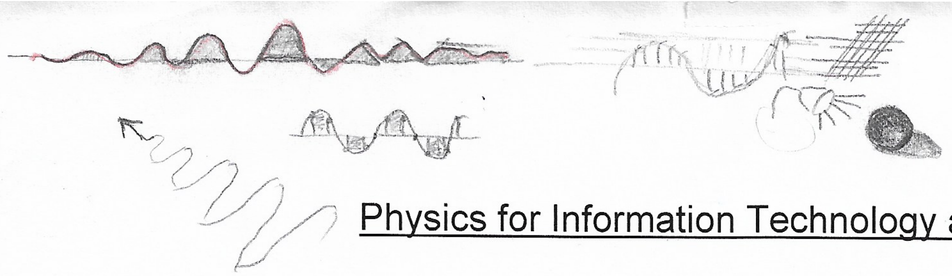


Physics for Information Technology and Bionics I.

KLASSZIKUS

1. Classical mechanics (Newtonian mechanics), force, momentum, conservation laws, potentials, Simple pendulum problem, numerical methods for solving Newton's laws. (Rungekutta)

2. Lagrangian mechanics, variational principles, pendulum and double pendulum. Energy, action, potential energy, kinetic energy.

3. Oscillating systems: pendulums, springs, quadratic potentials, forced oscillations, resonance, and the one-dimensional wave equation. Green function-based solution to the oscillator.

ELEKTROMÁGNES

4. Electrostatics: Coulomb's law, derivation of Gauss's law, calculation of electric fields and potentials from charge distributions. The concept of the scalar potential

5. Magnetic fields: field of dipole distributions (permanent magnets) current loops, straight wires Biot-Savart law, Ampere's law. The concept of the vector potential.

6. Maxwell's equations, the road to Maxwell's equations, how Ampere's law, Faraday's law lead to Maxwell's equations inductively.

7. Maxwell's equations in differential form, the solutions of Maxwell's equations in various circumstances, plane wave solutions in vacuum, boundary conditions for wave propagation in vacuum.

8. Network models of electromagnetics. Transmission lines. Derivation of the telegraph equations, solutions of different type, solutions for terminated transmission lines

9. Special relativity, Galilei transformation, Lorentz transformation and the Michelson Morley experiments. The principles of quantum mechanics, basic properties of the Schrödinger equation

KVANTUM

10. The principles of quantum mechanics, basic properties of the Schrödinger equation. Expectation values for the momentum and the particle position Derivation of the time independent Schrödinger equations, solution for infinite potential well.

I. tétel: Klasszikus mechanika (Newton)

Alapfogalmak:

- minden test helyzete egy Descartes-i koordinátarendszerben
- a pozíció 3 normálvektor lin. kombinációja

$$\underline{r} = \sum_{j=1}^{3} r_j \cdot \underline{e}_j = \underline{r}(t) \Rightarrow \text{PONTSZERŰ RÉSZECSKE}$$

- sebesség: pozíció változása: $v(t) = \frac{d r(t)}{dt} = \dot{r}(t)$
- gyorsulás: sebesség változása: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{r}$
- állítás: ez a földön és nagy mértékben is érvényes

Newton törvényei

1. ∃ olyan koordinátarendszer, melyben a ~~test~~ szabad részecske megőrzi a sebességét. (inerciarendszer) — nem hat rá semmi
2. Zárt rendszer összimpulzusa állandó:

impulzus: $\underline{p}(t) = m \cdot \underline{v}(t) = \int m \cdot \underline{a}\, dt$

$$P = \sum_{i=1}^{N} p_i = \text{állandó} \Rightarrow N=2 \text{ esetén}$$

$$\dot{p}_1 = -\dot{p}_2 \Rightarrow m_1 \cdot \underline{a}_1 = -m_2 \cdot a_2$$

3. Az impulzus megváltozása az erő: $F = \frac{dI}{dt} = m \cdot a$.
4. A testre ható erők összeadhatóak; függetlenség

Differenciálegyenletek

- a feladatok többségében a testre ható erő ismert, de függ időtől, helytől, sebességtől, (gyorsulástól)
- időben felírt DE., megoldása a mozgás pályája

Euler-módszer

Felhasználva, hogy $v = \frac{dr}{dt}$ "$\Rightarrow$" $dr = v \cdot dt$

$a = \frac{dv}{dt}$ "$\Rightarrow$" $dv = a \cdot dt = \frac{1}{m} \cdot F dt$

Elegendően kicsi Δt-t választva,

$$v(t+\Delta t) := v(t) + \frac{1}{m} \cdot F \cdot \Delta t$$

$$r(t+\Delta t) := r(t) + v(t) \cdot \Delta t$$

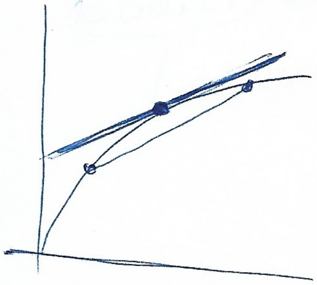
Hátrány: hibahalmozás

Másodrendű Runge-Kutta

Cél: derivált becslése a középső pontban

$$\frac{dv}{dt}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t+\Delta t) \approx v(t) + \Delta t \left(\frac{dv}{dt}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \approx$$



