

DISZKRÉT MATEMATIKA II.

ÍRÁSBELI VIZSGA

2014. május 20.

**PÁZMÁNY PÉTER
KATOLIKUS EGYETEM
INFORMÁCIÓS TECHNOLÓGIAI
ÉS BIONIKAI KAR**

Fontos tudnivalók

Tisztelt Vizsgázó!

Jelen füzet a 2013/14/2. tanulmányi időszak, vizsgaidőszakának Diszkrét matematika II. írásbeli (és szóbeli) vizsgájához lett kiadva. A füzet tartalmazza az intézmény által nyilvánosságra hozott vizsgainformációkat, valamint a tárgy témaköreinek kidolgozott formáját is.

A füzetben mindemellett megtalálható a Diszkrét matematika II. vizsga menetének leírása, a pontszámítás módja, és egyéb fontos tudnivalók.

A kiadványban bárhol, de különösen a kidolgozott témakörökben előfordulhatnak hiányosságok, bővebb magyarázatra szoruló részek. Az ezek kiegészítése illetve jegyzetelés, feladatmegoldás céljából a kidolgozott tételeket a füzetben jegyzetoldalak követik.

Eredményes felkészülést kívánunk!

A kiadványt összeállította:
Naszlady Márton Bese – 2014



Ez a kiadvány a *Creative Commons Nevezd meg! – Ne add el! 4.0 Nemzetközi licenc* alá tartozik. A licenc megtekintéséhez látogasson el a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/> oldalra.

A kiadványban szereplő tartalmi elemek
harmadik személytől származó véleményt, értesülést tükröznek.
Az esetlegesen előforduló tárgyi tévedésekből fakadó visszás helyzetek
kialakulásáért, illetve azok következményeiért a kiadó nem vállal felelősséget!

Tartalomjegyzék

Témakörök.....	4
Műveletek és struktúrák.....	4
Műveletek	4
Algebrai struktúrák	5
Háló.....	7
Számosságok	10
Számosság fogalma.....	10
Számosságok.....	10
Nevezetes halmazok számossága.....	12
Számossággal kapcsolatos elméletek.....	13
Nagyságrendek	15
Aszimptotikus közelítések, nagyságrend	15
Függvények növekedése	15
Komplexitás.....	15
Logika	16
Szintaxis.....	16
Szemantika.....	16
Szemantikai következmény	17
Prenex konjunktív normálforma	18
Rezolúció	18
Gráfok.....	20
Általános összefüggések	20
Részgráfok, izomorfia.....	21
Körök és utak	21
Síkgráfok és színezésük	23
Hálózati folyamatok	25
Fogalmak	25
Tételek hálózatokra.....	25
Vizsgainformációk.....	27
Vizsga menete, jegy számítása	27
Jegyzetek	28

Témakörök

Műveletek és struktúrák

Műveletek

Definíció Tekintsük matematikai objektumok egy H halmazát. A *művelet* olyan függvény, amely az adott objektumok halmazából vett objektum(ok)hoz egy (másik) halmazbeli objektumot rendel.

Egyváltozós (unáris) az $f: H \rightarrow H$ művelet, ha egy objektumhoz rendel egy (másik) objektumot.

Kétváltozós (bináris) az $f: H \times H \rightarrow H$ művelet, ha két objektumhoz rendel hozzá egy (másik) objektumot.

Az n változós művelet $f: H^n \rightarrow H$

Műveleti tulajdonságok

Definíció Egy H halmazon értelmezett $*$ bináris művelet *asszociatív* (csoportosítható), ha bármely $a, b, c \in H$ esetén $a * (b * c) = (a * b) * c$ teljesül.

Definíció Egy H halmazon értelmezett $*$ bináris művelet *kommutatív* (felcserélhető), ha bármely $a, b \in H$ esetén $a * b = b * a$ teljesül.

Definíció Egy H halmazon értelmezett $*$ művelet disztributív a \circ műveletre nézve, ha bármely $a, b, c \in H$ esetén $a * (b \circ c) = a * b \circ a * c$ és $(b \circ c) * a = b * a \circ c * a$.

Definíció Egy H halmazon értelmezett $*$ bináris művelet *bal oldali egységelemének* egy olyan $e_b \in H$ elemet nevezünk, melyre $\forall a \in H$ esetén $e_b * a = a$ teljesül.

Egy H halmazon értelmezett $*$ bináris művelet *jobb oldali egységelemének* egy olyan $e_j \in H$ elemet nevezünk, melyre $\forall a \in H$ esetén $a * e_j = a$ teljesül.

Tétel Legyen értelmezve H halmazon egy $*$ bináris művelet. Ha a kétoldali egységek léteznek, akkor $e_b = e_j = e$, vagyis az egység kétoldali és egyértelmű.

Bizonyítás $e_b = e_b * e_j = e_j$ ■

Definíció Az $e \in H$ elem $*$ bináris művelet *egységeleme*, ha mind bal-, mind jobboldali egységelem, azaz $\forall a \in H$ esetén $e * a = a * e = a$ teljesül.

Definíció Az $a \in H$ elem $*$ bináris műveletre vonatkozó *bal oldali inverze* egy olyan $a_b^{-1} \in H$ elem, melyre $a_b^{-1} * a = e$, ahol $e \in H$ elem $*$ művelet egységeleme.

Az $a \in H$ elem $*$ bináris műveletre vonatkozó *jobb oldali inverze* egy olyan $a_j^{-1} \in H$ elem, melyre $a * a_j^{-1} = e$, ahol $e \in H$ elem $*$ művelet egységeleme.

Tétel Legyen értelmezve H halmazon egy $*$ bináris, asszociatív művelet. Ha a kétoldali inverzek léteznek, akkor $a_b^{-1} = a_j^{-1} = a^{-1}$, vagyis asszociatív műveletnél az inverz kétoldali és egyértelmű.

Bizonyítás $a_b^{-1} = a_b^{-1} * e = a_b^{-1} * (a * a_j^{-1}) = (a_b^{-1} * a) * a_j^{-1} = e * a_j^{-1} = a_j^{-1}$ ■

Definíció Az $a \in H$ elem $*$ bináris műveletre vonatkozó *inverze* egy olyan $a^{-1} \in H$ elem, mely az a elemnek bal- és jobboldali inverze is, azaz $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Algebrai struktúrák

Definíció Algebrai struktúra alatt olyan nem üres H halmazt értünk, melyben legalább egy $*$ művelet van definiálva. Jelölés: $\langle H | * \rangle$ több művelet esetén $\langle H | *, \circ \rangle$. Az algebrai struktúrában a művelet(ek) mellett szerepelhetnek függvények is.

Csoport, félcsoport

Definíció Egy G nemüres halmazt *félcsoportnak* nevezünk, ha értelmezve van rajta egy $*$ bináris művelet, amely asszociatív: $\forall a, b, c \in G$ esetén $a * (b * c) = (a * b) * c$

Példa: $\langle \mathbb{R}^{n \times n} | \cdot \rangle$ (az $n \times n$ -es mátrixok a szorzásra nézve)

Definíció Egy G nemüres halmazt *csoportnak* nevezünk, ha értelmezve van rajta egy $*$ bináris művelet, amely:

- 1.) asszociatív: $\forall a, b, c \in G$ esetén $a * (b * c) = (a * b) * c$
- 2.) van egységeleme: $\exists e \in G$, melyre $e * a = a, \forall a \in G$
- 3.) van inverze: $\forall a \in G$ esetén $\exists a^{-1} \in G$, melyre $a^{-1} * a = e$

Definíció Az olyan csoportot, melyben a $*$ művelet kommutatív, vagyis $\forall a, b \in G$ esetén $a * b = b * a$, kommutatív vagy Abel-csoportnak nevezzük.

Példa: $\langle \mathbb{R} | + \rangle$ (valós számok összeadása), $\langle \mathbb{Q}^+ | \cdot \rangle$ (pozitív racionális számok szorzása)

Tétel Ha G csoport, akkor $\forall a, x, y \in G$ esetén ha

- (1) $a * x = a * y$, akkor $x = y$, illetve ha
- (2) $x * a = y * a$, akkor $x = y$.

Bizonyítás (1) $x = e * x = a^{-1} * a * x = a^{-1} * a * y = e * y = y$
 (2) $x = x * e = x * a * a^{-1} = y * a * a^{-1} = y * e = y$ ■

Tétel Ha G csoport, akkor $\forall a, b, x \in G$ esetén, ha

- (1) $a * x = b$, akkor $x = a^{-1} * b$, illetve ha
- (2) $x * a = b$, akkor $x = b * a^{-1}$.

