30-35. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$\boxed{30.}$ $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ y \to \infty}} \frac{xy - 1}{y + 1}$$

* 31. $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to \infty}} \frac{2xy - 1}{y + 1}$$

* 32. $$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \frac{1}{x - y}$$

* 33. $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to \infty}} x \cos y$$

$\boxed{34.}$ $$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$$

* 35. $$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2)\, e^{-(x+y)}$$

36. Hol nem folytonos az

$$f(x,y) = \frac{1}{\sin x \sin y}$$ függvény?

$\boxed{37.}$ Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \frac{\sin xy}{y}$$ függvény alkalmas kiegészitéssel az

egész sikon folytonossá tehető.

1. Értelmezési tartomány

1-7. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények értelmezési tartományát:

1. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

* 2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

3. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

4. $f(x, y) = \dfrac{x + 2}{4 - x^2 - y^2}$

5. $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$

6. $f(x, y) = \ln (x + y)$

$\boxed{7.}$ $f(x, y) = \arcsin (y - x)$

2. Felületek szemléltetése

8-17. A koordináta-síkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálata alapján szemléltessük az alábbi felületeket:

* 8. $z = x^2 + 4y^2$

$\boxed{9.}$ $z = y^2 - 2x$

10. $z^2 = x + y$

11. $z = \cos (x + \sqrt{3}\, y)$

12. $z = e^{x+y}$

4. Parciális deriváltak. Láncszabály

38-42. Képezzük az alábbi kétváltozós függvények x és y változók szerinti parciális deriváltjait:

38. $f(x,y) = e^{x^2 y} - 2x^2y^3 \sin(x+y)$

39. $f(x,y) = e^x \cos y - x \ln y$

40. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1-y}$

41. $f(x,y) = y^2 \ln\sqrt{xy}$

* 42. $f(x,y) = x^y + y^x$

43-44. Képezzük az alábbi parciális deriváltakat:

43. $f(s,t) = \dfrac{s^3 - t^3}{st}$; $\quad f'_s(1,3) = ?$ $\quad f'_t(1,3) = ?$

44. $v(x,t) = \arcsin \dfrac{x}{t}$; $\quad v'_x(-1,2) = ?$ $\quad v'_t(-1,2) = ?$

45. Legyen $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

46-48. Határozzuk meg az alábbi felületek megadott pontjában az $[x,z]$ illetve az $[y,z]$ koordinátasíkokkal párhuzamos metszetgörbék érintőinek iránytangensét!

* 46. $z = 2x^2 - y^2$; $\quad x_0 = y_0 = 1$

47. $z = \cos(x + \sqrt{3}\,y)$; $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $\quad y_0 = 0$