Hallgató neve:	**NEPTUN kódja:**	**Csoportja:**

1. FELADAT

A frekvencia-válasz függvény $H(j\omega)$ egy rendszer bemenetére adott gerjesztés $X(j\omega)$ és a rendszer kimenetén a gerjesztésre adott válasz $Y(j\omega)$ egyértelmű kapcsolatát írja le a frekvenciatartományban $H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ alakban. A frekvencia-válasz függvény megadja, hogy a bemeneti gerjesztő jel a rendszer hatására, annak kimenetén milyen jelszintváltozással és fázisváltozással rendelkező jelet eredményez a bemeneti jelhez képest, vagyis $H(j\omega) = |H(j\omega)| \,\underline{/\Theta_H(j\omega)}$. Mindezt teszi a körfrekvencia (vagy frekvencia) függvényében.

Egyszerű példával élve, ha egy adott frekvenciájú szinuszos jellel gerjesztem a lineáris rendszeremet (áramkörömet), a rendszer válasza egy ugyanolyan frekvenciájú jel lesz, és a frekvencia-válasz függvény megadja, hogy a gerjesztő jelhez képest hogyan változik a jelszint és a jel fázisa az adott gerjesztő frekvencián.

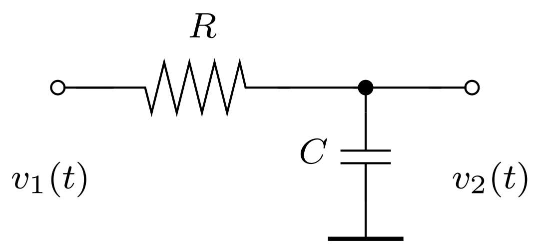
Amennyiben nem egyetlen frekvencián adjuk meg a frekvencia-válasz függvényt, hanem a be- és kimeneti jel egymáshoz viszonyított jelszint és fázisváltozásait a körfrekvencia (vagy frekvencia) függvényében kívánjuk ábrázolni, megkapjuk az ún. Bode-diagramot. A jelszintváltozást az amplitúdómenet, míg a fázisváltozást a fázismenet írja le. Mindkét függvény abszcisszáján a körfrekvencia logaritmikus léptékben szerepel. Az amplitúdómenet lineáris, vagy dB-be átszámított skálán lineáris, a fázismenet pedig lineáris, radián vagy fok az ordinátán. A dB skálára áttérés a következő összefüggés alapján tehető meg feszültség jellegű jelszintek esetén:

$$|H(j\omega)|^{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\lg|H(j\omega)|$$

Az impedancia koncepció és a komplex amplitúdók alkalmazása kényelmes eszköztárat biztosít a frekvencia-válasz függvény jelen ismereteinken alapuló használatához.

Értelmezést segítő példa megoldással:

Az alábbi ábrán szereplő kapcsolásban a $v_1(t)$ szinuszos gerjesztő feszültség hatására megjelenő válasz a kapacitáson mérhető $v_2(t)$ szinuszos feszültség. Határozzuk meg a rendszer frekvencia-válasz függvényét és rajzoljuk fel a Bode-diagramot.



Áttérünk a komplex amplitúdók tartományába az alábbi jelöléssel:

$v_1(t) \Longrightarrow V_1 = |V_1| \,\underline{/\Theta_{V_1}}$

$v_2(t) \Longrightarrow V_2$

Tulajdonképpen a feladat a feszültségosztó felírása, hiszen

$$V_2 = V_1 \frac{Z_C}{Z_C + R} \Longrightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = H(j\omega)$$

A frekvenciaválasz függvény definícióját felhasználva:

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \left.\frac{1}{1 + j\omega CR}\right|_{CR=\frac{1}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

ahol $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ egy speciális érték, az ún. határfrekvencia, amely rögtön értelmet nyer.

