor, BJT) REPRESENTÁCIÓI

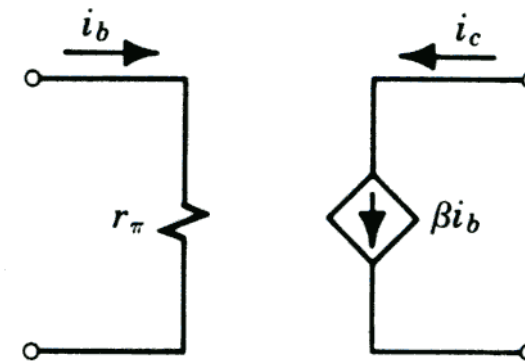
A fizikai eszköz  
keresztmetszete



Áramköri szimbólum



Áramkör (matematikai)  
modellje



## 2. 2. A matematikai modell (rendszerjellemező diff. egy.) felírása **közvetlenül a kapcsolási rajzból**

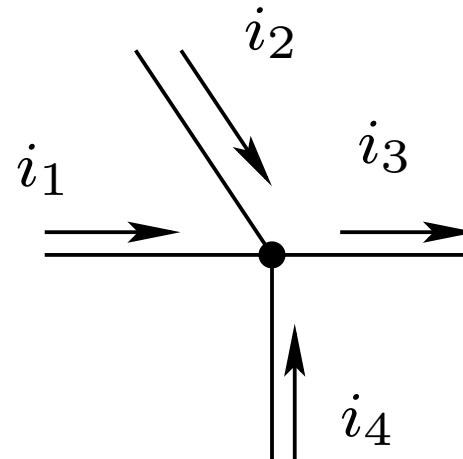
### 2.2.A. Kirchhoff egyenletek: Csomóponti és huroktörvények

- A kapcsolat topológiáját írják le
- Feszültség és/vagy áramirányok tetszőlegesen felvehetők, de utána következetesen betartandók

Emlékeztető:

**Kirchhoff csomóponti törvénye**  
(Töltésmegmaradás elve)

$$\sum_k i = 0$$

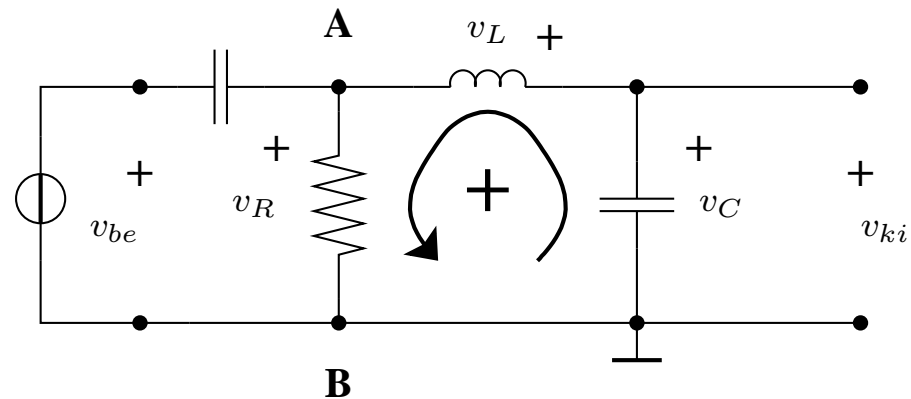




Emlékeztető:

**Kirchhoff huroktörvénye**  
(Energiamegmaradás elve)

$$\sum_l v = 0$$



Fontos fogalmak emlékeztetőül:

Csomópont (**A** és **B**), ág ( $R_{AB}$ ) és hurok (lásd bejelölt hurokot a körüljárási iránnyal egyetemben)

Felírandó egyenletek számának meghatározása (bármelyiket a többiből):

$$N(\text{ágak}) = N(\text{független hurkok}) + N(\text{csomópontok}) - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$$

## 2.2.B. Áramköri elemekre vonatkozó egyenletek

- Az áramköri elemen fellépő feszültség és áram összefüggését adja meg. Az LTI áramköri elemek definícióit később, a 2.3 pontban tárgyaljuk. Egy példa: az ellenállásokra vonatkozó Ohm törvény  $v = Ri$
- Feszültség és áramirányok adottak, **tilos** megváltoztatni őket
- Feszültség vagy áramirány felcserélése vált az áramköri elem passzív ill. aktív volta között

A 2.2.A és 2.2.B pontokban tárgyalt módszer hátránya:

- Háromféle egyenletet kell felírni: Kirchhoff csomóponti- és huroktörvénye, továbbá az áramköri elemekre vonatkozó egyenletek
- Túl sok ismeretlen adódik

Nincs olyan módszer ahol csak egyféle egyenletet kell felírni és az minimális számú ismeretlent ad?