Bizonyítás (1) $x = e * x = (a^{-1} * a) * x = a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$
 (2) $x = x * e = x * (a * a^{-1}) = (x * a) * a^{-1} = b * a^{-1}$ ■

Gyűrű

Definíció Egy R nemüres halmazt gyűrűnek nevezünk, ha értelmezve van rajta két művelet, $*$ és \circ , melyekre teljesülnek a következő tulajdonságok:

- 1.) a $*$ művelet Abel-csoport
- 2.) a \circ művelet félcsoport
- 3.) a két műveletet a disztributív szabályok kötik össze, azaz $\forall a, b, c \in R$ esetén:

$$\begin{aligned} a \circ (b * c) &= a \circ b * a \circ c \\ (b * c) \circ a &= b \circ a * c \circ a \end{aligned}$$

A $*$ műveletet összeadásnak, a \circ műveletet szorzásnak nevezzük. Ha a szorzás kommutatív, akkor kommutatív gyűrűről beszélünk.

Példa: $\langle \mathbb{R}^{n \times n} | +, \cdot \rangle$ (az $n \times n$ -es mátrixok az összeadásra és szorzásra nézve gyűrű)
 $\langle \mathbb{Q} | +, \cdot \rangle$ (a racionális számok az összeadásra, szorzásra nézve kommutatív gyűrű)

Test, ferdetest

Definíció Egy T nemüres halmazt *testnek* nevezünk, ha értelmezve van rajta két művelet, $*$ és \circ , melyekre teljesülnek a következő tulajdonságok:

- 1.) $a *$ és $a \circ$ művelet Abel-csoport
- 2.) $a *$ művelet egységelemének nincs $a \circ$ műveletre vonatkozó inverze
- 3.) a két műveletet a disztributív szabályok kötik össze, azaz $\forall a, b, c \in R$ esetén:

$$a \circ (b * c) = a \circ b * a \circ c$$

$$(b * c) \circ a = b \circ a * c \circ a$$

Ha $a \circ$ művelet nem kommutatív, akkor *ferdetestről* beszélünk.

Példa: $\langle \mathbb{R} | +, \cdot \rangle$ (a valós számok az összeadásra és szorzásra nézve testet alkotnak)

Részstruktúra

Definíció Ha $\langle H | * \rangle$ és $H_1 \subseteq H$ esetén H_1 -re is $\langle H_1 | * \rangle$, akkor azt mondjuk, hogy H_1 *részstruktúrája* H -nak.

Példa: Az $n \times n$ -es mátrixok körében a diagonális mátrixok alteret alkotnak.

Komplex számok, mint rendezett számpárok struktúrája

Definíció Legyen \mathbb{C} a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. A \mathbb{C} halmazon két műveletet értelmezünk a következőképpen:

összeadás: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}$

szorzás: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$

Tétel A $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok testet alkotnak a definícióban megadott műveletekre nézve.

Tétel Az $(a, 0)$ komplex számok és a valós számok között egy-egy értelmű, művelet-tartó leképezés létesíthető, vagyis az $(a, 0)$ komplex számok izomorfak a valós számokkal.

Bizonyítás Konstruktív módon, megadva az izomorfiát biztosító egy-egy értelmű leképezést: $(a, 0) \in \mathbb{C} \leftrightarrow a \in \mathbb{R}$.

A kommutatív és asszociatív tulajdonságok a komplex számokra is teljesülnek, így elegendő annak bizonyítása, hogy mind az összeadásra, mind a szorzásra nézve is zárt a halmaz: két ilyen komplex szám szorzata és összege is ugyanilyen típusú komplex szám. Szükséges még az inverz és az egységelem létezésének bizonyítása is.

Az összeadás nem vezet ki az $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazból, mivelhogy

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

Az összeadás egysége $(0, 0)$. Erre vonatkozó inverz: $(a, 0) + (-a, 0) = (0, 0)$

A szorzás nem vezet ki az $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazból, mivelhogy

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0^2, 0a + 0b) = (ab, 0)$$

A szorzás egysége $(1, 0)$. Erre vonatkozó inverz: $(a, 0) \cdot (\frac{1}{a}, 0) = (1, 0)$ ■

Háló

Definíció A $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ direkt szorzat bármely részhalmazát *relációnak* nevezzük.

Definíció Az \mathcal{R} bináris reláció H halmazon, ha $\mathcal{R} \subseteq H \times H = \{(a, b) \mid a \in H, b \in H\}$

A bináris reláció tulajdonságai

- 1.) reflexív, ha $(x, x) \in \mathcal{R}$
- 2.a) szimmetrikus, ha $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$
- 2.b) antiszimmetrikus, ha $(x, y) \in \mathcal{R}$ és $(y, x) \in \mathcal{R}$ csakis úgy lehet, ha $x = y$
- 3.) tranzitív, ha $(x, y) \in \mathcal{R}$ és $(y, z) \in \mathcal{R}$ esetén $(x, z) \in \mathcal{R}$

Ekvivalencia reláció

Definíció Az \mathcal{R} bináris reláció a H halmazon *ekvivalencia reláció*, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Rendezési reláció

Definíció Az \mathcal{R} bináris reláció H halmazon *parciális (részben) rendezési reláció*, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. A H halmazt ekkor *részben rendezettnak* nevezzük.

Definíció A H halmaz *részben rendezett*, ha rendezési reláció van megadva H elemein. Ezt a relációt szokás a \leq jellel jelölni.

Definíció Az \mathcal{R} parciális rendezési reláció H halmazon *teljes*, ha az $x, y \in H$ esetén a $(x, y) \in \mathcal{R}$ és az $(y, x) \in \mathcal{R}$ relációk közül legalább az egyik teljesül.

Definíció A H halmazon adott parciális rendezés szerinti *legnagyobb elem* N , ha minden $h \in H$ -ra $h \leq N$.
A H halmazon adott parciális rendezés szerinti *legkisebb elem* k , ha minden $h \in H$ -ra $k \leq h$.

Definíció A H halmazon adott parciális rendezés szerinti *maximális elem* M , ha nincsen olyan $h \in H$, melyre $M < h$.
A H halmazon adott parciális rendezés szerinti *minimális elem* m , ha nincsen olyan $h \in H$, melyre $h < m$.

Tétel Ha van legnagyobb (vagy legkisebb) elem, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás Indirekt módon tegyük fel, hogy két legnagyobb elem létezik, legyenek ezek M_1 és M_2 . Ekkor a definíció szerint $M_1 \leq M_2$ és $M_2 \leq M_1$. Mivel a rendezési reláció antiszimmetrikus, ezért $M_1 = M_2$. ■

Definíció A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmazának *felső korlátja* (az adott rendezés és H szerint) $K \in H$, ha minden $h_1 \in H_1$ -re $h_1 \leq K$.
A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmazának *alsó korlátja* (az adott rendezés és H szerint) $k \in H$, ha minden $h_1 \in H_1$ -re $k \leq h_1$.

Definíció A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmaza *korlátos*, ha létezik alsó és felső korlátja. Ha létezik a felső korlátok közül legkisebb, akkor azt supremumnak, ha létezik az alsó korlátok közül legnagyobb, azt infimumnak nevezzük.

Háló

Definíció 1 A H részben rendezett halmaz *háló*, ha bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma. A H háló *teljes*, ha bármely részhalmazának van infimuma és supremuma.

Definíció 2 A H halmaz *háló*, ha értelmezve van rajta két, $*$ és \circ által jelölt művelet, melyekre $\forall a, b, c \in H$ esetén teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

$$1.) (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$2.) a \circ b = b \circ a \quad a * b = b * a$$

3.) elnyelési tulajdonság

$$a \circ (b * a) = a$$

$$a * (b \circ a) = a$$

Példa: A természetes számok halmazán az oszthatóság mint részbenrendezési reláció, hálót alkot.

Nemüres halmaz részhalmazai hálót alkotnak a metszet és unió műveletekkel.

Tétel $a * a = a$ és $a \circ a = a$ (azaz $*$ és \circ idempotens műveletek).

Bizonyítás $y := x * x$. Ekkor $x = x * (x \circ y) = x * (x \circ (x * x)) = x * x$. Hasonlóan $y := x \circ x$. Ekkor $x = x \circ (x * y) = x \circ (x * (x \circ x)) = x \circ x$ ■

Tétel $x \circ y = x \Leftrightarrow x * y = y$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $x \circ y = x$. Ekkor $x * y = (x \circ y) * y = y * (x \circ y) = y$. Tegyük fel, hogy $x * y = y$. Ekkor $x \circ y = x \circ (x * y) = x$. ■

Tétel A háló kétfajta definíciója ekvivalens egymással.

Bizonyítás Konstruktív módon.

