Kombinatorika gyakorló feladatok

Egyszerűbb gyakorló feladatok

1. Három tanuló reggel az iskola bejáratánál hányféle sorrendben lépheti át a küszöböt?

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

2. Hány különböző négyjegyű számot írhatunk föl 2 db 1-es, 1 db 2-es és 1 db 3-as számjegyből?

$$P_4^{1,1,2} = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 12 .$$

3. a)Hány ötös lottószelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan 5-ös találatunk legyen?

$$C_{90}^5 = \binom{90}{5} = 43949268 .$$

b) Hány ötös lottószelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy legalább 3-as találatunk legyen?

$\binom{85}{5} + \binom{5}{1}\binom{85}{4} + \binom{5}{2}\binom{85}{3} + 1$ (legrosszabb esetet feltételezve: 0, 1, 2 találatosak +1 db)

4. Egy pénzdarabot 10-szer feldobunk. Hány sorozat adódhat, ha a dobások sorrendjét is figyelembe vesszük?

2 elem 10-edosztályú ismétléses variációjával:
$V_2^{10,i} = 2^{10} = 1024 .$

5. Egy négytagú család telefonja 2-szer szólalt meg egy estén. Hányféle változatban vehették fel a kagylót, ha ugyanaz a személy 2-szer is felvehette de a sorrendet nem vesszük figyelembe?

Ismétléses kombinációt kell használni. 4 elem másodosztályú ismétléses kombinációja:
$$C_4^{2,i} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10 .$$

6. Egy dobozban 16 golyó van, 10 fehér, 4 piros és 2 kék. Egymás után visszatevés nélkül kihúzzuk mind a 16-ot. Hányféle sorrend keletkezhet, ha az egyszínűeket nem különböztetjük meg egymástól?

Ismétléses permutációval:
$$P_{16}^{10,4,2} = \frac{16!}{10! \cdot 4! \cdot 2!} = 120120 .$$

7. Hogyan módosul az előző feladat eredménye, ha minden golyót visszateszünk a kihúzás után, és így húzunk ki 16 golyót?

Csak az számít, hogy mennyi eltérő színű golyó van, az egyes színeken belüli darabszámok az összes lehetséges sorrendet nem, csak ezek előfordulási valószínűségét befolyásolják. Háromféle szín van, tehát 3 elem 16-odosztályú ismétléses variációjának meghatározása a feladat:
$V_3^{16,i} = 3^{16} = 43046721$, valahol az ötös lottós feladat környékén.

8. Egy 8 tagú család 4 színházjegyet kap.
a) Hányféleképpen oszthatók ki a jegyek, ha az is számít, ki hova ül?

Az adott 4 helyre először 8, majd 7, aztán 6 végül 5 családtag közül válogathatunk, vagyis:
$V_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

b) Mi a helyzet akkor, ha csak az számít, hogy egyáltalán ki megy el a színházba?

8 elem 4-edosztályú kombinációja: $C_8^4 = \binom{8}{4} = 70$.

9. Adott egy 10-szer 12-es „sakktábla” (10 sor és 12 oszlop). A bal felső sarkából a jobb alsóba szeretnék eljutni úgy, hogy mindig csak jobbra vagy lefelé léphetünk. Hányféle útvonal létezik?

Az egyes útvonalakat „kódolhatjuk” úgy, hogy a jobbra lépésnek J-t, a lefelé lépésnek L-et feleltetünk meg, így minden útvonal egy ebből a két betűből álló sorozatnak felel meg, amelyben mindig 11 db J és 9 db L szerepel. Az összes sorozatok száma így:
$P_{20}^{9,11} = \frac{20!}{9! \cdot 11!} = 167960$.

10.a) Egy társaságban 6 fiú és 6 lány van. Hányféleképpen alakulhatnak belőlük egyszerre táncoló párok?

Sorba rendezzük az 6 lányt, és melléjük kisorsoljuk az 6 fiút: 6!=720.

10.b) Egy társaságban 8 fiú és 5 lány van. Hányféleképpen alakulhat belőlük 5 egyszerre táncoló pár (csak ellentétes neműek alkothatnak párt:-)?

Az 5 lány mindenképpen táncol. Állítsuk őket sorba, s sorsoljuk melléjük a fiúkat valamilyen sorrendben. A válasz ebből láthatóan: $\mathrm{V}_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

11. 4 egyforma kockát feldobunk. Hányféle végeredmény jöhet ki? (Nem a pontok összege, hanem az egyes számú pontok előfordulása a lényeg.)

