1. hét

Órai feladatok

1. Konkrét számokkal, behelyettesítve: pl. ha $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, $a_3 = -2$, $a_4 = 0$, $a_5 = 9$, akkor
$$\sum_{k=1}^{4} a_k =?, \qquad \sum_{j=2}^{3} a_{j-1} =?, \qquad \sum_{n=1}^{3} a_1 =?, \qquad \dots$$
Ehhez hasonlókat szorzatra.
Kettős indexek még ne legyenek.

2. Fordított feladat: Írjuk fel zárt formulával:
   (a) első n páros szám összege
   (b) 3-mal osztható kétjegyű számok összege
   (c) 100 és 200 közotti természetes számok reciprokainak összege

Igazoljuk teljes indukcióval:

3. Első n szám összege $\dfrac{n(n+1)}{2}$:
   - Felírás képlettel - szummás felírás gyakorlásaképp
   - Teljes indukciós bizonyítás

4. Első n négyzetszám összege $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:
   - Felírás képlettel - szummás felírás gyakorlásaképp
   - Teljes indukciós bizonyítás

5. $$\forall n \epsilon \mathbb{N}: \qquad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

6. $2^n > n^2$, ha $n > 4$, $n\epsilon\mathbb{N}$.

7. Igazoljuk a háromszög-egyenlőtlenséget teljes indulcióval:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$
ahol $n\epsilon\mathbb{N}$ természetes szám, $n \geq 2$ és $a_1,\ a_2,\ \dots\dots a_n\epsilon\mathbb{R}$ tetszőleges valós számok.

   (Itt figyelni kell arra, hogy a teljes indukció kiinduló lépése $n = 2$ lesz! Ez sem triviális...)

Házi feladatok

1. Igazoljuk teljes indukcióval:

   (a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$

   (b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

   (c) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = 1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

   (d) $3^n > n^3$, ha $n > 3$, $n\epsilon\mathbb{N}$

   (e) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

   (f) $\forall n\epsilon\mathbb{N}: \quad \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

   (g) $2^{4n+1}+3$ mindig osztható 5-tel ($n\epsilon\mathbb{N}$)

   (h) $\sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   (i) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1.$

   (j) $\forall n\epsilon\mathbb{N}: \quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\cdot\sqrt{n}$

2. Igazoljuk, hogy $\sqrt{3}$ nem racionális.

3. Igazoljuk, hogy ha a racionális és x irracionális, akkor $x+a$ is irracionális.

4. Igazoljuk, hogy ha a racionális és x irracionális, akkor $x\cdot a$ is irracionális.

5. Számolja ki $S(n)$ értékét, majd matematikai indukció segítségével bizonyítsa be az eredmény helyességét.

   $$S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

   Segítség: parciális törtekre bontás hasznos lehet a szumma kiszámítása esetén.