Lineáris algebra II. ZH

Elmélet:

minden, előadáson és gyakorlaton elhangzott definíció és tétel kimondására

Tételek, amelyeket bizonyítani kell:

✓ Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség

✓ szög (szög koszinuszának) értelmezése

speciális KOMPLEX mátrixok sajátértékeire, determinánsára, sajátvektoraira vonatkozó tételek bizonyítása

ortogonális és unitér transzformációk megőrzik a skalárszorzatot, ezért normatartók, távolságtartók

Bizonyítandó tételek

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség

Tétel: $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 \leq \langle \underline{a},\underline{a}\rangle \langle \underline{b},\underline{b}\rangle$

Bizonyítása: Tekintsük az $\langle \underline{a}+\lambda\underline{b}, \underline{a}+\lambda\underline{b}\rangle$ skalárszorzatot

Mivel a skalárszorzat pozitív definit: $0 \leq \langle \underline{a}+\lambda\underline{b}; \underline{a}+\lambda\underline{b}\rangle$

Lineáris tulajdonságok miatt:

$\langle \underline{a}+\lambda\underline{b}, \underline{a}+\lambda\underline{b}\rangle = \langle \underline{a},\underline{a}\rangle + \langle \underline{a},\lambda\underline{b}\rangle + \langle \lambda\underline{b},\underline{a}\rangle + \langle \lambda\underline{b},\lambda\underline{b}\rangle$

Homogén tulajdonságok miatt:

$\langle \lambda\underline{b},\underline{a}\rangle = \lambda\langle \underline{b},\underline{a}\rangle$ illetve $\langle \underline{a},\lambda\underline{b}\rangle = \lambda\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$ és $\langle \lambda\underline{b},\lambda\underline{b}\rangle = \lambda^2\langle \underline{b},\underline{b}\rangle$

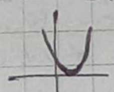
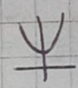
Szimmetria tulajdonságok miatt:

$\lambda\langle \underline{b},\underline{a}\rangle = \lambda\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$

Ezért az egyenlőtlenség:

$0 \leq \langle \underline{a},\underline{a}\rangle + \lambda^2\langle \underline{b},\underline{b}\rangle + 2\lambda\langle \underline{a},\underline{b}\rangle = \lambda^2\langle \underline{b},\underline{b}\rangle + 2\lambda\langle \underline{a},\underline{b}\rangle + \langle \underline{a},\underline{a}\rangle$

Ez λ-ra nézve egy másodfokú egyenlőtlenség

 van 

$\langle \underline{b},\underline{b}\rangle = A$

$2\langle \underline{a},\underline{b}\rangle = B$ $\quad \lambda^2 A + \lambda B + C \geq 0$

$\langle \underline{a},\underline{a}\rangle = C$ az egyenlőtlenségnek max 1 gyöke van $\rightarrow D \leq 0$

$D = B^2 - 4AC \leq 0$

Behelyettesítve a diszkriminánsba:

$[2\langle \underline{a},\underline{b}\rangle]^2 - 4\cdot\langle \underline{b},\underline{b}\rangle\cdot\langle \underline{a},\underline{a}\rangle \leq 0$

$4\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 - 4\cdot\langle \underline{b},\underline{b}\rangle\cdot\langle \underline{a},\underline{a}\rangle \leq 0$

$\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 \leq \langle \underline{a},\underline{a}\rangle\cdot\langle \underline{b},\underline{b}\rangle$ amely a tétel állítása.

Szög (szög koszinuszának) értelmezése

Definíció: Az euklideszi térben két vektor, az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által bezárt szöget a következőképp lehet meghatározni:

Legyen $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$ egy skalárszorzat V-ben, és valamely $\underline{x}$ vektor normája a $\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle}$. Ekkor

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\langle \underline{a},\underline{b}\rangle}{\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|} = \frac{\langle \underline{a},\underline{b}\rangle}{\langle \underline{a},\underline{a}\rangle\cdot\langle \underline{b},\underline{b}\rangle}}$$

Definíció helyességének bizonyítása:

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség alapján

$\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 \leq \langle \underline{a},\underline{a}\rangle\langle \underline{b},\underline{b}\rangle$ gyököt vonva

$|\langle \underline{a},\underline{b}\rangle| \leq \sqrt{\langle \underline{a},\underline{a}\rangle\langle \underline{b},\underline{b}\rangle} = \sqrt{\langle \underline{a},\underline{a}\rangle}\cdot\sqrt{\langle \underline{b},\underline{b}\rangle}$ amelyből

$-1 \leq \frac{\langle \underline{a},\underline{b}\rangle}{\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|} \leq 1$

Továbbá a $\cos(x)$ függvény van összhangban az $\mathbb{R}^3$-ra vonatkozó ismeretekkel, emiatt nem a $\sin(\alpha)$ függvényt használjuk.

