# Vektoralgebra –előadás fóliák

Elméleti anyag –tételek, definíciók, bizonyítás vázlatok

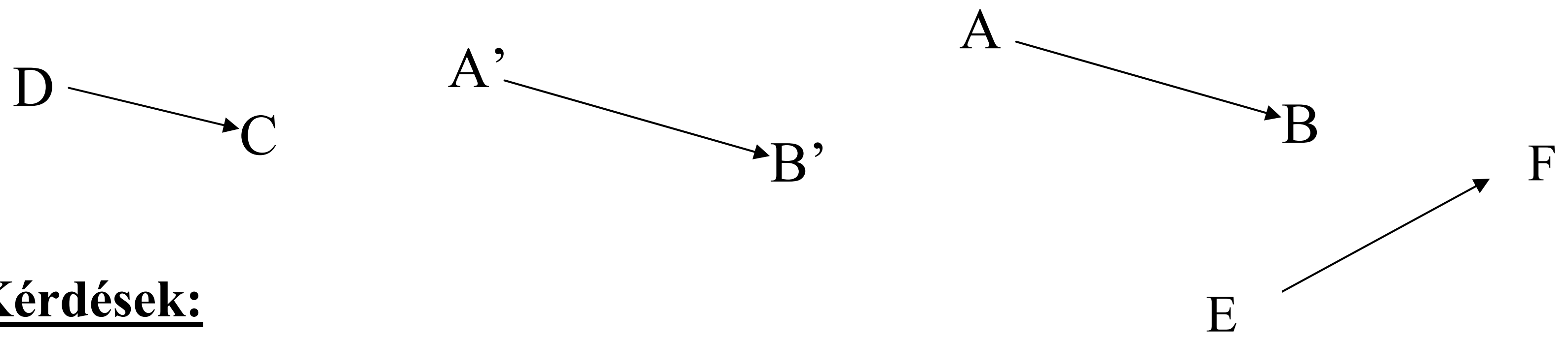
©Bércesné Novák Ágnes

## Források, ajánlott irodalom:

Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1971, 1989,..
Scharnitzki Viktor: Vektoralgebra és lineáris algebra, Tankönyvkiadó, 1989.
Bércesné Novák Ágnes-Hosszú Ferenc-Pentelényi Pál-Rudas Imre: Matematika, BDMF, 1994.

# Vektoralgebra

**1. Vektor:** irányított szakasz (síkban, térben)




**Kérdések:**

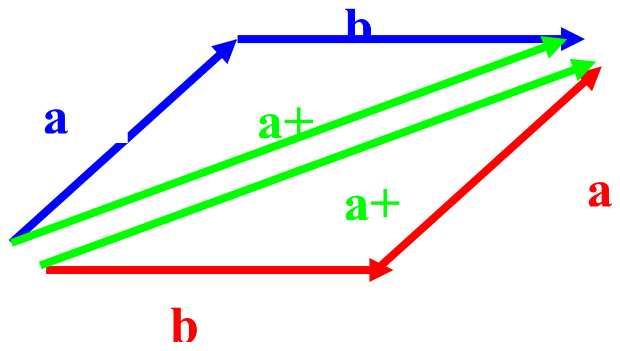
- Jelölések
- Egyenlőség→szabad vektorok
- Párhuzamosság
- Hossz (abszolút érték)
- Egységvektor
- Nullvektor – iránya

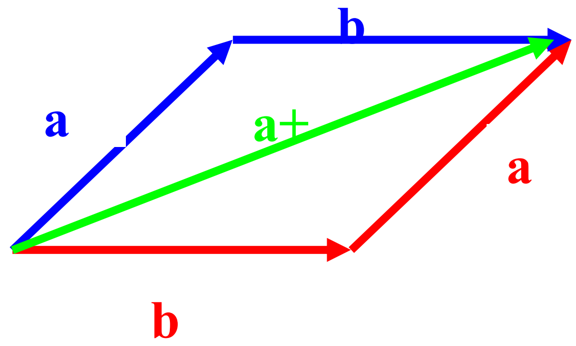
# Műveletek vektorokkal

**Összeadás:**

- nyílfolyam-módszer: eltolás, a második vektor kezdőpontját az első végpontjába, és így tovább…

**Összegvektor:** az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutató vektor.
(Két vektor esetén paralelogramma módszernek)

