Kvadratikus alakok

A $Q(x) = B(x,x): V \to R$ függvényt az B bilineáris függvényhez tartozó kvadratikus alaknak nevezzük. Minden kvadratikus alak megadható a következő formában:

$$Q = x^T Ax,$$

ahol A szimmetrikus mátrix, és Q a kvadratikus alak.

Mivel A szimmetrikus, ezért a különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok **merőlegesek** egymásra, az elfajult sajátértékek esetén pedig a sajátaltérben **választható egymásra merőleges sajátvektorokból álló bázis.** Tehát létezik A-nak **ortogonális sajátvektorokból álló bázisa**, és ezzel együtt létezik **ortonormált vektorokból álló bázisa** is.

Ezért A ortogonális transzformációval diagonalizálható, vagyis létezik olyan S **ortogonális** transzformáció, hogy $D = S^{-1}AS$, ahol D diagonális. Ezt a transzformációt hívják **főtengelytranszformáció**nak.

A diagonalizálásnál tanult módon, a D diagonális mátrix főátlójában a sajátértékek állnak, az S ortogonális áttérési mátrixban pedig a **ortonormált** sajátvektorok.

Az S mátrix ortogonalitása miatt

Kvadratikus alakok osztályozása: $S^{-1} = S^T$

Pozitív definit: ha minden x≠0 vektor esetén Q>0 és Q pontosan akkor nulla, ha x=0.
Pozitív szemidefinit: ha tetszőleges x vektorra Q≥0, de van olyan x≠0 vektor, amelyre Q=0.
Negatív definit: ha minden x≠0 vektor esetén Q<0 és Q pontosan akkor nulla, ha x=0.
Negatív szemidefinit: ha tetszőleges x vektorra Q≤0, de van olyan x≠0 vektor, amelyre Q=0.

Indefinit: ha Q pozitív és negatív értéket is felvesz.
Hogy lehet egy kvadratikus alakról eldönteni, hogy melyik típusba tartozik? Pl. úgy, hogy diagonális alakra hozzuk. A főátló elemeinek, tehát a sajátértékeknek az előjele pont a fent megadott szabályokat követi az egyes esetekben, tehát pl. pozitív szemidefinit esetben csak pozitív és nulla elemek lehetnek benne, negatívak nem, és így tovább.

1. Írjuk fel az alábbi mátrixhoz tartozó kvadratikus alakot és döntsük el, milyen tulajdonságú! Írjuk fel a kvadratikus alakot az új bázisban! Számítsuk ki az áttérést leíró mátrixot is!

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$$

$D = \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-2\sqrt{2} \end{bmatrix}$, vagyis a két sajátérték egyike pozitív a másik negatív, azaz indefinit.

Az új bázisban: $Q = (1+2\sqrt{2})y_1^2 + (1-2\sqrt{2})y_2^2$, azaz tisztán négyzetes tagokat tartalmaz.
A sajátvektorok a fenti sajátértékekhez rendre:

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})t \\ t \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})r \\ r \end{bmatrix}, \quad t, r \in R - \{0\}.$$

A transzformációs mátrix ortogonális ezért az áttérési mátrix felírásakor a sajátvektorokat még normálni kell!!

2. Ugyanaz a feladat, csak most a kvadratikus alak adott: $Q = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$.

A mátrix: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, azaz negatív definit. Az új alak: $Q = -y_1^2 - 3y_2^2$.

A normált sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\underline{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, a trafó mátrixa tehát: $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$, ami valóban ortogonális. Ellenőrizzük, hogy ezzel a transzformációval tényleg az új kvadratikus alakot kapjuk!

3. $Q = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_xx_3$. Mi ennek a mátrixa, milyen tulajdonságú, hozza diagonális alakra! Melyek az új bázisvektorok?

$$A = \begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\-2 & -1 & 4\\2 & 4 & -1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad D = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{ indefinit, sajátértékek: 3, -6}$$

Az új alak: $Q = 3y_1^2 + 3y_2^2 - 6y_3^2$. A **3** elfajult sajátérték, egy 2D altér tartozik hozzá:

$$\underline{s}_{1,2} = \begin{bmatrix}2s-2t\\t\\s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2s\\0\\s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2t\\t\\0\end{bmatrix}, \quad s,t \in R - \{0\},\ \underline{s}_3 = \begin{bmatrix}-r\\-2r\\2r\end{bmatrix}, \quad r \in R - \{0\}.$$

Például: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}$.

