# ANALÍZIS II. Példatár

Többszörös integrálok

2009. március

# 2. fejezet

# Feladatok

## 2.1. Kettős integrálok

Számítsa ki az alábbi integrálokat:

**2.1.**

$$\int_1^2 \int_2^4 \frac{1}{(x+y)^2} dx\, dy$$

**2.2.**

$$\int_2^5 \int_1^3 (5x^2y - 2y^3)\; dy\, dx$$

**2.3.**

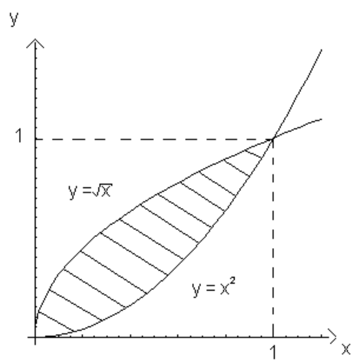
$$\int_0^\pi \int_0^{sinx} (x+y)\, dy\, dx$$

**2.4.**

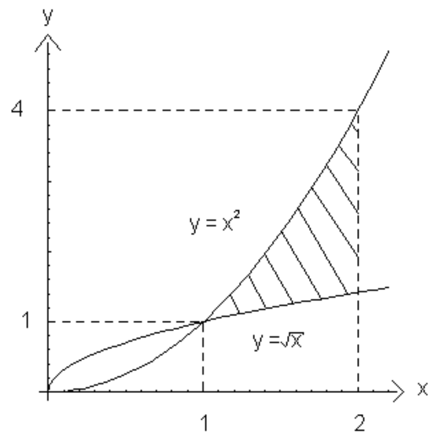
$$\int_0^1 \int_y^1 (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

Adja meg egyenlőtlenségekkel a következő ábrákon látható integrációs tartományokat!

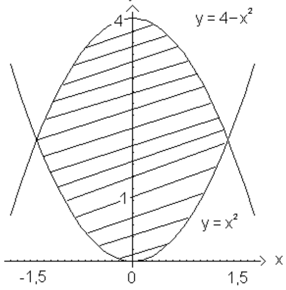
**2.5.** $D_5 = ?$



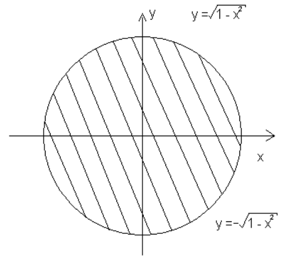

**2.6.** $D_6 = ?$



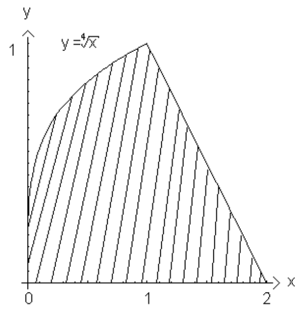

**2.7.** $D_7 = ?$



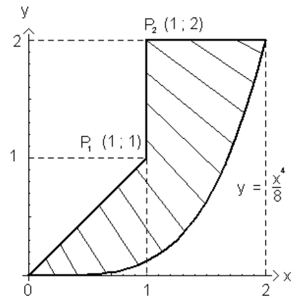

**2.8.** $D_8 = ?$



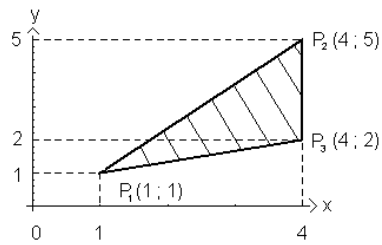
**2.9.** $D_9 = ?$



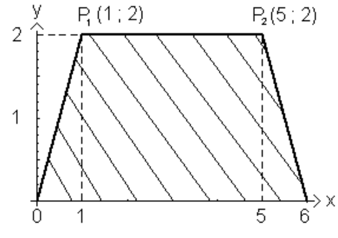

**2.10.** $D_{10} = ?$




**2.11.** Határozzuk meg az $f(x, y) = xy$ függvény integrálját az ábrán látható háromszög-tartományra

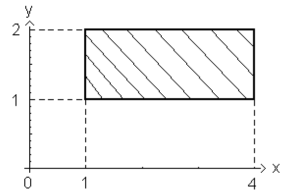



$\boxed{\textbf{2.12.}}$ Számítsuk ki az $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ függvény integrálját az ábrán látható trapéz alakú tartományon!

