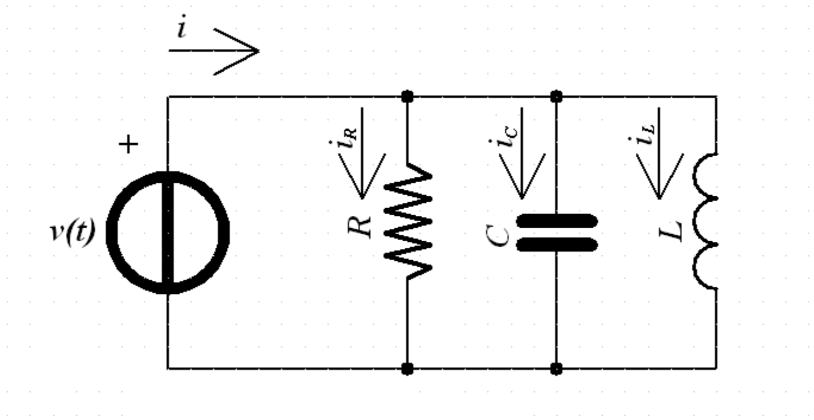
4. Gyakorlat: Állandósult állapotú AC áramkörök analízise

Célkitűzés:
- Idő/komplex amplitúdó tartomány közötti átmenet bemutatása
- Hálózati tételek érvényességét bemutatni
- Ragaszkodjunk az anyaghoz, a villamosmérnöki trükköket (pl.:benézek) NE mutassuk be
- Használjunk különféle jelöléseket
- A radián nem dimenzió, csak az egyértelműsítés miatt jelöljük
- A dimenziókat érdemes beírni/ellenőrizni, mert így az esetleges hibák könnyen felismerhetők

1. Példa

Az alábbi kapcsolásban $v(t) = 120\sqrt{2}\cos(1000t + 90°)$ V határozzuk meg az *i(t)* időfüggvényt



R=15Ω

C=93,3μF

L=30mH

Transzformáció a komplex amplitúdók tartományába

$$v(t) = 120\sqrt{2}\cos(1000t + 90°)\ \mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = 120\angle 90°\ \mathrm{V}$$

Impedanciák:

$$\omega = 1000\ \mathrm{rad/s}$$

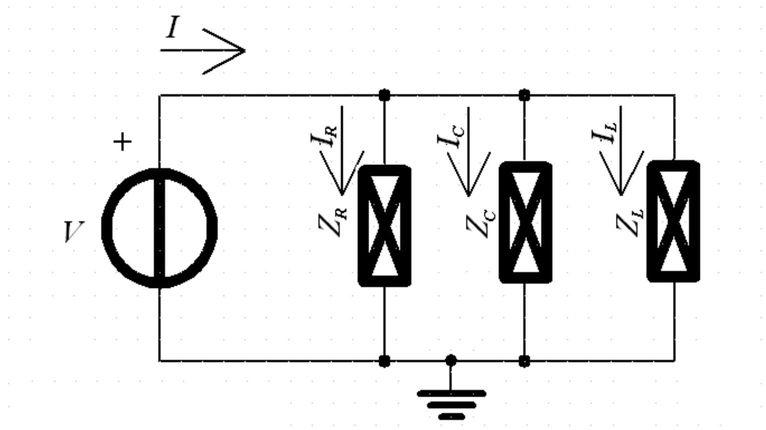
$$Z_R = (15 + j0)\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = (0 - j12)\Omega = 12\angle -90°\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = (0 + j30)\Omega = 30\angle 90°\Omega$$

a. Kirchhoff egyenletekkel

Kapcsolás a transzformált tartományban



$$I_R = \frac{V}{Z_R} = \frac{120\angle 90°}{15} = 8\angle 90° \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V}{Z_C} = \frac{120\angle 90°}{12\angle -90°} = 10\angle 180° \text{ A}$$

