MATLAB 2017
6. gyakorlat

Differenciálegyenletek

Differenciálegyenletek

- ✘ Diffegyenlet: **Olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen egy függvény, és szerepel benne ennek az ismeretlen függvénynek valamely deriváltja is.**
- ✘ A diffegyenlet rendje: az ismeretlen függvény legmagasabb fokú deriváltjának fokszáma (első és másodrendűről lesz szó).
- ✘ MATLAB-ban a diffegyenletek megoldása numerikus integrálással történik.

Differenciálegyenletek

- Praktikusan:
  - amire kiváncsi vagyok: egy függvény (`f(t)`)
  - ami a rendelkezésemre áll:

    a függvény valamilyen deriváltját tartalmazó függvény

    `f'(t) = g(f(t),t)`

Szemléletesen

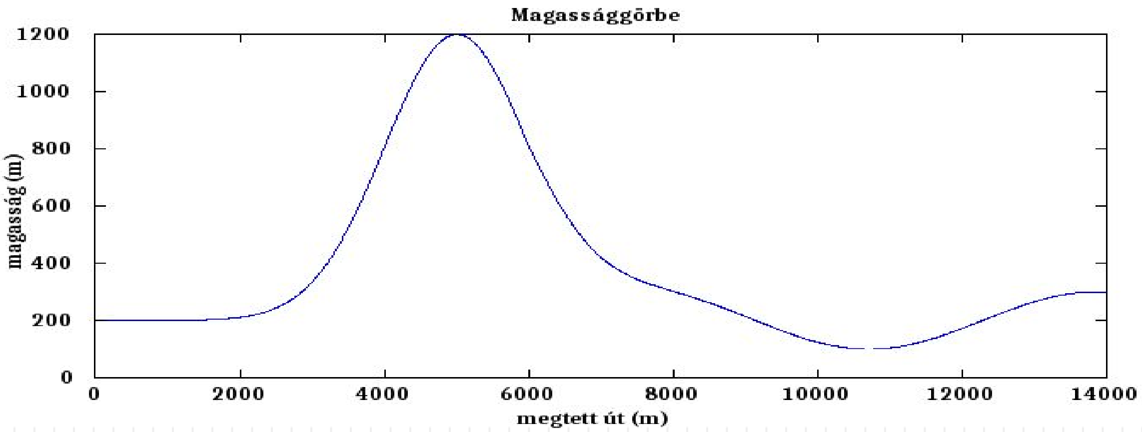
- ✘ Tegyük fel, hogy egy hegyi úton sétálunk, és az aktuális magasságunk az előrehaladás közben változik.
- ✘ A magasságunkat felírhatjuk pl. az idő, a hosszúsági és szélességi kör vagy a megtett út függvényében is.
- ✘ A megtett út függvényében a magasságra a következő összefüggés írható fel:

$$y = y(x),$$

ahol x az út, y pedig a magasság.

Szemléletesen

✘ Ha van nálunk magasságmérő vagy GPS vevő, az előrehaladás közben elegendő ponton felírva az aktuális magasságértékeket megkapjuk az `y = y(x)` összefüggés értékeit (pl. a lenti ábra szerint).



Szemléletesen

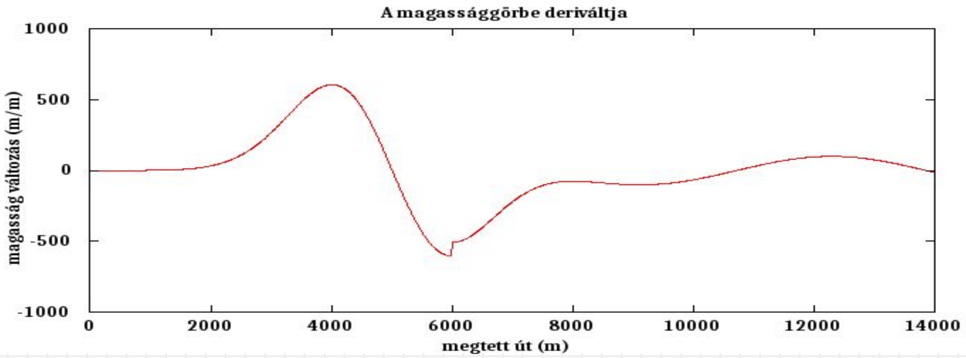
- ✘ Ez egyszerű megoldás lenne, de tegyük fel, hogy nincs nálunk megfelelő mérőeszköz. Látunk viszont egy táblát, ami 5%-os emelkedőt mutat. Ekkor a tábla megfelelően kicsi környezetében egy tetszőleges x-re és $h = 100$-ra az alábbi összefüggés írható fel:

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=0.05$$

- ✘ ahol az összefüggés bal oldala az út **meredeksége** x és $x+h$ között.

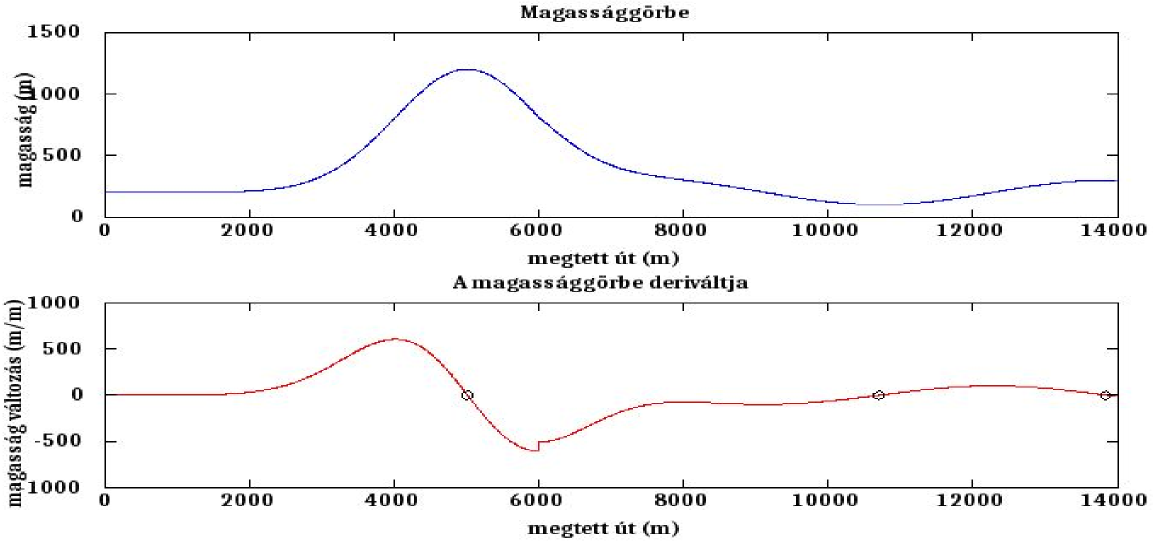
Szemléletesen

- ✘ Tegyük fel, hogy az út mentén pár méterenként találunk egy ilyen táblát, melyek a magasság változásának közelítő értékeit adják meg a megtett út függvényében.
- ✘ Ha ezeket az értékeket felírjuk, megkapjuk a `dy/dx` összefüggést, ami `y` ***deriváltja*** lesz.



Szemléletesen

✘ Az így kapott görbét numerikusan integrálva megkapjuk **`y = y(x)`** értékeit.



1. példa – explicit Euler

- ✘ Legyen adott a következő elsőrendű diffegyenlet:
  `y'(t) = 2y(t).`
- ✘ Adjuk meg `y(t)` értékeit a `t = [0,3]` intervallumon, `y(0) = 1` kezdeti érték esetén!

1. példa – explicit Euler

maga a diffegyenlet: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$

kezdeti ertek: $y(t_0) = y_0$

lepeskoz: h

idoskala (n+1)-edik tagja: $t_{n+1} = t_n + h$

ahol a megoldas: $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n))$

```
function [t_out, y_out] = explicitEuler(F, tspan, y0)
% Egyszeru differencialegyenelt-megoldo, explicit Euler
% modszer alapjan.
% Csak szemleltetesi celu, ne hasznaljuk kesobb, mert
% pontatlan.
% F: derivaltfuggveny
% tspan: idoskala (elso es utolso pontja)
% y0: kezdeti ertek
…
end
```

1. példa – explicit Euler

- ✘ Ehhez definiáljuk a diffegyenletet egy függvényként, amelynek 2 bemenő paramétere **`t`** és **`y`**. A diffegyenlet egyszerűsége miatt itt most anonim függvényt használjunk:

```
F = @(t,y) 2*y;
```

- ✘ **`F`** a deriváltfüggvény értékeit tartalmazza, a **`t`** paraméter a beépített megoldók miatt (**`ode45`**, `ode23`, `ode15`) kell.