Speciális komplex mátrixok

Valós	Komplex	Sajátérték
Szimmetrikus $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$	Hermitikus $\underline{\underline{A}} = \overline{\underline{\underline{A}}}^T$	valós
Anti/Ferdén szimmetrikus $\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T$	Ferdén Hermitikus $\underline{\underline{A}} = -\overline{\underline{\underline{A}}}^T$	komplex
Ortogonális $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T$	Unitér $\underline{\underline{A}}^{-1} = \overline{\underline{\underline{A}}}^T$	$\lvert\lambda\rvert = 1$

Tétel: Hermitikus mátrix sajátértékei valósak.

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda\underline{x}$ megszorzom balról $\overline{\underline{x}}^T$-tal

$\overline{\underline{x}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \overline{\underline{x}}^T\lambda\underline{x} = \overline{\underline{x}}^T\cdot\underline{x}\cdot\lambda = \lambda\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$ jobboldal valós, ezért ; $\lambda = \frac{\overline{\underline{x}}^T\underline{\underline{A}}}{\overline{\underline{x}}^T\underline{x}}$

Mivel a nevező valós, ezért most már csak azt kell belátni, hogy a számláló is valós. Tudjuk, hogy komplex szám akkor és csak akkor egyenlő a konjugáltjával, ha csak valós része van. Tudjuk, hogy a számláló is szintén komplex szám, hiszen ez a skaláris szorzat definíciója; ezért a számnak meg kell egyeznie a transzponáltjával.

$$\bar{x}^T(Ax) = [\bar{x}^T(Ax)]^T = (Ax)^T(\bar{x}^T)^T = x^T A^T \bar{x} = \overline{\bar{x}^T A x} \qquad \bar{A}^T = A$$

Mivel a szám megegyezik a konjugáltjával, ezért a λ is valós.

Tétel: A ferdén hermitikus mátrix sajátértékei mind komplexek vagy 0-k.

$A = -\bar{A}^T$ $\quad Ax = \lambda x$ balról szorzom $\bar{x}^T$-tal

$\bar{A}^T = -A$ $\quad \bar{x}^T A x = \bar{x}^T \lambda x = \lambda(\bar{x}^T x)$ valós $\qquad \lambda = \dfrac{\bar{x}^T A x}{\bar{x}^T x}$

Bizonyítása:
Komplex szám akkor és csak akkor képzetes, ha egyenlő a konjugáltja (-1)-szeresével. Tehát be kell látni, hogy $\bar{x}^T A x$ képzetes.

$$\bar{x}^T(Ax) = [\bar{x}^T(Ax)]^T = (Ax)^T[\bar{x}^T]^T = x^T A^T \bar{x} = x^T(-\bar{A})\bar{x} = -\overline{\bar{x}^T(Ax)}$$

Tehát λ valóban képzetes, vagy 0.

Tétel: Unitér mátrix sajátértékeinek abszolútértéke 1.

Bizonyítása:

$$\left.\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ \overline{(Ax)}^T &= \overline{(\lambda x)}^T \end{aligned}\right\} \text{összeszorozva ezeket}$$

$$\overline{(Ax)}^T(Ax) = \bar{\lambda}\bar{x}^T(\lambda x) = \lambda^2 \bar{x}^T x$$

$$\lambda^2 \bar{x}^T x = \bar{x}^T x \qquad \lambda^2 = 1$$

$$\bar{x}^T\bar{A}^T(Ax) = \bar{x}^T(\bar{A}^T A)x = \bar{x}^T E x = \bar{x}^T x$$

Tehát a sajátérték abszolútértéke valóban 1.

Ortogonális és unitér transzformációk megtartják a skalárszorzatot

Tétel: Az $\langle u, v\rangle = \bar{v}^T u$ skaláris szorzatot az unitér transzformációk nem változtatják meg.

Bizonyítása: $A^{-1} = \bar{A}^T$

$u = Ax$
$v = Ay$

$$\langle u, v\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \overline{Ay}^T \cdot Ax = [\bar{A}\cdot\bar{y}]^T Ax = \bar{y}^T \bar{A}^T A x = \bar{y}^T E x = \bar{y}^T x = \langle x, y\rangle$$

Egyéb tételek és definíciók kimondása

Komplex számok exponenciális alakja $re^{i\varphi}$

Szorzás: $z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i\varphi})(r_2 e^{i\psi}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi+\psi)}$

Hatványozás: $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

Gyökvonás: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\left(\frac{\varphi+k2\pi}{n}\right)}$ ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$e^{i\alpha}$ megadja az egységnyi komplex számokat

Tétel: Az n-ed fokú, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok halmazán. Multiplicitással számolva a gyöktényezők pontosan n db komplex gyöke van.

