ANALÍZIS A KOMPLEX FREKVENCIATARTOMÁNYBAN: LAPLACE TRANSZFORMÁCIÓ

(gyakorlati anyag)

Az egyoldalas Laplace transzformáció definíciója:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

ahol az $s = \sigma + j\omega$ a komplex frekvencia.

Vedd észre:
A fenti transzformáció csak a $0 < t < \infty$ tartományra vonatkozik. Ezért a $t \leq 0$ tartományra semmit se tudunk mondani. Ezt a tényt sok tankönyv úgy veszi figyelembe, hogy a válaszjelet beszorozza az $u(t)$ belépő függvénnyel. Ez azért helytelen, mert a belépő függvénnyel való szorzás a $t \leq 0$ tartományra 0-át ad, ami nem feltétlen igaz. Lásd a 2. feladatot.
A Laplace transzformaciónak van egy kétoldalas változata is, ahol $-\infty < T < \infty$. Mi **csak** a belépő függvényekre definiált **egyoldalas** Laplace transzformációval foglalkozunk.

A kétoldalas Fourier transzformációt tekinthetjük a Laplace transzformáció egy speciális esetének amikor az $s = j\omega$ tehát:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Az egyoldalas Fourier transzformáció a kétoldalastól abban különbözik, hogy más az értelmezési tartománya. Vedd észre, az alsó integrálási határ kétoldalas esetben $-\infty$, míg egyoldalasnál 0+!
Ebből következik hogy míg a Laplace a teljes s síkon értelmezve van addig a Fourier csak a $j\omega$ tengelyen. Általánosságban a Fourier az állandósult állapot vizsgálatára jó míg a Laplace inkább a belépő függvények által generált tranziens viselkedés analízisére amelyben a kezdeti értékekkel is figyelembe kell venni.

Néhány alapvető függvény egyoldalas Laplace transzformáltja ahol az alsó integrálási határban a 0+ és 0 között nem teszünk különbséget:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0}^{\infty} 1e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s}\cdot 0 + \frac{1}{s}\cdot 1 = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) e^{-st}dt =$$
$$\frac{1}{2j}\int_0^\infty \left[e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}\right] dt = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

[Házi feladat ugyanígy határozd meg a $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$=?]

Akkor ezek után határozzuk meg az $f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}$ fgv. Laplace transzformáltját ha $t > 0$. Lineáris tulajdonságát felhasználva:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} + \mathcal{L}\{2u(t)\} - 3\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = 1 + 2\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+2} = \frac{s^2+s+4}{s(s+2)}$$

A Laplace transzformáció tulajdonságai a következő oldalon bemutatott táblázatban láthatók.
Példaként a differenciálásra vonatkozó összefüggés igazolása:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \left[\frac{df(t)}{dt}\right] e^{-st}dt \tag{1}$$

Egy szorzat deriválása:

$$\frac{d}{dt}(x\,y) = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

$x = f(t)$ és $y = e^{-st}$ behelyettesítéssel élve és átrendezve kapjuk

$$\frac{df(t)}{dt}e^{-st} = \frac{d}{dt}\left[f(t)e^{-st}\right] - f(t)\left(-se^{-st}\right) = \frac{d}{dt}\left[f(t)e^{-st}\right] + f(t)\left(se^{-st}\right) \tag{2}$$

Behelyettesítve (2)-őt (1)-be kapjuk

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[f(t)e^{-st}\right]dt + \int_0^\infty f(t)\left(se^{-st}\right)dt$$
$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

[Házi feladat ugyanígy az időbeli integrálás levezetése.]

Property	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Frequency shift	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$
Time integration	$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)\,ds$
Time periodicity	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Convolution	$f_1(t) * f_1(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s\sin\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Az inverz Laplace transzformáció, azaz visszatérés az idő tartományába:

$$f(t)u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

ahol a $\sigma > \sigma_0$. De a mérnöki gyakorlat inkább a résztörtekre bontás majd táblázat használata. Tekintsük a következő példát, ahol keressük az inverzét a következő Laplace transzformált függvénynek: $F(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{5}{s+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{6}{s^2+4}\} = 3u(t) - 5e^{-t} + 3sin(2t)$$

Nézzünk még egy példát, legyen most az $F(s) = \frac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)}$ keressük az inverz Laplace transzformáltját: (ehhez résztörtekre kell bontani)

$$\frac{s^2+12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} = \frac{A(s+2)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+2)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$s^2 + 12 = A(s^2+5s+6) + B(s^2+3s) + C(s^2+2s)$$