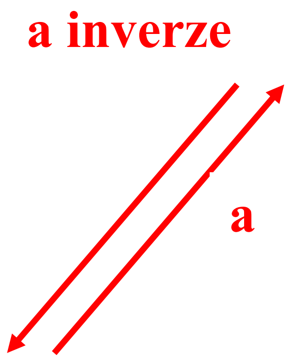



**Összeadás tulajdonságai:**

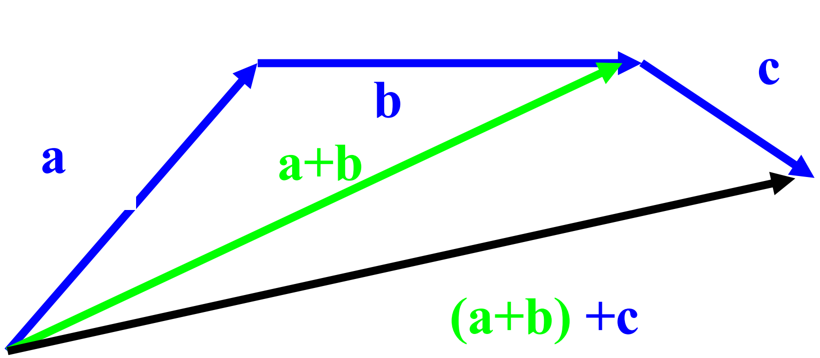
(0.Zárt: összeadás eredménye is vektor )

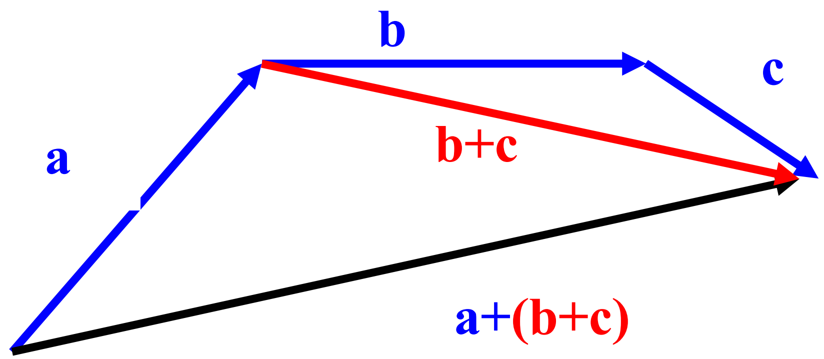
1. Kommutatív (ld. ábra): **a**+**b**=**b**+**a**
2. Létezik egységelem: **a**+**0**=**a**
3. Létezik inverz (ellentett) elem: **a**+(**a inverze**) =**0**

