

## Elsőrendű logika

1. Formalizálja az alábbi mondatokat:

a, Aki másnak vermet ás, maga esik verembe. (Univerzum az emberek halmaza)

$$\forall x(\exists y V(x, y) \rightarrow E(x))$$

$E(x)$ : verembe esik,  $V(x,y)$ : x vermet ás y-nak

b, Van olyan makacs ember, a senki más tanácsára nem hallgat. (Univerzum az emberek halmaza)

$$\exists x(M(x) \wedge \neg \exists y(H(x, y) \wedge \neg E(x, y)))$$

$M(x)$ : makacs,  $H(x,y)$ : x hallgat y-ra  $E(x,y)$ : x egyenlő y

c, Minden racionális szám esetén létezik nála nagyobb irracionális szám. (Univerzum:  $\mathbb{R}$ )

$$\forall x(R(x) \rightarrow \exists y(I(y) \wedge N(y, x)))$$

$R(x)$ : racionális,  $I(y)$ : irracionális  $N(x,y)$ : x nagyobb y

d, Bármely két racionális szám között található irracionális szám. (Univerzum:  $\mathbb{R}$ )

$$\forall x \forall y [(R(x) \wedge R(y) \wedge N(y, x)) \rightarrow \exists z (I(z) \wedge N(z, x) \wedge N(y, z))]$$

$R(x)$ : racionális,  $I(y)$ : irracionális  $N(x,y)$ : x nagyobb y

e, Minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként. (Univerzum:  $\mathbb{R}$ )

$$\forall x \exists y \exists z [(N(x, 2) \wedge P(x)) \rightarrow (T(y) \wedge T(z) \wedge E(f(z, y), x))]$$

$N(x,y)$ :  $x > y$ ;  $P(x)$ : páros;  $T(x)$ : prím;  $E(x,y)$ : egyenlőség;  $f(x,y)$ : összeadás

f, Minden egész szám páros vagy páratlan. ( $U = \mathbb{R}$ )

$$\forall x(Z(x) \rightarrow (P(x) \vee T(x)))$$

ahol  $Z()$ : egész;  $P()$ : páros;  $T()$ : páratlan

g, Minden arany, ami fénylik.  $\forall x(F(x) \rightarrow A(x))$

h, Van olyan cápa, amelyik dorombol.  $\exists x(C(x) \wedge D(x)),$

i, Vannak repülő és futómadarak.  $\exists x(M(x) \wedge R(x)) \wedge \exists y(M(y) \wedge F(y))$

j, Minden egész számnál létezik nagyobb egész szám. ( $U = \mathbb{R}$ )

$$\forall x(E(x) \rightarrow \exists y(E(y) \wedge N(y, x)))$$

k, Malacka mindenkinél kisebb, aki idősebb Zsebi babánál ( $U = \text{Százholdas pagony}$ )  
Minden lében van két kanál. (Univerzum a minden dolgok halmaza)  
Van olyan kalap, ami minden zoknihoz illik. (Univerzum a minden dolgok halmaza)  
Egy, csak egy legény van talpon a vidéken. (Univerzum az emberek halmaza)

Vannak repülő és futómadarak (Univerzum az élőlények halmaza)  
 Szaffinak van egy fekete macskája. (U = élőlények)  
 Minden kutya teát iszik, ha álmos. (U = élőlények)  
 Az intelligens delfinek között van, amelyik tud labdát egyensúlyozni az orrán. (U = élőlények)  
 A páros számok oszthatók a 2 valamelyik hatványával. (U = R)  
 Van olyan kutya, amelyik megugatja a postást. (U = élőlények)  
 Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár. (U = élőlények)

## 2. Prenex KNF, Skólem

Hozza Prenex konjunktív normál formára, majd Skólem normálformára:

a,  $\exists x[\exists y(B(x, y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall y\exists z(G(x, y, z))]$

M.o.:  $\exists x[\neg\exists y(B(x, y) \wedge P(y)) \vee \forall y\exists z(G(x, y, z))]$