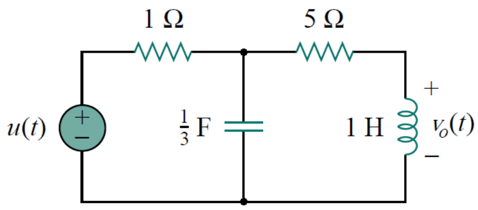
$$\begin{array}{rrcll} konstans: & 12 & = & 6A & \Rightarrow \quad A = 2 \\ s: & 0 & = & 5A+3B+2C & \Rightarrow \quad 3B+2C = -10 \\ s^2: & 1 & = & A+B+C & \Rightarrow \quad B+C = -1 \end{array}$$

Tehát $A = 2$, $B = -8$ és $C = 7$ így az $F(s)$ átírva $F(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{s+2} + \frac{7}{s+3}$, így az inverze:

$$f(t) = 2u(t) - 8e^{-2t} + 7e^{-3t}, \qquad t > 0.$$

[Házi feladat ugyanez a következő Laplace transzformált függvényre: $F(s) = \frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}$]

1. feladat:



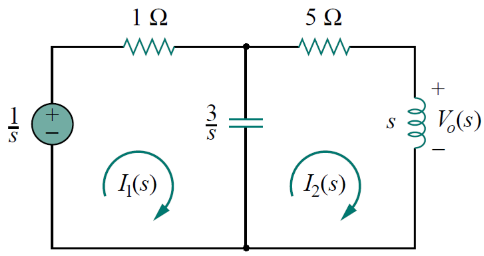
Határozd meg $v_o(t)$-t $t > 0$ időtartományra abban az esetben, ha minden kezdeti értéket nullának tekintünk (azaz $v_c(0) = 0$ és $i_L(0) = 0$). Mivel az összes idáig tanult hálózati tétel és módszer igaz itt is használjuk a hurok áramok módszerét.

Megoldás:

Első lépésként végezzük el a Laplace transzformációt:

$$
\begin{aligned}
u(t) &\Rightarrow \frac{1}{s} \\
1H &\Rightarrow sL = s \cdot 1 = s \\
\frac{1}{3}F &\Rightarrow \frac{1}{sC} = \frac{3}{s}
\end{aligned}
$$

az ellenállások pedig nem változnak. Ezután akkor már a két hurokáramot is bejelölve:



A két hurokra akkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$
0 = -\frac{1}{s} + \left(1 + \frac{3}{s}\right) I_1 - \frac{3}{s} I_2 \qquad 0 = -\frac{3}{s} I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right) I_2
$$

$$
\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right) I_1 - \frac{3}{s} I_2 \qquad I_1 = \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3) I_2
$$

A 2. hurokárambók kifejezett I_1-et visszahelyettesítve majd $3s$-el felszorozva:

$$
\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right) \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3) I_2 - \frac{3}{s} I_2
$$

$$
3 = (s^3 + 8s^2 + 18s) I_2 \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s}
$$

Ekkor a második hurok áram és az induktivitás impedanciájával kifejezve a $V_0(s)$:

$$
V_o(s) = sI_2 = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2}
$$

Utolsó lépés pedig az inverz Laplace transzformációval visszatérni az idő tartományba:

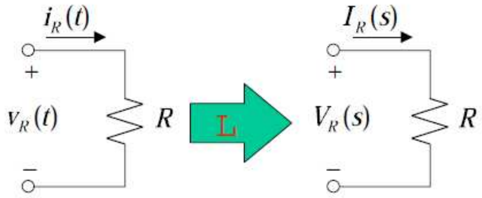
$$
v_0(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin \sqrt{2} t, \qquad t > 0
$$

Segítség: Operátoros impedanciák a kezdeti értékekkel (feszültség- majd áramforrás)

Időtartomány $\qquad$ s-tartomány

Ellenállás

$$\boldsymbol{v_R(t) = R i_R(t)}$$

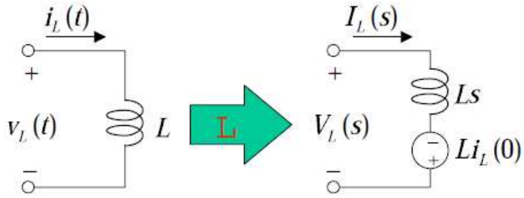


$$\boldsymbol{V_R(s) = R I_R(s)}$$

Induktivitás

$$\boldsymbol{v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}}$$

$$\boldsymbol{i_L(0+) = i_L(0)}$$

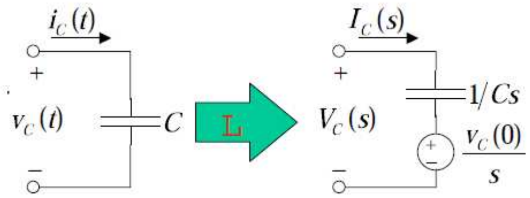


$$\boldsymbol{V_L(s) = sL\, I_L(s) - L i_L(0)}$$

Kapacitás

$$\boldsymbol{v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau + v_C(0)}$$

