Valószínűségszámítás jegyzet

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak

1.1. Eseménytér

Eseménytérnek nevezünk egy Ω nemüres halmazt.

1.1.1. Elemi esemény

Véges Ω esetén az egyelemű részhalmazait elemi eseményeknek nevezzük.

1.1.2. Teljes eseményrendszer

$\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer, ha az A_n halmazok páronként diszjunktak és

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega.$$

1.2. σ-algebra

$\mathcal{F}$ legyen Ω részhalmazainak olyan rendszere, hogy

1. $\mathcal{F}$ zárt a véges és a megszámlálhatóan végtelen unióra
2. $\mathcal{F}$ zárt a különbségképzésre
3. $\Omega \in \mathcal{F}$.

Ekkor $\mathcal{F}$ egy σ-algebra, az elemeit pedig eseménynek nevezzük.

1.2.1. Következmény

Ha $\mathcal{F}$ egy σ-algebra, akkor zárt a komplementerképzésre és a metszetre is, hiszen

$$A^C = \Omega\backslash A$$
$$A\cap B = \left(A^C\cup B^C\right)^C = \Omega\backslash\big((\Omega\backslash A)\cup(\Omega\backslash B)\big).$$

1.3. Mérhető tér

Adott Ω eseménytér és $\mathcal{F}\subset 2^\Omega$ σ-algebra. Ekkor az $(\Omega,\mathcal{F})$ rendezett párt mérhető térnek nevezzük.

1.4. Tétel

Adott Ω mellett $\forall H\subset 2^\Omega$ esetén $\exists\mathcal{F}_H$ legszűkebb olyan σ-algebra, melyre $H\subset\mathcal{F}$.

1.4.1. Generált σ-algebra

Az így kapott $\mathcal{F}_H$-t a H által generált σ-algebrának nevezzük.

1.5. Borel-halmaz

Legyen $\mathcal{I} = \{I | I\subset\mathbb{R}\}$. Ekkor $\mathcal{F}_\mathcal{I}$ elemei az $\mathbb{R}$-beli Borel-halmazok, azaz $\mathcal{B}_\mathbb{R} := \mathcal{F}_\mathcal{I}$.

1.6. Mérhető függvény

Adott $(\Omega,\mathcal{F})$ mérhető tér. $f:(\Omega,\mathcal{F})\mapsto\mathbb{R}$ függvény mérhető, ha $\forall B\in\mathcal{B}_\mathbb{R}$ esetén

$$f^{-1}(B) := \left\{\omega\in\Omega \middle| f(\omega)\in B\right\}\in\mathcal{F}$$

teljesül.

1.6.1. Tétel

Ha $f, g : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvények és $\lambda \in \mathbb{R}$ konstans, akkor $f + g, fg, \lambda f : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{R}$ is mérhető függvények.

1.7. Mérték

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérthető tér. $\mu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ függvény mérték, ha

1. $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén $\mu(A) \geq 0$ teljesül
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $\forall \big(A_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ páronként diszjunkt halmazrendszerre teljesül a σ-additivitás, azaz

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

1.7.1. Speciális mértékek

1. Nullmérték mindenhez 0-t rendel.
2. Számláló mérték elemszámot rendel.
3. x-re koncentrált Dirac-mérték

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A. \end{cases}$$

1.8. Valószínűségi mérték

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mérték. Ha $\mu(\Omega) = 1$, akkor valószínűségi mértéknek nevezzük, jele P.

1.8.1. Tulajdonságok

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor $\forall A, B \in \mathcal{F}$ esetén

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$ és $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$
3. $P\big(A^C\big) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

1.9. Valószínűségi mező

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és P valószínűségi mérték. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ rendezett hármast valószínűségi mezőnek nevezzük.

1.10. Valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor a $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

1.10.1. Képtér

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ képtere

$$\operatorname{Im} \xi = \{\xi_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \big| \omega \in \Omega\}.$$

1.10.2. Eloszlás

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ξ eloszlása

$$Q_\xi(A) = P\big(\xi^{-1}(A)\big).$$

1.10.3. Eloszlásfüggvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye $F_\xi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P\big(\omega \in \Omega \big| \xi(\omega) < x\big) = P\big(\xi^{-1}(-\infty, x)\big) = Q_\xi\big((-\infty, x)\big).$$

1.10.3.1. Tulajdonságok
Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye F_ξ. Ekkor

1. F_ξ monoton nő
2. F_ξ balról folytonos
3. $$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$$
4. $$\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1.$$

1.10.3.2. Tétel
Legyen $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olyan monoton növő balról folytonos függvény, hogy $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. Ekkor $\exists (\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó, hogy $F = F_\xi$.

1.10.3.3. Tétel
Adott ξ valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor

$$P(x < \xi < y) = F_\xi(y) - F_\xi(x).$$

1.10.4. Valószínűségi változó által generált σ-algebra

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó által generált σ-algebra $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_{\xi^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})}$.

1.11. Független események

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. $A, B \in \mathcal{F}$ függetlenek pontosan akkor, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

1.12. Független eseményrendszer

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor az $(A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ eseményrendszer független, ha az A_k események páronként függetlenek. Ekkor

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

1.13. Független valószínűségi változók

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi, \mu : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változók. Ekkor ξ, μ függetlenek, ha $\forall (A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\xi$ és $\forall (B_j)_{j \leq m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\mu$ rendszerek függetlenek, azaz $\forall (A_k, B_j) \in (A_k) \times (B_j)$ független.

