

# Valószínűségszámítás

Csercsik Dávid, Szűcs Zsolt

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>Alapfogalmak</b>	<b>4</b>
1.1	Általános jelölések és ismétlés . . . . .	4
1.2	$\sigma$ -algebra és mérhető tér . . . . .	4
1.3	Borel halmazok, mérhető függvény . . . . .	5
1.4	Mérték, Valószínűség . . . . .	6
1.5	Valószínűségi változó, eloszlás, eloszlásfüggvény . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Függetlenség</b>	<b>9</b>
2.1	Események függetlensége, teljes valószínűség tétel, Bayes tétel . . . . .	9
2.2	Valószínűségi változók függetlensége . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Diszkrét eloszlások</b>	<b>11</b>
3.1	Binomiális eloszlás . . . . .	11
3.2	Geometrikus és hipergeometrikus eloszlás . . . . .	12
3.3	Poisson eloszlás . . . . .	13
3.4	Binomiális és Poisson eloszlás kapcsolata . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Integrál és várható érték</b>	<b>15</b>
4.1	Függvény halmaz feletti, mérték szerinti integrálja . . . . .	15
4.2	Várható érték kiszámítása . . . . .	18
4.3	Diszkrét eloszlások várható értéke . . . . .	19
4.3.1	Binomiális eloszlás várható értéke . . . . .	19
4.3.2	Geometrikus eloszlás várható értéke . . . . .	20
4.3.3	Poisson eloszlás várható értéke . . . . .	21
4.3.4	Hipergeometrikus eloszlás várható értéke . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Lebesgue mérték és mértékek tulajdonságai</b>	<b>23</b>
5.1	Lebesgue mérték . . . . .	23
5.2	Mértékek abszolút folytonossága és szingularitása . . . . .	25
5.3	Improprius Riemann és Lebesgue integrálhatóság kapcsolata . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Folytonos eloszlások</b>	<b>27</b>
6.1	Sűrűségfüggvény . . . . .	27
6.2	Folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értéke . . . . .	28
6.3	Exponenciális eloszlás . . . . .	29
6.4	Normális eloszlás . . . . .	31
6.5	Szórás . . . . .	32
6.5.1	A szórásnégyzet tulajdonságai . . . . .	33
6.5.2	A szórásnégyzet kiszámítása . . . . .	34
6.6	Csebisev egyenlőtlenség . . . . .	35
6.7	Független valószínűségi változók várható értéke és szórása . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Vektor értékű valószínűségi változók</b>	<b>36</b>
7.1	Folytonos vektor értékű valószínűségi változók . . . . .	40

<b>8</b>	<b>Kovariancia és Korreláció</b>	<b>42</b>
<b>9</b>	<b>Valószínűségi változók transzformációja</b>	<b>44</b>
9.1	Valószínűségi vektorváltozók transzformációja . . . . .	46
<b>10</b>	<b>Feltételes eloszlások</b>	<b>47</b>
10.1	Feltételes eloszlások diszkrét valószínűségi változók esetén . . . . .	47
10.2	Feltételes eloszlások folytonos valószínűségi változók esetén . . . . .	48
<b>11</b>	<b><math>L^p</math> terek és konvergencia</b>	<b>50</b>
11.1	$L^p$ terek . . . . .	50
11.2	Konvergencia-fajták $L^p$ terekben . . . . .	52

# 1 Alapfogalmak

## 1.1 Általános jelölések és ismétlés

$\overset{\circ}{=}$	definíció szerint egyenlő
$2^\Omega$	$\{A \mid A \subseteq \Omega\}$ , azaz $\Omega$ összes részhalmazának halmaza
HR	Halmazrendszer
$\mathbb{N}$	Természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$	Valós számok halmaza
$\mathbb{Q}$	Racionális számok halmaza
$\exists!$	Egyértelműen létezik
$\underline{1}$	csupa 1-ből álló vektor

*Ismétlés.*  $G \subseteq \mathbb{R}$  nyílt<sup>1</sup> ha  $(\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0) : ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subseteq G$

*Megjegyzés.*  $]x, y[$  az  $x, y$  nyílt intervallum jelölése. A kerek zárójellel rendezett párt jelölünk:  $(x, y)$  az  $x$ -bol és  $y$ -ból álló rendezett pár.

## 1.2 $\sigma$ -algebra és mérhető tér

**Definíció 1.1.** Eseménytér

Legyen  $\Omega$  nemüres halmaz, melyet a jegyzetben eseménytérnek nevezünk.

**Definíció 1.2.**  $\sigma$ -algebra vagy eseményalgebra

Legyen  $\mathfrak{F}$  az  $\Omega$  olyan részhalmazainak rendszere, mely rendelkezik a köv. tulajdonságokkal:

- $\mathfrak{F}$  zárt a megszámlálható (véges vagy végtelen) unióra (jele ' $\cup$ ')
- $\mathfrak{F}$  zárt a különbségképzésre (jele ' $\setminus$ ')
- $\Omega \in \mathfrak{F}$

Az ilyen tulajdonságú HR-eket nevezzük  $\sigma$ -algebrának,  $\mathfrak{F}$  elemeit pedig eseményeknek.

*Megjegyzés.* Ekkor komplementerképzésre (' $A^C$ ') és metszetre (' $\cap$ ') is zárt hiszen

$$\begin{aligned} A^C &= \Omega \setminus A \\ A \cap B &= (A^C \cup B^C)^C = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)) \end{aligned}$$

*Ismétlés.* Egy halmaz megszámlálhatóan végtelen ha létezik bijekció  $\mathbb{N}$ -el.

---

<sup>1</sup>itt: metrikus értelemben nyílt, azaz feltételezünk egy távolságfüggvényt. Van még pl. olyan hogy 'topologikus értelemben nyílt' - ekkor direkt módon definiáljuk a nyíltak tekintett halmazokat, és ezekre bizonyos tulajdonságoknak teljesülnie kell: bármely két nyílt halmaz uniója illetve metszete is nyílt kell legyen.

**Definíció 1.3.** Mérhető tér

Legyen  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $\mathfrak{F} \subseteq 2^\Omega$   $\sigma$ -algebra. Ekkor az  $(\Omega, \mathfrak{F})$  rendezett pár neve mérhető tér.

**Definíció 1.4.** Elemi események (véges eseménytér esetén)

Ha  $\Omega$  véges, az egyelemű részhalmazait elemi eseményeknek nevezzük.

**Definíció 1.5.** Teljes eseményrendszer

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  teljes eseményrendszer ha  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  és

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

**Példa 1.1.** Különböző  $\sigma$ -algebrák ugyanazon eseménytér felett

$$\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\} = \{\emptyset, \{\text{dog}, \text{cat}, \text{rabbit}, \text{pig}\}\}$$

$$\mathfrak{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{\text{dog}, \text{cat}\}, \{\text{rabbit}, \text{pig}\}\}$$

$$\mathfrak{F}_3 = 2^\Omega$$

**Példa 1.2.** Legyen  $\Omega$  (nemüres) tetszőleges és  $x \in \Omega$ . Legyen  $\mathfrak{F} \doteq \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \Omega \mid x \in A\}$   $\sigma$ -algebra-e  $\mathfrak{F}$ ?

MO: Nem mert ugyan  $\cup$ -ra és  $\cap$ -re zárt, de  $A \in \mathfrak{F} \rightsquigarrow A^C \notin \mathfrak{F}$ .

**Állítás 1.1.**  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{H} \subseteq 2^\Omega$  tetszőleges. Ekkor  $\exists$  egy legszűkebb  $\Omega$ -beli  $\sigma$ -algebra ( $\mathfrak{F}$ ) amire  $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{F}$ .

**Definíció 1.6.** Generált  $\sigma$ -algebra

A  $\mathcal{H}$  által generált  $\sigma$ -algebra a legszűkebb  $\Omega$ -beli  $\sigma$ -algebra ( $\mathfrak{F}$ ) amire  $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{F}$ . Jele:  $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}$

**Példa 1.3.** Generált  $\sigma$ -algebra

$$\Omega = \{\text{dog}, \text{cat}, \text{rabbit}, \text{pig}\}$$

$$\mathcal{H} = \{\text{rabbit}\} \rightsquigarrow \mathfrak{F}_{\mathcal{H}} = \{\emptyset, \Omega, \{\text{rabbit}\}, \{\text{dog}, \text{cat}, \text{pig}\}\}$$

### 1.3 Borel halmazok, mérhető függvény

Ahhoz, hogy a következő fogalmakat korrekt módon tudjuk bevezetni, definiálnunk kell az ún Borel-halmazok fogalmát. Ha matematikailag korrektnek szeretnénk lenni, sok állítás esetében nem mondhatunk 'bármilyen részhalmaz'-t, mert (legfőképp megszámlálhatatlanul végtelen számosságú halmazok esetén) nagyon elvetemült részhalmazok is lehetnek (ők a nem Borelek).

Tehát akkor Borel halmazok:

$$\Omega \doteq \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &\doteq \{G \subseteq \mathbb{R} \mid G \text{ nyílt}\} \\ \mathcal{P} &\doteq \{[a, b[ \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \\ \mathcal{I} &\doteq \{I \subseteq \mathbb{R} \mid I \text{ intervallum}\}\end{aligned}$$

*Megjegyzés.* A ' $\doteq$ ' jelölés jelentése: definíció szerint egyenlő, azaz 'legyen'.

**Állítás 1.2.**  $\mathfrak{F}_{\mathcal{G}} = \mathfrak{F}_{\mathcal{P}} = \mathfrak{F}_{\mathcal{I}}$

**Definíció 1.7.** Borel halmazok

$\mathfrak{F}_{\mathcal{I}}$  elemei:  $\mathbb{R}$ -beli Borel-halmazok. Jelölésük:  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  vagy  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

**Definíció 1.8.** Mérhető függvény

$(\Omega, \mathfrak{F})$  mérhető tér,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  fv mérhető ha  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  esetén

$$f^{-1} \langle B \rangle \doteq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}$$

avagy 'minden Borel halmaz ősképe  $\mathfrak{F}$ -beli'

*Megjegyzés.* Vegyük észre hogy a definícióban csak ' $\in$ ' szerepel, nem kell hogy ráképzés legyen.

**Példa 1.4.** Nem mérhető függvény

$$\begin{aligned}\Omega &\doteq \{ \text{🐱}, \text{🐱} \}, \mathfrak{F} \doteq \{ \emptyset, \Omega \} \\ f : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, f(\text{🐱}) \doteq 1, f(\text{🐱}) \doteq 0 \\ \rightsquigarrow f^{-1} \langle \{1\} \rangle &= \{ \text{🐱} \} \notin \mathfrak{F}\end{aligned}$$

*Megjegyzés.* Miért Borel az  $\{1\}$  (azon kívül hogy megbeszéltük hogy minden olyan  $\mathbb{R}$ -beli halmaz amit el tudunk képzelni Borel)? Mert pl a  $[0,1]$  és az  $[1,2]$  intervallumok metszete. Márpedig a Borelek halmaza megegyezik az intervallumok által generált  $\sigma$ -algebrával, a  $\sigma$ -algebra pedig, mint tudjuk, metszetzárt.

*Megjegyzés.* Változtassuk meg a  $\sigma$ -algebrát: Legyen

$$\mathfrak{F}' \doteq 2^{\Omega} = \{ \emptyset, \{ \text{🐱} \}, \{ \text{🐱} \}, \{ \text{🐱}, \text{🐱} \} \} \rightsquigarrow \text{ekkor } f \text{ mérhető!}$$

*Megjegyzés.* A rövidebb jelölés érdekében amikor a továbbiakban azt mondjuk hogy  $f : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mérhető, továbbra is arra gondolunk hogy  $f$   $\Omega$ -ból  $\mathbb{R}$ -be képez, de hozzátesszük hogy  $f$   $\mathfrak{F}$  szerint mérhető (ha nem mondjuk meg hogy mi szerint, nincs értelme). A pontos terminológia: Az  $f$  függvény  $\mathfrak{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mérhető.

**Állítás 1.3.**  $f, g : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mérhető,  $\lambda \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow f + g, f \cdot g, \lambda \cdot f, \lambda \cdot g$  mérhető<sup>2</sup>.

## 1.4 Mérték, Valószínűség

**Definíció 1.9.** Mérték

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F})$  mérhető tér. Egy  $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$  fv mérték ha

$$1. \mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{F}$$

---

<sup>2</sup>ahol persze  $(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$  stb

2.  $\mu(\emptyset) = 0$

3. Teljesül az úgynevezett  $\sigma$ -additivitás, azaz:

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

$\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathfrak{F}$ -beli sorozatra melyre  $A_n \cap A_m = \emptyset$ ,  $n \neq m$

*Megjegyzés.* Ha a 3-ik tulajdonságnál a szumma csak véges sok elemet tartalmaz, az egy speciális eset (csak véges sok  $A_n \neq \emptyset$ ).

**Definíció 1.10.** Valószínűség

Ha  $\mu$  mérték, és  $\mu(\Omega) = 1$ , akkor  $\mu$  valószínűség vagy valószínűségi mérték (röviden: valószínűség vagy valószínűségi mérték). Jelölése:  $P$ .

**Definíció 1.11.** Valószínűségi mező

Az  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  hármas valószínűségi mező, ha

- $(\Omega, \mathfrak{F})$  mérhető tér
- $P : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  valószínűség

*Megjegyzés.* Valószínűség tulajdonságai:  $\forall A, B \in \mathfrak{F}$

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
- $P(\Omega \setminus A) = P(A^C) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 1.5 Valószínűségi változó, eloszlás, eloszlásfüggvény

**Definíció 1.12.** Valószínűségi változó

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val. mező. Egy  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető fv neve: valószínűségi változó.