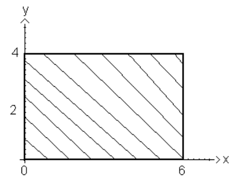



Számítsa ki az alábbi függvények kettős integrálját az ábrán megadott tartományokon!

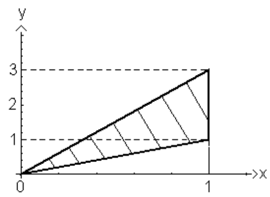
**2.13.** $f(x,y) = e^{x+y}$.



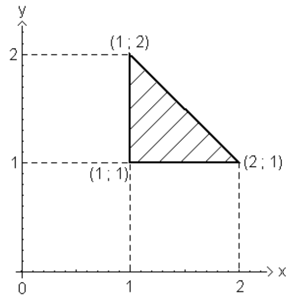

**2.14.** $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$.



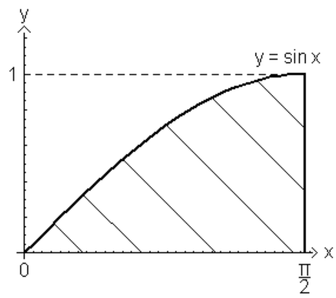

**2.15.** $f(x,y) = x^2 y$.



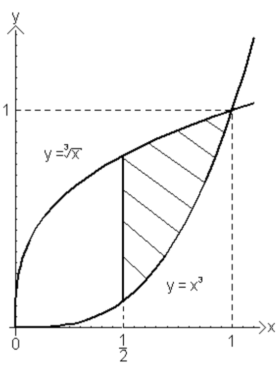

**2.16.** $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^3}$



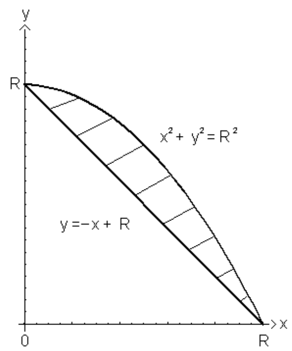

**2.17.** $f(x,y) = x + y$.



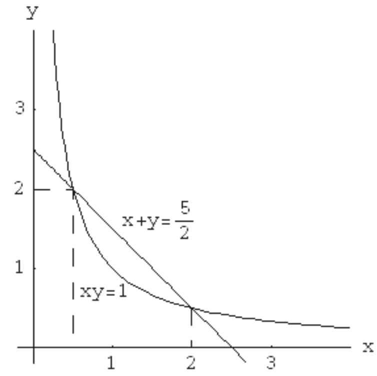

**2.18.** $f(x,y) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y}$



**2.19.** $f(x,y) = 2x^3y$.




**2.20.** $f(x,y) = xy$.




**2.21.** Határozza meg két egymásra merőleges R sugarú henger közös részének térfogatát! (A hengerek tengelyei egy síkban vannak! A kérdéses térfogat felét kapjuk ha az $x^2 + z^2 = R^2$ függvényt az $x^2 + y^2 = R^2$ kör-tartományon integráljuk.)

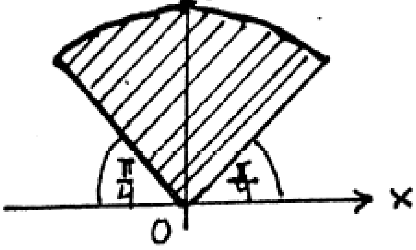
**2.22.** Számítsa ki az $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ hengerfelület, a $z = x + y + 6$ sík, és az $xy$ sík által határolt csonkahenger térfogatát!