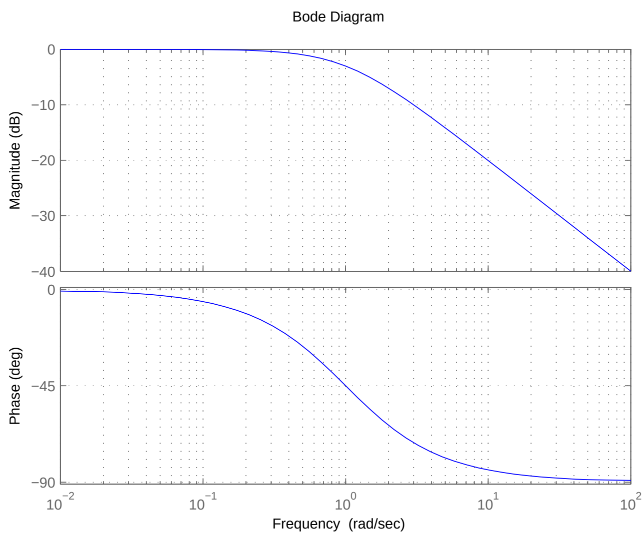
Tehát $H(j\omega)$ alábbi alakban felírható:

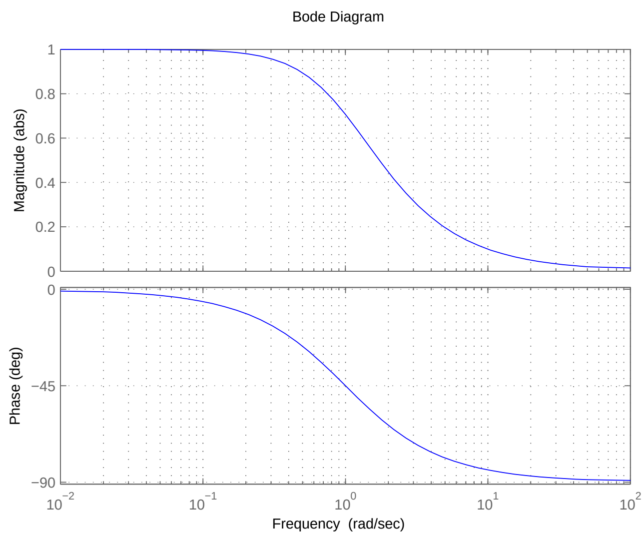
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR} = |H(j\omega)| \angle \Theta_H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \frac{e^{j0}}{e^{j \arctan[(\omega CR)/1]}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} e^{-j \arctan(\omega CR)} = |H(j\omega)| e^{j\Theta_H(j\omega)}$$

A Bode-diagram ábrázolásához meghatároztuk az amplitúdómenetet (a bal oldali ábrán decibel skálát használtunk: $|H(j\omega)|^{dB} = 20\lg\,|H(j\omega)|$, a jobb oldalin egyszerű arányszámot, megj.: önhatalmúlag az ábrázolás céljára, az időállandót $RC = 1$-re választottam):

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

és a fázismenetet: $\Theta_H(j\omega) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$





Az ω_0 körfrekvencián jelen példában igaz a következő összefüggés: $R = |Z_C| = \left|\dfrac{1}{j\omega_0 C}\right|$. Általában igaz, hogy ω_0 körfrekvencián a kimeneten mért jelteljesítmény fele a gerjesztő jel teljesítményének, ami az amplitúdómenetben úgy jelenik meg, hogy $\sqrt{2}$-ed részére csökken a jelszint ω_0 körfrekvencián, ami a decibel skálán a -3dB-es pontnak felel meg. A fázismenetben pedig itt $-45°$-os fázistolást tapasztalunk ω_0 körfrekvencián. Jelen példában is könnyen beláthatóak az előző állítások fazorábrán történő ábrázolással és a Bode diagram vizsgálatával.

Hasznos észrevételek: sok esetben kvalitatíve helyesen felrajzolható a Bode-diagram, ha ismerjük f_0, jelen esetben a határfrekvencia értékét, valamint az amplitúdó és fázismenet szélső, illetve nevezetes értékeit. Jelen példában:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} = \left.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right|_{\omega\to 0} \longrightarrow 1 \quad \text{és} \quad \Big|_{\omega\to\infty} \longrightarrow 0 \quad \text{és} \quad \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Theta_H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\Big|_{\omega\to 0} \longrightarrow 0° \quad \text{és} \quad \Big|_{\omega\to\infty} \longrightarrow -90° \quad \text{és} \quad \Big|_{\omega=\omega_0} = -45°$$