*Megjegyzés.* A  $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  jelölés alatt továbbra is egy  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val. változót értünk, de ezzel a jelöléssel hangsúlyozzuk, hogy  $\Omega$ -hoz az  $\mathfrak{F}$  eseményalgebra, ehhez pedig a  $P$  valószínűség tartozik, a val. változót pedig ezek esetén vizsgáljuk. Ahogy látni fogjuk, minden amit val. változókról mondani fogunk függ ezen 'kísérő' objektumtól. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a val. változó 'csomagban jön' egy valószínűségi mezővel.

**Definíció 1.13.** Valószínűségi változó által generált  $\sigma$ -algebra

Legyen  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val. vált. A  $\xi$  által generált  $\sigma$ -algebra:

$$\mathfrak{F}_\xi \stackrel{\circ}{=} \sigma\{\xi < B\} \text{ halmazok által generált } \sigma\text{-algebra, ahol } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (1)$$

**Definíció 1.14.** Valószínűségi változó eloszlása

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val mező,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val vált,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $\xi$  eloszlása:

$$Q_\xi(A) \stackrel{\circ}{=} P\left(\xi \in A\right)$$

*Megjegyzés.* A valószínűségi változó eloszlása

**Definíció 1.15.** Azonos eloszlású valószínűségi változók

$\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valváltozók azonos eloszlásúak, ha  $Q_\xi = Q_\eta$

**Definíció 1.16.** Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val mező,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val vált A  $\xi$  val vált eloszlás fv-e:

$$\begin{aligned} F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\xi(x) &= P(\xi \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leq x\}) \\ &= P\left(\xi \in ]-\infty, x] \right) \end{aligned}$$

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- Monoton nő
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$
- $F_\xi$  balról folytonos

*Megjegyzés.* Eloszlás és eloszlásfüggvény kapcsolata Speciális eset ha a halmaz, ami az eloszlás argumentuma egy félegyenes  $(\xi \leq x)$ :

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P\left(\xi \in ]-\infty, x] \right) = Q_\xi(]-\infty, x])$$

*Megjegyzés.* Azonos eloszlású valószínűségi változók eloszlásfüggvénye Ha  $\xi, \eta$  azonos eloszlásúak akkor persze)

$$P(\xi \leq x) = P(\eta \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Állítás 1.4.** Legyen  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan fv hogy

- $F$  monoton nő
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $F$  balról folytonos

$\Rightarrow \exists (\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val mező és  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val vált hogy  $F_\xi = F$

bizonyítás: [1]



## 2 Függetlenség

### 2.1 Események függetlensége, teljes valószínűség tétel, Bayes tétel

**Definíció 2.1.** Események függetlensége

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val mező,  $A, B \in \mathfrak{F}$  függetlenek ha  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

**Definíció 2.2.** Feltételes valószínűség

Legyen  $B \in \mathfrak{F}$ . Egy  $A \in \mathfrak{F}$  feltételes valószínűsége  $B$  szerint (tfh  $P(B) \neq 0$ )

$$P(A|B) \doteq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$$

*Megjegyzés.*  $A$  és  $B$  független  $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$  (tfh  $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ )

**Definíció 2.3.** Eseményrendszer függetlensége

$n \in \mathbb{N}$   $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  eseményrendszer független, ha páronként függetlenek.

Ekkor

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k)$$

*Megjegyzés.* A fenti következmény általános esetben (több mint 2 esemény esetén) nem elégséges feltétele a függetlenségnek.

**Tétel 2.1.** Teljes valószínűség tétele

$B_1, \dots, B_n$  teljes eseményrendszer, és  $\forall i$ -re  $P(B_i) > 0$ .  $A \in \mathfrak{F}$  tetszőleges,  $P(A) \neq 0$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad (2)$$

**Bizonyítás**

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

és mivel

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \quad \square$$

**Tétel 2.2.** Bayes tétel

$B_1, \dots, B_n$  teljes eseményrendszer, és  $\forall i$ -re  $P(B_i) > 0$ .  $A \in \mathfrak{F}$  tetszőleges,  $P(A) \neq 0$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} \quad (3)$$

**Bizonyítás**

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} \quad , \quad P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)}$$

$$P(B_k|A)P(A) = P(B_k \cap A) = P(A|B_k)P(B_k)$$

$$\Rightarrow P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} \quad \square \quad (4)$$

## 2.2 Valószínűségi változók függetlensége

**Definíció 2.4.** Valószínűségi változók függetlensége

$\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valváltozók.  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, ha  $\forall (A_k)_{1 \leq k \leq n} \mathfrak{F}_\xi$ -beli és  $(B_j)_{1 \leq j \leq m} \mathfrak{F}_\eta$ -beli rendszer független ( $n, m \in \mathbb{N}^+$ ).

A két rendszer függetlensége azt jelenti hogy ha bármit veszek a két rendszerből ( $A_k$ -ból és  $B_j$ -ből) azok függetlenek (mint események).

### 3 Diszkrét eloszlások

Diszkrétnek akkor hívunk egy valószínűségi változót, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel.

#### 3.1 Binomiális eloszlás

**Definíció 3.1.** Binomiális eloszlás

Azt mondjuk hogy a  $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó  $(n, p)$ -paraméterű binomiális eloszlású ( $p \in ]0, 1[$ ), ha

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n \quad (5)$$

Binomiális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \sum_{m=0}^k \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} & \text{ha } k < x \leq k+1 \quad 0 \leq k < n \\ 1 & \text{ha } x > n \end{cases} \quad (6)$$

*Megjegyzés.* Az 1.4 állítás értelmében ilyen  $F$ -hez létezik  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező (mivel a feltételek teljesülnek).

**Példa 3.1.** Hogy néz ki egy binomiális eloszlású valószínűségi változóhoz tartozó valószínűségi mező? ( $\Omega = ?$ ,  $\mathfrak{F} = ?$ ,  $P = ?$ )

Tekintsük az  $n=200$ ,  $p=0.1$  paraméterű binomiális eloszlást. Legyen

$$\Omega \doteq \{0, 1, 2, \dots, 200\} \quad \mathfrak{F} \doteq 2^\Omega \quad \xi \text{ pedig az identitás: } \xi(\omega) \doteq \omega$$

mivel  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 200\}$ , az alábbi jelölést is használhatjuk:  $\xi(k) = k$ .

Legyen továbbá

$$P(\xi = j) = P(\{j\}) \doteq \binom{200}{j} (0.1)^j (0.9)^{200-j} \quad 0 \leq j \leq 200$$

*Megjegyzés.* Szigorúan véve így csak az elemi eseményekre  $(\{0\}, \{1\}, \{2\} \dots \{200\})$  definiáltuk  $P$ -t. Általában nem hangsúlyozzuk, de természetesen (hogy mérték lehessen), a nem elemi eseményekre az additivitást feltételezzük (pl  $P(\{1, 2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\})$  - így már valóban  $\mathfrak{F} = 2^\Omega$  minden elemére, azaz  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 200\}$  minden részhalmazára tudjuk  $P$  értékét)

Teljesíti-e ez a konstrukció azon tulajdonságokat, melyeket a valószínűségtől elvárunk? A pozitivitás és a  $(\sigma)$ -additivitás triviálisan teljesül. Kell továbbá hogy  $\Omega$ -ra  $P$  értéke 1 legyen:

$$\sum_{j=0}^{200} P(\{j\}) = \sum_{j=0}^{200} \binom{200}{j} (0.1)^j (0.9)^{200-j}$$

A binomiális tétel alapján tudjuk hogy  $a, b \in \mathbb{R}$ -re:

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

Legyen  $a \stackrel{\circ}{=} p$ ,  $b \stackrel{\circ}{=} 1 - p$  ekkor

$$(p + 1 - p)^n = (1)^n = \sum_{j=0}^{200} P(\{j\}) = P(\Omega) \quad (7)$$

A valószínűségi eloszlása pedig (kicsit részletesebben kifejtve)

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \xi(k) = k$$

$$P(\xi = k) = P(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = k\}) = P(\{k\}) = \binom{200}{j} (0.1)^j (0.9)^{200-j}$$

### 3.2 Geometrikus és hipergeometrikus eloszlás

**Definíció 3.2.** Geometrikus eloszlás

Azt mondjuk hogy a  $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó  $p$ -paraméterű geometrikus eloszlású ( $p \in ]0, 1[$ ), ha

$$P(\xi = k) = p(1 - p)^{k-1} \quad k \in \mathbb{N} \quad (8)$$

*Megjegyzés.* Tételizzük fel a továbbiakban hogy a valószínűségi változó az identitás.  $k$  nem korlátos, így ebben az esetben  $\xi \infty$  sok (de megszámlálhatóan  $\infty$  sok) értéket vehet fel.

Ebben az esetben a valószínűségi eloszlás a következő:

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{N} & \mathfrak{F} &= 2^\Omega \\ P(\{k\}) &= p(1 - p)^{k-1} \quad \text{ha } k \neq 0, & P(\{0\}) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Vizsgáljuk meg ismét hogy  $\Omega$ -ra 1-e  $P$ !

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1 \quad (10)$$

*Megjegyzés.*  $k = 0$ -ra a valószínűség 0, így azt a tagot az első átalakításnál elhagytuk a szummából. Az utolsó egyenlőség a geometriai sor összegképletéből következik.

**Definíció 3.3.** Hipergeometrikus eloszlás

Azt mondjuk hogy a  $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó  $(N, n, K)$ -paraméterű hipergeometrikus eloszlású  $(K \leq n \leq N, N, n, K \in \mathbb{N})$ , ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (11)$$

### 3.3 Poisson eloszlás

**Definíció 3.4.** Poisson eloszlás

Azt mondjuk hogy a  $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó  $\lambda$ -paraméterű Poisson eloszlású  $(\lambda > 0)$ , ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (12)$$

Ismét csak kell:  $P(\mathbb{N}) = 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = 1$$

Az exponenciális függvény Taylor-sorát használtuk.

### 3.4 Binomiális és Poisson eloszlás kapcsolata

A Poisson eloszlás jól közelíti a binomiális, ha  $n$  nagy és  $p$  kicsi, sőt a Poisson eloszlás a binomiális határértéke, ha  $np = \lambda$  állandó és  $n \rightarrow \infty$ . Ekkor  $p = \frac{\lambda}{n}$

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned} \quad (13)$$

Rögzített  $k$  esetén az első tényező 1-hez tart ha  $n \rightarrow \infty$ , hiszen

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} &= \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \\ &= 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

mind a  $k$  darab tényezője 1-hez tart. Az  $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$  hatványnak is 1 a határértéke, mert az alapja 1-hez tart, a kitevője pedig konstans. Az utolsó tényezőre pedig

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\xi = k) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (15)$$

ami valóban a Poisson-eloszlás  $k$  indexű valószínűsége.

## 4 Integrál és várható érték

### 4.1 Függvény halmaz feletti, mérték szerinti integrálja

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűség imező,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valvált (így mérhető)

**Definíció 4.1.** Karakterisztikus függvény vagy indikátorfüggvény

Legyen  $A \in \mathfrak{F}$ . A karakterisztikus/indikátor függvénye:

$$\chi_A(\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } \omega \in \Omega \setminus A \\ 1 & \text{ha } \omega \in A \end{cases}$$

*Megjegyzés.* Valószínűségszámításban inkább az utóbbi kifejezés elterjedt, mivel a karakterisztikus függvény-t egy kifejezetten valószínűségszámítási fontos konstrukcióra használják. Hívjuk a továbbiakban  $A$ -t a  $\chi_A$  függvény generátorhalmazának.

**Definíció 4.2.** Lépcsos függvény vagy egyszerű függvény

Legyen  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$   $\mathbb{R}$ -beli véges rendszer<sup>3</sup>. Legyen  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$   $\mathfrak{F}$ -beli (halmaz)rendszer.

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\omega) \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{A_j}(\omega)$$

**Definíció 4.3.** Lépcsos függvény (halmaz feletti, mérték szerinti) integrálja

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűség imező,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lépcsos fv. olyan hogy

$$f(\omega) \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}(\omega)$$

ahol  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  olyan  $\mathfrak{F}$ -beli rendszer hogy  $A_j \cap A_k = \emptyset$  ha  $j \neq k$  és  $\alpha_j \in \mathbb{R}$   
Ekkor

$$\int_{\Omega} f dP \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j P(A_j)$$

*Megjegyzés.* Az  $A_j \cap A_k = \emptyset$  ha  $j \neq k$  feltétel nem szerepel a lépcsos fv-k általános definíciójában, itt viszont megköveteljük.

**Példa 4.1.**  $\Omega = \{\text{🐱}, \text{🐱}, \text{🐱}\}$ ,  $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$ ,  $P$  a számlálómérték ( $P(X) = |X|$  azaz  $X$  elemszáma),  $f = 4\chi_{\{\text{🐱}\}} + 3\chi_{\{\text{🐱}, \text{🐱}\}}$  ekkor  $\int_{\Omega} f dP = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$

*Megjegyzés.* Tekintsük a következő példát:

- $\Omega = [0, 1]$
- $f = \chi_{[0, \frac{1}{2}[} + 3\chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$
- $f' = \chi_{[0, \frac{1}{2}[} + 3\chi_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[} + 3\chi_{[\frac{3}{4}, 1]}$

---

<sup>3</sup> $\mathbb{R}$ -beli véges rendszer = véges sok valós szám

Látjuk hogy itt 'valójában' ugyanazt az  $f$ -et adtuk, meg, de formálisan  $f$  és  $f'$  mégis különbözőek. Felvetődik a kérdés hogy ilyen esetekben mi a helyzet  $\int_{\Omega} f dP$ -vel?