$\exists x[\forall y\neg(B(x, y) \wedge P(y)) \vee \forall y\exists z(G(x, y, z))]$

$\exists x[\forall y(\neg B(x, y) \vee \neg P(y)) \vee \forall y\exists z(G(x, y, z))]$

$\forall y$  nem emelhető ki ezért új ismeretlenek kellenek:

$\exists x[\forall y_1(\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee \forall y_2\exists z(G(x, y_2, z))]$

$\exists x\forall y_1\forall y_2\exists z[(\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee (G(x, y_2, z))]$

$\exists x\forall y_1\forall y_2\exists z[\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1) \vee G(x, y_2, z)]$  Prenex KNF

Skólemizálás:  $x \leftarrow c; z \leftarrow f(y_1, y_2)$

$\forall y_1\forall y_2[(\neg B(c, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee (G(c, y_2, f(y_1, y_2)))]$

b,  $\exists xK(x) \vee \neg\forall x[((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \neg\forall y(\neg Q(y) \rightarrow P(x, y))]$

M.o.:  $\exists xK(x) \vee \neg\forall x[\neg(\neg(R(x) \wedge T(x)) \vee Q(x)) \vee \neg\forall y(Q(y) \vee P(x, y))]$

$\exists xK(x) \vee \exists x\neg[\neg((R(x) \wedge T(x)) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y\neg(Q(y) \vee P(x, y))]$

$\exists xK(x) \vee \exists x[\neg(R(x) \wedge T(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg\exists y\neg(Q(y) \vee P(x, y))]$

$\exists xK(x) \vee \exists x[(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y(Q(y) \vee P(x, y))]$

$\exists x$  kiemelhető itt, ezért nem kell új ismeretlen:

$\exists x\forall y[K(x) \vee ((\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(y) \vee P(x, y)))]$

Ez Prenex, de nem KNF, ezért disztributív szabályt használunk:

$\exists x\forall y[(K(x) \vee \neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (K(x) \vee Q(y) \vee P(x, y))]$  Prenex KNF

Skólemizálás:  $x \leftarrow c$

$\forall y[(K(c) \vee \neg R(c) \vee \neg T(c) \vee Q(c)) \wedge (K(c) \vee Q(y) \vee P(c, y))]$

c,  $\forall x(\exists yQ(x, y) \wedge (P(x) \rightarrow R(x, y)) \wedge \neg\forall z(P(z) \rightarrow Q(z, x)))$

M.o.:  $\forall x(\exists yQ(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge \neg\forall z(\neg P(z) \vee Q(z, x)))$

$\forall x(\exists yQ(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge \exists z\neg(\neg P(z) \vee Q(z, x)))$

$\forall x(\exists yQ(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge \exists z(P(z) \wedge \neg Q(z, x)))$

$\forall x\exists y\exists z(Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge (P(z) \wedge \neg Q(z, x)))$

$\forall x\exists y\exists z(Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge P(z) \wedge \neg Q(z, x))$  Prenex KNF

Skólemizálás:  $y \leftarrow f(x); z \leftarrow g(x)$

$\forall x(Q(x, f(x)) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, f(x))) \wedge P(g(x)) \wedge \neg Q(g(x), x))$

d,  $\neg[\forall x\exists y(P(x, y) \vee Q(x, y))] \wedge [\exists x\forall y(S(x, y) \rightarrow T(x, y))]$

$$\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \neg \forall x (\neg B(x) \rightarrow C(x))$$

$$\forall x P(x) \vee \neg \exists x \forall y [Q(x, y) \vee \neg R(c, y)]$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \neg \forall x \exists y C(x, y)$$

$$\forall x [\forall y (A(y) \rightarrow B(x, y)) \rightarrow \exists y C(y)]$$

$$\forall x (\exists y Q(x, y) \wedge (P(x) \rightarrow R(x, y)) \wedge \exists z \neg (P(z) \rightarrow Q(z, x)))$$