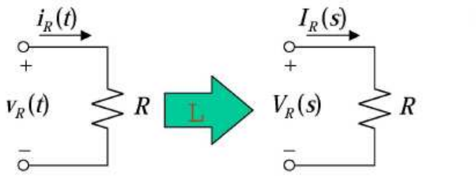
$$\boldsymbol{v_C(0+) = v_C(0)}$$



$$\boldsymbol{V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s}}$$

Ellenállás

$$\boldsymbol{i_R(t) = \frac{1}{R} v_R(t)}$$

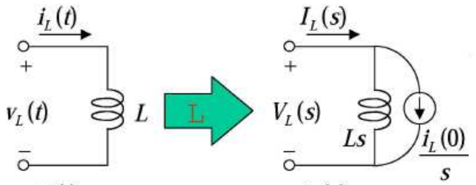


$$\boldsymbol{I_R(s) = \frac{1}{R} V_R(s)}$$

Induktivitás

$$\boldsymbol{i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau)d\tau + i_L(0)}$$

$$\boldsymbol{i_L(0+) = i_L(0)}$$

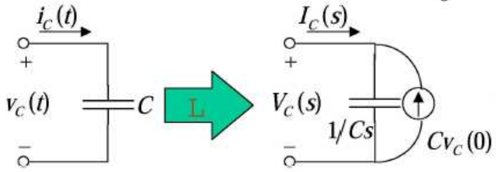


$$\boldsymbol{I_L(s) = \frac{1}{sL} V_L(s) + \frac{i_L(0)}{s}}$$

Kapacitás

$$\boldsymbol{i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}}$$

$$\boldsymbol{v_C(0+) = v_C(0)}$$



$$\boldsymbol{I_C(s) = sC\, V_C(s) - C v_C(0)}$$

Laplace transzformációra vonatkozó tételek és mellettük a legfontosabb időfüggvények Laplace transzformáltjai (t>0-ra)

Property	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$
Time integration	$\int_0^t f(t)\,dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
Frequency differentiation	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)\,ds$
Time periodicity	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Convolution	$f_1(t) * f_1(t)$	$F_1(s) F_2(s)$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin\theta + \omega \cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos\theta - \omega \sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

2. feladat:

Vigyázz:

- az $u(t) = 1(t)$ egységugrás függvénynek kétféle definíciója van
- az egyoldalas Laplace transzformáció értelmezése körül nagy a kavarodás

Megoldás:

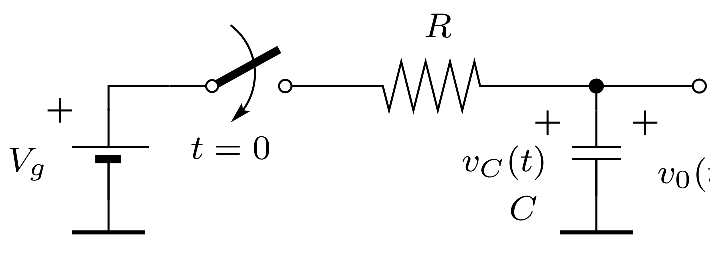
- Oppenheim értelmezését és definícióit követjük
- aktualizált anyagok a tárgy honlapjáról letöltendők és értelmezendők

Példa célja:

- egyszerű példa kapcsán a különböző módszerek
  - használhatóságának és
  - korlátainak

  bemutatása

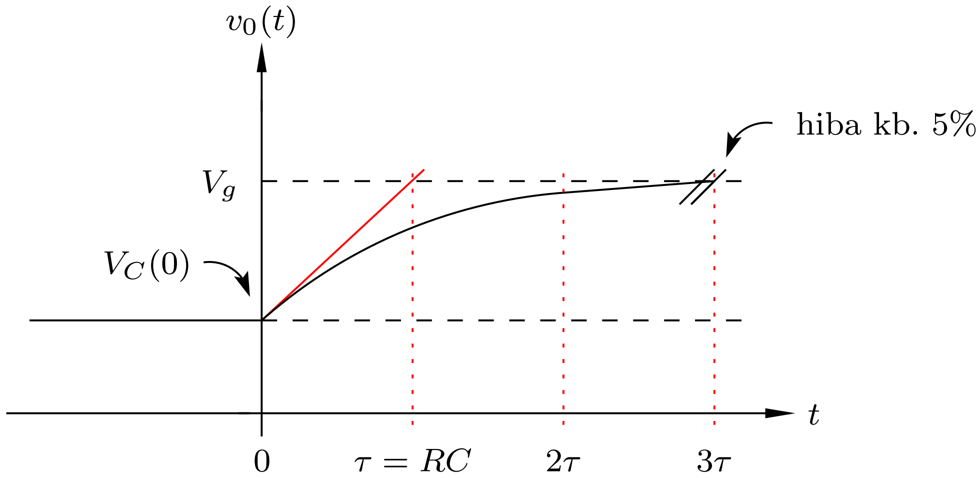
A megoldandó példa:



$v_0(t) =?$ ha $v_C(0) = V_{C0}$

1.) Megoldás az időtartományban

Megoldás fizikai kép alapján. Egy időállandós (elsőrendű) áramkör.