## 2.2.C. Minimális ismeretlent adó közvetlen módszerek

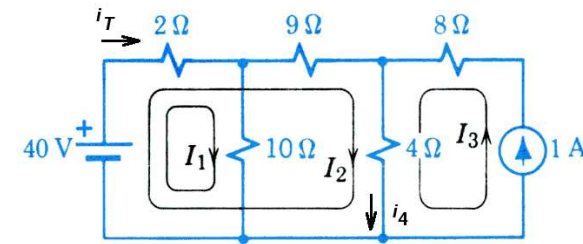
### (i) HUOKÁRAMOK MÓDSZERE

#### Alapelv:

- Kirchhoff huroktörvényét írjuk fel
- A csomóponti és az áramköri elemekre vonatkozó egyenleteket automatikusan kielégítjük

#### Módszer:

- Minden független hurokban felvesszünk egy ún. *hurokáramot* ami **nem azonos az ágárammal**
- Hurokáramok számát addig növeljük amíg minden hurkot lefedtünk
- Minden új hurokáram menjen át legalább egy, addig még le nem fedett ágon
- A hálózatnak topológiai értelemben *összefüggőnek* kell lennie

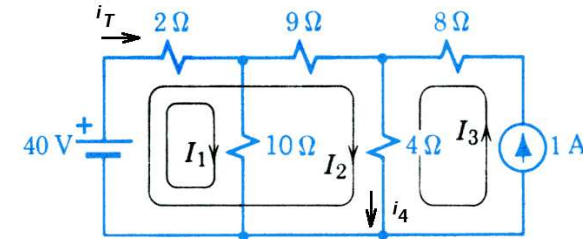


## Minimális számú ismeretlent ad:

- Sok, független áramforrás esetén
- Egy áramgenerátoron egy és csak egy hurokáramot célszerű felvenni

## Ellenőrzés:

- Kirchhoff hurokegyenlet felírása egy új, korábban fel nem vett hurok mentén



Egyenletek  $[N(\text{független hurokok}) = N(\text{ágak}) - N(\text{csomópontok}) + 1 = 7 - 5 + 1 = 3]$ :

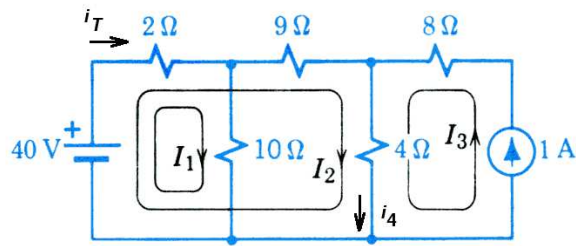
$$I_3 = 1 \text{ A}$$

$$\sum_v = 0 = -40 + 2(I_1 + I_2) + 10I_1$$

$$\sum_v = 0 = -40 + 2(I_1 + I_2) + 9I_2 + 4(I_2 + I_3) = -40 + 2(I_1 + I_2) + 9I_2 + 4(I_2 + 1)$$

A 4-ohmos ellenálláson fizikailag átfolyó áram:

$$i_4 = I_2 + I_3 = I_2 + 1$$



A telepből felvett áram:

$$i_T = I_1 + I_2$$

**Ellenőrzés:** Kirchhoff hurokegyenlet felírása a középső, azaz egy új független hurokra

$$\sum_v = 0 = ? = -10I_1 + 9I_2 + 4(I_2 + 1)$$

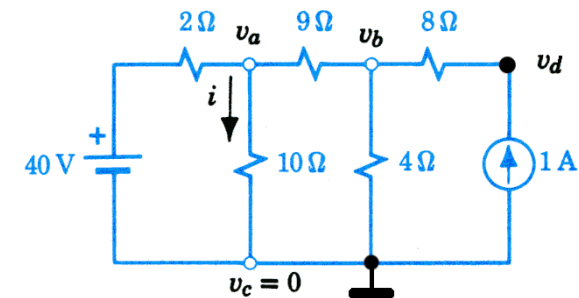
## (ii) CSOMÓPONTI POTENCIÁLOK MÓDSZERE

### Alapelv:

- Kirchhoff csomóponti törvényét írjuk fel
- A hurkokra és az áramköri elemekre vonatkozó egyenleteket automatikusan kielégítjük

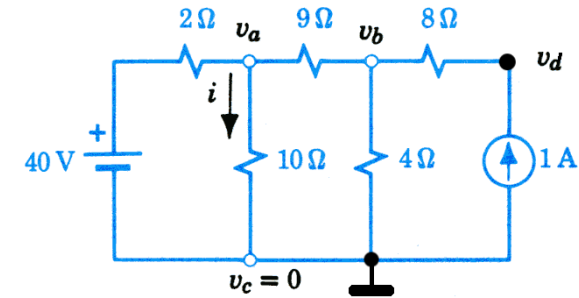
### Módszer:

- Egy csomópontot *földelünk*, azaz referenciának tekintünk
- Elvileg  $(n - 1)$  független csomópont (ismeretlen) van, de a számba veendő csomópontok számát a független generátorok csökkentik
- Ha a kapcsolási rajzon szereplő föld nem optimális helyen van akkor az áthelyezhető. Ekkor azonban a kapott csomóponti feszültségeket az eredeti föld szerint át kell számolni!!!



## Minimális számú ismeretlent ad:

- Sok, független feszültségforrás esetén, ha azok egy közös ponthoz kapcsolódnak
- Áramkörök rendszerint aszimmetrikusak, az-  
az van egy **közös föld pontjuk**



Egyenletek, ahol a csomópontba befolyó áramot vesszük pozitívnak:

(Vedd észre a független feszültségforrás miatt egy csomópont feszültsége ismert!)

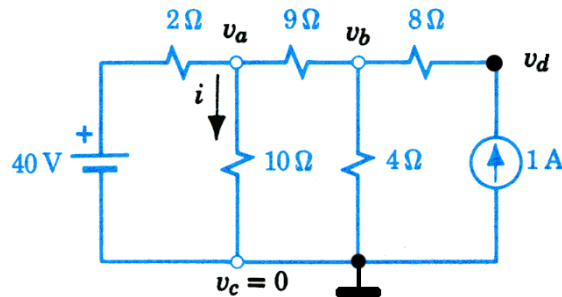
$$\sum_{i_a} = 0 = \frac{40 - v_a}{2} + \frac{v_b - v_a}{9} + \frac{v_c - v_a}{10} = \frac{40 - v_a}{2} + \frac{v_b - v_a}{9} - \frac{v_a - 0}{10}$$

$$\sum_{i_b} = 0 = \frac{v_a - v_b}{9} + 1 + \frac{v_c - v_b}{4} = \frac{v_a - v_b}{9} + 1 - \frac{v_b - 0}{4}$$

$$\sum_{i_d} = 0 = \frac{v_b - v_d}{8} + 1$$

Az  $i$  áram értéke :

$$i = \frac{v_a - v_c}{10} = \frac{v_a - 0}{10}$$



A „ $d$ ” csomópont feszültsége:  
(kapcsolási rajzból vagy az előző fólia utolsó egyenletéből)

$$v_d = v_b + 8 \times 1$$

### Ellenőrzés:

- A kapcsolási rajzba be kell írni valamennyi csomópont feszültségét és valamennyi ág áramát

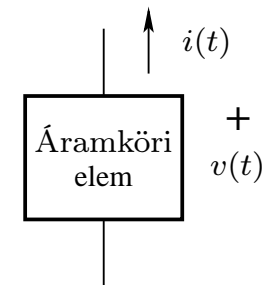


## 2.3. Lineáris áramköri elemek

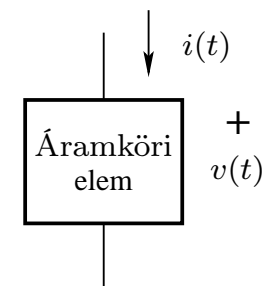
- A lineáris elemekből felépített áramkörök és rendszerek szintén lineárisak lesznek!
- Jelölésmód: kis betű  $v(t)/v$  és  $i(t)/i$  időfüggvény míg nagy betű  $V/I$  DC feszültség/áram