$$\approx v(t) + \Delta t \left(a\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \approx$$

$$\approx v(t) + \Delta t \cdot \frac{1}{m} \cdot F\left(t + \frac{\Delta t}{2}, v\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right), r(t + \Delta t/2)\right)$$

$$\approx v(t) + \Delta t \cdot \frac{1}{m} \cdot F\left(t + \frac{\Delta t}{2}, v(t) + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{1}{m} F(t), \quad \right)$$

Negyedrendű Runge-Kutta

- mint a másodrendű, csak több ponttal
- ezt sok helyen alkalmazzák
- megfelelően pontos

Kinetikus (mozgási) energia

definíció: $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$dT = d\left(\frac{m}{2} v \cdot v\right) = m \cdot v \cdot dv = m \cdot dr \cdot dv = \underset{\| F}{dp} \cdot dr$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \int_A^B F\, dr = T(B) - T(A)$$

Potenciál

definíció: Ha az erőt leíró F mező konzervatív (azaz előáll $-\mathrm{grad}\, U$ alakban) akkor $\int_A^B F\, dr = U(r_A) - U(r_B)$

Ekkor az előbbi definíciót felhasználva:

$$T(B) - T(A) = -[U(B) - U(A)] \Rightarrow T(B) + U(B) = T(A) + U(A)$$

$\Rightarrow$ teljes energiamegmaradás

Hasznos: kényszererős problémák megoldásánál

Nyomaték, perdület

definíció: perdület (angular momentum) $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$

perdületmegmaradás:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \left(\frac{d}{dt} \underline{r}\right) \times \underline{p} + \left(\frac{d}{dt} \underline{p} \times \underline{r}\right) =$$

$$= \underline{v} \times \underline{p} + \underline{r} \times \dot{\underline{p}} = \underline{v} \times m\underline{v} + \underline{r} \times m\underline{a} =$$

$$= \underbrace{\underline{r} \times \underline{F}}_{\text{nyomaték}}$$

II. Lagrange-féle mechanika

Matematikai alapok

Alapfeladat: t_1, t_2, y_1, y_2, C, I, optimalizálás

Megoldás: $\eta, G(\varepsilon), G'(\varepsilon), G'(0)$

Euler-Lagrange: $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$.

Általánosan: minden koordinátában

Lagrange-i mechanika

Klasszikus: dinamika törvényei + energiamegmaradás

Lagrange: $L = T - U$ ← potenciál
↑ kinetikus energia

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (T-U)\,dt \longrightarrow \text{minimális}$$

példa: feldobott és visszaeső részecske

példa: potenciál nélkül eldobott részecske

Szabadságfok: test/rendszer állapotát leíró koordináták száma

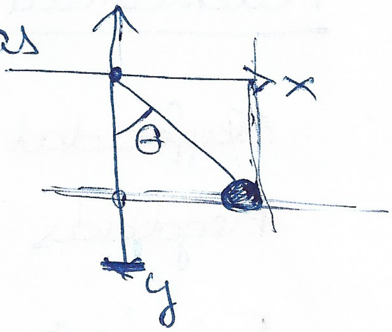
Általánosított koordináták: az állapotleírók

"Least Action Principle".

Inga leírása:

1. energiamegmaradással: $\quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = c.$ $\quad x(t) = ?$

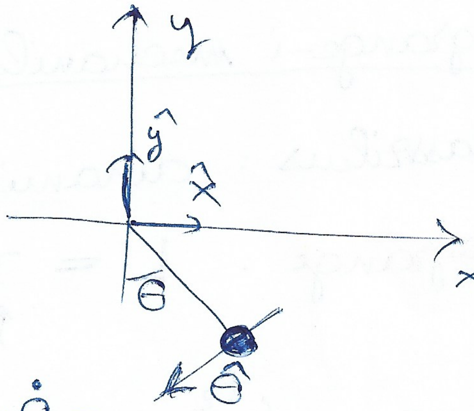
dinamika levezethető, de fájdalmas



$$x = l\cdot\sin\theta$$
$$y = -\cos\theta\cdot l$$
$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$
$$V = -mgy = -mgl\cos\theta$$

$E = T + V \Rightarrow$ diffegyenlet θ-ban.