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{120\angle 90°}{30\angle 90°} = 4\angle 0° \text{ A}$$

$$I = I_R + I_C + I_L = 8\angle 90° + 10\angle 180° + 4\angle 0°$$

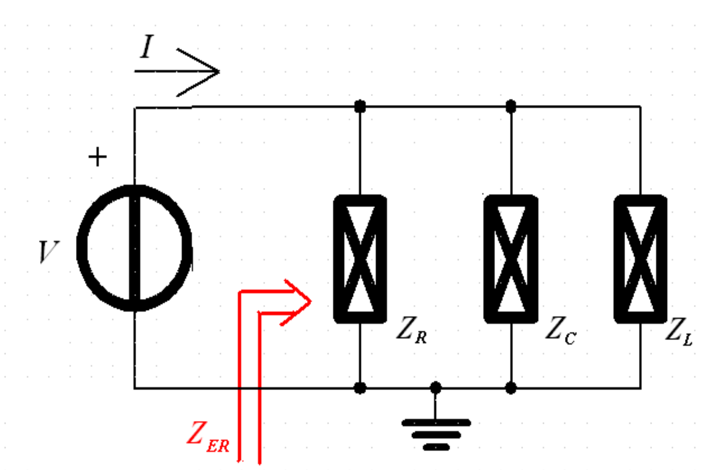
$$I = (0 + j8) + (-10 + j0) + (4 + j0) = (-6 + j8) = 10\angle 126.9° \text{ A}$$

Inverz transzformáció:

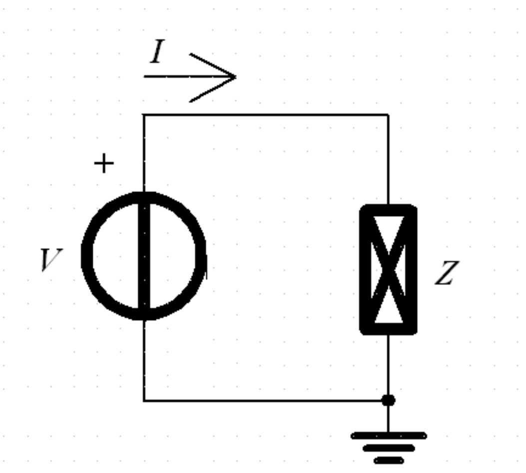
$$I = 10\angle 126{,}9° \text{ A} \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t + 126{,}9°) \text{ A}$$

b. Impedanciákkal

Kapcsolás a transzformált tartományban



$\Rightarrow$



$$Z_{ER} = Z_R \| Z_C \| Z_L = (15 + j0)\|(0 - j12)\|(0 + j30) = (15 + j0)\left\|\left(\frac{12 \cdot 30}{-j12 + j30}\right) = (15 + j0)\right\|\frac{360}{0 + j18} =$$

$$= \frac{15 \cdot 360}{360 + j18 \cdot 15} = \frac{5400}{360 + j270} = \frac{5400}{450\angle 36.9°} = 12\angle -36{,}9° \; \Omega$$

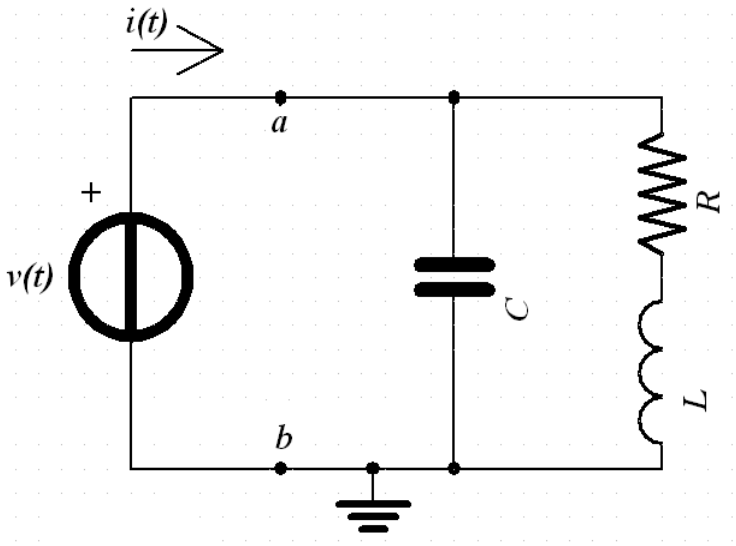
$$I = \frac{V}{Z_{ER}(\omega)}\Big|_{\omega=1krad/\sec} = \frac{120\angle 90°}{12\angle -36{,}9°} = 10\angle 126{,}9° \text{ A}$$

Inverz transzformáció

$$I = 10\angle 126{,}9° \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t + 126{,}9°) \text{ A}$$