### 3. Rezolúció

a, Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma:

$$\forall x ((A(x, Ernő) \wedge N(x)) \rightarrow B(x))$$

$$\forall x ((T(x) \vee S(x)) \rightarrow \forall y A(x, y))$$

$$\neg T(Lajos) \wedge S(Lajos)$$

$$\forall x (S(x) \rightarrow N(x))$$

$$\Rightarrow B(Lajos)$$

M.o.:

Minden feltételt és a következmény negáltját is Skólem normálformára alakítunk:

$$\begin{aligned} \forall x ((A(x, Ernő) \wedge N(x)) \rightarrow B(x)) &\equiv \forall x (\neg (A(x, Ernő) \wedge N(x)) \vee B(x)) \equiv \\ &\equiv \forall x ((\neg A(x, Ernő) \vee \neg N(x)) \vee B(x)) \equiv \forall x (\neg A(x, Ernő) \vee \neg N(x) \vee B(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x ((T(x) \vee S(x)) \rightarrow \forall y A(x, y)) &\equiv \forall x (\neg (T(x) \vee S(x)) \vee \forall y A(x, y)) \equiv \\ &\equiv \forall x ((\neg T(x) \wedge \neg S(x)) \vee \forall y A(x, y)) \equiv \forall x \forall y ((\neg T(x) \wedge \neg S(x)) \vee A(x, y)) \equiv \\ &\equiv \forall x \forall y ((\neg T(x) \vee A(x, y)) \wedge (\neg S(x) \vee A(x, y))) \end{aligned}$$

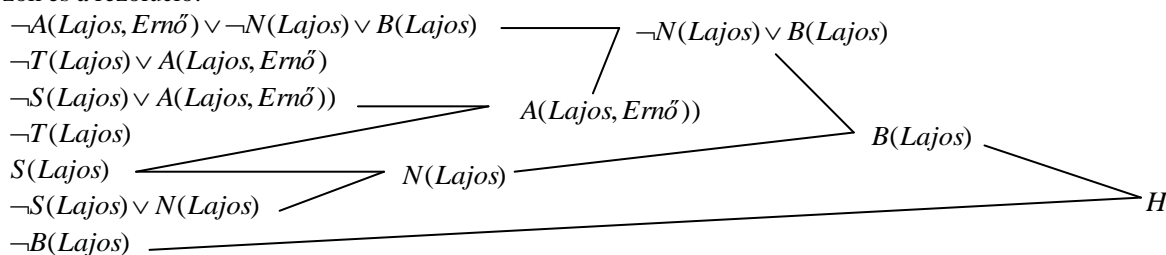
$$\neg T(Lajos) \wedge S(Lajos)$$

$$\forall x (S(x) \rightarrow N(x)) \equiv \forall x (\neg S(x) \vee N(x))$$

$$\neg B(Lajos)$$

Értéket adunk a változóknak: Lajos  $\rightarrow$  x, Ernő  $\rightarrow$  y

Klózok és a rezolúció:



b, Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma:

$$\forall x [P(x) \rightarrow Q(f(x), x)]$$

$$P(g(b))$$

$$\Rightarrow \exists y \exists z Q(y, z)$$

Mo.:

$$\forall x [P(x) \rightarrow Q(f(x), x)] = \forall x [\neg P(x) \vee Q(f(x), x)]$$

$$P(g(b))$$

$$\neg [\exists y \exists z Q(y, z)] = \forall x \forall z \neg Q(y, z)$$

Értékkadás:  $x \leftarrow g(b); z \leftarrow g(b); y \leftarrow f(g(b))$

Klózok:

$$\neg P(g(b)) \vee Q(f(g(b)), g(b))$$

$$P(g(b)) \quad \quad \quad Q(f(g(b)), g(b))$$

$$\neg Q(f(g(b)), g(b))$$

nil

c, Formalizáljuk az alábbi állításokat és rezolúcióval mutassuk meg a következtetés helyességét!

1. „Minden 2-nél nagyobb prímszám páratlan.”

2. „Páratlan szám négyzete páratlan.”

3. „A 7 prímszám.”

4. „A 7 nagyobb mint 2.”

