

2. hét

Témák:

- Infimum, supremum
- Számítási-mértani közép
- Halmaz pontjainak osztályozása
- Valós számsorozatok határértéke I.
 - Közébindeks keresés
 - Polinomok, racionális kifejezések

Órai feladatok:

Alsó és felső határ

Itt hangsúlyozzuk a kapcsolatot **minimum-infimum** illetve **maximum-supremum** között.

1. $\sup H, \inf H, \max H, \min H = ?$ ahol

$$H := \left\{ \frac{2n-1}{n+5} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

2. $\sup H, \inf H, \max H, \min H = ?$ ahol

$$H := (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$$

(Ez lehet HF is, ha túl sok az anyag.)

Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazásával:

- 3.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$$

(Trükk: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = 1$.)

- 4.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 4$$

(Trükk: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$.)

Érdemes szavakkal is megfogalmazni, amit beláttunk, a sorozatok nyelvén.

Halmaz pontjainak osztályozása

5. Adjuk meg az alábbi halmazok esetén a belső- külső- és határpontok halmazát:

$$H = [1, 2), \quad M = (1, 2), \quad E = \{5\}.$$

Melyik zárt, melyik nyílt?

Küszöbindex keresés

6. Állapítsuk meg az alábbi sorozat határértékét és keressünk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-3}$ -hoz:

$$a_n := \frac{4n + 3}{5n - 1}$$

(Érdemes arról szólni, hogy nincs **A** küszöbindex, hanem **EGYIK** küszöbindexet adjuk meg.)

Állapítsuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

Polinomok, racionális kifejezések

7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 - 7n + 4) = ?$$

8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 7n + 4}{n - 8} = ?$$

9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 4}{n^3 + 5n - 8} = ?$$

Fogalmazzuk meg a $\lim P(n)$ és a $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ szabályokat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0 & \deg P < \deg Q \\ \dots & = \\ \pm\infty & > \end{cases}$$

Házi feladatok

1. $\sup H, \inf H, \max H, \min H = ?$, ahol

$$H := \left\{ \frac{3n - 1}{2n + 5} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

2. $\sup H, \inf H, \max H, \min H = ?$ ahol

$$H := \left\{ \frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 1 \leq k \leq n-1 \right\}$$

3. Adjuk meg az alábbi halmazok esetén a belső- külső- és határpontok halmazát:

$$H = (-1, 2) \cup (2, 3], \quad M = [1, 2], \quad E = \{1, 2, 3\}.$$

Melyik zárt, melyik nyílt?

4. Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazásával:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_1, \dots, a_n > 0 : \quad (a_1 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

5. Adott $k > 0$ kerületű téglalapok közül melyik a legnagyobb területű? (Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazásával.)

6. Keressünk küszöbindexet $\varepsilon = 0.001$ -hez a következő sorozat esetén

$$a_n = 1 - 10^{-n}$$

7. Döntsük el, hogy az alábbi sorozat konvergens vagy divergens és ha konvergens, adjuk meg a határértékét :

$$a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}.$$