

2. Parciális deriválás

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeit!

$$12. f(x, y) = x$$

$$20. f(x, y) = xy \ln(x + y)$$

$$13. f(x, y) = x^2 y$$

$$21. f(x, y) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{y}}$$

$$14. f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$$

$$22. f(x, y) = 2^{-\frac{x}{y}}$$

$$15. f(x, y) = (x^3 - 2x^2 y + y^2)^7$$

$$23. f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy - 1}{y^2 + 3xy - 1}$$

$$16. f(x, y) = \sqrt{x^2 y^2 - 1}$$

$$24. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2 y^2}$$

$$17. f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$25. f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

$$18. f(x, y) = x e^{-\sqrt{2x-y}}$$

$$26. f(x, y) = \frac{x \arcsin y}{y \arccos x}$$

$$19. f(x, y) = xy \cos x^2 y^2$$

$$27. f(x, y) = x^y$$

Számítsuk ki az alábbi függvények első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit!

$$28. f(x, y) = x^3 - 3x^2 y + xy^2 + y^3$$

$$31. f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$29. f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$32. f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x-y}$$

$$30. f(x, y) = \sin x \cos y$$

$$33. f(x, y) = e^{-x-y}$$

Parciális derivált

I. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$. Az f függvény x szerinti vagy első változó szerinti parciális deriváltja létezik (a, b) -ben, ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_1 f(a, b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ vagy $f'_x(a, b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a, b) pont 2. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $x \mapsto f(x, b)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a -ban.

II. Az f függvény y szerinti vagy második változó szerinti parciális deriváltja létezik (a, b) -ben, ha

$$\exists \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_2 f(a, b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ vagy $f'_y(a, b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a, b) pont 1. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $y \mapsto f(a, y)$ egyváltozós függvényt deriváljuk b -ben.

III. Az f függvény első ill. második parciális deriváltfüggvénye $D_1 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ill. $D_2 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(D_1 f) = \{(x, y) \in \text{int } \mathcal{D}(f) : \exists D_1 f(x, y)\}, \quad (D_1 f)(x, y) := D_1 f(x, y)$$

$$\mathcal{D}(D_2 f) = \{(x, y) \in \text{int } \mathcal{D}(f) : \exists D_2 f(x, y)\}, \quad (D_2 f)(x, y) := D_2 f(x, y)$$

IV. Az f másodrendű parciális deriváltjait az első ill. második parciális deriváltfüggvények további parciális deriváltjaiból nyerjük:

$$D_{11} f := D_1(D_1 f), \quad D_{12} f := D_1(D_2 f), \quad D_{21} f := D_2(D_1 f), \quad D_{22} f := D_2(D_2 f)$$

3. Differenciálhatóság

(Ismétlés) Számítsuk ki az alábbi határértékeket (ha léteznek)!

$$34. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$36. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$38. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

$$35. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

$$37. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$39. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Differenciálhatók-e a $(0,0)$ -ban a következő függvények?

$$40. f(x, y) = xy$$

$$43. f(x, y) = x^2 y^2$$

$$46. f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

$$41. f(x, y) = \sqrt{xy}$$

$$44. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$47. f(x, y) = \sqrt{x^6 + y^6}$$

$$42. f(x, y) = x^2 y$$

$$45. f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$48. f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$$

Differenciálhatók-e a következő függvények az értelmezési tartományukon?

$$49. f(x, y) = e^{\cos(x^2 + y^3)}$$

$$50. f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$51. f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Határozzuk meg az alábbi iránymenti deriváltakat!

$$52. f(x, y) = (x - y)^2, v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), D_v f(0, 0) = ?$$

$$53. f(x, y) = x^2 + y^2, v = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}), D_v f(3, 1) = ?$$

54. Mely irány mentén 0 az $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y$ függvény deriváltja a $(2, 0)$ pontban? Mely irány mentén maximális?

$$55. f(x, y) = \frac{25x^2 y}{x^2 + y^3}, v \text{ az } x + 3y = 5 \text{ egyenes irányvektora, } D_v f(2, 1) = ?$$

Írjuk fel az alábbi függvények érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban!