2.) Fourier transzformáció

Nem használható, mivel a C kondenzátor nem energiamentes a $t = 0$ időpillanatban.

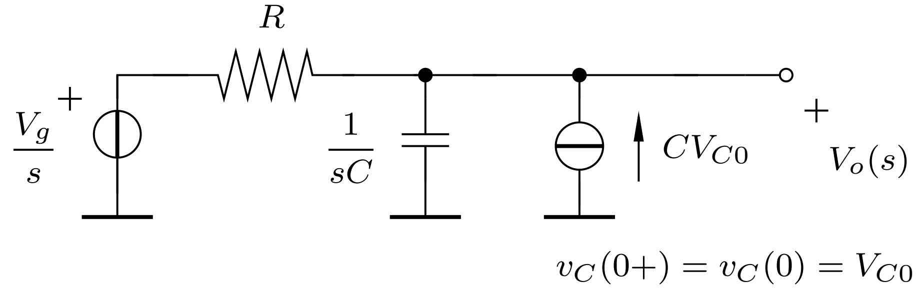
3.) Laplace transzformáció

Vedd észre:

$$F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{dt}$$

A Laplace minden jelet, a kezdeti értéket is, belépő jelnek tekint, tehát az eredmény csak a $t > 0$ tartományra igaz.

Az áramkör Laplace transzformált ekvivalense $t > 0$-ra:



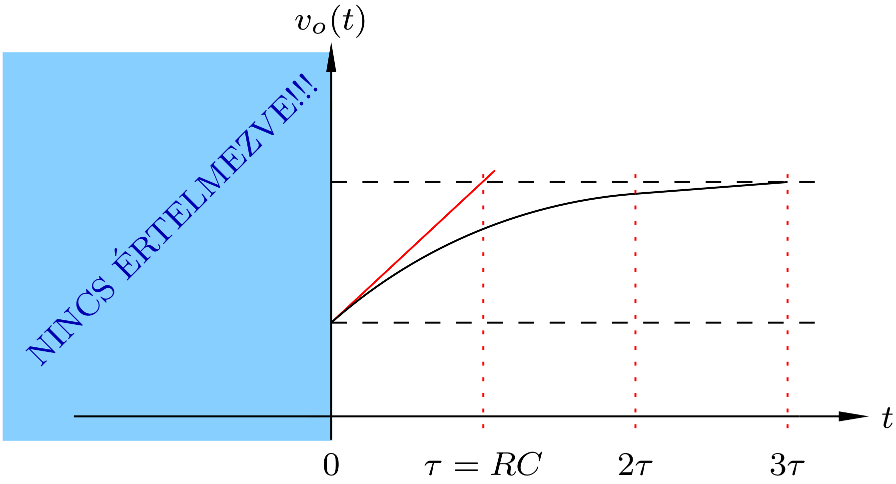
Feszültségosztó tételét alkalmazva az operátoros impedanciák tartományában és kihasználva a szuperpozíció tételét:

$$\begin{aligned}
V_o(s) &= \frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}\frac{V_g}{s} + \left(R\,||\,\frac{1}{sC}\right)CV_{C0} = \frac{V_g}{s(1+sRC)} + \frac{RC}{1+sRC}V_{C0} \\
&= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)V_g + \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}V_{C0}
\end{aligned}$$

ahol az egyszerű inverz transzformáció miatt az első tagot résztörtekre bontottuk. Visszatérve az időtartományba

$$
\begin{aligned}
v_o(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{V_o(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{V_g}{s} - \frac{V_g}{s+\dfrac{1}{RC}} + \frac{V_{C0}}{s+\dfrac{1}{RC}}\right\} \\
&= V_{C0}e^{-\frac{t}{RC}} + \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)V_g \quad \text{ahol} \quad t > 0
\end{aligned}
$$

Vedd észre, $v_o(t)$ csak $t > 0$ esetén van értelmezve.
Ábrázoljuk $v_o(t)$-t:



Vedd észre, hogy a $t < 0$ tartományra semmit sem tudunk mondani az egyoldalas Laplace transzformáció alapján!

