## Ore-tétel:

Ha **G** egy $\mathbf{n \geq 3}$ csúcsú olyan **egyszerű gráf**, amire teljesül, hogy ha $\mathbf{x,y \in V(G)}$ nem alkotnak élt (*összekötetlenek*), és ekkor $\mathbf{d(x) + d(y) \geq n}$, akkor **G**-ben van *Hamilton-kör.*

**Bizonyítás:**

Tegyük fel indirekt, hogy a gráf kielégíti a feltételt, de nincsen benne Hamilton-kör. Ez az ellenpélda gráfunk legyen **G'**. Húzzunk be **G'**-be további éleket úgy, hogy az új gráf is ellenpélda legyen (továbbra sincs benne Hamilton-kör). Így kapunk egy **G** gráfot, ami továbbra is ellenpélda, hisz új élek behúzásával ''rossz pontpárt'' nem lehet létrehozni, de ha még egy élet akárhogyan behúzunk, akkor már tartalmaz a gráf Hamilton-kört. Biztosan van két olyan pont, hogy **{x,y}** ! ∈ **(G)**, hiszen egy **n** csúcsú teljes gráfban van Hamilton-kör. Ekkor viszont a **G** ∪ **{x,y}** gráfban van Hamilton-kör, tehát **G**-ben van Hamilton-út. Legyenek a P Hamilton-út csúcsai: $\mathbf{v_1, v_2, \ldots, v_n}$, és $\mathbf{v_1 = x}$ **és** $\mathbf{v_n = y}$. Ha **x** szomszédos a **P** út valamely $\mathbf{v_{i+1}}$ pontjával, akkor **y** nem lehet összekötve $\mathbf{v_i}$-vel, mert ez esetben $\mathbf{(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1)}$ egy Hamilton-kör lenne.

Így tehát y nem lehet összekötve legalább **d(x)** darab ponttal, ezért:

$$\mathbf{d(y) \leq n - 1 - d(x)}$$
$$\mathbf{d(y) + d(x) \leq n - 1}$$

Ami viszont ellentmondás, hiszen $\mathbf{d(y) + d(x) \geq n}$ volt feltéve.

**Következmény (Dirac-tétel):** Ha az **n = 2k** csúcspontú **egyszerű G gráf** *bármely pontjának a foka legalább* **k**, akkor **van G-nek Hamilton-köre**.

Valóban G-ben létezik Hamilton-kör, mivel a következmény feltételei lényegében szigorúbbak, mint az Ore-tétel feltételei.

## Euler-féle poliéder tétel:

Legyen a **P konvex (vagy egyszerű) poliéder** éleinek száma **e**, a lapjainak száma **l** és a csúcsainak a száma **c**. **Ekkor** fennáll a következő egyenlőség:

$$\mathbf{c + l = e + 2}$$

**Bizonyítás:**

**Indukcióval** működik.

A **legegyszerűbb síkgráf**, amivel már kezdeni is lehet valamit, az **egy pontú gráf**. Könnyen ellenőrizhető, hogy erre a **tétel** teljesül.

A következő műveletek nem változtatnak ezen:

- **Új csúcs hozzávétele, amit egy új él köt a gráf többi részéhez**. Az élek és a csúcsok száma eggyel nő, míg a lapoké nem változik. **Ha** a **régi** gráfra **érvényes** volt $c + l = e + 2$ összefüggés, akkor az **újra is** igaz lesz, mert mindkét oldalhoz hozzáadtunk egyet.
- **Új él hozzávétele, ami két már létező csúcsra illeszkedik**. Most a lapok és az élek száma nőtt eggyel. **Ha** a **régi** gráfra **érvényes** volt a $c + l = e + 2$ összefüggés, akkor az **újra is** igaz lesz, mert mindkét oldalhoz hozzáadtunk egyet.

Tehát a tétel minden olyan gráfra igaz, amely ezekkel a műveletekkel felépíthető, és ezek pontosan a síkgráfok. Így a tétel minden síkgráfra igaz, ezért a konvex poliéderekre is igaz.