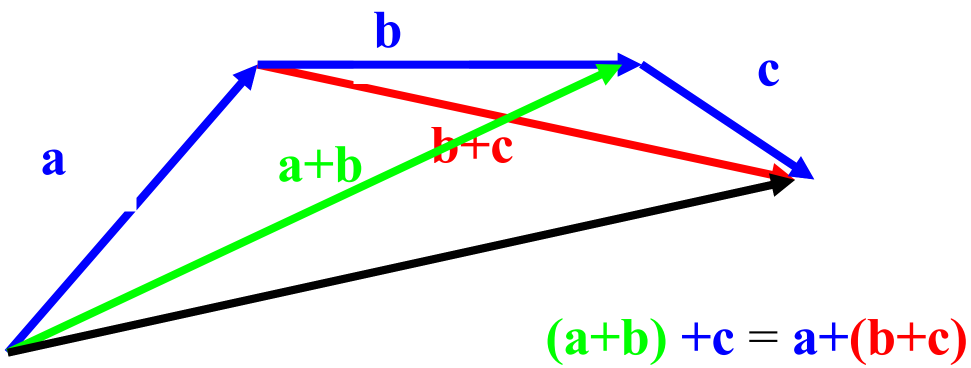


# Összeadás tulajdonságai (folytatás):

4. Asszociatív: **(a+b) +c** = **a+(b+c)**



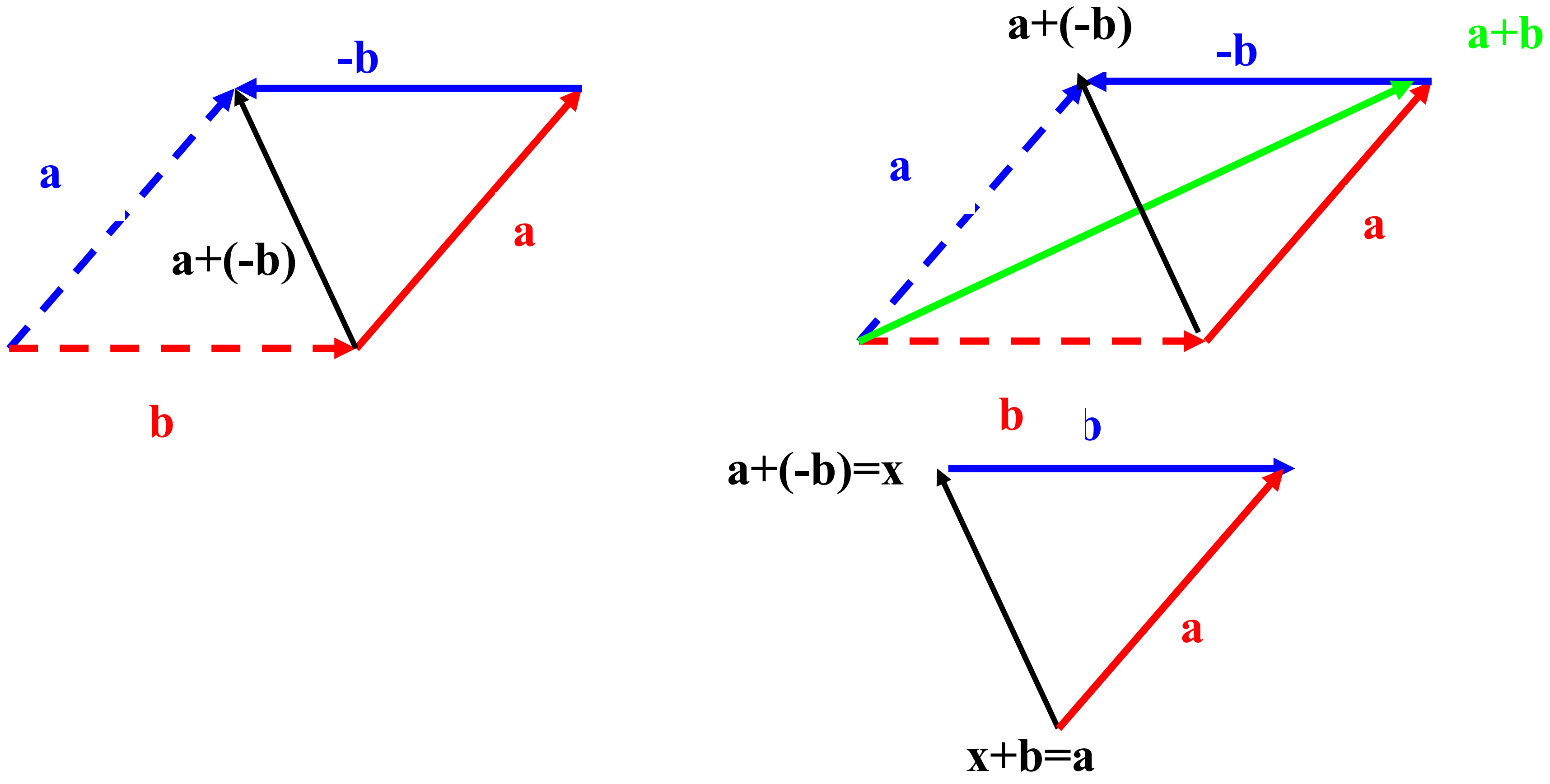



## Kivonás értelmezése: inverz elem hozzáadása, inverz elem jelölése

**x+b=a vektoregyenletet x-re megoldva:**

**x+b+(b inverze)=a+(b inverze)**

**x+0= a+(b inverze) Jelölés (számokkal összhangban): a+(-b)= a – b=x**



## Összeadás tulajdonságai (összefoglalás):

(- zárt)

- asszociatív
- létezik egység
- létezik inverz

**CSOPORT**

(- zárt)