Ha létezik \leq rendezési reláció, megadható $*$ és \circ műveletek:

Legyen $a \circ b \stackrel{\text{def}}{=} \inf(a; b)$ és $a * b \stackrel{\text{def}}{=} \sup(a; b)$. Ekkor $*$ és \circ műveletek:

1.) kommutatív

2.) asszociatív

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$\inf(a; \inf(b; c)) = \inf(\inf(a; b); c) \quad \sup(a; \sup(b; c)) = \sup(\sup(a; b); c)$$

3.) elnyelés

$$a \circ (b * a) = a \quad \inf(a; \sup(a; b)) = \begin{cases} \inf(a; b) & \text{ha } a \leq b \\ \inf(a; a) & \text{ha } b \leq a \end{cases}$$

$$a * (b \circ a) = a \quad \sup(a; \inf(b; a)) = \begin{cases} \sup(a; b) & \text{ha } b \leq a \\ \sup(a; a) & \text{ha } a \leq b \end{cases}$$

Ha léteznek $*$ és \circ műveletek, megadható \leq rendezési reláció:

Legyen $a \leq b$, akkor és csak akkor, ha $a \circ b = a$. Ekkor \leq reláció:

1.) reflexív

$$2.) \text{ antiszimmetrikus} \quad \begin{cases} a \circ b = a \\ b \circ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b$$

$$3.) \text{ tranzitív} \quad \begin{cases} a \circ b = a \\ b \circ c = b \end{cases} \Rightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = a \circ c$$

■

Definíció	Valamely H rendezett halmazon értelmezett $f : H \rightarrow H$ függvény <i>monoton</i> (rendezéstartó), ha minden H halmazbeli $h_1 \leq h_2$ -re $f(h_1) \leq f(h_2)$. A $h \in H$ fixpontja f -nek, ha $f(h) = h$.
Tétel	(Tarski fixpont tétele) Teljes hálón értelmezett monoton (rendezéstartó) f függvénynek van legkisebb és legnagyobb fixpontja.
Bizonyítás	<p>Legyen G azon elemek halmaza, melyekre $f(x) \leq x$. Ennek alsó határa, vagyis $g = \inf(G)$ lesz a legkisebb fixpont.</p> <p>Egyrészt $g \in G$, ugyanis $g \leq f(x) \leq x$. Ezért $f(g) \leq f(f(x)) \leq f(x) \leq x$, vagyis $f(g)$ is alsó korlát. Mivel g a legnagyobb alsó korlát, ezért $f(g) \leq g$, tehát $g \in G$.</p> <p>Másrészt g fixpont, vagyis $g = f(g)$. Mivel $f(g) \leq g$, ezért $f(f(g)) \leq f(g)$, vagyis $f(g) \in G$. De akkor g alsó korlát volta miatt $g \leq f(g)$. A rendezési reláció antiszimmetrikus tulajdonsága miatt $g = f(g)$.</p> <p>Harmadrészt g legkisebb fixpont. Legyen G^* a fixpontok halmaza, $g^* = \inf(G^*)$. Mivel $G^* \subseteq G$, ezért $g \leq g^*$; továbbá mivel g^* infimuma G^*-nak, és g is G^*-beli, ezért $g^* \leq g$. A két egyenlőtlenségből az antiszimmetrikus tulajdonság miatt $g^* = g$, vagyis g valóban a legkisebb fixpont. ■</p>

Számosságok

Számosság fogalma

Definíció Egy A és egy B halmaz egyenlő számosságú, ha létezik $f: A \rightarrow B$ függvény, amely a két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít. Jelölés: $|A| = |B|$

Definíció Egy A halmaz *számossága legalább akkora*, mint B számossága, ha létezik $A_1 \subset A$ részhalmaz, amely B halmazzal egyenlő számosságú. Jelölés: $|A| \geq |B|$

Definíció Egy A halmaz *véges számosságú*, ha van olyan véges $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre az $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ halmaz és az A halmaz egyenlő számosságú.

Számosságok

Megszámlálhatóan végtelen számosság

Definíció Egy halmaz *megszámlálhatóan végtelen számosságú* (vagy röviden megszámlálható), ha a természetes számok $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ halmazával egyenlő számosságú.

Példa: A nemnegatív számok $H = \{0, 1, 2, \dots\}$ halmaza megszámlálható, azaz $|H| = |\mathbb{N}|$. Hozzárendelési szabály: $f(n) = n + 1$

Állítás Ha A megszámlálható és a tőle diszjunkt B halmaz véges, akkor $A \cup B$ is megszámlálható.

Bizonyítás Ha A megszámlálható, akkor elemei sorba rendezhetők: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Legyen $|B| = k$, és legyenek B elemei b_1, b_2, \dots, b_k . Ekkor a $b_1, b_2, \dots, b_k, a_1, a_2, \dots$ föl-sorolás az $A \cup B$ halmaz elemeit adja meg. Hozzárendelési szabály:

$$f(i) = \begin{cases} b_i & \text{ha } i \leq k \\ a_{i-k} & \text{ha } i > k \end{cases}$$

■

Állítás A diszjunkt A, B halmazok egyesítésének s számossága csak A és B számosságától függ, vagyis ha A és B helyére a velük egyenlő számosságú A' és B' halmazokat tesszük úgy, hogy A' és B' diszjunktak, akkor $A' \cup B'$ számossága is s .

Bizonyítás Ha van olyan f_1 függvény, mely A és A' elemei között, és f_2 függvény mely B és B' elemei között teremt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést, akkor $A \cup B$ és $A' \cup B'$ között az f függvény teszi meg ezt, melynek definíciója:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ha } x \in A \\ f_2(x), & \text{ha } x \in B \end{cases}$$

■

Állítás Véges sok (k darab) diszjunkt, megszámlálható A_i halmaz uniója $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ is megszámlálható.

Bizonyítás Az A halmaz elemét úgy soroljuk fel, hogy először minden halmaz első elemét, azután minden halmaz második elemét, és így tovább vesszük. Formálisan az egyes halmazok elemeit kettős indexszel látjuk el, vagyis legyen minden $i = 1, 2, \dots, k$ értékre $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots\}$. Ezután $A = \{b_1, b_2, \dots\}$, ahol a b_t elemet a következőképp definiáljuk: ha $t - 1 = \alpha k + \beta$, $0 \leq \beta < k$ (vagyis legyen β a $t - 1$ szám k -val való osztási maradéka), akkor $b_t = a_{\beta+1, \alpha+1}$. ■

Állítás *Megszámlálhatóan sok diszjunkt A_i halmaz, melyek mindegyike megszámlálható, egyesítve megszámlálható halmazt alkotnak, vagyis $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz megszámlálható.*

Bizonyítás Jelöljük az egyes halmazok elemit kettős indexszel:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\} \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\} \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ezt követően az $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, \dots$ sorrendben (egy képzeletbeli kígyóvonal mentén) feleltessük meg B elemeit \mathbb{N} elemeinek. ■

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \rightarrow & a_{12} & \rightarrow & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & \rightarrow & \dots \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \dots \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \dots \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\ a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

Kontinuum számosság

Állítás *A $(0,1)$ intervallumba tartozó összes valós szám H halmaza megszámlálhatónál nagyobb számosságú.*

Bizonyítás Ez a $|H|$ számosság leaglább megszámlálható, hiszen H tartalmazza például a nyilvánvalóan megszámlálható $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ részhalmazt. Indirekt módon tegyük fel, hogy H megszámlálható, vagyis elemeit valamilyen v_1, v_2, \dots sorrendbe rendezhetjük. Minden ilyen v_i egy 0 és 1 közötti valós szám, felírható tehát végtelen tizedestörként, $0, v_{i1}v_{i2}v_{i3} \dots$ (az egyértelműség miatt $\forall v_{jk} v_{jk} \neq 9$, ha $k > K \in \mathbb{N}$ végződésű számot kizárunk a halmazból). Az indirekt feltevés szerint tehát a következő sorozat H minden elemét tartalmazná:

$$\begin{aligned} &0, v_{11}v_{12}v_{13} \dots \\ &0, v_{21}v_{22}v_{23} \dots \\ &0, v_{31}v_{32}v_{33} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

A táblázat „átlója” mentén végighaladva készítsünk olyan w valós számot, melynek $w = 0, w_1w_2w_3 \dots$ tizedestört alakjához a következőképp jutunk:

$$w_i = \begin{cases} w_i = 2, & \text{ha } v_{ii} = 1 \\ w_i = 1, & \text{ha } v_{ii} \neq 1 \end{cases}$$

Ez a w szám biztosan nem szerepelhet a fenti táblázatban, hisz bármely j -re elmondható, hogy a v_j szám j -edik tizedesjegye különbözik a w szám j -edik tizedesjegytől. Mivel így nem minden 0 és 1 közötti valós szám szerepel a felsorolásban, ellentmondáshoz jutunk, tehát $|H|$ nem lehet megszámlálható. ■

Cantor-féle átlós eljárás

A fenti bizonyítás az ún. Cantor-féle átlós eljárást használja. Leggyakrabban a rekurzív függvények matematikájában alkalmazzák olyan esetben, amikor azt szeretnék igazolni, hogy egy univerzális kiszámítási tulajdonsággal rendelkező függvény nem eleme annak a függvényosztálynak, melynek kiszámítására hivatott.