Tétel: Ha z komplex szám gyöke a polinomnak, akkor a konjugáltja is gyöke.

Komplex vektorok és axiómái $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$

1, $\forall z_1, z_2$ esetén $z_1 + z_2 = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ahol $z_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ és $z_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

2, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$ esetén $\lambda z_1 = \lambda\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$

Összeadás kommutatív csoport

a, asszociatív
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^n$ esetén $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

b, kommutatív
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$ esetén $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

c, Van egysége (nullelem)
$\exists\, 0 \in \mathbb{C}^n$ melyre $\forall z \in \mathbb{C}$ esetén $0 + z = z$

d, Van ellentettje (inverze)
$\forall z \in \mathbb{C}^n$-hez $\exists\, -z \in \mathbb{C}^n$ esetén $-z + z = 0$ $\quad -z = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Skalárral való szorzás

$\forall z \in \mathbb{C}^n$ esetén $1 \cdot z = z$, $1 \in \mathbb{C}$

a, $\forall z \in \mathbb{C}^n$ ...

b, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\forall \underline{z}_1$ esetén $(\lambda\mu)\underline{z}_1 = \lambda(\mu\underline{z}_1)$

c, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ és $\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in \mathbb{C}^n$ esetén $\lambda(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \lambda\underline{z}_1 + \lambda\underline{z}_2$

d, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ és $\forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n$ esetén $(\lambda + \mu)\underline{z} = \lambda\underline{z} + \mu\underline{z}$

Definíció: Bázis

$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n \in \mathbb{C}^n$ bázis, ha $\forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n$ vektor egyértelműen előáll a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. [Tehát a vektorok lineárisan függetlenek.]

$$\underline{z} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{b}_k$$

Definíció: Komplex mátrix $\quad \mathbb{C}^n \xrightarrow{\underline{A}} \mathbb{C}^n \quad \underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$

$\underline{A}$ mátrix elemei komplex számok: $a_{ij} \in \mathbb{C}$

Definíció: Komplex mátrix sajátvektora

$\underline{z} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{z} \neq \underline{0}$ vektor sajátvektora az $\underline{A}$ mátrixnak, ha $\exists$ olyan $\lambda \in \mathbb{C}$, hogy $\underline{A}\,\underline{z} = \lambda\underline{z}$.

Definíció: Valós euklideszi tér

Az euklideszi terek skalárszorzattal felruházott vektorterek. Valós esetben a vektorteret a valós számtest felett értelmezzük, ezért a vektorok koordinátái csak valós számok.

Definíció: Valós skalárszorzat

Az $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek függvényértékét $\Delta(\underline{x},\underline{y}) = \langle\underline{x},\underline{y}\rangle$-nal jelöljük, skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1, $\forall \underline{x} \in V$ esetén $\langle\underline{x},\underline{x}\rangle \geq 0$, és $\langle\underline{x},\underline{x}\rangle = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$ — pozitív definit

2, $\forall \underline{x},\underline{y} \in V$ esetén $\langle\underline{x},\underline{y}\rangle = \langle\underline{y},\underline{x}\rangle$ — szimmetrikus

3, $\forall \underline{x},\underline{y},\underline{z} \in V$ esetén $\langle\underline{x}+\underline{y},\underline{z}\rangle = \langle\underline{x},\underline{z}\rangle + \langle\underline{y},\underline{z}\rangle$ — lineáris

4, $\forall \underline{x},\underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle\lambda\underline{x},\underline{y}\rangle = \lambda\langle\underline{x},\underline{y}\rangle$ — homogenitás

Tétel: Minden véges dimenziós vektortérben megadható a skalárszorzat.

$$\langle\underline{x},\underline{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

Definíció: Valós normált tér

A normált terek normával felruházott vektorterek. Valós esetben a vektorteret a valós számtest felett értelmezzük, ezért a vektorok koordinátái csak valós számok.

Definíció: Valós norma

A V vektorteret normáltnak nevezzük, ha van olyan $n: V \to \mathbb{R}_0^+$ függvény, az ún. normának nevezett norma, amelyre a következők teljesülnek:

1, $\forall \underline{x} \in V$ esetén $\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$ — pozitív definit

2, $\forall \underline{x} \in V$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|\alpha\underline{x}\| = |\alpha|\,\|\underline{x}\|$ — homogenitás

3, $\forall \underline{x},\underline{y} \in V$ esetén $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ — háromszög egyenlőtlenség

A norma az abszolútérték függvény általánosítása.