1.14. Feltételes valószínűség

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor $A \in \mathcal{F}$ feltételes valószínűsége $B \in \mathcal{F}$ szerint

$$P_B(A) = P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

1.15. Teljes valószínűség tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $(B_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer, melyre $\forall P(B_k) > 0$. Ekkor $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k).$$

Bizonyítás
Tudjuk, hogy

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k) \implies P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k)$$

és $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Ekkor

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k).$$

1.16. Bayes tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $(B_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer, melyre $\forall P(B_k) > 0$. Ekkor $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $P(B_k|A)P(A) = P(B_k \cap A) = P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$. Ebből

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}.$$

2. Integrál

2.1. Indikátorfüggvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor $A \in \mathcal{F}$ indikátorfüggvénye

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega \notin A \\ 1, & \text{ha } \omega \in A. \end{cases}$$

2.2. Lépcsős függvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $(A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ rendszer és $(\lambda_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ rendszer. Ekkor $f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ lépcsős függvény

$$f(\omega) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}(\omega).$$

2.3. Lépcsős függvény adott halmaz feletti és mérték szerinti integrálja

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ olyan lépcsős függvény, hogy

$$f(\omega) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}(\omega)$$

és az A_k halmazok páronként diszjunktak. Ekkor

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}P := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(A_k).$$

2.4. Tétel

Legyen $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ mérhető és korlátos. Ekkor $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat, melyre

1. $\forall f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ lépcsős
2. $\forall \omega \in \Omega$ esetén $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$
3. $\forall \omega \in \Omega$ esetén $\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$.

2.5. Korlátos, pozitív, mérhető függvény integrálja

Legyen $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ mérhető és korlátos és legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$ olyan lépcsős függvénysorozat, hogy $f_n \nearrow f$ (monoton növekedve tart). Ekkor

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}P := \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}P.$$

2.6. Tétel

Legyen $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ mérhető. Ekkor $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat, melyre

1. $\forall f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ mérhető és korlátos
2. $\forall \omega \in \Omega$ esetén $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$
3. $\forall \omega \in \Omega$ esetén $\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$.

2.7. Pozitív, mérhető függvény integrálja

Legyen $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ mérhető és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ olyan mérhető és korlátos függvénysorozat, hogy $f_n \nearrow f$. Ekkor

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}P := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}P \,.$$

2.8. Függvény pozitív és negatív része

Legyen $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ mérhető. Ekkor a függvény pozitív része

$$f^+ := \max(f, 0)$$

a negatív része

$$f^- := \max(-f, 0).$$

Ekkor $f = f^+ - f^-$ és $|f| = f^+ + f^-$.

2.8.1. Tétel

$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ mérhető akkor és csak akkor, ha f^+, f^- mérhetők.

2.9. Mérhető függvény integrálja

Legyen $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ mérhető. Ekkor

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}P = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}P - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}P \,.$$

2.9.1. Tulajdonságok

Legyen $f, g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvények és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár.

1. $$\int_\Omega (f+g) \,\mathrm{d}P = \int_\Omega f \,\mathrm{d}P + \int_\Omega g \,\mathrm{d}P$$

2. $$\int_\Omega \lambda f \,\mathrm{d}P = \lambda \int_\Omega f \,\mathrm{d}P$$

3. $$\left| \int_\Omega f \,\mathrm{d}P \right| \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}P$$

4. $$f \leq g \implies \int_\Omega f \,\mathrm{d}P \leq \int_\Omega g \,\mathrm{d}P$$

3. Mértékek

3.1. Külső Lebesgue-mérték

Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ külső Lebesgue-mértéke

$$\overline{\lambda}(A) := \inf\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \middle| A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \right\}$$

ahol $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, $\lambda(I_n)$ pedig az intervallum hossza.

3.1.1. Tétel

Ha $A \subset \mathbb{R}$ legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaz, akkor $\overline{\lambda}(A) = 0$.

3.2. Tétel

$\exists \mathcal{M}_\lambda \subset 2^{\mathbb{R}}$ halmazrendszer, hogy

1. $\mathcal{M}_\lambda$ σ-algebra
2. $\mathcal{M}_\lambda \neq 2^{\mathbb{R}}$
3. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_\lambda$
4. $\overline{\lambda}\big|_{\mathcal{M}_\lambda} : \mathcal{M}_\lambda \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ mérték.

3.3. Lebesgue-mérték

A $\lambda := \overline{\lambda}\big|_{\mathcal{M}_\lambda}$ mértéket Lebesgue-mértéknek nevezzük.

3.3.1. Lebesgue 0 mértékű halmaz

Azt mondjuk, hogy $A \in \mathcal{M}_\lambda$ Lebesgue 0 mértékű, ha $\lambda(A) = 0$.

3.3.2. Lebesge-integrál

A Lebesgue-mérték szerinti integrált Lebesgue-integrálnak nevezzük.

3.3.2.1. Tétel
Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ Riemann-integrálható akkor és csak akkor, ha f folytonos egy Lebesgue 0 mértékű halmazon kívül.

3.3.2.2. Tétel
Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény esetén

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

3.4. Mértékek abszolút folytonossága

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mértékek. Azt mondjuk, hogy μ_1 abszolút folytonos μ_2-re nézve, azaz $\mu_1 \ll \mu_2$, ha $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén $\mu_2(A) = 0 \implies \mu_1(A) = 0$.

3.5. Mértékek szingularitása

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mértékek. Azt mondjuk, hogy μ_1 szinguláris μ_2-re nézve, azaz $\mu_1 \perp \mu_2$, ha $\exists \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ olyan halmazok, hogy $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ és $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ és $\mu_1(\Omega_1) = 0$ és $\mu_2(\Omega_2) = 0$.

3.6. Véges mérték

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mérték. Azt mondjuk, hogy μ σ-véges, ha $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall \mu(A_n) < \infty$ és

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega.$$

3.7. Lebesgue-felbontás

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu, \nu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ σ-véges mértékek. Ekkor $\exists! \mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ olyan mértékek, hogy $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 \ll \nu$, $\mu_2 \perp \nu$.

