Gyorstalpalóféleség lineáris algebra I.-ből

Weber Áron

2018. március 8.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Pár gondolat bevezetésként

Remélem egyáltalán nem gondolja ezt senki, de azért hangsúlyoznám, hogy ez a kis dokumentum egyáltalán nem pótolja az anyag tényleges tudását, és a saját, kézzel írott/kiadott, nyomtatott jegyzet meglétét, legfeljebb csak segítséget tud nyújtani az azokban foglaltak megértésében, és talán egy újfajta rálátást ad a dolgokra. Ha csak ebből tanulsz, és megbuksz/nem a várt eredményt éred el, azért semmiféle felelősséget nem szeretnék (és nem is fogok) vállalni.

Bizonyításokat nem igazán volt motivációm inkludálni, részben, mert nagyon sokan skippelnék őket, másrészt pedig nagyon el tudják húzni az egész összefoglalót, miközben a megértéshez nem feltétlenül járulnak hozzá.

Természetesen jelen mű nem fedi le a félév teljes anyagát, csupán a lényegesebb dolgokat, amikre mindenképp szükség lesz, ha más nem, szigorlaton.

2. fejezet

Bevezető a vektorterekbe

Elsőként talán a legegyszerűbb, ha a lineáris algebra legalapvetőbb struktúráját, a vektortereket járjuk picit körbe, bevezetés szinten.

1. Definíció. *(Vektortér) Adott egy V nemüres halmaz a $\mathbb{T}$ test felett, s rajta két művelet/függvény, összeadás és as $\mathbb{T}$-ből vett skalárokkal való szorzás. A V halmaz vektortér, ha vektorainak összeadása Abel- csoport (azaz asszociatív, van egységelem és inverz, valamint kommutatív), a skalárral való szorzásra pedig teljesülnek az alábbiak:* [1]

1. *$1\vec{v} = \vec{v}$, ahol $\vec{v} \in V$, és 1 a $\mathbb{T}$ összeadásra vonatkozó egységeleme.*
2. *Vegyes asszociativitás: $(\lambda\mu\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$*
3. *Vegyes disztributivitás:*
   - $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
   - $\lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2$, *ahol* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2 \in V$

Az alább felsorolt tulajdonságokat vektortéraxiómáknak is szoktuk nevezni, s ezeknek nevezetes következményeit is számon tartjuk, így most a színpad az övék.

1. Tétel. *$\forall\lambda \in \mathbb{T}$-re $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, ahol a $\vec{0}$ a V vektortérbeli vektorok összeadásának egységeleme.*

2. Tétel. *$\forall\vec{v} \in V$-re $0\vec{v} = \vec{0}$, ahol 0 a $\mathbb{T}$-beli összeadás egységeleme.*

3. Tétel. *$\forall\vec{v} \in V$-re $(-1)\vec{v} = \vec{v}^{-1}$, ahol (-1) a $\mathbb{T}$-beli szorzás egységelemének az összeadásra vonatkoztatott inverze (azaz az az elem, amit ha hozzáadok az egységelemhez, a nullelemet kapom), $\vec{v}^{-1}$ pedig a $\vec{v}$ vektor V-beli összeadásra vonatkoztatott inverze, azaz az a vektor, amit ha $\vec{v}$-hez adok, a nullvektort kapom.*

4. Tétel. *Ha $\lambda\vec{v} = \vec{0}, \lambda \in \mathbb{T}, \vec{v} \in V$ akkor vagy a skalárunk vagy a vektorunk lesz nulla.*

Esetleg felmerülhet bennünk a kérdés, hogy lehet-e vektortéren belül egy másik vektorteret definiálni, s erre a válasz egy elég határozott igen, ezeket a szépségeket nevezzük altereknek. Kicsit szebben:

[1] Ha ezek teljesülnek, akkor a V elemeit vektoroknak nevezzük.

2. Definíció. *Adott a V halmaz, egy $\mathbb{T}$ test feletti vektortér. Ha a $W \subseteq V$ halmaz szintén vektortér, akkor azt mondjuk, hogy W altere V-nek.*

Arra, hogy eldöntsük, egy halmaz altere-e egy vektortérnek, van egy rendkívül praktikus kis tétel is, ami nagyon könnyen használható az ilyesféle problémák megoldására.

5. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{T}$ test feletti vektortér, és $W \subseteq V$. W akkor és csak akkor altere V-nek, ha $\forall\ \vec{v}_1, \vec{v}_2$-re, és $\lambda \in \mathbb{T} - re$ teljesülnek az alábbiak:*

- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$
- $\lambda \vec{v}_1 \in W$

3. fejezet

Alapvető mátrixos mókák

Most nézzünk rá pár egyszerű, nem túl elméleti dologra a mátrixokkal kapcsolatban, amik később viszont meglehetősen fontosak lesznek.

