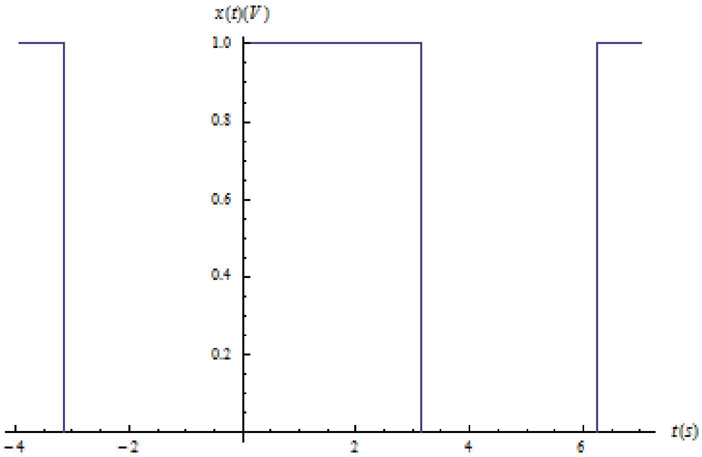
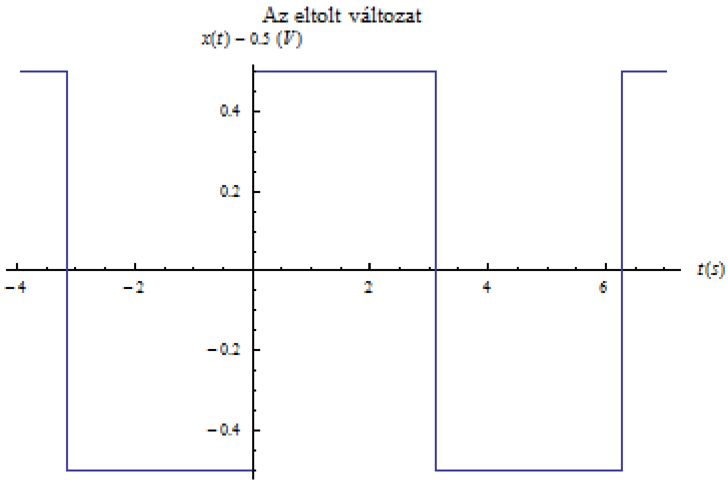
6. Házi feladat megoldásai

1. *Feladat*

- Az adott képlet alapján a jel egy 2π periódusú négyszögjel, 0 és 1 V közt:



- A közelítéshez Fourier-sorba fejtjük a négyszögjelet (előbb trigonometrikus, majd harmonikus alakba). Itt kihasználjuk, hogy a jelet $-0.5\ V$-tal eltolva az y tengely mentén páratlan jelet kapunk, ekkor $a_k = 0\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$.



- A jel periódusideje: $T_0 = 2\pi\ s$.
- A jel körfrekvenciája: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ Hz$.
- $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 0.5\sin(kt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -0.5\sin(kt)dt\right] = \frac{0.5}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} = \frac{0.5}{\pi}\left[\frac{-\cos(k\pi)+\cos(k*0)+\cos(k2\pi)-\cos(k\pi)}{k}\right] = \frac{1-\cos(k\pi)}{k\pi} = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$.
- Így az eltolt jel Fourier-sora:

$$x(t) - 0.5 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin(kt)\ [V]$$

  Innen az eredeti jel Fourier-sora:

$$x(t) = 0.5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin(kt)\ [V]$$

- FIGYELEM! Az áramköri számítást már az eredeti jel sorával kell elvégezni!

- A számítás során elsőrendű közelítést kell alkalmazni, azaz $x(t)$-t közelítjük az $x(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(1 * t) + b_1 \sin(1 * t)[V] = 0.5 + \frac{1-(-1)^1}{1*\pi} * \sin(1 * t)\ [V] = 0.5 + \frac{2}{\pi}\sin(t)\ [V]$ alakban.
- A harmonikus alak együtthatói, és a harmonikus alak fázisszöge:

