

A PPKE ITK MATEMATIKA szigorlat Algebra és diszkrét matematika írásbeli

részéhez néhány olyan minta, amik nagy része már az eddigi írásbelikben előfordult (1-19). Természetesen lehetnek más feladatok is azon típusok közül, amelyek a tételsorban fel vannak sorolva. A számozás nem a tételhez való kapcsolódást jelenti.

1. Adja meg az alábbi kifejezés igazságértékét minden nulladrendű interpretációban!

$$(((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \wedge (\alpha \wedge \neg \beta)) \rightarrow (\neg \beta)$$

A kapott eredmény alapján fogalmazzon meg egy helyes következtetési sémát!

2. Alkalmas Skólem konstansok/függvények segítségével küszöbölje ki az egzisztenciális kvantort az alábbi formulából! Igaz-e, hogy a kapott formula ekvivalens az eredetivel?

Példák:

- $\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \vee Q(z))$
- $\exists y \forall z \forall x (Q(y, z) \wedge \neg R(x, y, z))$

3. Rezolúció segítségével bizonyítsa vagy cáfolja, hogy, tautológia-e az S formula.

$$S = \neg ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (A \vee C) \wedge (B \rightarrow \neg C) \wedge \neg C)$$

A kapott eredmény alapján fogalmazzon meg egy helyes következtetési sémát!

4. Adott egy síkbeli transzformáció. Adja meg a transzformáció mátrixának felírása nélkül a sajátvektorokat, sajátértékeket! Adjon meg egy olyan polinomot, aminek e transzformáció a gyöke!

A transzformáció az alábbiakhoz hasonló nehézségű lehet:

- a sík vektorait tükrözzük egy adott egyenesre.
- a sík vektorait elforgatjuk egy pont körül adott szöggel
- a tér vektorait tükrözzük egy síkra

5. Adott lineáris leképezésnek a definíció alapján számítsa ki a mátrixát!

A transzformáció az alábbiakhoz hasonló nehézségű lehet:

- a sík vektorait tükrözzük egy adott egyenesre, pl. $y=5x$ -re
- a sík vektorait elforgatjuk az origó körül adott, pl. 30 fokos szöggel
- a tér vektorait tükrözzük egy síkra, pl. \mathbf{i}, \mathbf{j} síkjára
- Valamely homogén lineáris leképezés az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektorokat rendre valamely megadott három vektorba viszi. Írja fel e leképezés mátrixát! Például az adott vektorok:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Adott mátrix sajátértékeinek, sajátvektorainak kiszámítása. A mátrix 2×2 és vagy alsó-, felső háromszögében 0-k vannak, pl. az alábbihoz hasonlóak lehetnek:

Példák:

$$- \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Igaz-e, hogy az $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeinek abszolút értéke egyenlő? Válaszát indokolja!

7. 2×2 -es mátrixok inverzének felírása

8. Mátrixok szorzása, értelmezése, lineáris kombinációja

Példa:

9. Adja meg adott halmaz adott rendezés szerinti Hasse diagramját. Döntse el, hálót alkot-e a halmaz.

Példák:

- $\{a, b, c\}$ összes részhalmaza, rendezés: tartalmazás
- Adott a $H := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmaz. Tekintsük a H halmazon a következő parciális rendezést: $x \leq y$, ha x osztója y -nak. Állapítsa meg e rendezés szerinti legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elemeket is!

-

10. Adott relációról döntse el, rendezési-e, ekvivalencia-e.

Példák:

- Tekintsük a természetes számokat. Két szám akkor van relációban egymással, ha 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adják. Bizonyítsa be, hogy ezzel egy ekvivalencia relációt adtunk meg a természetes számok halmazán! Adja meg az ekvivalencia osztályok egy-egy reprezentását! Hány ekvivalencia osztály van?
- Tekintsük a természetes számokat. Azt mondjuk, hogy az n_1 természetes szám kisebb, mint az n_2 , ha n_1 osztója n_2 -nek. Bizonyítsa be, hogy ezzel egy rendezési

relációt adtunk meg a természetes számok halmazán! Igaz-e hogy ez a rendezés teljes?

11. Adott objektumok és műveletek esetén adott struktúra bizonyítása.

Példa: Bizonyítsa, vagy cáfolja, hogy az $x+(2)^{1/2}y$ alakú számok az összeadásra nézve csoportot alkotnak!

