Síkgráfok

Kuratowski-tétel: egy gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható gráf, ha nincs olyan részgráfja, ami a K_5 -el, vagy a $K_{3,3}$ -al topologikusan izomorf (homeomorf).

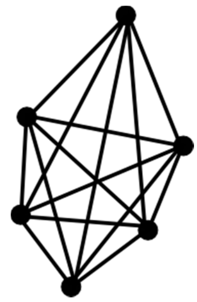
Euler síkgráfokra vonatkozó tétele: ha G összefüggő síkgráf, akkor: p-e+t = 2. (Jelölés: e=élek száma, t=tartományok száma, p=pontok (csúcsok) száma.)

Euler tétel következménye 1: ha G összefüggő síkgráf és legalább 3 pontja van, akkor: $e \le 3 \cdot p - 6$

Euler tétel következménye 2: ha G összefüggő síkgráf, legalább három pontja van, és nem tartalmaz három élhosszú kört, akkor: $e \le 2 \cdot p - 4$

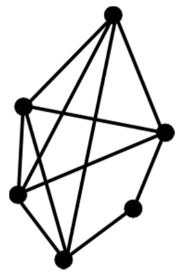
Vigyázat a következmények <u>szükséges, de nem elégséges</u> feltételeket adnak ahhoz, hogy egy gráf síkgráf legyen!

1. Bizonyítsuk be, hogy a következő gráf (K_6) nem lehet síkgráf:



Megoldás:
Kuratowski tétel segítségével is látható, mert a gráfnak van részgráfja ami topologikusan izomorf K_5 -el.
Nézzük meg azonban az Euler-tétel segítségével is:
$e \le 3 \cdot p - 6$ szükséges, hogy teljesüljön ahhoz, hogy síkgráf lehessen.
Esetünkben: e=(6*5)/2=15, c=6
$30 \le 3 \cdot 6 - 6$
$30 \le 12$, amiből következik, hogy nem síkgráf.

2, Döntse el az alábbi gráfról, hogy síkbarajzolható-e?



Mo.:

- Kuratowski tétel alapján nem síkbarajzolható,

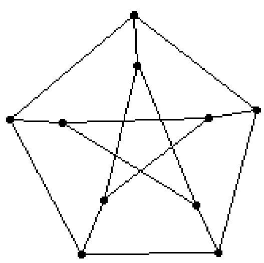
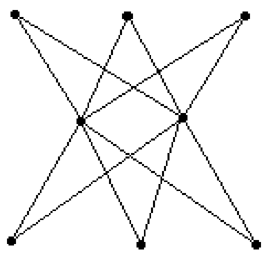
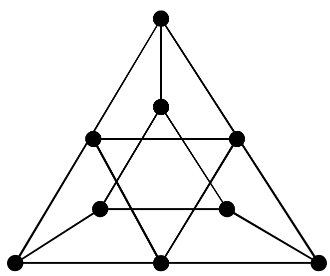
mert homeomorf K_5 -el.

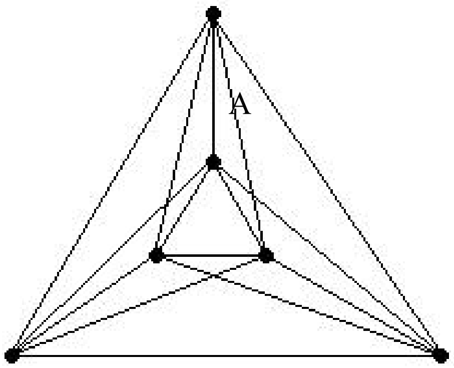
- Az Euler tétel első következménye alapján nem tudnánk választ adni,

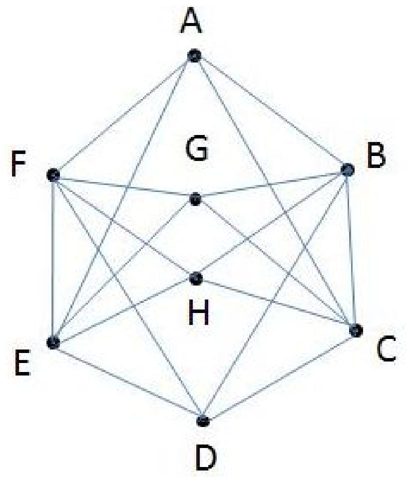
mert a gráfra teljesül: $e \le 3 \cdot p - 6$ hiszen $11 \le 3 \cdot 6 - 6 = 12$

- A második következmény pedig nem használható, mert van három élhosszúságú kör.