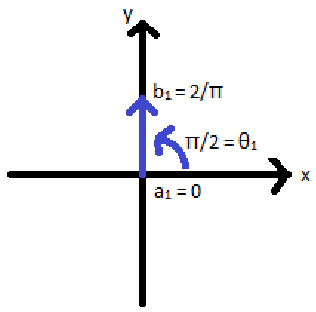
$$C_0 = \frac{a_0}{2} = 0.5\ [V]$$

$$C_1 = \sqrt[2]{{a_1}^2 + {b_1}^2} = \sqrt[2]{0^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2} = \left|\frac{2}{\pi}\right| = \frac{2}{\pi}\ [V]$$

$$\theta_1 = arctg\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = arctg\left(\frac{2/\pi}{0}\right) = 90° = \frac{\pi}{2}\ rad$$

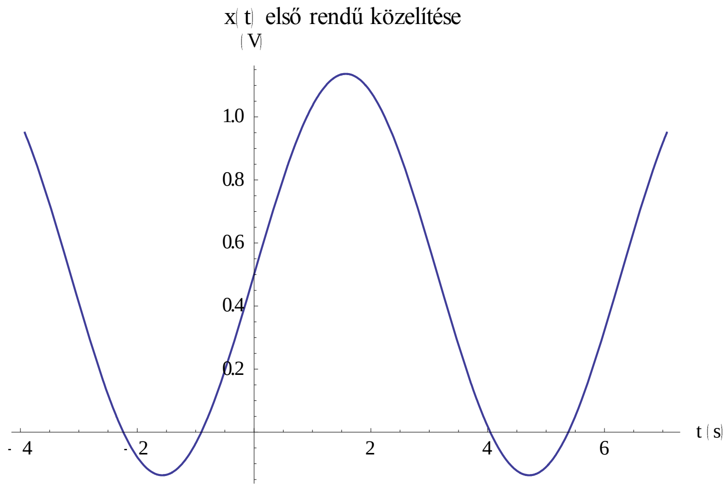
FIGYELEM! A harmonikus alak együtthatói NEM lehetnek NEGATÍVAK! Ugyanis ha a gyökjel alatt negatív szám szerepel, akkor is: $\sqrt[2]{(x)^2} = |x|$.

A harmonikus alak együtthatóinak és fázisszögeinek kiszámítását szemléletesen úgy lehet elképzelni, mintha egy (a_k, b_k) koordináta mátrixú vektor polár koordinátáit számolnánk ki (a vektor abszolút értéke, és x tengely pozitív irányával bezárt szöge).

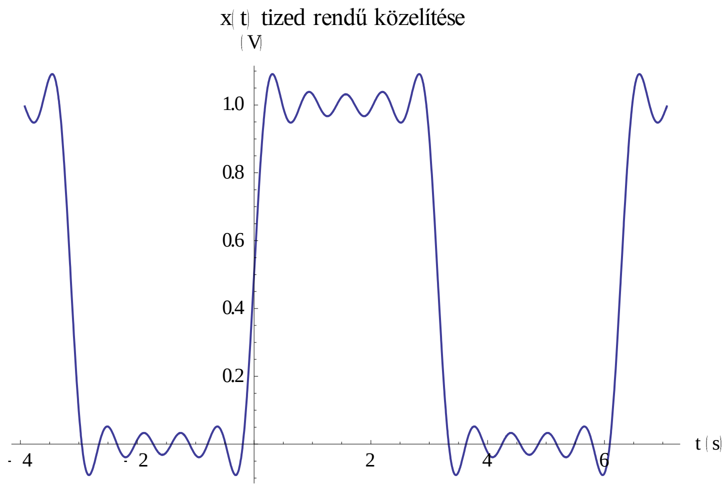


- Azaz $x(t)$ közelítése a harmonikus alak első két tagjával: $x(t) \approx C_0 + C_1 \cos(t - \theta_1)\ [V] = 0.5 + \frac{2}{\pi}\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)[V]$

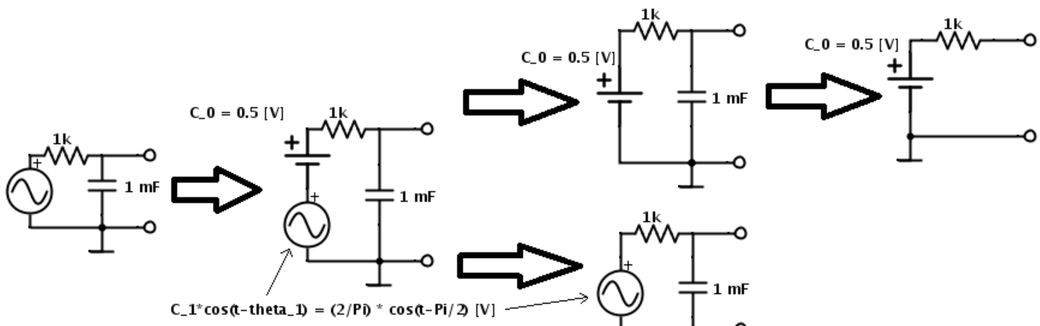
Ez kirajzolva:



Láthatóan ez igen pontatlan, a szemléltetéskedvéért viszont itt a tizedrendű közelítés, ami jóval pontosabb:



- A Fourier-sorba fejtett jellel való gerjesztését úgy lehet elképzelni, hogy egy az, $x(t)$ jelet előállító forrás helyébe végtelen sok ($x(t)$-vel azonos típusú) forrást kapcsolunk (illetve annyit, amekkora a közelítés rendje). Ezek közül a források közül az első egyenfeszültséget/egyenáramot szolgátat, aminek nagysága C_0, a második $C_1\sin(1 * \omega_0 * t)$, a harmadik $C_2\sin(2 * \omega_0 * t)$, stb. váltakozó feszültséget/áramot szolgáltat (attól függően, hogy $x(t)$ feszültség, vagy áramforrás volt). Innentől kezdve pedig a szuperpozíció tételét használjuk ki, ami azt jelenti, hogy lineáris rendszert gerjesztő jelek összegére adott válasz egyenlő az egyes jelekre külön-külön adott válaszok összegével. (Tulajdonképpen ez egyben a linearitás definíciója.)
- Emiatt, az eredeti áramkör így írható át:



- Előbb 0-vá tesszük a váltakozó áramú forrás gerjesztését. Ekkor egy állandósult állapotú egyenáramú hálózatot kell kiszámolni (a kondenzátor szakadás). Mivel az ellenálláson nem folyik áram, a rajta eső feszültség 0 $[V]$, így a kimeneten a huroktörvény miatt a gerjesztő forrás feszültségével azonos feszültség esik.
- Most az egyenáramú forrás gerjesztését tesszük 0-vá, ekkor egy állandósult állapotú, AC (szinuszos gerjesztésű) hálózat kimenetét kell kiszámolni.

$$\frac{2}{\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \frac{2}{\pi}\angle-\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\angle-90°$$

$$Y = \frac{2}{\pi}\angle-90° * \frac{Z_{C1}}{Z_R+Z_{C1}} = \frac{2}{\pi}\angle-90° * \frac{\frac{1}{j*10^{-3}}}{1000+\frac{1}{j*10^{-3}}} = \frac{2}{\pi}\angle-90° * \frac{1}{1+j*1000*10^{-3}} =$$

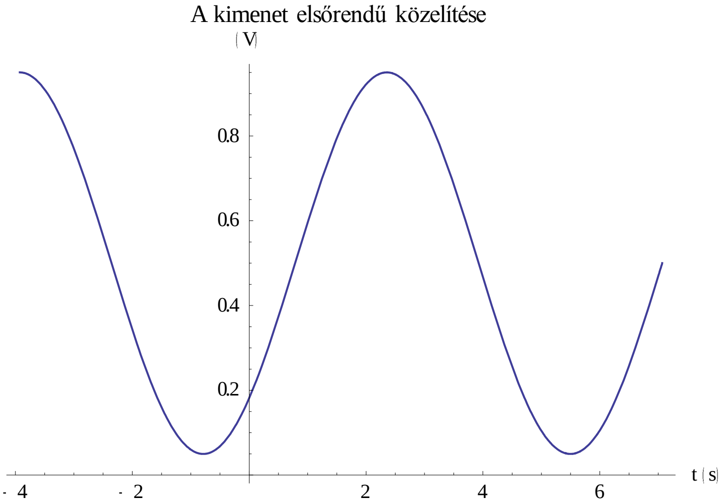
$$\frac{2}{\pi}\angle-90° * \frac{\sqrt[2]{2}}{2}\angle-45° = \frac{\sqrt[2]{2}}{\pi}\angle-135° = \frac{\sqrt[2]{2}}{\pi}\angle\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt[2]{2}}{\pi}\angle\frac{3\pi}{4} \rightarrow \frac{\sqrt[2]{2}}{\pi}\cos\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)[V]$$