3.1. Műveletek, függvények

- Összeadás: elemenként
- Skalárszoros: úgyszint elemenként
- Szorzás: vicces dolog, a baloldali mátrix sorvektorait skalárszorozzuk a jobboldali mátrix oszlopvektoraival. Arra oda kell figyelni, hogy a baloldali mátrixnak ugyanannyi oszlopa legyen, mint amennyi sora van a jobboldalinak. Fontos még megemlíteni, hogy mátrixok szorzása egyáltalán nem kommutatív, senkinek se legyen semmilyen vad tévképzete ezzel kapcsolatban.

Ide illik talán még a mátrix transzponáltjának fogalma is, ami elég egyszerűen megtárgyalható: egyszerűen fogjuk magunkat, és a mátrix soraiból oszlopokat csinálunk[1]. Ugyanez kicsit formálisabban: legyen az A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában levő elem a_{ij}. Ekkor A transzponáltjában, A^T-ben $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Megemlíteném még egy nagyon fontos fogalmat, mégpedig a mátrix inverzét. Ez az a nem minden esetben létező $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix, melyre $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$, ahol $\underline{\underline{E}} = diag(1, ..., 1)$, az egységmátrix. Amennyiben ez az inverz létezik egy A mátrixra, akkor azt mondjuk, hogy az A mátrix invertálható, azaz reguláris.

3.2. Speciális mátrixok

- Szimmetrikus mátrix: olyan mátrix, mely szimmetrikus a főátlójára, azaz $a_{ij} = a_{ji}$. Ebből következik, hogy megegyezik transzponáltjával.
- Ortogonális mátrix: olyan mátrix, melynek inverze megegyezik a transzponáltjával. Ezen mátrixoknak van egy különleges tulajdonsága, nevezetesen, hogy oszlop-, illetve sorvektoraik merőlegesek egymásra, nevük is innen ered.

[1] Vagy fordítva.

- Ferdén szimmetrikus mátrix: olyan mátrix, melynek transzponáltja megegyezik (-1)-szeresével, azaz $a_{ij} = -a_{ji}$.

3.3. Determinánsok

A determinánsok, bármennyire is hasznos és sok helyen használt jószágok, elsőre (és másodjára is) elég furcsán és nem feltétlenül érthetően vannak definiálva. Lényegük, hogy egy nxn-es mátrixhoz hozzárendelünk valamilyen skalárt. [2] Alapvetően talán rekurzívan lehet őket a legjobban megmagyarázni, 1x1-es determináns maga a benne levő szám, 2x2-esnél a főátló elemeit összeszorozzuk, majd kivonjuk belőle a mellékátló elemeinek szorzatát. 3x3-ashoz legegyszerűbb, ha először definiáljuk az ún. minormátrixot.

3. Definíció. *(Minormátrix) Adott $n \times n$-es mátrix a_{ik} eleméhez tartozó minormátrix az az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix, melyet az eredeti mátrix i-edik sorának és k-adik oszlopának elhagyásával kapok. Vagyis fogom a mátrixot, és kipakolom belőle azt a sort és oszlopot, amiben a kiválasztott elem van.*

Így már bármilyen mátrix determinánsát meg tudjuk határozni, a lényeg az, hogy kiválasztunk egy tetszőleges sort vagy oszlopot (mindegy, hogy melyiket, hisz a hozzárendelés ebben az irányban egyértelmű), majd elemeit összeszorzom a hozzájuk tartozó minormátrixok determinánsaival, majd a sakktáblaszabály szerinti váltakozó előjellel összeadom őket. [3] Azt, hogy teljesen mindegy, hogy melyik sor vagy oszlop szerint fejtem ki a determinánst, a kifejtési tétel fogalmazza meg, jöjjön hát most ő teljes pompájában.

6. Tétel. *Egy n-edrendű ($n \times n$-es) determináns tetszőleges sora/oszlopa szerint kifejthető, és $\det \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$, ahol D_{ij} az a_{ij}-hez tartozó előjeles aldetermináns.*[4]

Következzenek most a determinánsok tulajdonságai, amik többek közt a determináns kiszámításánál, függetlenség eldöntésénél, és egyéb, jófajta dolgoknál tudnak nagy segítségünkre lenni.

