Lineáris Algebra II

Erdélyi Áron

2018.06.17.

Tartalomjegyzék

1 Vektorrendszer és mátrix rangja, egyenletrendszer megoldhatósága

Definíció: A vektorrendszer rangján a vektorok által generált altér dimenzióját értjük. Mátrix sorrangján a sorvektorok rajngját, oszloprangján az oszlopvektorok rangját, determinánsrangján a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nem nulla determináns méretét értjük.

Tétel: Mátrix sor-, oszlop-, és determinánsrangja megegyezik. E tétel miatt elegendő egyszerűen a mátrix rangjáról beszélni, jelölése: rang(A).

Következmény: Az $n \times m$-es mátrixok rangja legfeljebb $\min(n, m)$ lehet.

Tétel: Ha A $n \times n$ típusú mátrix, akkor

- A akkor és csak akkor reguláris, ha rangja n.
- $rang(A) = n \Leftrightarrow A$ is reguláris $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow Ax = b$-nek egyetlen megoldása van.
- $rang(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$-nak van nem triviális megoldása.

Tétel: Ha A $m \times n$-es mátrix, akkor az $Ax = b$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $rang(A) = rang(A|b)$, vagyis az együttható mátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával.

Bizonyítás: Az egyenletrendszert a következő alakban írjuk: $x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_ka_k = b$.
Ha a rangok egyenlők, az egyenletrendszer megoldható:
Ha $rang(A) = rang(A|b) = r$, akkor bármely $r + 1$ darab oszlopvektor összefüggő. Legyenek A független vektorai $a_1, a_2, ..., a_r$. Ezekhez b-t hozzátéve összefüggő rendszert kapunk. Mivel b "rontotta" el a függetlenséget, ezért b kifejezhető az a_i-k lineáris kombinációjával, amelyben a skalár együttható x_i-k az egyenletrendszer megoldásai, vagyis:

$$b = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n.$$

Az állítás másik része: ha az egyenletrendszer megoldható, akkor a rangok egyenlők.
Legyen egy meoldás: $b = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n$, és $rang(A) = r$.
Azt kell bizonyítani, hogy $rang(A|b) = r$, vagyis hogy bármely $r + 1$ oszlopvektora lineárisan összefügg, és van r lineárisan független oszlopa. Ezen utóbbi A rangja miatt teljesül.
Ha az $r + 1$ vektor csak a-kból áll, akkor A rangja miatt ezek összefüggők.
Ha az $r + 1$ vektor egyike a b vektor, akkor két eset van:

1. Az r darab a_i vektor összefüggő, ekkor b-t hozzátéve is összefüggő marad, ezért a rang nem változik.
2. Az r darab a_i vektor lineárisan független. Ekkor bármely más a_j-t hozzátéve összefüggő lesz, különben A rangja $r + 1$ lenne. A hozzávett a_j-k azonban az ismert tétel szerint kifejezhetők az eredeti a_i-kkel. Ezeket a b előállításába helyettesítve azt kapjuk, hogy b kifejezhető az r darab a_i lineárisan független vektorral, tehát az r darab a_i vektor és b lineárisan összefüggő, ezért a rang nem változik.

Következmény: Ha n az ismeretlenek száma, r a rang, akkor $n - r$ a rendszer úgy nevezett szabadsági foka, ennyi ismeretlent szabadon választhatunk, a Gauss eliminációnál tanultak alkalmazásával.

Tétel: Ha az A mátrix rangja, és a kibővített mátrix rangja egyenlő az ismeretlenek számávalm akkor pontosan egy megoldás van, amint a fenti bizonyítás e feltétel melletti megismétlésével könyen látható.

Következmény: Homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól külömböző megoldása, ha az együttható mátrix rangja az ismeretlenek számánál kisebb.

2 Bázis Transzormáció

2.1 Áttérés más bázisokra

Tétel: Legyen $V \neq \{0\}$ vektortér, $[e]$ és $[u]$ két bázis V-ben. Ha V vektortér x vektorának koordináta mátrixa $x_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]}$ az $[e]$ bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon x vektor $[u]$ bázisban felírt koordináta mátrixa az alábbi képletből számolható:

$$x_{[u]} = U_{[e]}^{-1} x_{[e]},$$

ahol az U mátrix oszlopai az $[u]$ bázis vektorainak az $[e]$ bázisra vonatkozó koordinátamátrixai. Az U mátrixot áttérési mátrixnak hívjuk.