2**. Példa**

Az a-b kapocspárra számított eredő impedancia alapján határozza meg *i(t)* értékét, ha
$v(t) = 12\sqrt{2}\cos(5000t)$ V



R=20Ω

C=10μF

L=3mH

Transzformáció a komplex amplitúdó tartományba

$$v(t) = 12\sqrt{2}\cos(5000t)\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad V = 12\angle 0°\ \text{V}$$

Impedanciák

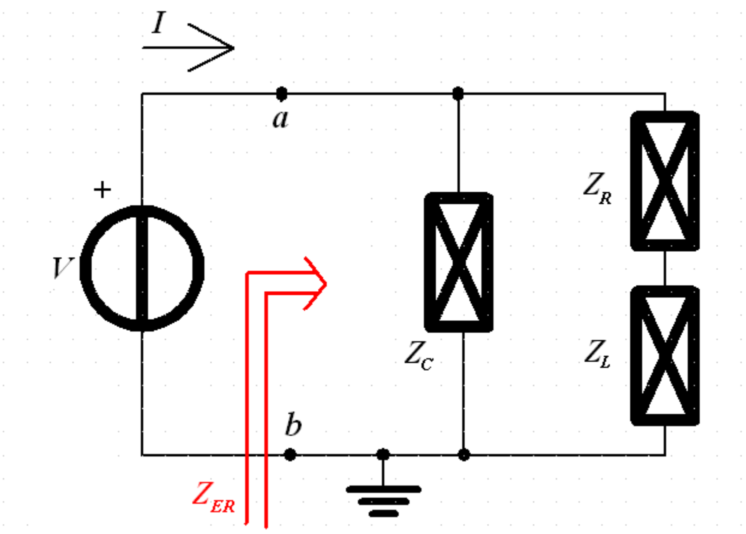
$$\omega = 5krad/s$$

$$Z_R = (20 + j0)\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = (0 - j20)\Omega = 20\angle -90°\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = (0 + j15)\Omega = 15\angle 90°\Omega$$

Kapcsolás a transzformált tartományban



$$Z_{ER} = Z_C \| (Z_R + Z_L) = (-j20) \| (20 + j15) =$$

$$= \frac{(-j20)(20 + j15)}{-j20 + 20 + j15} = \frac{300 - j400}{20 - j5} =$$

$$= \frac{500\angle -53{,}1°}{20{,}62\angle -14{,}0°} = 24{,}3\angle -39{,}1°\ \Omega$$

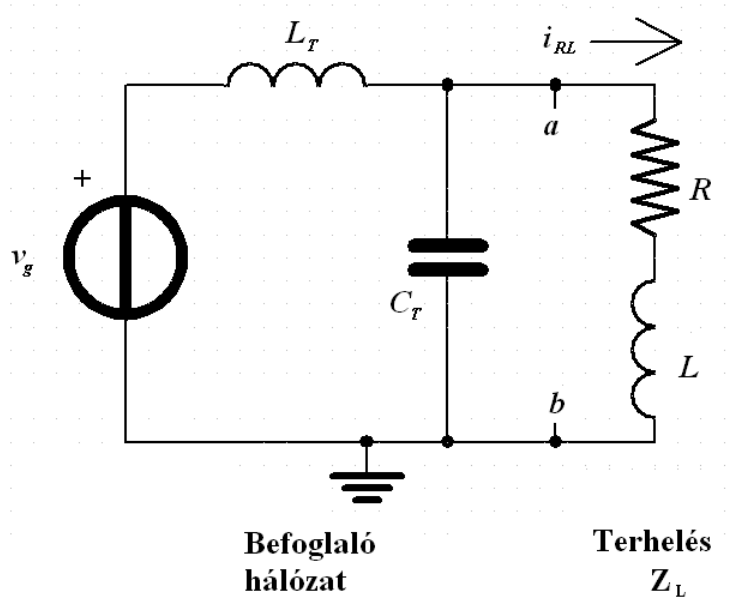
$$I = \left.\frac{V}{Z_{ER}(\omega)}\right|_{\omega = \frac{5krad}{s}} = \frac{12\angle 0°}{24{,}3\angle -39{,}1°} = 0{,}49\angle 39{,}1°\ \mathrm{A}$$

Inverz transzformáció

$$I = 0{,}49\angle 39{,}1°\ \mathrm{A} \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = 0{,}49\sqrt{2}\cos(5000t + 39{,}1°)\ \mathrm{A}$$