5. Következtetés: „A  $7^2$  páratlan.”

Mo: N( , ): nagyobb, mint; P( ): prím; PT( ): páratlan; f( ): négyzetre emelés művelete

$$1. \forall x [(N(x, 2) \wedge P(x)) \rightarrow PT(x)]$$

$$2. \forall x [PT(x) \rightarrow PT(f(x))]$$

$$3. P(7)$$

$$4. N(7, 2)$$

$$5. PT(f(7))$$

Prenex KNF alakra hozás:

$$\forall x (\neg N(x, 2) \vee \neg P(x) \vee PT(x)) \wedge \forall y [\neg PT(y) \vee PT(f(y))] \wedge P(7) \wedge N(7, 2) \wedge \neg PT(f(7))$$

$$\forall x \forall y [(\neg N(x, 2) \vee \neg P(x) \vee PT(x)) \wedge (\neg PT(y) \vee PT(f(y))) \wedge P(7) \wedge N(7, 2) \wedge \neg PT(f(7))]$$

Egységesítő helyettesítés:  $x \leftarrow 7, y \leftarrow 7$

Rezolúció:

$$\neg N(7, 2) \vee \neg P(7) \vee PT(7)$$

$$\neg PT(7) \vee PT(f(7)) \quad \quad \quad \neg N(7, 2) \vee \neg P(7) \vee PT(f(7))$$

$$P(7)$$

$$N(7, 2)$$

$$\neg PT(f(7)) \quad \quad \quad \neg N(7, 2) \vee \neg P(7) \vee PT(f(7)) \quad \quad \quad PT(f(7))$$

nil

d, Döntse el elsőrendű rezolúcióval, hogy helyes-e az alábbi következtetés!

$$\forall x [A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))]$$

$$\forall x [B(x) \rightarrow (D(x) \wedge E(x))]$$

$$\forall x [E(x) \rightarrow (F(x) \vee \neg C(x))]$$

$$A(Kati)$$

$$F(Kati)$$

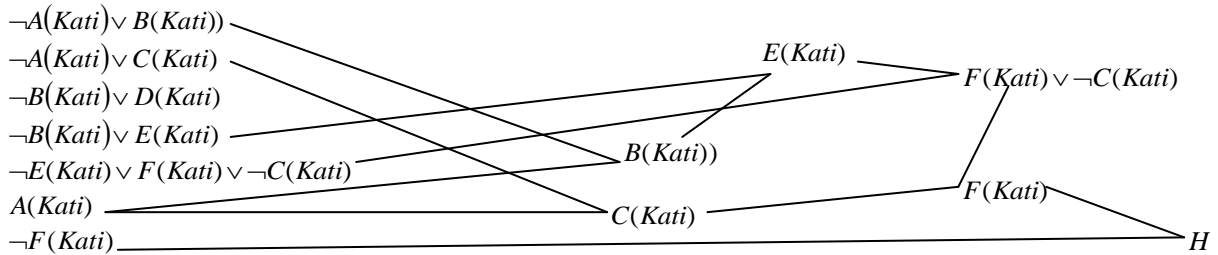
M.o.:

$$\begin{aligned}\forall x[A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))] &\equiv \forall x[\neg A(x) \vee (B(x) \wedge C(x))] \equiv \forall x[(\neg A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg A(x) \vee C(x))] \\ \forall x[B(x) \rightarrow (D(x) \wedge E(x))] &\equiv \forall x[\neg B(x) \vee (D(x) \wedge E(x))] \equiv \forall x[(\neg B(x) \vee D(x)) \wedge (\neg B(x) \vee E(x))] \\ \forall x[E(x) \rightarrow (F(x) \vee \neg C(x))] &\equiv \forall x[\neg E(x) \vee (F(x) \vee \neg C(x))] \equiv \forall x[\neg E(x) \vee F(x) \vee \neg C(x)]\end{aligned}$$

$A(Kati)$

$\neg F(Kati)$

Értékkadás:  $Kati \rightarrow x$ ,



e, Döntse el elsőrendű rezolúcióval, hogy helyes-e az alábbi következtetés!