Bizonyítás: Az x vektor $[e]$ szerinti eredeti koordináta mátrixa:

$$x_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[e]} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[e]} + ... + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{[e]} = E_{[e]} x_{[e]}.$$

Ha felírjuk ugyan ezt a vektort az $[u]$ bázis szerint:

$$x_{[u]} = x'_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}_{[e]} + x'_2 \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}_{[e]} + ... + x'_n \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}_{[e]} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}_{[u]} = U_{[e]} x_{[u]}.$$

Mivel a két koordináta mátrix egyenlő, ezért: $Ex_{[e]} = U_{[e]} x_{[u]}$. A baloldalakat megszorozva U^{-1}-el kapjuk: $U_{[e]}^{-1} x_{[e]} = x_{[u]}$.

2.2 Lineáris leképezések mátrixa bázisváltás esetén

Tétel: Ha az $L : V^n \to W^k$ lineáris leképezés mátrixa rögzített $[a] \in V^n$ és $[b] \in W^k$ bázisokra $A_{[a][b]}$, akkor ugyanezen leképezés $A_{[a'][b']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ és a $[b] \in W^k$ bázisokra a következő képpen számolható:

$$A_{[a'][b']} = T^{-1} A_{[a][b]} S,$$

Ahol T a képtér, és S a kiindulási tér áttérési mátrixa.

Bizonyítás: Az $A_{[a][b]} x_{[a]} = y_{[b]}$ képletből kiindulva, alkalmazzuk a bázistranszformáció képletét:

$$A_{[a][b]}(Sx_{[a']}) = Ty_{[b']} \longrightarrow T^{-1} A_{[a][b]}(Sx_{[a']}) = y_{[b']}.$$

Tétel: Ha az $L : V^n \to V^n$ lineáris transzformáció mátrixa rögzített $[a] \in V^n$ bázisra vonatkoztatva $A_{[a]}$, akkor ugyanezen transzformáció $A_{[a']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ bázisra következő képlettel számolható:

$$A_{[a']} = S^{-1} A_{[a]} S,$$

ahol S a kiindulási tér áttérési mátrixa.

Bizonyítás: Az előző tételbe helyettesítsük az T-t S-sel.

2.3 Diagonalizálás, hasonló mátrixok

Tétel: Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve e bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, ahol a főátlóban a sajátértékek állnak.

$$A_{[a']} = S^{-1} AS = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Bizonyítás:

$$S = [s_1|s_2|...|s_n] \to AS = [As_1|As_2|...|As_n], \quad D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \to SD = [\lambda_1 s_1|\lambda_2 s_2|...|\lambda_n s_n].$$

Mivel $SD = AS$, ezért $D = S^{-1}AS$.

Definíció: Az A mátrix hasonló a B mátrixhoz, ha létezik egy olyan S mátrix, amellyel fennáll, hogy $A = S^{-1}BS$.

Definíció: Az A mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel: A hasonlóság az $n \times n$-es mátrixok körében ekvivalencia reláció.

Bizonyítás:

- Reflexív: $A = E^{-1}AE$.
- Szimetrikus: Ha $A \cong B$, akkor $B \cong A$:
$$A = C^{-1}BC \to [C^{-1}]^{-1}AC^{-1} = B.$$
- Tranzitív: Ha $A \cong B$ és $B \cong C$, akkor $A \cong C$:
$$A = U^{-1}BC, B = V^{-1}CV \to A = U^{-1}(V^{-1}CV)U = (VU)^1C(VU).$$

Tétel: Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha A hasonló B-hez, és A sajátvektora s, akkor B ugyanazon sajátértékéhez tartozó sajátvektora Ts.

Bizonyítás: $As = T^{-1}BTs = \lambda s \to BTs = \lambda(Ts)$.

Tétel: Diagonalizálhatóság elégséges feltétele: Ha valamely kvadratikus $(n \times n)$ mátrix sajátértékei mind külömbözők, kakor a mátrix diagonalizálható.

Bizonyítás: Külömböző sajátértékek esetén a sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért bázist alkotnak.

Tétel: Az A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa.

Bizonyítás:

- Ha a sajátvektorok bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra már bizonyítottuk.
- Ha az A mátrix diagonalizálható, vagyis hasonló egy diagonális mátrixhoz, akkor azt fogjuk bizonyítani, hogy a diagonális mátrix elemei A sajátértékei, és S elemei az A sajátvetorai. Az, hogy a sajátvektorok bázist alkoznak onnan tudhatjuk, hogy S invertálható, tehát $det(S) \neq 0$, ezért a sajátvektorok függetlenek. Mivel bármely független vektorrendszer bázis, ha elemszáma egyenlő a dimenzióval, csak azt kell bizonyítani, hogy S oszlopai valóban sajátvektorok.
  Legyen $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), S = [s_1|s_2|...|s_n]$. Akkor a hasonlósági képletből kiindulva:
  $$D = S^{-1}AS \to SD = AS$$
  A két mátrix egyenlőségéből $As_i = \lambda s_i$, tehát a diagonális elemek valóban a sajátértékek, és az áttérési mátrix elemei valóban a sajátvektorok.