3.8. Radon-Nikodym tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu, \nu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ olyan mértékek, hogy $\mu \ll \nu$. Ekkor $\exists! f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ olyan mérhető függvény, hogy $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\mu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega \chi_A f \, \mathrm{d}\nu \, .$$

Ekkor $f = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$ a μ mérték ν szerinti Radon-Nikodym deriváltja.

4. Valószínűségi változók jellemzői

4.1. Várható érték

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ várható értéke

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi \,\mathrm{d}P\,.$$

4.1.1. Tétel

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta).$$

4.2. Szórás, szórásnégyzet

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó véges várható értékkel. Ekkor ξ szórása

$$\sigma(\xi) = \sqrt{E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)^2\Big)}.$$

ξ szórásnégyzete vagy varianciája

$$\sigma^2(\xi) = E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)^2\Big).$$

4.2.1. Tétel

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor

$$\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi+\eta) &= E\big((\xi+\eta)^2\big) - E^2(\xi+\eta) = E\big(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2\big) - E^2(\xi) - 2E(\xi)E(\eta) - E^2(\eta) = \\ &= E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi) + E\big(\eta^2\big) - E^2(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)\end{aligned}$$

4.2.2. Tétel

Adott ξ valószínűségi változó. Ekkor

$$\sigma^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi) &= E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)^2\Big) = E\big(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)\big) = E\big(\xi^2\big) - 2E\big(E(\xi)\xi\big) + E\big(E^2(\xi)\big) = \\ &= E\big(\xi^2\big) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi)\end{aligned}$$

4.2.3. Tulajdonságok

Adott ξ, η valószínűségi változó és $a, b \in \mathbb{R}$ skalárok.

1. $$\sigma^2(\xi) \geq 0$$

2. $$\sigma^2(a\xi + b) = a^2\sigma^2(\xi)$$

3.
$$\sigma^2(\xi \pm \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$$

Bizonyítás

1. Triviális.

2.
$$\sigma^2(a\xi+b) = E\Big(\big(a\xi+b-E(a\xi+b)\big)^2\Big) = E\Big(\big(a\xi+b-aE(\xi)-b\big)^2\Big) =$$
$$= E\Big(\big(a\xi-aE(\xi)\big)^2\Big) = a^2E\Big(\big(\xi-E(\xi)\big)^2\Big) = a^2\sigma^2(\xi)$$

3.
$$\sigma^2(\xi\pm\eta) = E\big((\xi\pm\eta)^2\big) - E^2(\xi\pm\eta) = E\big(\xi^2 \pm 2\xi\eta + \eta^2\big) - E^2(\xi) \mp 2E(\xi)E(\eta) - E^2(\eta) =$$
$$= E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi) + E\big(\eta^2\big) - E^2(\eta) \pm 2E(\xi\eta) \mp 2E(\xi)E(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$$

4.2.4. Momentum

Adott ξ valószínűségi változó a középpontú k-adik momentuma $E\big((\xi-a)^k\big)$.

4.3. Kovariancia

Adottak ξ,η valószínűségi változók. Ekkor ξ és η kovarianciája
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\Big(\big(\xi-E(\xi)\big)\big(\eta-E(\eta)\big)\Big).$$

4.3.1. Tétel

Adottak ξ,η valószínűségi változók. Ekkor
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

Bizonyítás

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\Big(\big(\xi-E(\xi)\big)\big(\eta-E(\eta)\big)\Big) = E\big(\xi\eta - \xi E(\eta) - \eta E(\xi) + E(\xi)E(\eta)\big) =$$
$$= E(\xi\eta) - 2E(\xi)E(\eta) + E(\xi)E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$$

4.3.2. Tulajdonságok

Adottak ξ,η,γ valószínűségi változók és $a\in\mathbb{R}$ skalár.

1.
$$\operatorname{cov}(\xi,\xi) = \sigma^2(\xi)$$

2.
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\eta,\xi)$$

3.
$$\operatorname{cov}(a\xi,\eta) = a\operatorname{cov}(\eta,\xi)$$

4.
$$\operatorname{cov}(\xi+\eta,\gamma) = \operatorname{cov}(\xi,\gamma) + \operatorname{cov}(\eta,\gamma)$$

4.3.3. Kovariancia mátrix

Adott ξ, η valószínűségi változók kovariancia mátrixa $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2(\xi) & \operatorname{cov}(\xi,\eta) \\ \operatorname{cov}(\eta,\xi) & \sigma^2(\eta) \end{pmatrix}.$$

4.4. Korreláció

Adott ξ, η valószínűségi változók korrelációja

$$\operatorname{corr}(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}.$$

4.4.1. Tétel

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor

$$\operatorname{corr}(\xi,\eta) = 0.$$

4.4.2. Tulajdonságok

Adottak ξ, η valószínűségi változók.

1. $$\big|\operatorname{corr}(\xi,\eta)\big| \leq 1$$

4.5. Markov egyenlőtlenség

Adott ξ valószínűségi változó és $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ skalár. Ekkor

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi \, \mathrm{d}P \geq \int_{\{\xi\geq\varepsilon\}} \xi \, \mathrm{d}P \geq \int_{\{\xi\geq\varepsilon\}} \varepsilon \, \mathrm{d}P = \varepsilon \int_{\{\xi\geq\varepsilon\}} \mathrm{d}P = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon) \implies P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}$$

4.6. Csebisev egyenlőtlenség

Legyen ξ valószínűségi változó és $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ skalár. Ekkor

$$P\big(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás
Tudjuk, hogy

$$\big\{|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\big\} = \big\{|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2\big\}.$$

Ekkor a Markov egyenlőtlenségből

$$P\big(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{E\big(|\xi - E(\xi)|^2\big)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

5. Diszkrét eloszlások

5.1. Diszkrét eloszlású valószínűségi változó

Egy valószínűségi változót diszkrétnek nevezünk, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel.

