Analízis II. jegyzet

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Függvénysorozatok és függvénysorok

1.1. Függvénysorozat

Függvénysorozat egy olyan hozzárendelés, mely $\forall n \in \mathbb{N}$-hez hozzárendel egy

$$f_n(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor a sorozatot (f_n)-el jelöljük.

1.2. Pontonként konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall x \in [a, b]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \varepsilon.$$

Ekkor $\lim f_n = f$.

1.3. Egyenletesen konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

1.3.1. Tétel

Ha az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens, akkor pontonként is konvergens.

Bizonyítás
A definícióból azonnal látható, hogy $N(\varepsilon)$ megfelelő küszöbindex $\forall x, \varepsilon$ esetén.

1.4. Tétel

Ha az (f_n) függvénysorozat tagjai folytonosak, és (f_n) egyenletesen konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

is folytonos.

Bizonyítás
A háromszög-egyenlőtlenség miatt tudjuk, hogy

$$\Big| f(x) - f(x_0) \Big| \leq \Big| f_n(x) - f(x) \Big| + \Big| f_n(x_0) - f(x_0) \Big| + \Big| f_n(x) - f_n(x_0) \Big|.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt $\exists N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

illetve

$$\Big|f_n(x_0) - f(x_0)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Továbbá tudjuk, hogy f_n folytonos, így $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz $\exists\delta$, melyre $\forall|x - x_0| < \delta$ esetén

$$\Big|f_n(x) - f_n(x_0)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Így $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta$, melyre $\forall|x - x_0| < \delta$ esetén

$$\Big|f(x) - f(x_0)\Big| < \varepsilon$$

azaz f valóban folytonos.

1.5. Tétel

Ha az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez, és $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, ahol $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bizonyítás

Az egyenletes konvergencia miatt $f(x)$ folytonos, így valóban integrálható.

1.6. Pontonként konvergens függvénysor

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$, azaz $\forall\varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f.$$

1.7. Egyenletesen konvergens függvénysor

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

1.8. Cauchy kritérium függvénysorokra

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eleget tesz a Cauchy kritériumnak, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n > m \geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

1.8.1. Tétel

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ akkor és csak akkor egyenletesen konvergens, ha eleget tesz a Cauchy kritériumnak.

1.9. Weierstrass kritérium

Adottak az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy az f_n függvények korlátosak, és $|f_n(x)| < a_n$. Ekkor ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

egyenletesen konvergens.

Bizonyítás
A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy kritérium miatt tudjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N$, melyre $n > m > N$ esetén

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} \left| f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

1.10. Összegfüggvény folytonossága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények folytonosak, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ is folytonos.

Bizonyítás
Legyen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = F_n(x) + R_n(x).$$

Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\exists N$ küszöbindex, melyre $n > N$ esetén

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| R_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ebből kapjuk, hogy $\left| R_n(x) - R_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x, x_0 \in [a,b]$.
Mivel $F_n(x)$ véges sok folytonos függvény összege, ezért önmaga is folytonos, tehát $\exists \delta > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta$ esetén $\left| F_n(x) - F_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Azt kaptuk tehát, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| \leq \left| F_n(x) - F_n(x_0) \right| + \left| R_n(x) - R_n(x_0) \right| < \varepsilon$$

tehát a függvény folytonos.

1.11. Összefüggvény integrálhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre $f_n \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, ahol $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1.12. Összegfüggvény deriválhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak, továbbá az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$$

egyenletesen konvergensek. Ekkor $g(x) = f'(x)$, azaz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

1.13. Hatványsor

Hatványsoron egy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

sort értünk, ahol x_0 rögzített valós szám.

1.14. Konvergenciahalmaz

Adott

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

hatványsor. Ennek konvergenciahalmaza

$$\mathcal{H} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n < \infty \right\}.$$

1.14.1. Tétel

1. $x_0 \in \mathcal{H}$.
2. Ha $\xi \in \mathcal{H}$, akkor $\forall x$, melyre $|x - x_0| < |\xi|$, $x \in \mathcal{H}$ teljesül.
3. Ha $\eta \notin \mathcal{H}$, akkor $\forall x$, melyre $|x - x_0| > |\eta|$, $x \notin \mathcal{H}$ teljesül.

Bizonyítás

1. Triviális.
2. Tudjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi - x_0)^n < \infty$. Ekkor a számsorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel miatt $\Big(c_n(\xi - x_0)^n\Big)$ nullsorozat, azaz $\exists K$, melyre $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\Big|c_n(x - x_0)^n\Big| < K.$$
Tudjuk továbbá, hogy $|x - x_0| < |\xi - x_0|$, azaz
$$\left|\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right| < 0.$$
Ekkor
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi - x_0)^n \left(\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right)^n$$
így
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi - x_0)^n \left(\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n(\xi - x_0)^n\right| \left|\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right|^n < K \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x - x_0}{\xi - x_0}\right|^n.$$
Egy olyan végtelen mértani sort kaptunk, amelynek a kvóciensének abszolútértéke kisebb, mint 1. Emiatt a sor nyilván konvergens.
3. Tegyük fel, hogy $x \in \mathcal{H}$. Ekkor az előző tétel miatt $\eta \in \mathcal{H}$, azonban ez ellentmondás.

1.15. Konvergenciasugár

Adott hatványsor konvergenciasugara
$$\varrho := \sup\Big\{|x - x_0| \Big| x \in \mathcal{H}\Big\}.$$
Ha $\mathcal{H} = \{x_0\}$, akkor $\varrho := 0$.
Ha $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, akkor $\varrho := \infty$.

1.15.1. Konvergenciasugár meghatározása

Adott $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ hatványsor. Ekkor ha létezik a
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \gamma$$
vagy a
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \gamma$$
határérték, akkor $\varrho = \frac{1}{\gamma}$.

Bizonyítás

1. A végtelen sorokra vonatkozó gyengített hányadoskritérium miatt ha
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{c_n(x - x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x - x_0| = \gamma|x - x_0| < 1$$
akkor a sor konvergens. Ekkor azonban
$$|x - x_0| < \frac{1}{\gamma} \implies x_0 - \frac{1}{\gamma} < x < x_0 + \frac{1}{\gamma}.$$
Azt látjuk, hogy valóban $\varrho = \frac{1}{\gamma}$.

2. A végtelen sorokra vonatkozó gyengített gyökkritérium miatt ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c_n(x-x_0)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}|x-x_0| = \gamma|x-x_0| < 1$$

akkor a sor konvergens. Ekkor azonban

$$|x-x_0| < \frac{1}{\gamma} \implies x_0 - \frac{1}{\gamma} < x < x_0 + \frac{1}{\gamma}.$$

Azt látjuk, hogy valóban $\varrho = \frac{1}{\gamma}$.

1.16. Műveletek hatványsorokkal

Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Ekkor

1. $[x_0 - r, x_0 + r]$-ben a hatványsor egyenletesen konvergens, ahol $0 < r < \varrho$
2. $int\mathcal{H}$-ban f folytonos
3. $int\mathcal{H}$-ban f differenciálható, a k-adik derivált

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n(x-x_0)^{n-k}$$

4. $int\mathcal{H}$-ban f integrálható,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int (x-x_0)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

Bizonyítás

1. Legyen $x_0 = 0$. Ekkor tudjuk, hogy $|x| < r$, azaz $\left|c_n x^n\right| < |c_n| r^n$. Tudjuk továbbá, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n < \infty$, így a Weierstrass kritérium miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

egyenletesen konvergens.

2. Az egyenletes konvergenciából következik.
3. Az egyenletes konvergencia mellett kell, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^n$ egyenletesen konvergens legyen. A hányadoskritériumból

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \gamma.$$

Azt kapjuk tehát, hogy a deriváltakból álló sor konvergenciasugara megegyezik az eredeti sor konvergenciasugarával. Emiatt $f(x)$ valóban tagonként differenciálható.

4. Az egyenletes kovnergenciából következik.

1.17. Analitikus függvény

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvény felírható

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

alakban x_0 valamilyen környezetében. Ekkor a függvény analitikus.

1.18. Függvény előállítása hatványsorként

1. Tegyük fel, hogy f egy hatványsor összegeként reprezentálható. Ekkor az előállítás egyértelmű.
2. Ha
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$
akkor
$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Bizonyítás

1. Tegyük fel, hogy
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n.$$
Ekkor legyen
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (d_n - c_n)(x - x_0)^n.$$
Látható, hogy $\forall k$ esetén
$$F^{(k)}(x) = 0$$
így $c_k = d_k$.
2. Legyen
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$
Ekkor $\forall k$ esetén $f^{(k)}(x_0) = k! c_k$ azaz
$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

1.19. Taylor sor

Legyen adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvény, mely egy $x_0 \in (a, b)$ pontban végtelen sokszor differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli Taylor sora
$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

1.19.1. Tétel

Tegyük fel, hogy az $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \mapsto \mathbb{R}$ függvény végtelen sokszor differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy $\exists K$, melyre $\forall k$ és $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esetén
$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leq K$$
teljesül. Ekkor
$$f(x) = T(x)$$
teljesül $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esetén.

Bizonyítás
Legyen
$$T(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Ekkor a Lagrange-féle maradéktagot használva

$$f(x) - T(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ahol ξ x és x_0 között van. Ekkor azonban

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq K \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $T(x)$ egyenletesen konvergál $f(x)$-hez.

2. Fourier sorok

2.1. Trigonometrikus függvényrendszer

Definiáljuk az alábbi függvényrendszert, ahol minden függvény $[-\pi, \pi]$ megszorítását nézzük

$$\phi_0 = 1$$

$$\phi_1 = \sin x \qquad \phi_2 = \cos x$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\phi_{2k-1} = \sin(kx) \qquad \phi_{2n} = \cos(kx)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Tekintsük továbbá a

$$\mathcal{C} = \left\{ f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R} \middle| f folytonos \right\}$$

halmazt az alábbi skalárszorzattal, illetve normával

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Ekkor $\mathcal{C}$ vektortér az összeadásra, illetve a fent definiált skalárszorzatra nézve.