**2.23.** Határozza meg a $z = x^2 - y^2$ felület, az $x = 1$ és a $z = 0$ síkok által meghatározott test térfogatát!

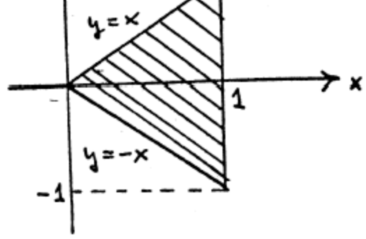
$\boxed{\textbf{2.24.}}$ Határozzuk meg az $R$ sugarú gömb térfogatát! A számolást polár-koordinátarendszerben végezzük!

Írja le polár-koordinátarendszerben egyenlőtlenségekkel az alábbi tartományok határait!

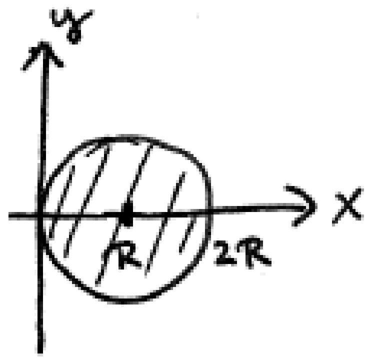
**2.25.** $D_{25} =?$



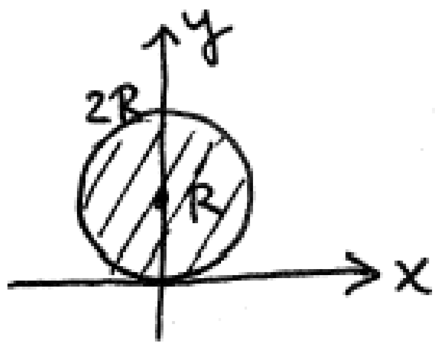

**2.26.** $D_{26} =?$



**2.27.** $D_{27} =?$




**2.28.** $D_{28} =?$




**2.29.** Számítsuk ki a következő integrált az első síknegyedben lévő egységsugarú negyedkör tartományra:

$$\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\, dT$$

**2.30.*** Tekintsük az alábbi feléletek által határolt testnek azt a darabját, amely az $x \geq 0$ és $z \geq 0$ térrészbe esik:

$z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid,

az $xy$ tengelysík és

az $x^2 + y^2 = 1$ hengerpalást

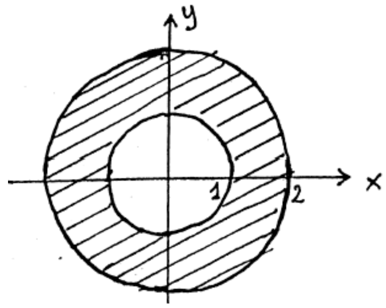
Mennyi ennek térfogata?

**2.31.** Határozza meg az

$$\iint_T (1 - x^2 - y^2)\, dT$$

integrál értékét az $x^2 + y^2 = 9$ körtartományon!

**2.32.** Számítsa ki az alábbi ábrán látható körgyűrű-tartományon az $\iint_T (x^2 + 2y^2) dT$ integrál értékét!




$\boxed{\textbf{2.33.}}$ Határozza meg

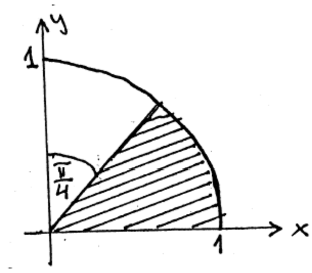
az $\dfrac{x^2}{4} + y = 1$ henger,

a $3x + 4y + z = 12$ sík és

az $xy$ tengelysík

által meghatározott test térfogatának mérőszámát!

**2.34.** Számítsa ki $\displaystyle\iint_T x^2 y \, dT$ értékét az ábrán látható tartományon!




**2.35.** Számítsa ki a $z = 1-4x^2-y^2$ felület és az $xy$ sík által meghatározott test térfogatát.

**2.36.** Határozza meg a $z = x^2 + y^2$ felület, a $z = 0$ sík és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ körhenger által határolt test térfogatát.

**2.37.** Mekkora a $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = 0$ sík és az $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ henger által határolt test térfogata?