5.2. Várható érték kiszámítása

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó és képtere

$$\operatorname{Im} \xi = \{\xi_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \big| \omega \in \Omega\}.$$

Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n).$$

5.3. Szórásnégyzet kiszámítása

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó és képtere

$$\operatorname{Im} \xi = \{\xi_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \big| \omega \in \Omega\}.$$

Ekkor

$$\sigma^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 P(\xi = \xi_n) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n)\right)^2.$$

5.4. Kovariancia kiszámítása

Adottak $\xi, \eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változók kovarianciája

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j P(\xi = \xi_i, \eta = \eta_j) - \left(\sum_i \xi_i P(\xi = \xi_i)\right)\left(\sum_j \eta_j P(\eta = \eta_j)\right).$$

5.5. Binomiális eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, ha

$$P(\xi = k)_{k \leq n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ekkor

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, & \text{ha } k < x \leq k+1. \\ 1, & \text{ha } x > n. \end{cases}$$

5.5.1. Tétel

P valószínűségi mérték, tehát $P(\Omega) = 1$.

Bizonyítás

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} P\big(\{k\}\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

5.5.2. Várható érték

ξ (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke np.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

hiszen $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ (elnyelési tulajdonság).

$$E(\xi) = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k} (1-p)^{n-1-k} = np$$

5.5.3. Szórásnégyzet

ξ (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete $np(1-p)$.

5.6. Geometrikus eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó p paraméterű geometrikus eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

5.6.1. Tétel

P valószínűségi mérték, tehát $P(\Omega) = 1$.

Bizonyítás

$$P(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P\big(\{k\}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

5.6.2. Várható érték

ξ p paraméterű geometrikus eloszlású valószínűség változó várható értéke $\frac{1}{p}$.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{n} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}.$$

Tudjuk, hogy $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ha $x \in (-1, 1)$. Ezen felül tudjuk, hogy egy hatványsor a konvergenciahalmaz belső pontjaiban tagonként differenciálható, tehát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Mivel $1 - p \in (-1, 1)$, így azonnal kapjuk, hogy $E(\xi) = \frac{1}{p}$.

5.6.3. Szórásnégyzet

ξ p paraméterű geometrikus eloszlású valószínűség változó szórásnégyzete $\frac{1-p}{p^2}$.

5.7. Hipergeometrikus eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó (N, K, n) paraméterű hipergeometrikus eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

5.7.1. Várható érték

ξ (N, K, n) paraméterű hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{nK}{N}$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Ekkor

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n} k\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} = \\ &= \frac{K}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{K-1}{k-1}\binom{N-1-(K-1)}{n-1-(k-1)} = \frac{K}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{K-1}{k}\binom{N-1-(K-1)}{n-1-k} = \\ &= \frac{K}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} = \frac{nK}{N}. \end{aligned}$$

5.7.2. Szórásnégyzet

ξ (N, K, n) paraméterű hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete $n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$.

5.8. Poisson eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

5.8.1. Tétel

P valószínűségi mérték, tehát $P(\Omega) = 1$.

Bizonyítás

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} P\big(\{k\}\big) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

5.8.2. Várható érték

ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értéke λ.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda.$$

5.8.3. Szórásnégyzet

ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete λ.

5.9. Tétel

A Poisson eloszlás közelíti, illetve határértékben felveszi a binomiális eloszlást ha $np = \lambda$ állandó.

Bizonyítás

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

6. Folytonos eloszlások

6.1. Folytonos eloszlású valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy ξ folytonos eloszlású, ha $Q_\xi \ll \lambda_\mathbb{R}$.

6.2. Sűrűségfüggvény

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\exists! f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\forall A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ esetén

$$Q_\xi(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda_\mathbb{R} \,.$$

Ekkor f a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, illetve a Q_ξ eloszlás sűrűségfüggvénye.

6.2.1. Tulajdonságok

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűség változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel.

1. $f_\xi \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi \,\mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} f_\xi \,\mathrm{d}\lambda_\mathbb{R} = Q_\xi(\mathbb{R}) = P\big(\xi^{-1}(\mathbb{R})\big) = 1$$

6.2.2. Tétel

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ olyan függvény, hogy $\int_\mathbb{R} f \,\mathrm{d}\lambda_\mathbb{R} = 1$. Ekkor $\exists(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó, hogy $Q_\xi \ll \lambda_\mathbb{R}$ és $f = f_\xi$.

6.3. Várható érték kiszámítása

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értéke

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi \,\mathrm{d}P = \int_\mathbb{R} \mathrm{id}_\mathbb{R} \,\mathrm{d}Q_\xi = \int_\mathbb{R} \mathrm{id}_\mathbb{R} \frac{\mathrm{d}Q_\xi}{\mathrm{d}\lambda_\mathbb{R}} \,\mathrm{d}\lambda_\mathbb{R} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

6.3.1. Tétel

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) \,\mathrm{d}x < \infty$$

akkor $E(\xi)$ véges.

6.4. Szórásnégyzet kiszámítása

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete

$$\sigma^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) \,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) \,\mathrm{d}x\right)^2.$$

6.5. Kovariancia kiszámítása

Adottak ξ, η folytonos eloszlású valószínűségi változók kovarianciája

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{(\xi,\eta)}(x, y) \,\mathrm{d}(x, y) - \left(\int_\mathbb{R} x f_\xi(x) \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_\mathbb{R} y f_\eta(y) \,\mathrm{d}y\right).$$

6.6. Cauchy-eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó Cauchy-eloszlású, ha

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

6.6.1. Várható érték

A Cauchy-eloszlásnak nem létezik várható értéke.