Tétel: Ha valamely A $(n \times n)$ típusú mátrix sajátaltereinek dimenzióinak összege éppen n, akkor a mátrix diagonalizálható.
(Geometriai multiplicitás = algebrai multiplicitás).

2.4 Kvadratikus alakok diagonalizálása

2.4.1 Kvadratikus alakok

Definíció: Legyen a V vektortér a valós test felett. Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezést bilineáris függvénynek nevezzük, ha mindkét változójában lineáris. L minden (v_1, v_2) vektorpárjához egyértelműen hozzárendel egy valós számot, amit $L(v_1, v_2)$-vel jelölünk.

1. (a) $L(v_1 + v_2, v_3) = L(v_1, v_3) + L(v_2, v_3)$.
   (b) $L(v_1, v_2 + v_3) = L(v_1, v_2) + L(v_1, v_3)$.
2. (a) $L(\lambda v_1, v_2) = \lambda L(v_1, v_2)$.
   (b) $L(v_1, \lambda v_2) = \lambda L(v_1, v_2)$.

Ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v_1, v_2, v_3 \in V$ vektorok.

Definíció: Az L bilineáris függvénynek a $[b] = b_1, b_2, ..., b_n$ bázis szerinti L mátrixán azt az $n \times n$-es mátrixot értjük, melyben az i-dik sor j-dik eleme $l_{ij} = L(b_i, b_j)$.

Tétel: Ha $L : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris függvény, akkor $L(x, y) = x^T Ay$, ahol $x, y \in V$ és A a bilineáris függvény mátixa.

Bizonyítás:

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + ... + x_n b_n, \quad y = y_1 b_1 + y_2 b_2 + ... + y_n b_n.$$

Ezeket behelyettesítve és alkalmazva a bilineáris függvények tulajdonságait:

$$L(x, y) = L(x_1 b_1 + x_2 b_2 + ... + x_n b_n, y_1 b_1 + y_2 b_2 + ... + y_n b_n) =$$

$$x_1 y_1 L(b_1, b_1) + x_1 y_2 L(b_1, b_2) + ... + x_1 y_n (b_1, b_n)+$$

$$x_2 y_1 L(b_2, b_1) + x_2 y_2 L(b_2, b_2) + ... + x_2 y_n (b_2, b_n)+$$

$$\vdots$$

$$x_n y_1 L(b_n, b_1) + x_n y_2 L(b_n, b_2) + ... + x_n y_n (b_n, b_n) =$$

$$[x_1, x_2, ..., x_n] \begin{bmatrix} L(b_1, b_1) & L(b_1, b_2) & \cdots & L(b_1, b_n) \\ L(b_2, b_1) & L(b_2, b_2) & \cdots & L(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L(b_n, b_1) & L(b_n, b_2) & \cdots & L(b_n, b_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = X^T Ay$$

Definíció: Az L bilineáris függvény szimetrikus, ha $L(v_1, v_2) = L(v_2, v_1)$.

Tétel: Az L bilineáris függvény akkor és csak akkor szimetrikus, ha a mátrixa szimetrikus.

Bizonyítás: A definícióból következik.

Definíció: Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris függvényhez tartozó $Q(x) = L(x, x) : V \to \mathbb{R}$ függvényt az L kvadratikus alakjának nevezzük.

Tétel: Szimetrikus mátrix külömböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai merőlegesek

Bizonyítás: A tételt most csak 3 dimenzióra bizonyítjuk.

$$\left.\begin{matrix} As_1 = \lambda_1 s_1 \\ As_2 = \lambda_2 s_2 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} As_1 s_2 = \lambda_1 s_1 s_2 \\ As_1 s_2 = \lambda_2 s_1 s_2 \end{matrix}\right\} \to 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) s_1 s_2.$$

Mivel $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, ezért $s_1 s_2 = 0$, tehát a sajátvektorok merőlegesek egymásra.

Definíció: Az A mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha $D = S^{-1}AS$, ahol S ortogonális, D diagonális mátrix.

2.4.2 Kvadratikus alak diagonalizálása, főtengely tétel

Tétel: (Főtengely tétel): A $Q = x^T Qx$ kvdratikus alakhoz tekintsük az S ortogonális transzformációt, amelynek S mátrixában az oszlopok a Q szimetrikus mátrix ortonormált sajátvektorai. Áttérve ezen ortonormált sajátvektorok bázisára, vagyis alkalmazva az $x = Su$ koordináta transzformációt, a Q kvadratikus alak a következőképpen írható: $Q = x^T Qx = u^T Du = \sum_i \lambda_i u_i^2$, ahol λ_i-k az A mátrix sajátértékei. Ezt a transzformációt főtengely transzformációnak nevezzük.