12. Adott vektorok vektoriális-, skalár-, vegyes szorzatának kiszámítása

Példa:

Számítsa ki az $(1,2,3)$ és a $(2, -1, 0)$ vektorok vektoriális szorzatát, ha e koordináta vektorok az i, j, k ortonormált rendszerre vonatkoznak!

13. Döntse el, függetlenek-e/összefüggők-e adott vektorok? Bázist alkotnak-e?

Generátorrendszert alkotnak-e? Mi a vektorrendszer rangja?

Példák:

- $(1,2,3), (2, -1, 0), (7, 4, 9)$
- $(1,-2,3), (2, -1, 0), (0, 4, 9)$
- $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$
- Igaz-e, hogy az alábbi v_1, v_2, v_3 vektorok az \mathbb{R}^3 egy bázisát alkotják? Ha igen, mi a v_1 vektor koordinátája e bázisra vonatkozóan? (4 pont)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

14. Adott leképezés homogén lineáris-e?

Példa:

Vektor képe egy rögzített egységvektorral vett skalárszorzata/vektoriális szorzata

15. Adott egyenletrendszer esetén írja fel a Cramer szabályt! (kiszámítani csak 2×2 -es esetre kell)

Példa:

$$\begin{aligned} 3x+4y &= 5 \\ -x+8y &= -1 \end{aligned}$$

16. Hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

Példák:

A.

$$\begin{aligned} -3x-2y-z &= 0 \\ y+2z &= 0 \\ 3x+4y+5z &= 0 \end{aligned}$$

B.

$$\begin{aligned} -3x-2y-z &= 1 \\ y+2z &= 2 \\ 3x+4y+5z &= 3 \end{aligned}$$

17. Adja meg az n . egységgyökök trigonometrikus alakját! A primitív egységgyököket ábrázolja a komplex számsíkon, és adja meg algebrai alakjukat is!

Példa: $n=2, 3, 4, 5, 6$

18. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

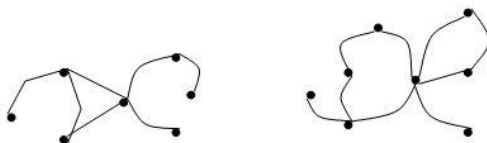
Példák:

- $3x^2+6x+8=0$
- $x^2+2ix-6i=0$, ahol $i^2=-1$

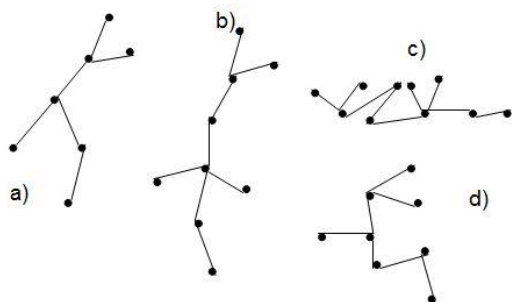
19. Izomorf gráfok felismerése

Példák:

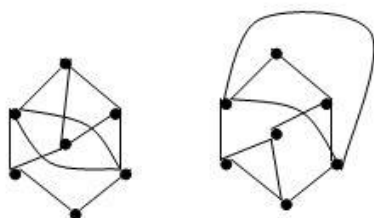
19.1



19.2



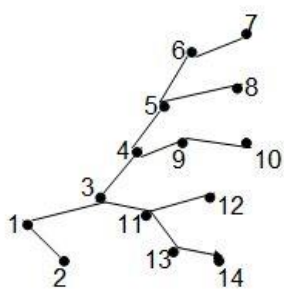
19.3



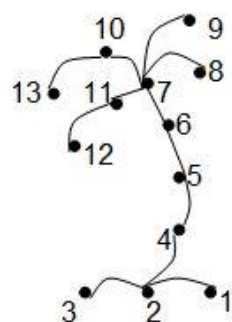
20. Prüfer-kód

Példák: Adja meg a fa Prüfer kódját!

20.1



20.2



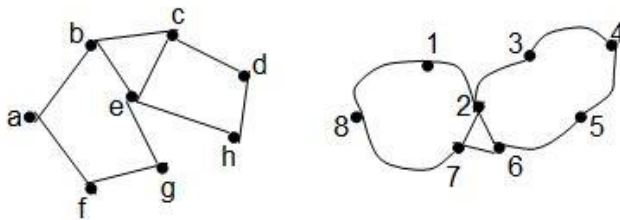
Prüfer kódból rajzolja le a fát!