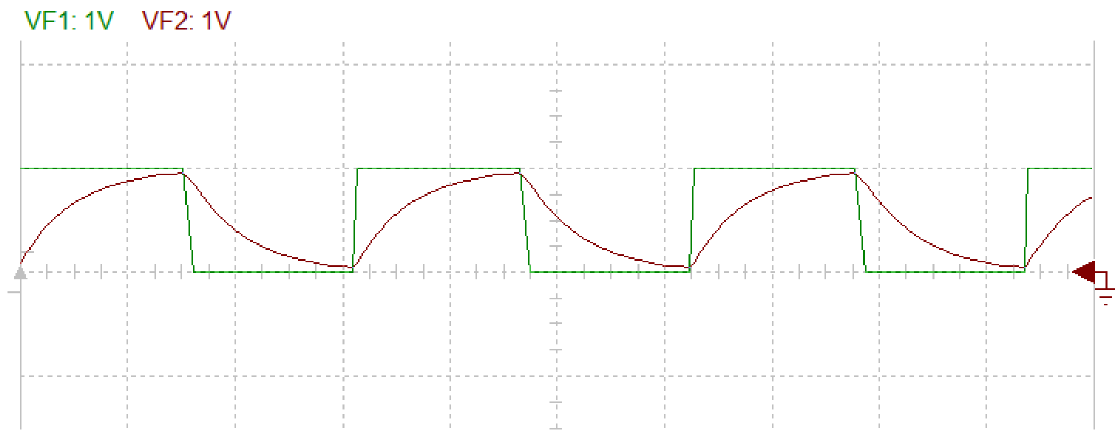
- A kimenet a két számolt kimenet összege:

$$y(t) \approx 0.5 + \frac{\sqrt[2]{2}}{\pi}\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) [V]$$

Ez kirajzolva:



Az alábbi ábrán a TINA programmal készült szimuláció eredménye látható, a függőleges tengely osztása: 1 $V/osztás$; a vízszintes tengelyé: 2 $s/osztás$. $VF1$ a forrás ($x(t)$) jelalakja, $VF2$ a kimenet ($y(t) = V_{C1}$).



2. Feladat

- A jel felírva a grafikon alapján: $x(t) = \begin{cases} t - k\ [V], ha\ k \leq t < k+1 \\ 0\ [V], különben \end{cases}$
- Az $x(t) - 0.5$ jel páratlan, ezért:

  $a_k = 0\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

  $b_k = \int_0^1 (t - 0.5) * sin(k\omega_0 t)\, dt = \int_0^1 (t-0.5) * sin\left(k * \frac{2\pi}{T_0} * t\right) dt = \int_0^1 (t - 0.5) * sin\left(k * \frac{2\pi}{1} * t\right) dt = \int_0^1 t * sin(k * 2\pi * t)\, dt + \int_0^1 -0.5 * sin(k * 2\pi * t)\, dt = - \frac{t*cos(k*2\pi*t)}{k2\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 - \frac{cos(k*2\pi*t)}{k2\pi} dt + \int_0^1 -0.5 * sin(k * 2\pi * t)\, dt = \frac{1}{k2\pi} + \left[\frac{sin(k*2\pi*t)}{(k*2\pi)^2}\right]_0^1 + 0.5\left[\frac{cos(k*2\pi*t)}{k*2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{k2\pi}$
- Innen az $x(t)$ jel Fourier-sora:

$$x(t) = 0.5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k * 2\pi * t)}{k2\pi}$$

- Az alkalmazott közelítés:

$$x(t) \approx 0.5 + \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\ [V]$$