3**. Példa**

Az a-b kapocspárra meghatározott Thèvenin ekvivalenssel határozzuk meg $i_{RL}(t)$ időfüggvényt.



$$v_g = 28{,}3\cos(5000t + 45°)\ \mathrm{V}$$

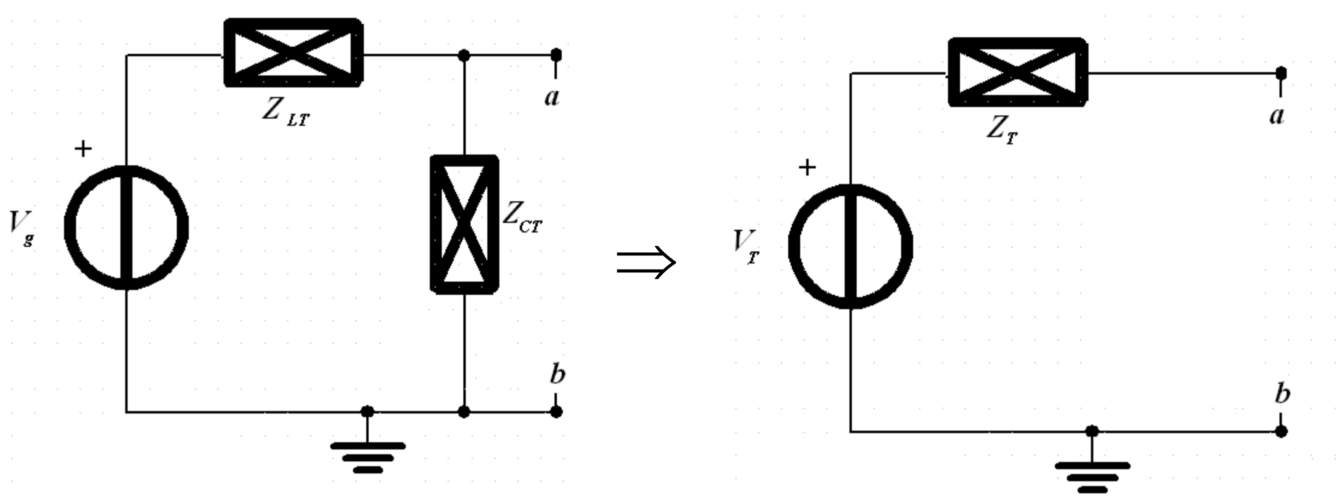
L_T=3mH

C_T=10μF

R=20Ω

L=4mH

Thèvenin helyettesítő kép meghatározása a transzformált tartományban



$$V_g = \frac{28{,}3}{\sqrt{2}}\angle 45° = 20\angle 45°\ \mathrm{V}$$

$$\omega = 5\ \mathrm{krad/s} \quad \Rightarrow \quad Z_{LT} = j\omega L_T = j15\Omega \quad \Rightarrow \quad Z_{CT} = \frac{1}{j\omega C_T} = -j20\Omega$$

V_T meghatározása:

- Szakadással való lezárás
- Feszültségosztó tétel

$$V_T = V_{OC} = V_g \frac{Z_{CT}}{Z_{CT} + Z_{LT}} = 20e^{j45} \frac{-j20}{-j20 + j15} = 80\angle 45° \text{ V}$$

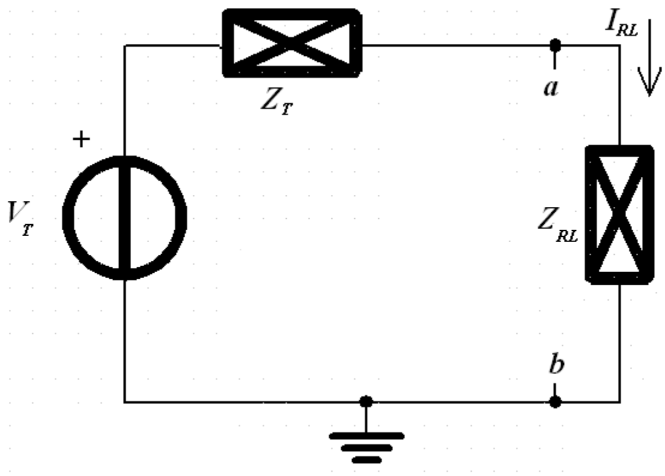
ISC meghatározása:

- Rövidzárral való lezárás

$$I_{SC} = \frac{V_g}{Z_{LT}} = \frac{20\angle 45°}{j15} = \frac{20\angle 45°}{15\angle 90°} = 1{,}33e^{j45°} \text{ A}$$

Thèvenin ekvivalens belső ellenállása

$$Z_T = \frac{V_T}{I_{SC}} = \frac{80\angle 45°}{1{,}33\angle -45°} = 60\angle 90° \ \Omega$$



$$Z_{RL} = R + j\omega L \Big|_{\omega = 5\frac{krad}{s}} = 20 + j20 \ \Omega$$

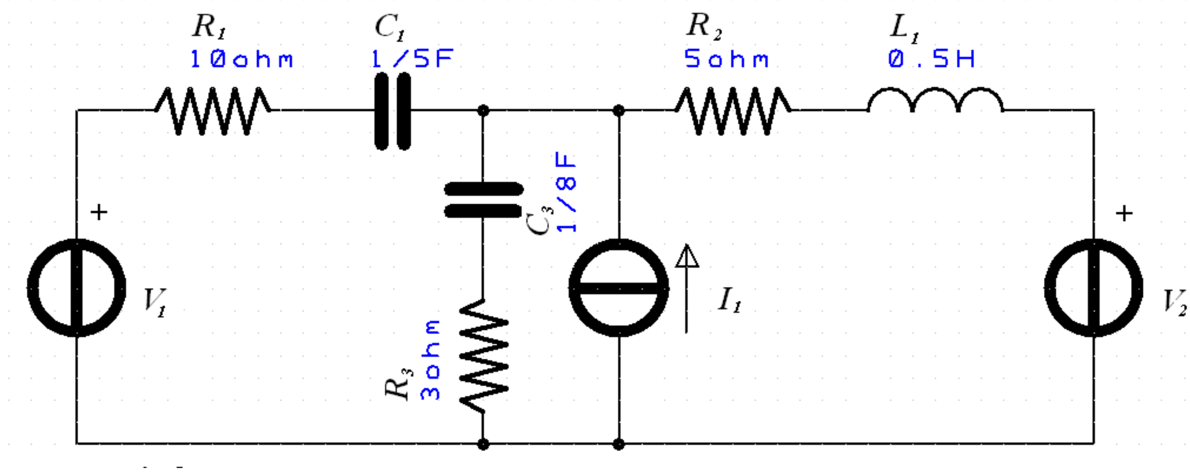
$$I_{RL} = \frac{V_T}{Z_T + Z_{RL}} = \frac{80\angle 45°}{0 + j60 + 20 + j20} = \frac{80\angle 45°}{82{,}61\angle 76°} = 0{,}97\angle -31° \text{ A}$$

Inverz transzformáció

$$I = 0{,}97\angle -31° \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = 0{,}97\sqrt{2}\cos(5000t - 31°) \text{ A}$$

4**. Példa**

Az alábbi állandósult állapotú AC áramkörben határozzuk meg az *i(t)* áramot az időtartományban.