Definíció: A $Q = x^T Ax$ kvadratikus alak $A \in T^{n\times n}$ szimetrikus mátrixának n külömböző sajátaltereit a Q kvadratikus alak főtengelyeinek nevezzük. Két dimenzióban a megfelelő kúpszelet szimetria tengelyei a főtengelyek.

Definíció: A Q kvadratikus alak

- pozitív definit, ha minden $x \neq 0$ helyettesítésre $Q > 0$.
- pozitív szemidefinit, ha minden x-re $Q \geq 0$.
- indefinit, ha mind pozitív, mind negatív értékeket is felvesz.

Tétel: Az $n \times n$-es Q mátrix akkor és csak akkor

- pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív.
- pozitív szemidefinit, ha minden sajátértéke pozitív, vagy nulla.

Bizonyítás: A $Q = x^T Qx = u^T Du = \sum_i \lambda_i u_i^2$ összefüggésből az állítás következik.

Tétel: Q akkor és csak akkor pozitív definit, ha a bal felső négyzetes mátrixok aldeterminánsai mind pozitívak.

Tétel: (Spektrál tétel): Valamely négyzetes mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimetrikus.

Bizonyítás: Mivel A mátrix szimetrikus, ezért a külömböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek, de legalább is ortogonálisak.
$A = A^T$, mert szimetrikus, D diagonális mátrix, S pedig ortogonális, azaz $S^{-1} = S^T$.
A diagonalizálást A^T-re felírva:

$$A^T = (S^{-1}DS)^T = (S^{-1})^T DS^T = SDS^{-1}.$$

3 Komplex számok

3.1 Komplex szám fogalma, műveletek

Definíció: Legyen $\mathbb{C}$ a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$. A $\mathbb{C}$-n két műveletet értelmezünk: egy összeadás, és egy szorzás nevűt. A szokásos módon $+$ és $\cdot$ jelekkel jelöljük ezeket. A $\mathbb{C}$ halmaz elemei a műveletekkel együtt alkotják a komplex számokat.

Definíció: Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha első és második elemeik egymással páronként egyenlők: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

Következmény: $(a,b) \neq (b,a)$, kivéve, ha $a = b$.

Definíció: Összeadás: $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{C}$.

Definíció: Szorzás: $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$.

Tétel: A $\mathbb{C} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok testet alkotnak az előző műveletekre nézve.

3.2 A komplex számok algebrai alakja

Tétel: Az $(a,0)$ komplex számok és a valós számok között egy-egy értelmű, művelettartó leképezés létesíthető. Másképpen fogalmazva, az $(a,0)$ komplex számok izomorfak a valós számokkal.

Bizonyítás: Konstruktív módon megadjuk az izomorfiát biztosító egy-egyértelmű leképezést. A hozzárendelés módja: $(a,0) \in \mathbb{C} \leftrightarrow a \in \mathbb{R}$.

Tétel: Minden komplex szám felírható olyan kéttagú összegként, ahol az első tag mindkét tényezőjének van izomorf képe a valós számok között, a másodiknak pedig egyik tényezője rendelkezik e tulajdonsággal: $(a,b) = (a,0)(1,0) + (b,0)(0,1)$

Bizonyítás: A kijelölt műveleteket elvégezve adódik az állítás.

Definíció: A $z = (a,b)$ komplex szám algebrai alakja $z = (a,b) = a + bi$, ahol $i^2 = -1$.

Definíció: A $z = a + bi$ komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Számolás algebrai alakban:

- Összeadás: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.
- Szorzás: $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- Osztás:
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac-bd)}{c^2+d^2} + \frac{(ad+bc)}{c^2+d^2}i.$$

Definíció: A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja a $\overline{z} = a - bi$ komplex szám.

3.2.1 A komplex számok trigonometrikus alakja

Definíció: A z komplex szám trigonometrikus alakja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{b}{a}.$$

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

3.2.2 Műveletek trigonometrikus alakban

Tétel: Szorzás: $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Bizonyítás:

$$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_1\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_i\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\} =$$
$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Következmény: Moivre formula: $z^k = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))$.

Tétel: Osztás: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

Bizonyítás: A szorzáshoz hasonlóan bizonyítjuk.

3.2.3 Gyökvonás komplex számokból

Definíció: A z komplex számot a $z* \neq 0$ komplek szám n-edik gyökének nevezzük, ha $z^n = z*$:

$$\sqrt[n]{z*} = z \Leftrightarrow z^n = z*.$$

Definíció: $w(z) = x + iy = \sqrt{a+ib}$ komplek számokon értelmezett omplex értékű x függvény értéke az a komplex szám, aminek négyzete $a + bi$, továbbá vagy $x > 0$, vagy $x = 0$, vagy $y \geq 0$.