Ilyen esetekben belátható (itt nem részletezzük de lásd MISSSINGREF) hogy  $\int_{\Omega} f dP$   $P(A_j)$  tulajdonságai miatt nem függ  $f$  alakjától.

*Megjegyzés.* Általánosságban a lépcsős függvényeknél megengedjük hogy a generátorhalmazok (a halmazok amiknek a karakterisztikus függvényeiből összerakjuk őket) nem diszjunktak legyenek, de tegyük fel a továbbiakban hogy diszjunkt halmazok karakterisztikus függvényeiből állnak. Nyilván ha nem így van, könnyen segíthetünk a dolgon: Ha  $\exists A, B \quad A \cap B \neq \emptyset$  és  $\chi_A$  és  $\chi_B$  is szerepel a lépcsős függvényben  $\alpha_A$  és  $\alpha_B$  együttthatóval, definiálhatok a 2 tag helyett 3-at:  $\alpha_A \chi_{A \setminus B}$ ,  $\alpha_B \chi_{B \setminus A}$ ,  $(\alpha_A + \alpha_B) \chi_{A \cap B}$

**Állítás 4.1.** Legyen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  mérhető, korlátos fv.  $\Rightarrow \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fv. sorozat, hogy

- $\forall n \in \mathbb{N} : f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  lépcsős
- $\forall n \in \mathbb{N}$  és  $\omega \in \Omega$  esetén  $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$  (azaz  $(f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$  rögzített  $\omega$  esetén monoton növvő).
- $\forall \omega \in \Omega : f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$  (ahogy  $n \rightarrow \infty$ )

Az állítás bizonyítását lásd: MISSSINGREF.

**Definíció 4.4.** Korlátos pozitív mérhető függvény integrálja

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  mérhető és korlátos. Legyen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$  lépcsős fv. sorozat:  $f_n \nearrow f$ . Ekkor

$$\int_{\Omega} f dP \stackrel{\circ}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} f_n dP \right) \quad (16)$$

*Megjegyzés.* A fenti limes létezik, mert az integrálok sorozata monoton és korlátos. Ami nem triviális az az hogy nem függ  $f_n$ -től MISSSINGREF.

*Megjegyzés.* Az  $f_n \nearrow f$  jelölés jelentése: monoton növekvően tart.

**Állítás 4.2.** Legyen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  mérhető, (nem feltétlenül korlátos) fv.  $\Rightarrow \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fv. sorozat, hogy

- $f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  mérhető és korlátos
- $f_n \nearrow f$

Az állítás bizonyítását lásd: MISSSINGREF.

**Definíció 4.5.** Mérhető pozitív függvény integrálja

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  mérhető. Legyen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$  mérhető, korlátos fv-k sorozata:  $f_n \nearrow f$ . Ekkor

$$\int_{\Omega} f dP \stackrel{\circ}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} f_n dP \right) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (17)$$

ahol  $\overline{\mathbb{R}}_+ \stackrel{\circ}{=} \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$



**Definíció 4.6.** Függvény pozitív és negatív része  
 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető.

- $f^+ \doteq \max\{f, 0\}$  azaz  $f$  pozitív része
- $f^- \doteq \max\{-f, 0\}$  azaz  $f$  negatív része

$\omega \in \Omega$  tetszőleges esetén

$$f^+(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{ha } f(\omega) \geq 0 \\ 0 & \text{ha } f(\omega) < 0 \end{cases}$$

*Megjegyzés.*  $f = f^+ - f^-$ ,  $|f| = f^+ + f^-$

**Állítás 4.3.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető  $\Leftrightarrow f^+$  és  $f^-$  mérhető.

**Definíció 4.7.** Mérhető függvény integrálja

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető.

$$\int_{\Omega} f dP \doteq \left( \int_{\Omega} f^+ dP \right) - \left( \int_{\Omega} f^- dP \right) \quad (18)$$

ha a jobb oldal értelmes (azaz legfeljebb az egyik tag végtelen)

- $f$  integrálható (vagy röviden intható) ha  $\exists \int_{\Omega} f dP \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
- $f$  végesen integrálható (végesen intható) ha  $\int_{\Omega} f dP \in \mathbb{R}$

**Állítás 4.4.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető

$$\exists \text{ és } \left( \int_{\Omega} f dP \right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f| dP = \int_{\Omega} f^+ dP + \int_{\Omega} f^- dP \in \mathbb{R} \quad (19)$$

*Megjegyzés.* A jobb oldal mindig létezik, mert pozitív függvény integrálja létezik (persze lehet  $\infty$  is).

**Állítás 4.5.**  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\int_{\Omega} (f + g) dP = \left( \int_{\Omega} f dP \right) + \left( \int_{\Omega} g dP \right)$ , ha a jobb oldal  $\exists$
- $\int_{\Omega} \lambda f dP = \lambda \int_{\Omega} f dP$
- $\left| \int_{\Omega} f dP \right| \leq \int_{\Omega} |f| dP$ , ha a bal oldal  $\exists$
- $f \leq g \Rightarrow \int_{\Omega} f dP \leq \int_{\Omega} g dP$

**Definíció 4.8.** Várható érték

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó

A  $\xi$  valószínűségi változó várható értéke (ha  $\exists$ ):

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi \, dP \quad (20)$$

**Tétel 4.1.** Markov egyenlőtlenség

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező,  $\xi \geq 0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó,  $\varepsilon > 0$ . Ekkor

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon} \quad (21)$$

*Megjegyzés.* A fenti tételben fontos feltétel hogy  $\xi \geq 0$

**Bizonyítás**

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi \, dP \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \xi \, dP \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \varepsilon \, dP = \varepsilon \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} 1 \, dP = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon)$$

## 4.2 Várható érték kiszámítása

Legyen  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diszkrét valvált. Ekkor  $\xi$  képtere

$$Im \, \xi = \{\xi_n | n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) | \omega \in \Omega\}$$

Tfh.  $\xi$  integrálható ( $\exists E(\xi)$ ). Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n) \quad (22)$$

Ahol  $\xi_n$ :  $\xi$  lehetséges értékei

**Példa 4.2.** Kockadobás  $\xi_n : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$E(\xi) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = 3.5$$

## 4.3 Diszkrét eloszlások várható értéke

### 4.3.1 Binomiális eloszlás várható értéke

**Állítás 4.6.** Az  $(n, p)$  paraméterű binomiális eloszlás várható értéke  $= np$

**Bizonyítás**

$$\begin{aligned}
 P(\xi = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n \\
 E(\xi) &= \sum_{j=0}^n (\xi_j P(\xi = \xi_j)) = \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
 &= \sum_{j=0}^n \underbrace{j \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}}_{j=0\text{-ra } 0 \text{ (} 0!=1 \text{)}} = \sum_{j=1}^n \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$y \stackrel{\circ}{=} j-1 \quad m \stackrel{\circ}{=} n-1 \quad \rightsquigarrow \quad j=1 \rightarrow y=0 \quad j=n \rightarrow y=n-1=m$$

$$\begin{aligned}
 E(\xi) &= \sum_{y=0}^m \frac{(m+1)!}{y!(m-y)!} p^{y+1} (1-p)^{m-y} \\
 &= (m+1)p \sum_{y=0}^m \frac{(m)!}{y!(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y} \\
 &= np \underbrace{\sum_{y=0}^m \frac{(m)!}{y!(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y}}_{*} \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$a \stackrel{\circ}{=} p \quad b \stackrel{\circ}{=} (1-p)$$

$$\begin{aligned}
 * &= \sum_{y=0}^m \frac{(m)!}{y!(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y} = \sum_{y=0}^m \underbrace{\frac{(m)!}{y!(m-y)!}}_{\binom{m}{y}} a^y b^{m-y} \\
 &= (a+b)^m = (p+1-p)^m = 1 \quad \square \quad (25)
 \end{aligned}$$

Ahol az utolsó előtti egyenlőség a binomiális tételből következik

$$(a+b)^m = \sum_{y=0}^m \binom{m}{y} a^y b^{m-y}$$

*Megjegyzés.* Binomiális eloszlás várható értéke máshogy Tekintsünk a  $\xi(n, p)$  paraméterű binomiális eloszlású változóra úgy mintha  $n$  db (cinkelt -  $p \neq 1/2$ ) érmét dobánk fel. Az egyes érmék vagy fejek vagy nem (a fej dobás valószínűsége  $p$ ), és valószínűségi változóknak tekinthetők  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Ha fej akkor  $\xi_j$  értéke 1, egyébként 0.

Ekkor az eredeti valószínűségi változó (értéke) tekinthető egy származtatott értéknek:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

ekkor (mivel láttuk hogy a várható érték képzés egy integrálnak felel meg, az integrál pedig lineáris)

$$E(\xi_j) = p \rightarrow E(\xi) = np$$

### 4.3.2 Geometrikus eloszlás várható értéke

Geometrikus eloszlás esetén

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$$

**Állítás 4.7.** A  $p$  paraméterű geometrikus eloszlás várható értéke  $= \frac{1}{p}$

**Bizonyítás**

$$E(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j P(\xi = \xi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} jp(1-p)^{j-1} = p \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1}$$

Tudjuk hogy  $\frac{1}{1-x}$  hatványsora a  $] -1, 1[$  intervallumon

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

Ebből következik hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) &= \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} x^j \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{j=0}^{\infty} jx^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1} \end{aligned}$$

Legyen  $x = 1-p$ . Ekkor a hatványsor konvergenciasugarán belül maradunk, így használhatjuk a fenti összefüggéseket. Ekkor

$$E(\xi) = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \quad (26)$$

### 4.3.3 Poisson eloszlás várható értéke

Poisson eloszlás esetén

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

**Állítás 4.8.** *A  $\lambda$  paraméterű Poisson eloszlás várható értéke  $= \lambda$*

**Bizonyítás**

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j P(\xi = \xi_j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{(j)!} = e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda \end{aligned} \quad (27)$$

### 4.3.4 Hipergeometrikus eloszlás várható értéke

Tudjuk hogy a  $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó  $(N, n, K)$ -paraméterű hipergeometrikus eloszlású ( $K \leq n \leq N$ ,  $N, n, K \in \mathbb{N}$ ), ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (28)$$

**Állítás 4.9.** *Az  $(N, n, K)$  paraméterű hipergeometrikus eloszlás várható értéke  $= n \frac{K}{N}$*

**Bizonyítás** Gondoljunk a szokásos példára. Egy urnában  $N$  darab golyó van, közülük  $K$  darab piros és  $N - K$  darab fehér (ebből húzunk  $n$ -et). Egymás után, visszatevés nélkül húzva a golyókat legyen

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-ik alkalommal piros golyót húzunk} \\ 0, & \text{ha az } i\text{-ik alkalommal fehér golyót húzunk} \end{cases}$$

Első húzáskor  $P(\xi_1 = 1) = \frac{K}{N}$  és  $P(\xi_1 = 0) = 1 - \frac{K}{N}$ , tehát

$$E(\xi_1) = 1 \frac{K}{N} + 0 \left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N}$$

A második húzáskor

$$\begin{aligned} P(\xi_2 = 1) &= P(\xi_2 = 1 | \xi_1 = 1) P(\xi_1 = 1) + P(\xi_2 = 1 | \xi_1 = 0) P(\xi_1 = 0) \\ &= \frac{K-1}{N-1} \frac{K}{N} + \frac{K}{N-1} \left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N} \end{aligned} \quad (29)$$

ezért  $P(\xi_2 = 0) = 1 - \frac{K}{N}$  és

$$E(\xi_2) = 1 \frac{K}{N} + 0 \left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N}$$

Hasonlóan a többi  $\xi_i$  várható értéke is  $\frac{K}{N}$  ezért

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \Rightarrow E(\xi) = E(\xi_1) + \dots + E(\xi_n) = n \frac{K}{N}$$

## 5 Lebesgue mérték és mértékek tulajdonságai

### 5.1 Lebesgue mérték

**Definíció 5.1.** Lebesgue-külső mérték

Legyen  $A \subseteq \mathbb{R}$  tetszőleges.

$$\bar{\lambda}(A) \doteq \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n, (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervallum} \right\} \quad (30)$$

Ahol  $\lambda(I)$ :  $I$  hossza.

$\bar{\lambda}(A) \geq 0$  (lehet  $+\infty$  is)

**Példa 5.1.** Tekintsük a következő eseteket

- $A \doteq [1, 2] \rightsquigarrow \bar{\lambda}(A) = 1$
- $A \doteq [1, 2] \cup ]3, 5[ \rightsquigarrow \bar{\lambda}(A) = 3$
- $A \doteq \sqrt{2}$  legyen  $I_m \doteq [\sqrt{2} - \frac{1}{m}, \sqrt{2} + \frac{1}{m}]$  ekkor

$$\bar{\lambda}(I_m) = \frac{2}{m} \quad \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\sqrt{2}\} \quad \bar{\lambda}(A) = 0 = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_m) \mid \{\sqrt{2}\} \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_m \right\}$$

**Állítás 5.1.**  $\bar{\lambda}(\mathbb{N}) = 0$

Bizonyítás:

- Első lépésben az  $\{1\}$ -et lefedem egy 1 hosszú intervallummal (pl  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ), a  $\{2\}$ -t egy  $1/2$  hosszúval (így véges lesz az összhossz), stb.
- Második lépésben  $\{1\}$ -et egy  $1/2$  hosszú intervallummal fedem, a  $\{2\}$ -t egy  $1/4$  hosszúval, stb
- $\vdots$

Az összhosszak  $\inf$ -a=0.