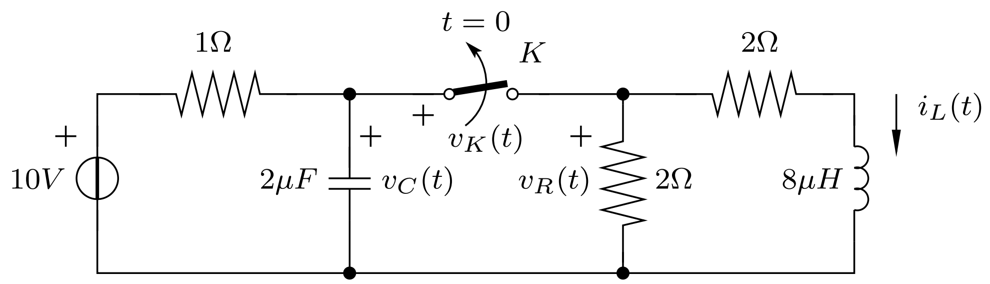
Ellenőrzés:

$$
\begin{aligned}
v_o(0+) &= \lim_{t\to 0}\{v_o(t)\} = \lim_{s\to\infty}\{sV_o(s)\} \\
&= \left[\frac{\cancel{s}V_g}{\cancel{s}(1+sRC)} + \frac{sRC}{1+sRC}V_{C0}\right]\Bigg|_{s\to\infty} = 0 + 1V_{C0} = V_{C0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_o(t\to\infty) &= \lim_{t\to\infty}\{v_o(t)\} = \lim_{s\to 0}\{sV_o(s)\} \\
&= \left[\frac{\cancel{s}V_g}{\cancel{s}(1+sRC)} + \frac{sRC}{1+sRC}V_{C0}\right]\Bigg|_{s\to 0} = V_g + 0 = V_g
\end{aligned}
$$

3. feladat:

Az alábbi áramkörben a kapcsolót $t = 0$ időpillanatban nyitjuk. A megadott mérőirány mellett határozza meg a kapcsolón mért $v_K(t)$ feszültséget a $t > 0$ időtartományra. A megoldást igazolja a fizikai kép alapján a $-\infty < t < +\infty$ időtartományra a $v_C(t)$ és $v_R(t)$ feszültségek ábrázolásával.



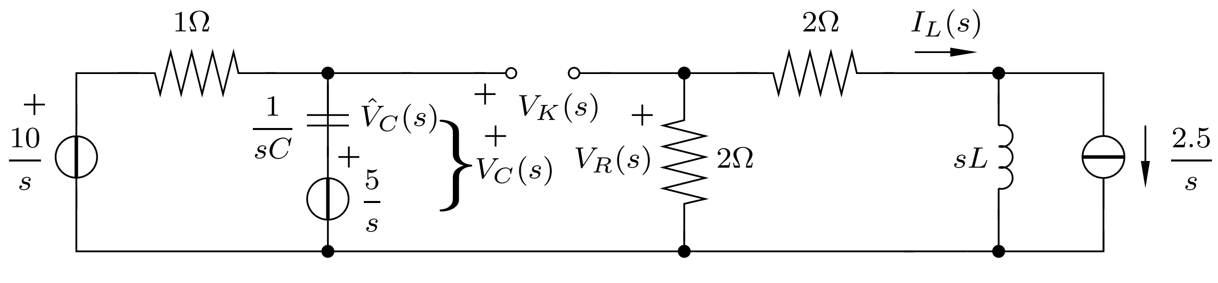
A kapcsoló már nagyon régóta zárt állapotban volt. Ekkor a kezdeti feltételek meghatározását az állandósult DC áramkörökre vonatkozó behelyettesítések alapján (C szakadás, L rövidzár):

$$v_C(0) = 10V \frac{2\,||\,2}{1 + 2\,||\,2} = 5V \qquad i_L(0) = \frac{5V}{1\Omega + (2\,||\,2)\Omega} = 2,5 \text{ A}$$

A K kapcsoló nyitása után két független, egyidőállandós áramkört kapunk, ahol

$$v_K(t) = v_C(t) - v_R(t) \Rightarrow V_K(s) = V_C(s) - V_R(s)$$

A két egyidőállandós áramkör a kezdeti feltételekkel:



amelyből a feszültségosztó tétellel:

$$V_C(s) = \frac{5}{s} + \hat{V}_C(s) = \frac{5}{s} + \left(\frac{10}{s} - \frac{5}{s}\right)\frac{\dfrac{1}{sC}}{1 + \dfrac{1}{sC}} = 5\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}\frac{5\cdot 10^5}{s + 5\cdot 10^5}\right) \text{ V}$$

ahol a bal oldali áramkör időállandója: $\tau_b = RC = 2\ \mu\text{s}$

Áramosztó tétellel:

$$V_R(s) = -\frac{2.5}{s}\frac{sL}{sL+4}\cdot 2 = -5\frac{1}{s + 5\cdot 10^5} \text{ V}$$

A jobb oldali áramkör időállandója: $\tau_j = \dfrac{L}{4} = 2\ \mu\text{s} \equiv \tau_b$