7. Tétel.

1. *Ha a determináns valamely sorát/oszlopát egy λ skalárral megszorozzuk, akkor a determináns értéke λ-szorosára változik.*
2. *Ha a determináns i-edik sorának/oszlopának minden eleme egy kéttagú összeg, akkor a determináns felírható két determináns összegeként, amik az i-edik sort/oszlopot kivéve megegyeznek, az egyik determináns i-edik sora/oszlopa az összegek első tagjait tartalmazza, a másik i-edik sorában/oszlopában az összegek második tagjai találhatók.*
3. *Ha egy determináns egyik sora/oszlopa csak 0 elemeket tartalmaz, akkor a determináns értéke 0, hiszen ha aszerint a sor/oszlop szerint fejtem ki, akkor mindenképp 0-t kapok.*
4. *Ha egy determináns két sorát felcserélem, a determináns értéke (-1)-szerese lesz.*

[2] Geometriai értelemben a determinánsok adott paralellogrammák területét adják meg.

[3] Illetve negatív előjelnél kivonom.

[4] Azaz az elemhez tartozó minormátrixának determinánsa, a sakktáblaszabálynak megfelelő előjellel.

5. *Ha egy determináns két sora megegyezik, a determináns értéke 0, hiszen ha felcserélném őket, (-1)-szeresét kapnám az eredetinek, azonban nem változna semmit, det(A)=-det(A), ebből következik, hogy det(A)=0.*

6. *Ha egy determináns egyik sorához/oszlopához hozzáadjuk az egyik sor/oszlop λ-szorosát, akkor a determináns értéke nem változik.*

7. *Egy alsó/felső háromszögdetermináns értéke a főátlóban található elemek szorzatával egyezik meg.*

8. *Ferde kifejtés tétele: ha egy determináns egyik sorának/oszlopának értékeit rendre egy másik sorhoz/oszlophoz tartozó elemeihez tartozó aldeterminánsokkal való szorzással próbálkozunk a kifejtéssel, akkor az eredmény 0 lesz.*

3.4. Egyenletrendszerek, Gauss-Jordan-elimináció

Mert mindenki szereti, és még fontos is. Lényegében egy algoritmikus módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására.[5]

Vegyük az

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n} = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n} = \beta_2 \\ \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + ... + \alpha_{kn} = \beta_k \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert!

Egyfelől, kis rendezgetéssel könnyű belőle kihozni az $\underline{\underline{A}}\vec{x} = \vec{b}$ alakot, ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \cdots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}, \ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \\ \beta_k \end{bmatrix}, \text{ ennek majd}$$

az egyenlet megoldhatóságának vizsgálatakor lesz jelentősége.

Másrészt, alapvető célunk, hogy az $x_1 = \gamma_1, \quad x_2 = \gamma_2, ..., x_n = \gamma_n$ megoldásra jussunk. Fontos megemlíteni, hogy nincs mindig csak egy megoldásunk, gyakran előfordul, hogy néhány változót csak a többihez képest tudunk felírni, a maradék viszont ún. szabad változó lesz, ezeknek értéke bármi lehet. Ekkor végtelen sok megoldásunk van, ennek geometrai értelme az, hogy a vizsgált egyenesek közt vannak olyanok, amik egybeesnek. Ahhoz, hogy ezt a megoldást megkapjuk, az alábbi ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

- Két sor felcserélése
- Sor szorzása adott nem 0 valós számmal
- Egyik sor számszorosának kivonása egy másik sorból/hozzáadása egy másik sorhoz

Ezzel a tudással felvértezve már csak annyit kell csinálni, hogy egy sorból kiválasztunk egy vezérelemet, melynek a sorát nem bántjuk, és a vezérelem feletti és alatti elemeket kilövöldözzük, úgy, hogy 0-k legyenek. Majd miután letöröltük a

[5] Ennek geometriai jelentése, hogy adott n darab egyenesnek keressük a metszéspontjait.

verejtéket a homlokunkról, az összes többi sorral is eljátsszuk ugyanezt, ügyelve arra, hogy egy sor csak egy vezérelemet adhat, ha egy sor több elemét is annak vesszük, bajok lesznek. Egy dologra kell még nagyon odafigyelni, ha az egyik sorban van nem 0 együttható úgy, hogy a "jobb oldalon" 0 áll, akkor tiltósort kapunk, ilyenkor meg kell állni, értesíteni az illetékes szerveket, és kijelenteni, hogy nincs megoldása az egyenletrendszernek. Ha nincs tiltósor, és több ismeretlenünk van, mint egyenlet, akkor végtelen sok megoldást kapunk, ha több sor van, mint ahány ismeretlen, akkor pedig lesz olyan sor, aminek nincs plusz információtartalma.

