Számosságok

<u>Az órai anyag a legjobb alap amire ennél a résznél építkezhetsz, először azt tanuld meg!!</u>
Állapítsuk meg a következő halmazok számosságát!
(„Alef null” = meszámlálhatóan végtelen, „c”= kontinuum)

1. A páratlan természetes számok halmaza, $A = \{1,3,5,7,\ldots\}$.

Az alábbi hozzárendelés bijekció N és A között: $f : A \to N; m \mapsto f(m) = \frac{m-1}{2}$.

2. A={hárommal nem osztható egész számok}.
Rendezzük sorba A elemeit így: 1,-1,2,-2,4,-4,5,-5,… . Ez egy bijekciót definiál A és N között, tehát A számossága megszámlálhatóan végtelen.

3. A={A 256 karakterből készíthető, 100 karakter hosszúságú sorozatok}.
A véges halmaz, $|A| = 256^{100}$.

4. A valós számok halmaza
Vegyük fel a (0,1) intervallumot egy $\frac{1}{\pi}$ sugarú félkörön a valós számegyenes fölött, majd vetítsük a félkör pontjait a számegyenesre a kör középpontjából. Ez egy bijekció (0,1) és R között, ezért az R kontinuum számosságú.

5. A [0,1) valós intervallum.
Egy f(x) bijekció [0,1) és (0,1) között: f(x)=0.5, ha x=0; f(x)= 2^{-k-1}, ha x=2^{-k} (k≥ 1 és egész); f(x)=x egyébként. Tehát ez is kontinuum számosságú.

6. A [0,a) valós intervallum.
Bijekció: az előző intervallum elemeit szorozzuk meg a-val.

Előadásról: Egységnyi oldalhosszúságú, (0,1) × (0,1) négyzet pontjainak halmaza (legyen ez A). Sejthető, hogy a halmaz kontinuum számosságú. $(0,1) \subset A$, ezért $|A| \geq c$. Megfordítva, adott (x,y) koordinátájú ponthoz (ahol $x = 0, x_1x_2x_3...$ és $y = 0, y_1y_2y_3...$) rendeljük a $z = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3...$ számot. Ezek mind különbözők, ezért $|A| \leq c$. (A véges tizedes törteket is végtelenként kell kezelni az egyértelműséghez, pl. $0{,}724 = 0{,}7239999999\ldots$). A kettőt együtt véve A=c.

7. Egységnyi oldalhosszúságú kocka, A=(0,1) × (0,1) × (0,1) pontjainak halmaza milyen számosságú?
Visszavezethetjük az előző feladatra. Bármelyik adott z koordinátához a kockának egy négyzet alakú N(z) metszete tartozik, amelyikről az előző feladatból tudjuk, hogy kontinuum számosságú, ezért minden (x,y) koordinátájú pontja megfeleltethető egy *v* számnak a szintén kontinuum számosságú (0,1) intervallumból. Vagyis egy adott (x,y,z) koordinátájú ponthoz egyértelműen rendelhetünk egy (v,z) számpárt a (0,1)×(0,1) halmazból, amelyről viszont már tudjuk, hogy kontinuum számosságú, ezért A is az.

HF: Lássuk be (teljes indukcióval), hogy minden n≥ 1 egész számra a $(0,1)^n$ kontinuum számosságú halmaz!

8. A kétdimenziós sík pontjainak halmaza.
Ennek részhalmaza a 7. feladat négyzete, emiatt a sík **legalább** kontinuum számosságú. A sík pontjai ugyanakkor egy a sík fölött elhelyezkedő egységsugarú félgömb segítségével a gömb középpontjába vetíthetők, azaz minden gömbfelületi ponthoz bijektíven rendelhető a síknak egy pontja. A félgömb így paraméterezhető: (ϑ, ϕ), ahol $\vartheta \in (0, \pi)$ és $\phi \in [0, 2\pi)$. Mivel mindkét halmaz kontinuum számosságú, ezért a 7. feladathoz hasonló indoklással kapható, hogy Descartes-szorzatuk is ilyen, azaz a félgömb pontjainak számossága kontinuum. A definiált bijekció ebbe a halmazba képez, ezért a sík pontjainak számossága is kontinuum.

HF: Háromdimenziós tér pontjainak halmaza.
HF: Lássuk be, hogy az R^n (n pozitív egész) halmaz számossága is kontinuum.

9. Irracionális számok halmaza.
Tekintsük azt az f(x): $R \rightarrow R - Q$ leképezést, amelyre f(x)= $\frac{p}{q}\pi^{k+1}$, ha x= $\frac{p}{q}\pi^{k}$, ahol p és q egész, k pedig természetes szám; f(x)=x egyébként. Könnyen látható, hogy ez bijekció a valós és irracionális számok között.

