Sas-Tas feladatok

1. a) Legyen az A: $R^2 \to R^2$ leképezés mátrixa a kanonikus i,j bázis pár esetén $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben is és a térben is ahova képez a bázis: $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Mo: $\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Mivel a kiindulási és képtér ugyan az, ezért $\mathrm{S}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{S}$ összefüggést alkalmazzuk az áttérési mátrix kiszámolásához. $\mathrm{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

$\mathrm{S}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{S} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) Adjuk meg az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ bázisban felírt $\underline{x}_{[s]} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ vektor képét az előző pontbeli leképezés alkalmazása után a képtér $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ bázisában.

Mo:

$\underline{y}_{[s]} = \mathrm{S}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{S} \cdot \underline{x}_{[s]} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}$

2. Legyen az A: $R^2 \to R^3$ leképezés mátrixa a kanonikus bázis párban $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis: $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, a térben pedig ahova képez: $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Mo: Mivel a kiindulási tér és a képtér bázisa eltérő, a $\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{S}$, összefüggést használjuk, ahol $\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, és $\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$. $\mathrm{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{T}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{S} = \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ -5 & 38 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$.

3. Legyen az A: $R^2 \to R^2$ leképezés mátrixa a kanonikus i,j bázis pár esetén $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben is és a térben is ahova képez a bázis: $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. Legyen az A: $R^2 \to R^3$ leképezés mátrixa a kanonikus bázis párban $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis: $\underline{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a}_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, a térben pedig ahova képez: $\underline{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{b}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \underline{b}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Legyen az A: $R^2 \to R^2$ leképezés mátrixa a kanonikus i,j bázis pár esetén $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben is és a térben is ahova képez a bázis: $\underline{a}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. Legyen az A: $R^2 \to R^3$ leképezés mátrixa a kanonikus bázis párban $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis: $\underline{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{a}_2=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, a térben pedig ahova képez: $\underline{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

7. Legyen az A: $R^2 \to R^2$ leképezés mátrixa a kanonikus i,j bázis pár esetén $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
a, Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben is és a térben is ahova képez a bázis: $\underline{a}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \underline{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
b, A sík mely geometriai transzformációjának felel meg ez a leképezés?

8. Legyen az A: $R^2 \to R^3$ leképezés mátrixa a kanonikus bázis párban $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis: $\underline{a}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a}_2=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, a térben pedig ahova képez: $\underline{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{b}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

9. Legyen az A: $R^2 \to R^2$ leképezés mátrixa a kanonikus i,j bázis pár esetén $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.
Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben is és a térben is ahova képez a bázis: $\underline{a}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

10. Legyen az A: $R^2 \to R^3$ leképezés mátrixa a kanonikus bázis párban $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis: $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, a térben pedig ahova képez: $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

11. Legyen az A: $R^3 \to R^2$ leképezés mátrixa a kanonikus bázis pár esetén $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

.

Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis:

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ és a térben ahova képez: $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

12. Legyen az A: $R^3 \to R^3$ leképezés mátrixa a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ bázisban:

$A_{[B,B]} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Add meg a leképezés mátrixát a kanonikus bázisban.

13. Legyen az A: $R^3 \to R^2$ leképezés mátrixa a kanonikus bázis pár esetén $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

.

Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis:

$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ és a térben ahova képez: $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

14. Legyen az A: $R^3 \to R^3$ leképezés mátrixa a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ bázisban:

$A_{[B,B]} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Add meg a leképezés mátrixát a kanonikus bázis pár esetén!

15. Az $A: R^3 \to R^3$ leképezés tükrözi a vektort az x-y tengelyek által kifeszített síkra, az így kapott vektort kétszeresére nyújtja, végül elforgatja 90 fokkal a z tengely körül (pozitív, x→y irányba). Határozza meg a leképezés mátrixát az ijk bázisban! (Ez igazából nem sas-tas, csak szimpla hogyan kell felírni leképezés mátrixát típusú feladat)

16. Adott az **A** leképezés mátrixa a kanonikus **i**, **j** és **k** bázisban felírva. Határozza meg ugyanezen leképezés mátrixát, amely a $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ bázisban felírt vektorok képét a $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ bázisban adja meg!