2. Newton törvényeivel



$$\cancel{F = m\cdot a = m}$$
$$\underline{r} = \hat{x}\cdot l\cdot\sin\theta - \hat{y}\cdot l\cdot\cos\theta$$
$$\dot{\underline{r}} = \hat{x}\cdot l\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta} + \hat{y}\, l\sin\theta\cdot\dot{\theta} =$$
$$= \underbrace{(\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta)}_{\hat{\theta}}\, l\dot{\theta} = l\cdot\dot{\theta}\cdot\hat{\theta}$$
$$\ddot{\underline{r}} = l\cdot\ddot{\theta}\hat{\theta} - \hat{r}\cdot l\cdot\dot{\theta}^2$$
$$F_{ext} = \ldots = \underline{G} - \underline{F}_{kötél}$$

$\Rightarrow$ DE rendszer, centripetális erő és dinamika

3. Lagrange-módszer

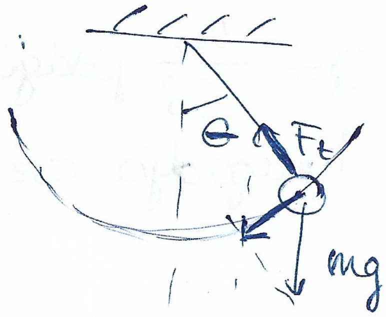
$$L = T - U = \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$
$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Dupla inga: Lagrange, linearizálás, sajátértékprobléma

III. Rezgő rendszerek és hullámok

definíció: rezgő rendszerről beszélünk, ha a visszahúzó erő a kitéréssel arányos (azaz Δl-el)

inga:



$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l} \sin\Theta = 0.$$

rugóra kötött test:

$$F = k \cdot \Delta l$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

csillapítással: $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, ahol $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

δ: csillapítási tényező

megoldás: $\lambda = -\delta \pm i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

gerjesztett rezgés: a DE inhomogénné válik
- lehetséges megoldás: IHDE-ként
  transzformációval
  Green-függvénnyel

Green-függvény: (súlyfüggvény, impulzusválasz)
- matematikai értelmezés
- fizikai alkalmazás
- kiszámolás: <
  - Fourier/Laplace transzformáció
  - ~~Green~~ f megoldás Dirak-ra
- megoldás: időtartománybeli kauzális konvolúció

A két megoldás bármelyikével:

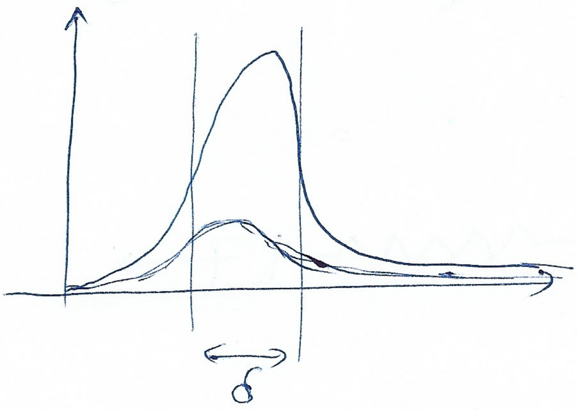
$$G(\tau) = \frac{1}{\omega_0'} \cdot e^{-\gamma\tau} \cdot \sin(\omega_0' t) \; ; \; \omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Frekvenciatartományban:

$$X(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta}$$

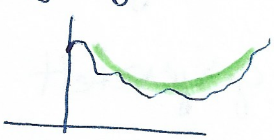
$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ jósági tényező

↑ megadja az erősítést



Rezonancia: a gerjesztés és az alapfrekvencia közel áll egymáshoz

Négyzetes potenciál: a rendszer összenergiája jól közelíthető egy parabolával.
⇒ egyensúlyi pontok keresése

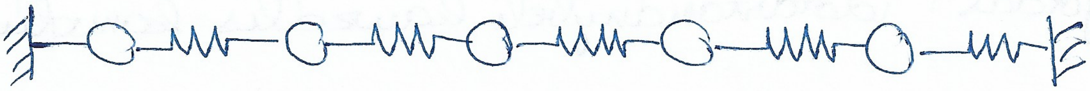


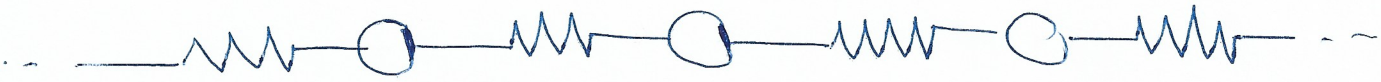
Csatolt rezgések

- több test rugalmas összekötése, ezek rezgése
- Lagrange módszerével kezeljük, a potenciál a rugókban tárolt energia.