$$\begin{aligned}\forall x[R(x) \rightarrow \exists y P(x, y)] \\ \forall z[R(h(c)) \vee A(h(c)) \vee \neg D(z)] \\ \forall y[A(y) \rightarrow D(b)] \\ \hline \exists y \exists z P(y, z)\end{aligned}$$

M.o.:

$$\begin{aligned}\forall x[R(x) \rightarrow \exists y P(x, y)] &\equiv \forall x[\neg R(x) \vee \exists y P(x, y)] \equiv \forall x \exists y [\neg R(x) \vee P(x, y)] \equiv \forall x [\neg R(x) \vee P(x, a)] \\ \forall z[R(h(c)) \vee A(h(c)) \vee \neg D(z)] &\equiv \forall z [\neg R(h(c)) \vee \neg A(h(c)) \vee \neg D(z)] \\ \forall y[A(y) \rightarrow D(b)] &\equiv \forall y [\neg A(y) \vee D(b)] \\ \hline \neg(\exists y \exists z P(y, z)) &\equiv \forall y \forall z \neg P(y, z)\end{aligned}$$

Értékkadás után a klózok:

$$\begin{aligned}\neg R(h(c)) \vee P(h(c), a) \\ R(h(c)) \vee A(h(c)) \vee \neg D(b) \\ \neg A(h(c)) \vee D(b) \\ \neg P(h(c), a)\end{aligned}$$

f,

- $\forall x[(T(x) \vee F(x)) \rightarrow R(x)]$
- $\forall x[C(x) \rightarrow (\neg O(x) \wedge F(x))]$
- $C(Gábor)$
- 

1, Fogalmazza meg a mondatok jelentését, ha az univerzum a gőtéek halmaza, és adottak a következők:

$T(x)$  = Tüskés     $F(x)$  = Tud fütyülni     $R(x)$  = Szereti a répatortát     $C(x)$  = Csíkos     $O(x)$  = Okos

2, Rezolúció segítségével bizonyítsa be, hogy Gábor a gőté szereti a répatortát!

g,

- $\forall x [Z(x) \rightarrow (\neg L(x) \wedge P(x))]$
- $\forall x [(P(x) \vee T(x)) \rightarrow M(x)]$
- $Z(Dumbó)$

1, Fogalmazza meg a mondatok jelentését, ha az univerzum az elefántok halmaza, és adottak a következők:

$Z(x)$  = Zöld       $L(x)$  = Lila füle     $P(x)$  = Pöttyös füle  
 $T(x)$  = Látott már zebrát     $M(x)$  = Szereti Mozartot

2, Rezolúció segítségével bizonyítsa be, hogy Dumbó a kiselefánt szereti Mozartot!

h, Formalizálja az alábbi mondatokat! Az alábbi jelöléseket használja:

$P(x)$ : x puli,  $K(x)$ : x kutya,  $U(x)$ : x ugat,  $H(x)$ : x harap.

Bogáncs puli.

A pulik kutyák.

Amelyik kutya ugat, az nem harap.

Bogáncs mindig ugat.

Bizonyítsa rezolúcióval, hogy van olyan puli, amelyik nem harap!

i, Rezolúció segítségével igazolja, hogy az első három állítás logikai következménye a negyedik!

1.  $\forall x [\neg A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))]$
2.  $\forall x [(B(x) \wedge C(x)) \rightarrow \neg D(x)]$
3.  $D(Marci)$
4.  $A(Marci)$

j, Az univerzum legyen a komplex számok halmaza, kivéve a 0 ( $0+0i$ ) számot.

A prédikátumok és függvények a következők:

$V(x)$  – x tisztán valós szám

$P(x)$  – x pozitív szám

$N(x)$  – x negatív szám

$f(x) = x^2$

Fogalmazza meg szöveggel az alábbi formulák jelentését!

