Állománynév: aramkorok_08nemlin_kaosz02.pdf

Irodalom: Irodalom: T. S. Parker and L. O. Chua, „Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems," Springer-Verlag, 1989.

Előadó jegyzetei: http://users.itk.ppke.hu/∼kolumban/aramkorok/

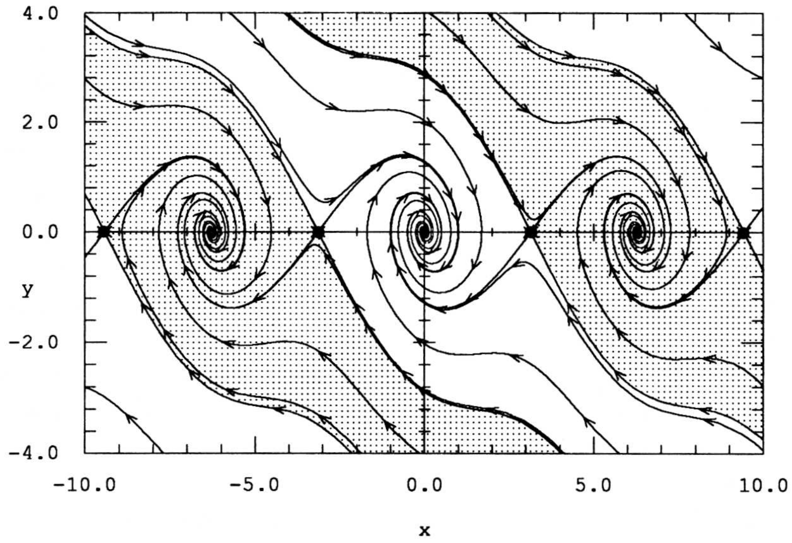
8. NEMLINEÁRIS DIFFERENCIÁL EGYENLETEK, A KAOTIKUS ÁLLAPOT

Néhány alapvetően fontos tulajdonság:

- Minden n-edrendű differenciál egyenlet átalakítható egy n egyenletből álló elsőrendű differenciál egyenletrendszerbe
- Néhány túl egyszerű kivételtől eltekintve a nemlineáris differenciál egyenletek megoldása zárt alakban nem generálható, ezért vagy numerikus, vagy **grafikus megoldás**okat kell használni
- Kaotikus viselkedés az **instabil** tartományban léphet fel (szükséges de nem elégséges feltétel, nullánál nagyobb Ljapunov exponens)