### AKTÍV ÉS PASSZÍV ÁRAMKÖRI ELEMOK DEFINÍCIÓJA

Egy aktív áramköri elem energiát pumpál az őt befoglaló hálózatba



Egy passzív áramköri elem energiát vesz fel az őt befoglaló hálózatból

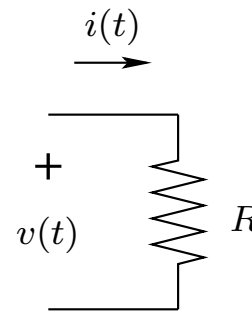


## PASSZÍV ÁRAMKÖRI ELEMETEK DEFINIÁLÓ EGYENLETEK

**Fontos:** Ezen mérőirányok nem változtathatók meg!!!

**(a) Ellenállás,  $R$  [ $\Omega$ ]**

Ohm törvény:  $v(t) = R i(t)$



Disszipált energia:  $w_R = \int_0^T v i dt = R \int_0^T i^2 dt \big|_{i=I} = RI^2 T$

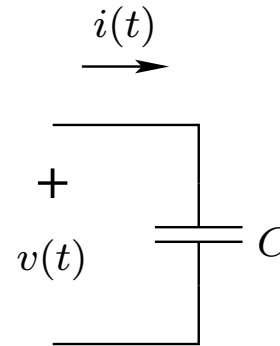
**Fontos:**

- Ellenállás a teljesítmény disszipálásának a mértéke (képessége)
- A disszipáció irreverzibilis
- A teljesítmény hővé alakul

**(b) Kondenzátor (kapacitás),  $C$  [F]**

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i d\tau = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau$$



Tárolt energia:  $w_C = \int_0^T v i dt = \int_0^T v C \frac{dv}{dt} dt = \int_0^V C v dv = \frac{C V^2}{2}$ , ahol  $V = v(T)$

- Fontos:**
- Az energiatárolás a  $C$ -ben generált elektromos erőterben történik
  - A tárolt energia csak a  $C$  kondenzátor  $T$  időpillanatban mért  $V = v(T)$  feszültségétől függ
  - A tárolt energia a kisütés során visszanyerődik
  - A kondenzátor feszültsége az időnek mindig folytonos függvénye
  - Állandósult állapotú DC áramkörben a kondenzátor szakadásként viselkedik

**Állítás:** A kondenzátor feszültsége az időnek mindig folytonos függvénye

**Bizonyítás:**

A kondenzátorra írható:

$$v_C(t) = v_C(T) + \frac{1}{C} \int_T^t i_C(\tau) d\tau$$

Legyen  $t = T + dt$ , ahol  $t \in [t_a, t_b]$  és  $t_a < T < t_b$ ,  $t_a < T + dt \leq t_b$

Fizikai rendszerben az áram korlátos lehet csak, azaz  $i_C(t) < M \quad \forall t \in [t_a, t_b]$

$$v_C(T + dt) - v_C(T) = \frac{1}{C} \int_T^{T+dt} i_C(\tau) d\tau < \frac{1}{C} \int_T^{T+dt} M d\tau = \frac{M}{C} dt$$

Vizsgáljuk  $v_C(t)$  folytonosságát:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} [v_C(T + dt) - v_C(T)] = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{M}{C} dt = 0$$

**QED**

**Állítás:** A kondenzátor állandósult állapotú DC áramkörben szakadásként viselkedik

**Bizonyítás:**

A kondenzátor egyenlete:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Állandósult állapotú DC áramkörben  $v = v(t) = \text{CONST}$

$$i = C \frac{dv}{dt} = C \frac{d \text{CONST}}{dt} = C \cdot 0 = 0$$

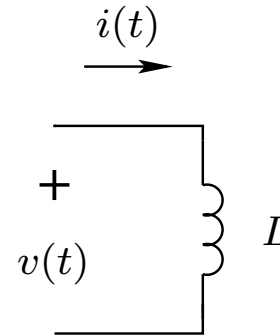
**QED**

Akármekkora DC feszültség lép fel a kondenzátoron, azon mindig 0 A áram folyik. Ez viszont a szakadás definíciója (lásd később)