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Trükkösebb feladatok

1. Egy A homogén lineáris leképezés a következőképp rendel térbeli vektorokhoz síkbeli vektorokat:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Adjuk meg ezek alapján az A mátrix alakját, ha

a) a térben a megadott bázis az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, a síkon pedig a szokásos $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok!

b) a térbeli bázis ugyanaz, mint az előbb, de a síkban áttérünk az $\underline{i}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{j}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisra!

c) a síkbeli bázis az eredeti $\underline{i}$ és $\underline{j}$ de a térben áttérünk az $\underline{a}' = \underline{a} + \underline{b}, \quad \underline{b}' = \underline{a} - \underline{b}, \quad \underline{c}' = 2\underline{c}$ bázisra!

2. A V_1 vektortér bázisa legyen $\underline{a}_1, \underline{b}_1$, a V_2 vektortéré pedig $\underline{a}_2, \underline{b}_2, \underline{c}_2$.

a) Írja fel annak az $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ leképezésnek a mátrixát a fenti bázispárban, amely az alábbi hozzárendeléseket végzi!

$$\underline{a}_1 \to \underline{b}_2 - \underline{c}_2 \qquad \underline{b}_1 \to -3\underline{a}_2 + 2\underline{b}_2 - 2\underline{c}_2.$$

b) Hogyan változik meg a mátrix, ha a V_1-beli bázisban felcseréljük az $\underline{a}_1$ és $\underline{b}_1$ vektorok sorrendjét? Miért?

c) A V_1 vektortérben áttérünk az $\underline{a}_1' = \underline{a}_1 - 2\underline{b}_1, \quad \underline{b}_1' = 2\underline{a}_1 + \underline{b}_1$ bázisra. Hogy néz ki az új mátrix?

3 Adott a sík vektorain az a lineáris leképezés, amely minden vektort először elforgat pozitív irányba 90 fokkal, majd a kétszeresére nyújt.

a) Adja meg a leképezés mátrixát a sík szokásos bázisában!

b) Hogyan változik a leképezés mátrixa, ha a képtérben $\underline{i}$, $\underline{j}$ helyett a $-\underline{j}$, $\underline{i}$ vektorok alkotta bázist vesszük?

4. Adott a sík vektorain egy lineáris leképezés, amely minden vektort először a háromszorosára nyújt, majd elforgat negatív irányba 90 fokkal.

a) Adja meg a leképezés mátrixát a sík szokásos bázisában!

b) Hogyan változik a leképezés mátrixa, ha a képtérben $\underline{i}$, $\underline{j}$ helyett a $\underline{j}$, $\underline{-i}$ vektorok alkotta bázist vesszük?

5. A V_1 vektortér bázisa legyen $\underline{a}_1, \underline{b}_1$, a V_2 vektortéré pedig $\underline{a}_2, \underline{b}_2, \underline{c}_2$.

a) Írja fel annak az $\mathcal{A}: V_1 \to V_2$ leképezésnek a mátrixát a fenti bázispárban, amely az alábbi hozzárendeléseket végzi!

$$\underline{a}_1 \to \underline{a}_2 + 4\underline{b}_2 \qquad\qquad \underline{b}_1 \to 3(\underline{a}_2 - \underline{b}_2) - \underline{c}_2$$

b) Hogyan változik meg a mátrix, ha a V_2-beli bázisban felcseréljük az $\underline{a}_2$ és $\underline{b}_2$ vektorok sorrendjét? Miért?

c) A V_1 vektortérben áttérünk az $\underline{a}_1' = 2\underline{a}_1 - \underline{b}_1$, $\underline{b}_1' = \underline{a}_1 + 2\underline{b}_1$ bázisra. Hogy néz ki az új mátrix?