8.1 Alapfogalmak, autonóm differenciál egyenletek

Grafikus megoldás
a fázis- vagy állapottérben



Autonóm másodrendű differenciál egyenlet

$$\frac{d^2x}{dt} + \epsilon\frac{dx}{dt} + \sin(x) = 0$$

Autonóm elsőrendű differenciál egyenletrendszer

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\epsilon y - \sin(x)$$

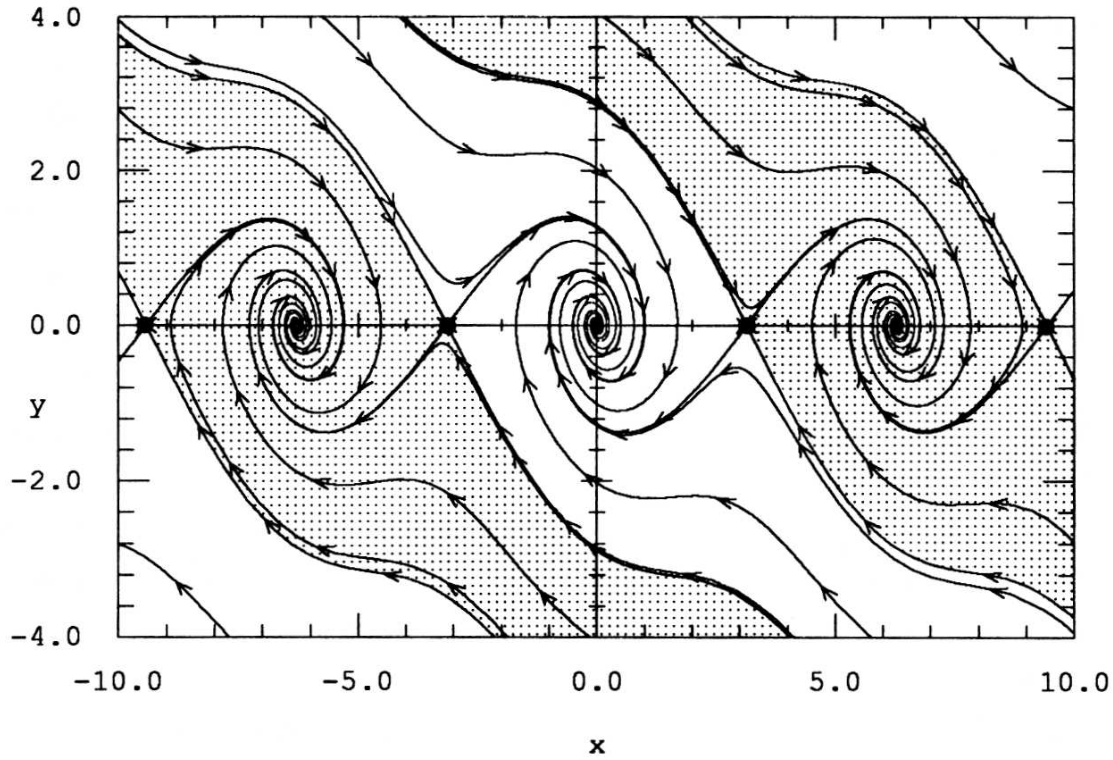
Vektormező az $x(t_0) = x_0$ pontban

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(x, y)$$

Állandósult állapot (szingularitás, munkapont)

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = 0 \quad \text{azaz} \quad f(x, y) = 0$$

A grafikus megoldás megszerkesztése a fázis- vagy állapottérben



Kiindulás: Sziguláris pontokból

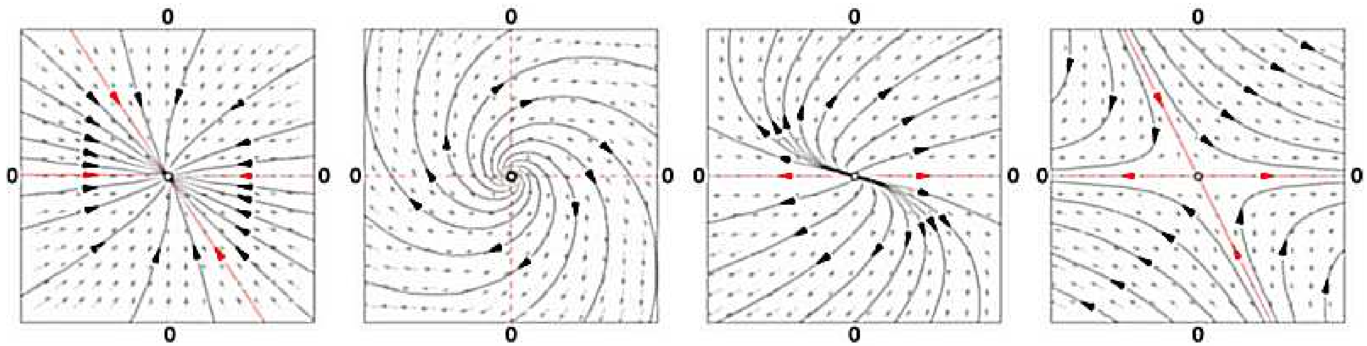
Minden pontban a vektormező, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, azaz a **trajektória** érintője, felrajzolható

Trajektória tulajdonságai:
- Egymást sehol nem metszetik
- Csak a szinguláris pontokban találkozhatnak

Szinguláris pontok tulajdonságai

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = 0 \qquad \text{azaz} \qquad f(x, y) = 0$$