6.6.2. Szórásnégyzet

A Cauchy-eloszlásnak nem létezik szórásnégyzete.

6.7. Exponenciális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó α paraméterű exponenciális eloszlású, ha

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

6.7.1. Eloszlásfüggvény

ξ α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Bizonyítás

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \alpha e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-\alpha x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

6.7.2. Várható érték

ξ α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{\alpha}$.

Bizonyítás

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-\alpha x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

6.7.3. Szórásnégyzet

ξ α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete $\frac{1}{\alpha^2}$.

6.8. Normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó (m, σ) paraméterű normális eloszlású, ha

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

6.8.1. Standard normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha $(m = 0, \sigma = 1)$ paraméterű normális eloszlású. Ekkor

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

és

$$\Phi(x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \, \mathrm{d}t\,.$$

6.8.1.1. Tétel

Adott ξ (m, σ) normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye visszavezethető standard normális eloszlásúra.

Bizonyítás

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t \underset{\substack{z=\frac{t-m}{\sigma} \\ \mathrm{d}t=\sigma \mathrm{d}z}}{=} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-z^2}{2}} \sigma \, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \, \mathrm{d}z = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

7. Vektor értékű valószínűségi változók

7.1. Mérhető vektor értékű függvény

Adott $f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ függvény mérhető, ha $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ esetén

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

7.2. Vektor értékű valószínűségi változó

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ valószínűségi változó

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

ahol $\forall \xi_i : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$.

7.2.1. Eloszlás

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó eloszlása

$$Q_\xi(A) = P\big(\xi^{-1}(A)\big).$$

7.2.2. Eloszlásfüggvény

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_\xi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = P\big(\omega \in \Omega \big| \forall \xi_i(\omega) < x_i\big) = P\left(\xi^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n}(-\infty, x_i)\right)\right) = Q_\xi\left(\prod_{i=1}^{n}(-\infty, x_i)\right).$$

7.2.2.1. Tulajdonságok

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó és $a < b \in \mathbb{R}^n$.

1. F_ξ minden változójában monoton nő
2. F_ξ minden változójában balról folytonos
3. $$\forall \lim_{x_i \to -\infty} F_\xi(x) = 0$$
4. $$\lim_{\forall x_i \to \infty} F_\xi(x) = 1$$
5. $$\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\varepsilon|} F_\xi\big(a\varepsilon + b(1-\varepsilon)\big) \geq 0$$

   ahol $|\varepsilon|$ az ε 1-es koordinátáinak száma.

7.2.2.2. Tétel

Legyen $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, amely teljesíti a fenti feltételeket. Ekkor $\exists \xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó, hogy $F = F_\xi$.

7.2.2.3. Tétel
Adott $\xi = \begin{pmatrix}\eta\\ \gamma\end{pmatrix} : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^2$ vektor értékű valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor

$$P(x_1 \leq \eta < y_1, x_2 \leq \gamma < y_2) = F(x_1, x_2) + F(y_1, y_2) - F(x_1, y_2) - F(y_1, x_2).$$

7.2.2.4. Peremeloszlás-függvények
Adott $\xi = \begin{pmatrix}\eta\\ \gamma\end{pmatrix}$ vektor értékű valószínűségi változó peremeloszlás-függvényei

$$F_\eta(x) = \lim_{y\to\infty} F_\xi(x, y) \qquad F_\gamma(y) = \lim_{x\to\infty} F_\xi(x, y).$$

7.2.3. Tétel

Adott ξ vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor ekvivalensek

1. $\forall \xi_i$ függetlenek
2. $$Q_\xi = \prod_{i=1}^{n} Q_{\xi_i}$$
3. $$F_\xi(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i).$$

7.2.4. Várható érték

Adott ξ vektor értékű valószínűségi változó várható értéke

$$E(\xi) = \begin{pmatrix} E(\xi_1)\\ E(\xi_2)\\ \vdots\\ E(\xi_n)\end{pmatrix}.$$

7.3. Folytonos vektor értékű valószínűségi változók

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó folytonos eloszlású, ha $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^n}$.

7.3.1. Tétel

Adott ξ vektor értékű valószínűségi változó. Ha $\forall \xi_i$ folytonos eloszlású független valószínűségi változók, akkor ξ is folytonos eloszlású.

7.3.2. Tétel

Adott ξ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ha $\forall \xi_i$ függetlenek, akkor

$$f_\xi(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x_i).$$

7.3.3. Tétel

Adott $\xi = \begin{pmatrix}\eta\\ \gamma\end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó F_ξ eloszlásfüggvénnyel, melynek léteznek a folytonos vegyes másodrendű parciális deriváltjai. Ekkor

$$f_\xi(x, y) = \frac{\partial^2 F_\xi(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

7.3.4. Peremsűrűség-függvények

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad f_\gamma(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

7.3.5. Intervallumba esés valószínűsége

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$P(\eta \in I, \gamma \in J) = \iint_{I\times J} f_\xi(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

7.3.6. Függvényre vonatkoztatott vvárható érték

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, illetve $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ekkor

$$E\big(h(\eta,\gamma)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_\xi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

7.3.6.1. Tétel

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, illetve $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ekkor $E\big(h(\eta,\gamma)\big)$ véges, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big|h(x,y)\big| f_\xi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty.$$

8. Valószínűségi változók transzformációja

8.1. Diszkrét eset

Adott ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valószínűségi változóra

$$P(\eta = \eta_i) = \sum_{h(\xi_j)=\eta_i} P(\xi = \xi_j).$$

8.2. Folytonos eset

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó és $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható függvény. Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = f_\xi\big(h^{-1}(x)\big)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|.$$