Tétel: Minden skalárszorzatos tér normált tér.

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle\underline{x},\underline{x}\rangle}$$

Definíció: Valós metrikus tér

A metrikus terek metrikával felruházott vektorterek. Valós esetben a vektorteret a valós számtest felett értelmezzük, ezért a vektorok koordinátái csak valós számok.

Definíció: Valós metrika

A H halmazt metrikus térnek nevezzük, ha van olyan, metrikának nevezett $d: H\times H \to \mathbb{R}_0^+$ függvény, amelyre a következők teljesülnek:

1, $\forall \underline{x},\underline{y} \in H$ esetén $d(\underline{x},\underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$ — pozitív definit

2, $\forall \underline{x},\underline{y} \in H$ esetén $d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x})$ — szimmetrikus

3, $\forall \underline{x},\underline{y},\underline{z} \in H$ esetén $d(\underline{x},\underline{y}) \leq d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{y},\underline{z})$ — háromszög egyenlőtlenség

A metrika a háromdimenziós tér távolságfogalmának egy általánosítása.

Tétel: Minden normált tér metrikus tér.

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{y}-\underline{x}\|$$

Tétel: Minden euklideszi tér metrikus tér.

$$d(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{\langle\underline{y}-\underline{x},\underline{y}-\underline{x}\rangle}$$

Tétel: Minden euklideszi térben (altérben) van ortogonális bázis.

Gram–Schmidt ortogonalizáció

Definíció: Ortonormált egy rendszer, ha a vektorok páronként ortogonálisak, és a hosszuk egységnyi (1).

Következmény: Minden euklideszi térnek van ortonormált bázisa.
Gram-Schmidt ortogonalizáció után normálni kell a vektorokat.

Definíció: Komplex euklideszi tér
Skaláris szorzatos vektortér $\mathbb{C}$ (komplex) számtest felett. Ez azt jelenti, hogy a vektorok koordinátái képzetes számok. [Magában foglalja a valós számokat].

Definíció: Komplex skaláris szorzat
A $V \times V \to \mathbb{C}$ függvényt skaláris szorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1, $\forall \underline{z} \in V$ esetén $\langle \underline{z}, \underline{z} \rangle \geq 0$ és $\langle \underline{z}, \underline{z} \rangle = 0$, ha $\underline{z} = \underline{0}$ — pozitív definit
2, $\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in V$ esetén $\langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle = \overline{\langle \underline{z}_2, \underline{z}_1 \rangle}$ — szimmetrikus
3, $\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in V$ esetén $\langle \underline{z}_1, \lambda \underline{z}_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle$
$\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in V$ esetén $\langle \lambda \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle = \lambda \langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle$
} elegendő 1 megmutatása, az egyik a másikból következik — homogenitás
4, $\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3 \in V$ esetén $\langle \underline{z}_1 + \underline{z}_2, \underline{z}_3 \rangle = \langle \underline{z}_1, \underline{z}_3 \rangle + \langle \underline{z}_2, \underline{z}_3 \rangle$
$\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3 \in V$ esetén $\langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 + \underline{z}_3 \rangle = \langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle + \langle \underline{z}_1, \underline{z}_3 \rangle$
} elegendő 1 megmutatása, egymásból következnek
linearitás

Definíció: Komplex norma $V \to \mathbb{R}_0^+$
$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$

Definíció: Komplex metrika $V \times V \to \mathbb{R}_0^+$
$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{y} - \underline{x}, \underline{y} - \underline{x} \rangle}$

Definíció: Vektorok ortogonalitása
$\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in \mathbb{C}^n$ ortogonális (merőlegesek egymásra), ha $\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle = 0$.

Definíció: Leképezés és transzformáció
Leképezés: $V^n \to V^k$, $k \times n$ mátrix
Transzformáció: $V^n \to V^n$, $n \times n$ mátrix

Speciális mátrixok

Valós		Komplex		Sajátérték
Szimmetrikus	$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$	Hermitikus	$\underline{\underline{A}} = \overline{\underline{\underline{A}}}^T$	valós
Anti/Ferde szimmetrikus	$\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T$	Ferde Hermitikus	$\underline{\underline{A}} = -\overline{\underline{\underline{A}}}^T$	komplex
Ortogonális	$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T$	Unitér	$\underline{\underline{A}}^{-1} = \overline{\underline{\underline{A}}}^T$	$\lvert\lambda\rvert = 1$