$$56. f(x, y) = 4x^2 - 16x + y^2 + 6y + 18, P = (2, 1)$$

$$57. f(x, y) = x^2 y + y^2 + 2y, P = (3, 4)$$

$$58. f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, P = (1, 1)$$

$$59. f(x, y) = 2x^4 y^3 + 3x^2 y^2, P = (1, 1)$$

Differenciálhatóság. Egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor differenciálható az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$ pontban, ha $\exists D_1 f(a, b), \exists D_2 f(a, b)$, továbbá

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - D_1 f(a, b) \cdot (x - a) - D_2 f(a, b) \cdot (y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0.$$

Állítás. Ha egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény parciális deriváltfüggvényei léteznek az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és folytonosak (a, b) -ben, akkor f differenciálható (a, b) -ben.

Iránymenti derivált. Ha egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$ pontban, akkor ebben a pontban létezik minden $v = (v_1, v_2), |v| = 1$ irány menti deriváltja $D_v f(a, b)$, továbbá

$$D_v f(a, b) = \langle (D_1 f(a, b), D_2 f(a, b)), (v_1, v_2) \rangle = D_1 f(a, b) \cdot v_1 + D_2 f(a, b) \cdot v_2$$

Érintősík. Ha egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$ pontban, akkor az (a, b) pontbeli érintősíkjának egyenlete

$$z = f(a, b) + D_1 f(a, b) \cdot (x - a) + D_2 f(a, b) \cdot (y - b)$$

3. Differenciálhatóság, folytatás

Számítsuk ki a következő többszörös parciális deriváltakat!

60. $f(x, y) = x^3y, D_{12}f(x, y), D_{21}f(x, y);$

61. $f(x, y) = x \cdot \ln y, D_1^2 D_2 f(x, y);$

62. $f(x, y, z) = e^{xyz}, D_1 D_2 D_3 f(x, y, z);$

63. $f(x, y) = e^x \cdot \sin y, D_1^m D_2^n f(x, y).$

64. * Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}}, x \neq 0$. Számítsuk ki a $\Delta f = \sum_{i=1}^n D_i^2 f$ értékét! (f Laplace-át)

65. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényre nem teljesül a Young-tétel a $(0, 0)$ pontban!

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Írjuk fel az alábbi függvények érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban, továbbá végezzük el a megadott feladatokat!

66. $f(x, y) = 4x^2 - 16x + y^2 + 6y + 18, P = (2, 1)$

Adjunk az érintő sík segítségével közelítést $f(2, 01; 1, 02)$ -re!

Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját is!

67. $f(x, y) = x^2y + y^2 + 2y, P = (3, 4)$

Adjunk az érintő sík segítségével közelítést $f(3, 09; 3, 92)$ -re!

Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját is!

68. $f(x, y) = 2x^4y^3 + 3x^2y^2, P = (1, 1)$

Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját!

Young-tétel. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény D_1f és D_2f parciális deriváltfüggvényei értelmezve vannak az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és *differenciálhatók* az (a, b) pontban, akkor

$$D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b).$$

Közelítés az érintősíkkal. A differenciálhatóság definíciója alapján

$$f(x, y) = f(a, b) + D_1f(a, b) \cdot (x - a) + D_2f(a, b) \cdot (y - b) + \varepsilon(x, y) \cdot |(x - a, y - b)|, \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \varepsilon(x, y) = 0,$$

ahol a jobb oldalon az érintő sík egyenlete plusz egy 0-hoz tartó tag áll.

Kétszer differenciálhatóság. Legyen f differenciálható az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha f parciális deriváltfüggvényei differenciálhatók az (a, b) pontban, akkor azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* az (a, b) pontban.

Taylor-polinom. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f függvény (a, b) pontbeli 2. Taylor-polinomja

$$\begin{aligned} T_{2,(a,b)}^f(x, y) = & f(a, b) + D_1f(a, b) \cdot (x - a) + D_2f(a, b) \cdot (y - b) + \\ & + \frac{1}{2!} (D_{11}f(a, b) \cdot (x - a)^2 + 2D_{12}f(a, b) \cdot (x - a) \cdot (y - b) + D_{22}f(a, b) \cdot (y - b)^2) \end{aligned}$$

4. Szélsőértékszámítás

Állapítsuk meg a következő függvényekről, hogy van-e lokális szélsőértékük, és ha igen, hol, és ezek mekkorák!