Kanyarodjunk most kicsit vissza az $\underline{\underline{A}}\vec{x} = \vec{b}$ alakra, s nézzünk rá arra, mikor is lesz megoldható az egyenlet. Ha az együtthatómátrix négyzetes. akkor nagyon adja magát, hogy A inverzével balról beszorozzuk az egészet, s pont ez az, amit csinálunk egy egyenlet megoldásánál (még ha nem is tudunk róla). Így kimondhatjuk azt, hogy $(n \times n)$-es együtthatómátrixú egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha ez a mátrix invertálható, azaz determinánsa nem 0.[6] Kicsit más a helyzet, ha ún. homogén egyenletrendszerünk van, azaz a jobb oldalon a nullvektor áll. Ekkor mindenképp van megoldás, a triviális megoldás, ahol az $\vec{x}$ vektorunk is nullvektor. Ez akkor áll fenn, ha az együtthatómátrix determinánsa nullától különbözik.[7] Ha viszont 0 a determináns, akkor végtelen sok megoldásunk lesz.

[6] Azaz az oszlop-/sorvektorai függetlenek.

[7] Ekkor is függetlenek a vektorok, hogy ez miért van így, a következő fejezetben megfogalmazottakból viszonylag nagyobb ötletek nélkül, kis utánagondolkodással belátható.

4. fejezet

Vektorok

Mint ahogy a címből is sejthető, ebben a fejezetben a vektorok különféle tulajdonságairól, mint például a függetlenség, illetve a velük történő jófajta kis számolásokról lesz szó.

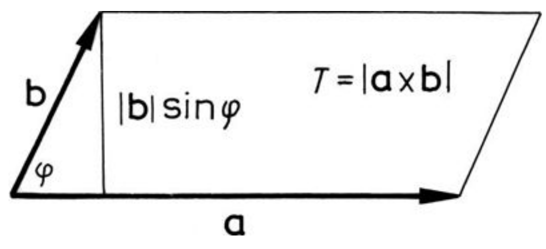
4.1. Alapfogalmak

Először kezdjük néhány fontos, de nem teljesen triviális dolog definiálásával, egyszerűbb tételek kimondásával.

4.1.1. Műveletek, függvények említésszinten

- Skalárszoros: koordinátánként történik, geometriai szempontból egy nyújtásnak felel meg.
- Összeadás, kivonás: most nem részletezném, alapvetően ugyanúgy koordinátánként csináljuk
- Vektoriális szorzat: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\phi)$

  Geometriai jelentése: hossza az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét adja meg. Magyarázat: a paralelogramma magassága $m = |\vec{b}|sin(\phi)$, egyik alapja az $\vec{a}$. Ebből a paralelogramma területe (alap szorozva a magassággal) $|\vec{a}||\vec{b}|sin(\phi)$.



4.1. ábra. Kb. így néz ez ki

- Skalárszorzat: $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = |\vec{a}||\vec{b}|cos(\phi) = \vec{b}^T\vec{a}$

  Kiszámítása (<u>*szigorúan*</u> *csak* ortonormált bázisban): $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n$

  Geometriai jelentése: az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$-vel párhuzamos egységvektorra vett merőleges vetületének előjeles hosszát adja meg.

- Vegyes szorzat: $\left\langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c} \right\rangle$.

  Ennek a geometriai jelentése az, hogy a három vektor által meghatározott paralellepipedon előjeles térfogatát adja meg, ez a térfogat attól függ, hogy a keresztszorzathoz képest milyen irányba mutat a c vektor.

4.1.2. Lineáris összefüggőség, függetlenség

4. Definíció. *(Lineáris kombináció) Adottak λ_1, λ_2,..., $\lambda_n \in \mathbb{R}$, véges sok valós szám, és a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$, ugyanannyi vektor. Ekkor a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$ a vektorok lineáris kombinációja.*

5. Definíció. *(Lineáris függetlenség) A $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,... $\vec{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ akkor és csak akkor állhat fent, ha $\forall i$ λ_i=0.*

6. Definíció. *(Lineáris összefüggőség) A $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, ha nem függetlenek, azaz ha a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$ felírásban van olyan λ_i együttható, ami nem 0.*

1. Következmény. *Ebből a definícióból adódik, hogy ha van n darab összefüggő vektorunk, akkor lesz köztük olyan, ami felírható a többi lineáris kombinációjaként, azaz matekul: $\exists$ $1 \leq i \leq n$, hogy $\vec{v}_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum\limits_{j \in [1,n], j \neq i} \lambda_j \cdot \vec{v}_j$* [1]