Hullámegyenlet

A hullámok terjedését nagyon sok csatolt test rezgéseként fogjuk fel:





$u(x,t)$ a pillanatnyi kitérés az x helyen

$$F = m\cdot a = m\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\cancel{F = k\cdot[u(x+\Delta x,t) - u(x,t)] + k[u(x-\Delta x,t) - u(x,t)]}$$

$$\cancel{= k\cdot[u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x,t)]}$$

$$F = k\cdot[u(x+\Delta x,t) - u(x,t)] - k[u(x-\Delta x,t) - u(x,t)]$$

$$= k\cdot[u(x+\Delta x,t) + u(x-\Delta x,t) - 2u(x,t)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{k}{m}[u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x) - 2u(x)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{k}{m}\cdot\frac{N^2(\Delta x)^2}{N^2}\cdot\frac{u(x+\Delta x)+u(x-\Delta x)-2u(x)}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{L^2}{M}\cdot\frac{k}{N}{}^{K}\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

Megoldás: Tfh. $u(x,t) = U(x)\cdot V(t) = e^{j\omega t}\cdot u(x)$

továbbá $u(x) = A\cdot e^{\mp jkx} = A\cdot e^{\mp j\left(\frac{\omega}{c}\right)x}$

$\boxed{\text{közös konstans}}$

IV. Coulomb törvénye

<u>Alapfogalmak</u>:

- elemi töltés
- elemi mágneses momentum } a részecske alaptulajdonságai, nem magyarázzuk
- elektromos, mágneses és elektromágneses mező
  - → nem a kölcsönhatásokat vizsgáljuk
  - → vektormezős leírás
- Coulomb-erő : $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$; ε_0: permittivitás)
- Gravitációs erő : $\mathbf{G} = -K \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ (K: grav. állandó $\approx 6.67 \cdot 10^{-11}$)
- mágneses erő
- atomi/részecske szinten $F_e \overset{10^5}{\gg} F_m \overset{10^{42}}{\gg} F_g$

<u>Elektrosztatika és magnetosztatika</u>

- álló töltések elektromos teret
- álló spinek mágneses teret } létrehoznak
- mozgó töltések mindkettőt

<u>Elektromos tér</u>

- szuperpozíció $\quad F_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k'} \frac{q_k q_{k'}}{|r_k - r_{k'}|^3} \cdot (r_k - r_{k'})$
- elektromos tér $\quad E(r) = \frac{F_k}{q_k}$ vektormező
- kiszámítás diszkrét eloszlásra
- kiszámítás folytonos eloszlásra
  - ↳ numerikus integrálás, közelítés

Potenciál

– töltés mozgatásával végzett munka:

$$\cancel{W = q\int_a^b E\,ds} \qquad W = -q\int_a^b E\,ds$$

– mivel ponttöltés esetén E csak a távolságtól függ, a mező konzervatív (+ szuperpozíció)

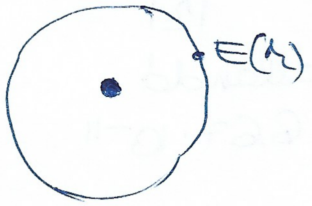
– potenciál: $\Phi(r) = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|r|}} = -q\int_0^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\,dr$

Gauss-törvény:

– matematikában: $\oiint E\,dS = \iiint dE\,dV$ (Stokes)

– fizikában: $\oiint E\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\,dV = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$

– példa: ponttöltés tere, végtelen rúd tere



$$\iint E(r) = E\,4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\iint E(r) = E\cdot 2\pi r\cancel{L} = \cancel{L}\cdot\rho\,\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{2\pi r\varepsilon_0}$$

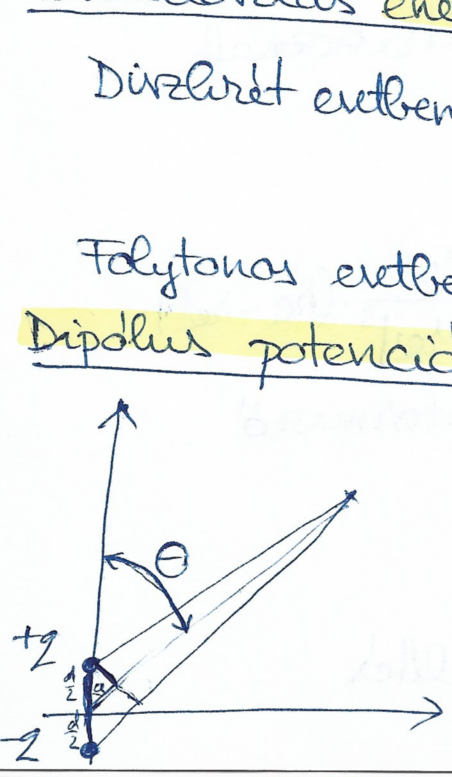
Töltéseloszlás energiája

Diszkrét esetben: $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Folytonos esetben: $u = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\,dV$

Dipólus potenciálja



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \approx \frac{d\cdot\cos\Theta}{r^2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$p = qd$$

Töltéseloszlás momentuma

monopólus: $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$

dipólus: $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{R - d_i e_R} \approx \left(1 + \frac{d_i e_R}{R}\right)\frac{1}{R}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{1}{R}\left(1 + \frac{d_i e_R}{R}\right) \cdot q_i \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p e_R}{R^2}$$

$$p = \sum_i q_i d_i$$

Poisson-egyenlet

Gauss-tv.: $\iint E\, dS = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(E) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E = -\operatorname{grad}\Phi \Rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad}\Phi) = -\Delta\Phi$$