## 5-szín tétel:

Ha **G** síkba rajzolható gráf, akkor **$\chi$(G) ≤ 5**

**Bizonyítás:**

Teljes ind. a gráf pontszámára. Ha a gráfnak **max 5 db csúcs** van, akkor nyilvánvalóan kiszínezhető **5 színnel**.
***TFH***, **n = k** csúcsú gráf kiszínezhető **5 színnel**
**N = k + 1** – re:
**VOLT**: síkgráfokra: **élek száma ≤ 3n - 6**, következménye: **van olyan csúcs**, melynek **fokszáma max 5.**
**HA x foka = 4**, akkor x-et elhagyva a csúcsok száma eggyel csökken, tehát az ind. feltevés miatt ez kiszínezhető 5 színnel, visszavéve ezt a csúcsot, a szomszédjait ki lehet színezni 4-gyel, +x, 5 szín!
**HA x foka = 5**, akkor minden szomszédja nem lehet összekötve egymással, mert akkor **$K_5$** részgráf lenne: - nem sík!

Legyen z, y az x olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk össze egy pontttá, hagyjuk el x-et. Az ind. feltevés miatt a maradék kiszínezhető 5 színnel. Visszavéve és szétszedve x-y-z csúcsokat, ezek kiszínezhetőek max 3 színnel, hiszen x-nek összesen 5 szomszédja van, az y és z-kívüli csúcsok 3 színt lefoglalnak, de y és z egyszínű (nem szomszédok), marad egy szín x-nek.

## Két halmaz számossága:

- Tetszőleges **A** és **B** halmazok **számossága egyenlő**, ha van köztük egy **f : A → B bijektív** függvény (*vagyis f injektív és szürjektív, vagyis kölcsönösen egy-egyértelmű ráképezés*). Ennek jele: **|A| = |B|.**

- Legyen **A, B** két tetszőleges halmaz. Akkor mondjuk, hogy **|A|** ≤ **|B|**, ha létezik **f : A → B injektív** leképezés, ami **A** minden eleméhez **B** más-más elemét rendeli, azaz **A ekvivalens B** egy részhalmazával. Ha létezik ilyen injektív leképezés, de **A B**-vel magával már nem ekvivalens, azaz nincs megfelelő bijektív leképezés, akkor **B** számossága nagyobb, mint **A** számossága. Jele **|A|** < **|B|.**

*Megjegyzés*: A **számosság**ot magát nem definiáltuk, csak az összehasonlítás módjait, mint pl. hosszúságokat is tudunk összehasonlítani méterrúd nélkül.

## Cantor tétele (]0 1[ közti valós számok nem megszámlálhatóak):

A valós számok számosságának nem megszámlálható voltáról – A (0,1) intervallum valós számainak halmaza és a természetes számok halmaza nem azonos számosságú.

**Bizonyítás:**

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a (0,1) intervallum összes valós száma felsorolható egyetlen sorozatban. Térjünk át a valós számok tizedes tört alakjára, mely egyértelmű, amennyiben feltesszük, hogy az egy helyi érték után "csupa kilencest" tartalmazó tizedestört alakokat azonosítjuk – a szokásos módon – a véges tizedes törtekkel (melyek "csupa nullával" alakíthatók át végtelen számjegylánccá). Például 0,1239999… = 0,124000… Soroljuk fel a (0,1) intervallum valós számait egyetlen ($x_k$) sorozatba (illusztrációként közlünk egy példasorozatot):

$x_1$= 0 , 5 1 0 5 1 1 0 …
$x_2$= 0 , 4 2 3 2 0 4 3 …
$x_3$= 0 , 8 2 4 5 0 2 6 …
$x_4$= 0 , 2 3 3 0 1 2 6 …
$x_5$= 0 , 4 1 0 7 2 4 6 …
$x_6$= 0 , 9 9 3 7 8 3 8 …
$x_7$= 0 , 0 1 0 5 1 3 5 …
…

Tekintsük a k-adik valós szám k-adik tizedes jegyét, jelöljük ezt $x_k^k$-val!