**2.38.** Határozzuk meg a $2x = y^2 + 4z^2$ elliptikus paraboloid és az $x = 1$ sík által határolt test térfogatát!

## 2.2. Hármas integrálok

Számítsa ki az alábbi hármas integrálokat, integráljon más sorrendben is:

**2.39.**

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 (2x - 4y + 6z - 3) \, dz \, dy \, dx$$

**2.40.**

$$\int_1^3 \int_1^3 \int_1^3 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$$

**2.41.**

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} \, dz \, dy \, dx$$

**2.42.** Határozza meg a

$$\iiint_R (x - 2y + 4z)\, dR$$

hármas integrál értékét, ha az $R$ térrészt az $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ és $z = 0$ felületek határolják!

**2.43.** Számítsa ki az $x + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$ és $z = 0$ felületek által határolt $R$ térrészre a

$$\iiint_R x^2 + 2y + z^2\, dR$$

integrál értékét!

**2.44.** Mekkora

$$\iiint_R (e^{x+y+z})\, dR$$

értéke, ha $R$-t az $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$ és $z = x + y$ egyenletű felületek határolják?

**2.45.*** Mennyi a

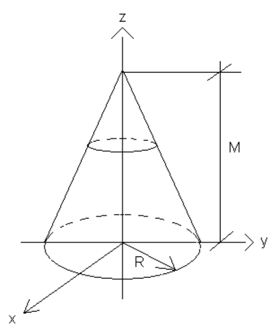
$$\iiint_R (x^2 + z^2)\, dR$$

integrál értéke ahol $R$ az $x^2 + y^2 = 4$ hengernek a $z = 0$ és $z = 8$ síkok közé eső része!

**2.46.*** Mennyi a

$$\iiint_R (x^2 + y^2)\, dR$$

integrál értéke, ha $R$ az ábrán látható $z$ tengelyű, $R$ alapsugarú egyenes körkúp?



**2.47.*** Számítsa ki a

$$\iiint\limits_R zyx^2\,dR$$

integrált az $x^2+y^2+z^2=1$ gömb $x \geqq 0$ nyolcadára!

Írja fel az alábbi hármas integrálokat az összes lehetséges sorrendben (még 5-féle képpen):

**2.48.**

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{x}}^1 \int\limits_0^{1-y} f\left(x,y,z\right)\,dz\,dy\,dx$$

**2.49.**

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x^2} \int\limits_0^{1-x} f\left(x,y,z\right)\,dy\,dz\,dx$$

**2.50.** Számítsa ki az alábbi hármas integrált:

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}\;d(x,y,z),$$

ahol $E$ az $y=x^2+z^2$ paraboloid $y=4$ -ig terjedő része.

## 2.3. Térfogat, tömeg, súlypont

**2.51.*** Számítsa ki az

$$x^2+y^2+z^2-4a^2=0$$

gömb és az

$$(x-a)^2+y^2-a^2=0$$

henger közös részének térfogatát (Viviani- féle test)!

**2.52.*** Határozza meg a $z=x^2-y^2$ felület $x \geqq 0$, $z \geqq 0$ része, a $z=0$ és az $x=1$ síkok által határolt homogén test súlypontjának helyzetét!

**2.53.** Számítsa ki a $z=y^2-x$, $x=2$ és $z=0$ egyenletű felületek által határolt homogén test súlypontjának koordinátáit!

$\boxed{\textbf{2.54.}}$ Számítsa ki a következő síkok által közrezárt test térfogatát:

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 2 \\ x &= 2y \\ x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{2.55.}}$ Határozza meg az $x^2 + y^2 = 12$ henger, a $3x + 4y + z = 12$ sík és a $z = 0$ sík által határolt test térfogatát.

$\boxed{\textbf{2.56.}}$ Határozza meg a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ henger azon részének térfogatát, mely a $z \geq 0$ féltérbe esik.

$\boxed{\textbf{2.57.}}$ Határozza meg a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ körgyűrű fölötti részének térfogatát.

$\boxed{\textbf{2.58.}}$ Határozza meg a $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ paraboloid és a $z = 4$ sík közti térfogatot.

# 2.4. Vonalintegrál

## 2.4.1. Valós függvény vonalintegrálja

**2.61.** Legyen a $\Gamma$ görbe az

$$x^2 + y^2 = 1$$

körvonal $x$ tengely fölötti része. Határozza meg az

$$\int_\Gamma (2 + x^2 y)\, ds$$

vonalintegrál értékét.