3. a, Melyik gráf rajzolható síkba a következők közül? Amelyik nem, indokolja meg miért nem. Amelyik síkbarajzolható, annak adja meg egy lerajzolását!

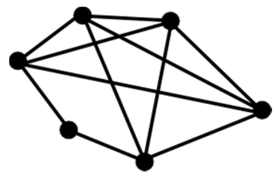




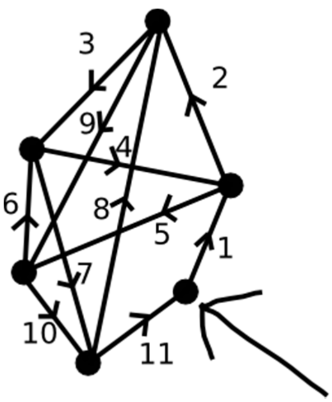
4.
a, Adott a *G* véges egyszerű 6-reguláris (minden csúcsára 6 él illeszkedik) gráf. Döntse el, hogy síkbarajzolható-e ez a gráf!
b, Síkba rajzolható-e az az n csúcsú gráf, amelynek n-2 csúcsára 6 él illeszkedik, két csúcsára pedig7?

Euler és Hamilton

1. Van Euler-kör az alábbi gráfban?

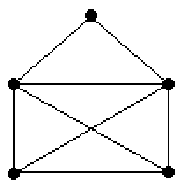


Megoldás:
Euler-körhöz szükséges és elégséges feltétel, hogy minden csúcs foka páros.
Ez alapján a fenti gráfban van Euler-kör. Adjunk is meg egyet:

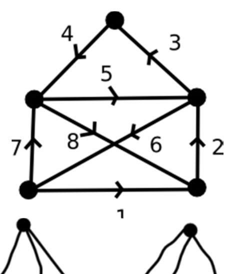


Nyíllal megjelölt csúcsból indulva, számozott nyilak mentén haladva, minden élt érintve visszajutunk a kezdőcsúcsba.

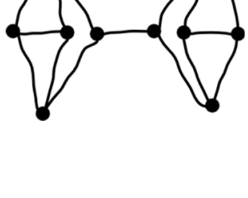
2. Van Euler-út az alábbi gráfban?



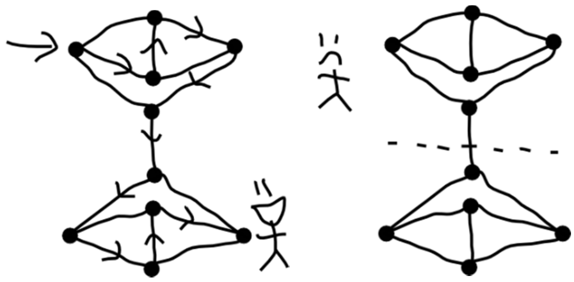
Megoldás:
Euler-úthoz szükséges és elégséges feltétel: egy gráfban akkor és csak akkor van Euler-út, ha pontosan kettő páratlan fokszámú csúcsa van.
Ez a két csúcs az induló- illetve a befejező csúcsok lesznek.
Tehát ebben a gráfban van Euler-út:



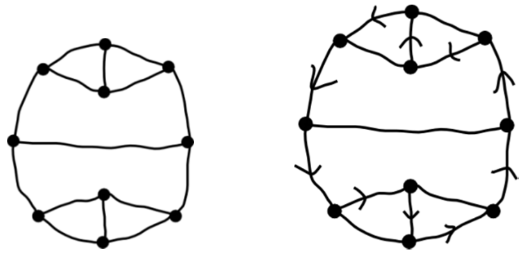
3. Van Hamilton út az alábbi gráfban? Van benne Hamilton kör?



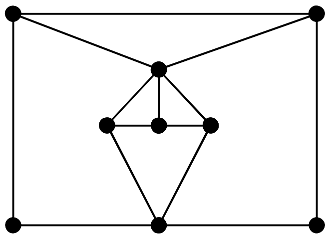
Megoldás:
Hamilton út van, az ábrán a nyíllal jelölt csúcsból a nyilakkal megjelölt útvonalon haladva minden csúcsot pontosan egyszer érintünk (és a pálcikaemberrel jelölt csúcshoz érünk:). Hamilton kör nincs, mert van benne elvágó él, és ezt kétszer kellene használni, hogy az egyik részből átjussunk a másikba, majd vissza.