2.1.1. Tétel

A (ϕ_n) függvényrendszer ortogonális a $\mathcal{C}$ vektortérben.

Bizonyítás

1. $n = m = 0$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$$
2. $n = m \neq 0$ Vegyük észre, hogy
$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}.$$
Könnyen láthatjuk, hogy
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Ugyanakkor
$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sin^2(x) + \cos^2(x)\Big)\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$
Ebből
$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

3. $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{m+1}{2}x\right)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{n-m}{2}x\right)-\cos\left(\frac{n+m+2}{2}x\right)}{2}\,\mathrm{d}x \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{m}{2}x\right)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{n+m+1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{m-n}{2}x\right)}{2}\,\mathrm{d}x \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{m+1}{2}x\right)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{n+m+1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{n-m}{2}x\right)}{2}\,\mathrm{d}x \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{m}{2}x\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{n+m}{2}x\right)+\cos\left(\frac{n-m}{2}x\right)}{2}\,\mathrm{d}x\,. \end{cases}$$

Ebből láthatjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2.2. Trigonometrikus polinom

Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ n-ed fokú trigonometrikus polinom, ha

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big).$$

2.3. Trigonometrikus sor

Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ végtelen sor egy trigonometrikus sor, ha

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big).$$

2.4. Tétel

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big)$$

ahol a konvergencia egyenletes. Ekkor

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \qquad k = 0, 1, \ldots$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Bizonyítás

1.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) =$$

Mivel $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0$$

és

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ekkor

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0k)\,\mathrm{d}x = a_0.$$

2.
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(kx) + b_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin(jx)\cos(kx)\right).$$

Ekkor a trigonometrikus függvényrendszer ortogonalitása miatt
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = a_k.$$

3. Az előző ponthoz hasonlóan eljárva azonnal kapjuk a bizonyítandót.

2.5. Fourier sor

Az $f : [-\pi,\pi] \mapsto \mathbb{R}$ $[-\pi,\pi]$-n integrálható függvény Fourier sora
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big)$$
ahol a Fourier együtthatók
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$$
és
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\,.$$
A sort közelíthetjük az n-edik Fourier polinommal
$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big).$$

2.5.1. Deriváltfüggvény Fourier sora

Adott $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π periódusú, differenciálható függvény. Ekkor f' Fourier sora tagonkénti deriválással kiszámítható, azaz
$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\Big(-a_k k\sin(kx) + b_k k\cos(kx)\Big).$$

Bizonyítás
Vizsgáljuk meg f' Fourier együtthatóit!
$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(f(x)\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\right) =$$
$$= \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = kb_k.$$
Hasonlóan belátható, hogy
$$\beta_k = -ka_k.$$

2.6. Fourier sorok alaptétele

Adott $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π periódusú függvény. Tegyük fel, hogy a $[-\pi, \pi]$ intervallumon f megfelel a Dirichlet feltételnek, azaz szakaszonként folytonos, legfeljebb véges sok szakadási hellyel, amelyek elsőfajú szakadások. Legyen továbbá az x_0 szakadási pontokban

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Ekkor f-t előállítja a Fourier sora.

2.7. Bessel-egyenlőtlenség

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$0 \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big) \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \Bigg(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} \, \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \, \mathrm{d}x + b_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) \, \mathrm{d}x \right\} -$$

$$-a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x + 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} a_j a_k \cos(jx) \cos(kx) \, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} b_j b_k \sin(jx) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \right\} +$$

$$+2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} a_j b_k \cos(jx) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \right\} -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \right\} +$$

$$+a_0 \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \, \mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \, \mathrm{d}x \right\} \Bigg).$$

Ekkor a trigonometrikus függvényrendszer ortogonalitása miatt azt kapjuk, hogy

$$0 \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) - \frac{a_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x + \frac{b_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) - a_0^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right).$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

2.8. Parseval-egyenlőség

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

Ekkor

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x$$

3. Többváltozós valós függvények

3.1. Kétdimenziós tér (sík)

A kétdimenziós síkon a pontokat rendezett számpárokként értelmezzük, ahol $P = (x, y)$. Az ilyen pontok halmazát $\mathbb{R}^2$-el jelöljük. Ekkor

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \Big\{(x, y)\Big| x, y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

3.2. Norma $\mathbb{R}^2$-ben

Adott $P = (x, y)$ pont. Ekkor P normája az origótól vett távolsága, azaz

$$\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3.3. Két pont távolsága

Adott $P = (x, y)$ és $P = (x', y')$ pontok. Ekkor a két pont távolsága

$$d(P, P') = \|P - P'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

3.4. Intervallum

Kétdimenziós intervallum (téglalap)

$$I = \Big\{(x, y)\Big| a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2\Big\}.$$

Ekkor felírhatjuk, hogy

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

Az intervallum végpontjaként $\pm\infty$ is megengedett, illetve az intervallum végpontjait nem mindig vesszük bele a halmazba. Ennek megfelelően változik a direkt szorzat felírása.

3.5. Gömb

Adott $\varepsilon > 0$ és $P = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Ekkor az ε-sugarú gömb (környezet)

$$S(P, \varepsilon) = \Big\{(x, y)\Big| \|(x, y) - (x', y')\| < \varepsilon\Big\}.$$

3.6. Belső pont

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy $P \in S$ belső pont, ha $\exists S(P, \varepsilon) \subset S$ környezet. A belső pontok halmaza $int(S)$.

3.7. Külső pont

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy $P \in \mathbb{R}^2$ külső pont, ha $\exists S(P\varepsilon)$ környezet, melyre $S(P, \varepsilon) \cap S = \emptyset$. A külső pontok halmaza $ext(S)$.

3.8. Határpont

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy $P \in \mathbb{R}^2$ határpont, ha $\forall S(P, \varepsilon)$ környezet esetén $S(P, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ és $S(P, \varepsilon) \cap S^C \neq \emptyset$, ahol $S^C = \mathbb{R}^2 \backslash S$. A határpontok halmaza ∂S.

3.9. Torlódási pont

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy $P \in \mathbb{R}^2$ torlódási pont, ha $\forall S(P, \varepsilon)$ környezet esetén $S(P, \varepsilon) \cap S \backslash \{P\} \neq \emptyset$. Ezzel ekvivalensen $P \in \mathbb{R}^2$ torlódási pont, ha $\exists (P_n) \subset S$ pontsorozat, melyre $P_n \neq P$ és $\lim_{n\to\infty} P_n = P$.

3.10. Nyílt halmaz

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, ha $int(S) = S$.

3.11. Zárt halmaz

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ zárt, ha $\partial S \subset S$.

3.12. Halmaz lezártja

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ lezártja $\overline{S} = S \cup \partial S$.

3.13. Pontsorozat

Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük. Ekkor

$$\mathbb{N} \mapsto P_n = (x_n, y_n).$$

3.14. Korlátos sorozat

Azt mondjuk, hogy a (P_n) sorozat korlátos, ha $\exists K$, amire $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\left\|P_n\right\| \leq K$. Ezzel ekvivalensen a sorozat korlátos, ha $\exists S(C, \varrho)$ gömb, melyre $(P_n) \subset S(C, \varrho)$.

3.14.1. Tétel

Adott $(P_n) = \Big((x_n, y_n)\Big)$ sorozat akkor és csak akkor korlátos, ha (x_n) és (y_n) korlátos.

3.15. Konvergens sorozat

Adott (P_n) sorozat konvergens, és a határértéke P', ha

$$\lim_{n\to\infty} \left\|P_n - P'\right\| = 0.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P'.$$

Ezzel ekvivalensen (P_n) konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre $\forall n \geq N$ esetén $P_n \in S(P', \varepsilon)$.

3.15.1. Tétel

Adott $(P_n) = \Big((x_n, y_n)\Big)$ sorozat határértéke $P' = (x', y')$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x'$$

és

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y'.$$

3.16. Cauchy-féle feltétel

A (P_n) sorozat teljesíti a Cauchy-feltételt, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre $\forall n, m \geq N$ esetén

$$\|P_n - P_m\| < \varepsilon.$$

3.16.1. Tétel

A (P_n) pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha teljesíti a Cauchy-feltételt.

3.17. Bolzano-Weierstrass tétel

Adott (P_n) korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás

Legyen $P_n = (x_n, y_n)$. Tudjuk, hogy (P_n) korlátos, így (x_n) korlátos. Ekkor a számsorozatokra vonatkozó Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists(x_{n_k})$ konvergens részsorozat. Mivel (y_n) korlátos, így (y_{n_k}) is korlátos. Ekkor a számsorozatokra vonatkozó Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists\big(y_{n_{k_m}}\big)$ konvergens részsorozat. Ekkor $\big(P_{n_{k_m}}\big)$ konvergens.

3.18. Két pont közti szakasz

Adottak a $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ pontok. Legyen továbbá

$$P(t) = \big((1-t)x + tx', (1-t)y + ty'\big).$$

Ekkor

$$\overline{PP'} = \Big\{P(t)\Big|t \in [0, 1]\Big\}.$$

3.19. Két pont közti vonal

Adottak a $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ pontok. Legyenek továbbá adottak az

$$x, y : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$$

koordináta-függvények, ahol a vonal végpontjai $P = \Big(x(\alpha), y(\alpha)\Big)$ és $P' = \Big(x(\beta), y(\beta)\Big)$. Legyen továbbá

$$\gamma(t) := \Big(x(t), y(t)\Big) : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^2.$$

Ekkor a vonal (görbe)

$$\Big\{\gamma(t)\Big|t \in [\alpha, \beta]\Big\}.$$

3.19.1. Zárt görbe

Azt mondjuk, hogy a

$$\Big\{\gamma(t)\Big|t \in [\alpha, \beta]\Big\}$$

zárt, ha $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

3.19.2. Folytonos görbe

Azt mondjuk, hogy egy görbe folytonos, ha a koordináta-függvényei folytonosak.