1. példa – explicit Euler

- ✘ Írjunk egy saját diffegyenlet megoldó eljárást (`explicitEuler`), amely az Euler módszert alkalmazva, **`F`** numerikus integrálásával kiszámolja **`y(t)`** értékeit a fent megadott intervallumon és kezdeti értékkel.
- ✘ `200` lépéssel dolgozzunk, így az integrálás lépésközét `(intervallum hossza)/200`-nak válasszuk meg.
- ✘ FONTOS: a saját megoldó csak szemléltetési célt szolgál, a későbbi feladatok megoldásakor **<u>mindig</u>** a beépített **`ode45`** megoldót használjuk!

1. példa – explicit Euler

- ✘ Hívjuk meg a függvényt és rajzoljuk ki az eredményt!

```
% függvény definíció
F = @(t,y) 2*y;

% megoldás
[t1,y1] = explicitEuler(F,[0 3],1);

% rajzoljuk ki
figure(1); hold on;
plot(t1,y1,'r-');
```

1. példa – explicit Euler

✘ Nézzük meg ugyanezt a beépített `ode45` megoldó használatával is:

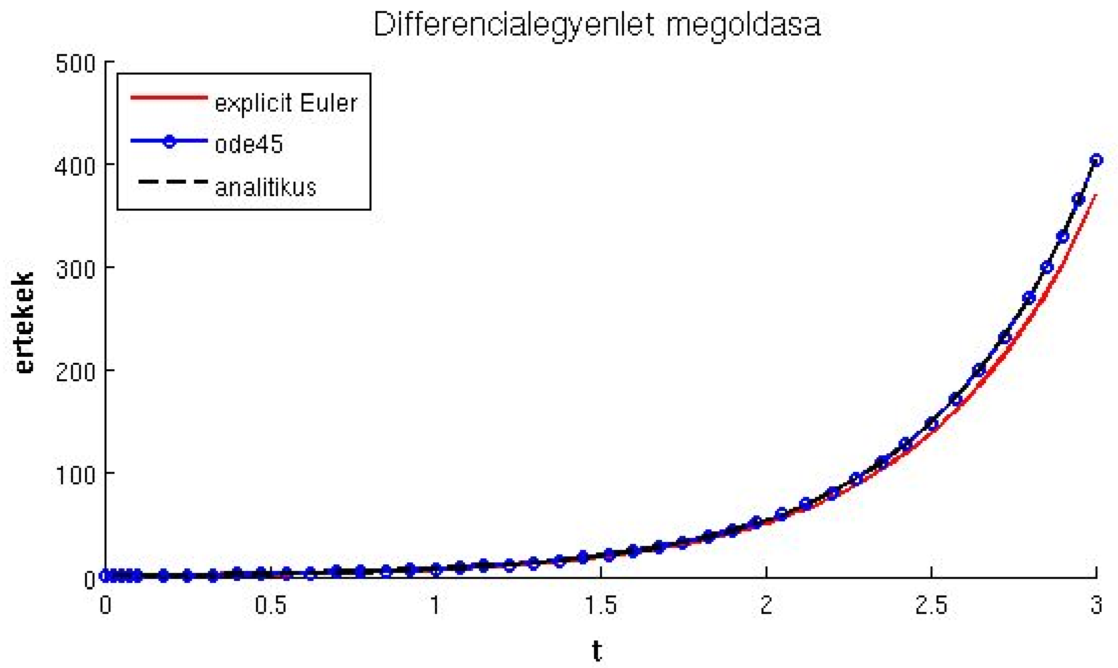
```
% beépített megoldó eljárás
[t45,y45] = ode45(F,[0 3],1);

% rajzoljuk ki
plot(t45,y45,'bo-');
```