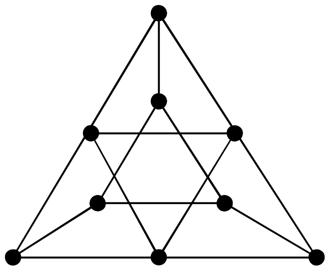


4. Van Hamilton-út a következő gráfban? Van benne Hamilton-kör?
Megoldás:
Van Hamilton-kör, bármely csúcsból indulva a nyilakkal megjelölt útvonalon haladva minden csúcsot pontosan egyszer érintünk, és ugyanoda érkezünk vissza.Mivel van benne Hamilton-kör, van Hamilton-út is, a kör valamely élének elhagyásával Hamilton-utat kapunk.

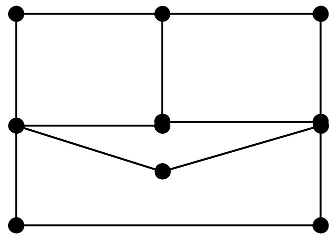


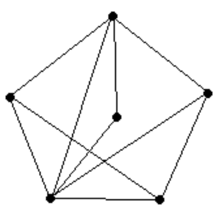
5. Melyik gráfban van Euler-út, Euler-kör, Hamilton út, Hamilton kör?

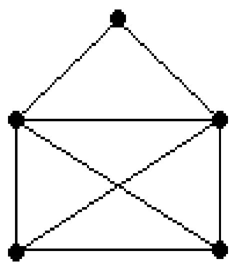


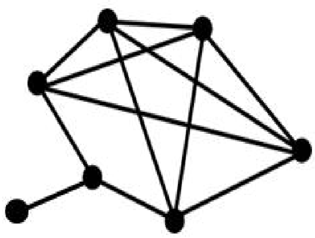


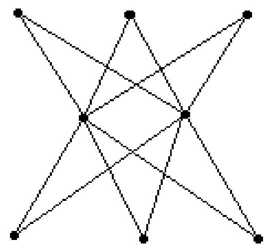
G4

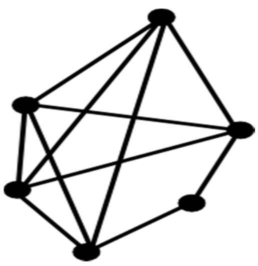


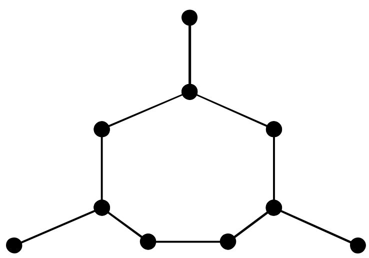


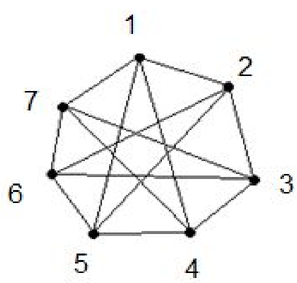










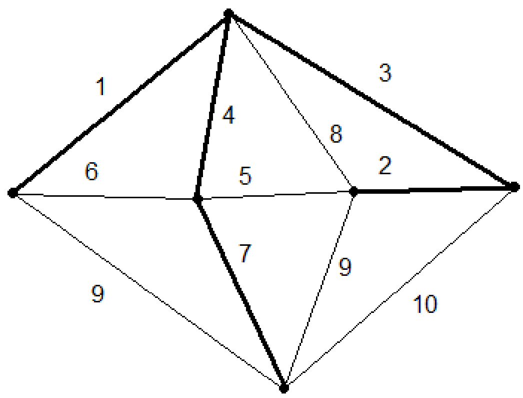


Prim és Kruskal

Kruskal-algoritmus:
Költség szerint növekvő sorrendben tekintjük az éleket és mindegyikről eldöntjük, hogy bevesszük-e a feszítőfába. Ha a korábban beválasztott élekkel nem alkot kört, akkor beválasztjuk, ha kört alkot, akkor nem.

Prim-algoritmus:
Itt az élek közül választjuk mindig a legkisebb költségűt, amelynek egyik csúcsa a már meglévő fában van, a másik azon kívül. (Így kört nem alkot a felépített gráfban.)

