

ANALÍZIS A FREKVENCIATARTOMÁNYBAN: A FOURIER SOR ÉS A FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ

A Fourier sor

Az itt következő anyag csak egy elméleti összefoglaló. Mivel az „Elektronikus és biológiai áramkörök” tárgyban a Fourier sor exponenciális alakját nem használjuk, ezért azt a gyakorlaton ne alkalmazzuk, arra ne hivatkozzunk.

Egy jel periódikus, ha minden t -re érvényes:

$$x(t) = x(t + T_0)$$

ahol T a jel periódusa. A jel alaphérfvenciája és a periódusa a következő összefüggésben van egymással:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ahol f_0 - az alaphérfvencia Hz-ben és ω_0 - alaphérfvencia rad/sec-ben.

A Fourier sor trigonometrikus, exponenciális valamint harmonikus felírása

- Trigonometrikus

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

ahol a_0 az $x(t)$ jel átlaga, azaz DC értéke.

- Mérnöki alak (harmonic form)

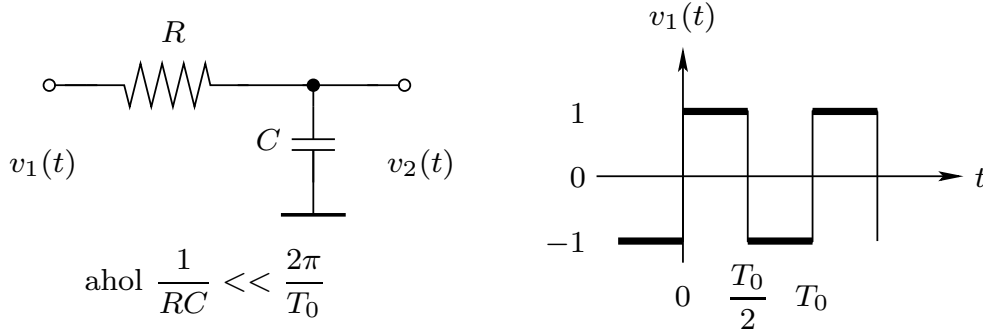
$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \theta_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$$

ahol C_k a harmonikus komponens amplitúdója, θ_k a fázisa.

1. feladat

Az alábbi aluláteresztő szűrőt a $v_1(t)$ periódikus négyszögjel hajtja meg. Határozza meg a $v_2(t)$ válaszjelet állandósult állapotban.



a.) Állandósult állapotú AC probléma. Először meg kell határozni a $v_1(t)$ Fourier sorát!

DC komponens:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} v_1(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} v_1(t) dt = 0$$

Harmonikus komponensek:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} v_1(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

Az integrált egyetlen T_0 periódusra kell kiértékelni. Az egyszerű integrálhatóság miatt az integrálási határok legyenek $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \cdot dt$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} v_1(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^0 (-1) \cos(k\omega_0 t) dt + \int_0^{+\frac{T_0}{2}} (+1) \cos(k\omega_0 t) dt \right]$$

A bal oldalon az első tagban

- integrálási határok felcserélése, majd
- $t = -\tau$ behelyettesítés

$$\frac{dt}{d\tau} = -1, \quad t = 0 \Rightarrow \tau = 0, \quad t = -\frac{T_0}{2} \Rightarrow \tau = \frac{T_0}{2}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T_0} \left[\int_0^{-\frac{T_0}{2}} \cos(k\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos(k\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T_0} \left[- \int_0^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{\cos(-k\omega_0 \tau)}_{\cos(k\omega_0 \tau)} d\tau + \int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos(k\omega_0 t) dt \right] = 0 \end{aligned}$$

Vedd észre, páratlan periódikus függvényben csak szinuszos, azaz páratlan bázis-függvények lépnek fel!