10.a) Természetes számokból álló rendezett párok halmaza.
$(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (0,2) \rightarrow (0,3) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,0) \rightarrow (4,0) \rightarrow \dots$
sorba rendezés definiál egy bijekciót a halmaz és a természetes számok halmaza között. Ezért megszámlálhatóan végtelen számosságú. (cikk-cakk módszer)

10.b) A természetes számokból álló rendezett n-esek számossága.
Az előző feladat azt is igazolta, hogy általában két tetszőleges megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen számosságú. (cikk-cakk módszer alapján) Ilyen módon teljes indukcióval könnyen látható, hogy n darab megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz, jelen esetben N, Descartes-szorzata is megszámlálhatóan végtelen számosságú.

11. Hány egyenessel fedhető le a sík?
A sík lefedhető az origó körüli egységsugarú körre fektetett, origón átmenő egyenesekkel, amelyeknek x tengellyel bezárt szöge $\alpha \in [0, \pi)$, ez utóbbi pedig kontinuum számosságú halmaz, ezért ugyanennyi egyenesre van szükség. (Vagy: a valós számegyenesre merőleges egyenesekkel is lefedhető a sík, s ezek számossága megint csak megegyezik a számegyenes pontjainak számosságával.)

12. Hány olyan pont van a síkon, amelynek mindkét koordinátája egész szám? ($Z \times Z = Z^2$)
Kicsit hasonló a 10. feladathoz. Induljunk ki az origóból:
$(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,-1) \rightarrow (0,-1) \rightarrow (-1,-1) \rightarrow (-1,0) \rightarrow (-1,1) \rightarrow (-1,2) \rightarrow (0,2) \rightarrow \dots$
Ez a sorozat egy „szögletes spirált” definiál az origó körül, amely így egy bijekciót határoz meg N és a vizsgált egész koordinátájú ponthalmaz között, vagyis a halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú.

HF: Hány olyan pont van a síkon, amelynek mindkét koordinátája racionális szám
(Táblázatba rendezve az órán tanult módon a $Q \times Q$ racionális számpárokat cikk-cakk módszerrel rendezhetjük, ezzel megadható bijekció N és e halmaz között, így belátható, hogy számosságuk megszámlálhatóan végtelen.

13. Legfeljebb hány 8-as helyezhető el a síkon úgy, hogy ne messék egymást?

Megszámlálhatóan végtelen számosságú biztosan elhelyezhető, ehhez elég a koordinátahálózat négyzetrácsába beírni a 8-asokat. De ennél több nem is helyezhető el, mert bármekkora 8-asokról is legyen szó, minden 8-as mindkét lyukában van olyan pont, amelynek mindkét koordinátája racionális szám, vagyis az ilyen pontok száma (amely megszámlálhatóan végtelen, lásd előző HF) biztosan $\geq$ a nyolcasok számánál, azaz a 8-asok számossága csak megszámlálhatóan végtelen lehet.

14. Hány olyan háromszög rajzolható a síkra, amelynek területe egész szám?
Legyen a háromszögek ezen halmaza H. Ekkor biztos, hogy $|H|$>c, hiszen adott egész T területű háromszög önmagával párhuzamosan eltolható a síkon egy tetszőleges $a \in R$-nek megfelelő távolsággal mondjuk az x tengely irányában. Ugyanakkor $|H|$< c, mert adott háromszöghöz hozzárendelhetjük a három csúcs összesen 6 koordinátáját, ezzel definiálva egy valós számhatost. Ez az R^6-nak eleme, amely kontinuum számosságú. Ezért |H|=c.

15. Mennyi egy háromszög belső pontjainak száma?
Legfeljebb kontinuum, hiszen a háromszög része a kontinuum sok pontot tartalmazó síknak, és legfeljebb kontinuum sok, hiszen minden háromszögben van olyan szakasz, amely maga is kontinuum sok pontból áll. A két korlát együtt azt eredményezi, hogy a belső pontok száma is kontinuum.

16.
a, Hány olyan egység sugarú kör rajzolható a síkra, aminek a középpontjának koordinátái egész számok? (metszhetik egymást a körök)
b, Hány olyan kör rajzolható a síkra, aminek a középpontjának koordinátái, és a sugara is egész szám? (metszhetik egymást a körök)
c, Mennyi az origó középpontú egység sugarú kör belső pontjainak számossága? A bizonyításhoz add meg a megfelelő bijektív függvényt!
d, Hány origó középpontú körvonallal fedhető le a sík? A bizonyításhoz itt is add meg a megfelelő bijektív függvényt!