Állítás Legye A egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, B pedig egy tőle diszjunkt, kontinuum számosságú halmaz. Ekkor $|A \cup B| = |B|$.

Bizonyítás Legyen B_1 a B -nek egy megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. Álljon a B_2 halmaz B azon elemeiből, melyek nincsenek B_1 -ben. A megszámlálhatóan végtelen halmazokra tett állítások alapján tudjuk, hogy $|A \cup B_1| = |B_1|$, tehát létezik egy f függvény, mely $A \cup B_1$ elemeit kölcsönösen egyértelműen B_1 -re képezi. Ekkor az

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \cup B_1 \\ x, & \text{ha } x \in B_2 \end{cases}$$

függvény $A \cup B$ elemeit fogja kölcsönösen egyértelműen B -re képezni. ■

Nevezetes halmazok számossága

Természetes számok

A megszámlálhatóan végtelen számosság definíciójából következően az \mathbb{N} halmaz számossága megszámlálható.

Páros és páratlan számok

Állítás A páros számok halmaza megszámlálható. A páratlan számok halmaza szintúgy megszámlálható.

Bizonyítás Páros számok hozzárendelése az \mathbb{N} halmazhoz: $f(n) = 2n$
Páratlan számok hozzárendelése az \mathbb{N} halmazhoz $f(n) = 2n + 1$ ■

Racionális számok

Állítás A racionális számok \mathbb{Q} halmaza megszámlálható.

Bizonyítás Helyezzük az $A_1 = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ halmazba az összes egész számot, az $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\right\}$ halmazba az összes olyan törtet, melynek a nevezője 2 és már nem egyszerűsíthető; az $A_3 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \dots\right\}$ halmazba az összes olyan törtet, melynek a nevezője 3 és már nem egyszerűsíthető és így tovább. Ezek az A_i halmazok megszámlálhatóak, hisz elemeiket föl tudjuk sorolni. Így megszámlálható sok diszjunkt halmazhoz jutunk, melyek egyesítése szintén megszámlálható, és kiadja \mathbb{Q} halmazt. ■

Valós számok

Mivel a valós számok halmazának része a $(0, 1)$ intervallum, melyről már korábban beláttuk, hogy kontinuum számosságú, így a fenti állításból következik, hogy \mathbb{R} számossága kontinuum.

Síkbeli alakzatok

Állítás Az egységszakasz pontjainak számossága megegyezik az egységnégyzet pontjainak számosságával.

Bizonyítás Az egységnégyzet pontjainak halmaza:

$$S = (0, 1) \times (0, 1) = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

A Descartes féle koordináta rendszerben az egységnégyzet pontjai megadhatók $(x, y) \in S$ alakban. Ezen (x, y) számpárok és az egységszakasz z pontjai között lehet egyértelmű megfeleltetést létesíteni a következőképp:

Írjuk fel az x és y koordinátákat $x = 0, x_1x_2x_3 \dots$ és $y = 0, y_1y_2y_3 \dots$ tizedestört alakban. Ekkor az x_i és y_i számjegyekből konstruált $z = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3 \dots$ tizedestört alakban fölírt szám eleme az egységszakasz $(0,1)$ intervallumának. ■

Számossággal kapcsolatos elméletek

Cantor tétel

Tétel *Ha H halmaz, akkor nincs olyan H -n értelmezett f függvény, mely ráképez a H hatványhalmazára, azaz $|H| < |2^H|$.*

Bizonyítás A $|H| \leq |2^H|$ állítás nyilvánvaló, mivel minden $a \in H$ esetén $\{a\} \in 2^H$, vagyis az $a \mapsto \{a\}$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H elemei és H egyelemű részhalmozai közt.

Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $f: H \rightarrow 2^H$ függvény, mely a két halmaz között kölcsönösen egyértelmű leképezést teremt, vagyis $|H| = |2^H|$. Definiáljuk a következő halmatz:

$$F = \{x \in H : x \notin f(x)\}$$

Vagyis az F halmazba kerülnek azon elemek, melyek nincsenek benne az f szerinti képükben.

Egyrészt, mivel F halmazban H elemei vannak, azaz $F \subseteq H$, ezért F eleme lesz a H halmaz hatványhalmazának, vagyis $F \in 2^H$.

Másrészt, mivel $f: H \rightarrow 2^H$ függvény ráképezés, ezért van olyan $h \in H$ elem, melynek képe éppen F , vagyis $f(h) = F$.

$h \in f(h)$ esetén, ha $f(h) = F$ akkor *ellentmondásra jutunk*, mivel F képe önmagának, így tartalmaznia kellene h -t is, ekkor viszont $h \in f(h)$ ellentmond F definíciójának.

$h \notin f(h)$ esetén, ha $f(h) = F$ akkor is *ellentmondásra jutunk*, mivel ekkor h eleme kell legyen F -nek a definíció miatt, ugyanakkor, mivel F képe h -nak, teljesülnie kéne annak is, hogy $h \in f(h)$, ami ellentmondás. ■

Állítás *Megszámlálható halmaz hatványhalmaza épp kontinuum számosságú.*

Bizonyítás A (végtelen) tizedestörtek mintájára a kettes számrendszerben is definiálható egy olyan írásmód, melyben $\overline{0,10000 \dots}$ az $\frac{1}{2}$ -ed, $\overline{0,01000 \dots}$ az $\frac{1}{4}$ -ed törtet jelöli. (Ezzel a módszerrel $\frac{1}{3} = \overline{0,01010 \dots}$, vagy $\frac{1}{5} = \overline{0,00110011 \dots}$). Amely számokra ez az írásmód nem egyértelmű (pl. $\overline{0,10000 \dots} = \overline{0,011111 \dots}$), ott tekintsük mindkét lehetőséget.

Így a $(0,1)$ intervallumba tartozó valós számok halmazának minden eleméhez hozzárendeltünk egy vagy két $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ felírást, vagyis egy vagy két darab (a_1, a_2, \dots) 0-1 sorozatot. Az összes ilyen sorozatok halmaza tehát kontinuum számosságú. Minden ilyen sorozat egyértelműen meghatározza a természetes számok \mathbb{N} halmazának azt az X_a részhalmozát, melyben $j \in X_a$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a_j = 1$, és minden részhalmaz pontosan egyféle ilyen sorozatból áll elő. Ezzel beláttuk, hogy a $2^{\mathbb{N}}$ számossága kontinuum. ■

Kontinuum hipotézis

A kontinuumhipotézis szerint nincs olyan halmaz, amelynek számossága a valós számok számossága (kontinuum-számosság) és a természetes számok számossága (megszámlálhatóan végtelen) közé esne.

Jelölje a továbbiakban a számosságokat az \aleph (alef) jel. A megszámlálható számosság jele \aleph_0 , a rákövetkező \aleph_1 és rekurzívan, minden k esetén az \aleph_k -ra rákövetkezőt \aleph_{k+1} jelölje.

A kontinuumhipotézis szerint: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

Az általánosított kontinuumhipotézis szerint tetszőleges k -ra teljesül, hogy ha X számossága \aleph_k , akkor $|2^X| = \aleph_{k+1}$

Nagyságrendek

Aszimptotikus közelítések, nagyságrend

Definíció Legyen két függvény, f és g , melyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = O(g(x))$ (nagy-ordó), ha létezik olyan C, k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|, \quad \forall x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $g(x)$ *aszimptotikus felső korlátja* $f(x)$ -nek.

Példa: $f(n) = 3n^2 + 5$ esetén $f(n) = O(g(n))$, ahol $g(n) = n^2, C = 4, k = 4$

Definíció Legyen két függvény, f és g , melyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Omega(g(x))$ (nagy-omega), ha létezik olyan C, k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \geq C \cdot |g(x)|, \quad \forall x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ *aszimptotikus felső korlátja* $C \cdot g(x)$ -nek.

Példa: $f(n) = \frac{n^2}{2} - 7$ esetén $f(n) = \Omega(g(n))$, ahol $g(n) = n^2, C = \frac{1}{4}, k = 7$

Definíció Legyenek f és g , a valós vagy egész számok halmazából a valós vagy az egész számok halmazába képező függvények. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Theta(g(x))$ (nagy-teta), ha teljesül:

$$f(x) = \Omega(g(x)) \text{ és } f(x) = O(g(x))$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a két függvény *nagyságrendje* megegyezik.

