1 Trigonometrikus és ortogonális sorok polinomsorfejtések (Klasszikus konvergenciaelmélet.) Általános ortogonális sorok konvergencia- és szummábilitási elmélete.

Legyen $I := [-\pi, \pi]$, $L_2(I)$ a Lebesgue-mértéktér feletti jól ismert Hilbert tér, melyben $f, g \in L_2(I)$ esetén $\langle f, g\rangle := \int_I f\overline{g}\ \mathrm{d}\lambda$, ahol λ az egydimenziós Lebesgue-mérték.

1.1 Trigonometrikus sorok elmélete

Definíció 1.1 *Trigonometrikus rendszernek nevezzük a következő függvénysorozatot:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \quad , \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad , \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Állítás 1.2 *A trigonometrikus rendszer teljes ortonormált rendszer $L_2(I)$-ben.*

Definíció 1.3 *Trigonometrikus sornak nevezzük adott $a_0, a_1, a_2, \ldots$ illetve $b_1, b_2, \ldots$ valós vagy komplex számok esetén a (formális)*

$$a_0 + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (*)$$

alakú függvénysort.

Tétel 1.4 (Cantor-Lebesgue) *Ha a fenti sor egy $H \subset I$ pozitív Lebesgue mértékű halmazon konvergens, akkor $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ $(k \to \infty)$*

Következmény 1.5 *Ekkor a $(*)$ sor ekvikonvergens a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ sorral, ahol $c_0 = a_0$, páros k-ra: $c_k = b_{\frac{k}{2}} \sin\left(\frac{k}{2}\right) x$, páratlan k-ra: $c_k = b_{\frac{k+1}{2}} \cos\left(\frac{k+1}{2}\right) x$.*

Kérdés: Mikor konvergens $(*)$? Milyen konvergenciával?

Definíció 1.6 *Egy $f \in L_1(I)$ függvénynek (a trigonometrikus rendszer szerinti) Fourier-együtthatói:*

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t, \quad a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t.$$

Az ezekkel képzett trigonometrikus sor a Fourier sor.

Lemma 1.7 (Riemann-Lebesgue) *Tetszőleges I intervallumon $\forall f \in L_1(I, \mathcal{L}, \lambda)$ esetén*

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_I f(x)\cos\nu x\ \mathrm{d}\lambda(x) = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty}\int_I f(x)\sin\nu x\ \mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

Következmény 1.8 *Ekvikonvergensség...*

Tétel 1.9 (Lebesgue) *Ha* $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\ \mathrm{d}\mu < +\infty$, *akkor* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *μ-mm pontban konvergens, és* $\int_X f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\ \mathrm{d}\mu$ *tetszőleges* $(\mathbf{X}, \mathcal{M}, \mu)$ *σ-véges mértéktérre.*

Kérdés: Mikor és hova konvergál egy $f \in L_1(I)$ függvény Fourier-sora? Milyen konvergenciában?

L_2-norma konvergencia Funkanalból ismeretes, hogy egy $(L_2, \langle .,. \rangle)$ Hilbert tér (ϕ_n) tetszőleges ortonormált rendszerére a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$ ortogonális sor pontosan akkor konvergens L_2-normában, ha $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 < +\infty$. Ekkor $\exists f \in L_2 : f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$ összegfüggvény, amire

(i) $c_n = \langle f, \phi_n \rangle$

(ii) $\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ (Parseval egyenlőség)

Ha $f \in L_2$ egy adott függvény $(\phi_n) \subset L_2$ adott ortonormált rendszer, akkor f $c_n(f) := \langle f, \phi_n \rangle$ Fourier együtthatóira teljesül a $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \leq \|f\|^2$ (Bessel-egyenlőtlenség), amib[̃o]l következik, hogy Fourier-sora mindig konvergens (L_2 normában). Könnyen belátható, hogy összegfüggvénye f-nek a $\overline{\langle\{\phi_1, \phi_2, \dots\}\rangle}$ altérre való vetülete, azaz $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\phi_n$ pontosan akkor, ha (ϕ_n) teljes ortonormált rendszer.