✘ Analízisből ismert, hogy az `y'(t) = 2y(t)` diffegyenlet megoldása `y(t)` $= e^{2t}$, ezért ellenőrzésként rajzoljuk ki ezt is:

```
plot(t45,exp(2*t45),'k--','LineWidth',2);
```

1. példa – explicit Euler

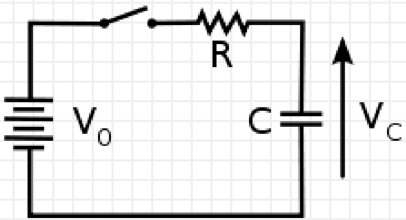


Konklúzió – explicitEuler vs ode45

- ✘ A beépített `ode45` megoldó nem lineárisan osztja el a "mintavételi" időpontokat (ezért kell a `t` paraméter a deriváltfüggvény megadásánál).
- ✘ A lépésköz meghatározása minden esetben egy előre meghatározott pontosság elérése érdekében történik.
- ✘ A legtöbb problémára az `ode45` a legjobb választás, ezért ezt fogjuk használni.

2. példa – áramkör (egyváltozós, elsőrendű)

- Vegyünk egy egyszerű töltőáramkört az alábbi ábra alapján:



- ahol `V0 = 2 V, R = 1 kOhm, C = 500 uF` és tudjuk, hogy `τ = RC` (időállandó).

- `t = 0`-ban a kapacitáson nincs töltés és a kapcsoló nyitva van

2. példa – áramkör (egyváltozós, elsőrendű)

- ✘ A kapcsoló bekapcsolásakor a kapacitáson átfolyó áram alakulása az alábbi diffegyenlettel írható le, (`V0/R` kezdeti értékkel):

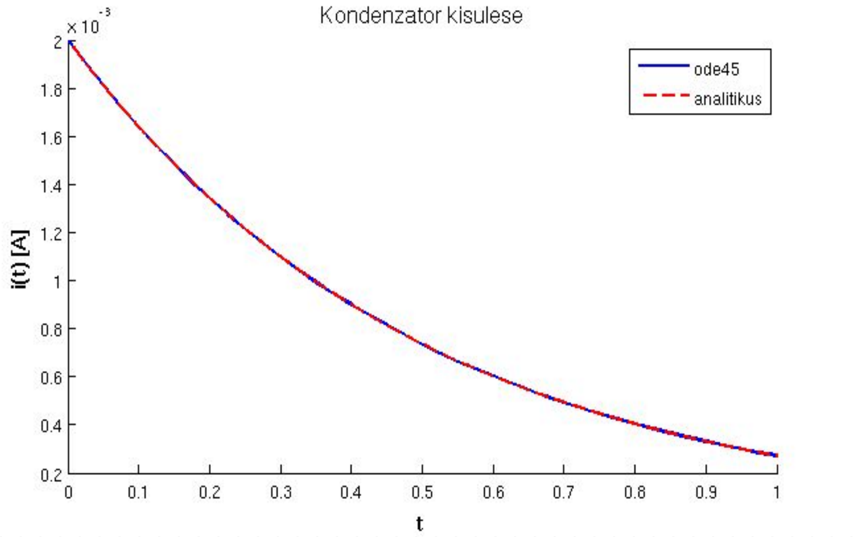
$$i'(t) = -\frac{1}{\tau} i$$

- ✘ Analitikus alakban pedig az alábbi képlettel adható meg:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2. példa – áramkör (egyváltozós, elsőrendű)

- Számítsuk ki (diffegyenlettel és analitikusan) és ábrázoljuk a fent leírt áramkörben a kapacitás áramának időbeli változását:



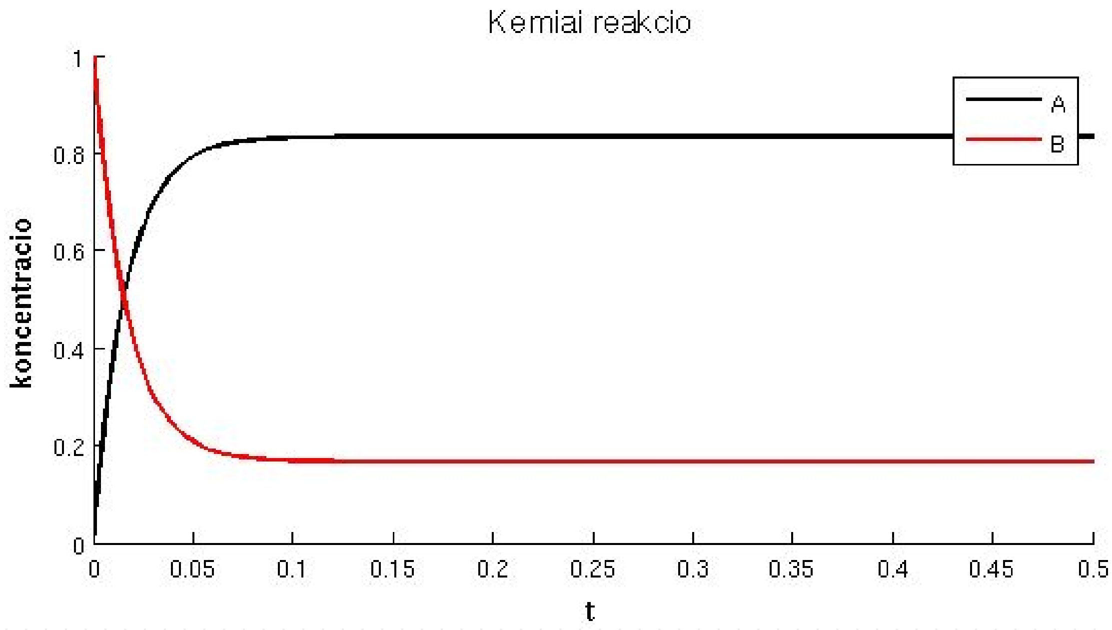
3. példa – kémiai reakció (többváltozós, elsőrendű)

- Egy kémiai reakció során két anyagot vegyítünk (`A` és `B`), melyek kocentráció változását az alábbi differenciálegyenlet rendszer írja le:
- Adjuk meg `A` és `B` koncentrációját a `[0 0.5]` intervallumon, `A(0) = 0` és `B(0) = 1` esetén.
- Ezúttal a rendszert leíró diffegyenlet megadása (anonim fv., vagy külön .m fájl):

```
% anonim függvényként
F = @(t,y) [-10*y(1)+50*y(2);
            10*y(1) - 50*y(2)];
```

```
function dydt = chem(t,y)
    % y - allapotvaltozo
    dydt = zeros(2,1);
    % dA/dt kerul dydt(1)-be
    % dB/dt kerul dydt(2)-be
end
```

3. példa – kémiai reakció (többváltozós, elsőrendű)



4. példa – rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)

- ✘ Rezgőmozgás során az erők egyensúlyát az alábbi összefüggés adja meg:

$$mx''+Dx+Cx'=F$$

- ✘ ahol **`x`** a test kitérése, **`m`** a test tömege, **`D`** a rugóállandó, **`C`** a csillapítási tényező, **`F`** pedig külső erő.
- ✘ Az állapotvektor `[y1,y2]` legyen: `y1 = x` (kitérés) `y2 = x'` (sebesség)
- ✘ Ekkor a másodrendű egyenlet két elsőrendűvel megoldható.

4. példa – rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)

```
function ydot=rugoegyenlet(t, x, m, D, C, F)
    % Masodrendu diffegyenlet megoldasa:
    % szetszedjuk ket elsorendure
    % Az allapotvektor y=[y1;y2] alaku,
    % ahol y1=kiteres, y2=sebesseg:
    % Az allapotvektor derivaltjai
    ydot = zeros(2,1);
    % ahol ydot(1) maga a sebesseg
    ydot(1)=x(2);
    % es ydot(2) pedig a gyorsulasra
    % rendezett egyenlet
    ydot(2)=-D/m*x(1)-C/m*x(2)+F/m;
end
```