Függvények növekedése

Nagy ordó „rendezés”:

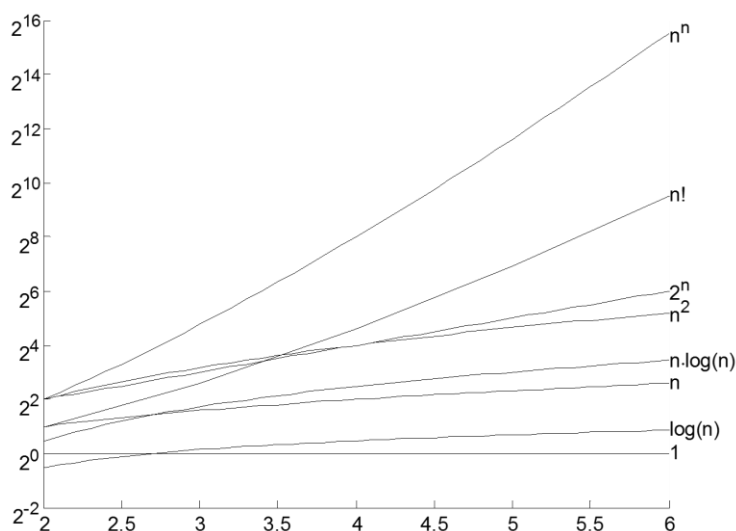
$$f(n) = O(f(n)), \quad \forall f$$

$$(\log(n))^k = O(n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$n^k = O(2^n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Függvények nagyságrendje:

- 1.) konstans
- 2.) logaritmus
- 3.) elsőfokú polinomok
- 4.) hatvány logaritmusok
- 5.) polinomok
- 6.) exponenciális
- 7.) faktoriális



Komplexitás

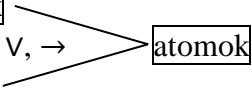
A komplexitás témaköre a május 20-i vizsgának nem része.

Logika

Szintaxis

Nulladrendű logika

Jelkészlet

- 1.) betűk
 - 2.) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
 - 3.) I, H
 - 4.) zárójelek
- 

Formula

Minden atom formula.

Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ is formulák.

A fenti két szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat. Az atomi formulákat latin, az összetett formulákat görög betűvel jelöljük.

Elsőrendű logika

Jelkészlet

- 1.) változószimbólumok: x, y, z, \dots
- 2.) konstansszimbólumok: a, b, c, \dots
- 3.) prédikátumszimbólumok: P, Q, S, \dots
- 4.) függvényyszimbólumok: f, g, h, \dots
- 5.) logikai összekötő jelek (műveletek jelei): $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$
- 6.) kvantorok: \forall, \exists
- 7.) zárójelek

Kifejezés (term)

Minden individuumváltozó és konstans kifejezés. Ha t_1, t_2, \dots, t_n kifejezés és f n -változós függvény szimbólum, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is kifejezés.

A fentiek szerint a függvény argumentumaiba írhatunk változókat, konstansokat, de beágyazhatók más, vagy saját függvényértékek is. A kifejezések vagy prédikátumszimbólumok argumentumaiban, vagy függvények argumentumaiban fordulhatnak elő, önállóan nem.

Atomi formulák

Ha P n -argumentumú prédikátumszimbólum és t_1, t_2, \dots, t_n kifejezések, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ atomi formula.

Formula

Minden atom formula.

Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ is formulák.

$\forall x \alpha(x)$, $\exists x \alpha(x)$ is formula.

A fenti három szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat.

Szemantika

Kvantorok hatásköre

Megállapodás szerint a kvantor hatásköre a mögötte álló változó utáni atomi formula vagy zárójelben megadott formula. Az ezekben szereplő változó előfordulásokat kötöttnek nevezzük, a változó egyéb előfordulásait szabadnak.

Interpretáció

Az elsőrendű nyelvben is valamely formula igazságértékét csak úgy tudjuk megmondani, ha interpretáljuk a formulát. Az interpretáció több részből áll. Meg kell adni az alaphalmazt, aminek elemeire vonatkoznak a formulák. Ahogyan nulladrendben is tettük, itt is meg kell mondani az atomi formulák igazságértékét. Ezen túlmenően, a függvényeket is interpretálni kell, meg kell mondani, hogy az egyes individuumokon mi a felvett függvényérték (ami szintén az univerzum egy eleme, vagyis egy individuum).

Ezután az elsőrendben tanult kvantorok jelentése, és a műveletek nulladrendben tanult jelentése alapján kiértékelhető a formula.

Definíciók

Definíció Az elsőrendű mondat *kielégíthető*, ha van olyan interpretáció, amelyikben igaz. Ezt az interpretációt a formula *modelljének* nevezzük.

Definíció Az elsőrendű mondat *értékes*, ha minden interpretációban igaz.

Definíció Az elsőrendű mondat *kontradikció/kielégíthetetlen*, ha minden interpretációban hamis.

Definíció Adott két formula α, β . A két formula *ekvivalens*, ha minden interpretációban ugyan az az igazságértékük. Jelölése: $\alpha \equiv \beta$

Szemantikai következmény

Definíció Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz szemantikai következménye β , ha minden olyan interpretációban, amelyben az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ formulák igazak, β is igaz.

Más szavakkal: az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz következménye β , ha β legalább akkor igaz, amikor az α_i -k igazak.

Jelölése: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$

Helyes következtetési sémák

Definíció Azokat a következtetési sémákat tekintjük *helyes következtetési sémának*, amelyekben a következmény valóban a feltételek (szemantikai) következménye.

Modus ponens (leválasztási szabály)

Azt kell vizsgálnunk, hogy ahol α és $\alpha \rightarrow \beta$ igazak, ott a β igaz-e. Ha igen, akkor helyes, ha nem, akkor helytelen a következtetési séma. Csak az első interpretációban teljesül, hogy α és $\alpha \rightarrow \beta$ igaz. Ebben az interpretációban β is igaz, tehát valóban $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \models \beta$.

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

Tétel $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \models \beta$

Bizonyítás Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ együttesen akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ igaz.

■

A fenti tétel miatt a \models jel bal oldalát a továbbiakban egyszerű α -val jelöljük, ahol α -n mindig az $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ formulát értjük.

Tétel $\alpha \models_1 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \rightarrow \beta$ érvényes.

Bizonyítás 1.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \models_1 \beta$, akkor $\alpha \rightarrow \beta$ érvényes:
Írjuk föl az igazságtáblázatot. A jelölt sort ez esetben nem lehet figyelembe venni, ugyanis akkor $\alpha \models_1 \beta$ nem teljesülne. A maradék sorokra pedig valóban az I az igazságérték.

$$\rightarrow$$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

2.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \rightarrow \beta$ érvényes, akkor $\alpha \models_1 \beta$:

Ha $\alpha \rightarrow \beta$ tautológia, akkor a fenti igazságtáblában a jelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen, I sorok. Ezekben a sorokban viszont valóban a β legalább ott igaz, ahol α igaz. ■

Tétel $\alpha \models_1 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \wedge \neg\beta$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás Az $\alpha \models_1 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \rightarrow \beta$ érvényes, vagyis $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ kielégíthetetlen. Ezt kifejtve: $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ ■

Prenex konjunktív normálforma

Fontosabb elsőrendű ekvivalens formulák

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1.a) $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ | 1.b) $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ |
| 2.a) $\neg\forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x)$ | 2.b) $\neg\exists x \neg P(x) \equiv \forall x P(x)$ |
| 3.a) $\forall x\forall y A(x, y, \dots) \equiv \forall y\forall x A(x, y, \dots)$ | 3.b) $\exists x\exists y A(x, y, \dots) \equiv \exists y\exists x A(x, y, \dots)$ |
| 4.a) $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ | 4.b) $\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ |
| 5.a) $\forall x\forall y (A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall y B(y)$ | |
| 5.b) $\exists x\exists y (A(x) \vee B(y)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$ | |

Normálformára való átírás algoritmusa

1. A logikai összekötőjelek átírása \neg , \wedge , \vee -ra.
2. A De Morgan szabályok alkalmazása addig, amíg a \neg hatásköre atomi formula nem lesz.
3. A változók standardizálása (kvantoronkénti átnevezése).
4. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig, amíg minden kvantor a formula elejére nem kerül.
5. A kvantorok és az azokat közvetlenül követő változó sorrendjét meg kell tartani.
6. A formula konjunktív normálformára hozása disztributív törvények alkalmazásával.

Rezolúció

Skólem normálforma

A $\forall x_1, \forall x_2, \dots, \forall x_n$ formulát, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok vannak Skólem formulának nevezzük.

Tétel Minden elsőrendű formulához található olyan Skólem normálformában lévő formula, amely az eredeti formula logikai következménye.

A formula „Skólemizálásához” először átírjuk a formulát prenex formába, az előzőekben már ismertetett módon. Az egzisztenciális kvantorokat az ún. Skólem konstansok, illetve Skólem függvények segítségével kiküszöböljük.

Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prefixumban, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz, akkor az előtte álló, univerzálisan kvantált x_1, x_2, \dots, x_{j-1} változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j változónak, amelyre a formula értéke igaz. Ezt a tényt az $f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}) = x_j$ függvénnyel fejezzük ki. Ha az első kvantor éppen egzisztenciális, akkor ez a függvény nulla változós, vagyis konstans.