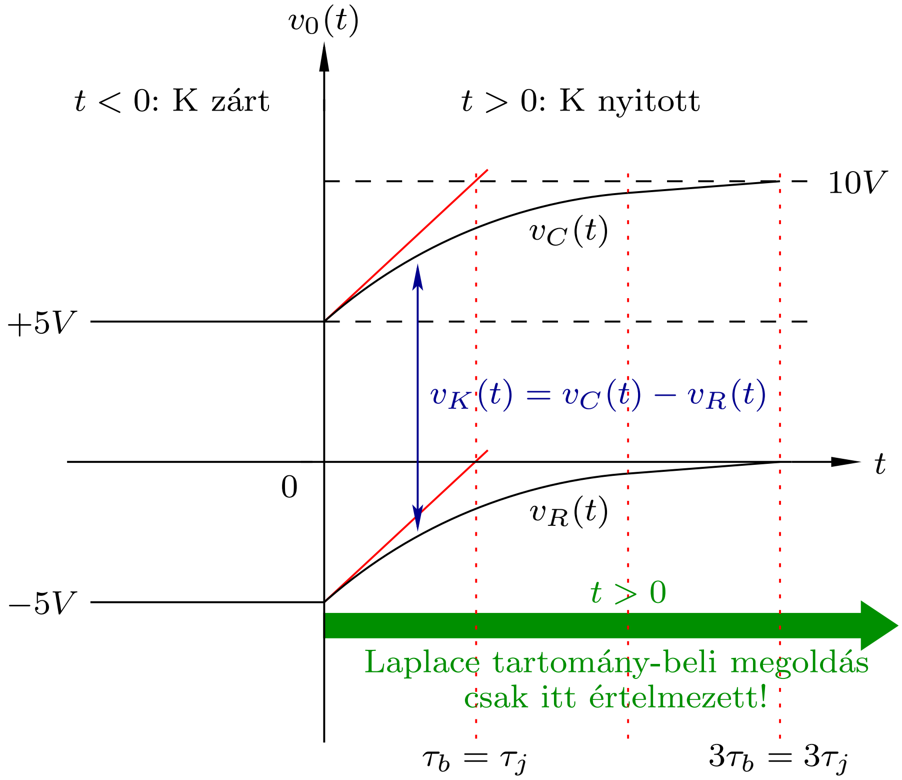
A kapcsolón mért feszültség a komplex frekvenciatartományban:

$$\begin{aligned} V_K(s) = V_C(s) - V_R(s) &= \frac{5}{s} + \frac{5}{s}\frac{5\cdot 10^5}{s + 5\cdot 10^5} + 5\frac{1}{s + 5\cdot 10^5} \\ &= \frac{5}{s} + \frac{5\cancel{(s + 5\cdot 10^5)}}{s\cancel{(s + 5\cdot 10^5)}} = \frac{10}{s} \text{ V} \end{aligned}$$

$$v_K(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_K(s)\} = 10u(t) \text{ V}, \quad t > 0$$

Tehát a kapcsolón mért $v_K(t)$ feszültség a $t > 0$ időtartományban egy állandó feszültség.
Viszont a $v_C(t)$ és $v_R(t)$ nem állandóak.

Az eredmény igazolása az egyidőállandós rendszerek fizikai képe alapján:

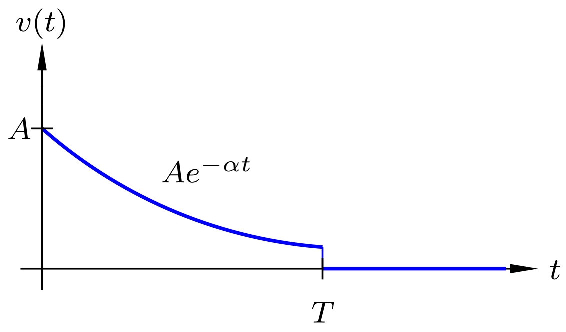


4. feladat:

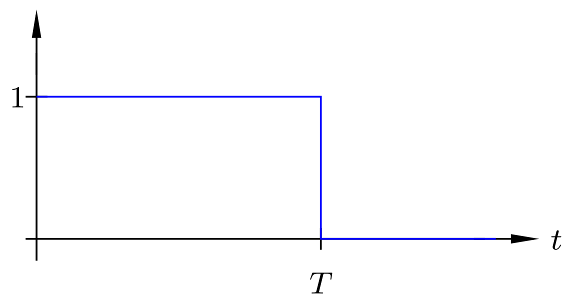
Eltolás az időtartományban tétel alkalmazása.

