Gram-Schmidt ortogonalizáció

1. A következő független vektorokból a Gram-Schmidt módszerrel állítson elő ortogonális bázist! Majd a kapott vektorokból állítson elő ortonormált bázist!

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

M.o.:

a, $\underline{v}_1 = \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{v}_2 = \underline{u}_2 - \dfrac{\langle \underline{u}_2, \underline{v}_1 \rangle}{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle} \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\underline{v}_3 = \underline{u}_3 - \frac{\langle \underline{u}_3, \underline{v}_1 \rangle}{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle} \underline{v}_1 - \frac{\langle \underline{u}_3, \underline{v}_2 \rangle}{\langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle} \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

b, Normáljuk a kapott vektorokat:

$$\underline{e}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{mert } \|\underline{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

A könnyebb számolás végett a $\underline{v}_3$ helyett felhasználható bármelyik vele párhuzamos vektor is, hiszen a lényeg annyi, hogy merőleges legyen a másik két vektorra, például választható egész koordinátájú vektor is:

$\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Így megspórolható a törtekkel számolás: $\qquad \underline{e}_3 = \dfrac{\underline{v}_3}{\|\underline{v}_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

2. A következő vektorokból a Gram-Schmidt módszerrel állítson elő ortogonális bázist! Ellenőrizze, hogy valóban ortogonálisak! A kapott vektorokból állítson elő ortonormált bázist!

a, $u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$ $\qquad$ b, $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c, $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ d, $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$