Komplex számok gyakoló feladatok

1. Számítsd ki algebrai alakban és az eredményt ábrázold koordináta-rendszerben:

a) Ha z=2+4i és w=2-i, akkor mennyi $z \cdot w$; $\frac{z}{w}$; $\frac{1}{z}$; $i \cdot w$; z^2; $-3 \cdot w$.

b) Ha z=1-3i és w=2+2i, akkor mennyi $z \cdot w$; $\frac{z}{w}$; $\frac{1}{z}$; $i \cdot w$; z^2; $-3 \cdot w$.

2. Számítsd ki az alábbi komplex számok hosszát és argumentumát:

a) z=2-i

b) z=3+i

c) $z=1-i\sqrt{2}$

3. Írjuk fel trigonometrikus és exponenciális alakban a következő komplex számokat:

a) z=-3i

b) z=1

c) z=-i

d) z=2+i

e) $z=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}i$

4. Adjuk meg algebrai alakban a következő komplex számokat:

a) $z=\frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$

b) $z=\sqrt{3}(\cos 120° + i \sin 120°)$

5. Adottak $z_1=-\sqrt{3}+2i, z_2=1-i, z_3=-1+i$ komplex számok. Számítsuk ki az alábbiakat:

a) $|z_1|=?, |z_2|=?, |z_3|=?$

b) $\mathrm{arc}(z_2)$ (argumentum)

c) $\mathrm{Re}(z_1)$

d) $\mathrm{Im}(z_2)$

e) z_1+z_2

f) $z_1\overline{z_2}$

g) $z_1 z_3$

h) $z_1+\overline{z_3}$

i) $z_1\overline{z_1}$

6. Végezzük el a műveleteket!

a) $\left(\overline{2-i}\right)^4$

b) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$

c) $\overline{\left(\frac{3-i}{2+2i}\right)}$

d) $\overline{(1-2i)(3+i)}$

e) $(1+i)^7$

7. **Végezzük el a számolást trigonometrikus alakban, és írjuk fel a végeredményt algebrai alakban is!**

a) $2(\cos 15° + i\sin 15°)\cdot 4(\cos 105° + i\sin 105°)$

b) $\dfrac{4}{\cos 210° + i\sin 210°}$

c) $(2(\cos 40° + i\sin 40°))^9$

d) $3(\cos 60° + i\sin 60°)\cdot 4(\cos 120° + i\sin 120°)$

e) $[2(\cos 15° + i\sin 15°)]^4$

f) $\dfrac{\cos 110° + i\sin 110°}{2(\cos 65° + i\sin 65°)}$

8. **Számítsuk ki a következő kifejezések értékét és az eredményt adja meg algebrai alakban!**

a) $\dfrac{z_1^8}{z_2^4}\cdot 32 - \overline{z_2}^{\,2} = ?$ ha $z_1 = 2(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

9. **Adja meg az alábbi komplex számok értékét:**

a) $\begin{cases} z_1 = 3-3i \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ\right) \end{cases}$ → $\left(2 + \dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_1 + z_2}\right)^4 = ?$

b) $\begin{cases} z_1 = 8\cdot\left(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right) \\ z_3 = 1+\sqrt{3}i \end{cases}$ → $\dfrac{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{z_3^3} + i^{413} = ?$

c)

$\begin{cases} z_1 = 8\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) \\ z_3 = 1-\sqrt{3}i \end{cases}$ → $\left(\dfrac{5i}{2+i} - \dfrac{\overline{z_1}\cdot z_2}{z_3^3}\right)^{375} = ?$

d) $\begin{cases} z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ z_2 = -1+i \end{cases}$ → $\frac{(6-\sqrt{12}i)^3}{{z_2}^8} + \frac{\overline{z_1}}{i^{101}} = ?$

e) $\begin{cases} z_1 = 4-3i \\ z_2 = \sqrt{8}(\cos 45^\circ + i\cdot\sin 45^\circ) \end{cases}$ → $\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{z_1 - z_2} = ?$