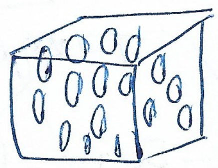
V. Mágnesesség. Amper és Biot–Swart

Magnetosztatika:

– mágneses momentum: részecske alaptulajdonsága
– Bohr magneton: elemi mágneses momentum

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

– minden atom más–más mennyiségű Bohr-magnetont "tartalmaz"
– a két mennyiséget összeszorozva kapjuk a mágneses ~~momentu~~ szaturációt: $M_S = N \cdot \mu \; \left[\frac{A}{m}\right]$
↳ ez a teljesen mágnesezett anyag momentuma (per térfogat)
– a momentum $m = M_S \cdot V = i \cdot A$ alakban írható
– a mágneses potenciál: $\Psi(r) = \frac{mr}{4\pi r^3}$
– a mágneses tér: $H(r) = -\nabla \Psi(r) = \ldots$
– a mágneses fluxussűrűség $B = \mu_0 \cdot H$
– mágneses tér kiszámítása:
  • a teljes térfogat integrálása
  • a felületek integrálása
  • dipólus közelítés.



Biot–Swart

– mágneses tér számolás $B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} dV$
– Speciálisan, vezetékre: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\,dL \times r}{|r|^3}$

Amper-törvény

$$\oint B\,dL = \mu_0 I \quad \text{(B-S következménye)}$$

– levezetés: alkalmazzuk vezetékre

Vezetékek közti erőhatás

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ (Ampere tv)}$$

$$F = I_2 \Delta L B \Rightarrow \frac{F}{\Delta L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \qquad F = \vec{I} \cdot L \times \vec{B}$$

Részecskére ható erő:

$$F = q\vec{v} \times \vec{B}$$

~~V.) Mágnesezettség, Ampere és Biot–Savart~~

~~Alapfogalmak (magnetosztatika)~~

- ~~mágneses momentum: a részecske alaptulajdonsága~~
  ~~↳ mértékegysége a Bohr (B)~~
- ~~mágneses szaturáció: a teljesen mágnesezett fém dipólusmomentuma (per térfogat)~~ ~~$M_S = N \cdot \mu$~~
- ~~mágneses momentuma egy fémdarabnak:~~
  ~~$m = M_S \cdot V$~~
- ~~hurokáram momentuma: $m = I \cdot A$~~

VI. Maxwell egyenletek

Fizikai alapegyenletek (amit már tudunk):

- Gauss törvény az elektromos térre: $\oint\!\!\oint E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
- Amper törvény az áram által keltett mágneses térre: $\oint B\,ds = \mu_0 I_{enclosed} = \mu_0 \iint j\,dS$

Ami még hiányzik:

- elektromos tér és mágneses tér összefüggése
- mágneses terek alapjellemzője (vektorpotenciál)

Faraday indukciós tv.

Az elektromos és mágneses tér kapcsolata:

$$\oint E\,ds = -\iint \frac{dB}{dt}\,dS$$

Azaz az elektromos teret egy zárt vonal mentén a fluxusváltozás határozza meg

Magyarázat: az elektromosan töltött kondenzátor képes átrendezni a mellette levő vezetők töltéseit (?)

Mágnesség alaptörvény

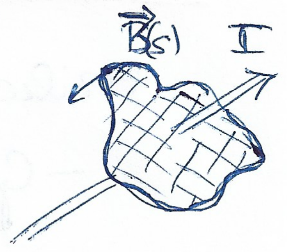
A mágneses tér forrásmentes.

$$\oint\!\!\oint B\,dS = 0.$$

Magyarázat: dipólusok (visszatérő erővonalak)

Ezzel a törvények gyűjteménye majdnem teljes.

Hiányzik még: az Amper-tv. módosítása.



$$\oint B\,ds = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \underbrace{\frac{d}{dt} \iint E\,dS}_{\text{eltolási áram}}$$

Teljes integrálalakban:

$$\oint B\,ds = \mu_0 \cdot \iint \left(J + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E \right) dS$$

Összefoglalva a 4 alaptörvény:

Gauss (elektro):	$\oiint E\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
Faraday:	$\oint E\,ds = -\frac{d}{dt} \iint B\,dS$
Gauss (mágnes):	$\oiint B\,dS = 0$
Amper teljes:	$\oint B\,dS = \mu_0 \cdot I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint \frac{dE}{dt} dS$

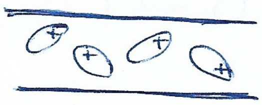
Időfüggetlen (statikus) formában a $\frac{d}{dt}$ részek 0-ák.