Bizonyítás
Tegyük fel először, hogy h szigorúan monoton nő. Ekkor

$$\{\eta < x\} = \big\{h(\xi) < x\big\} = \big\{\xi < h^{-1}(x)\big\}$$

így

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\big(\xi < h^{-1}(x)\big) = F_\xi\big(h^{-1}(x)\big)$$

amiből

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = F_\xi'\big(h^{-1}(x)\big) = f\big(h^{-1}(x)\big)\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = f_\xi\big(h^{-1}(x)\big)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|$$

hiszen h szigorúan monoton nő, így a derivált pozitív.
Most tegyük fel, hogy h szigorúan monton csökken. Ekkor

$$\{\eta < x\} = \big\{h(\xi) < x\big\} = \big\{\xi > h^{-1}(x)\big\}$$

így

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\big(\xi > h^{-1}(x)\big) = 1 - F_\xi\big(h^{-1}(x)\big)$$

amiből

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = -F_\xi'\big(h^{-1}(x)\big) = -f\big(h^{-1}(x)\big)\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = f_\xi\big(h^{-1}(x)\big)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|$$

hiszen h szigorúan monoton csökken, így a derivált negatív.

8.3. Vektor eset

Vektor esetben a derivált helyett Jacobi determinánst alkalmazunk.

8.3.1. Valószínűségi változó standardizáltja

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó standardizáltja $\hat{\xi} = \frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}$.

9. Valószínűségi változók feltételes jellemzői

9.1. Diszkrét eset

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ diszkrét eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$P(\eta = \eta_i | \gamma = \gamma_j) = \frac{P(\eta = \eta_i, \gamma = \gamma_j)}{P(\gamma = \gamma_j)}.$$

9.1.1. Eloszlásfüggvény

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ diszkrét eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$F^*(x|\gamma_i < \gamma < \gamma_j) = P(\xi < x|\gamma_i < \gamma < \gamma_j) = \frac{F_\xi(x, \gamma_j) - F_\xi(x, \gamma_i)}{F_\gamma(\gamma_j) - F_\gamma(\gamma_i)}.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $P(\xi < x, \gamma_i < \gamma < \gamma_j) = F_\xi(x, \gamma_j) - F_\xi(x, \gamma_i)$, így

$$F^*(x|\gamma_i < \gamma < \gamma_j) = P(\xi < x|\gamma_i < \gamma < \gamma_j) = \frac{P(\xi < x, \gamma_i < \gamma < \gamma_j)}{P(\gamma_i < \gamma < \gamma_j)} = \frac{F_\xi(x, \gamma_j) - F_\xi(x, \gamma_i)}{F_\gamma(\gamma_j) - F_\gamma(\gamma_i)}.$$

9.2. Folytonos eset

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$F^*(x|z) = P(\eta \in I|\gamma = z)) = \begin{cases} \int_I \frac{f_\xi(x,z)}{f_\gamma(z)} \, \mathrm{d}x & f_\gamma(z) \neq 0 \\ 0 & f_\gamma(z) = 0. \end{cases}$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $f_\gamma(z) \neq 0$.

$$\begin{aligned} F^*(x|z) &= \lim_{h\to 0} P\big(\eta \in I|\gamma \in [z, z+h]\big) = \frac{P(\eta \in I, \gamma \in [z, z+h])}{P(\gamma \in [z, z+h])} = \\ &= \frac{\int_I \int_z^{z+h} f_\xi(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x}{\int_z^{z+h} f_\gamma(y) \, \mathrm{d}y} = \frac{\frac{\int_I \int_z^{z+h} f_\xi(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x}{h}}{\frac{\int_z^{z+h} f_\gamma(y) \mathrm{d}y}{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\int_I \int_z^{z+h} f_\xi(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x}{h}}{\frac{F_\gamma(z+h) - F_\gamma(z)}{h}} = \\ &= \int_I \frac{\int_{-\infty}^{z+h} f_\xi(x, y) \, \mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{z} f_\xi(x, y) \, \mathrm{d}y}{h f_\gamma(z)} \, \mathrm{d}x = \int_I \frac{f_\xi(x, z)}{f_\gamma(z)} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

9.2.1. Sűrűségfüggvény

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$f_{(\eta|\gamma = z)}(x) = \frac{f_\xi(x, z)}{f_\gamma(z)}.$$

9.2.2. Várható érték

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$E(\eta|\gamma = z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(\eta|\gamma=z)}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

9.2.2.1. Tétel

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor $E(\eta|\gamma = z)$ véges, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{(\eta|\gamma=z)}(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

9.3. Regressziós függvény

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ vektor értékű valószínűségi változó. Az η γ-ra vonatkoztatott regressziós függvény

$$r(z) = E(\eta|\gamma = z).$$

10. $\mathcal{L}^p$ terek és konvergencia

10.1. 1-valószínűséggel megegyező valószínűségi változók

Adot $\xi, \eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változók 1-valószínűséggel megegyeznek, ha

$$P\big(\omega \in \Omega \big| \xi(\omega) = \eta(\omega)\big) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\xi = \eta$ P-majdnem mindenütt.

10.2. $\mathcal{L}^p$ tér

Adott $p \in [1, \infty)$

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P) = \left\{ f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R} \middle| f \text{ mérhető}, \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}P < \infty \right\}.$$

10.3. p-norma

Adott $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}P \right)^{\frac{1}{p}} & p \in [0, \infty) \\ \sup\limits_{\omega \in \Omega \setminus A} \big|f(\omega)\big| & p = \infty \end{cases}$$

10.4. Riesz-Fischer tétel

$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Banach-tér, tehát $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat konvergens.