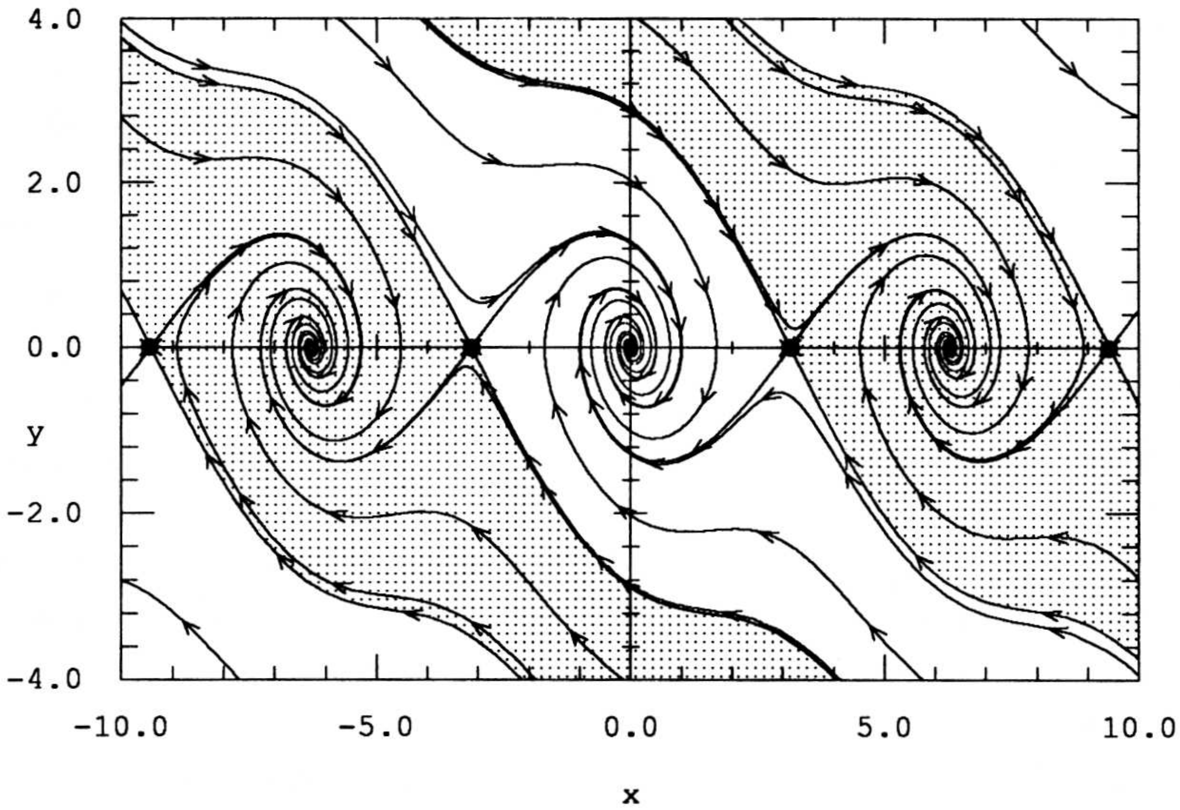
Stabil és instabil fókuszpontok és a nyeregpont



Stabilitás jellemzése

- Lokálisan: Linearizálás az adott szingularitásban, megoldás $C_i e^{\lambda_i t}$ alakban, stabilis ha $\lambda_i < 0$