Egyéb tételek a témában, bizonyítás nélkül:

8. Tétel. *Ha a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,...,$\vec{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor ha egy tetszőleges vektort hozzáveszek, továbbra is összefüggők maradnak.*

9. Tétel. *Ha a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,...,$\vec{v}_n$ vektorok függetlenek, tetszőleges vektort elhagyva is függetlenek maradnak.*

10. Tétel. *Ha a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,...$\vec{v}_n$ vektorok függetlenek, és egy $\vec{n}_{n+1}$ vektort hozzávéve összefüggők lesznek, akkor a $\vec{v}_{n+1}$ kifejezhető a többi n vektor lineáris kombinációjaként.*

11. Tétel. *A $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$ felírás akkor, és csak akkor egyértelmű, ha a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,...,$\vec{v}_n$ rendszer lineárisan független.*

[1] Ez amúgy egy tétel, ráadásul szükséges és elégséges feltétele az összefüggőségnek.

4.2. Vektorterek tulajdonságai

Most, hogy már tudjuk, mi is az a vektortér, foglalkozzunk kicsit azzal, hogy mit is tudnak az elemei!

7. Definíció. *(Generátorrendszer) Azt mondjuk, hogy a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,...,$\vec{v}_n$ vektorrendszer generátorrendszer a V vektortérben, ha $\forall \vec{x} \in V$-re $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, melyre $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$, azaz minden V-beli vektor előállítható lineáris kombinációjukként.*

Ugyebár azt láttuk, hogy ha egy adott rendszer függetlensége ekvivalens azzal, hogy egy adott vektor felírása az adott rendszerbeli vektorok lineáris kombinációjaként egyértelmű. S ha van egy olyan vektorrendszerünk, ami nem csak hogy független, de még generátorrendszer is, akkor végülis nyert ügyünk van, hisz a vektortér összes vektorát *egyértelműen* fel tudjuk írni a lineáris kombinációjukként. Menő, mi?

8. Definíció. *(Bázis) Minden olyan V vektortérbeli generátorrendszert, ami lineárisan független vektorokat tartalmaz, bázisnak nevezünk.* [2]

9. Definíció. *(Dimenzió) A V vektortér dimenziója bármely bázisának elemszáma, azaz az a* maximális *számú lineárisan független vektor, amit ki tudok belőle választani.*

Ebből a definícióból több minden is következik, ezeket most egy tételként fogjuk megfogalmazni.

12. Tétel. *Adott vektortér összes bázisának elemszáma egyenlő.* [3]
A következő három dolog teljesen ekvivalens lesz, tessék felkészülni.

1. $Dim(V) = n$
2. *V-ben találok n db lineárisan független vektort, de n+1 darab már lineárisan összefüggő lesz.*
3. *V-ben tudok találni n elemű generátorrendszert, de n-1 eleműt semmiképp.*

Vektorok tudnak ám trükkös dolgokat is csinálni, mint például egy alteret generálni.

10. Definíció. *A $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ vektorok által generált altér ezen vektorok összes lehetséges lineáris kombinációja.*
Jelölés: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n \rangle = \{\vec{v} \in V | \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n\}$.

[2] Azaz az a vektorrendszer lesz bázis, amiknek lineáris kombinációjaként az összes vektortérbeli vektor előáll, és lineárisan függetlenek. Pont, amiről az előbb is szó volt.
[3] Ebből következik, hogy vektortér dimenziója egyértelmű.

5. fejezet

Lineáris leképezések és egyéb vicces dolgok

5.1. A homogén lineáris leképezés fogalma

A lineáris leképezések vektortereken értelmezett függvények, melyeknek értékkészlete is vektortér, azaz vektorokhoz vektorokat rendelnek hozzá. Az értelmezési tartományt kiindulási, az értékkészletet érkezési vektortérnek szoktuk nevezni.