$x_1$= 0 , **5** 1 0 5 1 1 0 …
$x_2$= 0 , 4 **2** 3 2 0 4 3 …
$x_3$= 0 , 8 2 **4** 5 0 2 6 …
$x_4$= 0 , 2 3 3 **0** 1 2 6 …
$x_5$= 0 , 4 1 0 7 **2** 4 6 …
$x_6$= 0 , 9 9 3 7 8 **3** 8 …
$x_7$= 0 , 0 1 0 5 1 3 **5** …
…

Legyen ($y_k$) az a számjegyekből álló sorozat, melynek k-adik eleme 2, ha $x_k^k$nem egyenlő kettővel és 1, ha $x_k^k$=2. Legyen r az a valós szám, melynek egész része 0, tizedesjegyei pedig az ($y_k$) sorozat elemeiből áll. (Példánkban: r = 0, 2 1 2 2 1 2 2 … )

Világos, hogy az r szám k-adik tizedesjegye különbözik a k-adik valós szám k-adik tizedesjegyétől. r tehát különbözik az összes felsorolt számtól, azaz nem tagja az ($x_k$) sorozatnak. Ám r kétségkívül valós szám, így feltételünk szerint szerepelnie kellene a felsorolásban, azaz ellentmondásra jutottunk

**Ford-Fulkerson tétel:**

**A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével**.

Ennek egyszerű következménye, hogy **ha** egy **adott hálózatban találunk egy folyamot és egy vágást**, amiknek az **értéke egyenlő,akkor** biztosak lehetünk abban, hogy **egy maximális folyam ill. egy minimális vágás van** a kezünkben.

**Tétel:($s \in N_0$, $t \in N- N_0$): A folyam akkor és csak akkor maximális,ha nincsen javító út.**
***Minimális vágás:*** azok a csúcsok, amikhez MÉG vezet javító út.

**Racionális számok megszámlálhatóak:**

Q = *{racionális számok halmaza}*

A racionális számok halmaza túl azon, hogy mindkét irányban végtelen (nincs sem legkisebb, sem legnagyobb elem), még mélységében is végtelen, azaz bármely két racionális szám közé végtelen sok racionális szám illeszthető.

Például illesszünk az 1/3 és az 1/2 közé 19 darab törtszámot: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$
Bővítsük a törteket: $\frac{40}{120} < x < \frac{60}{120}$ Így: $x = \frac{41}{120}; \frac{42}{120}; \frac{43}{120}; \frac{44}{120}; \dots; \frac{59}{120}$

Természetesen a törtek vég nélkül bővíthetőek.
Ezután viszont mégis csak meglepő, ha azt állítjuk, hogy a pozitív racionális számoknak a halmaza megszámlálhatóan végtelen.

**Állítás**: A pozitív racionális számok számossága megszámlálhatóan végtelen.

**<u>Bizonyítás</u>**:

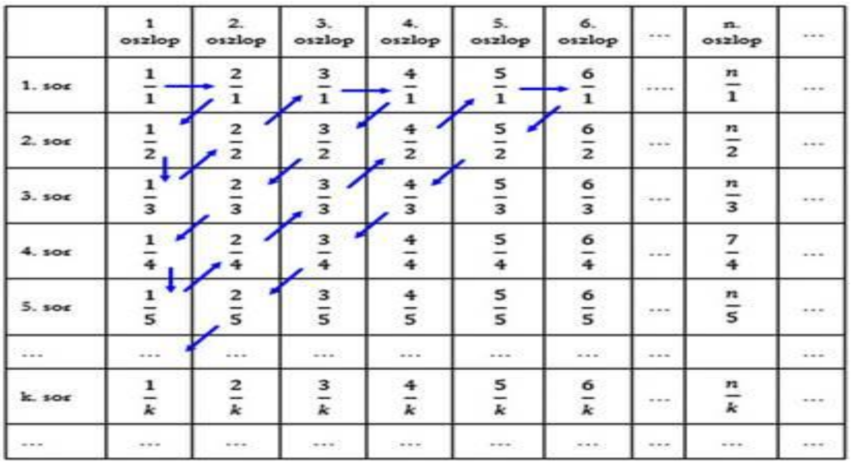
Tekintsük a következő táblázatot:

| | **1 oszlop** | **2. oszlop** | **3. oszlop** | **4. oszlop** | **5. oszlop** | **6. oszlop** | **…** | **n. oszlop** | **…** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1. sor** | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{5}{1}$ | $\frac{6}{1}$ | …. | $\frac{n}{1}$ | … |
| **2. sor** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{6}{2}$ | … | $\frac{n}{2}$ | … |
| **3. sor** | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{6}{3}$ | … | $\frac{n}{3}$ | … |
| **4. sor** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{6}{4}$ | … | $\frac{7}{4}$ | … |
| **5. sor** | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{5}$ | $\frac{6}{5}$ | … | $\frac{n}{5}$ | … |
| **…** | … | … | … | … | … | … | … | | … |
| **k. sor** | $\frac{1}{k}$ | $\frac{2}{k}$ | $\frac{3}{k}$ | $\frac{4}{k}$ | $\frac{5}{k}$ | $\frac{6}{k}$ | … | $\frac{n}{k}$ | … |
| **…** | … | … | … | … | … | … | … | … | … |