- Globális: Ljapunov függvény
- Nemlineáris dinamikában használt globális jellemző: Ljapunov exponens

Az inga egyenlete és fázistere



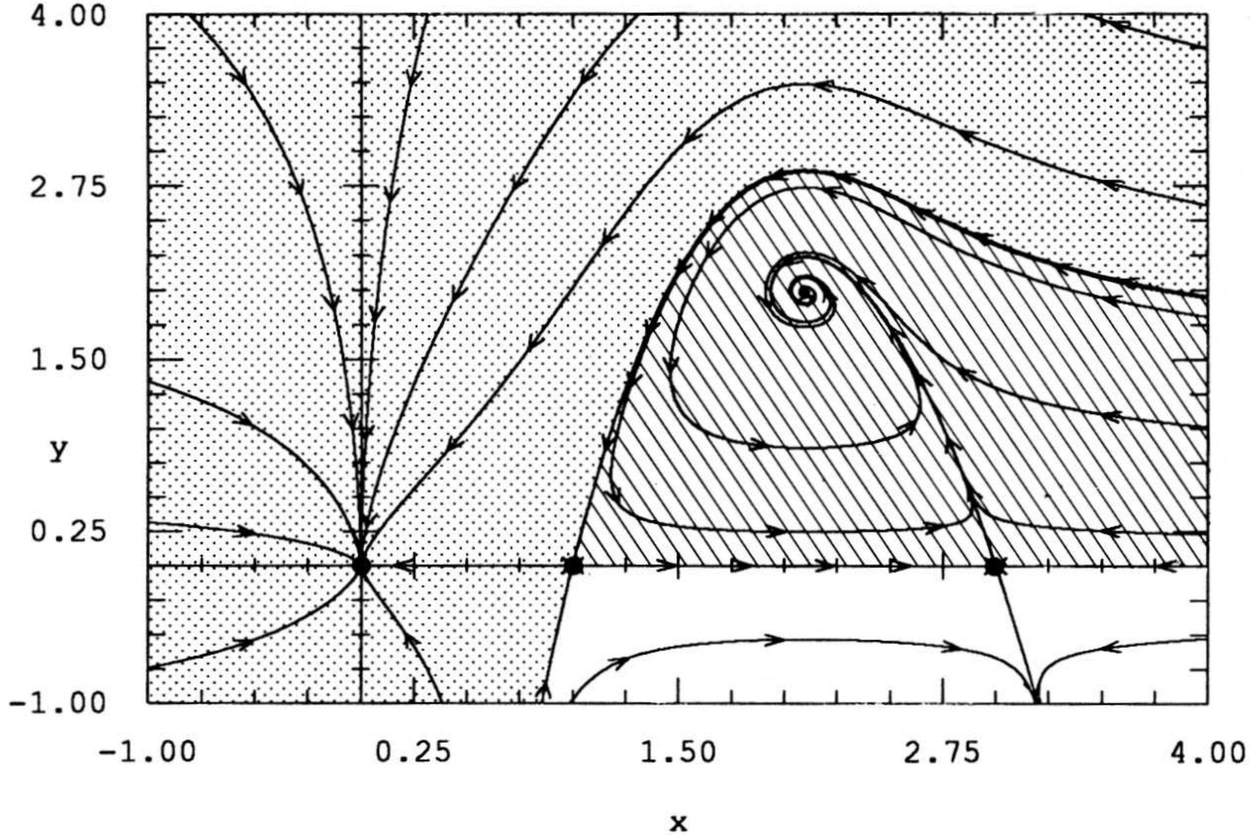
Autonóm elsőrendű differenciál egyenletrendszer