- A harmonikus alak együtthatói, és szöge:

$$C_0 = 0.5.$$

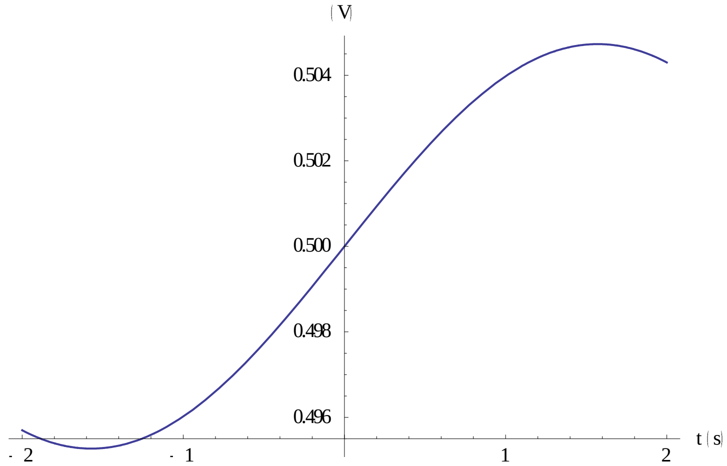
$$C_1 = \sqrt[2]{(0)^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\theta_1 = arctg\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = arctg\left(\frac{1/2\pi}{0}\right) = 90° = \frac{\pi}{2}$$

- A harmonikus alak:

$$x(t) \approx 0.5 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) [V]$$

x(t) első rendű közelítése



- Az előző feladathoz hasonlóan a számolás szuperpozícióval történik:
  - Az egyenkomponenst (C_0-t, a nulladrendű tagot) a hálózat nem viszi át, mivel az állandósult állapotú DC hálózatban a kondenzátor szakadás.
  - Az elsőrendű taggal a számolást az impedancia módszernél megismert módon végezzük:

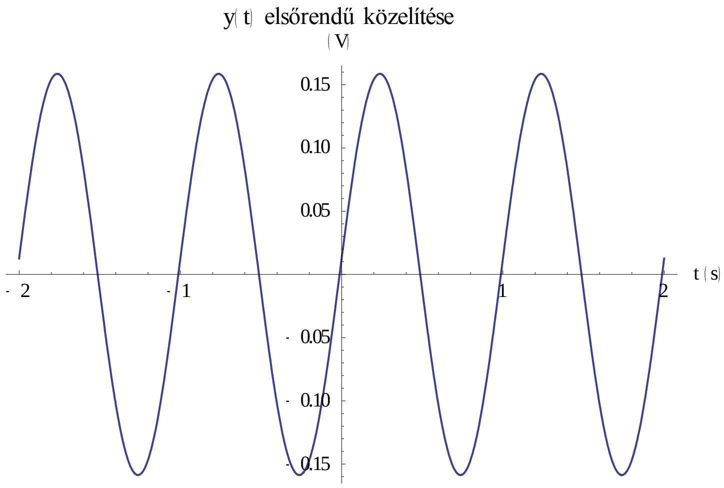
$$\frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \to \frac{1}{2\pi}\angle - 90°$$

$$Y = \frac{1}{2\pi}\angle - 90° * \frac{Z_{R1}}{Z_{R1} + Z_{C1}} = \frac{1}{2\pi}\angle - 90° * \frac{j*2\pi*10^{-6}*2\pi*10^{6}}{j*2\pi*10^{-6}*2\pi*10^{6}+1} = \frac{1}{2\pi}\angle - 90° * \frac{4\pi j}{4\pi j+1} \approx 0.1587\angle - 85.4501° = 0.15865\angle - 1.4914$$

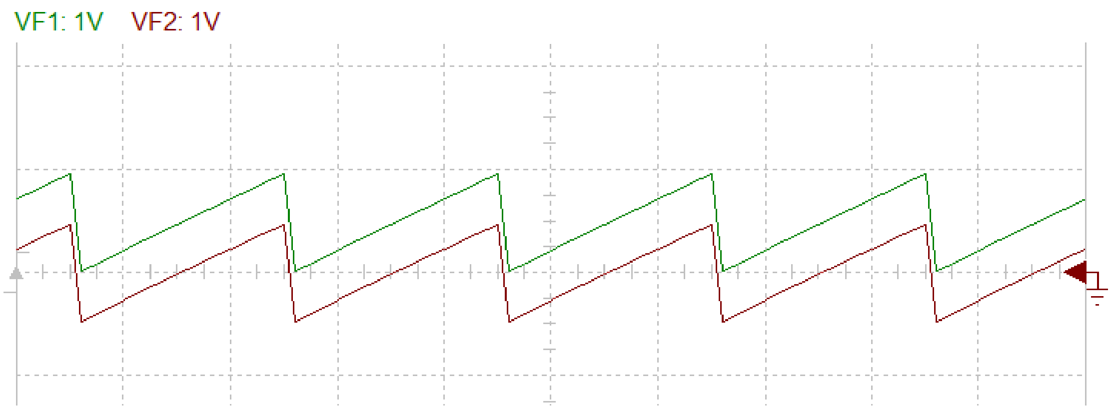
$$Y = 0.15865\angle - 1.4914 \to 0.15865 * \cos(2\pi t - 1.4914)\ [V]$$