3.3 Egységgyökök, primitív egységgyökök

Definíció: n-edik (komplex) egységgyöknek nevezzük a z komplex számot, ha $z^n = 1$.
Másképpen: az $x^n - 1 = 0$ úgynevezett binom egyenlet komplex számok körében vett megoldásait n-edik egységgyöknek nevezzük. A valós megoldások: 1, ha n páratlan, és ± 1, ha n páros.
Jelölés: $\epsilon_k^n = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$.

Tétel: Az összes n-edik egységgyök előáll az első; $\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ egységgyök hatványaiként.

Bizonyítás: A moivre formulából azonnal következik.

Tétel: Az n-edik egységgyökök csoportot alkotnak a komplex számok szokásos szorzására nézve.

Bizonyítás:

1. Zártság:

$$(\epsilon_k\epsilon_l)^n = (\cos\frac{(k+l)2\pi}{n} + i\sin\frac{(k+l)2\pi}{n})^n = \cos\frac{(k+l)n2\pi}{n} + i\sin\frac{(k+l)n2\pi}{n} =$$
$$= \cos((k+l)2\pi) + i\sin((k+l)2\pi) = 1.$$

2. Egység: Az $1 = 1(\cos\frac{0}{n} + i\sin\frac{0}{n})$.

3. Inverz: $\epsilon_k\epsilon_j = 1(\cos\frac{0}{n} + i\sin\frac{0}{n})$ alapján: $\frac{k2\pi}{n} + \frac{j2\pi}{n} = \frac{n2\pi}{n}$, ahonnan $j = n - k$. Tehát $\epsilon_k^{-1} = \epsilon_{n-k}$.

Definíció 1: Azt az ϵ_k n-edik egységgyököt, amelynek hatványai az összes többi egységgyököt előállítják, primitív egységgyöknek nevezzük.

Definíció 2: Az az egységgyök, amelynek n-dik hatványa 1, és semelyik ennél kisebb hatványa nem 1, primitív egységgyök.

Tétel: Definíció 1 $\rightarrow$ Definíció 2.

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy vannak egyenlők is az ϵ_k hatványai között, pl: $\epsilon_k^j = \epsilon_k^l$, azaz

$$\frac{\epsilon_k^j}{\epsilon_k^l} = \epsilon_k^{j-l} = 1.$$

Mivel $j - l < n$, ezért ez azt jelentené, hogy ϵ_k-hoz nem az n lenne a legkisebb olyan szám, amire n-edik egységgyök. Ez ellentmondás, tehát az eredeti feltevésünk igaz.

Tétel: Ha ϵ_k n-edik primitív egységgyök, akkor k és n nem relatív prímek (nincs közös osztójuk).

Bizonyítás: A primitív egységgyökök hatványaival minden egységgyök előállítható, így az első is:

$$\epsilon_k^j = \epsilon_1$$

$$\cos\frac{jk2\pi}{n} + i\sin\frac{jk2\pi}{n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{jk2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} + l2\pi$$

$$\frac{jk\frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n}}{u} = 2\pi$$

$$\frac{jk-1}{u} = n$$

$$jk - 1 = nu$$

$$jk - nu = 1.$$

Tehát ha lenne k-nak és n-nek közös osztója, akkor az osztója lenne 1-nek is, ami lehetetlen.

Tétel: Ha n és k relatív prímek, akkor ϵ_k n-edik egységgyök.

Bizonyítás: A 2. definíció teljesülését bizonyítjuk: ha k relatív prím n-hez, akkor n az a legkisebb szám, amire ϵ_k n-edik egységgyök. Indirekt módszerrel bizonyítunk. Tegyük fel, hogy ϵ_k-t $j < n$ hatványra emeljük, és 1-et kapunk. A moivre-tétel szerint ez azt jelenti, hogy

$$\epsilon_k^j = \cos\frac{jk2\pi}{n} + i\sin\frac{jk2\pi}{n} \neq \cos 0 + i\sin 0.$$

A 0 úgy jöhetne ki, hogy a $\frac{jk2\pi}{n}$ szög a 2π egész számú többszöröse lenne. Mivel k relatív prím n-hez, ez csak úgy lehetne, ha n osztója lenne j-nek, de ez lehetetlen, hiszen $n > j$.

Definíció 3: Ha ϵ_k n-edik egységgyök, továbbá n, k relatív prímek, akkor ϵ_k primitív n-edik egységgyök.

Tétel: Definíció 2 $\rightarrow$ Definíció 1 $\rightarrow$ Definíció 3 $\rightarrow$ Definíció 2. Mivel a bizonyításban körbeértünk, beláttuk a 3 definíció egyenértékűségét.