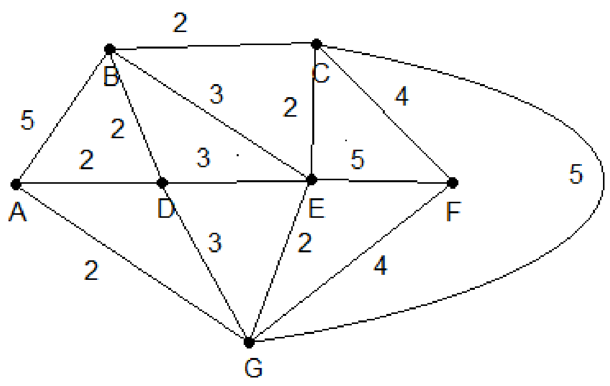
1. Határozza meg az alábbi gráf minimális feszítőfáját:

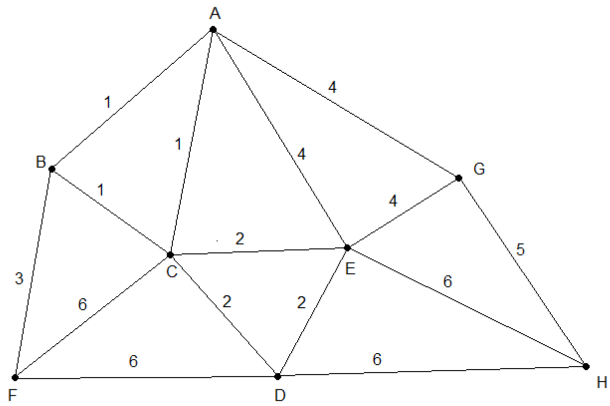


Megoldás:
Kruskal algoritmus: Mindig a legkisebb értékű élt vesszük, ami nem alkot kört az előzőkkel
n=6 csúcs e=n-1=5 éle lesz a fának.
1+2+3+4+7= 16

Prim algoritmus: A legkisebb értékű éllel kezdünk, vesszük a hozzá csatlakozó legkisebb értékű élt, ha nem alkot kört az előzőkkel
1+3+2+4+7=16

2. Keresse meg először a Prim majd a Kruskal algoritmussal az alábbi gráfok legkisebb súlyú feszítőfáját!





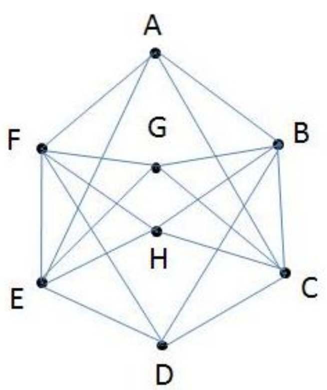
Megoldás:
Súlyok $5\cdot 2+4=14$

$2\cdot 1+2\cdot 2+3+4+5=18$

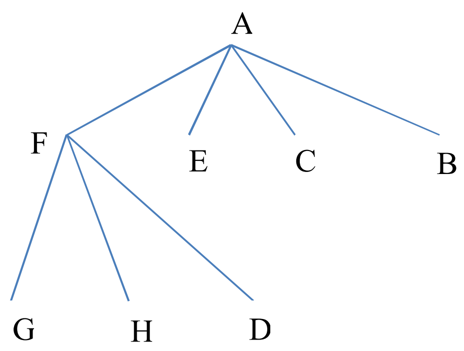
Szélességi és Mélységi keresés

1.Válasszon a korábbi témakörökből tetszőleges gráfokat és keresse meg egy-egy feszítőfájukat a szélességi és mélységi kereséseket használva!

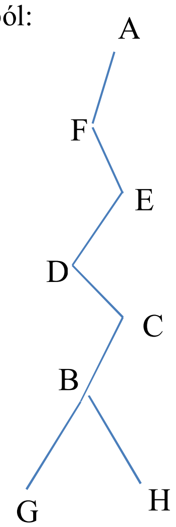
2. Például:



Szélességii A csúcsból:

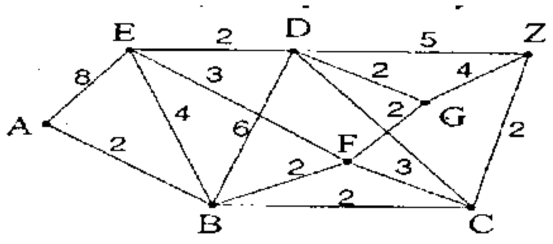


Mélységi A csúcsból:

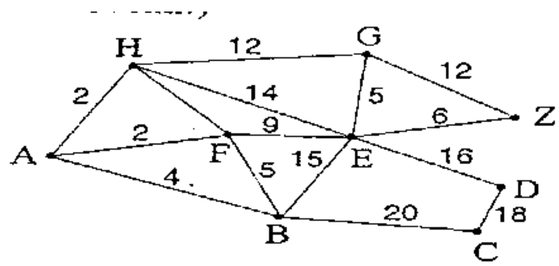


Dijkstra

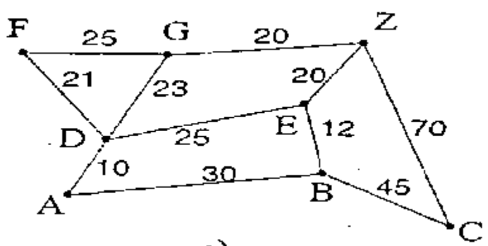
1. Határozza meg az alábbi gráfokban a legrövidebb utakat az A csúcsból a többi csúcsba a Dijkstra algoritmus segítségével!



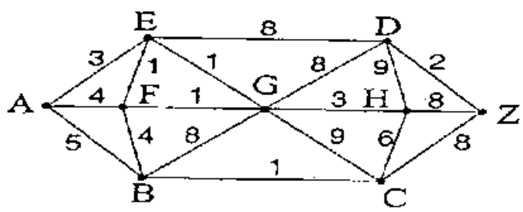
a)



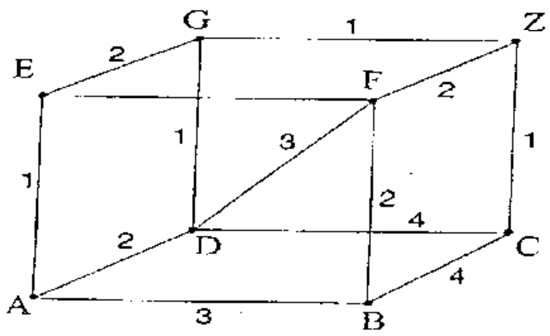
b)



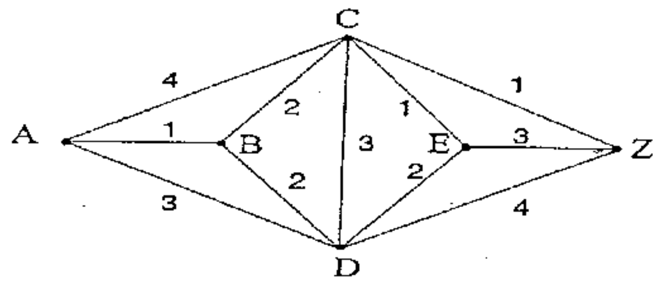
c)



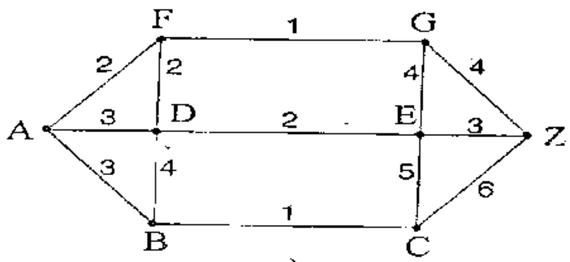
d)



e)



f)



g)

Megoldás - első gráf esetén a lényeges lépések:
A= 0 a többi végtelen
A-ból indulva az új értékek: E= 8 B=2
B-ből tovább javítva: E=6 D=8 F=4 C=4
E-ből: nincs javítás
D-ből: G=10 Z=13
F-ből: G=6
C-ből: Z=6
Minimális út például A-ból Z-be: A-B-C-Z összesen: 6 egység

Színezés

Gráf színezése: Minden csúcshoz hozzárendelünk egy színt úgy, hogy ha két csúcs között van él, akkor a csúcsok nem lehetnek azonos színűek.