$\boxed{\textbf{2.62.}}$ Tekintsünk egy fékör alakú drótot, melyet az

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad y \geq 0$$

feltételek határoznak meg.
Tegyük fel, hogy a drót sűrűsége $y$-ban lineárisan változik - a csúcsban a legnagyobb.
Mekkora a drót tömege?

## 2.4.2. Vektormező vonalintegrálja

**2.63.** Határozza meg az

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját a

$$3y - 2x = 1$$

egyenes $0 \leq x \leq 1$ közötti darabja mentén. Az irányítás 0-ból 1-be vezet.

**2.64.** Határozza meg az

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x - y \\ xy \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját az alábbi görbe mentén:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t - 5 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

$\boxed{\textbf{2.65.}}$ Határozza meg az alábbi vektormező

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

vonalintegrálját a $\Gamma$ görbe mentén, ahol

$$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ 0 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

**2.66.** Integrálja az

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y^2 \end{pmatrix}$$

vektormezőt azon $\Gamma$ görbe mentén, melynek koordinátafüggvényei

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin(t), \qquad 0 \le t \le \pi/2.$$

**2.67.** Határozza meg az alábbi vektormező

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

vonalintegrálját a $\Gamma$ görbe mentén, ahol

$$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ 0 \le t \le 1\}, \quad \gamma(t) = (t^2, t, \frac{1}{t}).$$

**2.68.*** Számítsa ki az

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját $\Gamma$ mentén.

a)

$$\Gamma = \{\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t-5 \end{pmatrix} \ : \ 0 \le t \le 3\}.$$

b) $\Gamma$ a $P_1(-1,2,0)$ és $P_2(5,5,9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás $P_1$-ből $P_2$-be vezet.

Potenciálos-e a vektromező?

$\boxed{\textbf{2.69.}}$ Számítsa ki az

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját a $P(1,2,3)$ pontot az origóval összekotő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból $P$-be vezet.

# 3. fejezet

# Megoldások

## 2.1. Kettős integrálok

**2.1.** $I = \ln(10/9) = 0.1054$.

**2.2.** $I = 660$.

**2.3.** $I = (5\pi)/4 = 3.927$.

**2.4.** $I = 1/3$.

**2.5.** $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

**2.6.** $1 \leq x \leq 2$, $\sqrt{x} \leq y \leq x^2$.

**2.7.** $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, $x^2 \leq y \leq 4 - x^2$.

**2.8.** $-1 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.

**2.9.** *1. megoldás:* A tartomány két részre bontható: $D_9 = D_9' \cup D_9$", ahol

$$D_9' : \qquad 0 \leq x \leq 10 \qquad \leq y \leq \sqrt[4]{x},$$

és

$$D_9" :, \qquad 1 \leq x \leq 2, \qquad 0 \leq y \leq 2 - x.$$

*2. megoldás:* $0 \leq y \leq 1, \qquad y^4 \leq x \leq 2 - y.$

**2.10.** A tartomány két részre bontandó: $D_{10} = D_{10}' \cup D_{10}$", ahol

$$D_{10}' : \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad \frac{x^4}{8} \leq y \leq x$$

és

$$D_{10}" : \qquad 1 \leq x \leq 2, \qquad \frac{x^4}{8} \leq y \leq 2.$$

**2.11.** Az integrálási tartomány határai:

$$1 \leq x \leq 4, \qquad \frac{1}{3}(x+2) \leq y \leq \frac{1}{3}(4x-1),$$

és így $I = 37,875$.

**2.12.** Az integrálási tartomány

$$0 \leq y \leq 2, \qquad \frac{y}{2} \leq x \leq 6 - \frac{y}{2}.$$

Az integrál értéke $I = 19.34$.