VII. Maxwell egyenletek differenciál-formában

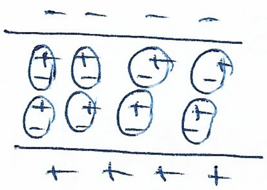
Maxwell törvények polarizálható térben

- eddig mindent vákuumban tárgyaltunk, most lássuk anyag jelenlétében
- a polarizálás lényege, hogy az elektromos/mágneses tér átrendezi az őt körülvevő anyag részecskéit
- az eredeti tér és az anyag "válaszának" összege adja az ezután tárgyalt mennyiségeket:

Elektromos



$\mathbf{E}$ elektromos tér



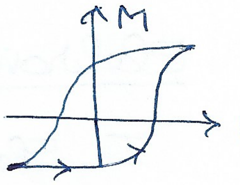
$D = \varepsilon_0 \cdot E + P$ elektromos "eltolás"

- közelítés: $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$

ε_r relatív permittivitás (anyagjellemző)

Mágneses

- a ferromágneses anyagok "emlékeznek"



$B = \mu_0 \mathbf{H}$ (vákuumban)

- eddig B-vel dolgoztunk az egyszerűség kedvéért
- anyag esetén $B = (H + M)\mu_0$

Maxwell-változások $(E \to D,\ B \to H)$

$$\oiint D\,dS = \frac{Q}{\cancel{\varepsilon_0}}$$

$$\oint E\,ds = -\frac{d}{dt}\oiint B\,dS$$

$$\oiint B\,dS = 0$$

$$\oint H\,ds = \oiint \left(J + \frac{d}{dt}D\right)dS$$

$\varepsilon_0 \frac{d}{dt}E \quad \frac{d}{dt}D$

Differenciális Maxwell

Gauss (elektro): $\oiint D\,dS = Q = \iiint \rho\, dV$

$\Rightarrow$ általános Stokes tétel: $\nabla D = \rho$ $\quad \operatorname{div} D = \rho$

– jelentésbeli változás nincs

Faraday: $\oint E\,ds = \iint \frac{d}{dt} B\,dS$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} B = -\operatorname{rot}(E) = -\nabla \times E$ $\quad \operatorname{curl}(E) = -\frac{dB}{dt}$

Gauss (mágnes): $\oiint B\,dS = 0$

$\oiint B\,dS = \iiint \operatorname{div}(B) = 0 \Rightarrow \nabla B = 0$ $\quad \operatorname{div} B = 0$

(azaz B vektorpotenciálos)

Ampere: $\underbrace{\oint H\,ds}_{} = \iint J + \frac{\partial D}{\partial t}\, dS$

$= \iint \operatorname{rot}(H)$ $\quad \operatorname{curl}(H) = J + \frac{\partial D}{\partial t}$

$\Rightarrow \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$

– a differenciális egyenletek az integrálossal egyenértékűek

<u>Elektromágnesesség nagy problémái (5 db)</u>

I. Elektrosztatika $\operatorname{div} D = \rho$ és $\operatorname{curl} E = 0$ $\quad \frac{dB}{dt} = 0$

II. Magnetosztatika ~~div B = 0~~ és $\operatorname{curl} H = 0$ $\quad J + \frac{\partial D}{dt} = 0$

III. Stacionárius mező: ~~div B = 0~~, $\frac{dD}{dt} = 0$. $\frac{dB}{dt} = 0$

IV. Kvázi-stacionárius: $\frac{dD}{dt} = 0$

V. minden teljes

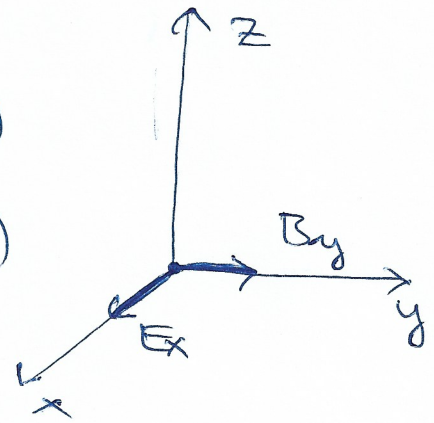
~~VI.~~ + Ohm differenciális törvénye ($j = \sigma \cdot E$)

– minden problémát leír

Maxwell egyenletek megoldása (1D)

$$\nabla \times E = -\frac{dB}{dt} \qquad E = i \cdot E_x(z,t)$$

$$\nabla \times B = \mu\varepsilon \frac{dE}{dt} \qquad B = j \cdot B_y(z,t)$$



$$\text{curl } E = j \cdot \frac{\partial E}{\partial z}$$

$$\text{curl } B = -i \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$j \cdot \frac{\partial E}{\partial z} = -j \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \cancel{j} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial z \partial t}$$

$$-i \cdot \frac{\partial B}{\partial z} = i\mu\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial t} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

Tehát $$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \underbrace{\mu\varepsilon}_{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

$\Rightarrow$ hullámegyenlet!!

Általánosítás (még tovább :P)

Az egyszerűség kedvéért a potenciálokat vákuumban vezetjük be.

Vektorpotenciál: mivel $\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow \exists A : \nabla \times A = B$

Állítás: $\nabla^2 \times A = -\mu j$ (Amper tv. eltolási áram nélkül)

↳ a vektorpotenciál nem jól definiált

A törvények potenciálos alakja

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

...