- 2,3,3,4,4,1,2,2
- 4, 4, 1, 2, 3, 3, 3, 7, 10, 10
- 2, 2, 5, 5, 6, 6, 9, 9

21. Adott gráfokra izomorfia megadása

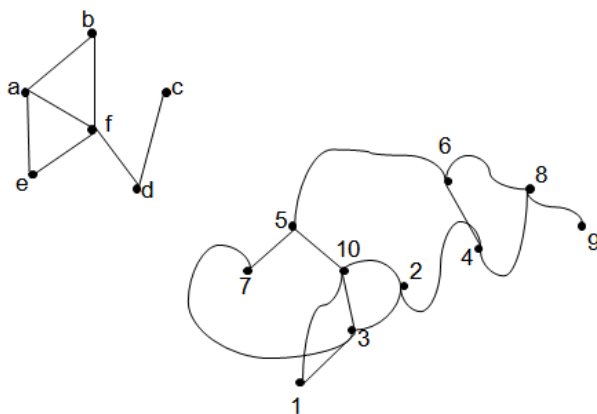
Döntse el, izomorfak-e az alábbi gráfok. Ha igen, adja meg az izomorfiát.

21.1.



21.2

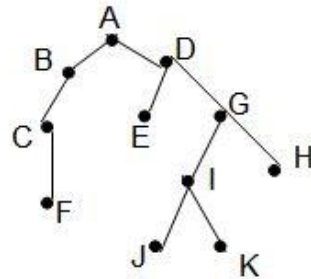
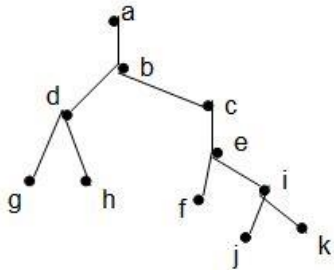
Van-e a jobboldali gráfnak a baloldallal izomorf részgráfja? Ha igen, írjuk fel az izomorfiát!



22. Adott gráfok/fák bejárása:

Példák:

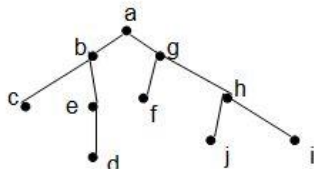
22.1 Adja meg az alábbi fák inorder, preorder, postorder bejárását!



22.2 Adott bejárások típusának felismerése

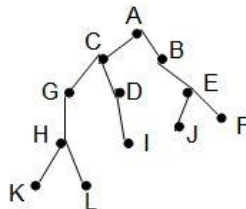
Az alábbi bejárások közül melyik inorder, melyik preorder, melyik postorder?

a)

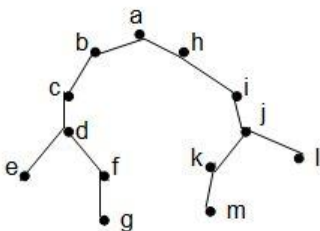


a,b,c,e,d,g,f,h,j,

b)

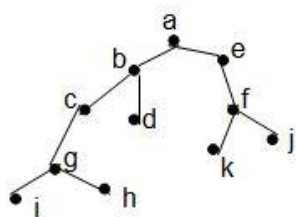


A,C,G,H,K,L,D,I,B,E,J,F



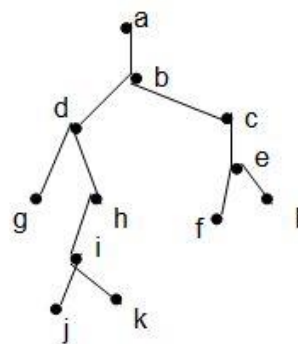
e,d,g,f,c,b,a,m,k,j,l,i,h

d)



i,h,g,c,d,b,k,j,f,e,a

e)

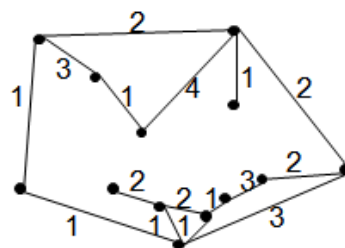
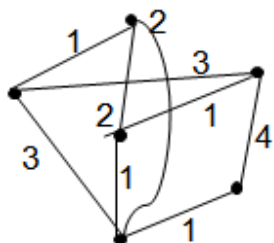


g,d,j,i,k,h,b,f,e,l,c,a

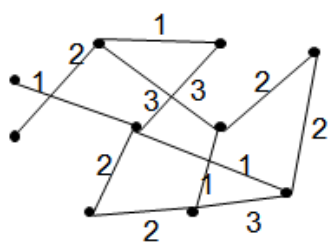
23. Prim és Kruskal algoritmusának alkalmazása adott gráfra