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^0 (-1) \sin(k\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T_0}{2}} (+1) \sin(k\omega_0 t) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T_0} \left[-(-1) \frac{\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^0 - \frac{\cos(k\omega_0 t)}{k\omega_0} \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \right] \\
 &= \frac{2}{T_0} \frac{\cos(0) - \cos\left(-k \frac{2\pi T_0}{T_0} \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k \frac{2\pi T_0}{T_0} \frac{1}{2}\right) + \cos(0)}{k \frac{2\pi}{T_0}} \\
 &= \frac{2 [1 - \cos(k\pi)]}{k\pi} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k = 0, 2, 4, \dots \text{ azaz páros} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{ha } k = 1, 3, 5, \dots \text{ azaz páratlan} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tehát az 50%-os kitöltésű négyszögjelben

- csak szinuszos komponensek és
- csak páratlan harmonikusok szerepelnek

$$v_1(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \dots + \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k} + \dots \right] V, \text{ ahol } k = 1, 3, 5, \dots$$

b.) A $v_2(t)$ válaszjel meghatározásának lépései:

- $v_1(t)$ Fourier sor mérnöki alakjából a komplex amplitúdók meghatározása
- szuperpozíciót alkalmazok az időtartományban
- felírom az aluláteresztő szűrő frekvenciaválasz-függvényét
- meghatározom a válasz komplex amplitúdóját
- visszatranszformálok a kapott komplex amplitúdókat az időtartományba

Mérnöki alak: (emlékezz, $a_k = 0 \quad \forall \quad k$ -ra)

$$v_1(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}{3} + \dots \right] V$$

Komplex amplitúdók:

$$V_1(k) = \frac{4}{\pi k} \angle -\frac{\pi}{2} \quad V, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Frekvenciaválasz a feszültségosztó tétellel:

$$\frac{V_2(k)}{V_1(k)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \bigg|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{1 + j\omega CR} \bigg|_{\omega=k\omega_0} = H(jk\omega_0)$$

Mivel az aluláteresztő szűrő határfrekvenciája jóval kisebb mint az alapharmónikus frekvenciája

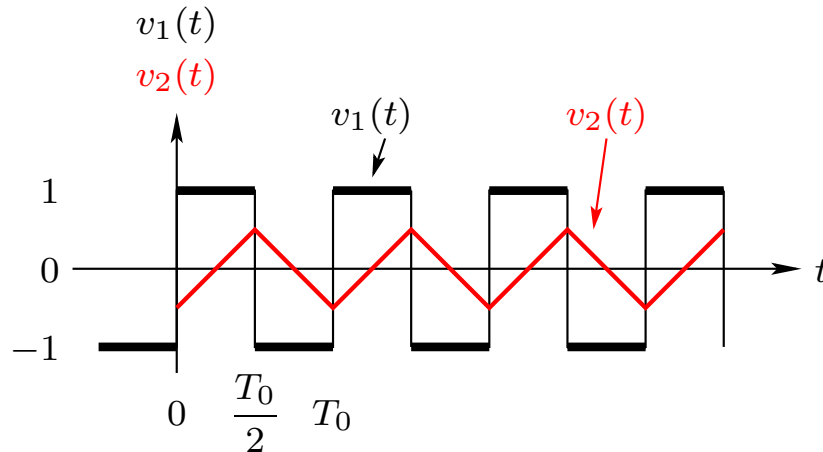
$$H(jk\omega_0) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \bigg|_{\omega=k\omega_0 \gg \frac{1}{RC}} \approx \frac{1}{jk\omega_0 RC} = \frac{1}{k\omega_0 RC} \angle -\frac{\pi}{2}$$

Ebből a $v_2(t)$ válasz komplex amplitúdói:

$$\begin{aligned} V_2(k) &= H(jk\omega_0)V_1(k) = \frac{1}{k\omega_0 RC} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{4}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\omega_0 RC} \frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2} \angle -\pi = -\frac{1}{\omega_0 RC} \frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2} \text{ V} \end{aligned}$$

A $v_2(t)$ válaszjel az időtartományban (inverz transzformáció)

$$v_2(t) = \frac{1}{\omega_0 RC} \underbrace{\left(-\frac{4}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 t)}{9} + \frac{\cos(5\omega_0 t)}{25} + \dots \right] \right)}_{\text{ez viszont egy háromszögjel Fourier sora}} \text{ V}$$