Ebben a végtelen számú oszlopból és sorból álló táblázatban minden pozitív racionális szám szerepel. (Többször is)
Adjuk meg a következő bejárási szabályt.
Bal felső sarokból indulunk. Jobbra egy, majd le balra egy, majd le egy, majd jobbra fel egy, majd ismét jobbra fel egy. Ha felértem, jobbra egy.

**1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15.**

*1/1 → 2/1→1/2→1/3→2/2→3/1→4/1→3/2→2/3→1/4→1/5→2/4→3/3→4/2→5/1*



| | 1. oszlop | 2. oszlop | 3. oszlop | 4. oszlop | 5. oszlop | 6. oszlop | … | n. oszlop | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. sor | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{5}{1}$ | $\frac{6}{1}$ | …. | $\frac{n}{1}$ | … |
| 2. sor | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{6}{2}$ | … | $\frac{n}{2}$ | … |
| 3. sor | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{6}{3}$ | … | $\frac{n}{3}$ | … |
| 4. sor | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{6}{4}$ | … | $\frac{7}{4}$ | … |
| 5. sor | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{5}$ | $\frac{6}{5}$ | … | $\frac{n}{5}$ | … |
| … | … | … | … | … | … | … | … | | … |
| k. sor | $\frac{1}{k}$ | $\frac{2}{k}$ | $\frac{3}{k}$ | $\frac{4}{k}$ | $\frac{5}{k}$ | $\frac{6}{k}$ | … | $\frac{n}{k}$ | … |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |

Minden pozitív racionális számot érintünk és mindegyikhez más sorszám, azaz pozitív egész szám tartozik. És minden pozitív egész számnak megfelel egy táblázatban szereplő racionális szám. Ha az egyenlő értékű törtek közül csak egyet tartunk meg (például ahol a számláló és a nevező relatív prímek), akkor is megszámlálható halmazt kapunk.

Ugyanígy, a negatív törtekre is igaz a fenti állítás.

**Tehát a tétel kimondva:**

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{N}| = \aleph_0$

Megállapítható tehát, hogy bár $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, mégis $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}| = |\mathbf{Q}| = \aleph_0$

A matematikusok bebizonyították, hogy a (0,1) intervallum ***„több”*** valós számot tartalmaz, mint amennyi az **N** halmaz elemeinek a száma, azaz $\mathbf{R}_{(0;1)}$ = {(0; 1) az intervallumban lévő valós számok halmaza} nem megszámlálhatóan végtelen. Vagyis ebben az intervallumban lévő valós számok számossága nagyobb, mint a természetes számok halmazának a számossága.

**Tétel:** **(Handshaking-kézfogási tétel)** Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlõ.

**Bizonyítás:**

Tegyük fel, hogy az e él az u és v szögpontokhoz illeszkedik, azaz u és v az e él két végpontja. Ekkor, ha $u \neq v$, akkor az e élt $\varphi(u)$-nál és $\varphi(v)$-nél is beszámoltuk. Ha pedig $u = v$, akkor az e él hurokél, és így $\varphi(u)$-nál számoltuk kétszer. Tehát a gráf összes szögpontjainak a fokszámát összeadva éppen az élek számának kétszeresét kapjuk. A tétel nyilvánvaló következménye, hogy minden gráfban a fokszámok összege páros szám.

**Tétel:** Minden 1-nél több csúcsú egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs.

**Definíció:** Egy gráfot egyszerûnek nevezünk, ha sem hurokélt, sem pedig többszörös élt nem tartalmaz.

**Bizonyítás:**

Ha a gráfnak n csúcsa van, a lehetséges fokszámok: 0, 1, 2, 3, …, n-1. Azonban a 0 és az n-1 fokszám egy adott gráfban egyszerre nem fordulhat elő, hiszen, ha van 0 fokszámú pont, akkor az izolált, ezért ehhez nem illeszkedhet rá más csúcsból él, nem lehet tehát más csúcsnak n-1 a fokszáma.  Tehát az n-1 db lehetséges fokszámot n csúcsra kell elosztani, így szükségképpen lesz két csúcs, amelyeknek azonos a fokszáma. (skatulya elv).