Általában: Ha  $A \subseteq \mathbb{R}$  megszámlálható  $\rightsquigarrow \bar{\lambda}(A) = 0$

A probléma az hogy  $\bar{\lambda}$   $2^{\mathbb{R}}$ -en nem mérték, mivel nem minden halmaz mérhető (az ellenpélda nem triviális, és a kiválasztási axiómát használja MISSINGREF), ezért, hogy korrektek legyünk, kissé meg kell szorítani a konstrukciót hogy tényleg mérték legyen - szerencsére mint látni fogjuk így is minden 'értelmes' halmazon működni fog.

**Állítás 5.2.**  $\exists \mathcal{M}_{\lambda} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$  halmazrendszer hogy

- $\mathcal{M}_\lambda$   $\sigma$ -algebra
- $\mathcal{M}_\lambda \neq 2^{\mathbb{R}}$
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_\lambda$  (tartalmazza a Borel-eket)
- $\bar{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda} : \mathcal{M}_\lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  mérték (ahol  $\bar{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda}$  jelentése:  $\bar{\lambda}$  megszorítva  $\mathcal{M}_\lambda$ -ra)

**Definíció 5.2.** Lebesgue mérték

$$\lambda = \lambda \stackrel{\circ}{=} \bar{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda} \quad (31)$$

**Definíció 5.3.** Lebesgue 0-mértékű halmaz

$A \in \mathcal{M}_\lambda$  Lebesgue-0 mértékű ha  $\lambda(A) = 0$

Ilyen például  $\mathbb{N}$  vagy  $\mathbb{Q}$

**Definíció 5.4.** Lebesgue mérték szerinti integrál

$$\int_{[a,b]} f d\lambda$$

ahol  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető fv (mérhető  $\lambda$  szerint, azaz  $\forall$  Borel ősképe  $\mathcal{M}_\lambda$ -beli)

A konstrukció ugyanúgy felépíthető  $\mathbb{R}$ -en  $\lambda$  szerint, mint  $\int_{\Omega} f dP$   $\Omega$ -n  $P$  szerint. Lásd: 4.1. fejezet.

**Állítás 5.3.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrálható  $\Leftrightarrow f$  folytonos egy Lebesgue 0 mértékű halmazon kívül. Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$$

Tehát 'szép' függvények esetén a Lebesgue integrál megegyezik a hagyományos, Riemann integrállal.

**Példa 5.2.**  $\mathbb{R}$ -en nem Lebesgue integrálható fv

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

A pozitív rész:

$$g^+(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

A negatív rész:

$$g^-(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g^+ d\lambda}_{+\infty} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g^- d\lambda}_{+\infty}$$

tehát  $\infty - \infty$  alakú, azaz nem létezik (indefinit).

## 5.2 Mértékek abszolút folytonossága és szingularitása

**Definíció 5.5.** Mértékek abszolút folytonossága és szingularitása  
 $(\Omega, \mathfrak{F})$  mérhető tér. Legyen  $\mu_1, \mu_2 : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mérték

- $\mu_1$  abszolút folytonos  $\mu_2$ -re, ha

$$(\forall A \in \mathfrak{F}) (\mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0)$$

jelölés:  $\mu_1 \ll \mu_2$

- $\mu_1$  szinguláris  $\mu_2$ -re, ha

$$\begin{aligned} \exists \Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{F} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \\ \mu_1(\Omega_1) = 0 \quad \text{és} \quad \mu_2(\Omega_2) = 0 \end{aligned}$$

jelölés  $\mu_1 \perp \mu_2$

Abszolút folytonosság tulajdonságai:

- tranzitív:  $\mu_1 \ll \mu_2$  &  $\mu_2 \ll \mu_3 \Rightarrow \mu_1 \ll \mu_3$
- reflexív:  $\mu_1 \ll \mu_1$
- nem szimmetrikus:  $\mu_1 \ll \mu_2 \not\Rightarrow \mu_2 \ll \mu_1$

Szingularitás tulajdonságai:

- Nem tranzitív
- nem reflexív
- Szimmetrikus ( $\Omega'_1 = \Omega_2, \Omega'_2 = \Omega_1$ )

**Definíció 5.6.**  $\sigma$ -véges mérték

$(\Omega, \mathfrak{F})$  mérhető tér,  $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mérték  $\sigma$ -véges, ha  $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathfrak{F}$ -ben haladó sorozat hogy

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega \quad \text{és} \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Példa 5.3.** Lefedjük  $\mathbb{R}$ -et 1 hosszú intervallumokkal,  $\mu$  pedig  $\lambda$ . Ekkor  $\mu$   $\sigma$ -véges, pedig  $\mathbb{R}$  mértéke  $\infty$

**Tétel 5.1.** Lebesgue-felbontás

$(\Omega, \mathfrak{F})$  mérhető tér,  $\mu, \nu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$   $\sigma$ -véges mérték. Ekkor  $\exists! \mu_1 \ \& \ \mu_2 : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mérték, hogy  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ,  $\mu_1 \ll \nu$ ,  $\mu_2 \perp \nu$

Ahol  $\exists!$  jelentése: Egyértelműen létezik.  $\mu_1$  elnevezése:  $\mu$  abszolút folytonos része,  $\mu_2$  elnevezése:  $\mu$  szinguláris része.

**Tétel 5.2.** Radon-Nikodym

$(\Omega, \mathfrak{F})$  mérhető tér,  $\mu, \nu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mértéke,  $\mu \ll \nu$ . Ekkor  $\exists! f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  mérhető hogy

$$\forall A \in \mathfrak{F} : \mu(A) = \int_A f d\nu = \int_{\Omega} (\chi_A f) d\nu$$

**Definíció 5.7.** Radon-Nikodym derivált

Ekkor  $f$ -et  $\frac{d\mu}{d\nu}$ -vel jelöljük és a  $\mu$  mérték Radon-Nikodym deriváltjának hívjuk  $\nu$  szerint.

### 5.3 Improprius Riemann és Lebesgue integrálhatóság kapcsolata

**Példa 5.4.** Nem improprius Riemann-integrálható, de Lebesgue integrálható fv  
A Dirichlet fv (1-et vesz fel ha az argumentuma racionális szám, 0-t egyébként):

$$\lambda(\mathbb{Q}) = 0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda$$

**Példa 5.5.** Improprius Riemann-integrálható, de nem Lebesgue integrálható fv

$$f(x) \doteq \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Belátható hogy improprius Riemann integrálható [MISSINGREF](#), viszont:

- a  $-\pi$  és  $\pi$  közti rész területét ha alulról közelítem egy befoglalt háromszöggel akkor annak a területe (alap  $\cdot$  magasság  $/2$ ):  $\pi$
- a  $\pi$  és  $2\pi$  közti rész területét ha alulról közelítem egy befoglalt háromszöggel, akkor annak a területe (alap  $\cdot$  magasság  $/2$ ):

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}$$

- A  $2\pi$  és  $3\pi$  közti rész hasonlóan  $\frac{1}{5}$ .

A pozitív rész alsó becslése tehát:

$$\pi + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots$$

ami divergens. Hasonlóan a negatív rész is divergens, ezért a Lebesgue integrál nem létezik.

## 6 Folytonos eloszlások

### 6.1 Sűrűségfüggvény

*Ismétlés.* Eloszlás (1.14-as definíció)

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val mező,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val vált,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$   $\xi$  eloszlása:

$$Q_\xi(A) \stackrel{\circ}{=} P\left(\xi < A >\right)$$

**Definíció 6.1.** Folytonos eloszlású valószínűségi változó  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val vált. folytonos eloszlású ha  $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}}$

ahol  $Q_\xi, \lambda_{\mathbb{R}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_+$

*Megjegyzés.* Ha  $\xi$  folytonos eloszlású akkor amiatt, hogy abszolút folytonos a Lebesgue mértékre, mindenhol nulla, ahol a Lebesgue 0. Ebből következik, hogy egy adott  $a$  érték felvételének a valószínűsége 0  $P(\xi = a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ , sőt annak a valószínűsége is 0, hogy megszámlálhatóan sok érték közül valamelyiket felvegye. Folytonos valószínűségi változóknál intervallumba esés valószínűségéről fogunk beszélni, mivel ez már kontinuum sok lehetőséget jelent, ez már lehet nagyobb mint 0.

**Állítás 6.1.** Ha  $\xi$  folytonos eloszlású, akkor a Radon-Nikodym tétel (5.2) miatt  $\exists! f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető<sup>4</sup> hogy

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : Q_\xi(A) = \int_A f d\lambda_{\mathbb{R}} \quad (32)$$

**Definíció 6.2.** Sűrűségfüggvény A fenti állításban szereplő  $f$  a  $\xi$  val vált. sűrűségfüggvénye. (Vagy a  $Q_\xi$  eloszlás sűrűségfüggvénye)

**Példa 6.1.** Eloszlás értékének kiszámolása sűrűségfüggvény segítségével ha a vizsgált halmaz speciálisan egy  $x$  végpontú balra végtelen intervallum  
Ez valójában az eloszlásfüggvény (ezt már láttuk - lásd 1.5 megjegyzés.)

$$A = ]-\infty, x] \quad Q_\xi(A) = P\left(\xi < A >\right) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = F_\xi(x)$$

ahol felhasználtuk, hogy szép függvények esetén a Lebesgue és a Riemann integrál megegyezik.<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Ami itt most annyit jelent hogy Borel őse Borel.

<sup>5</sup>Itt kicsit csaltunk, mert ezt eredetileg csak korlátos intervallumra mondtuk, ki, valamint nem mutattuk meg hogy a sűrűségfüggvény szükség szerűen 'szép'

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

•

$$f \geq 0$$

•

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = Q_{\xi}(\mathbb{R}) = P(\xi \in \mathbb{R}) = 1$$

A  $\xi$  val vált. sűrűségfüggvényét ezen túl  $f_{\xi}$ -vel jelöljük.

**Állítás 6.2.** Ha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan hogy

- $f$  integrálható  $\mathbb{R}$ -en  $\lambda$  szerint
- $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$
- $f \geq 0$ , akkor  $\exists (\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val mező és  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val vált. hogy  $Q_{\xi} \ll \lambda$  és  $f$   $\xi$  (illetve  $Q_{\xi}$ ) sűrűségfüggvénye.

**Állítás 6.3.**

$$P(x < \xi < y) = P(x \leq \xi < y) = P(x < \xi \leq y) = P(x \leq \xi \leq y) = F(y) - F(x)$$

## 6.2 Folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értéke

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{\Omega} \xi dP = \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}} dQ_{\xi} = \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}} \left( \frac{dQ_{\xi}}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \end{aligned} \quad (33)$$

ahol  $id_{\mathbb{R}}$  a valós számok felett értelmezett identitásfüggvény. Az első egyenlőség az úgynevezett *mértéktartás* tulajdonságból következik MISSINGREF.  $\left( \frac{dQ_{\xi}}{d\lambda} \right)$  a Radon-Nickodym derivált.

**Állítás 6.4.** Ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx < \infty$$

akkor  $E(\xi)$  véges.

### Példa 6.2. Cauchy-eloszlás

Legyen

$$f_{\xi}(x) \doteq \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

tudjuk hogy  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = \pi$  tehát a 6.2 állítás alapján létezik  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  és  $\xi$  valváltozó, aminek ez a sűrűségfv-e. A várható érték végeességéhez kellene hogy

$$A \doteq \int_{\mathbb{R}} |x| f_{\xi} dx < \infty$$

Viszont

$$A \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \geq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{2x} dx}_{\rightarrow \infty}$$

Ahol az utolsó tag becslése abból következik hogy ha  $x > 1$  akkor

$$1+x^2 < 2x^2 \rightsquigarrow \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{2x^2}$$

Eddig csak azt mutattuk meg hogy a várható érték nem véges, de megmutatható az is hogy nem létezik:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^{\infty} = \infty$$

A  $] -\infty, 0[$  tartományon vett integrál ugyanilyen megfontolással  $-\infty$ . Tehát  $\infty - \infty$  (indefinite) alakot kapunk, a várható érték nem létezik.

## 6.3 Exponenciális eloszlás

**Definíció 6.3.** Exponenciális eloszlású valószínűségi változó

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó.  $\xi$   $\alpha$ -paraméterű ( $\alpha > 0$ ) exponenciális eloszlású ha

- $\xi$  folytonos eloszlású
- $\xi$  sűrűségfv-e:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

**Állítás 6.5.** Exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

**Bizonyítás**

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x \alpha e^{-\alpha t} dt & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^x \alpha e^{-\alpha t} dt = \alpha \left[ \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^x = -e^{-\alpha x} + 1$$

a fenti kifejezés  $x \rightarrow \infty$  esetén (mivel  $e^{-\infty} = 0$ ) 1-hez tart ( $x \rightarrow -\infty$  esetén 0-hoz, valamint monoton nő), ami azt jelenti hogy a 6.3 definícióban szereplő függvény valóban sűrűségfüggvény.