f) $\begin{cases} z_1 = \cos 35^\circ + i\cdot\sin 35^\circ \\ z_2 = 1+\sqrt{3}\cdot i \end{cases}$ → $\frac{z_1^3\cdot z_2^5}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} = ?$

g) $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{3}+i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + i\cdot\sin 75^\circ) \end{cases}$ → $z_1^3\cdot z_2^6 + \frac{\overline{z_1}}{z_2} = ?$

h) $\frac{1-2i}{2+i}\cdot 5\cdot i^{173} = ?$

i) $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{12}+2i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ) \end{cases}$ → $\frac{z_2^{12}}{z_1^3} + \frac{\overline{z_2}}{i^{677}} = ?$

j)

$\begin{cases} z_1 = 8\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ z_3 = 1+\sqrt{3}i \end{cases}$ → $\left(\frac{10i}{4+2i} - \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_3^3}\right)^{413} = ?$

k) $\begin{cases} z_1 = -6+10i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) \end{cases}$ → $\frac{\left(\overline{z_1}+z_2^8\right)^4}{i^{563}} = ?$

l) $\begin{cases} z_1 = 3-8i \\ z_2 = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) \end{cases}$ → $\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{z_2^2}\cdot i^{63} = ?$

m) $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{12}+2i \\ z_2 = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) \end{cases}$ → $\frac{z_2^8}{z_2^3 + \overline{z_1}^4} = ?$

n) $\begin{cases} z_1 = \cos 35^\circ + i \cdot \sin 35^\circ \\ z_2 = 1 + \sqrt{3} \cdot i \end{cases}$ → $\dfrac{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}{i^{222} \cdot z_1^3 \cdot z_2^5} = ?$

o) $\begin{cases} z_1 = \sqrt{3} + 3i \\ z_2 = 2\left(\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ\right) \end{cases}$ → $\dfrac{z_1^8}{i^9 \cdot z_2^2} + \overline{z_2} = ?$

p) $\begin{cases} z_1 = \sqrt{3}\left(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ\right) \\ z_2 = 3 + \sqrt{3}i \end{cases}$ → $\dfrac{i^{11} \cdot z_1}{z_2^6} - \dfrac{\overline{z_2}}{z_1^2} = ?$

10. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

a) $z^2 + z + 1 = 0$

b) $9z^3 + \dfrac{1}{3} = 0$

c) $16z^2 + 1 = 0$

11. Számolja ki az alábbi komplex számok megfelelő gyökeit! Adja meg a gyökök algebrai alakját, és ábrázolja őket a komplex számsíkon!

a) $z = -3 - \sqrt{27}i \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

b) $\sqrt[3]{-27} = ?$

c) $\sqrt[3]{8} = ?$

d) $z = 1 - \sqrt{3}i \quad \sqrt[2]{z} = ?$

e) $z = -4 - 4i \quad \sqrt[5]{z} = ?$

f) $\sqrt[3]{-8i} = ?$

g) $z = -3 + \sqrt{27} \cdot i \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

h) $z = -8 + 8\sqrt{3} \cdot i \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

i) $z = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

j) $\sqrt[4]{16i} = ?$

k) $\sqrt[5]{1} = ?$

l) $\sqrt[6]{1} = ?$

12. Oldja meg az alábbi másodfokú egyenleteket a komplex számok halmazán!

a) $x^2 + 2ix - 1 - 2i = 0$

b) $x^2 - 2ix - 1 - 8i = 0$

c) $x^2 + 6x + 25 = 0$

d) $x^2 + 8ix - 15 = 0$

e) $x^2 + x + 1 = 0$

f) $x^2 + 2ix + 8 = 0$

g) $x^2 - 4ix - 4 - 8i = 0$

h) $x^2 + 4ix - 4 - 2i = 0$

i) $4x^2 + 4ix + 1 + 3i = 0$

j) $x^2 - ix - 1 = 0$

k) $2x^2 + 4x + 2 + i = 0$

13. Oldja meg a $z^2 + (2i-3)z - 1 - 3i = 0$ komplex egyenletet! Határozza meg a fenti egyenlet legkisebb képzetes résszel rendelkező gyökének harmadik gyökeit is!