**Tétel:** Az n szögpontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

**Definíció:** Egy gráfot teljes gráfnak nevezünk, ha bármely két pontját pontosan egy él köti össze.

**Bizonyítás:**

A teljes n-gráf bármely két pontját pontosan egy él köti össze, így minden egyes szögpont fokszáma n - 1, tehát a fokszámok összege $n \cdot (n-1)$. Tudjuk, hogy bármely gráf esetén a fokszámok összege az élek számának kétszerese, amibõl az állítás adódik.

**Tétel:** Az n szögpontú összefüggõ gráfnak legalább n - 1 éle van.

**Bizonyítás:**

A bizonyítás teljes indukcióval történik.

Az állítás n = 1 esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ esetén minden n szögpontú gráfnak van n - 1 éle. Belátjuk, hogy akkor minden n + 1-pontú összefüggõ gráfnak van n éle. Legyen G egy n + 1 szögpontú összefüggõ gráf. Ha G-nek kevesebb éle van, mint n + 1, akkor van elsõfokú pontja. Ugyanis mivel G összefüggõ, így izolált pontja nincs. Ha nem lenne elsõfokú pontja sem, akkor minden pont foka legalább 2 lenne, és így a fokszámok összege minimum 2(n+1) > n.

Vegyük G egy elsõfokú pontját és a hozzátartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Nyilván n szögpontú összefüggõ gráfot kapunk, melyre érvényes az indukciós feltétel, azaz minimum n - 1 éle van. A törölt élt hozzávéve adódik, hogy G-nek minimum n éle van.

**Tétel:** Ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.

**Bizonyítás:**

Alkalmazzuk az un. leghosszabb út módszerét! Legyen az 1 hosszúságú L út a G gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja v. Tekintsük most G-nek v-hez illeszkedõ éleit! Ezek közül bármelyiknek a végpontja L-hez tartozik, ugyanis ellenkezõ esetben L hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy L a leghosszabb út.

Ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik v-hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét kijelöli. Ha e nem hurokél, akkor u-nak v-tõl különbözõ w végpontja L-ben van, tehát L-nek a v és w pontokat összekötõ része e-vel együtt G egy körét alkotja.

**Tétel:** Ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.

**Bizonyítás:**

A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.Az állítás n = 1 esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$-re minden n pontú és legalább n élû gráfban van kör. Legyen G egy n + 1 pontú gráf, amelynek legalább n + 1 éle van. Ha van elsőfokú éle, töröljük a rá illeszkedő éllel együtt. A maradék gráfban az indukciós feltétel szerint van kör. Visszavéve az elsőfokő pontot és a rá illeszkedő élet, az előző kört uu. tartalmazza a kapott gráf.

Ha nincs elsőfokú pontja, akkor minden pont legalább másodfokú. Ekkor a az előző tétel szertint van a gráfban kör.

**Tétel:** Az n szögpontú fagráf éleinek száma n - 1.

**Bizonyítás:**

Tudjuk, hogy minden n szögpontú összefüggõ gráfnak legalább n - 1 éle van. Az elõzõ tétel szerint, ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráfban van kör. Eszerint minden n pontú körmentes összefüggõ gráfnak pontosan n - 1 éle van, ami az állítást igazolja.

**Tétel:** Az n szögpontú és n - 1 élû összefüggõ gráfok fák.

**Definíció:** Ha egy gráf összefüggõ és nem tartalmaz kört, akkor fagráfnak vagy röviden fának nevezzük.

**Bizonyítás:**

Tegyük fel ugyanis, hogy a G gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ha a kör egy élét töröljük, akkor n szögpontú, n - 2 élû összefüggõ gráfot kapunk, ami ellentmond annak, hogy egy n szögpontú összefüggõ gráfnak legalább n - 1 éle van.

Be kell még látnunk, hogy ha egy összefüggõ gráf valamely körének egy tetszõleges élét töröljük, akkor ismét összefüggõ gráfot kapunk.

Tegyük fel ehhez, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggõséget. Töröljük a G gráf K körének $(u, v)$ élét. A G gráfban az u-ból a v-be most is el tudunk jutni a K kör megmaradt élein keresztül, azaz az $(u, v)$ törlése után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a kapott gráf is összefüggõ.