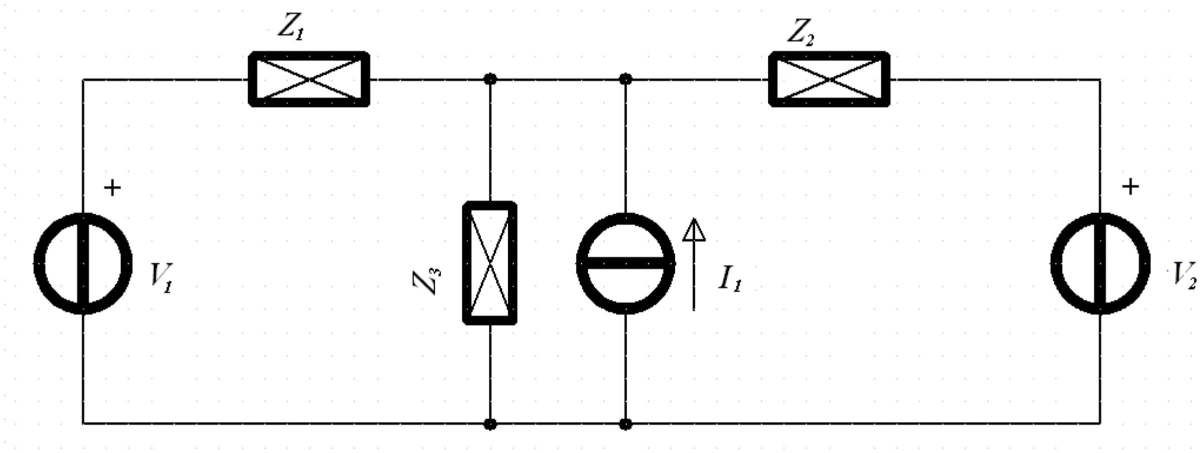


$$v_1 = V_{1eff}\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_1) \Rightarrow V_{1eff} = 5V \quad \Phi_1 = \tfrac{1}{2}\,rad \quad \omega_1 = 5\,{}^{rad}\!/_{sec}$$

$$v_2 = V_{2eff}\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_2) \Rightarrow V_{1eff} = 10V \quad \Phi_2 = \tfrac{3}{2}\,rad \quad \omega_1 = 5\,{}^{rad}\!/_{sec}$$

$$i_1 = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega_2 t + \Phi_I) \Rightarrow I_{eff} = 1A \quad \Phi_1 = \tfrac{1}{2}\,rad \quad \omega_2 = 8\,{}^{rad}\!/_{sec}$$

1. Átrajzolás, és AC impedanciák felírása



$$Z_1(j\omega) = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\Omega \Rightarrow Z_1(j\omega) = 10 + \frac{1}{j\omega 0.2}\Omega$$

$$Z_2(j\omega) = R_2 + j\omega L_2\Omega \Rightarrow Z_2(j\omega) = 5 + j\omega 0.5\Omega$$

$$Z_3(j\omega) = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\Omega \Rightarrow Z_3(j\omega) = 3 + \frac{1}{j\omega 0.125}\Omega$$

VEDD ÉSZRE, IMPEDANCIA FÜGGVÉNYEK MIND ω_1-EN, MIND ω_2-ÖN ÉRVÉNYESEK!

2. Gerjesztéshez tartozó komplex amplitúdók felírása

$$v_1(t) = V_{1eff}\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_1) \Rightarrow V_1 = 5\cdot\sqrt{2}\angle \pi/2 \Rightarrow 5\cdot\sqrt{2}\angle 90°\ \text{V} \quad \omega_1 = 5\ rad/\sec$$

$$v_2(t) = V_{2eff}\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \Phi_2) \Rightarrow V_2 = 10\cdot\sqrt{2}\angle -\pi/2 \Rightarrow 10\cdot\sqrt{2}\angle -90°\ \text{V} \quad \omega_1 = 5\ rad/\sec$$

$$i_1(t) = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega_2 t + \Phi_3) \Rightarrow I_1 = 1\cdot\sqrt{2}\angle \pi/2 \Rightarrow 1\cdot\sqrt{2}\angle 90°\ \text{A} \quad \omega_2 = 8\ rad/\sec$$

A mérés során minden alkalommal az effektív értéket használjuk szinuszos hullámforma esetén. A matematikai összefüggéseket pedig a csúcsértékekkel kell helyettesíteni. Azért szerepel a $\sqrt{2}$ -es szorzó, mert az effektív értékből így számolható a csúcsérték szinuszos hullámforma esetén.