11. Definíció. *(Homogén lineáris leképezés) Legyen V és W egy-egy vektortér, $\vec{u}, \vec{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.*

Az $L : V \to W$ függvény homogén lineáris leképezés, ha az alábbi két tulajdonsággal rendelkezik:

1. *Additivitás: Vektorok összegének képe a képvektorok összege, azaz $L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$.*

2. *Homogenitás: Vektor skalárszorosának képe megegyezik a képvektor skalárszorosával, vagyis $L(\lambda\vec{v}) = \lambda L(\vec{v})$.*

1. Megjegyzés. *A lineáris leképezések speciális fajtája a lineáris transzformáció, itt a kiindulási és érkezési vektortér megyegyeznek.*

A legjobb dolog a lineáris leképezésekben az, hogy ha mind a kiindulási, mind az érkezési vektortérben kiválasztunk egy-egy bázist, akkor fel tudunk írni egy mátrixot, amire az igaz, hogy a mátrixot egy kiindulási vektortérbeli vektorral összeszorozva megkapjuk a vektor képét, azaz $L(\vec{x}) = \underline{\underline{A}}\vec{x}$. Ezt a mátrixot pedig úgy állítjuk elő, hogy fogjuk a kiindulási bázisunk vektorainak képeit az érkezési tér bázisában felírva, és bepakoljuk őket egy mátrixba, úgy, hogy a mátrix oszlopait alkossák. Ez a mátrix $k \times n$-es, ahol k az érkezési, n a kiindulási vektortér dimenziója.

Tehát n db oszlopa lesz, hisz a kiindulási vektortér bázisaiban ennyi vektor van. Ugyanebből a megfontolásból lesz k db sora, a képvektorok k db koordinátával írhatók fel.

5.2. Magtér, képtér

Foglalkozzunk most két, lineáris leképezések által meghatározott vektortérrel.

12. Definíció. *(Magtér) Adott $L : V \to W$ lineáris leképezés magtere V-nek azon vektoraiból álló altere, melyeknek képe a nullvektor, azaz $L(\vec{v}) = \vec{0}$, ha $\vec{v} \in Ker(L)$.*

Jelölés: Ker(L).

Kiszámítása: az $\underline{\underline{A}}\vec{x} = \vec{0}$ egyenlet megoldásai lesznek a magtér elemei, ahol $\underline{\underline{A}}$ a leképezés mátrixa. Ehhez pedig elég kedvenc Gauss nevű matematikusunk találmányaira hivatkozni (azaz legaussoljuk az egészet).

13. Definíció. *(Képtér) Adott $L : V \to W$ lineáris leképezés képtere W-nek azon vektoraiból áll, melyeknek van ősképe V-ben, azaz mindegyikhez találunk olyan V-beli vektort, melynek képe a vizsgált vektor.*

Jelölés: Im(L).

Kiszámítása: A leképezés mátrixának oszlopvektorai által generált altér lesz maga a képtér.

2. Megjegyzés. *Fontos megemlíteni, hogy míg a magtér a kiindulási, addig a képtér az érkezési vektortér altere.*

Jöjjön most egy fontos tétel, mely összeköti ezt a két vektorteret.

13. Tétel. *(Dimenziótétel) Legyen $L : V \to W$ egy lineáris leképezés. Ekkor Dim(Ker(L))+Dim(Im(L))=Dim(V), azaz a magtér és képtér dimenziójának összege megegyezik a kiindulási vektortér dimenziójával.*

5.3. Sajátérték, sajátvektor

Bár alapvetően csak párhuzamosságvizsgálatnak tűnnek, a sajátérték-problémák nagyon sok helyen, pl. fizikai problémák megoldásánál (mint a Schrödinger-egyenlet) hatalmas jelentőséggel bírnak.

14. Definíció. *(Sajátérték, sajátvektor) A λ skalár sajátértéke az L lineáris transzformációnak, ha $\exists \vec{v} \neq \vec{0}$ (azaz létezik olyan <u>nem 0</u> vektor), melyre $L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Ezt a $\vec{v}$ vektort ekkor az L transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátvektorának nevezzük.*

Ezek a fránya sajátvektorok nemcsak hogy párhuzamosak a képükkel, de még alteret is alkotnak, ahogy az alábbi tétel ki is mondja.

14. Tétel. *Az L lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó összes sajátvektor és a nullvektor alteret alkotnak, ezt az alteret a λ-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.*

Gondolom most már mindenki kíváncsi arra, hogy mégis hogy számítjuk ki egy transzformáció (vagy általánosabban, egy $n \times n$-es mátrix) sajátértékeit. Ezt pedig a $det(\lambda\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = 0$ ún. karakterisztikus egyenlet megoldásával tehetjük meg. Mivel ez a determináns egy n-edfokú polinom ($p(\lambda)$), ezért szokás karakterisztikus polinomnak is nevezni.

5.4. Bázistranszformáció, diagonalizálás

Mielőtt belevágnánk a bázistranszformáció témakörébe, fogalmazzunk meg két tételt, ami később még fontos lesz.