Mindegyik kocka mind a hat oldalát mutathatja egymástól függetlenül, azaz 6 elem 4-edosztályú ismétléses kombinációi adják a végeredményt: $C_6^{4,i} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = 126$.

HF: Hogyan változik az előző feladatra adott válasz, ha mindegyik kocka különböző színű? (Segítség: ez már egyáltalán nem olyan egyszerű feladat. Az egyes esetek száma aszerint változik, hogy hány különböző számot látunk. Pl. négy db 6-os csak egyféleképpen jöhet ki négy különböző kocka esetén is, de 3 db 6-os és 1db 5-ös már négyféleképpen, s.í.t.)

Összetettebb gyakorló feladatok

Itt már a fenti fogalmak közül többet is kell használni egyszerre, de sokszor talán az a jobb hozzáállás, hogy tőlük függetlenül, a „kályhától indulva" végiggondoljuk az egyes lehetséges kimenetelek legenerálását, kialakulását.

12. A 0,1,2,3,4 számjegyekből hány **valódi** ötjegyű szám képezhető, amelyben legalább az egyik számjegy ismétlődik?

Nullával nem kezdődhet szám. A „legalább egy számjegy ismétlődik"azt jelenti, hogy akár mind az öt számjegy egyforma is lehet, ezért egyszerűbb az összes valódi ötjegyű számból kivonni az ismétlést nem tartalmazókat. Összes: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$, a mind különböző számjegyet tartalmazók száma $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$, a kettőt kivonva egymásból a válasz 2404.

13. 9 ember csónakázik, 3 csónak van: egy 4, egy 3 és egy 2 üléses. Hányféleképpen foglalhatják el a csónakokat, ha egy csónakon belül az ülésrend nem számít?

Először kisorsoljuk, kik ülnek a 4 személyes csónakba, majd a 3 és 2 személyesekbe. A sorsolás eredményei egymástól függetlenek, azaz a lehetséges kimenetelek száma összeszorzódik, az egyes sorsolások eredményeit pedig ismétlés nélküli kombinációk adják. Vagyis a végeredmény: $\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 1260$. (Az utolsó csónakban ülők személye természetesen már adott az utolsó előtti sorsolás után, ennek megfelelően $\binom{2}{2} = 1$.)

14. Egy páncélszekrény 6 egymás mögötti tárcsa megfelelő beállításával nyitható ki. A tárcsák 9 számjegyet tartalmaznak, amelyek közül egyet kell beállítani minden tárcsán. Ha valaki nem ismeri a kódot, mennyi időt vehet igénybe legrosszabb esetben a szekrény kinyitása, ha folyamatosan próbálkozik és egy kombináció beállítása 5 másodpercig tart?

Legrosszabb esetben a legutolsó próbálkozásra nyílik ki a szekrény, vagyis az összes esetet meg kell vizsgálni, amely $V_9^{6,i} = 9^6 = 531441$. Ennyiszer 5 másodperc éppen 2657205 másodperc, ami 30 nap 18 óra 6 perc 45 másodperc. Kicsit sokáig tart. (És közben még csak nem is eszik az illető.)

15. 20 láda áruból 15 láda első osztályú, a többi másodosztályú árut tartalmaz. Hányféleképpen választható ki ezek közül 5 láda úgy, hogy legfeljebb 2 másodosztályú legyen közöttük?

Azokat az eseteket kell összeadni, amikor pontosan nulla, egy vagy két db másodosztályú láda van a kiválasztottak között: $\binom{15}{5} + \binom{15}{4} \cdot \binom{5}{1} + \binom{15}{3} \cdot \binom{5}{2} = 3003 + 6825 + 4550 = 14378$.

16. Egy érmének bizonyos számú feldobásával adódó sorozatokat állítunk elő. Ha a sorozat dobásainak számát 2-vel növeljük, a különböző sorozatok száma 384-gyel növekszik. Hány dobásból állt az eredeti sorozat?

Legyen az eredeti sorozat hossza n. Ekkor a következő egyenletet írhatjuk föl:
$2^{n+2} - 2^n = 384 \Rightarrow 2^n(2^2 - 1) = 384 \Rightarrow 3 \cdot 2^n = 384 \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow n = 7$.

17. Egy 52 lapos francia kártyacsomagban 4 ász és 4 király van. Négyfelé osztjuk a lapokat. Hányféle olyan szétosztás lehetséges, amelynek során mindegyik játékosnak 1-1 ász és király jut?