4.(a) Jelalak konstruálása

Az időtartományban hozza létre az alábbi ábrán bemutatott jelalakot, majd határozza meg annak Laplace transzformáltját.



$$v(t) = \underbrace{[u(t) - u(t-T)]}_{\text{ablakozó függvény:}} \; Ae^{-\alpha t}, \quad t > 0$$



$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)Ae^{-\alpha t} - u(t-T)Ae^{-\alpha t}\} \\ &= \frac{A}{s+\alpha} - e^{-\alpha T}\mathcal{L}\{u(t-T)Ae^{-\alpha(t-T)}\} \end{aligned}$$

Az eltolási tétellel:

$$V(s) = \frac{A}{s+\alpha} - \frac{Ae^{-\alpha T}}{s+\alpha}e^{-sT}$$

4.(b) Eltolási tétel alkalmazása inverz Laplace transzformáció esetén

Határozza meg az alábbi függvény inverz Laplace transzformáltját:

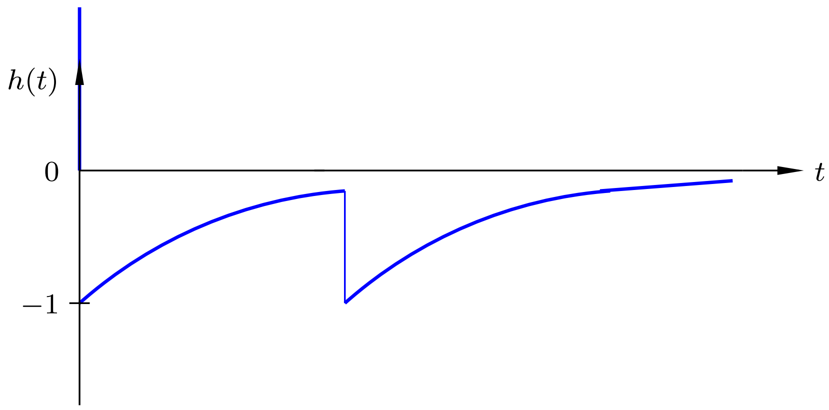
$$H(s) = \frac{s - e^{-sT}}{s+1}$$

Résztörtekre bontva:

$$H(s) = \frac{s}{s+1} - \frac{e^{-sT}}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1}e^{-sT}$$

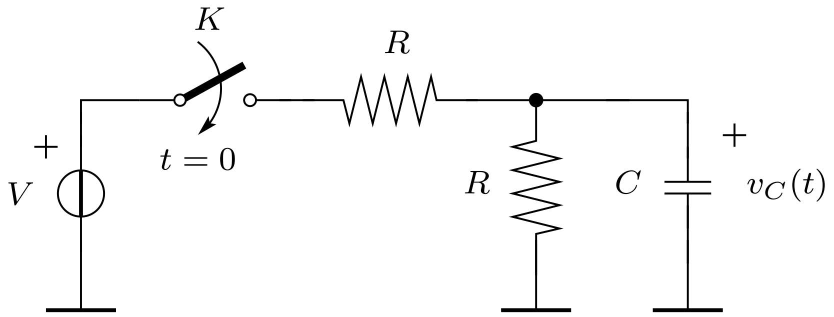
Az inverz Laplace transzformációt tagonként elvégezve kapjuk:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \delta(t) - u(t)e^{-t} - u(t-T)e^{-(t-T)}$$



5. feladat:

Aszimptotikus viselkedés meghatározása az idő és a komplex frekvenciatartományban.

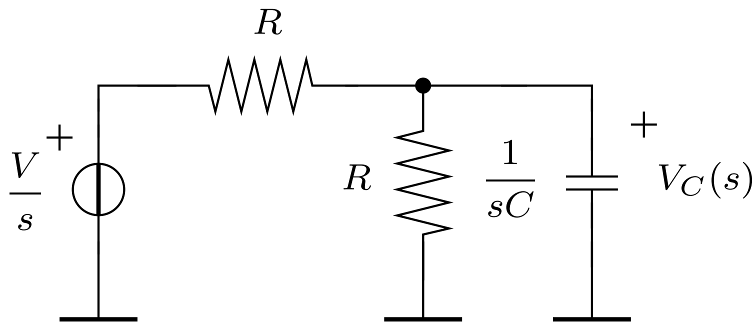


A nagyon régóta nyitott K kapcsolót zárjuk a $t = 0$ s időpillanatban.

- Laplace transzformációval határozzuk meg a $v_C(t)$ értékét a $t > 0$ időtartományra
- Az aszimptotikus viselkedésre kidolgozott tételekkel ellenőrizzük le a megoldást

Kezdeti feltétel: a C kondenzátor az R ellenálláson keresztül biztosan kisül, azaz $v_C(0) = 0$.