VIII. Távíró-probléma

Hálózati modellek

A komplex elektromágneses térproblémák megoldása meglehetősen nehéz: nagyon sok numerikus integrálás, számítógépes közelítés.
Ezek megoldása érdekében a térproblémát egy elektromos hálózattal közelítjük.

Ohm differenciális törvénye – áram és töltés kapcsolata

$$\oint\!\!\oint j\,dS = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Jelenségek modellezése

- eltolási áram: ezt elhanyagoljuk
- $\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow$ Kirchhoff huroktörvénye
- $\operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow$ Kirchhoff csomóponti törvénye
- elektromos mező:

$$\oint E\,ds = \int_{\text{drót}} E\,ds + \int_{\text{lemez}} E\,ds + \int_{\text{kint}} E\,ds$$

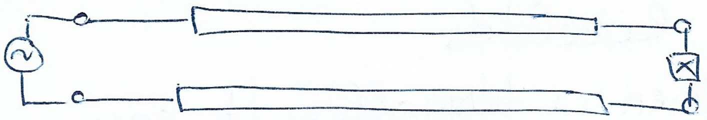
  - feltételezés: $V = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dt}\cdot\frac{1}{C} = \frac{1}{C}\cdot i$
- mágneses mező:
  - feltételezés: a fluxus az A felületen $(A\cdot B)$ csak az áramtól függ:

$$A\cdot B = L\cdot i \Rightarrow A\cdot\frac{dB}{dt} = L\cdot\frac{di}{dt} = V.$$

- bármi más elem:
  - lineáris közelítés (elsőrendű Taylor-sor)

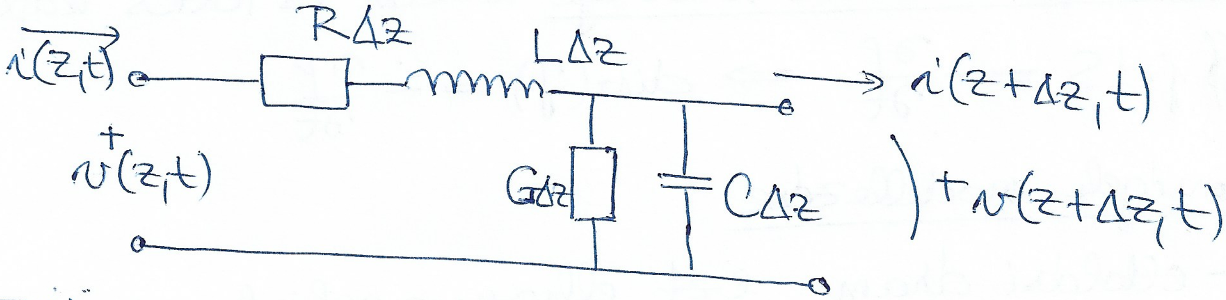
Távvezeték – probléma

– ha az átvinni kívánt jel hullámhossza nagyságrendileg a vezetékhosszhoz hasonlítható, a klasszikus vezetékmodell már nem alkalmazható.



– gerjesztés
– terhelés
– vezeték jellemzők

Infinitezimális (közelítő) modell



Felírva Kirchoff törvényeit:

$$v(z,t) - R\Delta z \cdot i(z,t) - L\cdot\Delta z \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = v(z+\Delta z, t)$$

$$i(z,t) - G\Delta z \cdot v(z+\Delta z,t) - C\cdot\Delta z\cdot \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} = i(z+\Delta z,t)$$

$\Rightarrow (\Delta z \to 0)$ esetben

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -R i(z,t) - L\dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G v(z,t) - C\cdot\dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}}$$

Telegrapher equation
Wave equation

Az egyenleteket még egyszer differenciálva hullámegyenletet kapunk (pont mint a Maxwelli esetben)
A megoldást szeparábilis formában keressük:

$v(z,t) = V(z) \cdot e^{j\omega t}$

$i(z,t) = I(z) \cdot e^{j\omega t}$

Fontos, hogy mivel ezek hullámok, számolnunk kell a visszaverődésekkel (visszhanggal is)

illesztett generátor: nem veri vissza a hullámot

A továbbiakban csak illesztett generátort használunk.

A megoldást nem vezetjük le, csak felírjuk.