- | | |
|---|--|
| 69. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$; | 78. $f(x, y) = x^2y - 3xy + 2y^4$; |
| 70. $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$; | 79. $f(x, y) = x^3 + (y + 1)^3 - 3x \cdot (y + 1)$; |
| 71. $f(x, y) = e^{2x+3y} \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2)$; | 80. $f(x, y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$; |
| 72. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$; | 81. $f(x, y) = \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{27}$; |
| 73. $f(x, y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$ | 82. $f(x, y) = e^{-(x^2 - 2xy + 2y^2)}$; |
| 74. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$; | 83. $f(x, y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2x + 1)}$; |
| 75. $f(x, y) = (1 - x)^2 + (2 + y)^2 - 4$; | 84. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$; |
| 76. $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$; | 85. $f(x, y) = (3 - 2x + y) \cdot e^{-y^2}$; |
| 77. $f(x, y) = y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy$; | |

Szöveges feladatok szélsőértékszámításra (tartomány alatt itt mindig zárt halmazt értünk).

86. Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - 2y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy -sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal!
87. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény minimumát és maximumát az x és y tengelyek, valamint az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe által határolt tartomány 1. síknegyedbe eső részén!
88. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény maximumát, ha x, y, z egy háromszög szögei!
89. Határozzuk meg az $f(x, y) = y \cdot (2x - 3)$ függvény minimumát és maximumát az x -tengely, az $x = 2$ és az $y = x^2$ görbék által határolt tartományon!
90. Határozzuk meg az $f(x, y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$ függvény minimumát és maximumát a tengelyek és az $x + y = 6$ egyenletű egyenes által határolt tartományon!

2×2 -es mátrix definitisége. Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2×2 -es mátrix. Ha $\det A > 0$ és $a > 0$, akkor A pozitív definit, ha $\det A > 0$ és $a < 0$, akkor A negatív definit. A $b = c$ (szimmetrikus mátrix) esetben ha $\det A = 0$, akkor A (pozitív vagy negatív) szemidefinit, ha $\det A < 0$, akkor A indefinit. (Ebben az esetben a $\det A > 0$, $a = 0$ nem fordulhat elő.)

Tétel lokális szélsőérték létezéséről. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az $(a, b) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy $D_1f(a, b) = D_2f(a, b) = 0$. Ha a

$$\begin{pmatrix} D_{11}f(a, b) & D_{21}f(a, b) \\ D_{12}f(a, b) & D_{22}f(a, b) \end{pmatrix}$$

(a feltételek alapján szimmetrikus) mátrix pozitív/negatív definit, akkor f -nek szigorú lokális minimuma/maximuma van (a, b) -ben. Ha a mátrix indefinit, akkor f -nek nincs lokális szélsőértéke (a, b) -ben.

Tétel korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény abszolút szélsőértékéről. Legyen f az A korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel, hogy f -nek léteznek a parciális deriváltjai $\text{int } A$ pontjaiban. Ekkor f a legkisebb és legnagyobb értékét vagy ∂A -n veszi fel, vagy $\text{int } A$ egy olyan pontjában, ahol $D_1f(a, b) = D_2f(a, b) = 0$.

5. Összetett és implicit függvények differenciálása

91. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (e^{xyz}, \sin x)$ függvény deriváltját a $P = (1, 2, 3)$ pontban!
92. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2 - 2xy, ye^{y^2} + 3x, \sin x + \tan y)$ függvény deriváltját a $P = (1, 0)$ pontban!
93. Az alábbi feladatokban legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Határozzuk meg az $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények deriváltjait!
- (a) $u(x, y) = f(x + y)$; (c) $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$;
 (b) $u(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$; (d) $u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$.
94. Az alábbi feladatokban legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Határozzuk meg az $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ illetve $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények deriváltjait!
- (a) $u(x, y) = f(ax, by)$; (d) $u(x, y, z) = f(x + y, z)$;
 (b) $u(x, y) = f(x + y, x - y)$; (e) $u(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$;
 (c) $u(x, y) = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$; (f) $u(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.
95. Legyen y a $[-1, 1]$ -en értelmezett olyan függvény, mely kielégíti az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Hány folytonos y megoldás van? Hány folytonos megoldás van, ha kikötjük, hogy $y(0) = 1$? És ha $y(1) = 0$?
96. Fejezzük ki az alábbi egyenletekkel meghatározott y függvények y' deriváltjait x és y segítségével!
- (a) $x^2 + 2xy - y^2 = 1$;
 (b) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$;
 (c) $y - \frac{1}{2} \sin y = x$;
 (d) $x^y = y^x$, $(x \neq y)$;
 (e) $y = 2x \arctan \frac{y}{x}$.
97. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Mely $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pontokban alkalmazható f -re az inverzfüggvény-tétel?