14. Oldja meg a $z^2 + (2i-3)z - 3 - i = 0$ komplex egyenletet! Határozza meg a fenti egyenlet legkisebb abszolút értékű gyökének harmadik gyökeit is!

15. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

a) $(1+i)z^6 = 1-i$

b) $(1-i\sqrt{3})z^5 = 1+i\sqrt{3}$

c) $x^8 + ix^4 - 1 = 0$

d) $x^8 + 4x^4 + 3 = 0$

e) $x^6 - ix^3 + \frac{3}{4} = 0$

f) $x^6 + 3 = -2ix^3$

g) $ix^6 + 2x^3 + 3i = 0$

h) $z + 2\bar{z} = |z| - 2i$

i) $2z + \bar{z} = |z| + i$

j) $3z - |z| = \bar{z} + 4\sqrt{3}i$

k) $z \cdot \bar{z} - 3(z - \bar{z}) = 2 + 3i$

16. Számítsa ki a következő egységgyököket, és döntse el, melyek ezek között a primitív egységgyökök! Ábrázolja is a gyököket!

a) $\sqrt[4]{1} = ?$

Megoldás:

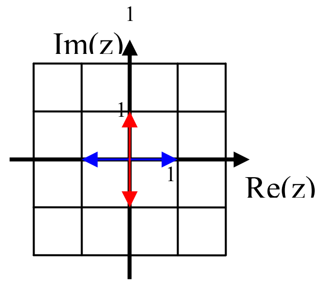
$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\cos 0° + i\sin 0°} = \cos\left(k\frac{360°}{4}\right) + i\sin\left(k\frac{360°}{4}\right)$$

$z_0 = \cos 0° + i\sin 0°$

$z_1 = \cos 90° + i\sin 90°$

$z_2 = \cos 180° + i\sin 180°$

$z_3 = \cos 270° + i\sin 270°$



Egységgyök
Primitív egységgyök

Ezek közül primitív egységgyök:

z_1, z_3, mivel ezeknek 4. hatványa adja ki először az 1-et, ezek hatványai közt szerepel az összes többi 4. egységgyök, és ezek k indexe relatív prím 4-gyel.

b) $\sqrt[5]{1}$

c) $\sqrt[8]{1}$

d) $\sqrt[9]{1}$

e) Adja meg a primitív 6. egységgyököket!

f) Adja meg a primitív 10. egységgyököket!

17. Igaz-e, hogy vannak primitív egységgyökök az $\frac{1}{2}\sqrt[4]{16i}$ komplex számok között?

18. Igaz-e, hogy vannak primitív egységgyökök az $\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}$ komplex számok között?

19. Adjuk meg exponenciális alakban a következő komplex számokat:

a) $z=\frac{1}{4}(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$

b) $z=\sqrt{2}(\cos 150° + i\sin 150°)$

c) $z=3(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$

d) $z=\frac{3}{4}(\cos 210° + i\sin 210°)$

20. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét és az eredményt adja meg algebrai alakban!

a) $\frac{i^{519}}{(15-i\sqrt{75})^4}+\frac{(e^{i135°})^3}{\overline{z}}$, ahol z a $\sqrt[3]{1}$ nagyobb argumentumú primitív egységgyöke.

b)

c) Határozza meg a $\sqrt[3]{1}$ értékei közül a 2. síknegyedbe esőt, ezt jelöljük z_1 -gyel!

$$\frac{(6-\sqrt{12}i)^3}{\left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^{10}}+\frac{\overline{z_1}}{i^{49}}$$

Megoldások:

Megoldások ellenőrzéséhez javaslom a MATLAB programot vagy a neten is elérhető MATHEMATICA-t : http://www.wolframalpha.com