- A kimenet a két kimenet összege:

$$y(t) \approx 0 + 0.15865 * \cos(2\pi t - 1.4914)\ [V] = 0.15865 * \cos(2\pi t - 1.4914)\ [V]$$



TINÁ-val kirajzolva ($VF1$: forrás; $VF2$: kimenet; vízszintes osztás: 500 $ms/osztás$; függőleges osztás: 1 $V/osztás$). Amiben pontos a közelítés, az az, hogy a DC komponens valóban eltűnik.



3. Feladat

- A grafikon alapján: $x(t) = \begin{cases} t - (2k - 1), ha\ 2k + 1 \le t < 2k + 2 \\ -t + (2k + 1), ha\ 2k \le t < 2k + 1 \end{cases}$
- Vedd észre: valójában fölösleges így leírni a függvényt, csak a teljesség kedvéért szerepel itt. A sorfejtésnél mindössze annyit csinálunk, hogy egy olyan, periódusnyi hosszú intervallumon integráljuk a jelet koszinusszal ill. szinusszal szorozva, ahol a jel egyszerűen leírható módon viselkedik.
- A jel páros, emiatt $b_k = 0\ \forall k \in \mathbb{Z}$
  Másrészt az integrálásnál kihasználjuk, hogy páros függvényt az origóra szimmetrikus intervallumon integrálva éppen a kétszeresét kapjuk annak, mintha a függvényt csak a fél intervallumon, az origótól jobbra vagy balra, integrálnánk. (És hogy páros függvények szorzata is páros, így az $x(t)$ és $\cos(t)$ függvényeké is.)
  $a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x(t)dt = 2 * \int_{-1}^{0} t + 1dt = 2\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{0} 2(1 - 0.5) = 1$
  $a_k = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x(t)\cos(k * \omega_0 * t)\,dt = 2 * \int_{-1}^{0}(t + 1)\cos\left(k * \frac{2\pi}{2} * t\right)dt =$
  $2\int_{-1}^{0}\cos(k\pi t)dt + 2\int_{-1}^{0} t\cos(k\pi t)dt = 2\int_{-1}^{0}\cos(k\pi t)dt + 2 * \frac{tsin(k\pi t)}{k\pi}\Big|_{-1}^{0} -$

$2\int_{-1}^{0}\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}dt = 2\left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{-1}^{0} + 0 - 2\left[-\frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{-1}^{0} = 2 * \frac{-1+\cos(-k\pi)}{(k\pi)^2} = 2 * \frac{-1+(-1)^k}{(k\pi)^2}$

- A harmonikus alak együtthatói és szögei:

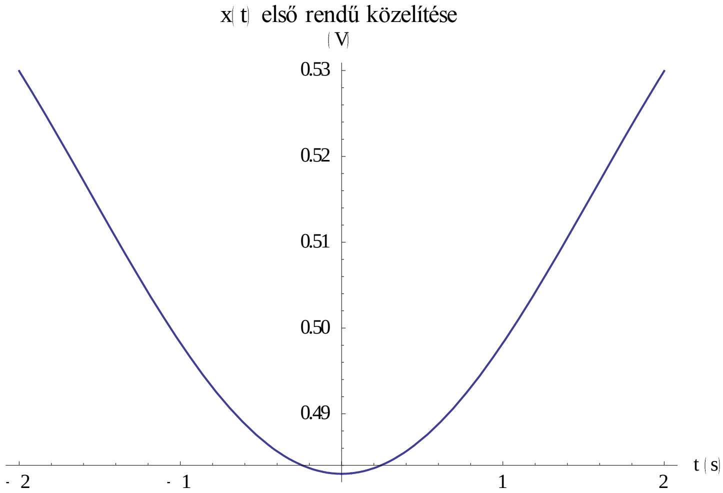
$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} = 0.5\ [V]$$

$$C_1 = \sqrt[2]{{a_1}^2 + {b_1}^2} = \sqrt[2]{\left[2 * \frac{-2}{\pi^2}\right]^2 + 0^2} = \left|\frac{-4}{\pi^2}\right| = \frac{4}{\pi^2}$$

$$\theta_1 = arctg\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = arctg\left(\frac{0}{4/\pi^2}\right) = arctg(0) = 0°$$