Ültessük le a játékosokat egy adott tetszőleges sorrendbe. Először osszuk ki a 4 ászt és a 4 királyt, ezek lehetséges összes előfordulása $4! \cdot 4!$. A maradék 44 lapot 4 db 11-es csoportba osztjuk, az egyes csoportokon belül persze nem számít a lapok sorrendje. Először 44 lapból választunk ki 11-et, majd 33-ból 11-et, végül a maradék 22-ből 11 kiválasztása megadja az utolsó 11-es pakli összetételét is. Ezek egymástól független sorsolások (lásd csónakos feladat), ezért a végeredmény az ászokkal és királyokkal együtt:

$$4! \cdot 4! \cdot \binom{44}{11} \cdot \binom{33}{11} \cdot \binom{22}{11} \cdot \binom{11}{11} = (4!)^2 \cdot \frac{44!}{(11!)^4} \approx 6 \cdot 10^{26}.$$

18. Hányféleképpen lehet egy 32 lapos magyar kártyacsomagot 4 egyenlő részre osztani, hogy mind a 4 ász ugyanabba a részbe kerüljön?

Különítsük el a 4 ászt, és sorsoljuk mellé a maradék 4 lapot a 28-ból. Ezt $\binom{28}{4}$-féleképpen tehetjük meg. A többi csomagot ugyanígy sorsoljuk ki, de mivel a sorrendjük most nem lényeges, a kapott eredményt még 3!-sal osztanunk kell, vagyis a megoldás

$$\binom{28}{4} \cdot \frac{\binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8}}{3!} = \frac{28!}{3! \cdot 4! \cdot (8!)^3} \approx 3.23 \cdot 10^{13}.$$

19. Egy vívóedzésen 15 vívóból 6 pár vív egyidejűleg. Hányféleképpen választhatók ki a párok?

Először válasszuk ki azt a 12 vívót, aki vív: $\binom{15}{12}$. Ezután a fennmaradó vívókból mindig kiválasztunk kettőt, majd, mivel a párok sorrendje nem lényeges (mindegy, hogy melyik pár melyik páston vív), a részeredményt elosztjuk 6!-sal. Tehát:

$$\binom{15}{12} \cdot \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{6!} = \frac{15!}{3! \cdot (2!)^6 \cdot 6!} = 4729725.$$

20. A binomiális és hipergeometrikus eloszlást bevezető feladat.

Egy zsákban 13 golyó van, 7 fehér és 6 fekete. Egyszer visszatevéssel, egyszer pedig visszatevés nélkül kihúzunk belőle 5-öt. Hány olyan sorsolás van a visszatevéses esetben, amelyben a kihúzott fekete golyók száma 3? Hány ugyanilyen sorsolás van a visszatevés nélküli esetben, ha az egyszínű golyókat is megkülönböztetjük egymástól? És ha nem?

a) A visszatevéses esetben nem számít, hogy összesen hány fekete és fehér golyó van a zsákban, csak az határozza meg az egyes lehetőségeket, hogy a három kihúzott fekete milyen sorrendben kerül elő. Vagyis az, hogy az 5 húzásból melyik húzásra veszünk ki feketét a zsákból. Ezért 5 elem 3-adosztályú kombinációi adják a megoldást: $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$.

(Ez éppen a binomiális eloszlás együtthatója abban az esetben, amikor 3 fekete golyó kihúzási valószínűségét számoljuk.)

b) A visszatevés nélküli esetben az egyes lehetőségeket az adja, hogy *konkrétan melyik fekete és fehér golyók milyen sorrendben* kerülnek kihúzásra. A sorsolást modellezhetjük úgy, hogy először kiválogatjuk azt a 3 fekete és 2 fehér golyót, amelyet kihúzunk, majd ezeket elrendezzük az összes lehetséges sorrendben. Ezért a megoldás: (6 feketéből 3)*(7 fehérből 2)*(összes lehetséges sorrend) $= \binom{6}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot 5! = 50400$.

(Ez pedig - az 5! nélkül - a hipergeometrikus eloszlás számlálója, azaz a kedvező kimenetelek száma abban az esetben, amikor a 3 fekete golyó kihúzási valószínűségét számoljuk.)

Ha a golyókat mégsem különböztetjük meg egymástól, akkor a válasz megint 10, mert a sorrend ismét csak a színektől függ, a „nem visszatevés” csak az valószínűségeket befolyásolja.

Vegyes feladatok

21.Egy kockát ötször feldobunk egymás után.

a.) Hányféle eredmény lehetséges?
b.) Hány olyan eredmény van, melynél utoljára 1-est dobtunk?
c.) Hány olyan eredmény van, melyben pontosan egy darab 1-es szerepel?
d.) Hány olyan eredmény van, melyben van 1-es?
e.) Hány olyan eredmény van, melyben pontosan egy darab 1-es és pontosan kettõ darab 2-es szerepel?