10.5. Konvergencia-fajták $\mathcal{L}^p$ terekben

Adott $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$ függvénysorozat és $f \in \mathcal{L}^p$, illetve $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valószínűségi változósorozat és ξ valószínűségi változó.

10.5.1. 1-valószínűséggel egyenletes konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \to f$ 1-valószínűséggel egyenletesen, ha

$$\lim_{n \to \infty} \big\|f_n - f\big\|_\infty = 0.$$

Ekkor $f_n \overset{m.m.e.}{\longrightarrow} f$.

10.5.2. 1-valószínűséggel konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \to f$ 1-valószínűséggel, ha

$$P\big(\omega \in \Omega \big| f_n(\omega) \to f(\omega)\big) = 1.$$

Ekkor $f_n \overset{m.m.}{\longrightarrow} f$.

10.5.3. $\mathcal{L}^p$-ben való konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \to f$ $\mathcal{L}^p$-ben, ha

$$\lim_{n \to \infty} \big\|f_n - f\big\|_p = 0.$$

Ekkor $f_n \overset{\mathcal{L}^p}{\longrightarrow} f$.

10.5.4. Sztochasztikus konvergencia

Azt mondjuk, hogy $\xi_n \to \xi$ sztochasztikusan, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

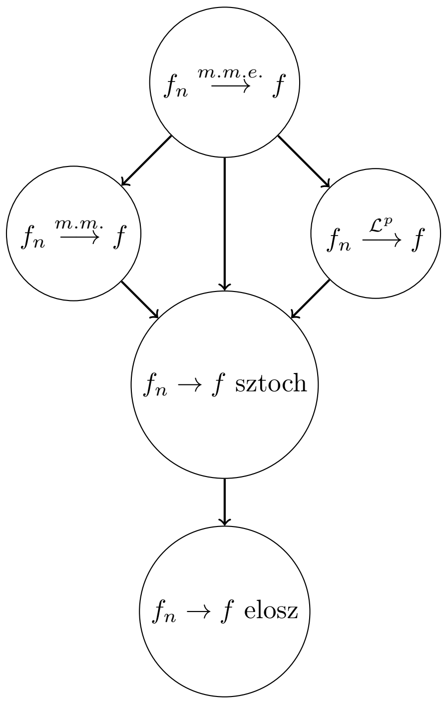
$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\omega \in \Omega \Big| \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right| > \varepsilon\Big) = 0.$$

10.5.5. Eloszlásban való konvergencia

Azt mondjuk, hogy $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, ha

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x).$$

10.5.6. Konvergencia-fajták közti összefüggés



Bizonyítás

1. $$\xi_n \xrightarrow{m.m.e.} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{m.m.} \xi$$

   Triviális.

2. $$\xi_n \xrightarrow{m.m.e.} \xi \implies \xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} \xi$$

   Tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \left\|\xi_n - \xi\right\|_\infty = 0$, kell, hogy $\lim_{n\to\infty} \left\|\xi_n - \xi\right\|_p = 0$.

   $$\lim_{n\to\infty} \left\|\xi_n - \xi\right\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\xi_n - \xi\right|^p \mathrm{d}P\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

   ekvivalens azzal, hogy

   $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left|\xi_n - \xi\right|^p \mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \left\|\xi_n - \xi\right\|_p^p = 0.$$

Tudjuk, hogy

$$\left|\xi_n - \xi\right|^p \leq \left(\sup_{\omega\in\Omega}\left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right|\right)^p = \left\|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right\|_\infty^p$$

amiből

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\xi_n - \xi\right\|_p^p \leq \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left\|\xi_n - \xi\right\|_\infty^p \,\mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty}\left\|\xi_n - \xi\right\|_\infty^p \int_\Omega \mathrm{d}P = 0.$$

3.

$$\xi_n \xrightarrow{m.m.} \xi \implies \xi_n \to \xi \text{ sztochasztikusan}$$

Tudjuk, hogy

$$P\big(\omega\in\Omega \big| \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\big) = 1$$

amiből $\forall\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\omega\in\Omega \Big| \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right| < \varepsilon\Big) = 1.$$

Ebből

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\omega\in\Omega \Big| \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right| > \varepsilon\Big) \leq \lim_{n\to\infty} P\Big(\omega\in\Omega \Big| \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right| \geq \varepsilon\Big) = 0.$$

4.

$$\xi_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} \xi \implies \xi_n \to \xi \text{ sztochasztikusan}$$

Az $\mathcal{L}^p$-ben való konvergencia miatt tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} E\big(|\xi_n - \xi|^p\big) = 0$. Ekkor a Markov egyenlőtlenséget felhasználva

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\omega\in\Omega \Big| \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right| > \varepsilon\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\omega\in\Omega \Big| \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right|^p > \varepsilon^p\Big) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E\big(|\xi_n - \xi|^p\big)}{\varepsilon^p} = 0.$$

11. Határértéktételek

11.1. Centrális határeloszlás tétel

Adottak $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

11.2. DeMoivre-Laplace tétel

A (n,p) paraméterű binomiális eloszlás sztochasztikusan konvergál a $\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ paraméterű normális eloszláshoz.

Bizonyítás
Jelöljenek $(\xi_i)_{i\leq n\in\mathbb{R}}$ független változók egy olyan eseményt, melyre $\forall P(\xi_i = 1) = p, P(\xi_i = 0) = 1-p$. Ekkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i = m\right) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

tehát az összeg binomiális eloszlású. Ezen felül $\forall E(\xi_i) = p, \sigma(\xi_i) = \sqrt{p(1-p)}$. Ekkor a centrális határeloszlás tételből

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \to \Phi(x)$$

amiből

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i < \sqrt{np(1-p)}x + np\right) \to \Phi(x).$$

Legyen $z = \sqrt{np(1-p)}x + np$, így

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i < z\right) \to \Phi\left(\frac{z-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Ezzel beláttuk az állítást.