Állítás 1.10 *A fentiekből egyértelműen következik, hogy tetszőleges $f \in L_2(I)$ függvény trigonometrikus Fourier sora L_2 normában konvergens, és f-et állítja elő.*

Mostantól a pontonkénti konvergenciára vagyunk kiváncsiak.
Ehhez egy általánosítás:

$$\widetilde{L}_1 := \{f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} : \text{Lebesgue-mérhetők, } 2\pi \text{ szerint periodikusak,}$$
$$\forall \text{ kompakt intervallumon } L_1\text{-beliek}\}.$$

Definíció 1.11 *Ha* $(\phi_n) \subset L_2$ *ONR, és* $f \in \widetilde{L}_1$ *esetén* $\forall n$*-re* $f\overline{\phi}_n \in L_1$*, akkor* $c_n = \int_X f\overline{\phi}_n \, \mathrm{d}\mu$ *az* f *Fourier együtthatói.*

Tétel 1.12 (Kolmogorov) *Van olyan* $f \in \widetilde{L}_1$ *függvény (konstukciót adott), aminek trigonometrikus Fourier sora mindenütt divergens.*

Tétel 1.13 (Carleson) *Minden* $f \in L_2([-\pi,\pi])$ *függvény trigonometrikus Fourier sora* λ*-mm. konvergens. (és* λ*-mm.* f*-fel egyenlő, mert* $\|.\|_{L_2}$*-ben oda tart + Riesz lemma.)*

Tétel 1.14 (Hunt) *Minden* $f \in L_p([-\pi,\pi])$ *függvény* $(p > 1)$ *trigonometrikus Fourier sora* λ*-mm. konvergens.*

Dirichlet-féle integrál-formula

Legyen $f \in \widetilde{L}_1$, tekintsük ennek Fourier sorát, illetve annak n-edik szeletét:

$$s_n(x,f) = a_+ \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Ekkor

$$s_n(x,f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{D}_n(t) f_x(t) \, \mathrm{d}t,$$

ahol $f_x(t) = \dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{2}$, és

$$\mathcal{D}_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} coskt = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

az úgynevezett Dirichlet-féle magfüggvény.
Megjegyzés. A Dirichlet-féle magfüggvény tulajdonságai:

- $\mathcal{D}_n(0) = n + \frac{1}{2}$

- páros függvény
- $\mathcal{D}_n(\pi) = \frac{1}{2}(-1)^n$
- 2π szerint periodikus

Tétel 1.15 (Riemann-féle lokalizációs tétel) *Tetszőleges $\delta > 0$ mellett bármely $f \in \widetilde{L}_1$, függvény Fourier sorának egy x pontban való konvergenciája vagy divergenciája, illetve konvergencia esetén a sor összege csupán f-nek $[x-\delta, x+\delta]$ -ra való leszűkítésétől függ. (Azaz egy $f \in \widetilde{L}_1$, függvényt egy adott x-re és $\delta > 0$-ra az $[x = \delta, x+\delta]$ intervallumon kívül megváltoztatva a Fourier sor megváltozik ugyan, de ekvikonvergens marad az eredetivel, és konvergencia esetén az összeg is ugyanaz)*

Dini tétele, Dini-Lipschitz tétel

Definíció 1.16 (Dini feltétel) *$f \in \widetilde{L}_1$ kielégíti a Dini feltételt egy adott $x \in [-\pi, \pi]$ pontban adott $s(x) \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi)$ mellett, ha $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|\widetilde{f}_x(t)|}{t} < +\infty$, ahol $\widetilde{f}_x(t) = \dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s(x)$*

Tétel 1.17 (Dini) *Ha $f \in \widetilde{L}_1$ olyan függvény, amely egy adott $x \in [-\pi, \pi]$ pontban valamilyen $s(x)$ és $\delta(x) > 0$ számokkal kielégíti a Dini-feltételt, akkor f Fourier sora x-ben konvergens, és összege éppen $s(x)$.*

Definíció 1.18 *$f \in \widetilde{L}_1$ egy pontja reguláris pont, ha létezik x-ben véges jobb és baloldali határértéke.*