- asszociatív
- létezik egység
- létezik inverz

- kommutatív

**KOMMUTATíV**

**CSOPORT**

**A kommutatív csoportot Abel csoportnak is hívjuk.**

**Feladat:** **Mondjunk példát más halmazra, melynek elemei adott műveletre nézve csoportot alkotnak**

**<u>Szorzás</u>**

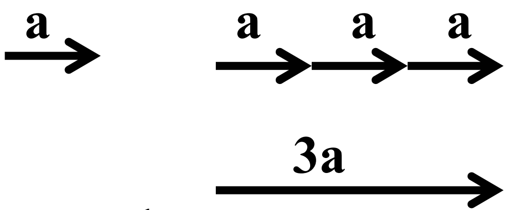
a.) Számot vektorral: számmal való szorzás ( $\lambda\mathbf{a}$)

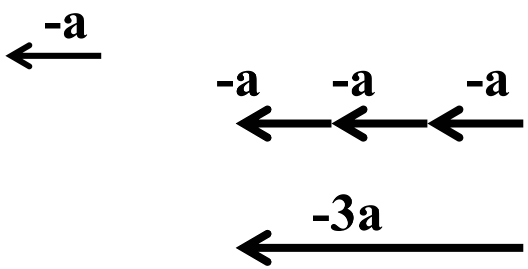
b.) Vektort vektorral-eredménye szám, neve: skalárszorzat, angolul: dot product, ($\mathbf{ab}$)

c.) Vektort vektorral-eredménye vektor,
neve: vektoriális (vagy kereszt)szorzat, angolul cross product
( $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$)

**<u>Megjegyzés:</u>** A fenti szorzások közül algebrai értelemben csak a c.) nevezhető műveletnek. (Miért?)

## Számmal való szorzás / Vektor szorzása számmal:




**Def.:** $\lambda \in \mathbf{R}$, **a** vektor

a

λ·**a** ↗ $\lambda \geq 0$, **a**-val egyirányú, hossza: $|\lambda\mathbf{a}|=\lambda|\mathbf{a}|$ (ismételt összeadás)

↘ $\lambda < 0$, **a**-val ellentétes irányú, hossza: $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda|\cdot|\mathbf{a}|$ (a inverzének, ellentettjének ismételt összeadása)

**Lemma:** $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbf{R}\ \mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$

**Biz.:** $\Rightarrow$Tegyük fel hogy (Tfh.) $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} = |\mathbf{a}|\, e_a$ és $\mathbf{b}= |\mathbf{b}|\, e_a$

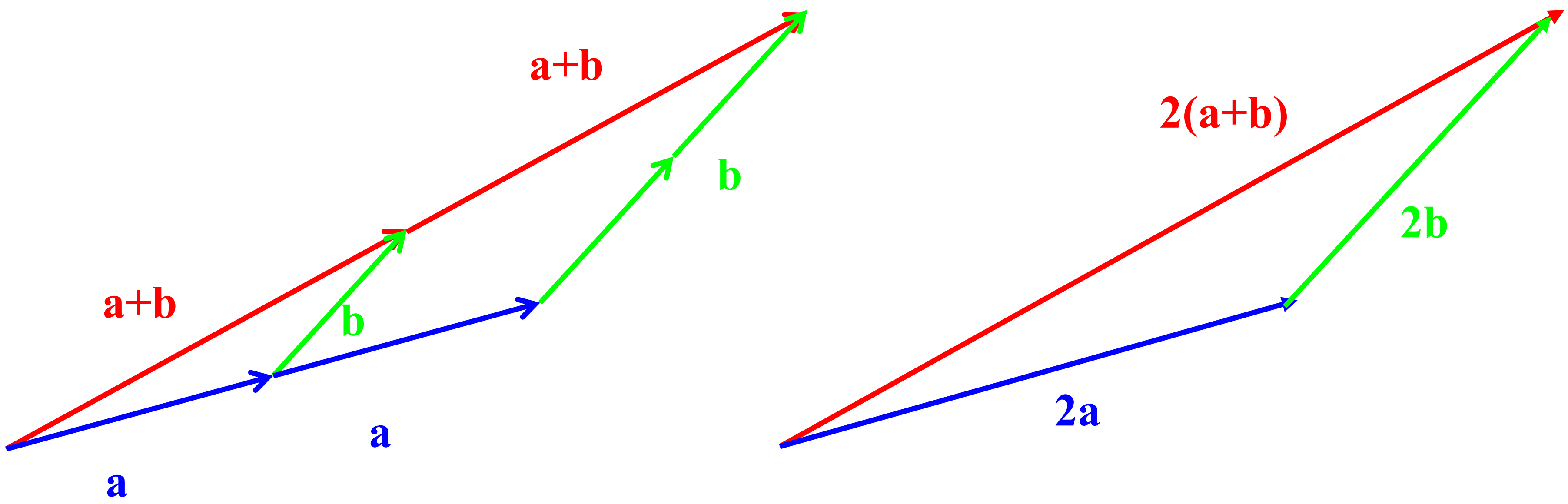
Ezekből: $\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\,(1/|\mathbf{b}|\,(|\mathbf{b}|\, e_a))= |\mathbf{a}|\,(1/|\mathbf{b}|)\mathbf{b}$, $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$, $\lambda= |\mathbf{a}|\,/|\mathbf{b}|$