2. feladat

Az 1. feladatban szereplő kapcsoláshoz tartozó értékek: $R = 1\text{k}\Omega$, $C = 0,47\mu\text{F}$ a gerjesztés pedig $v_g(t) = 5\sqrt{2}\cos(\omega t)$ V.
Határozzuk meg a kimeneti feszültség értékét $f_1 = 60$ Hz és $f_2 = 1000$ Hz-es jelek esetén.

1. Tudjuk, hogy:

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + j\omega CR} \Rightarrow V_2 = H(j\omega)V_1 = \frac{1}{1 + j\omega CR}V_1$$

Ez alapján:

$$\begin{aligned} V_2(\omega = 2\pi 60) &= \frac{1}{1 + j2\pi \cdot 60 \cdot 1000 \cdot 4,7 \cdot 10^{-7}} V_1(\omega = 2\pi 60) \\ &= \frac{1}{1 + j0,177} V_1(\omega = 2\pi 60) = 0,985 \cdot 5(\angle -10) = 4,92(\angle -10) \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(\omega = 2\pi 10000) &= \frac{1}{1 + j2\pi \cdot 10^4 \cdot 1000 \cdot 4,7 \cdot 10^{-7}} V_1(\omega = 2\pi 10000) \\ &= \frac{1}{1 + j29,5} V_1(\omega = 2\pi 10000) = 0,0338 \cdot 5(\angle -88,06) = 0,17(\angle -88,06) \text{ V} \end{aligned}$$

2. A megoldás az időtartományban:

$$60 \text{ Hz} \quad \text{esetén} \quad \Rightarrow \quad v_2(t) = 4,92\sqrt{2}\cos(2\pi 60t - 10) \text{ V}$$

$$10 \text{ kHz} \quad \text{esetén} \quad \Rightarrow \quad v_2(t) = 0,17\sqrt{2}\cos(2\pi 10000t - 88,06) \text{ V}$$

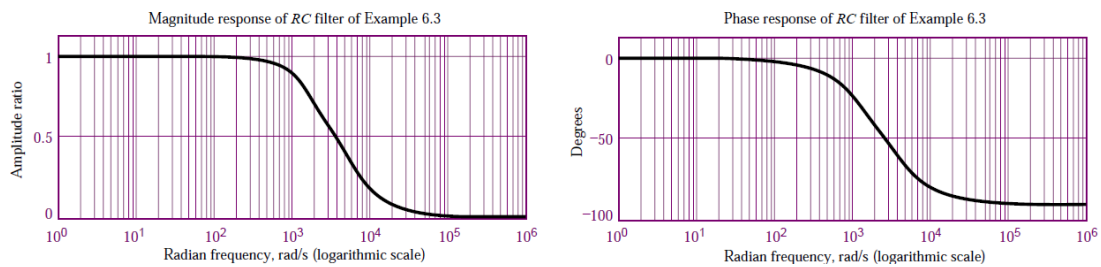
3. feladat

Ábrázoljuk az 1. feladatban bemutatott kapcsoláshoz tartozó Bode diagrammot (amplitúdó és fázis).

Ehhez a $H(j\omega)$ frekvenciaválasz-függvényből ki kell fejezni a jel amplitúdóját és fázisát:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1}{\sqrt{1 + (j\omega CR)^2}} \frac{e^{j0}}{e^{j \arctan(\omega CR)/1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (j\omega CR)^2}} e^{-j \arctan(\omega CR)} = |H(j\omega)| e^{j\phi_H(j\omega)} \end{aligned}$$

A levágási frekvencia pedig $\omega_0 = 1/RC = 2127$ rad/sec- nél van.



A gyakorlat során mutassuk be a

$$\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$$

alakú átviteli függvényekkel jellemzett négypólusok Bode diagramjainak szerkesztését.