**(c) Induktivitás,  $L$  [H]**

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v d\tau = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v d\tau$$



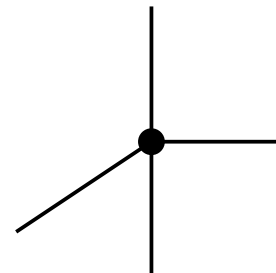
Tárolt energia:  $w_L = \int_0^T v i dt = \int_0^T L \frac{di}{dt} i dt = \int_0^I L i di = \frac{LI^2}{2}$ , ahol  $I = i(T)$

- Fontos:**
- Az energiatárolás az  $L$ -ben generált mágneses erőterben történik
  - A tárolt energia csak a  $L$  induktivitáson a  $T$  időpillanatban átfolyó  $I = i(T)$  áramtól függ
  - A tárolt energia a kisütés során visszanyerődik
  - Az induktivitás árama az időnek mindig folytonos függvénye
  - Állandósult állapotú DC áramkörben az induktivitás rövidzárként viselkedik

## (d) Összeköttetés

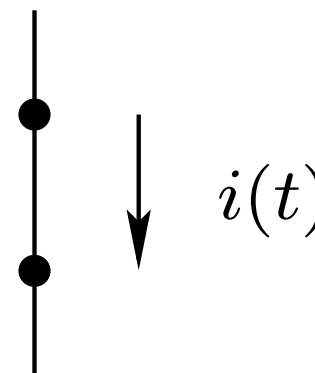
Jelmagyarázat:

- Pont: Összekötött vezetékek
- Nincs pont: Átmenő, elektromosan izolált vezetékek



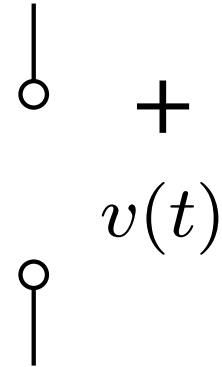
## (e) Rövidzár

$v = 0$  tetszőleges  $i$  mellett



**(f) Szakadás**

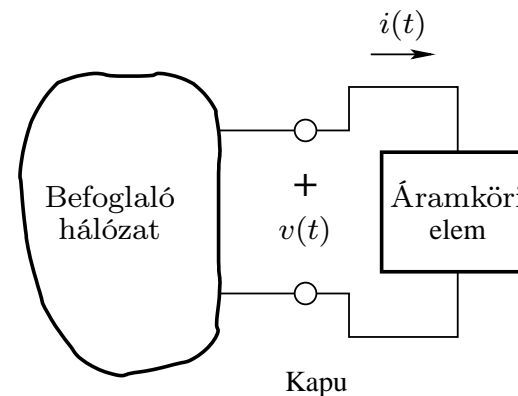
$i = 0$  tetszőleges  $v$  mellett



Befoglaló hálózat definíciója: amelyhez a vizsgált kétpólus/egykapucsatlakozik

**Vedd észre:**

**Rövidzár/szakadás esetén az áramot/feszültséget a befoglaló áramkör határozza meg!!!**





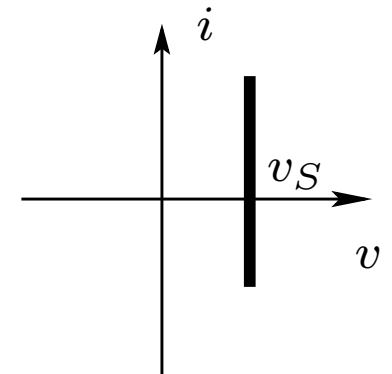
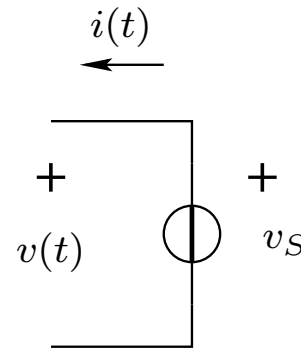
# AKTÍV ÁRAMKÖRI ELEMÉKET DEFINIÁLÓ EGYENLETEK