3.19.3. Sima görbe

Azt mondjuk, hogy egy görbe sima, ha a koordináta-függvényei simák.

3.20. Összefüggő tartomány

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő, ha $\forall P, P' \in S$ esetén

$$\exists\Big\{\gamma(t)\Big|t \in [\alpha, \beta], \gamma(t) \text{ folytonos}\Big\} \subset S.$$

3.21. Konvex tartomány

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ konvex, ha $\forall P, P' \in S$ esetén $\overline{PP'} \subset S$.

3.22. Monomiál

Adott $f(x,y) = ax^n y^m$ monomiál, ahol $a \in \mathbb{R}$ és $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor a monomiál foka $\deg(ax^n y^m) = n + m$.

3.23. Polinom

Adott
$$P(x,y) = \sum_{n,m} a_{nm} x^n y^m$$
polinom, ahol $a_{nm} \in \mathbb{R}$ és $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor a polinom foka
$$\deg\Big(P(x,y)\Big) = \deg\left(\sum_{n,m} a_{nm} x^n y^m\right) = \max(n+m).$$

3.24. Homogén polinom

Egy polinom homogén, ha minden monomiáljának azonos a foka.

3.25. Kétváltozós függvény

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$. Ekkor
$$f : S \mapsto \mathbb{R}$$
kétváltozós függvény, ahol S pontjaihoz $(x,y) \mapsto u$. Ekkor x, y független változók, u függő változó.

3.26. Folytonosság pontban

Adott f kétváltozós függvény és $(x_0, y_0) \in D_f$. Ekkor f folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall (x,y) \in D_f$, $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$ esetén $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

3.27. Sorozatfolytonosság pontban

Adott f függvény sorozatfolytonos a $P_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall (P_n) \subset D_f$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$ esetén $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$.

3.28. Tétel

Az f függvény akkor és csak akkor folytonos a P_0 pontban, ha sorozatfolytonos P_0-ban.

3.29. Szakadás

Ha egy f függvény nem folytonos egy $P_0 \in D_f$ pontban, akkor ott szakadása van.

3.30. Egyenletes folytonosság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos S-ben ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall P, P' \in S$, $\|P - P'\| < \delta$ esetén $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$. Ekkor $\delta = \delta(\varepsilon)$ az ε-hoz tartozó folytonossági modulus.

3.31. Lipschitz folytonosság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy f Lipschitz folytonos, ha $\exists L > 0$, melyre $\forall P, P' \in S$ esetén
$$\big|f(P) - f(P')\big| \leq L\|P - P'\|$$
teljesül. Ekkor L a Lipschitz-konstans.

3.32. Tétel

Ha f Lipschitz folytonos S-ben, akkor egyenletesen folytonos S-ben.

3.33. Tétel

Ha f egyenletesen folytonos S-ben, akkor folytonos S-ben.

3.34. Heine tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}^2$ S-ben folytonos függvény, ahol S korlátos és zárt. Ekkor f egyenletesen folytonos S-ben.

3.35. Bolzano tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol S összefüggő. Legyen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$, melyekre $a = f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2) = b$. Ekkor $\forall c \in (a, b)$ számhoz $\exists (x_0, y_0) \in S$, melyre $f(x_0, y_0) = c$.

Bizonyítás

Mivel S folytonos, létezik az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontokat összekötő folytonos görbe, azaz létezik $\gamma : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ függvény, melyre $\gamma(\alpha) = (x_1, y_1)$ illetve $\gamma(\beta) = (x_2, y_2)$. Ekkor az $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ függvényre az egydimenziós Bolzano tétel miatt $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$, melyre $F(\xi) = c$. Ekkor $(x_0, y_0) := \gamma(\xi)$-re valóban $f(x_0, y_0) = c$.

3.36. Weierstrass tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol S korlátos és zárt. Ekkor R_f korlátos és zárt.

3.37. Függvény határértéke

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ függvény, és legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ torlódási pont D_f-ben. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $(x, y) \in S$, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $\big|f(x, y) - L\big| < \varepsilon$.

3.38. Tétel

Adott f folytonos függvény és $(x_0, y_0) \in int(D_f)$. Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

3.39. Átviteli elv

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

akkor és csak akkor, ha $\forall (P_n) \subset S$, $P_n \neq P$, $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$ pontsorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = L$$

teljesül.

3.40. Parciális derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in intS$. Ekkor a függvény x szerinti parciális deriváltja az (x_0, y_0) pontban

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan a függvény y szerinti parciális deriváltja az (x_0, y_0) pontban

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

3.40.1. Parciális derivált függvény

Tegyük fel, hogy $f : S \mapsto \mathbb{R}$ minden pontjában létezik a parciális derivált. Ekkor értelmezhetjük a parciális derivált függvényt, amely ugyanolyan típusú, mint az eredeti függvény.

3.41. Másodrendű parciális derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, melynek létezik parciális derivált függvénye, aminek léteznek parciális deriváltjai. Ekkor a másodrendű parciális deriváltak

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$$

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y).$$

3.42. Tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ ahol $S \subset \mathbb{R}^2$, és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete (x_0, y_0)-nak, amiben $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ és $\exists K \in \mathbb{R}$, amire

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq K \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K$$

teljesül $\forall (x, y) \in U$ esetén. Ekkor f folytonos (x_0, y_0)-ban.

Bizonyítás
Vizsgáljuk meg az $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$ kifejezést, ahol $(x, y) \in U$.

$$\big|f(x, y) - f(x_0, y_0)\big| = \big|f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)\big| \leq$$

$$\leq \big|f(x, y) - f(x_0, y)\big| + \big|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)\big|.$$

Ekkor a Lagrange-féle középértéktételből

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y)(x - x_0)$$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y - y_0)$$

alkalmas ξ_x, ξ_y esetén. Ekkor

$$\left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y)(x-x_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y-y_0)\right| \leq$$
$$\leq K|x-x_0| + K|y-y_0|.$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f valóban folytonos.

3.43. Tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete (x_0, y_0)-nak, amiben $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ és folytonosak az (x_0, y_0) pontban. Ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

teljesül $\forall (x,y) \in U$ esetén.

3.44. Kisordó

Adott $h(x)$ függvény kisordó 0-ban, ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 0.$$

Ezt úgy jelöljük, hogy $h(x) = o(x)$.

3.45. Teljes differenciálhatóság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Azt mondjuk, hogy a függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, melyekre

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

teljesül elegendően kicsi $\Delta x, \Delta y$ esetén, ahol A, B, C függetlenek Δx-től és Δy-tól.

3.45.1. Tétel

Ha f differenciálható az $(x_0, y_0) \in intD_f$ pontban, akkor

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad C = f(x_0,y_0).$$

Bizonyítás

1. Legyen $\Delta x = \Delta y = 0$. Ekkor valóban
$$f(x_0,y_0) = C.$$
2. Legyen $\Delta y = 0$. Ekkor
$$f(x_0 + \Delta x, y_0) = A\Delta x + f(x_0,y_0) + o(|\Delta x|).$$
Ebből kapjuk, hogy
$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$
amiből nyilván
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right) = A.$$

3. Az előzőhöz analóg módon kapjuk, hogy
$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

3.45.2. Tétel

Legyen f differenciálható az $f(x_0, y_0) \in intD_f$ pontban. Ekkor
$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0) + o\big(\|(\Delta x, \Delta y)\|\big)$$
illetve
$$f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

3.46. Érintősík egyenlete

Ha az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor az ehhez a ponthoz tartozó érintősík egyenlete
$$S: \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - \big(z - f(x_0, y_0)\big) = 0.$$
Ekkor a sík normálvektora
$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

3.47. Tétel

Ha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor itt folytonos.

Bizonyítás

Tudjuk, hogyha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor
$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + f(x_0, y_0) + o\big(\|(\Delta x, \Delta y)\|\big).$$
Ebből azonnal kapjuk, hogy
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

3.48. Tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel $\exists U$ környezete (x_0, y_0)-nak, ahol $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ és folytonosak. Ekkor f differenciálható (x_0, y_0)-ban.

Bizonyítás

Vizsgáljuk meg az
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
kifejezés értékét!
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$
Ekkor a Lagrange-féle középértéktételből
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x$$
$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y$$

alkalmas $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ esetén. Ekkor a parciális deriváltak folytonossága miatt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_1 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta y).$$

Ekkor

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(\Delta x, \Delta y)\Delta x + o(\Delta y)\Delta y$$

azaz f valóban differenciálható.

3.49. Gradiens

Ha az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor ebben a pontban a derivált egy kétdimenziós vektor, a gradiens

$$\nabla f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Ha egy függvény egy S tartomány minden pontjában differenciálható, akkor a deriváltfüggvény

$$\nabla f : S \mapsto \mathbb{R}^2$$

típusú lesz.

3.50. Iránymenti derivált

Adott f kétváltozós függvény és $\alpha \in [0, 2\pi)$. Ekkor az α irányú iránymenti derivált (ha létezik a határérték)

$$D_\alpha f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

Adott $v(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ irány esetén, ahol $\|v\| = 1$, az iránymenti derivált

$$D_v(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho v_1, y_0 + \varrho v_2) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

3.50.1. Tétel

Ha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor itt létezik az iránymenti derivált tetszőleges $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén, és

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) v.$$

Bizonyítás

A differenciálhatóság miatt

$$f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0) = \varrho \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varrho \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(|\varrho|).$$

Ekkor

$$\frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{o(|\varrho|)}{\varrho}$$

így nyilván

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

3.51. Második derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és $(x_0, y_0) \in S$. Azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható a pontban, ha a függvény differenciálható a pont egy környezetében, és a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és a $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltak differenciálhatók a pontban.