**2.13.** $I = e^6 - e^5 - e^3 + e^2 = 242.32$.

**2.14.** $I = 1504$.

**2.15.** $I = 4/5$.

**2.16.** $I = 1/36$.

**2.17.** $I = 1 + \pi/8$.

**2.18.** $I = 3.027$.

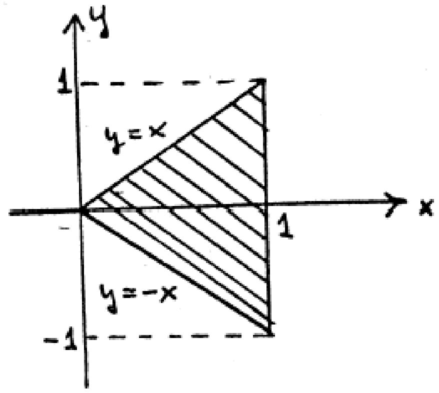
**2.19.** $I = \dfrac{1}{15}R^6$

**2.20.** $I = \dfrac{165}{128} - \ln 2$.

**2.21.** $I = \dfrac{16}{3}R^3$.

**2.22.** *Útmutató:* A térfogatot megkapjuk ha az $f(x, y) = x+y+6$ függvényt az $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} = 1$ ellipszis tartományon integráljuk.
$I = 36\pi$.

**2.23.** *Útmutató:* A $z = 0$ sík - vagyis az $xy$ sík - ezt a felületet az $x^2 - y^2 = 0$ egyenes-párban metszi. Mivel $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, kapjuk az $y = \pm x$ egyeneseket. Az integrációs tartomány tehát az ábrán látható.




$I = \dfrac{1}{3}$.

**2.24.** Polárkoordinátákat használunk. Ekkor $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ és $d(x, y) = r\,d(r, \theta)$. Ha az

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

függvényt a $0 \le r \le R$ és $0 \le \theta \le 2\pi$ határok között integráljuk, a gömb térfogatának felét kapjuk.

**2.25.** $0 \le r \le 3$, $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}$.

**2.26.** $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$.

**2.27.** $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R\cos\theta$.

**2.28.** $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le r \le \sin\theta$.

**2.29.** $I = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0,6506$.

**2.30.** A kiszámítandó térfogat negyedrészét kapjuk ha - polárkoordinátákra áttérve - a

$$0 \le r \le 1, \quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

határok között integrálunk. $I = 1/4$.

**2.31.** $I = -31,5\pi = -98,96$.

**2.32.** $I = \frac{45}{4}\pi = 35,34$.

**2.33.** *Útmutató:* Integrálja az $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$ függvényt az $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tartományon!

Helyettesítünk

$$x = 2r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Ekkor $d(x, y) = 2rd(r, \theta)$. Az integrálási határok

$$0 \le r \le 1 \qquad \text{és} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

$I = 24\pi$.

**2.34.** $I = \frac{4 - \sqrt{2}}{60} = 0,043$.

**2.35.** $I = \frac{\pi}{4} = 0,7854$.

**2.36.** Polárkoordinátákban az integrálási határok:

$$0 \le r \le 4\cos\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Az integrál értéke $I = 24\pi$.

**2.37.** $I = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9} = 0,6819$.

**2.38.** $I = \frac{\pi}{2}$.

## 2.2. Hármas integrálok

**2.39.** 36.

**2.40.** 48.

**2.41.** $I = \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{5}{8}) = 0.0341.$

**2.42.** $I = \frac{1}{8}.$

**2.43.** $I = \frac{40}{3}.$

**2.44.** $I = \frac{1}{8}(e^4 - 6e^2 + 8e - 3).$

**2.45.** Az integrált henger-koordinátákban számoljuk ki. A helyettesítés:

$$x = r\ \cos\theta, \quad y = r\ \sin\theta, \quad z = z,$$

és

$$dydydz = rdrd\theta dz.$$

Az integrálás határai:

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 8.$$

Az integrál értéke:

$$I = \frac{2144}{3}\pi = 2254.19.$$

**2.46.** A kúp egyenlete:

$$\frac{z}{M} = 1 - \sqrt{\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}}.$$