- $x(t)$ elsőrendű közelítése a harmonikus sorral:

$$x(t) \approx 0.5 + \frac{4}{(k\pi)^2}\cos(\pi t)\ [V]$$



- A válasz közelítése:
  - A fent tárgyalt ok miatt az áramkör a DC komponenst nem viszi át.
  - Az állandósult állapotú AC hálózat számítása:

$$\frac{4}{(k\pi)^2}\cos(\pi t) \rightarrow \frac{4}{(k\pi)^2}\angle 0°$$

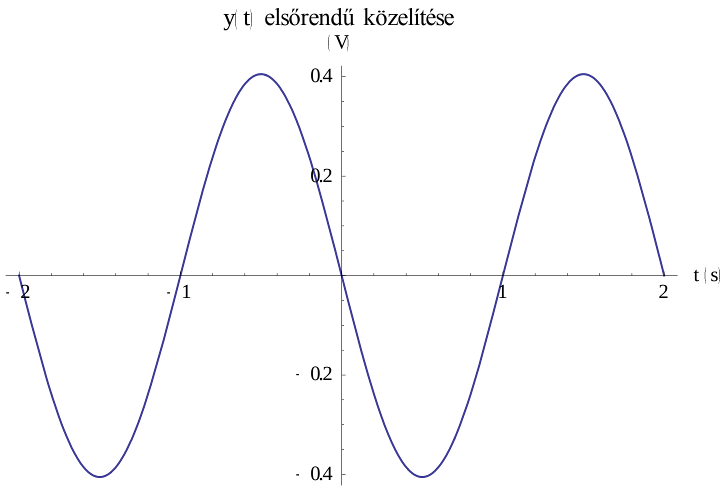
$$Y = \frac{4}{\pi^2}\angle 0° * \frac{Z_{L1}}{Z_{R1}+Z_{C1}+Z_{L1}} = \frac{4}{\pi^2}\angle 0° * \frac{\frac{1}{\pi}*j*\pi}{1+\frac{1}{j*\pi*\frac{1}{\pi}}+\frac{1}{\pi}*j*\pi} = \frac{4}{\pi^2}\angle 0° * \frac{j}{1+\frac{1}{j}+j} =$$

$$\frac{4}{\pi^2}\angle 0° * \frac{j}{1-j+j} = \frac{4}{\pi^2}\angle 0° * j = \frac{4}{\pi^2}\angle 0° * 1\angle 90° = \frac{4}{\pi^2}\angle 90°$$

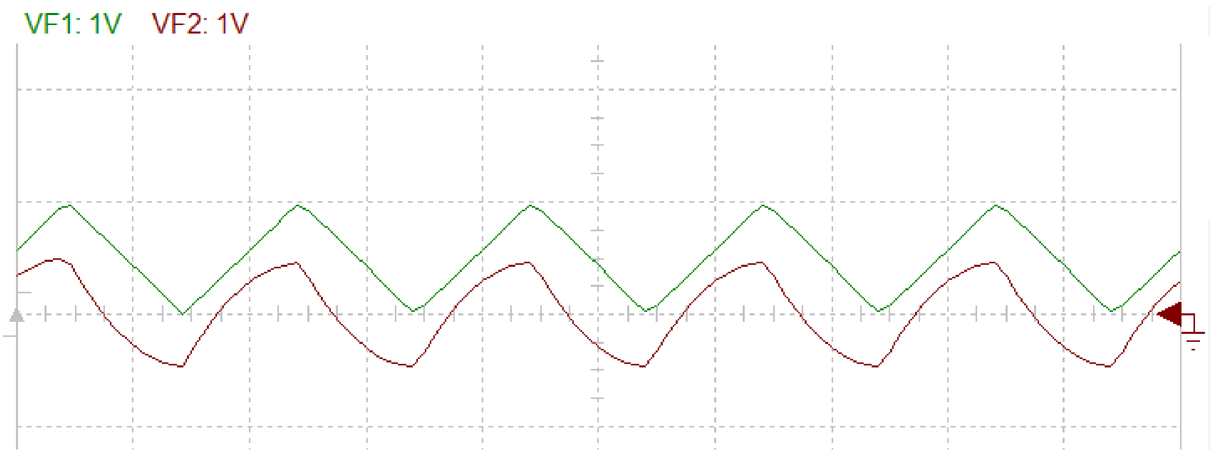
$$\frac{4}{\pi^2}\angle 90° \rightarrow \frac{4}{\pi^2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)[V]$$