A vizsgált áramkör egy elsőfokú passzív aluláteresztő szűrőt valósít meg, ugyanis az f_0 határfrekvencia alatti frekvenciájú jeleket (jelkomponenseket) átereszti, az f_0 határfrekvencia feletti frekvenciájú jeleket (jelkomponenseket) nem ereszti át, hanem szűri. Egy aluláteresztő szűrő határfrekvenciájának a neve felső határfrekvencia.
(Érdeklődőknek: A Bode-diagram elkészíthető Matlabbal ismerve az átviteli függvényt:
`http://www.mathworks.com/help/ident/ref/bode.html`
oldalon az első példa sokat segít a Matlab-os használatban)

MEGOLDÁS - FELADAT 1

Hallgató átal megoldandó feladat

Az értelmező feladatban szereplő kapcsoláshoz tartozó értékek: R = 1kΩ, C = 0,47μF a gerjesztés pedig $v_1(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t)$ [V].

- Adjuk meg a frekvencia-válasz függvényt

$$H(j\omega) = \left.\frac{1}{1+j\omega CR}\right|_{CR=\frac{1}{\omega_0}} = \left.\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right|_{\omega_0\approx 2128} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{2128}}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\,\underline{/\Theta_H(j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}e^{-j\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2128}\right)^2}}e^{-j\arctan\left(\frac{\omega}{2128}\right)}$$

- Határozzuk meg a kimeneti feszültség értékét $f_1 = 60$ Hz és $f_2 = 1000$ Hz-es gerjesztő jelek esetén

$\omega = \omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi 60$:

$H(j\omega_1) = 0.985\underline{/-10.1°} \Longrightarrow |H(j\omega_1)|^{dB} = -0.134$ dB

$V_2 = V_1 H(j\omega) = 5\underline{/0°} \cdot 0.985\underline{/-10.1°} \Longrightarrow v_2(t) = 4.925\sqrt{2}\cos(2\pi 60 - 10.1°)$

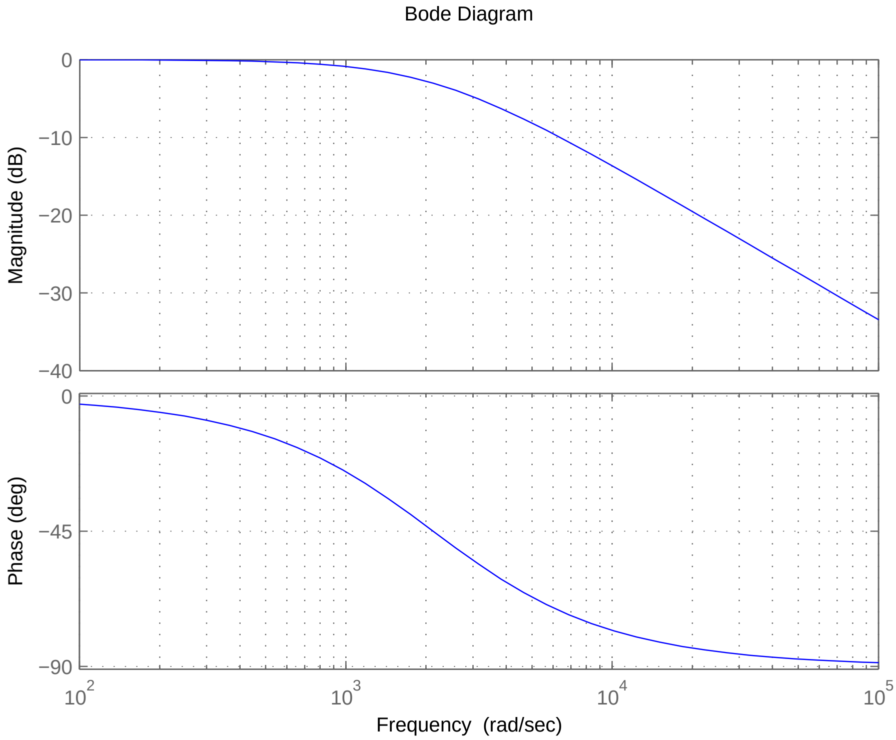
$\omega = \omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi 1000$:

$H(j\omega_2) = 0.32\underline{/-71.3°} \Longrightarrow |H(j\omega_1)|^{dB} = -9.88$ dB

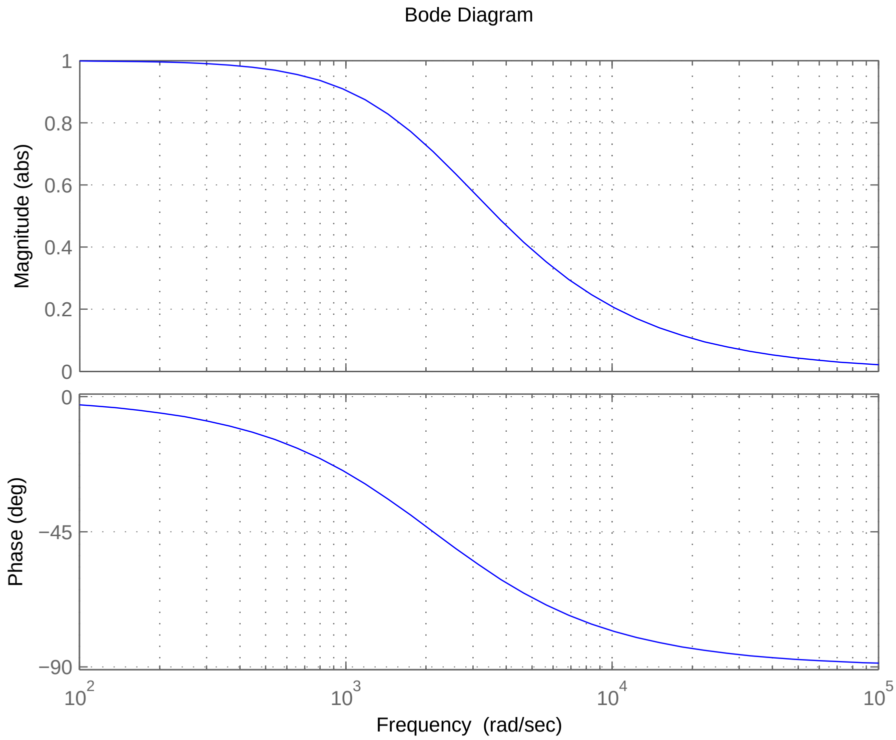
$V_2 = V_1 H(j\omega) = 5\underline{/0°} \cdot 0.32\underline{/-71.3°} \Longrightarrow v_2(t) = 1.6\sqrt{2}\cos(2\pi 1000 - 71.3°)$

- Jellegre helyesen rajzoljuk fel a Bode-diagramot és jelöljük a nevezetes ponto(ka)t. (Ne feledjük, hogy ehhez a szélső értékek és nevezetes frekvenciá(k)hoz tartozó érték(ek) meghatározása kell.)

Amplitúdómenet dB skálán - nevezetes pont a vágási körfrekvencia: $\omega_0 = 2128\frac{\text{rad}}{s}$



Amplitúdómenet lineáris skálán - nevezetes pont a vágási körfrekvencia: $\omega_0 = 2128\frac{\text{rad}}{s}$



Hallgató neve:	**NEPTUN kódja:**	**Csoportja:**

MEGOLDÁS - FELADAT 2

2. FELADAT

Amennyiben az 1. FELADAT-ban szereplő áramkörben a kapacitás és a rezisztencia helyet cserél, elsőfokú, passzív felüláteresztő szűrőt valósít meg a kapcsolás.

Az így módosított kapcsolásban szereplő áramköri elemekhez tartozó értékek: R = 1kΩ, C = 0,47μF a gerjesztés pedig $v_1(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t)$ [V].