Definíció 1.19 *$f \in \widetilde{L}_1$ egy x pontban kielégíti a lokális Dini-Lipschitz feltételt, ha x reguláris pontja f-nek, és $\exists K \geq 0$ állandó, $0 < \alpha \leq 1$ kitevő, $\delta > 0$, hogy $\forall |t| < \delta$ esetén*

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leq Kt^\alpha \quad \text{és} \quad |f(x-t) - f(x-0)| \leq Kt^\alpha.$$

Tétel 1.20 (Dini-Lipschitz) *Ha $f \in \widetilde{L}_1$ egy x pontban kielégíti a lokális Dini-Lipschitz feltételt, akkor f Fourier sora x-ben konverges, és összege $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Speciálisan, ha $f \in \widetilde{L}_1$ lokálisan Lipschitz tulajdonságú, akkor Fourier sora x-ben konvergens, és összege $f(x)$.*

Tétel 1.21 (Dirichlet) *Legyen$[a, b]$ olyan intervalum, melyben $f \in \widetilde{L}_1$ korlátos változású, és $x \in (a, b)$. ekkor f Fourier sora konvergens x-ben, és összege $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.*

Állítás 1.22 *Létezik olyan folytonos függvény, melynek Fourier sora divergens.*

Fejér közepek

$$\sigma_n(x, f) = \frac{s_0(x, f) + s_1(x, f) + \cdots + s_{n-1}(x, f)}{n}.$$

Ekkor

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}_n(t) f_x(t) \ \mathrm{d}t,$$

ahol $f_x(t) = \dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{2}$, és

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

az ún Fejér-féle magfüggvény. **Megjegyzés.** Tulajdonságai:

- $\mathcal{F}_n(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}_n(t($ 2π szerint periodikus, páros függvény
- $\mathcal{F}_n(0) = n$
- tetszőlegesen kicsi $0 < \delta < \pi$ esetén $\mathcal{F}_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ egyenletesen, $\mathcal{F}_n(t) \leq \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$
- $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \mathcal{F}_n(t) \ \mathrm{d}t = 1$

Tétel 1.23 (Fejér-féle szummációs tétel) *$f \in \widetilde{L}_1$, x reguláris pontja f-nek, akkor a Fejér közepek sorozata x-ben konvergens: $\sigma_n(x, f) \to \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.*

Következmény 1.24 *Ha egy $f \in \widetilde{L}_1$ függvény Fourier sora az x regulársi pontban konvergens, akkor összege $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.*

Következmény 1.25 (Fejér) *Bármely $f \in \widetilde{L}_1$ függvény Fejér közepeinek (σ_n) sorozata I-ben (és így $\mathbb{R}$-en is egyenletesen tart a az f függvényhez.*

1.2 Ortogonális sorok elmélete

Jelölés: $L_1 = L_1(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$, $L_2 = (\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$

$(\psi_n) \subset L_2$ ortogonális rendszer, $(\alpha_n) \subset \mathbb{K})$ tetszőleges számok, ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n$ függvénysort ortogonális sornak nevezzük. Szinte mindig feltehetjük (ψ_n) ortonormált is.

(Ide megint beszúrhatjuk a funkanalos mesét L_2-ről és az L_2 normáról...)

Definíció 1.26 *Egy $f \in L_1$ függvénynek a $(\phi_n) \subset L_2$ ONR szerint léteznek ún. általánosított Fourier-együtthatói, ha $\forall m \in \mathbb{N}$-re $f\overline{\phi} \in L_1$. Ekkor $c_m = c_m(f) = int_{\mathbf{X}} f\overline{\phi}_m \, \mathrm{d}\mu$ az f függvény általánosított Fourier-sora.(Ezentúl az "általánosított"-at elhagyjuk.)*

Megjegyzés. Ha $f \in L_1$, de $f \notin L_2$, akkor f Fourier-sora biztosan nem konvergens L_2 normában.

Állítás 1.27 *Ha $(\phi_n) \subset L_2$ ONR tagjai korlátos függvények, akkor bármely $f \in L_1$ függvénynek léteznek Fourier-együtthatói.*

Kérdés: 0-sorozat lesz-e $c_n(f)$? NEM.