A $t > 0$ tartományra érvényes helyettesítő kép a komplex frekvenciatartományban:



Feszültségosztó tétellel:

$$V_C(s) = \frac{R \,||\, \frac{1}{sC}}{R + R \,||\, \frac{1}{sC}} \frac{V}{s} = \frac{1}{1 + sRC + 1} \frac{V}{s} = \frac{\frac{2}{RC}}{s + \frac{2}{RC}} \frac{V}{2s}$$

Az inverz Laplace transzformációhoz résztörtekre bontva:

$$\frac{A}{s+\frac{2}{RC}}+\frac{B}{s}=\frac{\frac{2}{RC}}{s+\frac{2}{RC}} \qquad \Big| \times s\left(s+\frac{2}{RC}\right)$$

$$As+Bs+\frac{2}{RC}B=\frac{2}{RC}$$

$$\Downarrow$$

$$B=1$$

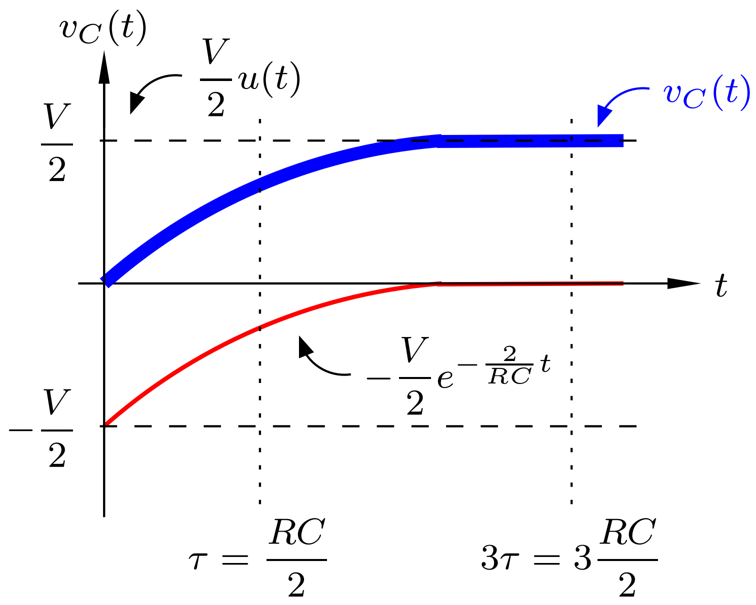
$$As+Bs=0 \Rightarrow A=-1$$

$$V_C(s)=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{2}{RC}}\right)\frac{V}{2}$$

Inverz Laplace transzformációval:

$$v_C(t)=\mathcal{L}^{-1}\{V_C(s)\}=\left[u(t)-e^{-\frac{2}{RC}t}\right]\frac{V}{2}, \quad t>0$$

A megoldást ábrázolva az időtartományban:



Aszimptotikus viselkedés: $\lim_{t \to 0} \{v_C(t)\} = \lim_{s \to \infty} \{sV_C(s)\}$

Fizikai képből (kezdeti feltétel): $\lim_{t \to 0} \{v_C(t)\} = 0$

Komplex frekvenciatartományban (Laplace transzformált):

$$\begin{aligned}\lim_{s \to \infty} \{sV_C(s)\} &= \lim_{s \to \infty} \left\{ \left(\frac{s}{s} - \frac{s}{s + \dfrac{2}{RC}} \right) \frac{V}{2} \right\} \\ &= \lim_{s \to \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} \right) \frac{V}{2} \right\} = 0\end{aligned}$$

Fizikai képből: $\lim_{t \to \infty} \{v_C(t)\} = \lim_{s \to 0} \{sV_C(s)\}$

Fizikai képből (állandósult állapotú DC): $\lim_{t \to \infty} \{v_C(t)\} = \dfrac{V}{2}$

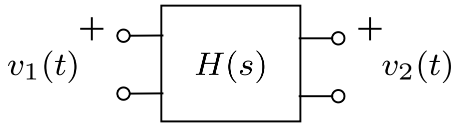
Komplex frekvenciatartományban (Laplace transzformált):

$$\begin{aligned}\lim_{s \to 0} \{sV_C(s)\} &= \lim_{s \to 0} \left\{ \left(\frac{s}{s} - \frac{s}{s + \dfrac{2}{RC}} \right) \frac{V}{2} \right\} \\ &= \lim_{s \to \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - 0 \right) \frac{V}{2} \right\} = \frac{V}{2}\end{aligned}$$

6. feladat:

Stabilitásvizsgálat a komplex frekvenciatartományban.

Az alábbi négypólus (NP) átviteli függvénye $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2as+a^2+b^2}$



Határozza meg az a és b konstansok értékét úgy, hogy a négypólus aszimptotikusan stabilis legyen.

A komplex frekvenciatartományban:

$$V_2(s) = H(s)V_1(s) = \frac{s+1}{s^2+2as+a^2+b^2} V_1(s)$$

Átrendezve azért, hogy megkapjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\underbrace{(s^2+2as+a^2+b^2)}_{\text{karakterisztikus egyenlet}} \quad V_2(s) = (s+1)V_1(s)$$

A négypólus aszimptotikusan stabilis, ha a karakterisztikus egyenlet valamennyi gyöke a bal félsíkon van, mert ekkor a tranziens megoldás exponenciálisan lecseng:

$$s^2+2as+a^2+b^2 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2-4a^2-4b^2}}{2} = -a \pm jb$$

Az aszimptotikus stabilitás feltételei:

- $a > 0$
- b tetszőleges értékű