Ezekkel az a gond, hogy bár a harmadik merőleges az első kettőre (mert különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek), de az első kettő (a 3 sajátértékhez tartozó sajátvektorok) nem merőleges egymásra. Tegyük azzá őket, erre használható például a **Gram-Schmidt ortogonalizáció**!

Adott két független vektor a 3 sajátértékhez tartozó sajátaltérben: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$,

Merőlegesek keresése Gram-Schmidtel: $\underline{v}_1 = \underline{s}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\underline{v}_2 = \underline{s}_2 - \frac{\langle \underline{s}_2, \underline{v}_1\rangle}{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1\rangle}\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/5\\1\\4/5\end{pmatrix}$$ → Helyette használjuk a vele párhuzamos: $\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}$

Tehát ezután a három ortogonális sajátvektor: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix}-2\\5\\4\end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}$

Normálás után a kapott **sajátvektorokból álló ortonormált bázis:**

$$\underline{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}-2\\5\\4\end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\end{bmatrix}$$

Az ortogonális áttérési mátrix: $S = \begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} & -1/3\\0 & 5/\sqrt{45} & -2/3\\1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & 2/3\end{bmatrix}$

5. Milyen alakzatot határoz meg ez az egyenlet: $27x^2 - 18xy + 3y^2 = 3$?

$$A = \begin{bmatrix} 27 & -9 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ pozitív szemidefinit

A sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -3r \\ r \end{bmatrix} \quad t, r \in R - \{0\} \quad \Rightarrow \quad pl.\, \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ezek a sajátvektorok jelölik ki az új tengelyirányokat, amely meghatározza az új alakot:

$$0x'^2 + 30y'^2 = 30y'^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y'^2 = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad |y'| = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát az új koordinátarendszerben az adott ponthalmaz egy x' tengellyel párhuzamos egyenespár az origótól fölfelé és lefelé $\frac{1}{\sqrt{10}}$ távolságra. Ez egy elfajult másodrendű görbe. Ha az első sajátérték pozitív volna, akkor ellipszist, ha negatív, akkor hiperbolát kaptunk volna.

Rajzoljuk fel az alakzatot a régi és új koordinátarendszerben!

6. Milyen alakzatot határoz meg ez az egyenlet: $13x^2 - 10xy + 13y^2 = 25$?

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ pozitív definit

A sajátvektorok: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -r \\ r \end{bmatrix} \quad t, r \in R - \{0\} \quad \Rightarrow \quad pl.\, \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ezek jelölik ki az új tengelyirányokat, amely meghatározza az új alakot:

$8x'^2 + 18y'^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'^2}{\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)^2} = 1$. Ez egy ellipszis, amely az x' tengelyt az $x' = \pm\frac{5}{2\sqrt{2}}$ pontokban, az y' tengelyt pedig az $y' = \pm\frac{5}{3\sqrt{2}}$ pontokban metszi.

Rajzoljuk fel az alakzatot a régi és új koordinátarendszerben!

7. Milyen alakzatot határoz meg ez az egyenlet: $-4x^2 + 2xy - y^2 = 1$? Mi történik, ha az egyenlet jobb oldalán álló 1-est -1-esre cseréljük?

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} \frac{-5+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ **negatív definit!**

Az új bázisban a kvadratikus alak: $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}x'^2 + \frac{-5-\sqrt{13}}{2}y'^2 = 1$ ebben az esetben nincs megoldás, de ha 1 helyett -1 –et írunk akkor már van megoldás:

$\frac{-5+\sqrt{13}}{2}x'^2 + \frac{-5-\sqrt{13}}{2}y'^2 = -1$ átalakítva: $\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{13}}}\right)^2}x'^2 + \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{13}}}\right)^2}y'^2 = 1$, amely egy ellipszis egyenlete.

Határozzuk meg az új koordinátarenszer tengelyirányait, és ábrázoljuk az ellipszist a régi koordinátarendszerben!

Megoldás: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} r \\ \dfrac{2r}{\sqrt{13}-3} \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} t \\ -\dfrac{2t}{\sqrt{13}+3} \end{bmatrix}, \quad t, r \in R - \{0\}$.