**Permutáció**

**Ismétlés nélküli *permutáció*** alatt néhány különböző dolognak a sorba rendezését értjük. Az "ismétlés nélküli" arra utal, hogy a sorba rendezendő elemek különbözőek, azaz nem ismétlődnek. Egy *n* elemű halmaz összes permutációinak a száma:
$\mathbf{P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.}$

*Megjegyzés:* Definíció szerint **0! = 1.**

## Kombináció

Az **ismétlés nélküli kombinációt** alkalmazzuk akkor, ha adott egy véges halmaz, melynek n darabszámú elemeiből k elemszámú halmazokat (kombinatorika nevén osztályokat) akarunk mindenféle módon képezni (és minden elem csak egyszer fordul elő). Ezt úgy hívjuk, hogy n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja. Az ismétlés nélküli kombináció képlete: $\boldsymbol{C_{n;k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}!}$ vagy binomiális együtthatókkal kifejezve: $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ (n alatt k).

Az **ismétléses kombinációt** alkalmazzuk, amikor adott n elemekből k elemszámú multihalmazokat képzünk, ahol adva van legalább 1 multiplikált elem. Az ismétléses kombináció képlete: $\boldsymbol{C^i_{n;k}} = \binom{\boldsymbol{n+k-1}}{\boldsymbol{k}}$ binomiális együtthatóval kifejezve.

## Variáció

Ismétlés nélküli valamint ismétléses variáció során egyaránt úgy járunk el, hogy osztályok szerint permutálunk. Vagyis eszerint azon túl, hogy n elem k-adosztályú kombinációit állítjuk fel, permutálnunk is kell azokat. Az előző kombinatorikai operációkhoz hasonlóan változik a variáció aszerint, hogy ismétléses vagy ismétlés nélküli: amennyiben legalább 1 elem multiplikált, akkor ismétléses-, ellenben ismétlés nélküli variációról van szó.

Az **ismétlés nélküli variáció** képlete $\boldsymbol{V^k_n} = \left(\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}\right) = \boldsymbol{n(n-1)\ldots(n-k+1)}$

Az **ismétléses variáció** képlete: $\boldsymbol{V^{k;i}_n} = \boldsymbol{n^k}$

## Binomiális tétel

**Tétel:** Ha a és b tetszőleges valós számok és n pozitív egész szám, akkor:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{a^n b^0} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{a^{n-1}b^1} + \ldots + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{a^1 b^n}$$

A tételben szereplő $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ együtthatókat binomiális együtthatóknak is nevezik.
A fenti meggondolások és számítások azt sejtetik, hogy a tétel állítása igaz.
A tétel **bizonyítása** továbbiakban **teljes indukcióval** lehetséges.

A binomiális tételben szereplő polinom n+1 tagú. Az ilyen sok tagból álló összeg leírására a matematikában egy rövidebb jelölést használnak.

A binomiális tétel rövidebb alakja: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a^{n-k}b^k}$

**Tétel: (Tarski fixpont tétele)**

Teljes hálón értelmezett monoton (rendezéstartó) f függvénynek van legkisebb és legnagyobb fixpontja.

**Bizonyítás:**

Legyen G azon elemek halmaza, melyekre $f(x) \leq x$. Ennek alsó határa, vagyis $g = \inf(G)$ lesz a legkisebb fixpont.
Egyrészt a $g \in G$, ugyanis $g \leq f(x) \leq x$. Ezért $f(g) \leq f(f(x)) \leq f(x) \leq x$, vagyis f(g) is alsó korlát. Mivel g a legnagyobb alsó korlát, ezért $f(g) \leq g$, tehát $g \in G$.
Másrészt g fixpont, vagyis $g = f(g)$. Mivel $f(g) \leq g$, ezért $f(f(g)) \leq f(g)$, vagyis $f(g) \in G$. De akkor g alsó korlát volta miatt $g \leq f(g)$. A rendezési reláció antiszimmetrikus tulajdonsága miatt $g = g(f)$.
Harmadrészt g legkisebb fixpont. Legyen G* a fixpontok halmaza, $g^* = \inf(G^*)$. Mivel $G^* \subseteq G$, ezért $g \leq g^*$, továbbá mivel g* infimuma G*-nak, és g is G*-beli, ezért $g^* \leq g$. A két egyenlőtlenségből az antiszimmetrikus tulajdonság miatt $g^* = g$, vagyis g valóban a legkisebb fixpont.