Példák:

23.1

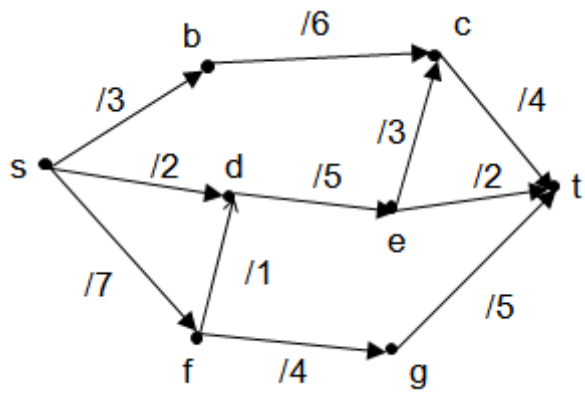


23.2

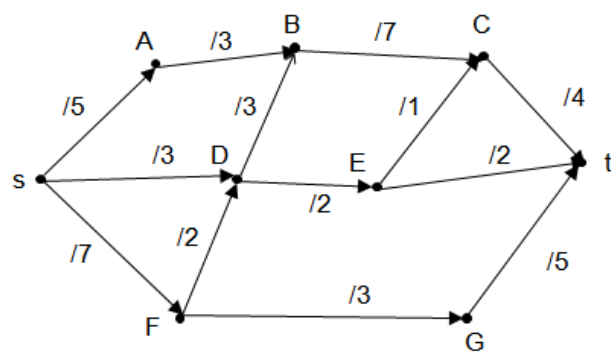


24. Számoljuk a maximális folyam, és a minimális vágás értékét!

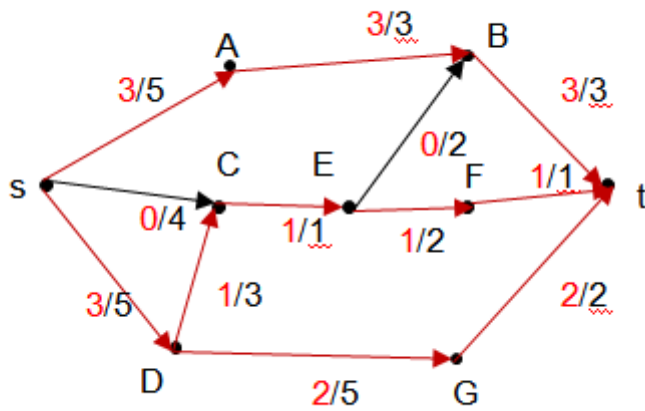
24.1



24.2

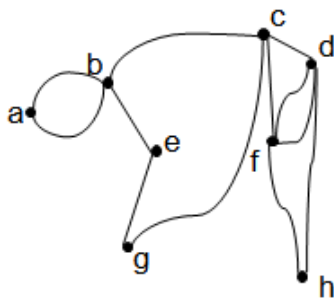


25. 3 Határozza meg az $\{s, A, D, G\}$ vágás értékét!

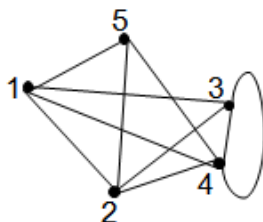


26. Van-e Euler kör vagy út az alábbi gráfokban? Ha igen, írjuk fel! Ha nincs, indokolja meg miért?

26.1

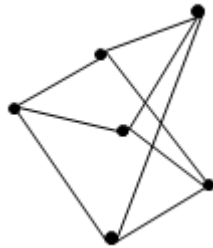


26.2

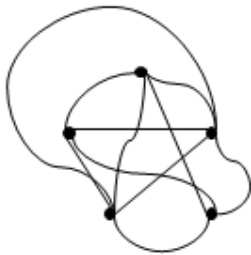


26. Színezésre vonatkozó egyszerű feladatok

26.1 Mi az alábbi gráf kromatikus száma?



26.2 Kiszínezhető-e az alábbi gráf 4 színnel?



26.3 Kiszínezhető-e az alábbi gráf 4 színnel?