3.52. Hesse mátrix

Ha az f függvény kétszer differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor értelmezhetők a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ és a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ parciális deriváltak. Ekkor a ponthoz tartozó Hesse mátrix

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

3.52.1. Tétel

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható az értelmezési tartomány (x_0, y_0) belső pontjában. Ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

azaz a Hesse mátrix mindig szimmetrikus.

3.53. Implicitfüggvény-tétel

Tegyük fel, hogy F kétváltozós függvény differenciálható az (x_0, y_0) pont környezetében és $F(x_0, y_0) = 0$ illetve $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Ekkor $\exists I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ intervallum, melyre $\forall x \in I_1$ esetén az $F(x, y) = 0$ egyenletnek pontosan egy $y = f(x) \in I_2$ megoldása van. Tehát egyértelműen létezik $f : I_1 \mapsto I_2$ függvény, melyre

1. $f(x_0) = y_0$
2. $\forall x \in I_1$ esetén $f(x) \in I_2$
3. $\forall x \in I_1$ esetén $F\big(x, f(x)\big) = 0$
4. $\forall x \in I_1$ esetén $\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big) \neq 0$.

Továbbá f differenciálható I_1-ben és

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, f(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big)}.$$

3.54. Láncszabály

1. Kétváltozós belső függvény, egyváltozós külső függvény.
   Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és
   $$F(x, y) = f\big(\phi(x, y)\big).$$
   Tegyük fel, hogy ϕ differenciálható (x, y)-ban, illetve f differenciálható $\phi(x, y)$-ban. Ekkor F is differenciálható, és
   $$\nabla F(x, y) = \Big(f'\big(\phi(x, y)\big)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y), f'\big(\phi(x, y)\big)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)\Big) = f'\big(\phi(x, y)\big)\nabla\phi(x, y).$$
2. Két darab egyváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.
   Legyen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, és
   $$F(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$
   Tegyük fel, hogy φ, ψ differenciálhatók t-ben, illetve f differenciálható $\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$-ben. Ekkor F is differenciálható, és
   $$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t).$$

3. Két darab kétváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.
   Legyen $f(u,v) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és

$$F(x,y) = f\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big).$$

Tegyük fel, hogy ϕ, ψ differenciálhatók (x,y)-ban, illetve f differenciálható $\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)$-ban. Ekkor F is differenciálható, és

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\phi(x,y,\psi(x,y)\big)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)$$

azaz

$$\nabla F(x,y) = \nabla f(u,v)\begin{pmatrix}\nabla\phi(x,y)\\ \nabla\psi(x,y)\end{pmatrix}.$$

Bizonyítás

1. f, ϕ differenciálhatósága miatt tudjuk, hogy

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = f\big(\phi(x+\Delta x, y+\Delta y)\big) - f\big(\phi(x,y)\big) =$$
$$= f'\big(\phi(x,y)\big)\big(\phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \phi(x,y)\big) + o(\|\Delta x, \Delta y\|) =$$
$$= f'\big(\phi(x,y)\big)\left(\nabla\phi(x,y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + o(\|\Delta x, \Delta y\|)\right) + o(\|\Delta x, \Delta y\|) =$$
$$= f'\big(\phi(x,y)\big)\nabla\phi(x,y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + o(\|\Delta x, \Delta y\|).$$

Ez alapján F valóban differenciálható, és

$$\nabla F(x,y) = f'\big(\phi(x,y)\big)\nabla\phi(x,y).$$

2. f, ϕ, ψ differenciálhatósága miatt tudjuk, hogy

$$F(t+\Delta t) - F(t) = f\big(\phi(t+\Delta t), \psi(t+\Delta t)\big) - f\big(\phi(t), \psi(t)\big) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(\phi(t), \psi(t)\big)\big(\phi(t+\Delta t) - \phi(t)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\phi(t), \psi(t)\big)\big(\psi(t+\Delta t) - \psi(t)\big) + o(\Delta t) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\phi(t), \psi(t)\big)\phi'(t)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\phi(t), \psi(t)\big)\psi'(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Ez alapján F valóban differenciálható, és

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t).$$

3. f, ϕ, ψ differenciálhatósága miatt tudjuk, hogy

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) =$$
$$= f\big(\phi(x+\Delta x, y+\Delta y), \phi(x+\Delta x, y+\Delta y)\big) - f\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\big(\phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \phi(x,y)\big) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial v}\big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)\big(\psi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \psi(x,y)\big) + o(\|\Delta x, \Delta y\|) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(\phi(x,y),\psi(x,y))\left(\nabla\phi(x,y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + o(\|\Delta x,\Delta y\|)\right)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}(\phi(x,y),\psi(x,y))\left(\nabla\psi(x,y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + o(\|\Delta x,\Delta y\|)\right) + o(\|\Delta x,\Delta y\|) =$$

$$= \nabla f(u,v)\begin{pmatrix}\nabla\phi(x,y)\\ \nabla\psi(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + o(\|\Delta x,\Delta y\|).$$

Ez alapján F valóban differenciálható, és

$$\nabla F(x,y) = \nabla f(u,v)\begin{pmatrix}\nabla\phi(x,y)\\ \nabla\psi(x,y)\end{pmatrix}.$$

3.55. Szélsőérték

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Ekkor $(x_0, y_0) \in S$ lokális minimum (maximum), ha $\exists U$ környezete, ahol $\forall(x,y) \in U$ esetén

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \qquad \Big(f(x,y) \leq f(x_0,y_0)\Big).$$

Ha $U = D_f$, akkor (x_0, y_0) globális szélsőérték.

3.55.1. Szükséges feltétel szélsőérték létezéséhez

Tegyük fel, hogy f differenciálható. Ekkor ha (x,y) szélsőérték, akkor

$$\nabla f(x,y) = (0,0).$$

Bizonyítás

Legyen $f_1(x) = f(x, y_0)$ a kétváltozós függvény egyik metszetfüggvénye. Ekkor ha x_0 szélsőérték, akkor $f_1'(x_0) = 0$ kell, azonban $f_1'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ szükséges.

3.55.2. Stacionárius pont

Azt mondjuk, hogy (x,y) stacionárius pontja f-nek, ha

$$\nabla f(x,y) = (0,0).$$

3.55.3. Nyeregpont

Azt mondjuk, hogy (x,y) nyeregpont, ha stacionárius pont, de nem szélsőérték.

3.55.4. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez I.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható (x_0, y_0)-ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $\det H > 0$ esetén (x_0, y_0)-ban lokális szélsőérték van, ami
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ esetén maximum
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ esetén minimum
2. $\det H = 0$ esetén további vizsgálat szükséges
3. $\det H < 0$ esetén (x_0, y_0) nyeregpont.

3.55.5. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez II.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható (x_0, y_0)-ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $H > 0$ esetén (x_0, y_0) lokális minimumhely
2. $H < 0$ esetén (x_0, y_0) lokális maximumhely
3. ha H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.
4. ha H indefinit, akkor (x_0, y_0) nyeregpont.

3.56. Szükséges feltétel feltételes szélsőérték létezéséhez

Adott f kétváltozós, differenciálható függvény, melynek tekintsük a megszorítását az $\{(x,y) | \phi(x,y) = 0\}$ halmazon. Ekkor ha az (x_0, y_0) pontban feltételes szélsőérték van, ha $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$\nabla f(x_0, y_0) - \lambda_0 \nabla \phi(x_0, y_0) = 0.$$

3.57. Lagrange-féle multiplikátor szabály

Adott f kétváltozós, differenciálható függvény, melynek tekintsük a megszorítását az $\{(x,y) | \phi(x,y) = 0\}$ halmazon. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Ekkor ha (x_0, y_0)-ban feltételes szélsőértéke van f-nek a $\phi(x, y) = 0$ feltétel mellett, akkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

3.58. Lagrange-féle középértéktétel

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in intD$, és U egy olyan környezete, ahol f differenciálható és $U \subset D$. Ekkor $\forall (x, y) \in U$-hoz $\exists \theta \in (0, 1)$, melyre

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \nabla f\big(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y\big) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, illetve $\Delta y = y - y_0$.

Bizonyítás
Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

ahol $F : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor $F(0) = f(x_0, y_0)$ és $F(1) = f(x, y)$. A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists \theta \in (0, 1)$, melyre

$$F'(\theta) = F(1) - F(0).$$

Továbbá a láncszabály miatt

$$F'(t) = \nabla f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy θ-ra

$$F'(\theta) = F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

3.59. Tétel

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$ konvex. Tegyük fel, hogy a függvény differenciálható, és $\nabla f = 0$. Ekkor f konstans.

3.60. Függvényrendszer

Adottak $\Phi, \Psi : D \mapsto \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $\Phi(x,y) = \xi$ és $\Psi(x,y) = \eta$. Ekkor $F : D \mapsto \mathbb{R}^2$ egy függvényrendszer vagy vektormező, melyre

$$F(x,y) = \big(\Phi(x,y), \Psi(x,y)\big) = (\xi, \eta).$$

3.61. Jacobi mátrix

Ha a Φ, Ψ függvények differenciálhatóak, akkor F is differenciálható, és a derivált a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \Phi(x,y) \\ \nabla \Psi(x,y) \end{pmatrix}.$$

Ekkor $D(x,y) = \det \mathcal{J}(x,y) = \frac{d(\xi,\eta)}{\mathrm{d}(x,y)}$ a Jacobi determináns.