**Emlékezz: Ezen mérőirányok nem változtathatók meg!!!**

## (g) Független feszültségforrás

Feszültséget kényszerít, áram a befoglaló hálózattól függ

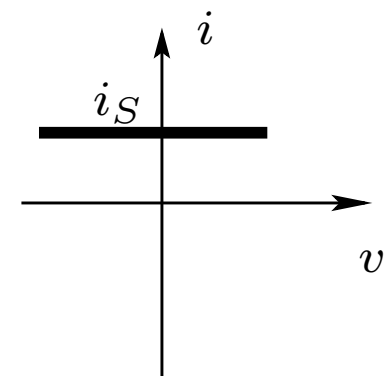
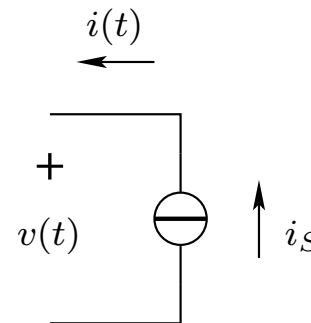
$$v(t) = v_S \text{ tetszőleges } i \text{ mellett}$$



## (h) Független áramforrás

Áramot kényszerít, feszültség a befoglaló hálózattól függ

$$i = i_S \text{ tetszőleges } v \text{ mellett}$$

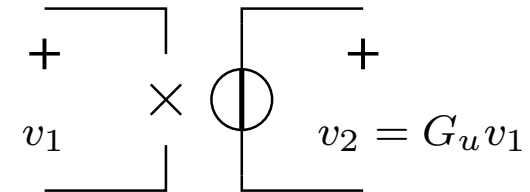


## VEZÉRELT GENERÁTOROKAT DEFINIÁLÓ EGYENLETEK (AKTÍV)

### (i) Feszültségvezérelt feszültséggenerátor

(Feszültség) erősítés

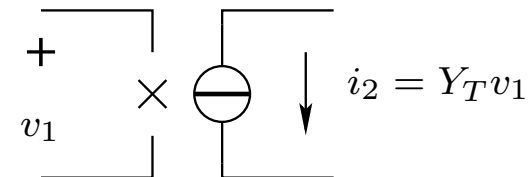
$$G_u = \frac{v_2}{v_1}$$



### (I) Feszültségvezérelt áramgenerátor

Transzfer admittancia

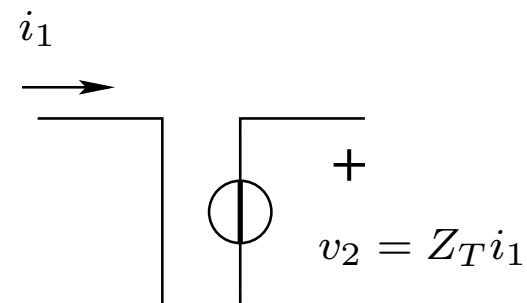
$$Y_T = \frac{i_2}{v_1}$$



## (k) Áramvezérelt feszültséggenerátor

Transzfer impedancia

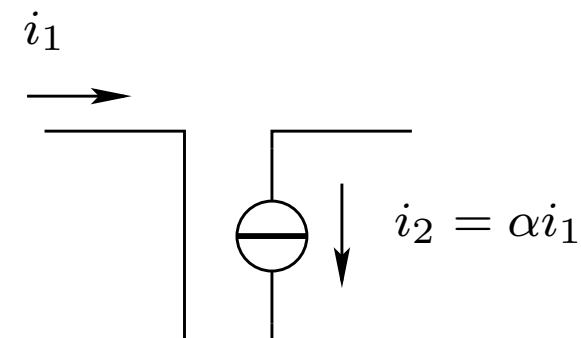
$$Z_T = \frac{v_2}{i_1}$$



## (l) Áramvezérelt áramgenerátor

Áramerősítés

$$\alpha = \frac{i_2}{i_1}$$

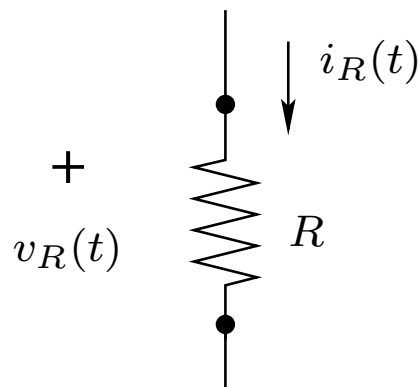


## Ellentmondás?

- **8. oldal, Kirchhoff:**  
„Feszültség és/vagy áramirányok tetszőlegesen felvehetők”
- **18. oldal, áramköri elemeket definiáló egyenletek:**  