**Állítás 6.6.**  $\alpha$ -paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke  $\frac{1}{\alpha}$

**Bizonyítás**

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 x f(x) dx}_0 + \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= [x (-e^{-\alpha x})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\alpha x}) dx \\ &= 0 - 0 + \left[ \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^{\infty} = \left[ \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_{\infty}^0 = \frac{1}{\alpha} - 0 = \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \tag{34}$$

## 6.4 Normális eloszlás

**Definíció 6.4.** Normális eloszlású valószínűségi változó

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező.  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó  $(m, \sigma)$  paraméterű normális eloszlású, ha  $\xi$  folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (35)$$

**Definíció 6.5.** Standard normális eloszlású valószínűségi változó

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező.  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó  $(m = 0, \sigma = 1)$  paraméterű normális eloszlású, ha  $\xi$  folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye <sup>6</sup>:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (36)$$

ekkor eloszlásfüggvényét  $\Phi$ -vel jelöljük:

$$\Phi(x) \doteq \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (37)$$

**Állítás 6.7.** Minden normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ( $F_\xi$ ) visszavezethető standard normális eloszlásra mert ha  $\xi$   $(m, \sigma)$  paraméterű normális eloszlású akkor

$$F_\xi = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad x \in \mathbb{R} \quad (38)$$

**Bizonyítás**

$$F_\xi = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Legyen

$$z \doteq \frac{t-m}{\sigma} \rightsquigarrow t = m + \sigma z$$

$$t \rightarrow -\infty \Leftrightarrow z \rightarrow -\infty \quad t = x \Leftrightarrow z = \frac{x-m}{\sigma}$$

Ekkor, a helyettesítéssel integrál képletének segítségével:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \int_a^b f(g(z)) g'(z) dz$$

ahol  $g(z) = m + \sigma z$ , így  $g'(z) = \sigma$

$$F_\xi = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

---

<sup>6</sup>Az hogy ebben az esetben  $\int_{\mathbb{R}} f_\xi = 1$ , komplex függvénytan segítségével látható be. Azt kell belátni hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

(MISSINGREF)

## 6.5 Szórás

**Definíció 6.6.** Szórás és szórásnégyzet

$\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó. Tfh  $E(\xi)$  véges. Ekkor  $\xi$  szórását  $\sigma(\xi)$ -vel, vagy  $D(\xi)$ -vel jelöljük, és a következőképp definiáljuk

$$\sigma(\xi) \doteq \sqrt{E((\xi - E(\xi))^2)}$$

Ennek megfelelően  $\sigma^2(\xi)$  elnevezése: Szórásnégyzet vagy variancia. Jelölésére  $\sigma^2(\xi)$ -n kívül használatos a  $V(\xi)$  jelölés is.

**Állítás 6.8.**

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) \quad (39)$$

**Bizonyítás**

$$\begin{aligned} \sigma^2(\xi) &= E((\xi - E(\xi))(\xi - E(\xi))) = E(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)) \\ &= E(\xi^2) - E(2E(\xi)\xi) + E(E^2(\xi)) = E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) \end{aligned}$$

A fenti bizonyításban egyrészt a várható érték mint integrál linearitását használtuk, másrészt azt a tényt, hogy konstans függvény (valváltozó), itt  $(E^2(\xi))$  várható értéke egyenlő a függvény értékével.

*Megjegyzés.* Speciálisan, folytonos eloszlású,  $f_\xi(x)$  sűrűségfüggvényű valószínűségi változó esetén:  $E(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x) dx$  (lásd (33) egyenlet).

$$\begin{aligned} \sigma^2(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (x - E(\xi))^2 f_\xi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx - 2E(\xi) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx}_{E(\xi)} + E^2(\xi) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx}_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\xi(x) dx - E^2(\xi) \end{aligned}$$

*Megjegyzés.* Az  $E((\xi - a)^2)$  értéket nevezik másképp  $\xi$   $a$  középpontú második *momentumának* is. E szerint az elnevezés szerint a szórásnégyzet ( $\sigma^2(\xi)$ ) épp  $\xi$   $\mu = E(\xi)$  középpontú második, vagy másnéven centrált momentuma.

A második momentum mechanikai interpretációja: Képzeljük el, hogy  $\xi$  eloszlása egy tömegeloszlás  $\mathbb{R}$ -en. Ekkor  $\xi$   $a$  középpontú második momentuma épp a tömegeloszlás  $a$  középpontú tehetetlenségi nyomatéka, vagyis nem más, mint a tömegeloszlás ellenállása az  $a$  középpontú forgatásokkal szemben. Speciálisan,  $\xi$  szórásnégyzete épp a  $\mu = E(\xi)$  tömegközéppontú tehetetlenségi nyomaték.

**Definíció 6.7.** Legyen  $k > 0$ . A  $\xi$  valváltozó  $k$ -ik (0 középpontú) momentumának az  $E(\xi^k)$  mennyiséget nevezik - ha létezik.

Ha nem tesszük hozzá hogy milyen középpontú, vagy hogy centrált, akkor a 0 középpontú momentumra gondolunk.



**Példa 6.3.** Az exponenciális eloszlás momentumai

Legyen  $\xi$   $\alpha$  paraméterű, exponenciális eloszlású. Ekkor a (0-középpontú)  $k$ -ik momentumai:

$$E(\xi^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x) dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x^k}_f \underbrace{\alpha e^{-\alpha x}}_{g'} dx$$

parciális integrálással ( $g = -e^{-\alpha x}$ )

$$E(\xi^k) = [-x^k e^{-\alpha x}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -k x^{k-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{k}{\alpha} \int_0^{\infty} x^{k-1} \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{k}{\alpha} E(\xi^{k-1})$$

tehát egy rekurzív képletet kaptunk.

$$E(\xi^0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = 1 \rightsquigarrow E(\xi^1) = \frac{1}{\alpha} \rightsquigarrow E(\xi^2) = \frac{2}{\alpha^2}..$$

Az első momentum nem más mint a várható érték, ezt már bizonyítottuk a 6.6 állításban. Általánosságban

$$E(\xi^k) = \frac{k!}{\alpha^k}$$

### 6.5.1 A szórásnégyzet tulajdonságai

- $\sigma^2(\xi) \geq 0$
- $\sigma^2(a\xi + b) = a^2 \sigma^2(\xi)$

#### Bizonyítás

Az első tulajdonság triviális. A második sem túl bonyolult:

$$\begin{aligned} \sigma^2(a\xi + b) &= E(((a\xi + b) - E(a\xi + b))^2) = E((a\xi + b - aE(\xi) - E(b))^2) \\ &= E((a\xi + b - aE(\xi) - b)^2) = E((a(\xi - E(\xi)))^2) = E(a^2(\xi - E(\xi))^2) \\ &= a^2 E((\xi - E(\xi))^2) = a^2 \sigma^2(\xi) \end{aligned}$$

### 6.5.2 A szórásnégyzet kiszámítása

A valódi kérdés az, hogyan számítjuk ki  $E(\xi^2)$ -et (mivel  $E^2(\xi)$  kiszámítása triviális).

#### Diszkrét eset:

Ha  $\xi$  diszkrét valváltozó,

$$E(\xi^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\xi_n)^2 P(\xi = \xi_n) \quad (40)$$

ahol  $\xi_n$  a  $\xi$  valváltozó lehetséges értékeit jelöli.

#### Folytonos eset:

Ha  $\xi$  folytonos valváltozó,

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx \quad (41)$$

#### Példa 6.4. A Poisson eloszlás szórásnégyzete

Ha  $\xi$  Poisson eloszlású valváltozó, akkor

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} [(k-1) + 1] \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda + \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Így

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

A várható értéket ( $E(\xi) = \lambda$ ) lásd a 4.8 állításban.

#### Példa 6.5. Az egyenletes eloszlás szórásnégyzete

Legyen  $\xi$  egyenletes eloszlású  $[a, b]$ -n. Ekkor

$$f_\xi = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in [a, b] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor

$$E(\xi^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)}$$

#### Példa 6.6. Az exponenciális eloszlás szórásnégyzete

Legyen a  $\xi$  valváltozó  $\alpha$  paraméterű, exponenciális eloszlású. Ekkor a szórásnégyzete

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

ahol a korábban kiszámolt 2. momentumot és a várható értéket (=első momentum) használtuk fel.

## 6.6 Csebisev egyenlőtlenség

**Állítás 6.9.** Legyen  $\xi$  valószínűségi változó,  $\varepsilon > 0$  Tegyük fel hogy  $E(\xi)$  véges. Ekkor

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|\xi - E(\xi)|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2} \quad (42)$$

**Bizonyítás**

$$\{|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\} = \{|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2\}$$

erre pedig használjuk a Markov egyenlőtlenséget (21):

$$P(|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(|\xi - E(\xi)|^2)}{\varepsilon^2}$$

## 6.7 Független valószínűségi változók várható értéke és szórása

**Állítás 6.10.** Ha  $\xi$  és  $\eta$  független valváltozók,  $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$ , ha a várható értékek léteznek.

**Állítás 6.11.** Ha  $\xi$  és  $\eta$  független valváltozók,  $\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)$ .

**Bizonyítás**

$$\begin{aligned} \sigma^2(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi) & \sigma^2(\eta) &= E(\eta^2) - E^2(\eta) \\ \sigma^2(\xi + \eta) &= E((\xi + \eta)^2) - E^2(\xi + \eta) \\ &= E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - E(\xi + \eta)E(\xi + \eta) \\ &= E(\xi^2) + 2E(\xi)E(\eta) + E(\eta^2) - (E^2(\xi) + 2E(\xi)E(\eta) + E^2(\eta)) \\ &= E(\xi^2) + E(\eta^2) - E^2(\xi) - E^2(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \end{aligned}$$

**Példa 6.7.** A binomiális eloszlás szórásnégyzete

Ahogy korábban láttuk a 4.3.1 állításban, tekinthetünk a  $\xi$  ( $n, p$ ) paraméterű binomiális eloszlású változóra úgy mintha  $n$  db (cinkelt) érmét dobna fel. Az egyes érmék vagy fejenek vagy nem (a fej dobás valószínűsége  $p$ ), és valószínűségi változóknak tekinthetők ( $\xi_1, \dots, \xi_n$ ). Ha fej akkor  $\xi_j$  értéke 1, egyébként 0. Ekkor  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$  Ekkor

$$\begin{aligned} E(\xi_j^2) &= 1^2p + 0^2(1-p) = p \\ \sigma^2(\xi_j) &= E(\xi_j^2) - E^2(\xi_j) = p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

Ebből pedig a 6.11 állítással:  $\sigma^2(\xi) = np(1-p)$  (szigorúan véve a 6.11 állítás csak  $n=2$  esetre alkalmazható, de ebből rekurzióval általános esetben is igaz  $n$ -re)

## 7 Vektor értékű valószínűségi változók

**Definíció 7.1.** Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) fv mérhető ha  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : \xi^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$

*Megjegyzés.*  $\mathbb{R}^k$ -beli Borel halmazokat tartalmazó  $\sigma$ -algebrát például nyílt gömbökkel tudjuk generálni.

**Definíció 7.2.** Vektor értékű valószínűségi változó alatt a

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_k(\omega))$$

vektort értjük, ahol  $\omega \in \Omega$  és  $\xi_j$ -k valószínűségi változók  $1 \leq j \leq k$ .

**Definíció 7.3.** Ekkor a várható érték a következő vektor (ha létezik)

$$E(\xi) \doteq (E(\xi_1), E(\xi_2), \dots, E(\xi_k))$$

**Definíció 7.4.** Vektor valváltozó (együttes) eloszlásfüggvénye alatt a következőt értjük

$$F_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\xi(t) \doteq P\left(\xi \leq \prod_{j=1}^k t_j\right) \quad (43)$$

ahol

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$$

**Állítás 7.1.** Vektor valváltozó eloszlásfüggvényének tulajdonságai ( $k \geq 2$  esetén).

- $F_\xi$  minden változóban monoton nő: Ha  $x_i^* < x_i^{**}$

$$F_\xi(x_1, \dots, x_i^*, \dots, x_k) \leq F_\xi(x_1, \dots, x_i^{**}, \dots, x_k)$$

- $F_\xi$  minden változóban balról folytonos

•

$$\lim_{t_j \rightarrow -\infty} F_\xi(t) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

•

$$\lim_{t_1, t_2, \dots, t_k \rightarrow \infty} F_\xi(t) = 1$$

- $\forall a, b \in \mathbb{R}^k$  ha  $a < b$  (minden koordinátában)

$$\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k} (-1)^{|\varepsilon|} F_{\xi}(a\varepsilon + b(\underline{1} - \varepsilon)) \geq 0$$

ahol  $|\varepsilon|$ : ahány 1-es van  $\varepsilon$ -ban,  $a\varepsilon$  és  $b(\underline{1} - \varepsilon)$  pedig koordinátánkénti szorzatot jelöl, pl:

$$a\varepsilon = \begin{pmatrix} a_1\varepsilon_1 \\ a_2\varepsilon_2 \\ \vdots \\ a_k\varepsilon_k \end{pmatrix}$$

*Megjegyzés.* Speciálisan 1 dimenzióban ha  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$

$$\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k} (-1)^{|\varepsilon|} F_{\xi}(a\varepsilon + b(\underline{1} - \varepsilon)) \geq 0 \quad (44)$$

$$\Leftrightarrow (-1)^0 F_{\xi}(b) + (-1)^1 F_{\xi}(a) \geq 0 \Leftrightarrow F_{\xi}(b) \geq F_{\xi}(a)$$

ami teljesül, hiszen az eloszlásfüggvény monoton nő.