- A kimenet a két kimenet összege:

$$y(t) \approx \frac{4}{\pi^2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ [V]$$



TINÁ-val kirajzolva ($VF1$: forrás; $VF2$: kimenet; vízszintes osztás: 500 $ms/osztás$; függőleges osztás: 1 $V/osztás$). Amiben itt is pontos a közelítés, az az, hogy a DC komponens valóban eltűnik.



4. Feladat

- $X^*(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(e^{-j\omega t}\right)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt$
  Itt kihasználtuk, hogy az integrálás és a komplex konjugálás felcserélhető, illetve, hogy $x(t)$ valós, így komplex konjugáltja önmaga.
- $X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt$
- Ebből következik az állítás. Q.E.D.

5. Feladat

- ***a)*** A dualitás tételét használjuk fel. Először is definíció szerint:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$

Így:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-0)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

A dualitás miatt:

$$\mathcal{F}\{1,\omega\} = \delta(\omega)$$

Megj.: a függvény direktben való transzformálása még nem volt tananyag, a következő féléves funkcionálanalízis során világosabb lesz.

- ***b)*** A frekvenciaeltolást használjuk ki: $\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t}, \omega\right\} = \mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t} * 1,\ \omega\right\} = \delta(\omega - \omega_0)$
- ***c)*** Az előző eredmény, az $\omega_0 = -\omega_0$ helyettesítéssel: $\mathcal{F}\left\{e^{j(-\omega_0)t}, \omega\right\} = \ \delta[\omega - (-\omega_0)] = \delta(\omega + \omega_0)$
- ***d)*** Ennél és a következő feladatnál az Euler-formulákat, illetve a transzformáció linearitását használjuk: $\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t), \omega\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \omega\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t}, \omega\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{-j\omega_0 t}, \omega\right\} = \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \omega_0)$
- ***e)*** $\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\,, \omega\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}, \omega\right\} = \frac{1}{2j}\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t}, \omega\right\} - \frac{1}{2j}\mathcal{F}\left\{e^{-j\omega_0 t}, \omega\right\} = \frac{1}{2j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j}\delta(\omega + \omega_0)$

6. *Feladat*

- $\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{at}u(t), \omega\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{at}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega - a)t}dt = \left[\frac{e^{-(j\omega-a)t}}{-(j\omega - a)}\right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-(j\omega-a)} = \frac{1}{j\omega - a}$
- Az időeltolást alkalmazva: $\mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{a(t-t_0)}u(t - t_0),\ \omega\right\} = e^{-j\omega t_0} * \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{at}u(t), \omega\} = \frac{e^{-j\omega t_0}}{j\omega - a}$

  FIGYELEM! Az összes függvénynek, aminek a változója t, el kell tolva lenni t_0-lal, különben az eltolási tétel nem használható!
- Az idő szerinti deriválás $j\omega$-val való szorzás, így: $\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{a(t-t_0)}u(t - t_0)\right],\ \omega\right\} = j\omega * \mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{a(t-t_0)}u(t - t_0),\ \omega\right\} = j\omega * \frac{e^{-j\omega t_0}}{j\omega - a}$
- Végül a frekvenciaeltolás tételét használjuk, azaz: $\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t} * \frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{a(t-t_0)}u(t - t_0)\right],\ \omega\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{a(t-t_0)}u(t - t_0)\right],\ \omega\right\}\Big|_{\omega = \omega - \omega_0} = j\omega * \frac{e^{-j\omega t_0}}{j\omega - a}\Big|_{\omega=\omega-\omega_0} = j(\omega - \omega_0) * \frac{e^{-j(\omega-\omega_0)t_0}}{j(\omega - \omega_0) - a}$