15. Tétel. *Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.*

16. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy $L : V \to V$ lineáris transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak. Ekkor a transzformáció mátrixa ebben a bázisban felírva diagonális, és a főátlóban a megfelelő sajátértékek állnak.*

5.4.1. Bázistranszformáció

Ezek után nézzük meg, hogyan térünk át egyik bázisból a másikba. Ez egy nehezebben megérthető témakör, ezért itt kicsit kifejtem azt, hogy hogy kell az itteni dolgokat levezetni. Ugyebár egy vektor bármely bázisban felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként (hiszen pont ettől lesz bázis a bázis), azaz ha mondjuk 2 dimenzióban adott a $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ vektorokból álló B bázis, akkor egy tetszőleges $\vec{v}$ vektor az alábbi módon írható fel: $\vec{v} = \beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2$. Így a B bázisban $\vec{v} = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}_{[B]}$. Így a fenti lineáris egyenlet már felírható az alábbi mátrixos alakban: $\vec{v} = \underline{\underline{B}}\vec{v}_{[B]}$, ahol a $\underline{\underline{B}}$ mátrix, melyet áttérési mátrixnak nevezünk, a B bázisvektorait tartalmazza. [1] Ebben a felírásban a legjobb dolog, hogy univerzális, bármely két bázissal működik, így $\underline{\underline{A}}\vec{v}_{[A]} = \underline{\underline{B}}\vec{v}_{[B]}$. Különleges eset, amikor az egyik bázis a kanonikus bázis, ekkor $\vec{v} = \underline{\underline{E}}\vec{v} = \underline{\underline{B}}\vec{v}_{[B]}$.

Itt még mindkét bázist a kanonikus bázisban írtuk fel, azonban a fentieket általánosítani is tudjuk. Vegyük mondjuk az a bázist, melyben felírjuk mind önmagát, mind a b bázist. Ekkor a bázisváltás egyenlete az alábbi kis szépség lesz: $\vec{v}_{[a]} = \underline{\underline{B}}_{[a]}\vec{v}_b$. Ebből jól látszik az, ami kis utánaszámolással is könnyen belátható, mégpedig az, hogy saját magában felírva minden bázis áttérési mátrixa az egységmátrix. Szebben kifejezve: bármely bázis önmagára vonatkozó koordinátás alakja kanonikus, azaz ha egy bázis koordinátás felírását ugyanabban a bázisban írom fel, akkor a $\begin{bmatrix}1\\0\\.\\.\\.\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\.\\.\\.\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\.\\.\\.\\1\end{bmatrix}$ kanonikus alakú vektorokat fogom kapni.

Ezek alapján már megfogalmazható egy általános érvényű tétel a bázisváltásokra:

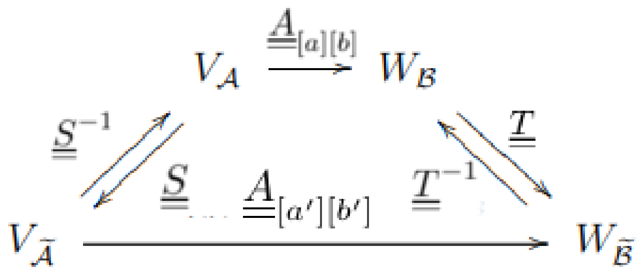
17. Tétel. *Legyen V egy n dimenziós vektortér, $[e]$[2], és $[u]$[3] bázis V-n belül, $\vec{v}_{[e]}$ a $\vec{v}$ $[e]$ bázisban felírt koordinátamátrixa. Ekkor a $\vec{v}$ $[u]$-ra vonatkozó koordinátái az alábbi módon adhatók meg $\vec{v}_u = \underline{\underline{U}}\vec{v}_{[e]}$, ahol U az $[u]$ bázis $[e]$-ben felírt áttérési mátrixa.*

[1] Természetesen a vektorok sorrendje rögzített.

[2] Mint eredeti

[3] Mint új

Innentől következik a témakör másik nagy kérdése, hogy hogyan tudjuk egy lineáris leképezés mátrixát meghatározni úgy, hogy nem maradunk egy adott bázisban, hanem ide-oda ugrálunk. Erre pedig létezik egy univerzálisan használható képlet, ha az eredeti mátrix az [a] bázisból [b]-be vezet, akkor az [a'] és [b'] bázisokban felírt mátrix így számolható ki: $A_{[a'][b']} = T^{-1}A_{[a][b]}S$, ahol T a [b]-ből [b']-be, S az [a]-ból [a']-be való áttérések áttérési mátrixai. Erre következzék egy szemléltető ábra, mellyel bármilyen bázisok közti mozgásra felírható a fenti képlettel ekvivalens formula:



Az ábráról leolvasható, hogy ha egy lineáris transzformációt veszünk, melynek az [a] bázisban felírt mátrixa $A_{[a]}$, akkor az [a']-ben felírva a transzformáció mátrixa: $A_{[a']} = S^{-1}A_{[a]}S$, ahol S az áttérési mátrix.