**Példa 7.1.** Milyen  $F$ -et zár ki például az utolsó tulajdonság?

Legyen

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x + y \leq 0 \\ 1 & \text{ha } x + y > 0 \end{cases} \quad a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ekkor az utolsó tulajdonságot kivéve minden más követelménynek eleget tesz. A (44) kifejezés tagjai a következők:

$$\varepsilon = [0, 0] \rightarrow (-1)^0 F\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$$\varepsilon = [0, 1] \rightarrow (-1)^1 F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1$$

$$\varepsilon = [1, 0] \rightarrow (-1)^1 F\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -1$$

$$\varepsilon = [1, 1] \rightarrow (-1)^2 F\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

**Állítás 7.2.** Ha  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  olyan hogy a 7.1 definíció tulajdonságai teljesülnek, akkor  $\exists (\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező, és  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  valváltozó, hogy  $F = F_{\xi}$

**Definíció 7.5.** Vektor valváltozó eloszlása

$$Q_{\xi}(B) = P\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \xi < B > \end{pmatrix}\right) \quad (45)$$

*Megjegyzés.* 2 dimenzióban a  $\xi$  valószínűségi változó 2 komponensének jelölésére általánosságban az  $\eta$  és  $\gamma$  jelölést használjuk, tehát  $\xi_1 \overset{\circ}{=} \eta$ ,  $\xi_2 \overset{\circ}{=} \gamma$

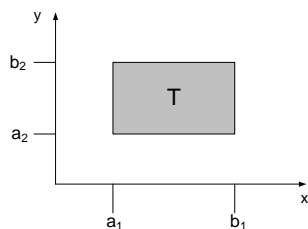
**Állítás 7.3.** Legyen  $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$  egy 2 dimenziós valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye:  
 $F(x, y) = P(\eta < x, \gamma < y)$ . Ekkor

$$P(a_1 \leq \eta < b_1, a_2 \leq \gamma < b_2) = F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) \quad (46)$$

### Bizonyítás

Jelöljük a  $\eta$ -hoz tartozó értéket  $x$ -el, a  $\gamma$ -hoz tartozó értéket  $y$ -al. Jelöljük  $T$ -vel a kérdéses eseményhez tartozó esetet:

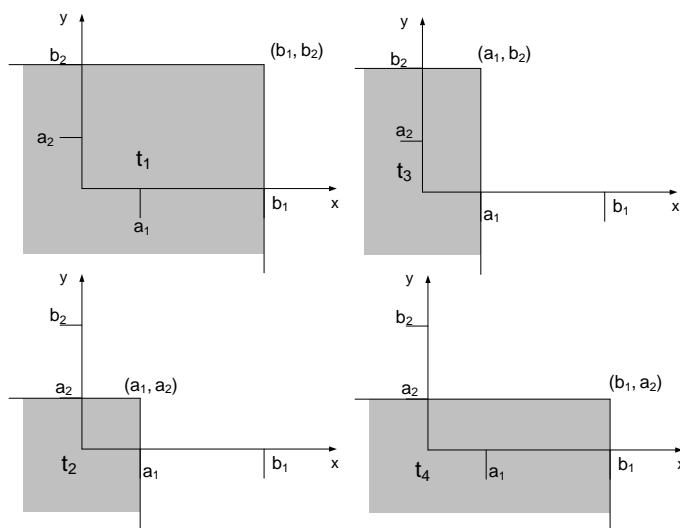
$$T \overset{\circ}{=} \{a_1 \leq \eta < b_1, a_2 \leq \gamma < b_2\}$$



Legyen ezen kívül

$$\begin{aligned} t_1 &\overset{\circ}{=} \{\eta < b_1, \gamma < b_2\} & t_3 &\overset{\circ}{=} \{\eta < a_1, \gamma < b_2\} \\ t_2 &\overset{\circ}{=} \{\eta < a_1, \gamma < a_2\} & t_4 &\overset{\circ}{=} \{\eta < b_1, \gamma < a_2\} \end{aligned}$$

Ekkor



$$T = t_1 \setminus (t_3 \cup t_4) \rightsquigarrow P(T) = P(t_1) - P(t_3 \cup t_4) = P(t_1) - [P(t_3) + P(t_4) - P(t_3 \cap t_4)]$$

mivel  $t_3 \cap t_4 = t_2$ , ezért

$$P(T) = P(t_1) - P(t_3) - P(t_4) + P(t_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \quad \square$$

**Állítás 7.4.** Tegyük fel hogy  $F(x, y)$   $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$  együttes eloszlásfüggvénye,  $F_\eta(x)$  a  $\eta$ ,  $F_\gamma(y)$  pedig az  $\gamma$  valvált eloszlásfüggvénye. Ekkor

$$F_\eta(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) \quad F_\gamma(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) \quad (47)$$

**Állítás 7.5.** Legyen  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  valváltozó. Ekkor ekvivalens:

- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  függetlenek

- 

$$Q_\xi = \prod_{j=1}^k Q_{\xi_j}$$

- 

$$F\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}\right) = \prod_{j=1}^k F_{\xi_j}(t_j)$$

**Definíció 7.6.** Egy valószínűségi vektorváltozó bármely komponensének valószínűségeloszlását peremeloszlásnak nevezzük.

*Megjegyzés.* Az együttes eloszlásból a peremeloszlások meghatározhatóak. 2 dimenzióban, diszkrét esetben

$$P(\eta = i) = p_i = \sum_k p_{ik} \quad P(\gamma = k) = q_k = \sum_i p_{ik}$$

ahol  $p_{ik}$  az együttes eloszlásban a  $\eta = i$ ,  $\gamma = k$  eset valószínűsége (lásd a következő példát).

**Példa 7.2.** Tekintsük a  $\xi(\eta, \gamma)$  2 dim valváltozót, és komponenseit  $(\eta, \gamma)$ , melyek  $\{-1, 0, 1\}$  értékeket vehetnek fel. Az együttes eloszlás, azaz a  $\xi$  vektor valváltozó eloszlása: A kom-

$\eta \backslash \gamma$	-1	0	1	$\eta$ perem
-1	$\frac{1}{8} + \varepsilon$	0	$\frac{1}{8} - \varepsilon$	0.25
0	0	0.5	0	0.5
1	$\frac{1}{8} - \varepsilon$	0	$\frac{1}{8} + \varepsilon$	0.25
$\gamma$ perem	0.25	0.5	0.25	

ponensek eloszlásai pedig a peremeloszlások. Látható hogy a peremeloszlásokból általános esetben nem határozható meg az együttes eloszlás.

## 7.1 Folytonos vektor értékű valószínűségi változók

$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  valváltozó folytonos eloszlású ha

$$Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^k}$$

ahol  $\lambda_{\mathbb{R}^k}$  az  $\mathbb{R}^k$ -beli Lebesgue mérték (ugyanúgy definiálható mint az egydimenziós esetben, csak intervallumok Descartes-szorzatának uniójával fedek). Jelölés:  $\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^k}$

**Állítás 7.6.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$

- Ha  $\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^k}$ :

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \text{ függetlenek} \Leftrightarrow \prod_{j=1}^k f_{\xi_j}(t_j) = f_\xi(t_1, \dots, t_k)$$

ahol  $f_{\xi_j}$  jelöli a peremsűrűség-függvényeket vagy másnéven marginálisokat,  $f_\xi$  pedig az együttes sűrűségfüggvény.

- Ha a  $\xi_j$  valváltozók függetlenek és  $Q_{\xi_j} \ll \lambda_{\mathbb{R}} \Rightarrow Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^k}$

Megjegyzés.

$$\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^k} \Rightarrow \exists! f_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \text{ mérhető hogy } Q_\xi(B) = \int_B f_\xi d\lambda_{\mathbb{R}^k}$$

ahol  $B$  egy  $\mathbb{R}^k$ -bei Borel halmaz.

Megjegyzés.

$$Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^k} \Rightarrow Q_{\xi_j} \ll \lambda_{\mathbb{R}} \quad \forall j$$

**Állítás 7.7.** Ha  $\xi(\eta, \gamma) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  és az  $F_\xi(x, y) = F_{(\eta, \gamma)}(x, y) = F(x, y)$  eloszlásfüggvénynek léteznek a folytonos vegyes 2. rendű parciális deriváltjai, akkor

$$f_\xi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

az együttes sűrűségfüggvény



A marginálisok és az együttes sűrűségfüggvény kapcsolatát a következő állítás írja le:

**Állítás 7.8.** Ha  $\xi(\eta, \gamma) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  valvált,  $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^2}$ , és a sűrűségfüggvénye  $f_{(\eta, \gamma)}$ , akkor

$$f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\eta, \gamma)}(x, y) dy \quad \text{és} \quad f_\gamma(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\eta, \gamma)}(x, y) dx$$

**Állítás 7.9.** Ha  $\xi(\eta, \gamma) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  valvált,  $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^2}$ , és a sűrűségfüggvénye  $f_{(\eta, \gamma)}(x, y)$ , akkor  $A$  téglalapba (intervallumok Descartes szorzatába) történő esés valószínűsége:

$$P(\eta \in I, \gamma \in J) = \int_{I \times J} f(x, y) dx dy$$

**Példa 7.3.** 2-dimenziós standard normális eloszlás: Legyen

$$f(x, y) = \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi} \quad (48)$$

ekkor, a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének képletét felhasználva

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(x^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(y^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} dy = 1 \cdot 1 = 1$$

*Megjegyzés.* Független esetben

$$f_{(\eta, \gamma)}(x, y) = f_\eta(x) f_\gamma(y) \rightsquigarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(\eta, \gamma)}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(x) f_\gamma(y) dy = f_\eta(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_\gamma(y) dy}_1$$

**Definíció 7.7.**  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre vonatkoztatott várható érték: Ha  $\xi(\eta, \gamma)$  valvált és a sűrűségfüggvénye  $f_{(\eta, \gamma)}(x, y)$ , valamint  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető,  $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^2}$

$$E(h(\eta, \gamma)) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{(\eta, \gamma)}(x, y) dx dy$$

**Állítás 7.10.**

$$E(h(\eta, \gamma)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{(\eta, \gamma)}(x, y) dx dy$$

véges ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x, y)| f_{(\eta, \gamma)}(x, y) dx dy < +\infty$$

*Megjegyzés.* Leggyakoribb választás:  $h(x, y) = xy$ , ennek rövid jelölése lehet  $E(\eta\gamma)$  illetve  $E\eta\gamma$

Független esetben

$$E(\eta\gamma) = E(\eta)E(\gamma)$$

## 8 Kovariancia és Korreláció

**Definíció 8.1.** Legyenek  $\xi$  és  $\eta$  valváltozók. Tegyük fel hogy  $\exists \sigma^2(\xi)$  és  $\exists \sigma^2(\eta)$ .

Ekkor  $\xi$  és  $\eta$  kovarianciája: a  $\beta \doteq (\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))$  valváltozó várható értéke.

Jelölés:  $cov(\xi, \eta) = E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta)))$

**Állítás 8.1.** A kovariancia tulajdonságai:

- $cov(\xi, \xi) = \sigma^2(\xi)$
- $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$
- $\forall a \in \mathbb{R} : cov(a\xi, \eta) = a cov(\xi, \eta)$
- $cov(\xi + \eta, \gamma) = cov(\xi, \gamma) + cov(\eta, \gamma)$

**Állítás 8.2.**

$$cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$$

**Bizonyítás**

$$\begin{aligned} cov(\xi, \eta) &= E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))) \\ &= E(\xi\eta - \xi E(\eta) - \eta E(\xi) + E(\xi)E(\eta)) \\ &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) - E(\eta)E(\xi) + E(\xi)E(\eta) \\ &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) \end{aligned}$$

*Megjegyzés.* Ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, akkor  $cov(\xi, \eta) = 0$ , de ez visszafelé nem igaz. Lásd a következő példát

**Példa 8.1.** Legyen  $\xi$  és  $\eta$  2 valváltozó melyek  $\{-1, 0, 1\}$  értékeket vehetnek fel. Az együttes eloszlás:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1	$\eta$ perem
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
$\xi$ perem	0.25	0.5	0.25	

Ekkor

$$E(\xi) = E(\eta) = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}1 = 0 \quad E(\xi\eta) = (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + \dots = 0$$

$$cov(\xi, \eta) = E(\xi, \eta) - E(\xi)E(\eta) = 0$$

Viszont  $\xi$  és  $\eta$  nem függetlenek hiszen pl.

$$P(\xi = 0, \eta = 1) = \frac{1}{4} \neq P(\xi = 0)P(\eta = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

*Megjegyzés.* Kovariancia számítás diszkrét esetben:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j (P(\xi = x_i, \eta = y_j)) - \left( \sum_i x_i P(\xi = x_i) \right) \left( \sum_j y_j P(\eta = y_j) \right)$$

ahol  $x_i$  és  $y_j$  a  $\xi$  és  $\eta$  valváltozók lehetséges értékei.

*Megjegyzés.* Kovariancia számítás folytonos esetben:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy - \left( \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta}(y) dy \right)$$

ahol  $f_{\xi, \eta}(x, y)$  az együttes sűrűségfüggvény,  $f_{\xi}(x)$  és  $f_{\eta}(y)$  a perem-sűrűségfüggvények vagy marginálisok (lásd a 7.8 állítást).

**Állítás 8.3.** Ha  $\exists \sigma^2(\xi)$  és  $\exists \sigma^2(\eta)$ , akkor

$$\sigma^2(\xi \pm \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \pm 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

### Bizonyítás

$$\begin{aligned} \sigma^2(\xi \pm \eta) &= E((\xi \pm \eta)^2) - (E(\xi \pm \eta))^2 \\ &= E(\xi^2 \pm 2\xi\eta + \eta^2) - (E^2(\xi) \pm 2E(\xi)E(\eta) + E^2(\eta)) \\ &= E(\xi^2) \pm 2E(\xi\eta) + E(\eta^2) - E^2(\xi) \mp 2E(\xi)E(\eta) - E^2(\eta) \\ &= \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \pm 2\text{cov}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk hogy  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$  és hogy  $\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$  (lásd 8.2 állítás).