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\epsilon y - \sin(x)$$

Szingularitások típusa:
- Stabilis fókusz
- Nyeregpont

Az egyes **attraktor**ok **vonzási tartomány**át (basin of attraction) a **szeparátor**ok választják el

Egy másik példa: A ragadozó-zsákmány (predator-pray) modell

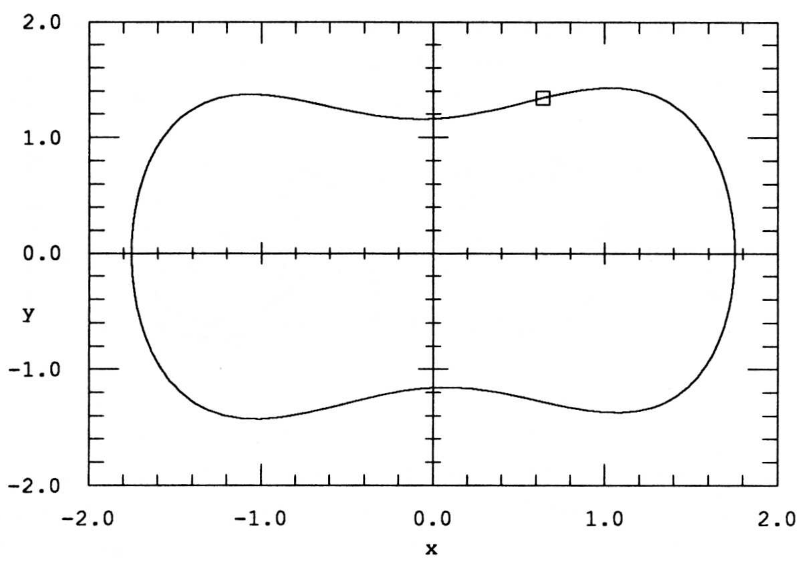


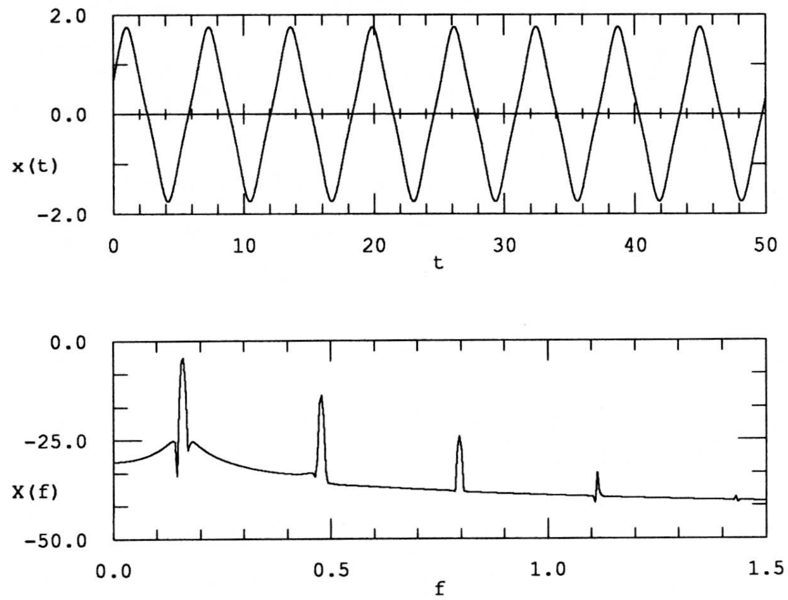
Ahol y a predator és x a pray populáció

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 4x^2 - xy/2 - x^3$$

$$\frac{dy}{dt} = -2.1y + xy$$

A periódikus megoldás, a határciklus fogalma





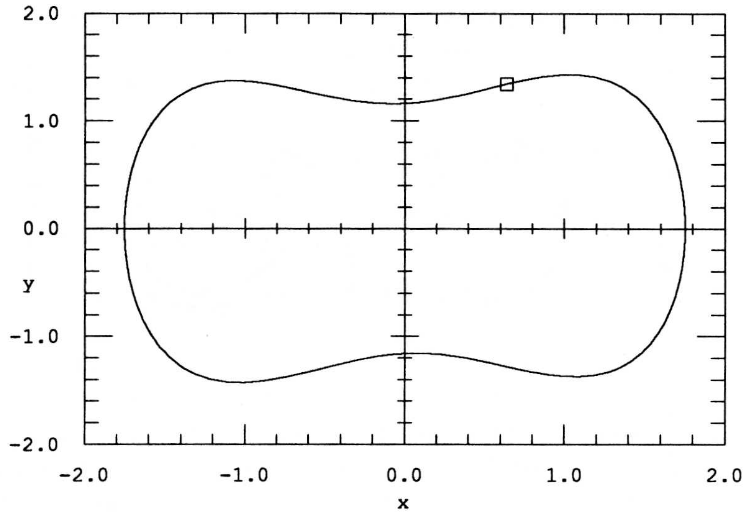
van der Pol egyenlet:

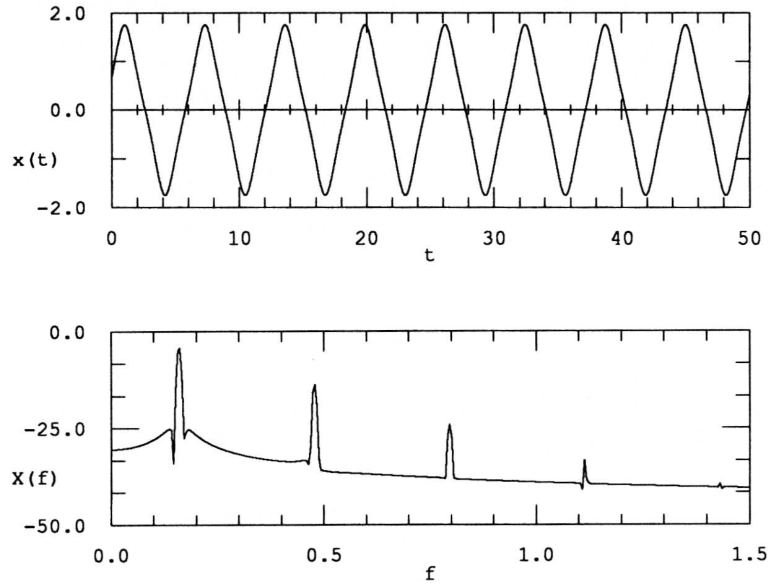
$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(1 - x^2\right) y - x$$

8.2 Nemautonóm differenciál egyenletek

Egy-periódusú megoldás (Paraméterek: $\epsilon = 0.15$, $\gamma = 0.3$ és $f = 0,16$ Hz)