3.62. Invertálhatóság

Tegyük fel, hogy a Φ, Ψ függvények injektívek. Ekkor az F leképezés invertálható, és az inverz rendszer alakja

$$x = g(\xi, \eta)$$

$$y = h(\xi, \eta).$$

3.63. Inverz rendszer Jacobi mátrixa

Tegyük fel, hogy az inverz rendszer függvényei differenciálhatók. Ekkor a Jacobi mátrix

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial h}{\partial \eta}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g(\xi,\eta) \\ \nabla h(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

3.64. Tétel

Tegyük fel, hogy egy vektormező Jacobi mátrixa invertálható egy $(x,y) \in intD$ pontban. Ekkor a vektormező invertálható és

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \Big(\mathcal{J}(x,y)\Big)^{-1}.$$

Továbbá

$$D(\xi,\eta) = \frac{1}{D(x,y)}.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$\xi = \Phi\big(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)\big)$$

$$\eta = \Psi\big(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)\big).$$

Ekkor a láncszabály miatt

$$\nabla \xi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \nabla \Phi(x,y) \begin{pmatrix} \nabla g(\xi,\eta) \\ \nabla h(\xi,\eta) \end{pmatrix}$$

$$\nabla \eta(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \nabla \Psi(x,y) \begin{pmatrix} \nabla g(\xi,\eta) \\ \nabla h(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{D(x,y)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{D(x,y)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{D(x,y)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{D(x,y)}.$$

Ezek alapján

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \frac{1}{D(x,y)}\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} & -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{pmatrix} = \Big(\mathcal{J}(x,y)\Big)^{-1}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

3.65. Másodrendű Taylor formula

Tegyük fel, hogy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható $(x_0, y_0) \in intD$-ben. Ekkor

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + L_2$$

ahol L_2 a Lagrange-féle maradéktag.

Bizonyítás

Legyen $F : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ függvény és

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Ekkor

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2.$$

Felírva F-re a másodrendű Taylor formulát

$$F(1) - F(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + L_2$$

azonban $F(1) - F(0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$. Ezzel kapjuk is a bizonyítandót.

3.66. Magasabbrendű Taylor formula

Tegyük fel, hogy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ n-szer differenciálható $(x_0, y_0) \in intD$-ben. Ekkor

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} (\Delta x)^k (\Delta y)^{m-k} + L_n.$$

4. Többszörös integrálok

4.1. Jordan mérték $\mathbb{R}^2$-ben

Legyen adott egy R halmaz $\mathbb{R}^2$-ben. Osszuk fel a síkot egységnyi oldalú négyzetráccsal! Legyen továbbá $A_0^-(R)$ azon négyzetek száma, amelyek teljesen benne vannak R-ben, illetve $A_0^+(R)$ azon négyzetek száma, amelyeknek van közös pontja R-el. Felezzük meg a négyzetek oldalait. Ekkor legyen $A_1^-(R)$ azon négyzetek száma, amelyek teljesen benne vannak R-ben, osztva 4-el, illetve $A_1^+(R)$ azon négyzetek száma, amelyeknek van közös pontja R-el, osztva 4-el. Ezt az eljárást folytatva, tehát mindig felezve a négyzetek oldalit, majd osztva 4^n-el definiálhatunk két sorozatot $\big(A_n^-(R)\big)$-t és $\big(A_n^+(R)\big)$-t. Ekkor ezek a sorozatok monotonok, és korlátosak, emiatt létezik

$$\lim_{n\to\infty} A_n^-(R) = A^-(R)$$
$$\lim_{n\to\infty} A_n^+(R) = A^+(R).$$

Mivel $\forall A_n^-(R) \le A_n^+(R)$, így $A^-(R) \le A^+(R)$.

4.2. Mérhető tartomány

Ha $A^-(R) = A^+(R)$, akkor az R halmaz mérhető, és mértéke

$$A(R) := A^-(R) = A^+(R).$$

4.2.1. Tétel

Egy R halmaz pontosan akkor mérhető, ha

$$A(\partial R) = 0.$$

4.3. Jordan mérték tulajdonságai

1. Minden R halmaz esetén $A(R) \ge 0$.
2. Ha R, S mérhető halmaz, akkor $R \cup S$ és $R \cap S$ is mérhetők.
3. Ha $R \subset S$ mérhetők, akkor $A(R) \le A(S)$.
4. Ha R, S mérhető halmazokra $intR \cap intS = \emptyset$, akkor $A(R \cup S) = A(R) + A(S)$.

4.4. Tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ integrálható függvény, és legyen

$$R = \Big\{(x, y)\Big| x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\Big\}.$$

Ekkor

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.5. Halmaz átmérője

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ halmaz átmérője

$$\delta(R) := \sup\Big\{\|P_1 - P_2\|\Big| P_1, P_2 \in R\Big\}.$$

4.6. Felosztás finomsága

Adott

$$R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$$

felosztás finomsága

$$\delta = \max \delta(R_k).$$

4.7. Kettős integrál

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt mérhető halmaz, és rajta egy $f : R \mapsto \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Legyen

$$R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$$

felosztás, ahol $\forall R_k$ mérhető és $\forall R_k \cap R_j = \emptyset$. Legyen továbbá

$$m_k = \inf \left\{ f(x,y) \middle| x, y \in R_k \right\}$$

$$M_k = \sup \left\{ f(x,y) \middle| x, y \in R_k \right\}$$

és

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} A(R_k) m_k \le V(S) \le \sum_{k=1}^{n} A(R_k) M_k = S_n$$

ahol

$$S = \left\{ (x,y,z) \middle| (x,y) \in R, z \in [0, f(x,y)] \right\}.$$

Ekkor f folytonossága miatt a Heine-tétel által f egyenletesen folytonos. Emiatt $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta_0 > 0$, amelyre $\delta < \delta_0$ esetén $M_k - m_k < \varepsilon$. Ekkor

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} A(R_k)(M_k - m_k) < \sum_{k=1}^{n} A(R_k)\varepsilon = \varepsilon A(R).$$

Tehát

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\inf S_n \right) = \lim_{\delta \to 0} \left(\sup s_n \right)$$

azaz az integrál értelmezhető. Ekkor a keresett térfogat

$$V(S) = \iint_R f(x,y) \, \mathrm{d}R = \iint_R f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y) \, .$$

4.7.1. Tétel

Mérhető tartományon értelmezett folytonos függvény integrálható.

4.7.2. Kettős integrál tulajdonságai

1. Linearitás
$$\iint_R (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}R = \alpha \iint_R f \, \mathrm{d}R + \beta \iint_R g \, \mathrm{d}R$$

2. Legyen $R = R_1 \cup R_2$, ahol $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Ekkor
$$\iint_R f \, \mathrm{d}R = \iint_{R_1} f \, \mathrm{d}R_1 + \iint_{R_2} f \, \mathrm{d}R_2 \, .$$

3. Monotonitás Legyen $f(x,y) \le g(x,y)$ $\forall (x,y) \in R$ esetén. Ekkor
$$\iint_R f \, \mathrm{d}R \le \iint_R g \, \mathrm{d}R \, .$$

4. Háromszög-egyenlőtlenség
$$\left| \iint_R f \, \mathrm{d}R \right| \le \iint_R |f| \, \mathrm{d}R$$

4.8. Integrál középértéktétel

Legyen f korlátos, ahol $m \le f(x,y) \le M$ teljesül $\forall(x,y) \in R$ esetén. Ekkor

$$mA(R) \le \iint_R f \,\mathrm{d}R \le MA(R).$$

Ha f folytonos és R összefüggő, akkor $\exists(\xi,\eta) \in R$, melyre

$$\iint_R f \,\mathrm{d}R = f(\xi,\eta)A(R)$$

teljesül.

4.9. Tétel

Legyen $R = [a,b] \times [c,d]$, és tegyük fel, hogy $f(x,y) = \Phi(x)\Psi(y)$. Ekkor

$$\iint_R f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \iint_R \Phi(x)\Psi(y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \Phi(x) \,\mathrm{d}x \int_c^d \Psi(y) \,\mathrm{d}y\,.$$

Bizonyítás

Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n egyenlő részre, a $[c,d]$ intervallumot pedig m egyenlő részre. Legyen továbbá az így létrehozott R_{ij} téglalapokra $(\xi_i,\eta_j) \in R_{ij}$. Ekkor az integrál közelítő összege

$$V_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x\Delta y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Phi(\xi_i)\Psi(\eta_j)\Delta x\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i)\Delta x \sum_{j=1}^{m} \Phi(\eta_j)\Delta y.$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} V_{nm} = \iint_R f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \Phi(x) \,\mathrm{d}x \int_c^d \Psi(y) \,\mathrm{d}y\,.$$

4.10. Tétel

Legyen $R = [a,b] \times [c,d]$. Ekkor

$$\iint_R f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,.$$

Bizonyítás

Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n egyenlő részre, a $[c,d]$ intervallumot pedig m egyenlő részre. Legyen továbbá az így létrehozott R_{ij} téglalapokra $(\xi_i,\eta_j) \in R_{ij}$. Ekkor az integrál közelítő összege

$$V_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x\Delta y = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x\Delta y.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} V_{nm} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_c^d f(\xi_i,y) \,\mathrm{d}y\,\Delta x = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x\,.$$

Hasonlóan

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} V_{nm} = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\int_a^b f(x,\eta_j) \,\mathrm{d}x\,\Delta y = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,.$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} V_{nm} = \iint_R f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,.$$

4.11. Normáltartomány

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ x szerinti normáltartomány, ha $\exists [a,b]$, továbbá $\exists \Phi_1 \leq \Phi_2 : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big| x \in [a,b], y \in \big[\Phi_1(x), \Phi_2(x)\big] \Big\}.$$

Hasonlóan $R \subset \mathbb{R}^2$ y szerinti normáltartomány, ha $\exists [c,d]$, továbbá $\exists \Psi_1 \leq \Psi_2 : [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big| y \in [c,d], x \in \big[\Psi_1(y), \Psi_2(y)\big] \Big\}.$$

4.11.1. Tétel

Legyen R egy x szerinti normáltartomány. Ekkor

$$\iint_R f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, .$$

Hasonlóan, ha R egy y szerinti normáltartomány, akkor

$$\iint_R f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

4.12. Helyettesítés kettős integrálban

Legyen $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen

$$x = \Phi(u,v)$$

$$y = \Psi(u,v)$$

invertálható és differenciálható függvényrendszer. Legyen továbbá

$$R' = \Big\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \Big| \big(\Phi(u,v), \Psi(u,v)\big) \in R \Big\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y) = \iint_{R'} f\big(\Phi(u,v), \Psi(u,v)\big) D(u,v) d(u,v)$$

ahol $D(u,v)$ a Jacobi determináns.