Tétel 1.28 (Általánosított Riemann-Lebesgue) *$(\phi_n) \subset L_2$ ONR, melynek tagjai egyenlesen korlátosak, akkor bármely $f \in L_1$ függvényre a (ϕ_n)-re vonatkozó Fourier-együtthatóinak sorozata 0-sorozata: $c_n(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Megjegyzés. Ha egy ortogonális sor c_n együtthatói igaz $\sum |c_n|^2 < +\infty$, akkor a sor egyben Fourier-sor is (egy $L-2$-beli függvényé.

Konkrét ortonormált rendszerek

1. Trigonometrikus rendszer
2. Ortogonális polinomok
   $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, $(I, \mathcal{B}, \lambda)$
   $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges mérték, melyre $\forall n$-re $(id)^n \subset L_2(I)$. GYakorlatilag mindig feltesszük, hogy $\mu \ll \lambda$. Ekor létezik $s : I \to \mathbb{R}_+$ függvény $\forall E \in \mathcal{B} : \mu(E) = \int_E s \, \mathrm{d}\lambda$ (Radon-Nikodym derivált). Jól ismert valós függvénytanból, hogy ha $f \in L_1 \Rightarrow fs \in L_1$, és $\int_I f \, \mathrm{d}\mu - \int_I fs \, \mathrm{d}\lambda$.
   Az $1, id, id^2, \ldots$ sorozat függvényei lineárisan függetlenek (ha $s(x) > 0$ μ-mm $x \in I$-re). Alkalmazhatjuk a Schmidt-Gram féle ortogonalizációs eljárást. A kapott ortonormált $(p_n) \subset L_2$ függvénysorozat tagjai polinomok, p_n pontosan n-edfokú. Ezeket nevezik az s súlyfüggvényre nézve ON polinomrendszernek.
   Speciális esetek:

(a) $I = [-1,1]$, $s(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ esetén elsőfajú Csebisev polinomok

(b) $I = [-1,1]$, $s(x) \equiv 1$ esetén a Legendre polinomok

(c) $I = [= 1,1]$, $s(x) = *1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \ \ \alpha,\beta > -1$

(d) $I = \mathbb{R}$, $s(x) = e^{-x^2}$ esetén Hermite polinomok

(e) $I = [0,\infty)$, $s(x) = e^{-x}$ esetén Laguerre polinomok

3. Rademacher rendszer
   $([0,1],\Lambda,\lambda)$ mértéktér,

$$r_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x = \frac{k}{2^n} \qquad k = 0,1,\ldots,2^n \\ \\ (-1)^{i+1} & \text{ha} \quad x \in \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \qquad 0,1,\ldots,2^n \end{cases}$$

Megjegyzés. $|r_n| = 1$, $\int_0^1 |r_n|^2 \, \mathrm{d}\lambda = 1$, $\int_0^1 r_n r_m \, \mathrm{d}\lambda = 0$.

Definíció 1.29 *$(\phi_n) \subset L_2$ ONR multiplikatív, ha $\Phi_{ik} := \phi_i\overline{\phi}_k$, $i < k$ jelöléssel a $(\Phi_{ik})_{1 \le i < k < \infty}$ függvénysorozat is ONR L_2-ben, és $\Phi_{ik} \in L_2$ $\forall i,k$-ra.*

Állítás 1.30 *Az $(r_n))$ Rademacher rendszer multiplikatív rendszer.*

Az általános probléma

Milyen $(c_n) \subset \mathbb{K}$ együtthatók mellett lesz a $\sum c_n\phi_n$ ortogonális sor μ-mm. konvergens $\mathbf{X}$-en?

Tétel 1.31 *$(\mathbf{X},\mathcal{A},\mu)$, μ σ-véges.*
Ha $(c_n) \subset \mathbb{K}$-ra $\sum_{n=1}^\infty |c_n| < +\infty$, akkor minden $(\phi_n) \subset L_2$ ONR esetén a $\sum c_n\phi_n$ ortogonális sor μ-mm. konvergens.