Hengerkoordinátákkal kifejezve:

$$z = M\left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}}\right) = M\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Az integrálás határai:

$$0 \leq z \leq M\left(1 - \frac{r}{R}\right); \quad 0 \leq r \leq R; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Az integrál értéke:

$$I = \frac{MR^4\pi}{10}$$

**2.48.** Az integrált gömbkoordináták bevezetésével lehet egyszerűen kiszámítani. A helyettesítés:

$$x = r\cos\theta\sin\vartheta, \quad y = r\sin\theta\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta,$$

valamint

$$dxdydz = r^2\sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\theta.$$

Az integrálás határai:

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

Az integrál értéke:

$$I = \frac{1}{105}.$$

**2.49.** *Útmutató:* Határozza meg az integrálási tartományt és írja fel különböző normáltarományként.

**2.52.** *Útmutató:* Határozza meg az integrálási tartományt és írja fel különböző normáltarományként.

**2.50.** 1.megoldás: ($z$ szerinti normáltartományként)

Az $(x, y)$ síkbeli vetületet jelölje $S$. Ez megegyezik azzal a metszettel, ahol $z \equiv 0$. Tehát

$$S = \big\{(x, y) : -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4\big\}$$

így $R$ normáltartomány:

$$R = \Big\{(x, y, z) :\ (x, y) \in S,\ -\sqrt{y - x^2} \le z \le \sqrt{y - x^2}\Big\}$$

ekkor az integrál

$$\iiint\limits_R \sqrt{x^2 + z^2}\ d(x, y, z) = \iint\limits_S \left( \int\limits_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz \right) d(x, y)$$

Ennek kiszámítása igen hosszadalmas lenne.

2.megoldás: ($y$ szerinti normáltartományként)

Az $(x, z)$ síkbeli vetületet jelölje $T$:

$$T = \{(x, z) :\ x^2 + z^2 \le 4\}.$$

Ezért

$$R = \big\{(x, y, z) :\ (x, y) \in T,\ x^2 + z^2 \le y \le 4\big\}.$$

Tehát az integrál:

$$I = \iint\limits_{T} \left( \int\limits_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}dy \right) d(x,z) = \iint\limits_{T} \left(4 - x^2 - z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}\; d(x,z)$$

Ezt úgy számolhatjuk ki, ha az $(x, z)$ síkban áttérünk polárkoordinátákra:

$$I = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right) r^2 d\theta dr = \frac{128\pi}{15}$$

ahol a jobboldali $r^2$-et a Jacobi-determináns $r$-jével való szorzás miatt kapunk

## 2.3. Térfogat, tömeg, súlypont

**2.51.** Az integrálandó függvény a felső félgömbre szorítkozva.

$$z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

Az integrációs tartomány az $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ kör. Polárkoordináták bevezetése után az integrálás határai:

$$0 \le r \le 2a\ \cos\theta \text{ és } -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Az itegrál értéke:

$$V = \frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

**2.52.** Homogén test súlypontjának koordinátáit az alábbi összefüggések segítségével számíthatjuk:

$$S_x = \frac{1}{V}\iiint\limits_R x\, dR, \quad S_y = \frac{1}{V}\iiint\limits_R y\, dR, \quad S_z = \frac{1}{V}\iiint\limits_R z\, dR,$$

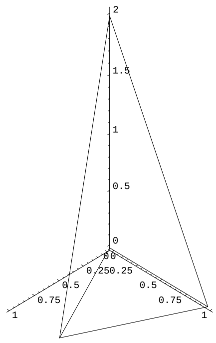
ahol $V$ a test térfogata.

Az integrálás határait ld. a 2.23. feladatnál. A súlypont koordinátái:

$$S\left(\frac{4}{5}; 0; \frac{4}{15}\right).$$

**2.53.**

$$S\left(\frac{10}{7}; 0; -\frac{4}{7}\right).$$

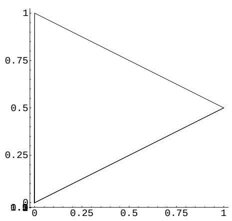



$\boxed{\textbf{2.54.}}$ Legyen $S \in R^3$ a megadott síkok által közrezárt térrész.