5.4.2. Diagonalizáció

Mint azt már a szekció elején is megmutattuk, ha egy transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor ha egy bázistranszformációval ebbe áttérünk, egy olyan diagonális mátrixot kapunk, melynek főátlójában a sajátértékek állnak. Pontosan ezt kihasználva fogunk majd diagonális mátrixokat előállítani, azonban először szükséges még pár dolgot definiálni, kimondani.

15. Definíció. *(Hasonlóság)*[4] *Az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix hasonló a* $\underline{\underline{B}}$ *mátrixhoz, ha létezik egy olyan S mátrix, melyre* $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{BS}}$.

Mivel itt lényegében egy bázistranszformáció történik, ezért viszonylag egyszerűen belátható, hogy hasonló mátrixok sajátértékei páronként megegyeznek, s ha $A = T^{-1}BT$, valamint s az A egyik sajátvektora, akkor B ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektora Ts. Ennek azért kell így lennie, hisz bázistranszformációnál nem szabad, hogy maga a transzformáció megváltozzon, hiszen továbbra is ugyanazoknak a vektoroknak kell képükkel párhuzamosnak lenniük, s más bázisra való áttérésnél a nyújtások mértékének sem szabad megváltoznia.

Most már áttérhetünk arra, amit először meg akartunk nézni, mégpedig hogy mikor, s hogyan tudunk egy mátrixot diagonalizálni, azaz egy olyan bázist keresni, melyre áttérve a mátrixunk diagonális lesz.

16. Definíció. *(Diagonalizálhatóság) Azt mondjuk, hogy az A mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.*

[4]Belátható, hogy ez egy ekvivalenciareláció.

Mivel különböző sajátértékek esetén kvadratikus mátrix sajátvektorai lineárisan függetlenek, és ebben a bázisban felírva a transzformáció mátrixa diagonális lesz, ezért ez egy elégséges, de nem szükséges feltétele a diagonalizálhatóságnak. Nem szükséges feltétel, mivel vannak különféle eszközök, melyekkel bizonyos esetekben többszörös gyökökkel rendelkező karakterisztikus polinomú mátrixokat is tudunk diagonalizálni. Van viszont egy szükséges, és elégséges feltétele a diagonalizációnak.

18. Tétel. *Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa.*

Van még egy elégséges feltétel a diagonalizálhatóságra, amihez azonban először vissza kell térnünk a karakterisztikus egyenletre, s két fogalmat definiálnunk, az algebrai és a geometriai multiplicitást.

Az algebra alaptétele kimondja, hogy minden n-edfokú polinomnak létezik n darab gyöke a komplex számok teste fölött. Ebből adódóan minden egyenletnek létezik ún. gyöktényezős alakja, mely így néz ki: $p^n(\lambda) = \alpha(\lambda - \lambda_1)^r_1(\lambda - \lambda_2)^r_2...(\lambda - \lambda_k)^r_k = 0$, ahol λ_i, $i = 1, ..., k$ az egyenlet gyökei, r_i az i-edik gyök ún. algebrai multiplicitása, azaz hogy hányszoros gyök, α pedig az együtthatók által meghatározott skalár.

17. Definíció. *(Geometriai multiplicitás) A λ_i sajátérték geometriai multiplicitása a hozzá tartozó sajátértékek által meghatározott sajátaltér dimenziója.*

Ezt a két fogalmat felhasználva megfogalmazható az alábbi tétel:

19. Tétel. *Ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik, akkor a mátrix diagonalizálható.*

Gondolom most már mindenkit mardos a kíváncsiság, hogy ezek után megtudja, hogyan is kell egy mátrixot diagonalizálni. Mivel már kéne tudnunk sajátértékeket és sajátvektorokat kiszámítani, ezért tegyük is ezt meg! Ezek után a diagonális mátrixot úgy kapjuk meg, hogy a kapott sajátértéket valamilyen sorrendben berakjuk egy mátrix főátlójába (természetesen az összes többi érték 0 marad), maga az $\underline{\underline{S}}$ áttérési mátrix pedig sajátvektorokból fog állni, abban a sorrendben, ahogyan a diagonális mátrixban vannak a sajátértékek.