- Rajzolja fel a módosított kapcsolást, amely felüláteresztő szűrőt valósít meg

  1. FELADAT-ban szereplő kapcsoláshoz képest az eltérés: a kapacitás és a rezisztencia helyet cserél

- Adjuk meg a frekvencia-válasz függvényt

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \left.\frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}\right|_{CR=\frac{1}{\omega_0}} = \left.\frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\right|_{\omega_0 \approx 2128} = \frac{j\dfrac{\omega}{2128}}{1 + j\dfrac{\omega}{2128}}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \underline{/\Theta_H(j\omega)} = \frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \frac{e^{j\arctan\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)/0\right]}}{e^{j\arctan\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)/1\right]}} = \frac{\dfrac{\omega}{2128}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{2128}\right)^2}} \underline{/90^\circ - \arctan\left(\tfrac{\omega}{2128}\right)}$$

- Határozzuk meg a kimeneti feszültség értékét $f_1 = 60$ Hz és $f_2 = 1000$ Hz-es gerjesztő jelek esetén

$\omega = \omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi 60:$

$H(j\omega_1) = 0.175\underline{/+79.9^\circ} \Longrightarrow |H(j\omega_1)|^{dB} = -15.14$ dB

$V_2 = V_1 H(j\omega) = 5\underline{/0^\circ} \cdot 0.175\underline{/+79.9^\circ} \Longrightarrow v_2(t) = 0.875\sqrt{2}\cos(2\pi 60 + 79.9^\circ)$

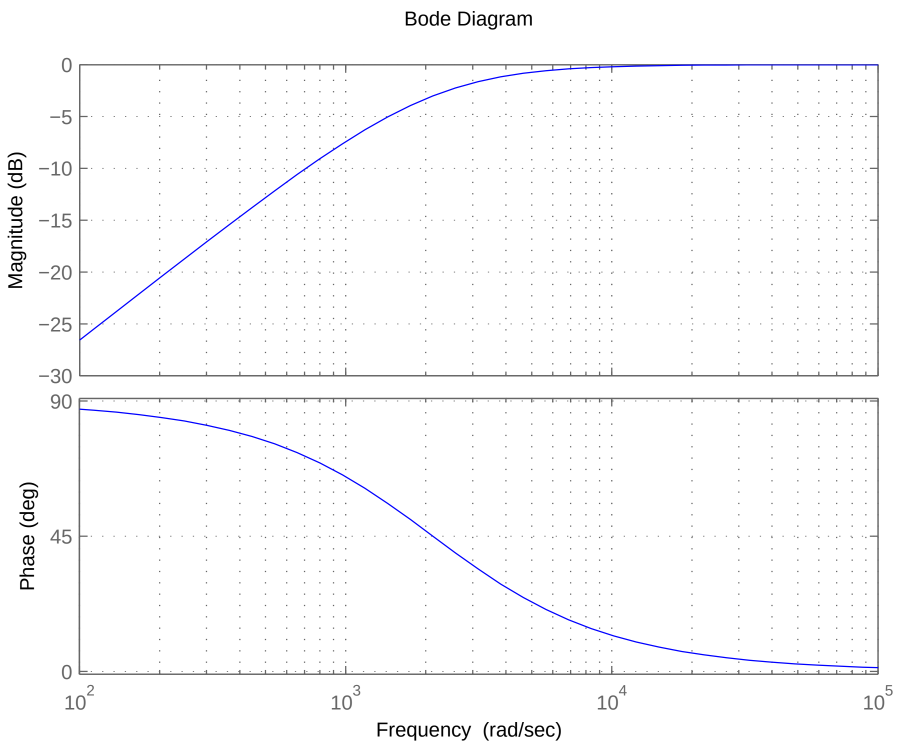
$\omega = \omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi 1000:$

$H(j\omega_2) = 0.94\underline{/+18.7^\circ} \Longrightarrow |H(j\omega_1)|^{dB} = -0.54$ dB