4.13. Improprius integrál

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$, ahol f vagy R nem korlátos. Tegyük fel, hogy létezik olyan (R_n) mérhető sorozat, melyre $R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R$, ahol $f \in \mathcal{R}(R_n)$ és

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R.$$

Ekkor ha

$$\exists \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y) \, \mathrm{d}R_n$$

és független (R_n) megválasztásától, akkor azt mondjuk, hogy f improprius értelemben integrálható R-n és

$$\iint_R f(x,y) \, \mathrm{d}R = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y) \, \mathrm{d}R_n \, .$$

4.13.1. Tétel

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy az abszolút integrálokból álló sorozat egyenletesen korlátos. Ekkor f impropriusan integrálható.

4.13.2. Tétel

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor ha létezik olyan megfelelő (R_n) tartománysorozat, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\,\mathrm{d}R_n$$

akkor minden más megfelelő (S_n) tartománysorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y) dS_n = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\,\mathrm{d}R_n = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}R\,.$$

4.14. Majoráns kritérium

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ nem korlátos. Tegyük fel, hogy $\exists \alpha \in (0,2), M > 0$ melyre

$$\big|f(x,y)\big| \le \frac{M}{\|(x,y)\|^\alpha}.$$

Ekkor f impropriusan integrálható R-n.

4.15. Vonalintegrál

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós függvény és

$$\Gamma = \Big\{\gamma(t)\Big| t \in [a,b]\Big\} \in R$$

sima görbe, ahol $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Ekkor f Γ görbe menti vonalintegrálja

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Bizonyítás

Írjunk fel egy közelítő összeget! Legyen

$$\mathcal{F} = \big\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\big\}$$

felosztás. Közelítsük a vonalintegrált téglalapokkal, melynek a magassága $f\big(\gamma(t_i)\big)$ az alapja pedig

$$\sqrt{\big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\big)^2 + \big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\big)^2}.$$

Ekkor a közelítő összeg

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{\big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\big)^2 + \big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\big)^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2}(t_{i+1} - t_i).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists \xi_i, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$, melyekre

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = x'(\xi_i) \qquad \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = y'(\eta_i).$$

Ekkor

$$I_n = f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}\Delta t_i.$$

Vegyük észre, hogy ez egy Riemann összeg, azaz

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta(\mathcal{F})\to 0}} I_n = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

4.15.1. Tétel

Adott f függvény vonalintegrálja Γ mentén független Γ paraméterezésétől.

4.16. Vektormező vonalintegrálja

Adott $F : R \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

vektormező és

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \middle| t \in [a, b] \right\} \in R$$

sima görbe. Ekkor a vektormező vonalintegrálja

$$\int_\Gamma F(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \left\langle F\big(\gamma(t)\big), \dot{\gamma}(t) \right\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b \Big(f\big(\gamma(t)\big)\dot{x}(t) + g\big(\gamma(t)\big)\dot{y}(t) \Big) \,\mathrm{d}t\,.$$

Bizonyítás

$$\int_\Gamma F(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\Gamma \begin{pmatrix} f(x, y) & g(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \int_\Gamma f(x, y) \,\mathrm{d}x + \int_\Gamma g(x, y) \,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_\Gamma f\big(\gamma(t)\big)\dot{x}(t) \,\mathrm{d}t + \int_\Gamma f\big(\gamma(t)\big)\dot{y}(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \left\langle F\big(\gamma(t)\big), \dot{\gamma}(t) \right\rangle \mathrm{d}t\,.$$

4.17. Potenciálos vektormező

Azt mondjuk, hogy F potenciálos vektormező, ha $\exists f$ differenciálható függvény, melyre $F = \nabla f$.

4.17.1. Tétel

Adott F potenciálos vektormező, aminek potenciálja f és adott

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \middle| t \in [a, b] \right\}$$

sima görbe. Ekkor

$$\int_\Gamma F(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}\mathbf{r} = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

Bizonyítás

$$\int_\Gamma F(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \left\langle F\big(\gamma(t)\big), \dot{\gamma}(t) \right\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{d}{\mathrm{d}t} f\big(\gamma(t)\big) \,\mathrm{d}t = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

4.18. Köringetrál

Adott F vektormező és Γ zárt, sima görbe. Ekkor F Γ menti vonalintegrálja

$$\oint_\Gamma F(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

4.18.1. Tétel

Adott F vektormező és Γ zárt, sima görbe. Ekkor F potenciálos akkor és csak akkor, ha

$$\oint_\Gamma F(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0.$$

5. Fourier analízis

5.1. Dirac delta

Adott $\varepsilon > 0$. Ekkor legyen

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{ha } |x| \geq \varepsilon \end{cases}.$$

A Dirac delta

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x).$$

5.1.1. Dirac delta tulajdonságai

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \, \mathrm{d}x = 1.$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \, \mathrm{d}x = f(0)$$

5.2. Konvolúció

Adottak $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvények. Ekkor a két függvény konvolúciója

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) \, \mathrm{d}y \, .$$

5.2.1. Konvolúció tulajdonságai

1. Kommutatív, azaz $f * g = g * f$.
2. Asszociatív, azaz $f * (g * h) = (f * g) * h$.
3. Disztributív, azaz
$$(f + g) * h = f * h + g * h.$$
4. $f * g$ abszolút integrálható és
$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|(f * g)(x)\big| \, \mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \big|g(x)\big| \, \mathrm{d}x \, .$$
5. Dirac delta a konvolúció egysége, azaz
$$(\delta * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y = f(x).$$

Bizonyítás

1. $$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x-y) \, \mathrm{d}y \underset{\substack{u=x-y \\ \mathrm{d}u=-\mathrm{d}y}}{=} - \int_{\infty}^{-\infty} f(x-u) g(u) \, \mathrm{d}u =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u) \, \mathrm{d}u = (g * f)(x)$$

2.

5.3. Fourier sor komplex alakja

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\,.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{a_n - ib_n\,\mathrm{sgn}\,(n)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\,.$$

5.4. Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Ekkor a függvény Fourier transzformáltja $\hat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(f,s) = \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x\,.$$

5.4.1. Tétel

Legyen

$$\hat{f}_A(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ekkor $\hat{f}_A$ egyenletesen konvergál $\hat{f}$-hez.

Bizonyítás

$$\big|\hat{f}_A(s) - \hat{f}(s)\big| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A} \big|f(x)\big|\big|e^{-isx}\big|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-A}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x + \int_{A}^{\infty}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x\right) < \varepsilon$$

bizonyos A_0 küszöb után, hiszen f abszolút integrálható. Ekkor

$$\big|\hat{f}_A(s) - \hat{f}(s)\big| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon.$$

Mivel A_0 független s-től, így valóban egyenletes a konvergencia.

5.4.2. Fourier transzformáció tulajdonságai

1. Ha f páros, akkor
$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(st) \, \mathrm{d}t \,.$$
2. Ha f páratlan, akkor
$$\hat{f}(s) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(st) \, \mathrm{d}t \,.$$
3. $\hat{f}$ folytonos
4. Linearitás
$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g, s) = \alpha\mathcal{F}(f, s) + \beta\mathcal{F}(g, s)$$
5. Átskálázás
$$\mathcal{F}\big(f(ax), s\big) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right) \qquad (a \neq 0)$$
6. Időeltolás
$$\mathcal{F}\big(f(x - x_0), s\big) = e^{-ix_0 s}\mathcal{F}\big(f(x), s\big)$$
7. Frekvenciaeltolás
$$\mathcal{F}\Big(e^{ikx} f(x), s\Big) = \mathcal{F}\big(f(x), s - k\big)$$
8. Tegyük fel, hogy
$$\int_{-\infty}^\infty \big|xf(x)\big| \, \mathrm{d}x < \infty.$$
Ekkor
$$\mathcal{F}\big(xf(x), s\big) = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{F}\big(f(x), s\big).$$
9. Tegyük fel, hogy
$$\int_{-\infty}^\infty \big|f'(x)\big| \, \mathrm{d}x < \infty.$$
Ekkor
$$\mathcal{F}\big(f', s\big) = is\mathcal{F}(f, s).$$
10. $$\mathcal{F}(f * g, s) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f, s)\mathcal{F}(g, s)$$
11. $$\mathcal{F}(fg, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s)$$

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(st) \, \mathrm{d}t - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(st) \, \mathrm{d}t \,.$$
Ekkor ha f páros, akkor
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(st) \, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(st) \, \mathrm{d}t \,.$$

2. Tudjuk, hogy
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st)\,\mathrm{d}t - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st)\,\mathrm{d}t\,.$$
Ekkor ha f páratlan, akkor
$$\hat{f}(s) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st)\,\mathrm{d}t = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin(st)\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Az egyenletes konvergenciából következik.