**Definíció 8.2.** Ha  $\xi$  és  $\eta$  olyanok hogy  $E(\xi^2) < \infty$  és  $E(\eta^2) < \infty$  akkor a következőképpen definiálhatjuk  $\xi$  és  $\eta$  kovarianciamátrixát ( $\Sigma$ ):

$$\Sigma = \Sigma \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \sigma^2(\xi) & \text{cov}(\xi, \eta) \\ \text{cov}(\eta, \xi) & \sigma^2(\eta) \end{pmatrix}$$

*Megjegyzés.* Minden kovarianciamátrix szimmetrikus (mivel  $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$ ) és pozitív szemidefinit.

**Definíció 8.3.** Egy  $\xi$  valváltozó standardizáltja:  $\tilde{\xi} \doteq \frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}$

*Megjegyzés.*  $E(\tilde{\xi}) = 0$   $\sigma^2(\tilde{\xi}) = 1$

**Definíció 8.4.** Legyenek  $\xi$  és  $\eta$  valváltozók. Ekkor  $\xi$  és  $\eta$  korrelációja:

$$R(\xi, \eta) = \text{corr}(\xi, \eta) \doteq \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}$$

*Megjegyzés.* A korreláció felfogható úgy is, mint a valváltozók standardizáltjának kovarianciája.

**Definíció 8.5.**  $\xi$  és  $\eta$  korrelálatlanok ha  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$

**Állítás 8.4.** A korreláció tulajdonságai:

- $-1 < \text{corr}(\xi, \eta) < 1$
- Ha  $\xi$  és  $\eta$  független,  $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$

## 9 Valószínűségi változók transzformációja

Az általános probléma a következő: Tegyük fel, hogy ismerem  $\xi$  eloszlását. Ha  $h$  egy (szép)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, mit tudok mondani  $h(\xi)$  eloszlásáról?

**Definíció 9.1.** Legyenek a  $\xi$  diszkrét valváltozó lehetséges értékei  $x_1, x_2, \dots$  és a megfelelő valószínűségek  $p_1, p_2, \dots$  (nem feltétlenül véges sok, lásd pl a geometriai eloszlást). Ekkor az  $\eta = h(\xi)$  valváltozó lehetséges értékei az  $y_1 = h(x_1), y_2 = h(x_2), \dots$  számok és a megfelelő valószínűségek:

$$P(\eta = y_k) \stackrel{\circ}{=} q_k = \sum_{h(x_i)=y_k} P(\xi = x_i) = \sum_{h(x_i)=y_k} p_i$$

*Megjegyzés.* A szumma azért kell, mert  $h$  nem feltétlenül injektív.

**Állítás 9.1.** Ha  $h$  szigorú monoton, akkor az  $\eta$  valváltozó  $y_k = h(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) értékeihez tartozó eloszlás megegyezik a  $\xi$  valváltozó eloszlásával.

**Állítás 9.2.** Tegyük fel hogy  $h(x)$  szigorúan monoton és diffható,  $\xi$  folytonos eloszlású valváltozó, sűrűségfv-e:  $f(x)$ . Ekkor az  $\eta = h(\xi)$  valváltozó sűrűségfüggvénye:

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

### Bizonyítás

Tegyük fel hogy  $h(x)$  szig mon nő. Ekkor az  $\{\eta < y\} = \{h(\xi) < y\}$  esemény egyenlő<sup>7</sup> a  $\{\xi < h^{-1}(y)\}$  eseménnyel:

$$\{\eta < y\} = \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) < y\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid h(\xi(\omega)) < y\}}_{\star}$$

Ha  $h$  növény

$$\star = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < h^{-1}(y)\}$$

Így  $\eta$  eloszlásfüggvénye:

$$G(y) = P(\eta < y) = P(h(\xi) < y) = P(\xi < h^{-1}(y)) = F(h^{-1}(y))$$

ahol  $F$  a  $\xi$  valváltozó eloszlásfüggvénye. Ekkor a láncszabály alkalmazásával:

$$g(y) = G'(y) = \frac{dF(h^{-1}(y))}{dy} = f(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

ahol  $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} > 0$ , mert  $h$  szig mon nő ( $\rightsquigarrow h^{-1}$  szig mon nő).

<sup>7</sup>Azért használjuk az egyenlő kifejezést, mert halmazokról van szó - lásd lejjebb.

Tegyük fel hogy  $h(x)$  szig mon csökken. Ekkor az  $\{\eta < y\} = \{h(\xi) < y\}$  esemény egyenlő a  $\{\xi > h^{-1}(y)\}$  eseménnyel. Ekkor

$$\star = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) > h^{-1}(y)\}$$

(Ha ezt nem látjuk, gondoljunk arra hogy pl  $\xi(\omega) = 2 > h^{-1}(y) = 1$  ekkor  $h(2) < h(1)$ , mert,  $h$  szig mon csökken.) Ekkor

$$G(y) = P(\eta < y) = P(h(\xi) < y) = P(\xi > h^{-1}(y)) = 1 - P(\xi < h^{-1}(y)) = 1 - F(h^{-1}(y))$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = -f(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

ahol  $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$ , mert  $h$  szig mon csökken ( $\rightsquigarrow h^{-1}$  szig mon csökken).  $\square$

**Példa 9.1.** Lineáris transzformáció:  $\eta = a\xi + b$ ,  $\xi$  sűrűségfüggvénye  $f(x)$ . Ekkor  $\eta$  sgfv-e:

$$g(y) = \underbrace{\frac{1}{|a|}}_{\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|} \underbrace{f\left(\frac{y-b}{a}\right)}_{f(h^{-1}(y))}$$

mert  $h(x) = ax + b \rightsquigarrow h^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

**Példa 9.2.** Tegyük fel hogy  $\xi$  normális eloszlású, és legyen  $\eta = e^\xi$ . Ekkor

$$h(x) = e^x \rightarrow h^{-1}(y) = \ln(y) \rightarrow \frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0 \\ \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(\ln(y)-m)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{ha } y > 0 \end{cases}$$

**Példa 9.3.** Tegyük fel hogy  $\xi$  eloszlás és sűrűségfv-e  $F(x)$  és  $f(x)$ ,  $h = \xi^2$  ( $h(x)$  nem monoton). Ekkor

$$G(y) = P(\xi^2 < y) = P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \quad \text{ha } y > 0$$

Összetett függvény deriválásával az első tag:

$$\frac{d}{dy} F(\sqrt{y}) = \underbrace{\frac{d}{dy} F(y) \Big|_{y=\sqrt{y}}}_{f(\sqrt{y})} \underbrace{\frac{d\sqrt{y}}{dy}}_{\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

A második tag:

$$\frac{d}{dy} (-F(-\sqrt{y})) = -\underbrace{\frac{d}{dy} F(y) \Big|_{y=-\sqrt{y}}}_{-f(-\sqrt{y})} \underbrace{\frac{d(-\sqrt{y})}{dy}}_{-\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

így:

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0 \\ \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & \text{ha } y > 0 \end{cases}$$

## 9.1 Valószínűségi vektorváltozók transzformációja

Nagyon röviden: A derivált helyét a Jacobi-mátrix determinánsa veszi át.

**Példa 9.4.** Legyen  $(\xi, \eta)$  sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

Írjuk fel az  $\alpha_1 = \xi + \eta$ ,  $\alpha_2 = \xi - \eta$  valváltozók együttes sűrűségfüggvényét!

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = x + y \\ z_2 = x - y \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = \frac{z_1 + z_2}{2} \\ y = \frac{z_1 - z_2}{2} \end{array}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dz_1} & \frac{dx}{dz_2} \\ \frac{dy}{dz_1} & \frac{dy}{dz_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(J) = -\frac{1}{2}$$

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\frac{(z_1+z_2)^2}{4} + \frac{(z_1-z_2)^2}{4}}{2}\right) = \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{4}\right)$$

## 10 Feltételes eloszlások

### 10.1 Feltételes eloszlások diszkrét valószínűségi változók esetén

Legyen  $(\xi, \eta)$  diszkrét valószínűségi vektorváltozó. Jelöljük  $\xi$  és  $\eta$  lehetséges értékeit  $x_1, x_2, \dots$ -vel és  $y_1, y_2, \dots$ -vel.

**Definíció 10.1.** A  $\xi = x_i$  esemény  $\eta = y_k$  feltétel melletti valószínűsége

$$P(\xi = x_i | \eta = y_k) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_k)}{P(\eta = y_k)}$$

*Megjegyzés.* A számláló nem más, mint az együttes eloszlást megadó táblázat egy cellája, a nevező pedig  $\eta$  peremeloszlásának 1 értéke.

**Definíció 10.2.** A  $\xi$  valváltozó  $y_i < \eta < y_j$  feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvénye:

$$F^*(x | y_i < \eta < y_j) \stackrel{\circ}{=} P(\xi < x | y_i < \eta < y_j)$$

**Állítás 10.1.** Legyen a  $(\xi, \eta)$  diszkrét valószínűségi vektorváltozó (együttes) eloszlásfüggvénye  $F(x, y)$ , és  $\eta$  peremeloszlás-függvénye

$$F_\eta(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

akkor, ha feltesszük hogy  $F_\eta(y_j) \neq F_\eta(y_i)$

$$F^*(x | y_i < \eta < y_j) = \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)}$$

#### Bizonyítás

A 7.3 tételhez hasonló megfontolások alapján

$$P(\xi < x, y_i < \eta < y_j) = F(x, y_j) - F(x, y_i)$$

másrészt definíció szerint

$$\begin{aligned} F^*(x | y_i < \eta < y_j) &= P(\xi < x | y_i < \eta < y_j) = \frac{P(\xi < x, y_i < \eta < y_j)}{P(y_i < \eta < y_j)} \\ &= \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)} \end{aligned}$$

## 10.2 Feltételes eloszlások folytonos valószínűségi változók esetén

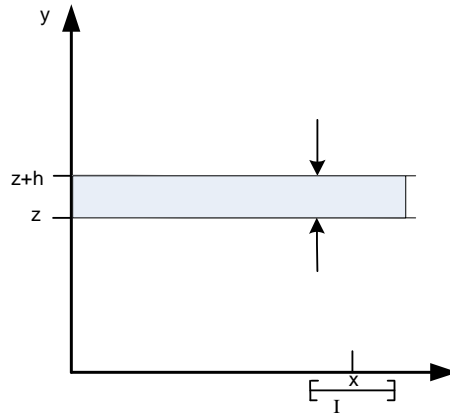
Folytonos esetben a fenti gondolatmenet azért szorul még némi megfontolásra, mivel a feltétel valószínűsége lehet 0, ha  $\eta = y$ .

**Definíció 10.3.** A  $\xi$  valószínűségi változó  $\eta = z$  feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvénye:

$$F^*(x|\eta = z) = \lim_{h \rightarrow 0} (P(\xi < x, z < \eta < z + h))$$

(ha a határérték létezik)

A definíciót az alábbi ábra szemlélteti. Hogyan tudjuk kifejezni folytonos valószínűségi (vektor) változó esetén az intervallumba esés valószínűségét?



Tegyük fel hogy a  $(\xi, \eta)$  valószínűségi vektorváltozó (együttes) sűrűségfüggvénye  $f_{(\xi, \eta)}(x, y)$ , és  $\eta$  peremsűrűség-függvénye  $f_\eta(y)$ .

Ekkor

$$P(\xi \in I | \eta \in [z, z+h]) = \frac{P(\xi \in I, \eta \in [z, z+h])}{P(\eta \in [z, z+h])}$$

$$\frac{\int_I \int_z^{z+h} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy}{\int_z^{z+h} f_\eta(y) dy} = \frac{\frac{\int_I \int_z^{z+h} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy}{h}}{\frac{\int_z^{z+h} f_\eta(y) dy}{h}} \quad (49)$$

Tudjuk hogy  $\eta$  eloszlásfüggvénye  $F_\eta(w) = \int_{-\infty}^w f_\eta(y) dy$ . Tegyük fel hogy  $f_{(\xi, \eta)}(x, y)$  és  $f_\eta(y)$  folytonosak. Ekkor  $F'_\eta = f_\eta$ . Vegyük ezután a (49) kifejezés  $h \rightarrow 0$  limesét e fenti megfontolással, és bontsuk két részre a számlálóban található integrált:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\int_I (\int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy - \int_{-\infty}^z f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy) dx}{h}}{\frac{F_\eta(z+h) - F_\eta(z)}{h}}$$

a nevezőben szereplő kifejezés nem más, mint a derivált definíciója, tehát a nevező  $= f_\eta(z)$ , ami konstans. A határérték tehát a számláló határértéke osztva  $f_\eta(z)$ -val. A számláló határértéke pedig

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_I \frac{\left( \int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy - \int_{-\infty}^z f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy \right)}{h} dx$$



Általában véve tudjuk hogy ha  $g$  egy szép függvény aminek  $G$  a primitívfüggvénye, akkor

$$\int_z^{z+h} g = G(z+h) - G(z)$$

és

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(z+h) - G(z)}{h} = G'(z) = g(z)$$

tehát

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_I \frac{\left( \int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy - \int_{-\infty}^z f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy \right)}{h} dx &= \\ \int_I \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy - \int_{-\infty}^z f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy \right)}{h} dx &= \\ \int_I \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left( \tilde{F}(x, z+h) - \tilde{F}(x, z) \right)}{h}}_{\tilde{F}'(x, z) = f_{(\xi, \eta)}(x, z)} dx & \end{aligned}$$

Ahol a jelölés magyarázata: Bármilyen  $x$ -re tekinthetünk  $f_{(\xi, \eta)}(x, y)$ -ra úgy, mint egy egyváltozós függvényre, aminek  $y$  a változója. Ekkor ennek a függvénynek létezik  $\tilde{F}$  primitívfüggvénye. Tehát, visszatérve az eredeti problémához

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_I \frac{\left( \int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy - \int_{-\infty}^z f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy \right)}{h} dx}{\frac{F_{\eta}(z+h) - F_{\eta}(z)}{h}} = \frac{\int_I f_{(\xi, \eta)}(x, z) dx}{f_{\eta}(z)} = \int_I \frac{f_{(\xi, \eta)}(x, z)}{f_{\eta}(z)} dx$$

Tehát az intervallumba esés valószínűségét megkapjuk, ha az együttes sűrűségfüggvény második változóját fixálva a fenti függvényt integráljuk az adott intervallumon  $x$  szerint. Ez alapján

**Definíció 10.4.** Legyen

$$P(\xi \in I | \eta = z) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \int_I \frac{f_{(\xi, \eta)}(x, z)}{f_{\eta}(z)} dx & \text{ha } f_{\eta}(z) \neq 0 \\ 0 & \text{ha } f_{\eta}(z) = 0 \end{cases}$$

**Definíció 10.5.**  $\xi$ -nek az  $\eta = z$  feltétel melletti sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi|\eta=z}(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{f_{(\xi, \eta)}(x, z)}{f_{\eta}(z)}$$

**Definíció 10.6.**  $\xi$ -nek az  $\eta = z$  feltétel melletti feltételes várható értéke

$$E(\xi | \eta = z) \stackrel{\circ}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta=z}(x) dx$$

*Megjegyzés.*  $E(\xi | \eta = z)$  létezik és véges, ha  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi|\eta=z}(x) < \infty$

**Definíció 10.7.** A  $\xi$  valváltozó  $\eta$ -ra vonatkoztatott regressziós függvénye:

$$r(z) \stackrel{\circ}{=} E(\xi | \eta = z)$$

## 11 $L^p$ terek és konvergencia

Legyen  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  egy valószínűségi mező.