Ez az f függvény formálisan megadja, melyik az az x_j objektum az univerzumban, ami a formulát igazzá teszi.

Ezt a formális függvényképzést végrehajtjuk a soron következő egzisztenciális kvantorra is. Addig folytatjuk, amíg minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk. Természetesen ügyelni kell arra, hogy a függvény szimbólumok különbözők legyenek.

Az így kapott formulák az eredeti formula logikai következményei. Azonban az átalakítás NEM ekvivalens, hiszen visszafelé nem jutunk el az eredeti formulához. A gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban ez elegendő, hiszen mi csak azt akarjuk eldönteni, lehetséges-e a formulát igazzá tenni, vagyis, más szavakkal: Kielégíthető-e a formula.

Az elsőrendű rezolúció alapjai

A Skólem normálformát feltételezve, prenex elhagyható, csak megjegyezzük, hogy valóban, minden változó univerzálisan kvantált volt. Tehát a maradék részre, az ún. a mátrixra lehet alkalmazni a rezolúciót. A nulladrendhez képest különbséget jelent az, hogy a literálokat helyettesíteni kell.

A változó/term rendezett párokat tartalmazó $\alpha = \{v_1/t_1, \dots, v_n/t_n\}$ halmazt helyettesítésnek nevezzük, ha v_1, \dots, v_n egymástól különböző változókat jelölnek, és $t_i \neq v_i$, $(1 \leq i \leq n)$.

Legáltalánosabb egységesítő helyettesítésnek nevezzük az A_1, A_2, \dots, A_n kifejezéseknek egy δ egységesítő helyettesítését, ha bármely α egységesítő helyettesítés előállítható $\alpha = \alpha' \delta$ formában (α' egy alkalmas helyettesítés).

(Legáltalánosabb) egységesítő helyettesítés alapelvei:

Változóba szabad konstans vagy másik változót helyettesíteni.

Változóba szabad olyan függvényt is helyettesíteni, amelynek argumentumában más változó, vagy konstansok szerepelnek. (függvénybe is, a termék képzésének szabályai szerint helyettesíthetők változók, illetve konstansok, illetve újabb függvények.)

A rezolúcióhoz a formulát és a következmény tagadását Skólem normálformára alakítjuk. Nevezzük át a változókat úgy, hogy a változónevek különbözőek legyenek a klózokban. A rezolúció tehát csak akkor alkalmazható, ha az egységesítés elvégezhető. Ekkor pedig rezolúció alapelvét adó következtetési sémát alkalmazzuk, és akár csak nulladrendben, elvégezzük a rezolúciót.

Gráfok

Általános összefüggések

Tétel *(Handshaking tétel) Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy az e él az u és v csúcsokhoz illeszkedik, azaz u és v az e él két végpontja. Ekkor, ha $u \neq v$, akkor az e élt $\varphi(u)$ -nál és $\varphi(v)$ -nél is számoltuk. Ha pedig $u = v$, akkor az e él hurokél, és így $\varphi(u)$ -nál számoltuk kétszer. Tehát a gráf összes csúcsainak fokszámát összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk. ■

Tétel *Minden gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.*

Bizonyítás Minden gráfban a fokszámok összege páros, amely a páros és páratlan fokszámok összegéből tevődik össze. A páros fokszámok összege nyilván páros, hiszen páros számok összege páros. Így a páratlan fokszámok összegének is párosnak kell lenni, ami csak úgy valósulhat meg, hogy ha a páratlan fokszámú csúcsok száma páros. ■

Tétel *Az n csúcsú összefüggő egyszerű gráf éleinek száma legalább $n - 1$.*

Bizonyítás Teljes indukcióval. Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ esetén minden n csúcsú gráfnak van $n - 1$ éle. Belátjuk, hogy akkor minden $n + 1$ csúcsú összefüggő gráfnak van n éle. Legyen G egy $n + 1$ csúcsú összefüggő gráf. Ha G -nek kevesebb éle van, mint $n + 1$, akkor van elsőfokú csúcsa. Ugyanis mivel G összefüggő, így izolált csúcsa nincs. Vegyük ezt az elsőfokú csúcsot, és a hozzá tartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Ekkor n csúcsú összefüggő gráfot kapunk minimum $n - 1$ éllel, tehát teljesült az indukciós feltevés. A törölt élt újra hozzáadva következik, hogy G -nek minimum n éle van. Ha nem lenne elsőfokú csúcsa, akkor minden csúcsának fokszáma legalább 2 lenne, így a fokszámok összege legalább $2(n + 1)$, amiből következik, hogy az élek száma $n + 1$. ■

Tétel *Bármely egyszerű gráfban van két olyan pont, amelyek fokszáma egyenlő.*

Bizonyítás A lehetséges fokszámok $n = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, vagyis n darab fokszám. Egyszerre azonban nem teljesülhet, hogy van 0 és $n - 1$ fokszámú csúcs, mivel az $n - 1$ fokszámú csúcsba kell élel vezetessen, ami ellentmond annak, hogy van olyan csúcs, amibe nem vezet él. Ekkor már csak $n - 1$ féle fokszám közül választhatunk, amit a skatulya-elv miatt csak úgy osztatunk szét, hogy ha van legalább kettő csúcs, aminek ugyan az a fokszám jut. ■

Tétel *Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma legalább 2, akkor a gráfban van kör.*

Bizonyítás Alkalmazzuk a leghosszabb út módszerét. Legyen 1 hosszúságú L út a G gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja v . Tekintsük most G -nek v -hez illeszkedő éleit. Ezek közül bármelyiknek a végpontja L -hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben L hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy L a leghosszabb út. Ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik v -hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét jelöli. Ha e nem hurokél, akkor u -ak v -től különböző w végpontja L -ben van, tehát L -nek a v és w pontokat összekötő része e -vel együtt G egy körét alkotja. ■

Tétel *Ha egy n csúcsú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.*

Bizonyítás Teljes indukcióval. Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ -re minden n csúcsú és legalább n élű gráfban van kör. Legyen G egy $n + 1$ csúcsú gráf, amelynek legalább $n + 1$ éle van. Visszatérve a bizonyításra, vegyük G egy L leghosszabb útját. Ha L valamelyik végpontja G -nek nem elsőfokú csúcsai, akkor az előzőek szerint G -ben van kör. Ellenkező esetben töröljük G -nek egy elsőfokú csúcsát a hozzátartozó éllel együtt. Ekkor a kapott gráfnak n éle és n csúcsa van, tehát az indukciós feltevés miatt tartalmaz kört, amit G is tartalmaz. ■

Részgráfok, izomorfia

Definíció Az R gráf egy G gráf *részgráffja*, ha R megkapható G -ből pontok és élek elhagyásával.

Definíció Két gráf *izomorf*, ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másik pontjainak és éleinek.

Definíció Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfok. A két gráf *homeomorf*, ha létezik $f: V \rightarrow V'$ függvény, melyre, ha $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$, mindezt úgy, hogy ha két csúcs szomszédos G -ben, akkor f -szerinti képeik is szomszédosak G' -ben.

Körök és utak

Euler-kör, Euler-út

Definíció A G gráf *Euler-köre* olyan zárt élsorozat, mely G összes élet pontosan egyszer tartalmazza. *Euler-útról* akkor beszélünk, hogyha az élsorozat nem feltétlenül zárt.

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel Euler-kör létezésére) Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha minden csúcsának fokszáma páros.*

Bizonyítás Először belátjuk, hogy ha a gráf tartalmaz Euler-kört, akkor minden csúcsának fokszáma páros.

Ha a gráfot az Euler-köre mentén járjuk be, akkor minden csúcsba pontosan annyszor haladunk be, mint ahányszor kihaladunk belőle. Ezért nyilvánvalóan a bemenések és kijövetelek csúcsonkénti száma páros, mely éppen a csúcsok fokszámát adja.

Másodszor bizonyítandó, hogy ha minden pont fokszáma páros, akkor valóban tartalmaz Euler-kört. Ezt G pontszámára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

A legkisebb pontszámú, minden csúcsában páros fokszámú gráf a három pontú teljes gráf (háromszög). Ebben van Euler-kör. Tegyük fel, hogy minden $k < |V(G)|$ esetén igaz az állítás.