3.4 Komplex számok exponenciális alakja

Definíció: A $z = re^{i\varphi}$ alakot, ahol r a z komplex szám abszolút értéke, és φ az argumentuma, a komplex szám exponenciális alakjának nevezzük.

Számolás exponenciális alakban:

- $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.
- $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{ni\varphi}$.
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+k2\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

3.5 Az algebra alaptétele

Tétel: (Az algebra alaptétele:) Az n-ed fokú komplex együtthatós polinomnak pontosan n darab komplex gyöke van.

Tétel: Ha a z kompley szám gyoke egy polinomnak, akkor konjugáltja is gyöke.

4 Euklideszi terek

Definíció: Az $< x, y >: V \times V \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek függvényértékét $s(x, y) =< x, y >$-nal jelöljük, skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall x \in V$ esetén $< x, x >\geq 0$, és $< x, x >= 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$.
2. Szimetrikus: $\forall x, y \in V$-re $< x, y >=< y, x >$.
3. Homogén: $\forall x, y \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$.
4. Lineáris: $\forall x, y, z \in V$-re $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$.

Definíció: A skalárszorzattal ellátott tereket Euklideszi tereknek nevezzük.

Tétel: Minden véges dimenziós vektortérben megadható skalárszorzat.

Bizonyítás: Konstruktív, megadunk egy skalárszorzatot.

$$< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

1. Pozitív definit:
$$< x, x >= x_1 x_1 + x_2 x_2 + ... + x_n x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0.$$
2. Szimetrikus:
$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i =< y, x > .$$
3. Homogén:
$$< \lambda x, y >= \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \lambda < x, y > .$$
4. Lineáris:
$$< x + y, z >= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i =< x, z > + < y, z > .$$

4.0.1 Metrikus tér

Definíció: A H halmazt metrikus térnek nevezzük, ha van olyan metrikának nevezett $d : H \times H \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ függvény, amelyre a következők teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall x, y \in H, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. Szimetrikus: $\forall x, y \in H, \quad d(x, y) = d(y, x)$.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\forall x, y, z \in H, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definíció: Diszkrét metrikának nevezik a következő függvényt:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq y \\ 0, & \text{ha } x = y \end{cases}.$$

4.0.2 Normált tér

Definíció: A V vektorteret normált-nak nevezzük, ha van olyan $||x|| : V \to \mathbb{R}$ függvény, az úgynevezett norma, amelyre a következők teljsülnek:

1. Pozitív definit: $\forall x \in V$-re $||x|| \geq 0$, és $||x|| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$.
2. Homogén: $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$-re $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\forall x, y \in V$ esetén $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Tétel: Minden normált tér metrikus tér.

Tétel: Konstruktív, megadunk egy metrikát: $d(x, y) := ||x - y||$. Erről kell belátni, hogy rendelkezik-e a metrika tulajdonságaival.

1. Pozitív definit: $||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. Szimetria: $||x - y|| = ||y - x||, \forall x, y \in V$, hiszen mindegy, hogy a vektor melyik irányba mutat, a nagysága ugyan az lesz.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $||x - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y||$. Ez teljesül $\forall x, y, z \in V$-re.

Tétel: Minden skalárszorzaos tér normált tér.

Bizonyítás: Konstruktív, megadunk egy normát $||x|| := \sqrt{< x, x >}$. Ez rendelkezik a norma tulajdonságaival.

4.0.3 Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség

Tétel: (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség): $| < a, b > | \leq ||a|| \cdot ||b||$.

Bizonyítás: Tekintük az $< a + \lambda b, a + \lambda b >$ skalárszorzatot. $0 \leq < a + \lambda b, a + \lambda b >$ a pozitív definitség miatt.

$$0 \leq < a + \lambda b, a + \lambda b > = < a, a > + < a, \lambda b > + < \lambda b, a > + < \lambda b, \lambda b > =$$
$$= < a, a > +2 < a, \lambda b > + < \lambda b, \lambda b > = \lambda^2 < b, b > +2\lambda < a, b > + < a, a > .$$

Ez λ-ra nézve egy kétismeretlenes másodfokú egyenlőtlenség. Mivel ennek a függvénynek legfeljebb 1 gyöke lehet, a diszkrimináns nem pozitív, azaz

$$4(< a, b >)^2 - 4 < b, b >< a, a > \leq 0 \Rightarrow < a, b >^2 \leq < a, a >< b, b >,$$

Amiből

$$| < a, b > | \leq ||a|| \cdot ||b||.$$

Tétel: Minden Euklideszi tér metrikus tér.

Bionyítás: Konstruktív, megadunk egy metrikát: $d(x, y) = \sqrt{< x - y, x - y >}$. Teljesünek az előírt tulajdonságok.