M.o.:
a, A kérdés valójában annyi, hogy hány olyan pont van a síkon amelynek mindkét koordinátája egész szám! Ez ilyen pontok számossága megszámlálhatóan végtelen, egy lehetséges felsorolás: első helyen az origó áll, aztán csigavonalban sorban a többi!
b, A sík egész koordinátájú pontjait az 1,a, feladat szerint felsorolhatjuk, és minden egyes ponthoz tartozik a 0,1,2,3,… sugarú körök megszámlálhatóan végtelen halmaza! Megszámlálhatóan végtelenszer megszámlálhatóan végtelen is megszámlálható, például a táblázatba rendezős módszerrel!
c, A kört felvetíthetjük egy félgömbre, a félgömböt a gömb középpontjából rávetíthetjük a síkra, a sík pedig kontinuum számosságú! Más lehetőség: polár koordinátákkal!
d, Az összes origó középpontú körvonalra szükség van! Mindenkörhöz a sugarát hozzárendelve, megadtunk egy bijektív függvényt a körök és a $[0,\infty)$ intervallum között, a $(0,\infty)$ tartalmazza a (0,1)-et vagyis legalább kontinuum és benne van a $(-\infty,\infty)$-ben, tehát legfeljebb kontinuum. Így kontinuum sok körre van szükség.

17. Igazolja a megfelelő bijekció megadásával (rajzzal és vetítéssel), hogy az alábbi halmazok számossága megegyezik! (Ebből kis meggondolással arra is tudunk következtetni, hogy mindegyik kontinuum számosságú)

a, (0,1) intervallum és az R valós számok halmaza
b, (a,b) intervallum és az R valós számok halmaza

c, (0,1) és (a,b) intervallumok
d, Egyetlen pontban kilyukasztott körvonal és a valós számok halmaza
e, Körvonal és négyzet-vonal
f, Egyetlen pontban kilyukasztott gömbfelszín és az R^2 sík pontjai (sztereografikus projekció)
g, Két különböző sugarú körfelület
h, Két tetszőleges különböző oldalhosszúságú szabályos háromszög (mint felület)
i, Félgömb felszín és sík

18. Adja meg az alábbi halmazok számosságát:
a, Komplex számok
b, Azon komplex számok melyeknek valós és képzetes része is egész szám
c, Azon komplex számok melyeknek valós és képzetes része is racionális szám
d, Azon komplex számok halmaza melyeknek képzetes része 3i.
e, Azon komplex számok melyeknek valós és képzetes részének abszolút értéke is kisebb mint 2

M.o.:
a, a+bi komplex szám → (a,b) valós számpár
Ez egy bijektív hozzárendelés C és R^2 között, R^2-ről pedig tudjuk, hogy kontinuum.
b, a+bi → (a,b) bijekció azon komplex számok melyeknek valós és képzetes része is egész szám és az egész számpárok (Z^2) között., Z^2 pedig tudjuk, hogy megszámlálhatóan végtelen.
c, a+bi → (a,b) bijekció azon komplex számok melyeknek valós és képzetes része is racionális szám és a racionális számpárok (Q^2) között., Q^2 pedig tudjuk, hogy megszámlálhatóan végtelen.
d, a + 3i → a
Ez bijekció a 3i képzetes részű komplex számok és a valós számok között, R pedig kontinuum.
e, Véges halmaz, a valós és képzetes rész is -1,0,1 értékeket vehet fel (3 lehetőség), az összes lehetőségek száma és így a halmaz számossága: $3^2 = 9$

Nagyságrendek

1, $2^n = O(n!)$

Biz.: $2^n = 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2 \le 2\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) = 2\cdot n!$ minden $1 \le n$ természetes szám esetén

→ Létezik $n_0 = 1$ küszöbindex és C = 2 konstans melyre teljesül, hogy $2^n \le C\cdot n!$ minden $n_0 \le n$ természetes szám esetén.

(Máshogy: $2^n = 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2 \le 1\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) = 1\cdot n!$ ha az $n \ge 4$

→ Tehát $n_0 = 4$ küszöbindex és C = 1 konstans esetén is teljesül, hogy $2^n \le C\cdot n!$ minden a küszöbindexnél nagyobb $n_0 \le n$ természetes számra.)

2, Az alábbi állításokról döntse el, és igazolja, hogy igazak-e vagy sem!

a, $5n^3 + 7 = O(n^3)$
b, $5n^3 + 7 = \Omega(n^3)$
c, $5n^3 + 7 = \Theta(n^3)$
d, $5n^3 + 7 = O(n^2)$
e, $5n^3 + 7 = \Omega(n^2)$
f, $5n^3 + 7 = \Theta(n^2)$
g, $n^2 + 7n + 3 = O(n^4)$
h, $n^2 + 7n + 3 = \Omega(n^4)$
i, $n^2 + 7n + 3 = \Theta(n^4)$
j, $n^2 + 7n + 3 = O(n^2)$
k, $n^2 + 7n + 3 = \Omega(n^2)$
l, $n^2 + 7n + 3 = \Theta(n^2)$
m, $n^4 = O(3n^7)$
n, $n^4 = \Omega(3n^7)$
o, $n^4 = \Theta(3n^7)$
p, $n^2 = O(n^2 + 4n + 1)$
g, $n^2 = \Omega(n^2 + 4n + 1)$
r, $n^2 = \Theta(n^2 + 4n + 1)$