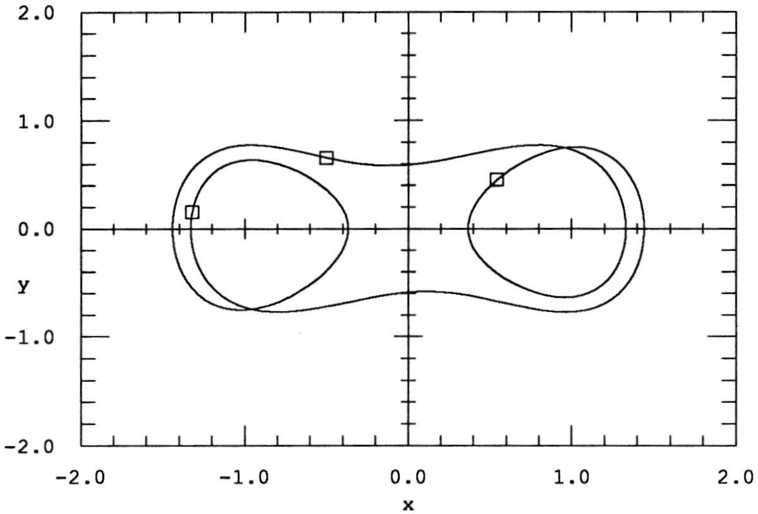
Duffing egyenlet:

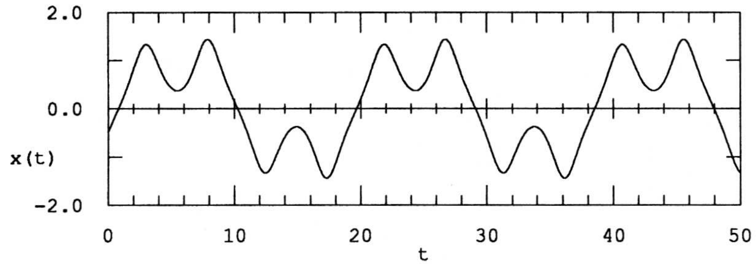
$$\frac{dx}{dt} = y$$

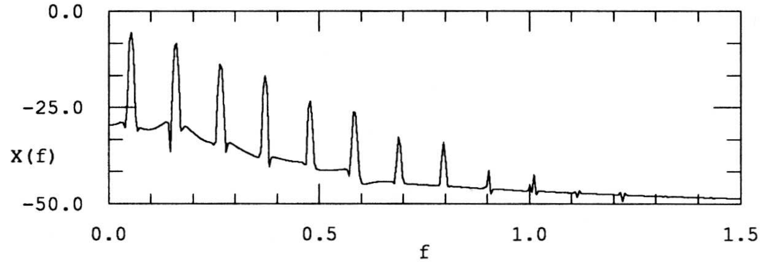
$$\frac{dy}{dt} = x - x^3 \epsilon y + \gamma \cos(\omega t)$$

Két-periódusú megoldás:

- Paraméterek: $\epsilon = 0.22$, $\gamma = 0.3$ és $f = 0,16$ Hz
- Vedd észre, csak az ϵ erősítés paramétert növeltük meg







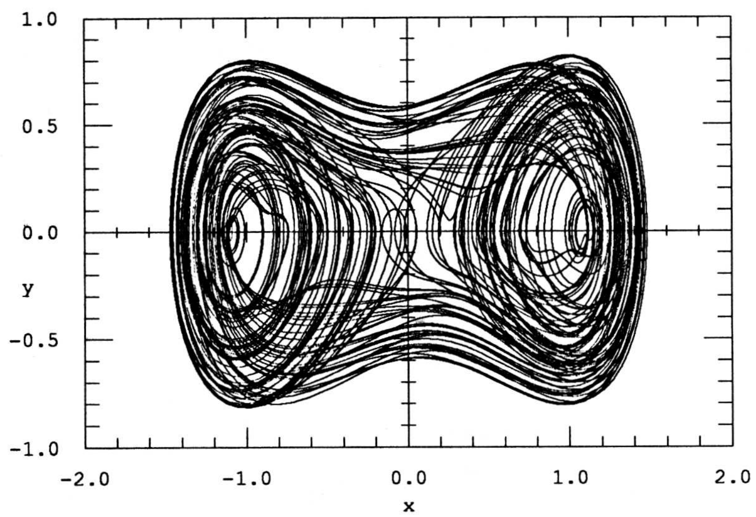
Duffing egyenlet:

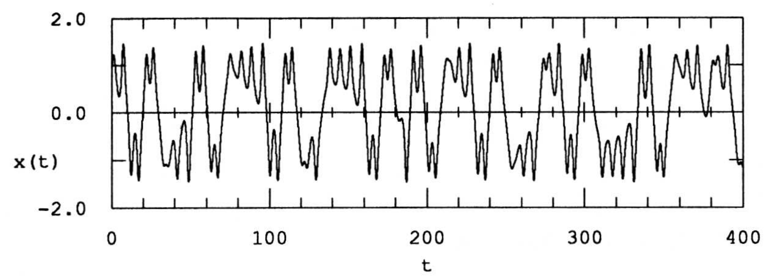
$$\frac{dx}{dt} = y$$

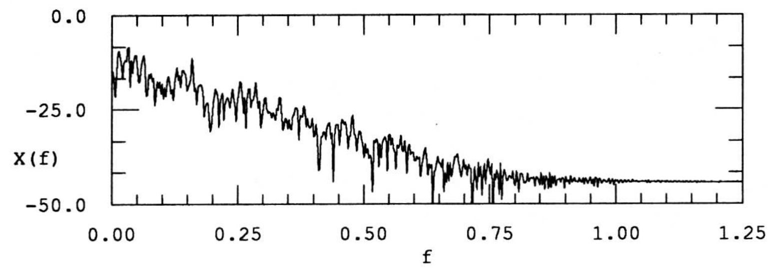
$$\frac{dy}{dt} = x - x^3 \epsilon y + \gamma \cos(\omega t)$$

Kaotikus állapot:

- Paraméterek: $\epsilon = 0.25$, $\gamma = 0.3$ és $f = 0,16$ Hz
- Vedd észre, csak az ϵ erősítés paramétert növeltük meg







Duffing egyenlet:

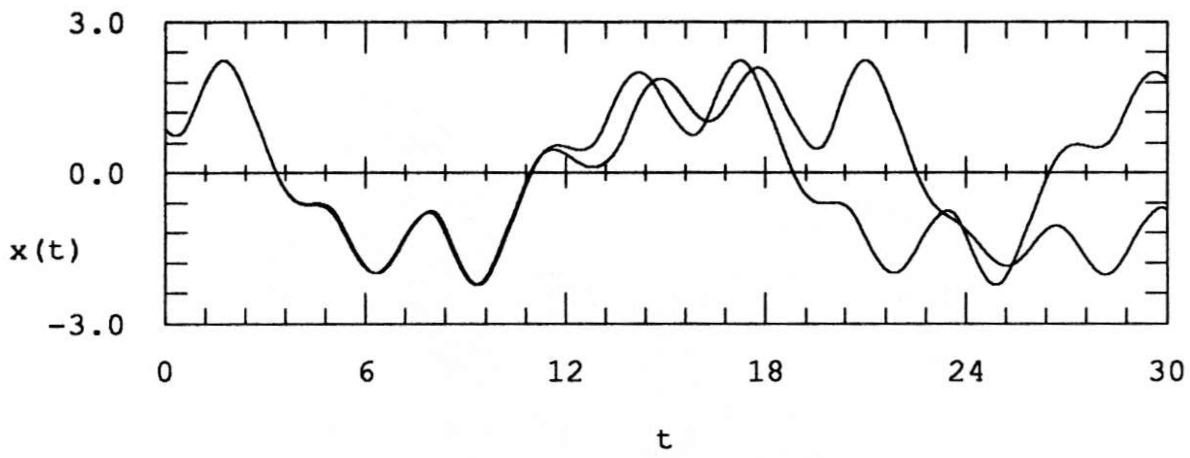
$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - x^3 \epsilon y + \gamma \cos(\omega t)$$

8.3 Kaotikus állapot

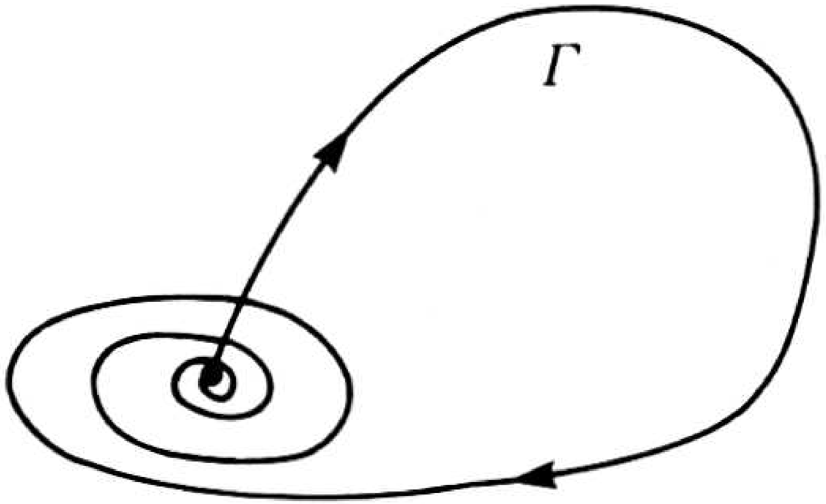
Tulajdonságai:

- A trajektória értéke csak rövid időre jósolható meg
- A trajektória által bejárt fázistér korlátos
- Nagyfokú érzékenység a kezdeti feltételekre és a rendszerparaméterekre nézve
- A kaotikus attraktorok dimenziója törtszám
- Kaotikus trajektória kialakulásának szükséges feltétele
  - Autonóm rendszerben $n \geq 3$
  - Nemautonóm rendszerben $n \geq 2$
- A kaotikus attraktor csak pozitív Ljapunov exponens esetén alakul ki



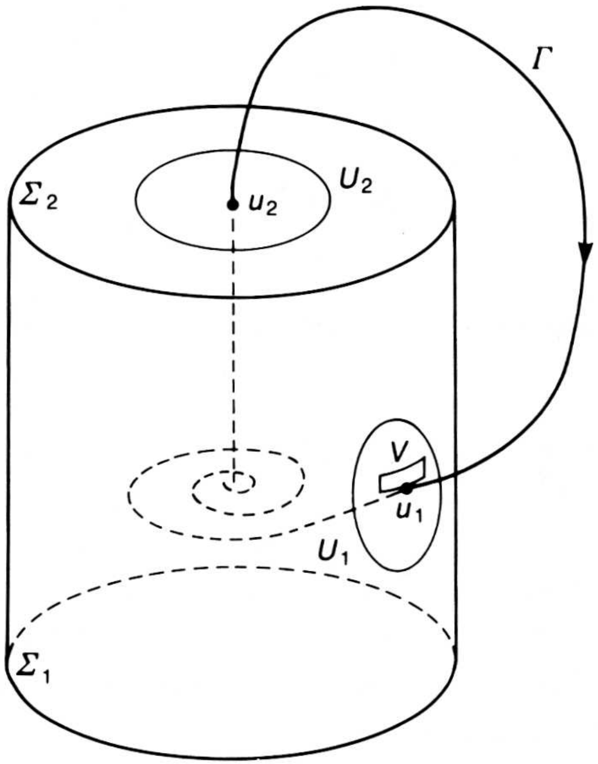
A kaotikus viselkedés kialakulása egy harmadrendű autonóm rendszerben:

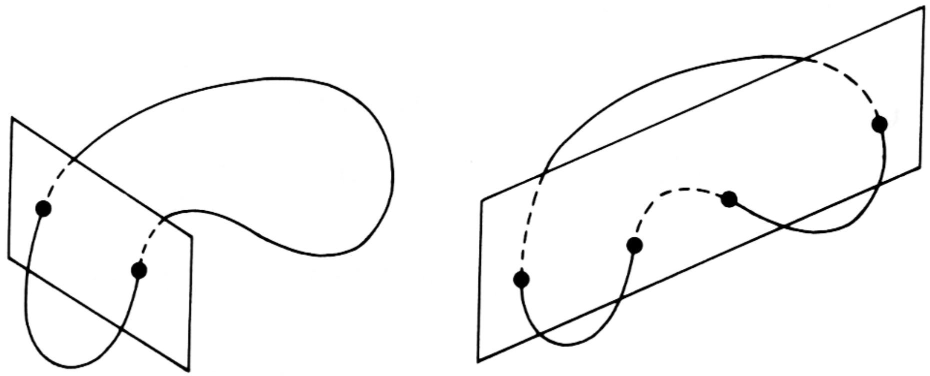
A Silnyikov homoklinikus trajektória



Vedd észre a kaotikus attraktor expanzív és kontraktív tulajdonságát

8.4 A kaotikus attraktorok jellemzése: A Poincarè leképzés





Vedd észre: A Poincarè leképzés erősen függ a **hipersík** megválasztásától

8.5 Bifurkációs diagram

- Közvetlenül alkalmas differencia egyenletek állandósult állapotú megoldásainak vizsgálatára Ezzel itt nem foglalkozunk
- Differenciál egyenletek esetén az állandósul állapotú megoldáshoz tartozó Poincarè leképzést, azaz a trajektória hipersíkon való döféspontjait ábrázoljuk