4.1 Ortonormált bázis

4.1.1 Szög fogalmának általánosítása, ortogonális vektorok

Definíció: Euklideszi térben két vektor, az a és a b által beárt α szöget a következőképpen lehet értelmezni. Legyen $< a, b >$ egy skalárszorzat V-ben, ls valamely x vektor normája $||x|| := \sqrt{< x, x >}$. Ekkor

$$\cos \alpha = \frac{< a, b >}{||a|| \cdot ||b||}.$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az a vektor ortogonális a b vektorra, ha $< a, b >= 0$.

4.1.2 Ortogonális bázis létezése

Tétel: Ortogonális, nem nulla vektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: A függetlenség definíciójából indulunk ki:
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ csak akor, ha $\forall \lambda_i = 0$. Vegyük rendre az $x_1, x_2, ..., x_n$ vektorokkal való skalárszorzatot.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0 \qquad / \cdot x_j \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Ezzel azt kapjuk, hogy $\lambda_i < x_i, x_i >= 0$. A skalárszorzat pozitív definit tuljdonsága miatt ez csak akkor teljesül, ha $\lambda_i = 0$.

Tétel: Minden euklideszi térben van ortogonális bázis.
Mivel minden tér saját magának az altere, az általánosság megszorítása nélkül a bizonyítást elegendő alterekre bemutatni.

Tétel: Minden altérben van ortogonális bázis.

Bizonyítás: Konstruktív, azt bizonyítjuk, hogy minden független rendszerből kiindulva, így bázisból is, tudunk ugyanolyan elemszámú ortogonális rendszert konstruálni. Gram-Schmidt ortogonalizáció: Legyen $b_1, b_2, ..., b_n$ egy független rendszer. Ebből képezzük $c_1, c_2, ..., c_n$ ortogonális rendszert a következőképpen:

$$c_1 := b_1, \quad c_n := b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< b_n, c_i >}{< c_i, c_i > c_i}.$$

A konstrukció miatt a kapott rendszer ortogonális.

Definíció: Ortonormált a vektorrendszer, ha páronként ortogonális, és minden elemének normája 1.

Következmény: Minden euklideszi térnek van ortonormált bázisa.

Bizonyítás: Konstruktívan, normáljuk a Gram-Schmidt ortogonalizációból kapott bázist.

Tétel: Az euklideszi tér valamely bázisa ortonormált $\Leftrightarrow$ Eg vektor koordinátáját a következő képpen kapjuk meg:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \quad \lambda_i =< a, e_i >$$

4.2 Valós euklideszi terek transzformációi

4.2.1 Szimetrikus transzformáció:

Definíció: Egy transzformációt szimetrikusnak nevezünk, ha van olyan bázis, amelyre nézve a transzformáció mátrixa szimetrikus.

Lemma: Ha a leképezés A mátrixa szimetrikus, és $< x, y >:= y^T x$, akkor $< x, Ay >=< Ax, y >$

Bizonyítás:

$$< x, Ay >= (Ay)^T x = y^T (A^T x) = y^T (AX) =< aX, Y >$$

Tétel: Szimetrikus mátrix külömböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

Bizonyítás: $As_1 = \lambda_1 s_1$-ből $< As_1, s_2 >= \lambda_1 < s_1, s_2 >$
$As_1 = \lambda_1 s_1$-ből $< As_2, s_1 >= \lambda_2 < s_2, s_1 >$
Ezért $0 = (\lambda_1 - \lambda_2) < s_1, s_2 >$, és mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ezért $< s_1, s_2 >= 0$, vagyis asajátvektorok valóban ortogonálisak.

4.2.2 Ortogonális transzformáció

Definíció: Egy transzformáció ortogonális, ha van olyan bázis, melyben mátrixa ortogonális. (A G mátrix ortogonális, ha $GG^T = E$).

Tétel: Az ortogonális transzformáció megőrzi az $< x, y >:= y^T x$ skalárszorzatot.

Bizonyítás:

$$< x, y >= (Ab)^T (Aa) = b^T (A^T A) a = b^T E a =< a, b > .$$

Tétel: Az ortogonális transzformáció távolságtartó, normatartó, szögtartó, ha e függvényeket a skalárszorzatból származtatjuk.

Bizonyítás: Mivel az ortogonális transzformáció skalárszorzattartó, ezért ha a táolságot, normát és a szöget a skalárszorzatból vezetjuk le, akkor a transzformáció nyílván megtartja ezeket is.

Tétel: (Determinánok szorzás tétele): $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, ha A és B egyaránt $n \times n$ típusú mátrixok.

Tétel: Ortogonális mátrix determinánsának abszolút értéke 1.