<u>Távvezeték jellemzői</u>:

- karakterisztikus impedancia: $Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$
- propagációs konstans: $\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = \alpha + i\beta$

Az egyszeres visszaverődés miatt ~~mindkét ágban~~ két hullámot kell tekinteni:

$$V(z) = V_0^+ \cdot e^{-\gamma z} + V_0^- \cdot e^{\gamma z}$$

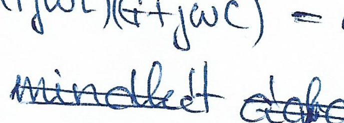
$$I(z) = I_0^+ \cdot e^{-\gamma z} + I_0^- \cdot e^{\gamma z}$$

A lezárástól függő reflexiós tényező: $\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$

A teljes impedancia: $Z_{in}(z) = Z_0 \frac{1+\Gamma e^{2\gamma z}}{1-\Gamma e^{2\gamma z}}$

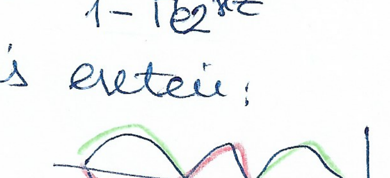
Visszaverődési tényező speciális esetei:

rövidzár: $Z_L = 0 \Rightarrow \Gamma = -1$



nyitott: $Z_L = \infty \Rightarrow \Gamma = 1$

illesztett: $Z_L = Z_0 \Rightarrow \Gamma = 0$

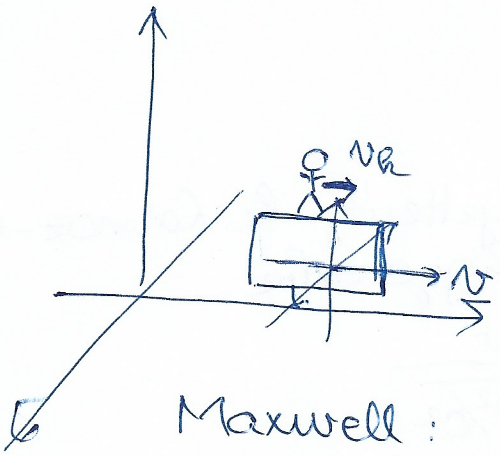


IX. Relativitáselmélet

Speciális relativitás: a relativitáselmélet "klasszikus" része, mely a klasszikus fizikai ismereteket hivatott "beépíteni" az új rendszerbe

Általános relativitás: gravitációs terek és hullámok

Galilei transzformáció és inerciarendszerek



$$\boxed{v' = v - u}$$

- teljesen szemléletes
- csakhogy nem mindig jó

Maxwell: $\dfrac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}$

- az elektromágneses hullám sebessége ~~fé~~ c (mindig).
- ha létezne éter, a sebességet ehhez lehetne viszonyítani
- viszont a fénysebesség abszolút $\Rightarrow$ ellentmondás

Lorenz – Poincaré transzformáció

Alapötlet: $x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$

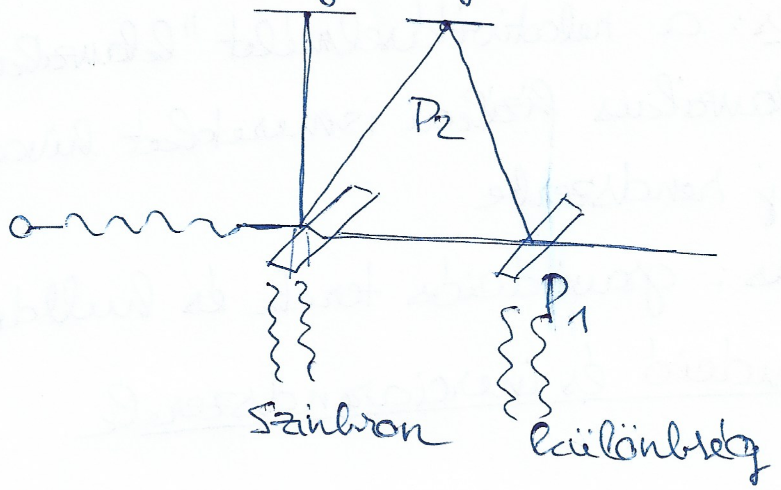
Következmény: x irányú haladás esetén: (u seb.)

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Azaz a koordinátarendszer sebességétől függően a hosszúság és az idő megváltozik.

Michelson – Moorley kísérlet

– a hamzatság megváltozását bizonyítja



Einstein

– a Galilei transzformációt helyettesítjük Lorencz-el
– az idődilatációt is vegyük figyelembe

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \qquad mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ekkor a kinetikus energia $E = mc^2$

X. Kvantummechanika

Alapgondolatok:

- kis méret, hőmérséklet
- potenciálok és valószínűségek
- hullám (Schrödinger) és ennek megoldása

Schrödinger (1D)

$$-\frac{\hbar}{2m}\cdot\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = -\frac{\hbar}{j}\cdot\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Alaptulajdonságok:

1.) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\,dx = 1 \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

2.) $$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2\,dx = 0$$

$$|\Psi|^2 = \Psi\cdot\Psi^*$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\cdot\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + \underbrace{\Psi^*\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}}_{\text{Schrödingerből}}\,dx = 0$$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot|\Psi(x,t)|^2\,dx$$

$$\langle p\rangle = m\cdot\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi\cdot\frac{\hbar\,\partial}{\partial x}\Psi^*\,dx$$

Ehrenfest: $$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$