8. Milyen alakzatot határoz meg ez az egyenlet: $x_1 x_2 + x_2 x_3 = \sqrt{2}$?

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{indefinit}$$

Az új egyenlet:

$\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} y_2^2 - \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} y_3^2 = 1$, ez egy hiperbola egyenlete. De mivel ezt úgy kaptuk, hogy a 3D térben egy koordinátatengely eltűnt (mert az egyik sajátérték 0!), ez valójában egy 2D felületet határoz meg a térben, amely az y_1 tengely mentén eltolási szimmetriával bír (vagyis amelynek keresztmetszete a fenti hiperbola). Az alakzat tehát egy **hiperbola keresztmetszetű görbe síkfelület (hiperbolikus henger)**.

Határozzuk meg az új tengelyirányokat! A sajátvektorok a fenti sajátértékekhez rendre:

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} s \\ \sqrt{2}s \\ s \end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} t \\ -\sqrt{2}t \\ t \end{bmatrix} \quad r, s, t \in R - \{0\}.$$

Határozzuk meg a főtengelytranszformációt elvégző mátrixot és lássuk be, hogy a kvadratikus alak valóban a fenti átalakuláson megy át, amikor áttérünk az új koordinátarendszerre!

9. Milyen alakzatot határoz meg ez az egyenlet: $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 1$?

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{indefinit}$$

A második sajátérték elfajult, tehát egy 2D sajátaltér tartozik hozzá. Az új egyenlet:

$y_1^2 - \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} y_2^2 - \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} y_3^2 = 1$, s ez egy kör keresztmetszetű kétköpenyű hiperboloid egyenlete.

Az új tengelyirányokat kijelölő sajátvektorok:

$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} r \\ r \\ r \end{bmatrix}, \underline{s}_{2,3} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} \quad r, s, t \in R - \{0\}$, itt a második két vektor feszíti ki a 2D sajátalteret.

A sajátvektorok tehát: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$. ahol a második két vektor még nem merőleges.

Ortogonalizáció után a merőleges sajátvektorok (még normálni kell!): $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

10. Az alábbi kvadratikus egyenletek milyen alakzatot határoznak meg? Ábrázold az alakzatot az új és a régi koordináta rendszerben is! Definitség szempontjából milyen kvadratikus alakok ezek? Írd fel az ortogonális áttérési mátrixokat és ellenőrizd le, hogy tényleg a diagonális alakot adja a főtengelytranszformáció!

a, $Q = 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 3$

b, $Q = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 135x_2^2 = 4$

c, $Q = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 1$

d, $Q = -5x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2 = 1$

e, $Q = 9x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 = 1$

f, $Q = -6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3 = 1$

g, $Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 2$

11. a, Adja meg az alábbi kvadratikus alakokhoz tartozó mátrixokat!

a, $Q = 3x^2 + 2y^2 - z^2 - 12xy + 4xz - 6yz$ b, $Q = x^2 + 7y^2 - 3z^2 - 5xy + 2xz - 10yz$

b, Adja meg az alábbi mátrixokhoz tartozó kvadratikus alakokat!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

12. A főtengelytranszformáció alapján diagonalizálja az alábbi szimmetrikus mátrixokat! Írja fel a diagonalizáláshoz szükséges ortogonális áttérési mátrixokat!

a, $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, c, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

d, $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e, $\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ f, $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Gyakran előforduló alakzatok:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b>0$: **ellipszis**, ha a=b, akkor **kör**. Elfajult esetben (ha a vagy b végtelen, akkor két párhuzamos egyenest kapunk.)

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b>0$: **hiperbola.** Ha b végtelen, akkor két párhuzamos egyenes.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0$: **ellipszoid**, ha a=b=c, akkor **gömb**. Elfajult esetben, ha egy vagy két paraméter végtelen, akkor vagy ellipszis keresztmetszetű hengert, vagy két, adott távolságú síkot kapunk.

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0$: **egyköpenyű hiperboloid.** Elfajult esetekben ellipszis keresztmetszetű hengert, hiperbola keresztmetszetű görbe felületet (hiperbolikus hengert), vagy adott távolságú síkpárt kaphatunk.

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0$: **kétköpenyű hiperboloid**. Elfajult esetekben hiperbola keresztmetszetű görbe felületet (hiperbolikus hengert) vagy adott távolságú síkpárt kaphatunk.

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad a,b,c>0$: **ellipszis keresztmetszetű kúp**. Elfajult esetei: ellipszis keresztmetszetű henger, hiperbola keresztmetszetű görbe felület (hiperbolikus henger), adott távolságú síkpár.