Gram-Schmidtortogonalizáció

1. A következő független vektorokból a Gram-Schmidt módszerrel állítson elő ortogonális bázist!Majd a kapott vektorokból állítson elő ortonormált bázist!

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

M.o.:

a, $\underline{v}_1 = \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{v}_2 = \underline{u}_2 - \frac{\langle \underline{u}_2, \underline{v}_1 \rangle}{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle} \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{v}_3 = \underline{u}_3 - \frac{\langle \underline{u}_3, \underline{v}_1 \rangle}{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle} \underline{v}_1 - \frac{\langle \underline{u}_3, \underline{v}_2 \rangle}{\langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle} \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

b, Normáljuk a kapott vektorokat:

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{mert} \|\underline{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

A könnyebb számolás végett a $\underline{v}_3$ helyett felhasználható bármelyik vele párhuzamos vektor is, hiszen a lényeg annyi, hogy merőleges legyen a másik két vektorra, például választható egész koordinátájú vektor is:

$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Így megspórolható a törtekkel számolás: $\quad \underline{e}_3 = \frac{\underline{v}_3}{\|\underline{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

2.A következővektorokból a Gram-Schmidt módszerrel állítson elő ortogonális bázist!Ellenőrizze, hogy valóban ortogonálisak! A kapott vektorokból állítson elő ortonormált bázist!

a, $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$ $\qquad$ b, $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c, $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ d, $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Rang, egyenletrendszerek

2. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját!

a, $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b, B= $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 3 \\ -7 & -3 & 32 & 15 \end{bmatrix}$

M.o.:

a,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 vezérelem volt kiválasztható →<u>rang A = 3</u>

b,

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 3 \\ -7 & -3 & 32 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 6 & 3 \\ -7 & -3 & 32 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -10 & 25 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>rang B = 2</u> mert 2 vezérelem választható

2. Ha az előző feladat mátrixait egy-egy homogén egyenletrendszer együttható mátrixának tekintjük, a tanult tétel alapján határozzuk, meg, hogy hány megoldása van az egyenletrendszereknek!

Emlékeztető:

A = együttható mátrix
$[A|b]$= kibővített együttható mártix

Három eset lehetséges:

1. Ha rang A = rang $[A|b]$ = ismeretlenek száma(oszlopok száma) → Egyetlen megoldása van az egyenletrendszernek!
2. Ha rang A = rang $[A|b] \neq$ ismeretlenek száma(oszlopok száma) → Végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek!
3. Ha rang A $\neq$ rang $[A|b]$→ Nincs megoldása az egyenletrendszernek!

M.o.:

a, A kapott homogén egyenletrendszer: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (homogén esetben $\underline{b} = \underline{0}$)

A Gauss után: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Az együtthatómátrix rangja: rang A = 3

A kibővített mátrix rangja: rang $[A|b]$ = 3

Az ismeretlenek száma a feladatban: 3 (mert 3 oszlopa van az A mátrixnak)

Tehát rang A = rang $[A|b]$ =ism.száma→<u>Egyetlen megoldása van az egyenletrendszernek!</u>

Megjegyzés1: A konkrét megoldás leolvasható a Gauss után → x = 0, y = 0, z = 0

MEGJEGYZÉS2: HOMOGÉN EGYENLETRENDSZERNEK MINDIG VAN MEGOLDÁSA!
Mert rang A = rang $[A|b]$ homogén esetben teljesül, tehát csak 1 vagy végtelen megoldása lehet!

b, Az egyenletrendszer kibővített mátrixa, és a Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 32 & 15 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

rang A =rang $[A|b]$=2 ≠ ism.száma = 4 → <u>Végtelen sok megoldása van!</u>

3. A paraméter értékétől függően adja meg hány megoldása van az alábbi inhomogén lineáris egyenletrendszernek!

$$x + 2y + 2z = 5$$
$$3x + 7y + 5z = 12$$
$$x + 3y + ax = b + 5$$

M.o.:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & a & b+5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & a-2 & b \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 & b+3 \end{array}\right]$$

1. eset Ha a ≠ 1
Ekkor rang A = rang $[A|b]$= 3 és mivel az ism. száma (az A oszlopainak száma) = 3, ezért egyetlen megoldása van az egyenletrendszernek!