Összetett függvény differenciálása. Legyen $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in \text{int } \mathcal{D}(g)$ pontban, $f : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$ differenciálható a $g(a) \in \text{int } \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $a \in \text{int } \mathcal{D}(f \circ g)$, $f \circ g$ differenciálható a -ban és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a),$$

ahol a jobb oldalon a megfelelő $s \times q$ és $q \times p$ mátrixok szorzata áll.

Implicit függvény differenciálása. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy van olyan $(a, b) \in \mathcal{D}(f)$ pont, hogy $f(a, b) = 0$. Tegyük fel továbbá, hogy f folytonosan differenciálható (a, b) -ben (vagyis differenciálható (a, b) egy környezetében, és a parciális deriváltjai folytonosak (a, b) -ben), és $D_2 f \neq 0$ az (a, b) egy környezetében. Ekkor létezik a -nak ill. b -nek olyan $K(a) \subset \mathbb{R}$ ill. $K(b) \subset \mathbb{R}$ környezete, hogy

- (i) Minden $x \in K(a)$ esetén $\exists! y(x) \in K(b)$, melyre

$$f(x, y(x)) = 0.$$

- (ii) y differenciálható az a pontban, és

$$y'(a) = -\frac{D_1 f(a, b)}{D_2 f(a, b)}.$$

6. Feltételes szélsőérték

98. Oldjuk meg a 86. és 88. feladatokat feltételes szélsőérték-feladatokként!

99. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ szélsőértékeit az $x + y - 1 = 0$ egyenletű egyenesen!

100. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit a megadott K halmazokon!

- (a) $f(x, y) = x + 2y$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$;
- (b) $f(x, y) = 2xy$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
- (c) $f(x, y) = x + 8y$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 17\}$;
- (d) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (e) $f(x, y, z) = x + y + z$, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
- (f) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Lagrange-féle multiplikátor módszer feltételes szélsőérték-keresésre.

Legyenek $f, g_1, g_2, \dots, g_q : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, $p > q$. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $g_1 = 0, g_2 = 0, \dots, g_q = 0$ feltétel mellett feltételes szélsőértéke van az $a \in \mathcal{D}(f)$ pontban (vagyis $H := \{x \in \mathbb{R}^p \mid g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_q(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^p$ jelöléssel $a \in H$ és f -nek lokális szélsőértéke van a $H \cap \mathcal{D}(f)$ halmazon). Tegyük fel továbbá, hogy

$$\text{rang} \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & D_2 g_1(a) & \dots & D_p g_1(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 g_q(a) & D_2 g_q(a) & \dots & D_p g_q(a) \end{pmatrix} = q.$$

Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ számok, hogy az

$$F := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_q g_q : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényre

$$F'(a) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Vagyis, F p darab paricális deriváltjára felírva

$$\begin{aligned} D_1 f(a) + \lambda_1 D_1 g_1(a) + \lambda_2 D_1 g_2(a) + \dots + \lambda_q D_1 g_q(a) &= 0 \\ D_2 f(a) + \lambda_1 D_2 g_1(a) + \lambda_2 D_2 g_2(a) + \dots + \lambda_q D_2 g_q(a) &= 0 \\ \vdots & \\ D_p f(a) + \lambda_1 D_p g_1(a) + \lambda_2 D_p g_2(a) + \dots + \lambda_q D_p g_q(a) &= 0 \end{aligned}$$