22.Egy n elemű halmaznak

a.) hány 8 elemű (n>8) részhalmaza van?
b.) hány k elemű (n>k) részhalmaza van?
c.) hány részhalmaza van?

23. Egy 32 lapos magyar kártyacsomagból egyszerre kiveszünk öt lapot. Hány húzásnál lesz a lapok között

a.) csak piros
b.) csak egy piros
c.) piros
d.) 2 piros és 3 zöld
e.) minden szín
f.) pontosan egy ász és négy piros
g.) ász vagy piros

h.) ász és piros?

24. Egy 32 lapos magyar kártyacsomagból egymás után veszünk ki öt lapot. Hány húzásnál lesz a lapok között

a.) az elsõ piros, a második, harmadik zöld és az utolsó kettõ makk

b.) az elsõ kettõ piros , a többi pedig egyszínû

c.) 2-2-1 a szín szerinti megoszlás?

25. Válaszoljon a 3. és 4. feladat kérdéseire abban az esetben, ha egy 32 lapos magyar kártyacsomagból **visszatevéssel** vesszük ki az öt lapot.

26. Egy futballmeccsen 5 gól esett.

a.) Hányféleképpen alakulhatott ki ez az eredmény?

b.) Hányféle végeredmény lehet?

27. Hány tagja van az $(a+b+c)^{10}$ polinomnak összevonás elõtt, összevonás után. Mennyi az együtthatója az $a^2b^3c^5$ tagnak?

28.a.) Az {1,2,3,4,5,6,7,8,9} halmaz hány ötödosztályú kombinációja nem tartalmazza a {7,8,9} halmazt?

b.) Az {1,2,3,4,5,6,7} halmaz hány negyedosztályú ismétléses variációja nem tartalmazza a {1,2} halmaz mindkét elemét?

29.Négy tagú család 11-féle képeslapból hányféleképp választhat egy-egy lapot, ha

a) mind a 11 fajtából választhat mindenki úgy, hogy - számít, ki melyiket választja

- nem számít, ki melyiket választja

b) minden lapból csak egy lap van, de - számít, ki melyiket választja

- nem számít, ki melyiket választja

30. Egy 12 tagú társaság csónakot bérel. Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha

a.) csak egy 4 üléses

b.) egy 3, egy 4 és egy 5 üléses

c.) három különböző 4 üléses

d.) három egyforma 4 üléses

e.) kettő 5 üléses

csónakot bérelnek, és egy csónakban csak a megadott létszámban foglalhatnak helyet?

31. Adott a 0,1,2,8,9 számjegy.

a.) Hány ötjegyű szám írható fel belőlük ismétlődés nélkül?

b.) Hány négyjegyű szám írható fel belőlük ismétlődés nélkül?

c.) Hány négyjegyű szám írható fel belőlük ismétlődéssel?

d.) Hány négyjegyű páros szám írható fel felhasználásukkal?

e.) Hány négyjegyű szám írható fel belőlük úgy, hogy csak pontosan két különböző jegyet tartalmaz?

32. Ha egy halmaz elemeinek a számát 2-vel növeljük, akkor az elemek permutációinak a száma az eredeti permutációk számának 930-szorosa lesz. Hány elemű a halmaz?

33. Egy dobozban 3 sárga golyó van. Hány piros golyót kell betenni ahhoz, hogy 4495 féleképpen lehessen egymás után kihúzni őket? (vagyis permutálni a piros és sárga golyókat)

34. Három kocsiból álló villamosra 9 ember száll fel úgy, hogy minden kocsira három ember jut. Hányféleképpen történhet ez?

35. Egy pénzérmét 10-szer feldobunk egymás után.

a.)Hány különböző dobássorozatunk lehet?

b.)Hányszor lehet 6 fej és 4 írás a dobássorozatban?

36. Egy pénzérmét n-szer feldobunk egymás után. Ha a dobások számát 2-vel növeljük, akkor az eredménysorozatok száma 3072-vel nő. Hányszor dobtunk?

37. a.)Hányféleképp tölthetünk ki egy 13-as totó szelvényt?

b.)Hányféleképp tölthetünk ki egy 13-as totó szelvényt úgy, hogy 8 db 1-est, 2 db x-et és 3 db 2-est használunk?

38. Pontból és vonásból hány, legfeljebb négyelemű jel állítható össze?