Legyen $R \in R^2$ ennek vetülete az $(x, y)$ síkon. Az (1) és (4) síkok metszete az $(x, y)$ síkban:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 2 \\ z & = & 0 \\ \hline x + 2y & = & 0 \end{array}$$

Az (1) sík a $z$ tengelyt a $z = 2$ pontban metszi. Az $x = 2y$ sík merőleges az $(x, y)$ síkra, így $R$:




A fenti ábrán $(S)$ felülnézete látható, ahol a felső függvény $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x$, az alsó $g(x) = \frac{1}{2}x$.

Tehát a keresett térfogat:

$$\iint\limits_R (2 - x - 2y)\, d(x, y) = \int\limits_0^1 \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y)\, dy dx = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\textbf{2.55.}}$ A következő integrált nézzük:

$$\int\int\limits_R \int\limits_0^{12-3x-4y} 1\, dz\, d(x, y) = \int\int\limits_R (12 - 3x - 4y)\, d(x, y)$$

Írjuk át polárkoordinátákra:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{12}} \left(12 - 3r\cos\theta - 4r\sin\theta\right) r dr d\theta = 144\pi$$

$\boxed{\textbf{2.56.}}$ Polárkoordinátákban számolunk:

$$\iint_R \int_0^{x^2+y^2} 1\, dz d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} \left((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right) r\, dr d\theta = \frac{81}{2}\pi$$

$\boxed{\textbf{2.57.}}$ A nagyobbik sugarú kör vetületéből kivonjuk a kisebbiket, így kapjuk meg a körgyűrűt. Átírva polárkoordinátákba:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{5} \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} r\, dr d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} r\, dr d\theta =$$

$$= 78\pi$$

$\boxed{\textbf{2.58.}}$ Átírjuk polár koordinátákba, és a $4 = 10 - 3x^2 - 3y^2$ kör intervallumán tekintjük: $-6 = -3x^2 - 3y^2$ azaz $x^2 + y^2 = 2$

$$\iint_R \int_4^{10-3x^2-3y^2} 1\, dz\, d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left(6 - 3\,(r\cos\theta)^2 - 3\,(r\sin\theta)^2\right) r\, dr d\theta = 6\pi$$

# 2.4. Vonalintegrál

## 2.4.1. Valós függvény vonalintegrálja

**2.61.** $I = 2(\pi - \frac{1}{3})$.

$\boxed{\textbf{2.62.}}$ Adjuk meg a görbét paraméteresen:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

A sűrűségfüggvény:

$$\rho(x, y) = k(1 - y),$$

ahol $k$ az arányossági konstans.

Így a tömeg:

$$m = \int_\Gamma k(1 - y)\, ds = \int_0^\pi k(1 - \sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt =$$

$$= k\pi + k\cos t\Big|_0^\pi = k(\pi - 2).$$

## 2.4.2. Vektormező vonalintegrálja

**2.63.** $\frac{74}{81}$.

**2.64.** 32.

$\boxed{\textbf{2.65.}}$ Behelyettesítve a paraméterezett görbe egyenletét a vektromező koordinátáiba:

$$F(\underline{r}) = \begin{pmatrix} tt^2 \\ t^2 t^3 \\ tt^3 \end{pmatrix}.$$

A görbe $t$ szerint deriváltja:

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t, 3t^2).$$

Így a vonalintegrál:

$$\int_\Gamma F(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^1 \left\langle (t^3, t^5, t^4), (1, 2t, 3t^4) \right\rangle dt = \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \frac{27}{28}.$$

**2.66.** $-\frac{a^3 + b^3}{3}$.

**2.67.** $\frac{1}{2}$.

**2.68.*** a) 225

b) 225

A vektromező potenciálos.

$\boxed{\textbf{2.69.}}$ *1. Megoldás.* Az egyenes szakasz egy lehetséges paraméterezése, és annak deriváltja

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A vektorrmező a görbe mentén

$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 36t^5 \\ 12t^5 \\ 4t^5 \end{pmatrix},$$

ezért

$$F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 72t^5.$$

A vonalintegrál értéke

$$\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} = \int_0^1 72t^5 dt = 12.$$

*2. Megoldás.* Legyen $U(x,y,z) = x^3y^2z$. Ekkor

$$F(x,y,z) = \text{grad}\, U(x,y,z).$$

Így

$$\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} = U(P) - U(0) = 12.$$

.