11.3. Nagy számok gyenge törvénye

Adottak $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - E(\xi_1)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

tehát a valószínűségi változók számtani közepe sztochasztikusan konvergál a várható értékhez.

Bizonyítás
A Csebisev egyenlőséget felírva

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - E(\xi_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varepsilon^2 n}\sigma^2(\xi_1) = 0.$$

Tehát valóban teljesül a sztochasztikus konvergencia feltétele.

12. Statisztika

12.1. Minta

Mintának nevezzük a (ξ_i) mintavételi változók összességét. A nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezett elemeket (ξ_i^*)-al jelöljük.

12.1.1. Középérték

A minta középértéke

$$\overline{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}.$$

12.1.2. Empirikus szórás

A minta empirikus szórása

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2}{n}}.$$

12.1.3. Középpont

A minta középpontja

$$\frac{\xi_1^* + \xi_n^*}{2}.$$

12.1.4. Medián

A minta mediánja

$$\begin{cases} \xi_k^* & n = 2k-1 \\ \frac{\xi_k^* + \xi_{k+1}^*}{2} & n = 2k \end{cases}.$$

12.1.5. Terjedelem

A minta terjedelme

$$\xi_n^* - \xi_1^*.$$

12.1.6. Empirikus eloszlásfüggvény

A minta empirikus eloszlásfüggvénye

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \le \xi_1^* \\ \frac{k}{n} & \xi_k^* < x \le \xi_{k+1}^* \\ 1 & \xi_n^* < x \end{cases}.$$

12.1.6.1. Gilvenkó tétel

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left|F_n(x) - F(x)\right|\right) = 0\right) = 1$$

tehát az empirikus eloszlásfüggvény 1-valószínűséggel konvergál $F(x)$-hez.

12.1.7. Empirikus sűrűségfüggvény

A minta empirikus sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{k(x+h) - k(x)}{nh}$$

ahol $k(x)$ azon mintaelemek száma, melyek értéke kisebb, mint x.

12.2. Becslés

Adott

1. ξ megfigyelt valószínűségi változó
2. θ ξ eloszlása
3. (ξ_i) ξ-ből vett n-elemű minta.

A becslés célja, hogy készítsünk egy

$$\hat{\theta} = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

függvényt, mellyel becsüljük θ-t.

12.2.1. Tulajdonságok

1. A becslés torzítatlan, ha $E\big(\hat{\theta}\big) = \theta$.
2. $\hat{\theta}_1$ hatásosabb, mint $\hat{\theta}_2$, ha $\sigma\big(\hat{\theta}_1\big) < \sigma\big(\hat{\theta}_2\big)$.
3. A $\big(\hat{\theta}_n\big)$ sorozat aszimptotikusan torzítatlan, ha $\lim_{n\to\infty} E\big(\hat{\theta}_n\big) = \theta$.
4. A becslés elégséges, ha a változók együttes feltételes eloszlása bármilyen $\hat{\theta} = y$ feltétel esetén nem tartalmazza a becsült θ paramétert.
5. A becslés konzisztens, ha torzzítatlan és $\hat{\theta} \xrightarrow{m.m.} \theta$.

12.2.2. Tétel

A minta középértéke torzítatlan becslése a várható értéknek.

12.2.3. Tétel

A minta középértékének szórása 0-ba konvergál.

12.2.4. Tétel

A minta középértéke a várható érték leghatásosabb lineáris becslése.

12.2.5. Tétel

A minta empirikus szórásnégyzete nem torzítatlan becslése a szórásnégyzetnek.

12.2.5.1. Korrigált empirikus szórásnégyzet

A minta korrigált empirikus szórásnégyzete

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_n^2.$$

A korrigált empirikus szórásnégyzet torzítatlan becslése a szórásnégyzetnek.

12.3. Maximum likelihood estimation

Az MLE során az $L(\theta)$ likelihood függvényt kell maximalizálnunk, ahol n független minta esetén

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta).$$

Hasonló elv alapján az $l(\theta)$ log likelihood függvény is elég maximalizálnunk, ahol

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta).$$

12.4. Konfidenciaintervallum

A $\hat{\theta}$ becsléshez tartozó $\left(\hat{\theta} - z, \hat{\theta} + z\right)$ konfidenciaintervallumról azt mondjuk, hogy $100(1-\alpha)$%-os megbízhatósági szinthez tartozik, ha $1-\alpha$ valószínűséggel a ténylegesen meghatározott intervallum lefedi a becsült paraméter valódi értékét.

12.4.1. Normális eloszlás ismert szórással

Becsüljük $E(\xi) = m$-t a középértékkel! Definiáljunk egy új változót

$$\eta = \frac{\overline{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

így η standard normális eloszlású. Ekkor kell

$$P(-z < \eta < z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 1 - \alpha$$

amiből $\Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, amiből z meghatározható. Ekkor

$$-z < \frac{\overline{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z$$

$$\overline{\xi} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{\xi} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

tehát a konfidenciaintervallum

$$\left(\overline{\xi} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{\xi} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

12.4.2. Nem normális eloszlás ismert szórással

Becsüljük $E(\xi) = m$-t a középértékkel! A centrális határeloszlás tételből

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} < z\right) \approx \Phi(z).$$

Tehát

$$P\left(\frac{\left|\overline{\xi} - m\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) < z \approx 2\Phi(z) - 1 = 1 - \alpha$$

amiből a konfidenciaintervallum

$$\left(\overline{\xi} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{\xi} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$