4. Az integrálás linearitásából következik.

5.
$$\mathcal{F}\big(f(ax), s\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-isx}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\frac{1}{a}y=x\\ \frac{1}{a}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\operatorname{sgn} a\infty}^{\operatorname{sgn} a\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right)$$

6.
$$\mathcal{F}\big(f(x-x_0), s\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-isx}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{y=x-x_0\\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}x}}{=}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-is(y+x_0)}\,\mathrm{d}y = e^{-isx_0}\mathcal{F}\big(f(x), s\big)$$

7.
$$\mathcal{F}\left(e^{ikx}f(x), s\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s-k)x}\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}\big(f(x), s-k\big)$$

8.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{F}\big(f(x), s\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{-isx}\,\mathrm{d}x$$
hiszen az egyenletes konvergencia miattt az integrálás és a deriválás sorrendje megcserélhető. Ekkor
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{F}\big(f(x), s\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-isx}\,\mathrm{d}x = -i\mathcal{F}\big(xf(x), s\big).$$

9.
$$\mathcal{F}(f', s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-isx}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + is\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x =$$
$$= is\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x = is\mathcal{F}(f, s)$$

10.
$$\mathcal{F}(f*g, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right)e^{-isx}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-isy}\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)e^{-is(x-y)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f, s)\mathcal{F}(g, s)$$

11.
$$\mathcal{F}(fg, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r)e^{irx}\,\mathrm{d}r\, g(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i(s-r)x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r)\hat{g}(s-r)\,\mathrm{d}r =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s)$$

5.5. Inverz Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} \, \mathrm{d}s \,.$$

5.5.1. Tétel

Tegyük fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x < \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x < \infty.$$

Legyen

$$f_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(s) e^{isx} \, \mathrm{d}s \,.$$

Ekkor f_A egyenletesen konvergál f-hez.

5.6. Parseval egyenlet

Tegyük fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x < \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x < \infty.$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(s)\right|^2 \mathrm{d}s \,.$$

Bizonyítás

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \hat{f}(-s) \, \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(s)\right|^2 \mathrm{d}s$$

6. Differenciálegyenletek

6.1. Lineárisan független függvények

Adottak $y_1, y_2, \dots, y_n : D \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ezek lineárisan függetlenek, ha

$$y(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) \equiv 0 \implies \forall c_k = 0.$$

6.2. Wronski determináns

Adottak $y_1, y_2, \dots, y_n$ $(n-1)$-szer differenciálható függvények. Ekkor a Wronski determináns

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

6.2.1. Tétel

Az $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvények lineárisan összefüggők akkor és csak akkor, ha

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0.$$

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy a függvények összefüggők. Ekkor van köztük egy y_k függvény, melyre

$$y_k = -\sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} y_j.$$

Hasonlóan

$$y_k' = -\sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} y_j'.$$

A gondolatmenetet követve láthatjuk, hogy a mátrix k-adik oszlopa előáll a többi lineáris kombinációjaként, ezért a determináns nulla.
Most tegyük fel, hogy a determináns nulla. Tudjuk, hogy ekkor az oszlopok összefüggő rendszert alkotnak, amiből az előző gondolatmenet mentén láthatjuk, hogy az y_k függvények összefüggő rendszert alkotnak.

6.3. n-edrendű lineáris differenciálegyenlet

Adott L lineáris operátor, melyre

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} y^{(k)}.$$

Homogén differenciálegyenlet (HDE) esetén $L[y] = 0$ megoldásait keressük, inomogén differenciálegyenlet (IDE) esetén $L[y] = f(x)$ megoldásait keressük.

6.3.1. Tétel

Az $L[y] = 0$ egyenletnek létezik n darab lineárisan független megoldása, melyekre az összes többi megoldás ezek lineáris kombinációja.

Bizonyítás
A tétel második részét látjuk be. Tudjuk, hogy $L[y] = L[y_k] = 0$, tehát

$$W[y, y_1, \dots, y_n] = 0.$$

Mivel
$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$$
így
$$y = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k.$$

6.4. Homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet

Ebben az esetben
$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$
A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja
$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$
A HDE megoldásait $y = e^{\lambda x}$ alakban keresve
$$L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x} P(\lambda) = 0 \implies P(\lambda) = 0.$$

6.4.1. Első eset

Tegyük fel, hogy P n különböző gyöke mind valós, legyenek a gyökök $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ekkor az alapmegoldások
$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$
illetve az általános megoldás
$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

6.4.2. Második eset

Tegyük fel, hogy P m darab gyöke k_m-szeres gyök, ahol nyilván $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$. Ekkor az alapmegoldások
$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1}(x) &= x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \\ y_{k_1+1}(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1+k_2}(x) &= x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1+k_2+\dots+1}(x) &= e^{\lambda_m x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x} \end{aligned}$$
illetve az általános megoldás
$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_j - 1} c_{jl} x^l e^{\lambda_j x}.$$

6.4.3. Harmadik eset

Tegyük fel, hogy az egyenletnek gyöke a $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex szám. Ekkor tudjuk, hogy $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ is gyök. A két alapmegoldás

$$u_1(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\big)$$
$$u_2(x) = e^{\overline{\lambda} x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\big).$$

Tudjuk, hogy alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldás, ezért a fenti megoldásokból definiáljuk az új, valós alapmegoldásokat

$$y_1(x) = \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$y_2(x) = \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

6.4.4. Negyedik eset

Többszörös komplex gyököknél hasonlóan kell eljárni, mint többszörös valós gyököknél.

6.5. Állandók variálása

Adott

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x).$$

Legyenek az $L[y] = 0$ homogén differenciálegyenlet alapmegoldásai az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények. Ekkor a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x) y_k(x)$$

ahol

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} = \int W^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & f\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} d\begin{pmatrix}x\\ x\\ \vdots\\ x\end{pmatrix}.$$

ahol W a Wronski mátrix. Ekkor az általános megoldás

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x).$$

Bizonyítás

Állítsuk az γ_k, y_k függvényekre a következő feltételeket

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k' = 0$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k^{(n-1)} = f$$

azaz

$$W\begin{pmatrix}\gamma_1'\\ \gamma_2'\\ \vdots\\ \gamma_n'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ f\end{pmatrix}.$$

Ekkor $y_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k$ esetén

$$y_p' = \sum_{k=1}^n \gamma_k' y_k + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k' = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k'.$$

Hasonlóan

$$y_p^{(m)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k' y_k^{(m-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(m)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(m)}$$

illetve

$$y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Ebből

$$L[y_p] = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k L[y_k] = f.$$

Tehát $y_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k$ valóban megoldása az IDE-nek. Mivel $W \neq 0$, így a feltételekből azonnal következik, hogy

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \int W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \mathrm{d} \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$$

6.6. Kezdetiérték feladat

Olyan megoldást keresünk, melyre $y^{(k)}(x_0) = \xi_{k+1}$ teljesül, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ekkor létezik egyértelmű megoldás.

6.7. Peremérték feladat

Olyan megoldást keresünk, melyre $y(x_k) = \xi_k$ teljesül, $k = 1, 2, \dots, n$. Ekkor létezik egyértelmű megoldás.

6.8. Homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet rendszer

Adott az

$$\begin{aligned} y_1' &= \sum_{k=1}^n a_{1k} y_k \\ y_2' &= \sum_{k=1}^n a_{2k} y_k \\ &\vdots \\ y_n' &= \sum_{k=1}^n a_{nk} y_k \end{aligned}$$

DER a kezdetiértékekkel $y_k(0) = y_{0k}$. Az egyenletrendszer az

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix} \qquad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \qquad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixokkal kompakt módon felírható

$$Y'(x) = AY(x) \qquad Y(0) = Y_0$$

alakban.

6.8.1. Tétel

Az

$$Y'(x) = AY(x) \qquad Y(0) = Y_0$$

egyenletrendszer megoldása

$$Y(x) = e^{Ax}Y_0.$$

6.8.2. Tétel

Adott az

$$Y'(x) = AY(x) \qquad Y(0) = Y_0$$

egyenletrendszer. Tegyük fel, hogy az A kisérő mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértékei mind különbözőek. Ekkor az $s_1, s_2, \dots, s_n$ sajátértékek független rendszert alkotnak, illetve a DER lineárisan független megoldásrendszere

$$Y_k = e^{\lambda_k x} s_k$$

továbbá a kezdetiérték feladat egyértelmű megoldása

$$Y = \sum_{k=1}^{n} c_k Y_k$$

alakban írható.

7. Komplex függvénytan

7.1. Korlátos komplex sorozat

Azt mondjuk, hogy a (z_n) sorozat korlátos, ha $(|z_n|)$ korlátos.

7.2. Konvergens komplex sorozat

Azt mondjuk, hogy (z_n) konvergens és határértéke $z \in \mathbb{C}$, ha

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0.$$

7.2.1. Tétel

A (z_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a $(\operatorname{Re} z_n)$ és $(\operatorname{Im} z_n)$ sorozatok konvergensek. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

7.3. Konjugált sorozat

A (z_n) sorozat konjugált sorozata $(\overline{z_n})$.

7.4. Abszolút konvergencia

Azt mondjuk, hogy (z_n) abszolút konvergens, ha $(|z_n|)$ konvergens.

7.4.1. Tétel

Ha (z_n) konvergens, akkor abszolút konvergens is.

7.5. Konvergens végtelen sor

A $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ konvergensek. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

7.6. Komplex függvény kanonikus alakja

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor a függvény kanonikus alakja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ahol $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

7.7. Függvény határértéke

Adott f függvény határértéke a z_0 pontban H, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $0 < |z - z_0| < \delta$ esetén $\big|f(z) - H\big| < \varepsilon$ teljesül.

7.7.1. Tétel

Adott $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény. Ekkor $\lim_{z\to z_0} f(z) = H$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = \operatorname{Re} H$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = \operatorname{Im} H.$$

7.8. Folytonos függvény

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor f folytonos $z_0 \in D_f$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall z \in D_f$, $|z - z_0| < \delta$ esetén $\big|f(z) - f(z_0)\big| < \varepsilon$.

7.8.1. Tétel

f akkor és csak akkor folytonos z-ben, ha u, v folytonosak $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$-ben.