Induljunk el G egyik csúcsából, és haladjunk úgy az élek mentén, hogy egyiken sem megyünk át egynél többször. Ha elakadunk, vagyis az egyik csúcsból már nem vezet ki él, akkor az biztosan a kiindulási csúcs a páros fokszáma miatt. Ekkor kaptunk egy zárt élsorozatot. Legyen F egy olyan zárt élsorozat G -ben, melyben a lehető legtöbb él szerepel. A fenti eljárásban azért álltunk meg, mert a kezdőpontból nem indult ki újabb él, tehát az ebből a pontból kiinduló összes él F -ben van. Ha F G -nek Euler-köre, akkor készen vagyunk. Amennyiben F

nem Euler-köre G -nek, akkor vizsgáljuk G -nek azt a részgráfját, mely pontosan azokat az éleket tartalmazza, amelyeket F nem tartalmaz. Ennek a részgráfnak kevesebb csúcsa van, mint G -nek, hiszen nem tartalmazza azt a csúcsot, amely a fenti eljárásban a kiindulópont volt. Az indukciós feltevés miatt ennek a részgráfnak minden komponensében található Euler-kör. Ennek a részgráfnak valamely komponense tartalmaz egy olyan pontot, mely F -ben is szerepel. Ha ugyanis nem lenne közös pontjuk, akkor G nem lenne összefüggő. Az előbb említett komponens Euler-körét járjuk be a közös pontból elindulva, majd járjuk be F -et. Ekkor egy F -nél nagyobb élszámú zárt élsorozatot kapunk. Ez azonban ellentmond a feltevésünknek, tehát F Euler-kör.

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel Euler-út létezésére) Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor tartalmaz Euler-utat, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.*

Bizonyítás Az előző tétel alapján egyértelmű, hogy 0 páratlan csúcs esetében a gráfban van Euler-kör, tehát Euler-út is. Ha 2 páratlan fokú csúcs van, akkor ezeket összekötve a gráfban keletkezik egy Euler-kör. Ha ezt az élet újból elhagyjuk, akkor olyan élsorozatot kapunk, amely nem zárt, de eleget tesz az Euler-út definíciójának.

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel irányított gráfokra) Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-kör, ha minden csúcsnál a bemenő és kimenő élek száma megegyezik.*

Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-út, ha van benne Euler-kör, vagy ha két csúcs kivételével a bemenő és kimenő élek száma minden csúcsban megegyezik, a kivételeknél pedig az egyik (kiindulási) csúcsban a kimenő élek száma eggyel több, a másik (érkezési) csúcsban pedig a bemenő élek száma több eggyel.

Bizonyítás A fenti gondolatmenet alapján belátható a tétel állítása.

Hamilton-kör, Hamilton-út

Definíció Egy P kör egy $G = (V, E)$ gráfban *Hamilton-kör*, ha P a V összes elemét (a gráf csúcsait) pontosan egyszer tartalmazza. *Hamilton-útról* akkor beszélünk, ha P kör helyett út.

Tétel *(Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére) Ha egy gráfban k pontot elhagyva k -nál több komponens keletkezik, akkor nem tartalmazhat Hamilton-kört.*

Bizonyítás Indirekt módon. Tegyük fel, hogy van a gráfban Hamilton-kör, legyen ez (v_1, v_2, \dots, v_n) és legyen $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ az a k pont, melyet elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét. Vegyük észre azonban, hogy az elhagyott pontok közötti „ívek” biztosan összefüggő komponenseket alkotnak. Pl.: a $(v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, \dots, v_{i_2-1})$ ív is biztosan összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti Hamilton-kör egy éle fut. Mivel éppen k ilyen ívet kapunk, nem lehet több komponens k -nál. Kevesebb lehet, hiszen különböző ívek között futhatnak élek.

Tétel *(Ore tétele) Ha a G gráfra teljesül, hogy bármely két nem szomszédos u, v csúcs fokának összege nagyobb egyenlő G fokszámánál ($\deg(u) + \deg(v) \geq n$), akkor G -nek van Hamilton-köre.*

Bizonyítás Tegyük fel indirekt módon, hogy a gráf kielégíti a feltételt, de nincsen benne Hamilton-kör. Ez az ellenpélda gráfunk legyen G' . Húzzunk be G' -be további éleket úgy, hogy az új gráf is ellenpélda legyen (továbbra sincs benne Hamilton-kör). Így kapunk egy G gráfot, ami továbbra is ellenpélda, hisz új élek behúzásával „rossz pontpárt” nem lehet létrehozni, de ha még egy élet akárhogy behúzzunk, akkor már tartalmaz a gráf Hamilton-kört. Biztosan van két olyan pont, hogy $\{x, y\} \notin E(G)$, hiszen egy n csúcsú teljes gráfban ($n \geq 3$ esetén) van Hamilton-kör. Ekkor viszont a $G \cup \{x, y\}$ gráfban van Hamilton-kör, tehát G -ben van Hamilton-út. ($n = 2$ esetén is van Hamilton-út, $n = 1$ esetén pedig a gráfunk egy izolált pont, nincs éle, nincs benne Hamilton-kör). Legyenek a P Hamilton-út csúcsai: v_1, v_2, \dots, v_n , és $v_1 = x$ és $v_n = y$. Ha x szomszédos a P út valamely v_i pontjával, akkor y nem lehet összekötve v_{i-1} -gyel, mert ez esetben $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_i, v_1)$ egy Hamilton-kör lenne.

Így tehát y nem lehet összekötve legalább $d(x)$ darab ponttal, ezért

$$d(y) \leq n - 1 - d(x)$$

$$d(y) + d(x) \leq n - 1$$

ami viszont ellentmondás, hiszen $d(y) + d(x) \geq n$ volt feltéve. ■

Ore tételének speciális esete Dirac tétele.

Tétel (Dirac tétele) Ha az $n = 2k$ csúcspontú G egyszerű gráf bármely pontjának a foka legalább k , akkor van G -nek Hamilton-köre.

Bizonyítás A Dirac tétel az Ore tételnél erősebb feltételt fogalmaz meg, mivel ha minden pont fokszáma legalább $\frac{|V(G)|}{2}$, akkor teljesül az Ore tétel feltétele.

Síkgráfok és színezésük

Definíció Egy gráf síkba rajzolható gráf, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást. Ezt az így lerajzol gráfot síkgráfnak nevezzük.

Tétel (Fáry-Wagner tétel) Ha G egy síkba rajzolható gráf, akkor léteik olyan síkbarajzolása, amelyben minden él egyenes szakasz.

Tétel (Euler-féle poliéder tétel) A G összefüggő, egyszerű síkgráf esetében, ha p a gráf szögpontjainak száma, e a gráf éleinek száma és t a gráf által létrehozott területek száma a végtelen területet is számolva, akkor $p - e + t = 2$.

Bizonyítás Az adott gráfot lépésenként újra lerajzoljuk:

1. lépés: 1 csúcs, igaz az állítás: $1 - 0 + 1 = 2$

2. lépés: 2 csúcs, igaz az állítás: $2 - 1 + 1 = 2$

n . lépés: Tegyük fel, hogy $(n - 1)$ esetre igazoltuk a formulát: $p - e + t = 2$. A következő lépés kétféle lehet:

a) Vagy meglévő csúcsokat kötünk össze egy új éllel, ekkor az élek és területek száma eggyel növekszik, a pontok száma változatlan. Az állítás igaz:

$$p - e + t = 2 \Leftrightarrow p - (e + 1) + (t + 1) = 2$$

b) Egy új csúcsot rajzolunk be a rá illeszkedő éllel együtt, amelynek szomszédjai már a meglévő lerajzolt gráfban vannak. Ekkor a csúcsok és élek száma eggyel nő, míg a területek száma változatlan. Az állítás igaz:

$$p - e + t = 2 \Leftrightarrow (p + 1) - (e + 1) + t = 2$$

■

Következmény Ha G összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma legalább 3, akkor $e \leq 3p - 6$

Bizonyítás Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért minden területet legalább 3 él határol (legalább 3 a fokszáma). A területeket határoló éleket összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden területet határoló két terület-hez tartozik. Vagyis $2e \geq 3t$, hiszen ha mindegyik terület háromszög lenne, akkor lenne a fokszáma 3. Így $t \leq \frac{2}{3}e$. Ebből kifejezve $p - e + t = 2$ -t

$$e = p + t - 2 \leq p + \frac{2}{3}e - 2$$

Ebből az állítás következik. ■

Következmény Ha G összefüggő, egyszerű síkba rajzolható gráf, akkor a minimális fokszáma legfeljebb 5.

Bizonyítás Indirekt módon tegyük fel, hogy a minimális fokszám 6. A fokszámok összege az élek számának kétszerese (handshaking), így $6n \leq \sum p \leq 2e$. Az előző következmény alapján: $e \leq 3p - 6$, vagyis $2e \leq 6n - 12$, ami viszont ellentmondás. ■

Következmény Ha a G összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma legalább 3, és nincsen 3 hosszú köre, akkor $e \leq 2p - 4$.