Bizonyítás: $1 = \det(E) = \det(A^{-1}A) = \det(A^T A) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A)^2$.

Tétel: Ortogonális transzformáció sajátértékeinek abszolútértéke 1.

Bizonyítás: Ha $Ax = \lambda x$, akkor $(Ax)^T = (\lambda x)^T$. A két egyenletet összeszorozva:

$$(Ax)^T Ax = (\lambda x)^T \lambda x$$
$$x^T A^T Ax = (\lambda^2 x^T)x$$
$$x^T x = \lambda^2 x^T x,$$

amiből valóban $\lambda^2 = 1$.

4.3 Komplex euklideszi tér

4.3.1 Komplex skalárszorzat

Definíció: A $V \times V \to \mathbb{C}$ függvényt skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. $\forall z \in V$-re $< z, z > \geq 0, < z, z >= 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $\forall z_1, z_2 \in V$-re $< z_1, z_2 >=< \overline{z_2, z_1} >$.
3. (a) $\forall z_1, z_2 \in V$-re $< \lambda z_1, z_2 >= \overline{\lambda} < z_1, z_2 >$.
   (b) $\forall z_1, z_2 \in V$-re $\lambda < z_1, z_2 >$.
4. (a) $\forall z_1, z_2, z_3 \in V$-re $< z_1, z_2 + z_3 >=< z_1, z_2 > + < z_1, z_3 >$.
   (b) $\forall z_1, z_2, z_3 \in V$-re $< z_1 + z_2, z_3 >=< z_1, z_3 > + < z_2 + z_3 >$.

4.3.2 A komplex euklideszi terej speciális transzformációi

Valós speciális mátrixok:	Komplex speciális mátrixok:
Szimetrikus:$A = A^T$	Hermitikus:$A = \overline{A}^T$
Atiszimetrikus:$A = -A^T$	Ferdén hermitikus:$A = -\overline{A}^T$
Ortogonális:$A^T = A^{-1}$	Unitér:$A^{-1} = \overline{A}^T$

Tétel: Hermitikus mátrixok sajátértékei valósak.

Bizonyítás: $Ax = \lambda x$ balról megszorozva $\overline{x}^T$-tal:

$$\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \lambda x = \lambda \overline{x}^T x = \lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

A jobboldal valós szám, ezért: $\lambda = \frac{\overline{x}^T Ax}{\overline{x}^T x}$. Azt kell csak belátni, hogy nem csak a nevező, de a számáló is valós. Ezt úgy fogjuk bizonyítani, hogy tudjuk, hogy a komplex szám akkor és csak akkor egyenlő a konjugáltjával, ha csak valós része van. Azt tudjuk, hogy a számláló is egyetlen komplex szám, hiszen a skalárszorzatnak ez volt a definíciója, így a szám megegyezik a "transzponáltjával".

$$\overline{x}^T(Ax) = (\overline{x}^T(Ax))^T = (Ax)^T\overline{x} = x^T A^T \overline{x} = x^T \overline{Ax} = \overline{\overline{x}^T(Ax)}.$$

Következés képpen a sajátérték, λ is valós.

Tétel: A ferdén szimetrikus, vagy ferdén hermitikus mátrix sajátértékei vagy nullék, vagy (tisztán) képzetesek.

Bizonyítás: Az előzőhöz hasonlóan, a bizonyitás lényege, hogy a komplex szám akkor és csak akkor képzetes, ha egyenlő a konjugáltja (-1) szeresével.

$$\lambda = \frac{\overline{x}^T x}{\overline{x}^T x}$$

$$\overline{x}^T(Ax) = (\overline{x}^T(Ax))^T = (Ax)^T\overline{x} = x^T A^T \overline{x} = x^T(-\overline{A})\overline{x} = -\overline{\overline{x}^T(Ax)}.$$

Eszerint valóban a 0, illetve képzetes szám lehet sajátérték.

Tétel: Unitér (ortogonális) mátrix sajátértékeinek abszolút értéke 1.

Bizonyítás: A bizonyítás analóg a valós esetben tanult szimetrikus mátrixra vonatkozó hasonló állítás bizonyításával:

$$\left.\begin{array}{c} Ax = \lambda x \\ \overline{(Ax)}^T = \overline{\lambda x}^T \end{array}\right\}\text{a két egyenlet összeszorozva:}$$

$$\overline{(Ax)}^T(Ax) = \overline{\lambda x}^T \lambda x$$

$$\overline{x^T}\overline{A}^T(Ax) = \lambda\overline{\lambda}\overline{x}^T x$$

$$\overline{x}^T(\overline{A}^T A)x = \overline{x}^T x = \lambda^2 \overline{x}^T x,$$

amiből $\lambda^2 = 1$.