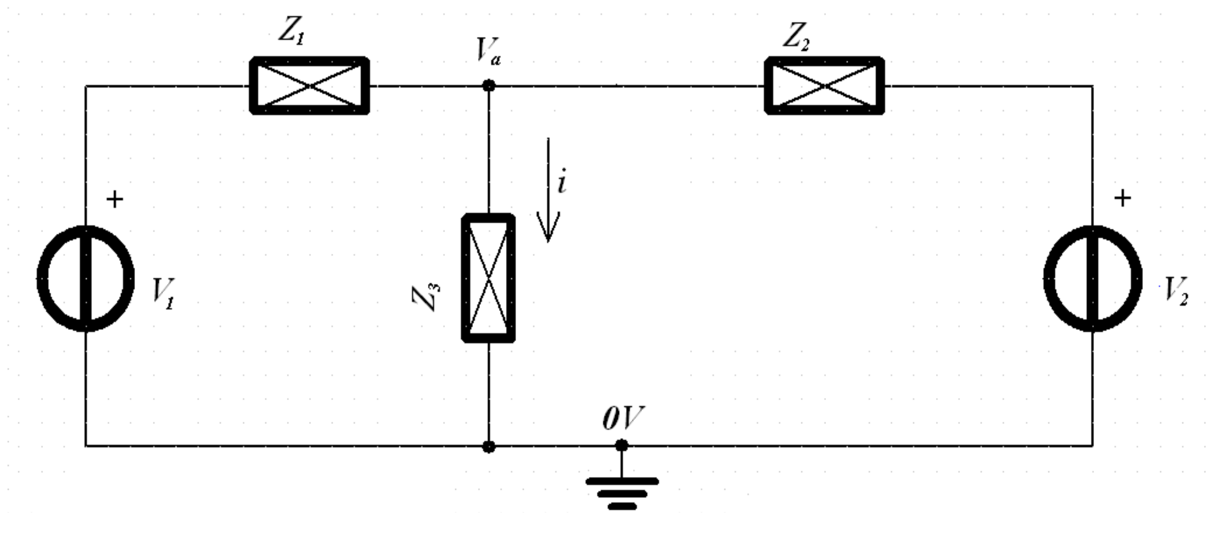
Mivel két frekvencia van, szuperpozíciót kell alkalmazni:

$$\omega_1 \Rightarrow i^{\omega_1}(t)$$

$$\omega_2 \Rightarrow i^{\omega_2}(t)$$

$$i(t) = i^{\omega_1}(t) + i^{\omega_2}(t)$$

3. Számítás ω_1-en, csomóponti potenciálokkal



$$\frac{V_1 - V_a}{Z_1(j\omega_1)} - \frac{V_a}{Z_3(j\omega_1)} + \frac{V_2 - V_a}{Z_2(j\omega_1)} = 0$$

$$Z_1(j\omega)=10+\frac{1}{j\omega 0.2}\Omega \Rightarrow \omega=\omega_1 \Rightarrow \text{(10-j)}$$

$$Z_2(j\omega)=5+j\omega 0.5\Omega \Rightarrow \omega=\omega_1 \Rightarrow \text{(5+j2,5)}$$

$$Z_3(j\omega)=3+\frac{1}{j\omega 0.125}\Omega \Rightarrow \omega=\omega_1 \Rightarrow \text{(3-j1,6)}$$

Feszültségek helyettesítése effektív értékben!

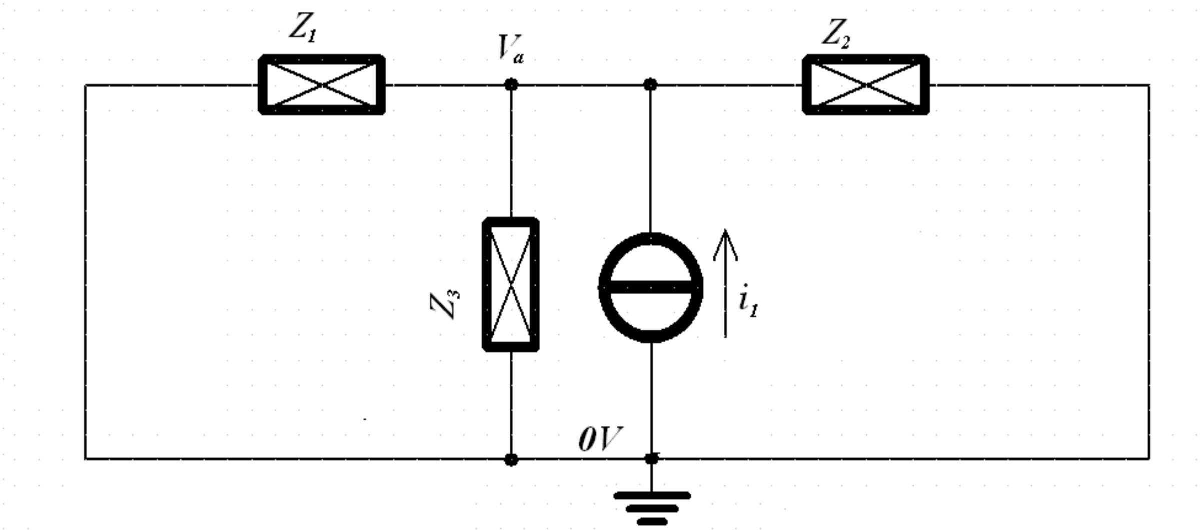
$$v_a=\frac{Z_2Z_3V_1+Z_1Z_3V_2}{Z_3Z_2+Z_1Z_2+Z_1Z_3}\bigg|_{\omega=\omega_1}=\frac{(5+j2{,}5)(3-j1{,}6)(0+j5)+(10-j)(3-j1{,}6)(10-j)}{(3-j1{,}6)(5+j2{,}5)+(10-j)(5+j2{,}5)+(10-j)(3-j1{,}6)}$$