Tétel 1.32 *Ha $(c_n) \subset \mathbb{K}$ olyan, hogy minden $(\phi_n) \subset L_2$ ONR esetén a $\sum c_n\phi_n$ ortogonális sor μ-mm. konvergens akkor $\sum |c_n|^2 < \infty$.*

Sőt:

Tétel 1.33 (Kolmogorov) *Ha $(c_n) \subset \mathbb{K}$ olyan sorozat, melyre $\sum |c_n|^2 = \infty$,akkor az (r_n) Rademacher rendszer esetén a $\sum c_n r_n$ ortogonaális sor λ-mm. divergens $[0,1]$-en*

Tehát a $\sum |c_n| < \infty$ feltétel elegendő, a $\sum |c_n|^2 < \infty$ feltétel szükséges ahhoz, hogy $\forall(\phi_n) \subset L_2$ esetén a $\sum c_n\phi_n$ ortogonális sor μ-mm. konvergens legyen.

Definíció 1.34 *A $(\phi_n) \subset L_2$ ONR konvergenciarendszer, ha $\forall (c_n) \subset \mathbb{K}$-ra $\sum |c_n|^2 < \infty$ -ből következik, hogy $\sum c_n \phi_n$ μ-mm. konvergens $\mathbf{X}$-en.*

Carleson tétele átfogalmazva: A trigonometrikus rendszer konvergenciarendszer.

Tétel 1.35 *A Rademacher rendszer is konvergenciarendszer.*

Következmény 1.36 *Ha $\sum |c_n|^2 < \infty \;\; \Rightarrow \;\; \sum c_k r_k$ λ-mm. konvergens.*
Ha $\sum |c_n|^2 = \infty \;\; \Rightarrow \;\; \sum c_k r_k$ λ-mm. divergens.

Definíció 1.37 *$(w_n) \subset \mathbb{K}$ Weyl-sorozat, ha $1 \geq w_1 < w_2 < \cdots < w_n < \ldots$, $\lim w_n = \infty$, és $\sum |c_n|^2 w_n < \infty$-ből következik, hogy minden $(\phi_n) \subset L_2$ ONR-re $\sum c_n \phi_n$ μ-mm. konvergens.*

Állítás 1.38 *$w_n := n^\alpha \; \forall \alpha > 1$ mellett Weyl-sorozat.*

Tétel 1.39 (Rademacher) *Legyen $w : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ olyan szigorúan növő folytonos függvény, melyre $w(x) > 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} w(x) = \infty$. Legyen $(c_n) \subset \mathbb{K}$ olyan szḿsorozat, amelyre igaz, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 w(n) < \infty$ Legyen továbbá $i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \ldots$ természetes számok olyan sorozata, melyre $w(i_n) \geq n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\forall (\phi_n) \subset L_2$ rendszerre $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \phi_k$ jelöléssel az (s_n) függvénysorozatnak az (s_{i_n}) részsorozata μ-mm. konvergens $\mathbf{X}$-en.*

Speciális esetek

1. Ha $\sum |c_n|^2 n < \infty \;\; \Rightarrow \;\; (s_n)$ μ-mm. konvergens, azaz $w_n = n$ Weyl-sorozat.
2. Ha $\sum |c_n|^2 \log_2 n < \infty$, akkor tetszőleges $(\phi_n) \subset L_2$ ONR esetén az (s_{2^n}) részsorozat μ-mm. konvergens.

Megjegyzés. További Weyl-sorozatok: $w_n = \sqrt{n}$, $w_n = n^\alpha, \;\; \alpha > 0$, $w_n = \log^3 n$.

Tétel 1.40 (Rademacher-Menysov) *$w_n = \log^2 n$ is Weyl-sorozat (és ez az eredmény nem is javítható).*

Tétel 1.41 (Menysov) *Bármely $(\mathbf{X}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérre létezik olyan $(\phi_n) \subset L_2$ ONR, hogy minden olyan $(w_n) \subset \mathbb{K}$ sorozatra, melyre $1 \leq w_n < w_2 < \ldots$, $w_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$, de w_n lassabban tart ∞-hez, mint $\log^2 n$, megadható olyan $(c_n) \subset \mathbb{K}$, hogy $\sum |c_n|^2 w_n < \infty$, de a $\sum c_n \phi_n$ ortogonális sor μ-mm. divergens.*