2. eset Ha a = 1 és b = -3
Ekkor a = 1 miatt rang A = 2, és b = -3 miatt rang $[A|b]$=2 szintén, de az ismeretlenek száma továbbra is 3, ezért végtelen sok megoldás van!

3. eset Ha a = 1 és b ≠ -3
Ekkor rang A = 2, de rang $[A|b]$ = 3, és ha a két rang nem egyezik nincs megoldása! (Tiltósor jön ki!)

3. Adja meg az alábbi vektorrendszerek rangját!

a, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -17 \end{pmatrix}, \underline{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. Mennyi az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok által generált altér dimenziója?

a, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ -65 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Mennyi az alábbi mátrixok rangja:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 & 8 \\ 6 & 3 & -3 & 6 \\ 4 & 10 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 12 & -24 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 3 \\ -7 & -3 & 32 & 15 \end{bmatrix}$

6. Adja meg a rangszámítás segítségével, hogy az alábbi paraméteres lineáris egyenletrendszereknek, a paraméter értékétől függően mikor van nulla, mikor egy, és mikor végtelen sok megoldása!

a,
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= a \\ 4x_1 - 10x_2 + 9x_3 &= 4a - 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + bx_3 &= 0 \end{aligned}$$

b,
$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x + 1x_3 &= b \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 2b - 1 \\ -4x_1 - 14x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

c,
$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 5 \\ 3x + 7y + 5z &= 12 \\ x + 3y + ax &= b + 5 \end{aligned}$$

7. Határozza meg a rangszámítás segítségével, hogy hány megoldása van az alábbi egyenletrendszereknek:

a,
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 13 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 12 \end{aligned}$$

b,
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 9x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 6x_3 + 5x_4 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

8. Határozza meg a következő mátrix rangját a p paraméter értékétől függően! Ha az alábbi mátrix egy homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa, mit tud mondani az egyenletrendszer megoldhatóságáról és a megoldások számáról (a p paraméter függvényében)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & p-6 & -2 \\ 3 & 10 & p-2 \end{bmatrix}$$

Merőleges kiegészítő

1. Adja meg a szokásos 5 dimenziós R^5 vektortér alábbi U alterének merőleges kiegészítő alterét! A képletekben $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^T$

a, $U = \{ \underline{v} \mid v_1 = v_2 = 0 \}$ b, $U = \{ \underline{v} \mid v_1 = -v_2 \}$

c, $U = \{ \underline{v} \mid v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 \}$ d, $U = \{ \underline{v} \mid v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 0 \}$

M.o.:

U merőleges kiegészítő altere az $U^{\perp}$ azon vektoroknak a halmaza amelyek merőlegesek az U összes vektorára $U^{\perp} = \{ \underline{u} \mid \forall \underline{v} \in U \;\; esetén \;\; \underline{u} \perp \underline{v} \}$

a, $U^{\perp} = \{ \underline{u} \mid u_3 = u_4 = u_5 = 0 \}$ b, $U^{\perp} = \{ \underline{u} \mid u_1 = u_2 \;\; és \;\; u_3 = u_4 = u_5 = 0 \}$

c, $U^{\perp} = \{ \underline{u} \mid u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 0 \}$ d, $U^{\perp} = \{ \underline{u} \mid u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 \}$

1. Adja meg a szokásos 3 dimenziós R^3 vektortér alábbi U alterének merőleges kiegészítő alterét!

a, $U = \{ \underline{v} \mid v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \}$ b, $U = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \perp \underline{a} \}$ az $\underline{a}$ adott vektor

c, $U = \{ \underline{0} \}$ d, $U = \{ \underline{v} \mid v_1 = 4v_2 \;\; és \;\; v_3 = 0 \}$