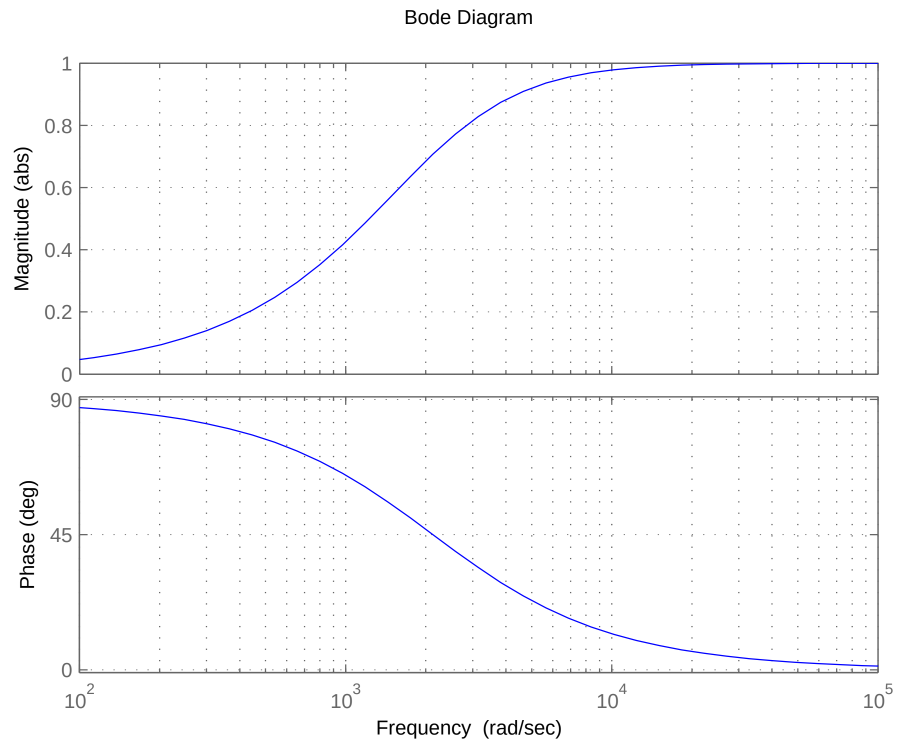
$V_2 = V_1 H(j\omega) = 5\underline{/0^\circ} \cdot 0.94\underline{/+18.7^\circ} \Longrightarrow v_2(t) = 4.7\sqrt{2}\cos(2\pi 1000 + 18.7^\circ)$

- Jellegre helyesen rajzoljuk fel a Bode-diagramot és jelöljük a nevezetes ponto(ka)t. (Ne feledjük, hogy ehhez a szélső értékek és nevezetes frekvenciá(k)hoz tartozó érték(ek) meghatározása kell.)

Amplitúdómenet dB skálán - nevezetes pont a vágási körfrekvencia: $\omega_0 = 2128 \frac{\text{rad}}{s}$



Amplitúdómenet lineáris skálán - nevezetes pont a vágási körfrekvencia: $\omega_0 = 2128 \frac{\text{rad}}{s}$



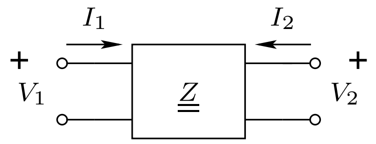
Hallgató neve: **NEPTUN kódja:** **Csoportja:**

MEGOLDÁS - FELADAT 3

3. FELADAT

Emlékeztető az órai anyagból:

Az alábbi ábrán látható lineáris négypólus (kétkapu) impedancia karakterisztikájában a függő változók a feszültségek, a független változók az áramok.

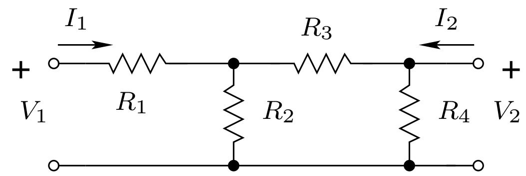


A komplex amplitúdók közötti kapcsolat az alábbi alakban írható fel az impedancia karakterisztika segítségével:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Az alábbi ábrán látható kétkapunak határozza meg az impedancia-paramétereit, és írja fel az impedancia mátrixot! Amennyiben zavarja a paraméteres megoldás, az impedanciák (jelenleg ellenállások) értékeinek válassza az adott ellenállás indexét (pl. $R_3 = 3\Omega$, stb.).



Megoldás:
Fodor György ”Hálózatok és rendszerek analízise 2. rész.”
Műegyetemi kiadó, 5-ik kiadás, 1998.
PPKE-ITK Könyvtár, nem kölcsönözhető könyvek között
könyvtáros pulttal szemben lévő alsó polcon
99-100. oldal