- (1)  $\forall x (V(x) \rightarrow (P(x) \vee N(x)))$
- (2)  $\forall x (N(x) \rightarrow P(f(x))) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(f(x)))$
- (3)  $\neg P(f(i))$

Bizonyítsa be rezolúcióval, hogy a fenti (1),(2) és (3) állítások logikai következménye, hogy az i nem valós szám!

**ExtraFeladat:** Adottak a következő axiómák. Bizonyítsa rezolúcióval a következtetést!

1. Minden kutya egész éjszaka üvölt.
2. Azoknál, akinek van valamilyen macskájuk, nincsenek egerek.
3. A nyugodtan alvóknak nincs semmilyük, ami éjszaka üvölt.
4. Jánosnak kutyája vagy macskája van.
5. Konklúzió: ha János nyugodtan alvó, akkor Jánosnál nincsenek egerek.

Mo.:

1.lépés: formalizálás

1.  $\forall x(Kutya(x) \rightarrow \ddot{U}völt(x))$
2.  $\forall x\forall y([Rendelkezik(x, y) \wedge Macska(y)] \rightarrow \neg\exists z[Rendelkezik(x, z) \wedge Egér(z)])$
3.  $\forall x(A(x) \rightarrow \neg\exists y(Rendelkezik(x, y) \wedge \ddot{U}völt(y)))$
4.  $\exists x(Rendelkezik(János, x) \wedge [Macska(x) \vee Kutya(x)])$
5.  $A(János) \rightarrow \neg\exists z(Rendelkezik(János, z) \wedge Egér(z))$

2.lépés: átalakítás

1.  $\forall x(K(x) \rightarrow \ddot{U}(x)) \equiv \forall x(\neg K(x) \vee \ddot{U}(x))$
2.  $\forall x\forall y([R(x, y) \wedge M(y)] \rightarrow \neg\exists z[R(x, z) \wedge E(z)])$   
 $\forall x\forall y([R(x, y) \wedge M(y)] \rightarrow \forall z\neg[R(x, z) \wedge E(z)])$   
 $\forall x\forall y\forall z(\neg[R(x, y) \wedge M(y)] \vee \neg[R(x, z) \wedge E(z)])$   
 $\forall x\forall y\forall z[\neg R(x, y) \vee \neg M(y) \vee \neg R(x, z) \vee \neg E(z)]$
3.  $\forall x(A(x) \rightarrow \neg\exists y(R(x, y) \wedge \ddot{U}(y)))$   
 $\forall x(A(x) \rightarrow \forall y\neg(R(x, y) \wedge \ddot{U}(y)))$   
 $\forall x\forall y(A(x) \rightarrow \neg R(x, y) \vee \neg\ddot{U}(y))$   
 $\forall x\forall y(A(x) \rightarrow \neg R(x, y) \vee \neg\ddot{U}(y))$   
 $\neg A(x) \vee \neg R(x, y) \vee \neg\ddot{U}(y)$
4.  $\exists x(R(János, x) \wedge [M(x) \vee K(x)])$   
Skólemizálás:  $x \leftarrow a: R(János, a) \wedge [M(a) \vee K(a)]$
5.  $A(János) \rightarrow \neg\exists z(R(János, z) \wedge E(z))$   
 $\neg[\neg A(János) \vee \neg\exists z(R(János, z) \wedge E(z))]$   
 $A(János) \wedge \exists z(R(János, z) \wedge E(z))$   
Skólemizálás:  $z \leftarrow b: A(János) \wedge R(János, b) \wedge E(b)$

Értékadás után a klózok: (A különböző formulákban a változók értékei különbözőek lehetnek, úgy kell megválasztani őket, hogy a rezolúció során ellentmondásra jussunk)

1.  $\neg K(a) \vee \ddot{U}(a)$
2.  $\neg R(János, a) \vee \neg M(a) \vee \neg R(János, b) \vee \neg E(b)$
3.  $\neg A(János) \vee \neg R(János, a) \vee \neg\ddot{U}(a)$
4.  $R(János, a)$
5.  $M(a) \vee K(a)$
6.  $A(János)$
7.  $R(János, b)$
8.  $E(b)$