M.o.:

a, $U^{\perp} = \{ \underline{u} \mid u_2 = 2u_1 \;\; és \;\; u_3 = 3u_1 \}$ b, $U^{\perp} = \{ \underline{u} \mid \underline{u} \;\; párhuzamos \;\; \underline{a} \}$

c, $U^{\perp} = R^3$ d, $U^{\perp} = \{ \underline{u} \mid 4u_1 + u_2 = 0, u_3 \in R \}$

3. Adja meg az alábbi generátorrendszerrel meghatározott U altér merőleges kiegészítő alterét:

$\underline{a} = (3 \;\; -3 \;\; 0 \;\; 21 \;\; -12)$, $\underline{b} = (3 \;\; -2 \;\; 2 \;\; 19 \;\; -10)$, , és $\underline{c} = (-3 \;\; 6 \;\; 6 \;\; -27 \;\; 23)$

$$U = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle \qquad V = R^5$$

M.o.:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 21 & -12 \\ 3 & -2 & 2 & 19 & -10 \\ -3 & 6 & 6 & -27 & 23 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -6 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x = -5u - 2z \\ y = 2u - 2z \\ z, u \in R \\ v = 0 \end{array} \rightarrow U^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} -5u - 2z \\ 2u - 2z \\ z \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; z, u \in R \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. Adja meg az alábbi generátorrendszerekkel meghatározott alterek merőleges kiegészítő alterét:

a, $\underline{a} = (2 \quad -1 \quad 1)$, $\underline{b} = (2 \quad 4 \quad 6)$, és $\underline{c} = (3 \quad 3 \quad 3)$ V= R^3

c, $\underline{a} = (1 \quad 1 \quad 2)$, $\underline{b} = (1 \quad 2 \quad 5)$, és $\underline{d} = (5 \quad 3 \quad 4)$ V= R^3

d, $\underline{a} = (2 \quad 3)$, $\underline{b} = (-6 \quad 7)$, és $\underline{c} = (0 \quad 8)$ V= R^2

e, $\underline{a} = (1 \quad 1 \quad 0)$ és $\underline{b} = (1 \quad 2 \quad 6)$ V= R^3

f, $\underline{a} = (1 \quad 3 \quad -2 \quad 4)$ és $\underline{b} = (5 \quad 15 \quad -10 \quad 20)$ V= R^4

Cramer-szabály

1. A Cramer-szabály segítségével határozza meg az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{aligned} x + 2y &= -5 \\ 5x - 2y + 7z &= 25 \\ 15x + 6y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

M.o.:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 25 & -2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 15 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = 1, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 5 & 25 & 7 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 15 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = -3, \quad z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 5 & -2 & 25 \\ 15 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 15 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = -3$$

2. A Cramer-szabály segítségével határozza meg az alábbi lineáris egyenletrendszerekközül azoknak a megoldását, melyekre használható a Cramer-szabály! Ha nem használható, akkor indokolja meg, hogy miért nem!

a,

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ 7x + 6y + 5z &= 2 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 9x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 6x_3 + 5x_4 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

c,

$-5x - 3y + 4z = -1$
$-5x + 4y - 4z = -40$
$3x - 2y + 3z = 26$

d,

$-2x - 3y + 4z = -7$
$4x + y - 5z = 2$
$-5x - y - z = -9$

e, -

$4x + y - 5z = 36$
$-3y - 3z = 30$
$-4x + y - 4z = -1$

f,

$-3x + 2y - 3z = 3$
$3x - y - z = 12$
$-3x - 5y - 5z = -12$

g,

$2x + 3y + z + 5v = 11$
$x + 2y + 2z + 3v = 8$
$x + y - z + 2v = 4$
$4x - y - z = 3$

h,

$x + 2y + 3z + 4v = 13$
$x + 3y + 2z - 2v = -3$
$3x + y + 4z + 3v = 12$
$3x + 2y + 3z - 3v = -4$