7.9. Differenciálhatóság

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor f differenciálható a $z_0 \in intD_f$ pontban, ha

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} < \infty.$$

7.10. Cauchy-Riemann egyenletek

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. f differenciálható a $z_0 \in intD_f$ pontban akkor és csak akkor, ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy f differenciálható a z_0 pontban. Ekkor

$$f'(z_0) = \lim_{r\to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) + iv(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0)}{r} + i \lim_{r\to 0} \frac{v(x_0 + r, y_0) - v(x_0, y_0)}{r} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Hasonlóan

$$f'(z_0) = \lim_{s\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) + iv(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{is} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0)}{is} + i \lim_{s\to 0} \frac{v(x_0, y_0 + s) - v(x_0, y_0)}{is} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ebből azonnal kapjuk az állítást.
Most tegyük fel, hogy a függvény kielégíti a Cauchy-Riemann egyenleteket. Ekkor

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{r+is\to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0 + s) + iv(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r + is} =$$

$$= \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} r + \frac{\partial u}{\partial y} s + i\frac{\partial v}{\partial x} r + i\frac{\partial v}{\partial y} s + o(|h|)}{r + is} = \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} r - \frac{\partial v}{\partial x} s + i\frac{\partial v}{\partial y} r + i\frac{\partial u}{\partial x} s + o(|h|)}{r + is} =$$

$$= \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(r + is) + \frac{\partial v}{\partial x}(-s + ir) + o(|h|)}{r + is} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a határérték létezik, így a függvény differenciálható.

7.11. Analitikus függvény

Azt mondjuk, hogy az f komplex függvény analitikus, ha differenciálható $\forall z \in D_f$-ben.

7.12. Laplace operátor

A kétdimenziós Laplace operátor
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

7.13. Harmonikus függvény

Adott $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, kétszer differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy u harmonikus, ha
$$\Delta u = 0$$
teljesül D_u-n.

7.13.1. Tétel

Ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenciálható, akkor u, v harmonikusak.

Bizonyítás
A Cauchy-Riemann egyenletekből
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Az első egyenletet x szerint, a másodikat y szerint deriválva
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$
Ebből
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$
Hasonlóan be lehet látni, hogy v harmonikus.

7.14. Harmonikus társ

Adott $u : D \mapsto \mathbb{R}$ harmonikus függvény, ahol D egyszeresen összefüggő tartomány. Ekkor $\exists v : D \mapsto \mathbb{R}$ harmonikus függvény, amelyre $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenciálható. Akkor v az u harmonikus társa és fordítva.

7.15. Elemi függvények

7.15.1. Exponenciális függvény

Az exponenciális függvény
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

1. A függvény analitikus és $\left(e^z\right)' = e^z$.
2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$
3. A függvény $2\pi i$ szerint periodikus.

Bizonyítás

1. A függvény kanonikus alakja
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$
Legyen $u(x,y) = e^x \cos y$ és $v(x,y) = e^x \sin y$ így $e^z = u(x,y) + iv(x,y)$.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
Azt látjuk, hogy a függvény eleget tesz a Cauchy-Riemann egyenleteknek, tehát differenciálható.
$$\big(e^z\big)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

2.
$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big) =$$
$$= e^{x_1+x_2}\big(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)\big) =$$
$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2}$$

3.
$$e^{z+2\pi i} = e^x\big(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\big) = e^z.$$

7.15.2. Logaritmus függvény

A logaritmus függvény
$$\ln z = \ln|z| + i(\operatorname{arc} z + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
A logaritmus főértéke $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{arc} z$.

1.
$$e^{\ln z} = z$$

2. $z_1, z-2 \in \mathbb{C}$ esetén
$$\ln(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3.
$$\frac{d}{\mathrm{d}z}\operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}$$

Bizonyítás

1.
$$e^{\ln z} = e^{\ln|z|+i(\operatorname{arc} z+2k\pi)} = |z|e^{i\operatorname{arc} z} = |z|\big(\cos(\operatorname{arc} z) + i\sin(\operatorname{arc} z)\big) = z$$

2.
$$\ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\big(\operatorname{arc}(z_1 z_2) + 2k\pi\big) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\operatorname{arc} z_1 + \operatorname{arc} z_2 + 2k\pi) =$$
$$= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i$$

3.
$$\big(e^{\operatorname{Ln} z}\big)' = e^{\operatorname{Ln} z}\operatorname{Ln}' z = 1 \implies \operatorname{Ln}' z = \frac{1}{z}$$

7.15.3. Trigonometrikus függvények

1.
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$
$$\sin' z = \cos z$$

2.
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$
$$\cos' z = -\sin z$$

7.15.4. Hatványfüggvény

A hatványfüggvény
$$z^\lambda = e^{\lambda \ln z}.$$
A függvény főértékét kapjuk meg, ha a logaritmus főértékét használjuk.

7.16. Jordan görbe

$L \subset \mathbb{C}$ Jordan görbe a komplex számsíkon, ha $\exists \gamma : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{C}$ folytonos függvény, melyre
$$L = \Big\{ z(t) = x(t) + iy(t) \Big| t \in [\alpha, \beta] \Big\}.$$
A görbe zárt, ha $z(\alpha) = z(\beta)$. A görbe sima, ha x, y simák.

7.17. Görbe ívhossza

L sima Jordan görbe ívhossza
$$s(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} \,\mathrm{d}t\,.$$

7.18. Vonalintegrál

Legyen az L görbe egy felosztása $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, illetve legyen a k-adik ív tetszőleges pontja ξ_k. Ekkor
$$\int_L f(z) \,\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta_n \to 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big)$$
ahol δ_n a leghosszabb ív hossza. Ha a görbe zárt, akkor az $\oint_L$ jelölést használjuk.

7.18.1. Vonalintegrál tulajdonságai

1. Linearitás
$$\int_L (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}z = \alpha \int_L f \,\mathrm{d}z + \beta \int_L g \,\mathrm{d}z$$

2.
$$\int_{-L} f \,\mathrm{d}z = -\int_L f \,\mathrm{d}z$$

3. Ha $L = L_1 + L_2$, ahol $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, akkor
$$\int_L f \,\mathrm{d}z = \int_{L_1} f \,\mathrm{d}z + \int_{L_2} f \,\mathrm{d}z\,.$$

4. Ha f folytonos, akkor létezik $\int_L f \,\mathrm{d}z$.

5. Ha f korlátos és $\big|f(z)\big| \leq M$ $\forall z \in L$ esetén, akkor
$$\left| \int_L f \,\mathrm{d}z \right| \leq M s(L).$$

7.18.2. Vonalintegrál kiszámítása

Legyen az L görbe paraméteres megadása

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

Ekkor

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)+iy(t)\big)\big(x'(t)+iy'(t)\big)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_\alpha^\beta f\Big(r(t)e^{i\theta(t)}\Big)\Big(r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)e^{i\theta(t)}\theta'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

7.18.3. Newton-Leibniz formula

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függévény. Tegyük fel, hogy létezik F analitikus komplex függvény, melyre $F' = f$. Ekkor

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(z(\beta)\big) - F\big(z(\alpha)\big)$$

ahol

$$L = \Big\{ z(t) = x(t) + iy(t) \Big| t \in [\alpha, \beta] \Big\}.$$

7.19. Cauchy féle alaptétel

Tegyük fel, hogy $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $L \subset D$ egy sima, zárt görbe. Ekkor ha az $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény analitikus, akkor

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

7.19.1. Cauchy féle alaptétel általánosítása

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ összefüggő tartomány, melynek határa az L görbe. Tegyük fel továbbá, hogy D nem egyszeresen összefüggő, legyenek L_k a lyukakat körvevevő görbék, melyeknek irányítása megegyezik L-ével. Legyen továbbá f analitikus függvény. Ekkor

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

7.20. Cauchy féle integrálformula

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitikus függvény. Adott $z_0 \in intD$ és $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0-t. Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\,.$$

7.21. Cauchy féle differenciálformula

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitikus függvény. Ekkor f akárhányszor differenciálható D-ben és $\forall z_0 \in intD$ esetén

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

ahol $L \subset D$ tetszőleges olyan görbe, amely körbeveszi z_0-t.

7.22. Taylor sorfejtés

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény, amely differenciálható z_0 környezetében. Ekkor f z_0-ban Taylor sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0-t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \, .$$

7.23. Laurent sorfejtés

Legyen f analitikus egy

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z - z_0| \in (r, R) \right\}$$

körgyűrűben. Ekkor ebben a körgyűrűben f Laurent sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0-t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \, .$$

7.24. Zérus

Tegyük fel, hogy

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z)$$

alakban írható. Ekkor z_0 n-szeres vagy n-edrendű zérusa f-nek.

7.25. Pólus

Tegyük fel, hogy

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z)$$

alakban írható. Ekkor z_0 n-szeres vagy n-edrendű pólusa f-nek.

7.26. Reziduum

Az f függvény reziduuma a z_0 pontban

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) \, \mathrm{d}z \, .$$

7.27. Szingularitás

f függvény szingularitása z_0, ha itt nem analitikus.

1. Megszüntethető a szingularitás, ha
$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z).$$
Ekkor f Laurent sorában nincsen negatív indexű tag.

2. Nem esszenciális a szingularitás, ha $\exists n \in \mathbb{N}$ melyre $c_{-n} \neq 0$, de $\forall k < -n$ esetén $c_k = 0$. Ekkor z_0 n-edrendű pólus.

3. Esszenciális a szingularitás, ha nem létezik az előző pontban említett n.

7.28. Reziduum tétel

Adott $D \in \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és f függvény, amely véges sok a_k szingularitástól eltekintve analitikus D-n. Ekkor $L \subset D$ zárt görbe esetén, amely körbeveszi a szingularitásokat

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=a_k} f(z).$$