„Ezen mérőirányok nem változtathatók meg!!!”

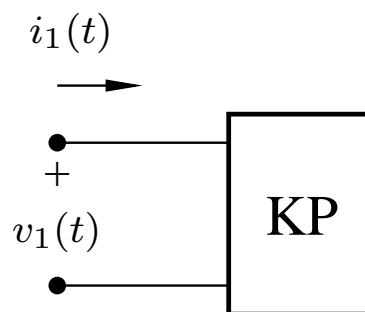
Vedd észre:

$i_R$  vagy  $v_R$  mérőirány egyike tetszőlegesen felvehető (Kirchhoff), de utána a másik,  $v_R$  vagy  $i_R$ , meghatározott az áramköri elemet definiáló egyenlet által

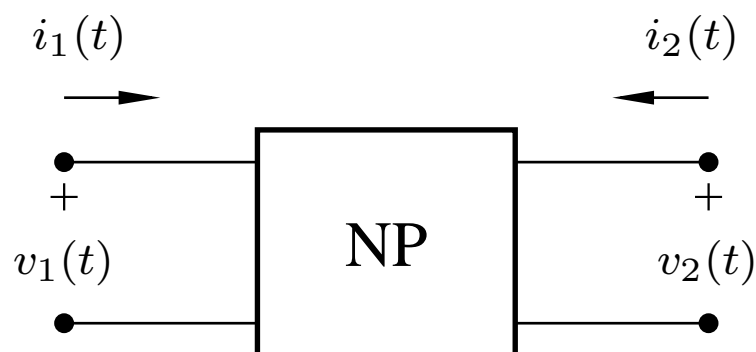


## Két- és négypólusok fogalma

Kétpólus vagy egykapu (Egy kapocspár)

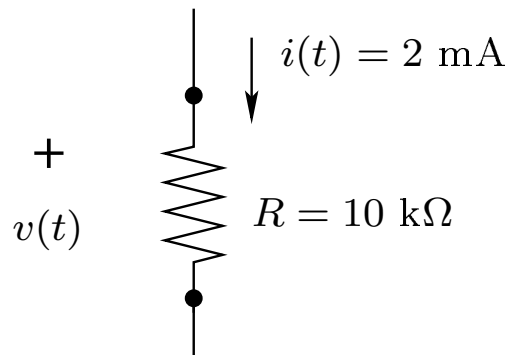


Négypólus vagy kétkapu (Egy bemeneti és egy kimeneti kapocspár)



## Illeszkedő egységrendszer

$$V[\text{V}] = (i[\text{mA}] \times 10^3)(R[\text{k}\Omega] \times 10^{-3}) = i[\text{mA}] R[\text{k}\Omega]$$



$$v = Ri = 10 \times 2 = 20 \text{ V}$$

Manapság használt félvezető átlagos teljesítményű áramkörökben

- **Bipoláris tranzisztorok:**

feszültség 1,5 V – 24 V; áram tipikusan mA; ellenállás tipikusan  $\text{k}\Omega$

- **CMOS tranzisztorok:**

feszültség 1,5 V – 24 V; áram tipikusan  $\mu\text{A}$ ; ellenállás tipikusan  $\text{M}\Omega$

## Mit tanultunk:

1. LTI rendszerek definíciója
2. A rendszer viselkedését leíró matematikai modell származtatása  
Kirchhoff egyenletek, hurokáramok és csomóponti potenciálok módszere
3. Lineáris áramköri elemek (az építőelemek) definíciója