**Definíció 11.1.**  $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valváltozók azonos eloszlásúak ha  $Q_\xi = Q_\eta$

*Megjegyzés.* Ekkor persze  $P(\xi < x) = P(\eta < x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**Definíció 11.2.**  $A \in \mathfrak{F}$  esemény 1-vallal következik be, ha  $P(A) = 1$

**Definíció 11.3.** Azt mondjuk hogy  $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valváltozók 1-valószínűséggel (1-vallal) megegyeznek/egyenlőek, ha a

$$[\xi = \eta] \stackrel{\circ}{=} \{\xi = \eta\} \stackrel{\circ}{=} \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = \eta(\omega)\}$$

halmaz valószínűsége (valja) 1. Ekkor  $\xi = \eta$  P-majdnem mindenütt (P.m.m.).

*Megjegyzés.* Ha  $\xi = \eta$  P-majdnem mindenütt, akkor  $E(\xi) = E(\eta)$

**Példa 11.1.** Legyen pl  $(\Omega, \mathfrak{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1], \lambda_{[0,1]}))$  (ahol  $\lambda_{[0,1]}$  a Lebesgue mérték) és

$$\xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \xi(\omega) = \omega \quad \eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \eta(\omega) = \begin{cases} 200 & \text{ha } \omega \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\} \\ \omega & \text{ha } \omega \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\} \end{cases}$$

Ekkor  $\xi = \eta$   $\lambda$ -majdnem mindenütt. Jelölés:  $\xi \stackrel{\lambda_{mm}}{=} \eta$

### 11.1 $L^p$ terek

**Definíció 11.4.** Legyen  $p \in [1, +\infty[$

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P) \stackrel{\circ}{=} \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető és } \int_{\Omega} |f|^p dP < +\infty \right\}$$

*Megjegyzés.* Ha  $p$  irracionális akkor hogyan értelmezzük a fenti definíciót? Pl.

$$\omega \in \Omega \quad |f(\omega)|^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(\omega)|^{z_n}$$

ahol  $z_n \rightarrow \sqrt{2}$  és  $(z_n \in \mathbb{Q})(\forall n \in \mathbb{N})$

*Megjegyzés.* Ha  $p = \infty$  akkor

$$\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}(\Omega, \mathfrak{F}, P) \stackrel{\circ}{=} \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető és } f \text{ P.m.m. korlátos}\}$$

azaz  $\exists A \in \mathfrak{F} \ P(A) = 0$  és  $f|_{\Omega \setminus A}$  korlátos függvény.

*Megjegyzés.*  $f$  mérhető  $\Rightarrow |f|^p$  ( $p > 1$ ) mérhető

**Definíció 11.5.**  $f$   $p$ -normája:

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val. mező,  $p \in [1, \infty]$ ,  $f \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

$$\|f\|_p \doteq \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |f|^p dP \right)^{1/p} & \text{ha } p \in [1, +\infty[ \\ \sup_{\omega \in \Omega \setminus A} |f(\omega)| & \text{ha } p = +\infty \end{cases}$$

ahol az  $A$  halmaz jelentése:  $A$ -n kívül  $f$  korlátos és  $P(A) = 0$ .

*Megjegyzés.* Speciálisan  $p \in [1, \infty[$ -re  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valváltozó esetén  $\|\xi\|_p = (E(|\xi|^p))^{\frac{1}{p}}$

**Állítás 11.1.**  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val. mező,  $p \in [1, \infty]$ ,  $f, g \in \mathfrak{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$

- $\|f\|_p \geq 0$
- $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
- $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

**Definíció 11.6.** Az  $L^p$  tér nem más mint ekvivalencia osztályok összessége

$$L_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P) \doteq \left\{ \dot{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mérhető, } \int_{\Omega} |f|^p dP < +\infty \right\}$$

ahol  $f$  ekvivalencia osztálya  $P$  szerint:

$$\dot{f} \doteq \{h : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | h \text{ mérhető, és } h = f \text{ 1 vallal}\}$$

Az ekvivalencia relációt  $f \sim h$ -val jelöljük:

$$f \sim h \doteq f = h \text{ P.m.m.}$$

*Megjegyzés.* Azért ekvivalencia reláció, mert reflexív, szimmetrikus és tranzitív

**Állítás 11.2.** Az ekvivalencia osztályokra a következő tulajdonságok igazak:

- $\dot{f} + \dot{g} = (\dot{f} + \dot{g})$
- $\alpha(\dot{f}) = (\alpha f)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )

Mivel az ekvivalencia osztályok különféle elemei csak 0 mértékű halmazon térnek el egymástól, kiterjeszthetjük a norma fogalmát az ekvivalencia osztályokra.

**Definíció 11.7.**  $\dot{f} \in L_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

$$\|\dot{f}\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p dP \right)^{1/p}$$

*Megjegyzés.* Mivel  $\dot{f}$  elemei közt a fentiek értelmében igazából nincs számunkra érdekes eltérés, a továbbiakban nem teszünk különbséget aközött hogy  $\dot{f}$ -ről, vagy az ekvivalenciaosztály egy reprezentációról,  $f$ -ről beszélünk.

**Állítás 11.3.** *Riesz-Fischer tétel.*  $L_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  Banach tér  $\forall p \in [1, +\infty]$ -re, azaz:  $\forall (\dot{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $L^p$ -beli sorozatra melyre  $\|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty \quad \exists f \in L^p$  hogy  $f_n \rightarrow f$   $L^p$ -ben.

## 11.2 Konvergencia-fajták $L^p$ terekben

$L^p$  terekben az alábbi konvergencia-fajtákat különböztetjük meg.

① 1-vallal egyenletes konvergencia.

Legyen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $L^p$ -beli fv sorozat,  $f \in L^p$ .

$f_n \rightarrow f$  1 vallyal egyenletesen (m.m. egyenletesen), ha

$$(f_n - f) \in L^\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ és } \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

ez pontosan azzal ekvivalens hogy

$$a_n \stackrel{\circ}{=} \sup_{\omega \in \Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| \rightarrow 0$$

jelölés:  $f_n \xrightarrow{mme} f$

② 1-vallal konvergencia.

$f_n \rightarrow f$  1 vallyal, azaz  $f_n \xrightarrow{mm} f$  P.m.m., ha

$$\exists A \in \mathfrak{F} \text{ hogy } P(\Omega \setminus A) = 0 \text{ és } f_n(\omega) \rightarrow f(\omega) \quad \forall \omega \in A\text{-ra}$$

másszóval, val. mező és valváltozó esetén:

$$P(\{\omega \in \Omega | \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}) = 1$$

③  $L^p$ -ben való konvergencia ( $p \in [1, +\infty[$ ).

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \text{ ha } \|f_n - f\|_p \rightarrow 0, \text{ azaz } \left( \int_{\Omega} |f_n - f|^p dP \right)^{1/p} \rightarrow 0$$

Az eddigi konvergenciatípusok általános  $f$ -re vonatkoztak, a következő 2 kifejezetten valváltozókra, ezért használjuk a továbbiakban a  $\xi$  jelölést  $f$  helyett.

④ Sztochasztikus konvergencia.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val mező,  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  val vált sorozat  $\Omega$ -n,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val vált.  $\xi_n \rightarrow \xi$  sztochasztikusan, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

azaz

$$P(\{\omega \in \Omega | |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$$

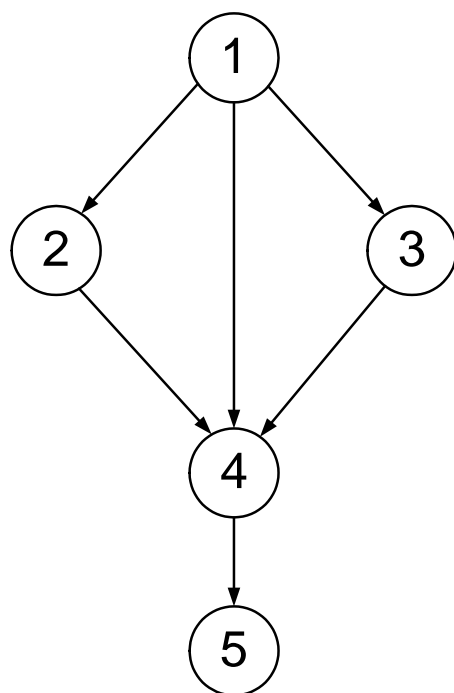
⑤ Eloszlásban való konvergencia.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  val mező,  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  val vált sorozat  $\Omega$ -n,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  val vált. A  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  val vált sorozat eloszlásban tart  $\xi$ -hez, ha

$$P(\xi_n < x) \rightarrow P(\xi < x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ melyre } x \rightarrow P(\xi < x) (= F_\xi(x)) \text{ folytonos fv}$$

röviden:  $F_{\xi_n(x)} \rightarrow F_\xi(x)$

Állítás 11.4.



**Bizonyítás** ①  $\Rightarrow$  ③

Tudjuk hogy  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ , kell hogy  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ , ami ekvivalens azzal hogy

$$\left( \int_{\Omega} |f_n - f|^p \right)^{1/p} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f_n - f|^p \rightarrow 0 \text{ (mivel } p > 1)$$

$$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0$$

tudjuk hogy

$$|f_n - f|^p \leq \left( \sup_{\omega \in \Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| \right)^p = \|f_n - f\|_\infty^p$$

ezért

$$\|f_n - f\|_p^p \leq \int_{\Omega} \|f_n - f\|_\infty^p dP = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty^p}_{\rightarrow 0} \underbrace{\int_{\Omega} 1 dP}_{=1} \rightarrow 0$$

**Bizonyítás** ②  $\Rightarrow$  ④

Azaz azt szeretnénk belátni hogy az 1-vallal-konvergenciából következik a sztochasztikus.  
Tudjuk hogy

$$P(\underbrace{\{\omega \in \Omega | \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}}_{\stackrel{\circ}{=} K}) = 1$$

Legyen  $\varepsilon > 0$  és

$$a_n \stackrel{\circ}{=} P(\underbrace{\{\omega \in \Omega | |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}}_{\stackrel{\circ}{=} A_n}) \rightsquigarrow a_n = P(A_n)$$

kell:  $a_n \rightarrow 0$  (ekkor teljesül ④)

Legyen  $\omega \in K$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \omega \notin A_n \Rightarrow \omega \in (\Omega \setminus A_n)$$

Tegyük fel hogy  $\exists \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \not\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : a_n = P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \geq \delta > 0 \quad \infty \text{ sok } n\text{-re (mert } \not\rightarrow 0)$$

Azaz  $\exists (\hat{\xi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  részsorozat, hogy

$$P(\{|\hat{\xi}_n - \xi| > \varepsilon\}) \geq \delta$$

igaz  $\forall n \in \mathbb{N}$ -re. De  $\hat{\xi}_n \rightarrow \xi$  1-vallal:

$$\left\{ \omega \in \Omega \mid |\hat{\xi}_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ \omega \in \Omega \mid \hat{\xi}_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega) \right\}$$

A jobb oldali halmaz mértéke 0, viszont  $\delta > 0$ .  $\nexists$

**Bizonyítás** ③  $\Rightarrow$  ④

$\xi_n \rightarrow \xi$   $L^p$ -ben, azaz  $E(|\xi_n - \xi|^p) \rightarrow 0$

Kell:  $\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \rightarrow 0$

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p > \varepsilon^p) \leq \frac{E(|\xi_n - \xi|^p)}{\varepsilon^p} \rightarrow 0$$

Ahol a becslésnél a Markov-egyenlőtlenséget használtuk.

## 12 Köszönet

Berezvai Orsolya, Farkas Domonkos László, Orosz Áron.

## Hivatkozások

- [1] Medvegyev Péter. *Valószínűesszámitás*. Aula, Budapest, 2007.  
<http://medvegyev.uni-corvinus.hu/valszam.pdf>.