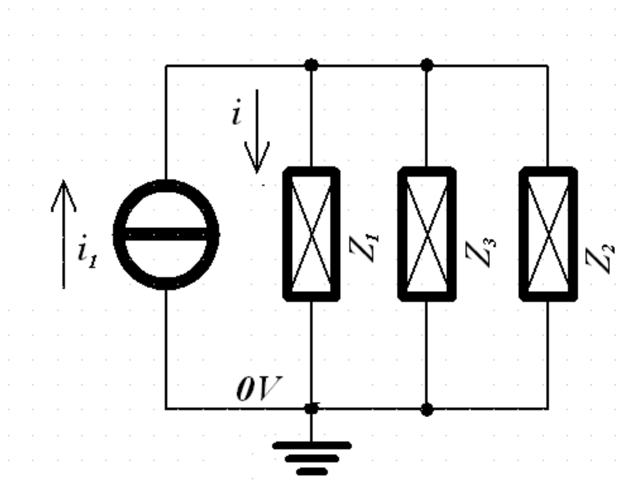
$$\frac{(2{,}5+j95)+(265-j218.4)}{(19-j0{,}5)+(52{,}5+j20)+(28{,}4-j19)}=\frac{267{,}5-j123{,}4}{99{,}9+j0{,}5}=2{,}67-j1{,}25 \text{ Veff}$$

$$I^{\omega_1}=\frac{V_a}{Z_3(j\omega_1)}=\frac{(2{,}67-j1{,}25)}{(3-j1{,}6)}=0{,}866+j0{,}045=0{,}867\angle 0.0527\,\text{rad},\ \Omega$$

$$\boxed{i^{\omega_1}(t)=\sqrt{2}\cdot\left|I^{\omega_1}\right|\cos(\omega_1 t+\angle I^{\omega_1})=\sqrt{2}\cdot 0{,}867\ \cos(5t+0.0527)\Omega}$$

4. Számítás ω_2-ön, áramosztóval





$$\omega = \omega_2$$

$$Z_1(j\omega) = 10 + \frac{1}{j\omega 0.2}\Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow \text{(10-j1,6)}$$

$$Z_2(j\omega) = 5 + j\omega 0.5\Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow \text{(5+j4)}$$

$$Z_3(j\omega) = 3 + \frac{1}{j\omega 0.125}\Omega \Rightarrow \omega = \omega_2 \Rightarrow \text{(3-j)}$$

$$Z_e(j\omega_2) = Z_1(j\omega_2) \| Z_2(j\omega_2) = \frac{(10 - j1{,}6)(5 + j4)}{(10 - j1{,}6) + (5 + j4)} = \frac{56{,}4 + j32}{15 + j2{,}4} = 3{,}99 + j1{,}49\,\Omega$$

Az effektív áramot helyettesítjük.

$$I^{\omega_2} = I_1 \frac{Z_e(j\omega_2)}{Z_3(j\omega_2) + Z_e(j\omega_2)} = 1\frac{(3{,}99 + j1{,}49)}{(3 - j) + (3{,}99 + j1{,}49)} = 0{,}583 - j0{,}1722 = 0{,}608\angle 0.287\,\text{rad},\ \Omega$$

$$\boxed{i^{\omega_2}(t) = \sqrt{2} \cdot \left|I^{\omega_2}\right| \sin(\omega_2 t + \angle I^{\omega_2}) = \sqrt{2} \cdot 0.608 \cdot \sin(8t + 0{,}287)\Omega}$$

5. Szuperpozíció értelmében a megoldás a két áram összege

$$\boxed{i(t) = i^{\omega_1}(t) + i^{\omega_2}(t) = \sqrt{2} \cdot 0{,}867\cos(5t + 0.0527) + \sqrt{2} \cdot 0.608 \cdot \sin(8t + 0{,}287)\ \text{A}}$$