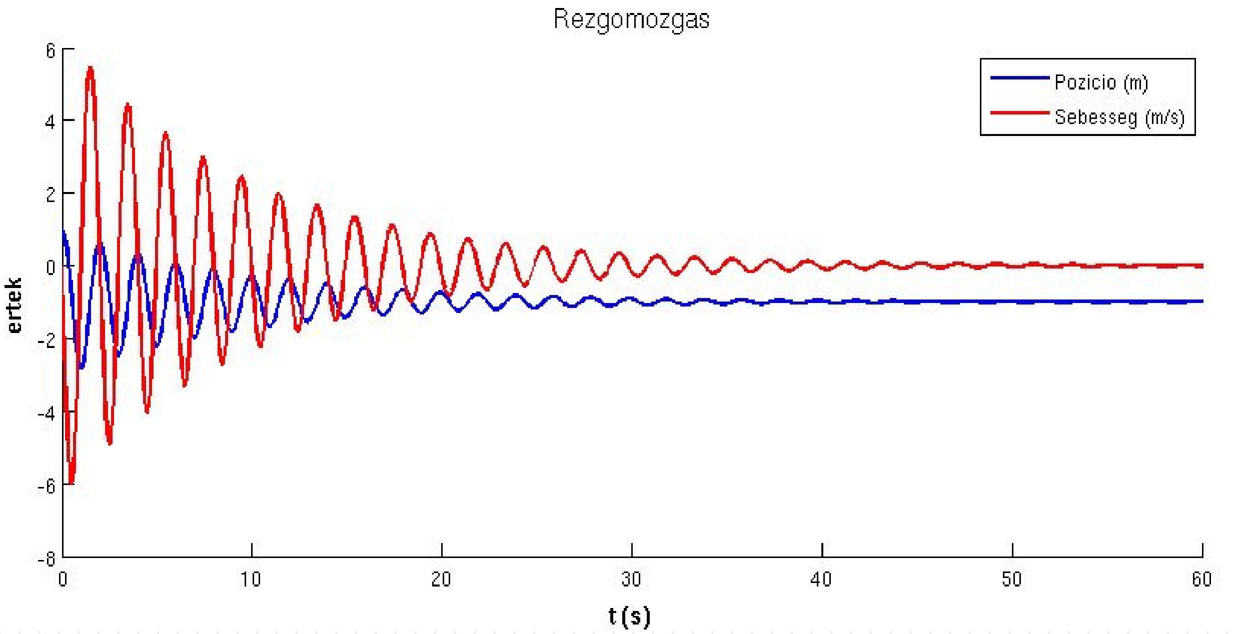
4. példa – rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)

- Paraméterek:
  - külső erő (**F**) lehet pl. a gravitációs erő
  - ha a csillapítási tényező (**C**) 0, a rezgőmozgás harmonikus lesz
  - a tömeg (**m**) és a rugóállandó (**D**) a rezgés frekvenciáját és a test sebességét határozzák meg
  - csillapított rezgés esetén (**C**>0) a nyugalmi kitérés s = **F**/**D** lesz
- A speciális esetek segítségével a megoldásunk ellenőrizhető

4. példa – rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)

- ✘ Számítsuk ki az alábbi paraméterekkel rendelkező rendszer rezgőmozgásának időbeli lefutását a `t = [0 60]` intervallumon:
  - `m = 1 [kg = Ns^2/m]`
  - `D = 10 [N/m]`
  - `C = 0.2 [Ns/m]`
  - `F = -10 [N]`
- ✘ Ábrázoljuk a rugóra rögzített test kitérésének és sebességének időbeli változását.

4. példa – rezgőmozgás (egyváltozós, másodrendű)



Feladatok

- ✘ a feladatgyűjtemény **6.1, 6.2** feladatai, melyeknek neve ez legyen, rendre:
  `gyak6_f61_[NEPTUN].m`
  `gyak6_f62_[NEPTUN].m`
  (természetesen szögletes zárójelek nélkül).
- ✘ a diasorban ismertetett parancsok kikeresése és tanulmányozása a Help-ben

Amivel nem végzel / nem végzünk, azt otthon kell befejezni, ez a házi feladat is egyben. A határidő vasárnap (április 2.) éjfél.

Feltöltés: users.itk.ppke.hu/~zseta/matlab2017/HF06