Gyakorló feladatok <u>végtelen számsorok</u> témakörből

1.) Számolja ki az alábbi végtelen sorok összegét!

a.) $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ $\quad (\text{Konvergens, } S = 20)$

b.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{2}$ $\quad (\text{Divergens, nincs összege.})$

c.) $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$ $\quad \left(\text{Konvergens, } S = \frac{5}{3}\right)$

d.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{2^{k-3}}$ $\quad (\text{Divergens, nincs összege.})$

e.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)\cdot(k+3)}$ $\quad \left(\text{Konvergens, } S = \frac{5}{6}\right)$

f.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k}$ $\quad \left(\text{Konvergens, } S = \frac{11}{18}\right)$

2.) Vizsgálja meg az alábbi végtelen sorokat konvergencia szempontjából a **hányadoskritérium** alkalmazásával!

a.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2+5}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2 > 1 \Rightarrow \text{ a sor divergens.}\right)$

b.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-1}{k^2}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow \text{ a hányadoskritériummal nem dönthető el a kérdés.}\right)$

c.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6k+5}}{3^k}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{ a sor konvergens.}\right)$

d.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3k+8}}{k^2}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow \text{ a hányadoskritériummal nem dönthető el a kérdés.}\right)$

e.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty \Rightarrow \text{ a sor divergens.}\right)$

f.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k^k}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1 \Rightarrow \text{ a sor konvergens.}\right)$

3.) Vizsgálja meg az alábbi végtelen sorokat konvergencia szempontjából a **gyökkritérium** alkalmazásával!

a.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+4}{6^k}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{6} < 1 \Rightarrow \text{ a sor konvergens.}\right)$

b.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+1}}{5^k}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \text{ a sor divergens.}\right)$

c.) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+9}{3k+5}\right)^{2k}$ $\quad \left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{16}{9} > 1 \Rightarrow \text{ a sor divergens.}\right)$

d.) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k+1}{4k+5}\right)^{k}$ $\left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1\Rightarrow \text{a gyökkritériummal nem dönthető el a kérdés.}\right)$

e.) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k+7}{3k+1}\right)^{k^2}$ $\left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=e^2>1\Rightarrow \text{ a sor divergens.}\right)$

f.) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^{k+3}$ $\left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{2}{3}<1\Rightarrow \text{ a sor konvergens.}\right)$

g.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5k+2}{k^2}$ $\left(\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1\Rightarrow \text{a gyökkritériummal nem dönthető el a kérdés.}\right)$

4.) Vizsgálja meg az alábbi végtelen sorokat konvergencia szempontjából az **összehasonlító kritériumok** alkalmazásával!

a.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+3}{k^3+4k}$ $\left(\text{A }\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\text{ sor majoráló sora}\Rightarrow\text{a sor konvergens.}\right)$

b.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k^3+k+3}$ $\left(\text{A }\sum_{k=1}^{\infty}3\cdot\frac{1}{k^2}\text{ sor majoráló sora}\Rightarrow\text{a sor konvergens.}\right)$

c.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+4}{k^2+3k}$ $\left(\text{A }\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\text{ minoráló sora}\Rightarrow\text{a sor divergens.}\right)$

d.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+3^k}{2^k+4}$ $\left(\text{A }\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k}\text{ minoráló sora}\Rightarrow\text{a sor divergens.}\right)$