Struktúrák

1. Milyen algebrai struktúrát határoznak meg az alábbi halmazok a megadott művelet(ek)-el?

a, $(2^H$, metszet)

b, $(R^3, +)$ (R^3 a három dimenziós tér vektorainak halmaza)

c, $(R^3$,vektoriálisszorzat)

d, $(R^{n\times m},+)$ ($R^{n\times m}$ az n×m-es mátrixok halmaza)

e, $(R^{n\times n},*)$

f, Lali elsőéves a PPKE ITK-n☺, és szeptember végén végre hazautazik. Szülei, amíg távol volt, elkezdték kipakolni a padlást, úgyhogy Lalit is sok, a gyerekkorából származó doboz fogadja a szobájában. Az egyik dolog, amit megtalál egy régi játék, még öccsével hajtogatták kartonpapírból: két ugyanolyan négyoldalú (tetraéder alakú) dobókocka. A négy-négy oldalra 1,2, 3 és * van felrajzolva. Alatta ott hever egy azóta megsárgult lapon a használati utasítás - mindkét kockával kell dobni, az eredményt pedig így kell „számítani"
(&-jellel jelöljük, hogy ezt a két számot dobtuk a kockával):
- Két különböző szám dobása esetén a harmadik szám az eredmény (pl. 1&3 = 2, 1&2 = 3)
- Egy szám és a csillag dobása esetén a szám (pl. 2&* = 2)
- Két azonos szám esetén a csillag (pl. 3&3 = *)
A szabályok olvasása közben Lali elmosolyodik és gyorsan átsiet öccséhez elújságolni, hogy szerinte egy Abel-csoportot sikerült megcsinálniuk 8 évesen. Az öcskös – lévén még csak 11. osztályos – értetlenül néz. Mit mondjon Lali, hogy megismertesse (egyébként felettébb értelmes) öccsét a csoport fogalmával és bizonyítsa állítását?

*Vigyázat ezután már kétműveletes struktúrák jönnek:

g, 2^H hatványhalmazon adott két művelet: A+B = $A \cup B$ és A*B = $A \cap B$

h, R valós számok halmazán két művelet: a+b=a*b a*b=$a^{lg(b)}$

i, R valós számok halmazán két művelet: a+b=$(a^3+b^3)^{1/3}$ a*b=3a*8b

j, R valós számok halmazán két művelet: a+b=$(a^3+b^3)^{1/3}$ a*b=a/b

k,$(R^{n\times n},+,*)$ az n×m-es mátrixok halmaza a szokásos mátrix összeadással és szorzással.

Nulladrendű logika

1. Bizonyítsa be, hogy az implikáció nem asszociatív művelet: $(A \to B) \to C \neq A \to (B \to C)$.

2. Bizonyítsa be, hogy tautológia: $(B \to \neg A) \vee (A \wedge B)$

3. Igazságtáblával bizonyítsa be, hogy ekvivalensek az alábbi kifejezések:

$$\neg(A \to C) \vee \neg(B \to C) \equiv \neg((A \vee B) \to C)$$

$$((\neg A \vee B) \to C) \wedge \neg(B \to A) \equiv \neg A \wedge B \wedge C$$

$$\neg(((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to \neg(\mathrm{C} \wedge \neg\mathrm{B})) \equiv \neg(\mathrm{B} \vee \neg\mathrm{C}) \wedge (\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$$

$$(A \vee B) \to (\neg C \wedge D) \equiv (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee D)$$

4. Formalizálja az alábbi mondatokat:

1. Ha okos vagyok vagy nagyon szorgalmas, akkor kapok megajánlott jegyet és nem kell vizsgáznom.
2. Tivadar hazament, de nem maradt otthon, bár mindenki ezt várta tőle.
3. Nem jövök, ha nem hívnak.
4. Ha sikerül a zéhá, és jó idő lesz este, akkor sétálok, vagy zenét hallgatok.
5. Anna akkor és csak akkor iszik, ha Barna eladja a házat és Cili összeveszik a férjével
6. Nem igaz, hogy ha Barna eladja a házat, akkor Daniella boldogtalan lesz.
7. A tavasz közeledtével a virágok kinyílnak, a fiókák kirepülnek és a természet nem alszik tovább.
8. Ha a felhők közeledtével nem viszek esernyőt, akkor valószínűleg nem csak meggondolatlan vagyok, hanem el is fogok ázni.
9. Nem tanulom meg a logikát, amíg egy házi feladatot se oldottam meg önállóan.
10. Ha abból, hogy megállunk a talajon két lábbal, nem következik a gravitáció megléte, akkor vagy ragasztóba léptünk vagy mágnesen sétálunk, de acélbetétes bakancsban.