Kromatikus szám $\chi(G)$: A csúcsok színezéséhez minimálisan szükséges színek száma

Kromatikus szám becslése: $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)+1$

$\omega(G) =$ Klikkszám, vagyis a legnagyobb teljes részgráf mérete

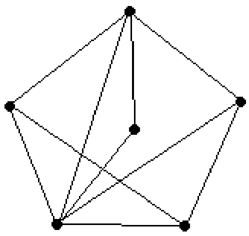
$\Delta(G)+1 =$ maximális fokszám + 1

1.Példa:

$\omega(G) = 3$

$\Delta(G)+1 = 6$

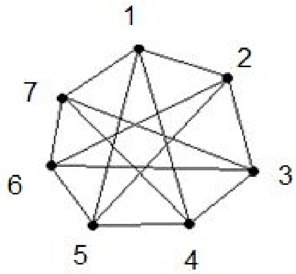
$\chi(G) = 3$



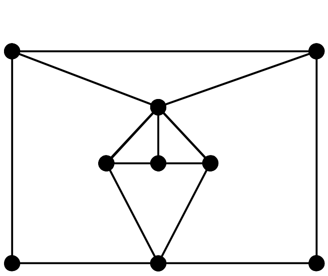
$\omega(G) = 3$

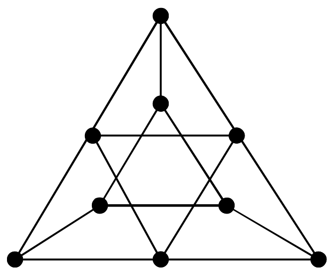
$\Delta(G)+1 = 5$

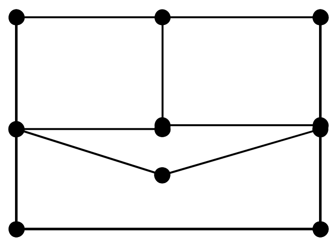
$\chi(G) = 4$

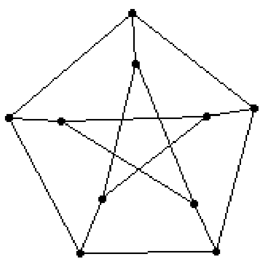


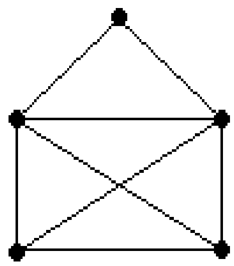
1.Adja meg az alábbi gráfok kromatikus számának becslését, majd pontos értékét!

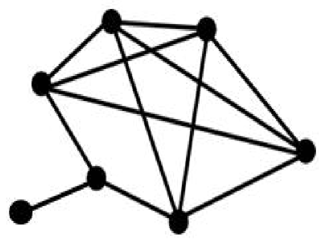


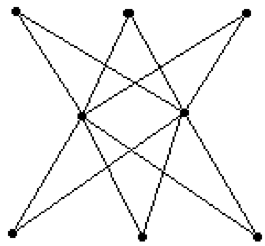


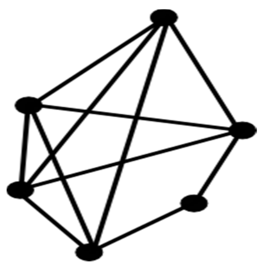


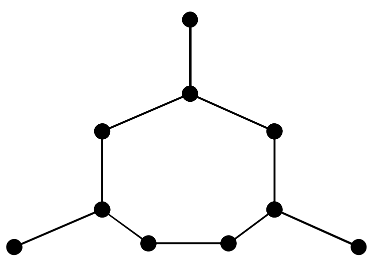


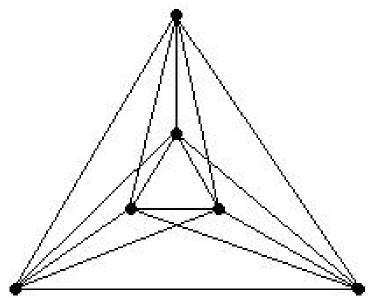


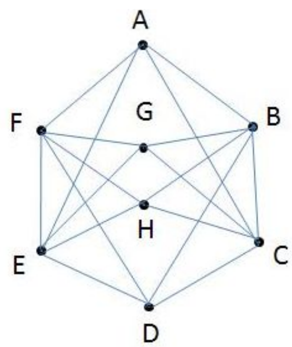












M.o.: A kromatikus számok: 3, 3, 3
3, 4, 4, 2
4, 3, 6, 3