Bizonyítás A feltételek miatt most minden területet legalább 4 él határol, fokszáma legalább 4, tehát $2e \geq 4t$, vagyis $e \geq 2t$, $\frac{1}{2}e \geq t$. Kifejezve $p - e + t = 2$ szerint:

$$e = p + t - 2 \leq p + \frac{1}{2}e - 2$$

Ebből az állítás következik. ■

Tétel (Kuratowski tétel) Valamely gráf akkor és csak akkor sík gráf, ha nem tartalmaz K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal izomorf/homeomorf részgráfot.

Bizonyítás Az esetek az Euler tétel következményei miatt megdőlnek. ■

Tétel A G gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható, ha gömbre rajzolható.

Bizonyítás Sztereografikus projekció (bijekció) révén konstruktívan, az adott gráfot a gömbről a síkra vetítve bizonyítható. ■

Gráfszínezések

Definíció A $\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma, vagyis az a szám, amely megmutatja, legkevesebb hány szín kell a gráf csúcsainak olyan kiszínezéséhez, hogy a szomszédos csúcsok más színűek legyenek.

Definíció Egy egyszerű gráf n -színezhető, ha minden csúcsához hozzárendelhető úgy egy szín hogy két szomszédos csúcshoz rendelt szín különböző.

Hálózati folyamatok

Fogalmak

Definíció Adott egy $G = (N, E)$ irányított gráf, és ennek két különböző pontja, s és t , melyeket forrásnak és nyelőnek nevezünk. (A forrásból csak kifelé, a nyelőbe meg csak befelé mutatnak élek.) Adott továbbá az éleken értelmezett $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ nemnegatív értékű kapacitásfüggvény.

Ekkor $G = (N, E)$ gráfot a c függvénnyel együtt (G, c) *hálózatnak* nevezzük.

Definíció Az $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *folynamnak* hívjuk, ha teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2) &= -f(n_2, n_1), & \forall (n_1, n_2) \in E, n_1, n_2 \in V \\ f(n_1, n_2) &\leq c(n_1, n_2), & \forall (n_1, n_2) \in E \end{aligned}$$

Definíció Legyen $H = (G, c)$ egy hálózat s forrással és t nyelővel. Legye $N_1, N_2 \subseteq N$ egy partíciója N -nek, vagyis $N_1 \cup N_2 = N$ és $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Legyen továbbá $s \in N_1$ és $t \in N_2$. Ekkor az N_1, N_2 halmazt s, t -*vágásnak* hívjuk. Az N_1, N_2 kapacitásán

$$c(N_1, N_2) = \sum_{n_i \in N_1, n_j \in N_2} c(n_i, n_j)$$

számot értjük.

Definíció Adott $H = (G, c)$ hálózat s forrással és t nyelővel. Jelölje $r: A \rightarrow \mathbb{R}$ a maradék-kapacitás-függvényt, ahol $\forall n_1, n_2 \in V$ esetén $r(n_1, n_2) = c(n_1, n_2) - f(n_1, n_2)$. Az f folynamhoz tartozó *javító gráf* a $G_f = (V, E_f)$ az élein értelmezett maradék-kapacitás-függvénnyel, ahol $A_f = \{(n_1, n_2) : n_1, n_2 \in N, r(n_1, n_2) > 0\}$

A G_f -beli irányított s, t utakat *javító utaknak* hívjuk.

Tételek hálózatokra

Tétel *A folyam értéke egyenlő bármelyik vágáson átfolyó folyammal.*

Bizonyítás Egy adott n_i csúcsra nézve az anyagmegmaradás (Kirchhoff) törvénye miatt a befolyó anyag/kifolyó anyag az összes élre összegezve:

$$\sum_{n_j \in N} f(n_i, n_j) - \sum_{n_k \in N} f(n_k, n_i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n_i \text{ nem } s \text{ vagy } t \\ \text{folyamérték}, & \text{ha } n_i = s \end{cases}$$

Összegezve most a vágásban az N_1 -beli csúcsokra (vagyis kiszámítva f értékét), csak a vágásból kimutató élek folyamértékei számítanak, ugyanis a közbülső csúcsokra ez az összeg nulla. ■

Következmény

$$\begin{aligned} c(N_1, N_2) &= \sum_{n_1 \in N_1, n_2 \in N_2} c(n_1, n_2) \\ f(N_1, N_2) &= \sum_{n_i \in N_1, n_j \in N_2} f(n_i, n_j) - \sum_{n_k \in N_1, n_l \in N_2} f(n_l, n_k) \\ f(N_1, N_2) &\leq \sum_{n_k \in N_1, n_l \in N_2} f(n_l, n_k) \leq c(N_1, N_2) \end{aligned}$$

A folyam értéke nem lehet nagyobb, mint bármelyik vágás kapacitása.

Tétel	<i>Ha $s \in N_0, t \in N \setminus N_0$, akkor a folyam akkor és csak akkor maximális, ha nincsen javító út.</i>
Bizonyítás	<p>Ha a folyam maximális, nem létezik javítóút, mert akkor azt használva a folyam értéke növelhető lenne.</p> <p>Ha nincsen javító út, akkor a folyam maximális. Ennek belátásához tekintsük azokat a csúcsokat, ahová még nem vezet javító út, legyen ezek halmaza N_0, és s is kerüljön ebbe a halmazba. Tekintsük az $(N_0, N \setminus N_0)$ vágást. Tekintsük azokat az $i \rightarrow j$ előremutató éleket, amelyek N_0-ból $N \setminus N_0$-ba mutatnak. Ezek a folyamérték egyenlő a kapacitással, máskülönben j is N_0-hoz tartozna. Ehhez hasonlóan a hátramutató $j \rightarrow i$ éleken a folyam 0. ■</p>
Tétel	<i>(Ford-Fulkerson tétel) Legyen $H = (G, c)$ hálózat. Ekkor a maximális folyamérték egyenlő a minimális vágással.</i>
Bizonyítás	Az előző tételnél láttuk, hogy a maximális folyam egyenlő egy alkalmas vágás kapacitásával. Másrészt azt is bizonyítottuk, hogy bármely folyam nem lehet nagyobb bármely vágás kapacitásánál. Ezért az előző tétel bizonyításában szereplő $(N_0, N \setminus N_0)$ vágás minimális vágás kell legyen.

Vizsgainformációk

Vizsga menete, jegy számítása

Vizsgát csak akkor tehet a hallgató, ha az évközi teljesítménye megfelel a tantárgyi követelményekben előírtaknak (aláírással rendelkezik).

A tárgyból vizsga nélkül csak elégséges (2) és közepes (3) megajánlott jegy szerezhető. Közepesnél jobb osztályzat csak a vizsgazárthelyi megírásával (és a megfelelő pontszám elérésével) kapható.

A vizsga kötelező **írásbeli** és választható szóbeli részből áll. A kötelező írásbeli részt annak pontszáma alapján százalékosan értékeljük. **Az írásbelin is van egy alapszint (50%), amelyet ha nem teljesít a hallgató, elégtelen érdemjegyet kap. Csak legalább elégséges jegyet lehet a szóbelivel módosítani.**

A félév során megírt zárthelyiből származó pontok, illetve a vizsga írásbelin szerzett pontok alapján az ajánlott jegy számítása:

0%-59%	elégtelen (1)
60%-69%	elégséges (2)
70%-79%	közepes (3)
80%-89%	jó (4)
90%-100%	jeles (5)

A vizsga az elméleti tudást, és annak alkalmazási készségét méri. Akinek megvan az aláírása, jogot szerzett arra, hogy a vizsgán bizonyítsa tudását. A fentiek szerint a vizsgajegybe a félév során szerzett pontok is beszámítanak, ezért, akinek kevés pontja van, **legfeljebb jó jegyet szerezhet.** Ez a megszerzett jegy bekerül az indexbe, de ez a jegy is a **TVSZ szerint javítható, külön vizsgával.**

Az elégtelen érdemjegyet szerző hallgató e jegyét a vizsga ismételtesével javítja, ekkor is a NEPTUN-ban újra jelentkezni kell. Egy tárgyból összesen két vizsgát lehet tenni.

Jegyzetek

Évközi eredmény

		maximális pontszám	elért pontszám
Nagy zárthelyi dolgozatok	1. nagy zárthelyi dolgozat	70	
	2. nagy zárthelyi dolgozat	10	
	Összesen	80	
	Elért pontszám		

Az évközi és a vizsgán nyújtott teljesítmény értékelése

évközi vizsga \	50%	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%
50%	50%	53%	55%	58%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%
55%	53%	55%	58%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%
60%	55%	58%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%
65%	58%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%
70%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%
75%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%
80%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%
85%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%	93%
90%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%	93%	95%
95%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%	93%	95%	98%
100%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%	93%	95%	98%	100%

Érdemjegyek megállapítása

Érdemjegy	%
1 (elégtelen)	0 – 59
2 (elégséges)	60 – 69
3 (közepes)	70 – 79
4 (jó)	80 – 89
5 (jeles)	90 – 100