$\Leftarrow$Tfh. $\exists\, \lambda \in \mathbf{R}\ \mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$, akkor a párhuzamosság a definícióból közvetlenül adódik.

## Tulajdonságok:

1. $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{a}\lambda$
2. $\mu(\lambda\mathbf{a})=(\mu\lambda)\mathbf{a}$ (definícióból közvetlenül adódik)
3. $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\underline{\mathbf{a}}+\mu a$ (definícióból közvetlenül adódik)
4. $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ (ld. alábbi ábra)

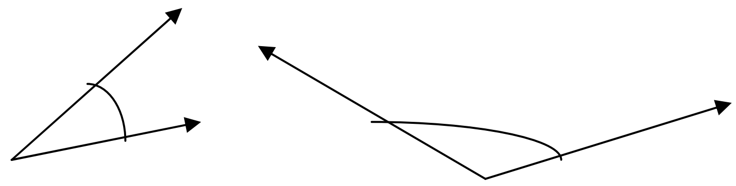
**Ábra:** 4. $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$, **ábra:** $\lambda=2$ eset



## Skalárszorzat (belső szorzat)

vektor·vektor=szám (DOT product, INNER product)

**Def.:** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\alpha$, ahol $\alpha$ a vektorok által bezárt szög, $0\leq\alpha\leq180°$. **Két vektor által bezárt szög (a kisebb!):**



**Speciális esetek:**

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{a})=|\mathbf{a}|^2$,

Következmény: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}>\mathbf{0}$, **ha** $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, és $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a}=\mathbf{0}$. Ezt a tulajdonságot úgy mondjuk, hogy a skalárszorzat **pozitív definit.**

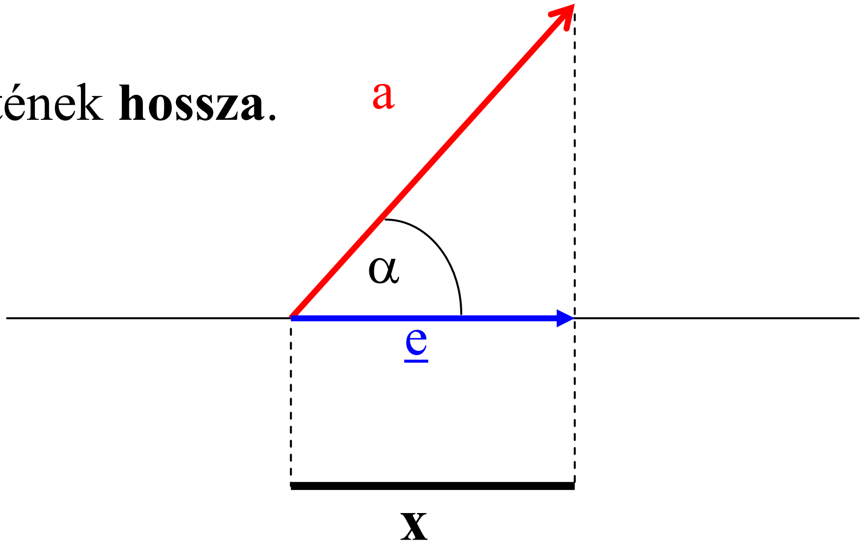
Ha **a** egységvektor, akkor $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{1}$. Ha **a** és **b** egységvektorok, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos\alpha$.

**Ezek koordináta rendszertől független eredmények!!**

## A skalárszorzat geometriai jelentése:

**e** – egységvektor **a**·**e**= | **a** | · | **e** | ·cosα= | a | · cosα=**x**

**x**: az **a** vektor **e**-re vett előjeles merőleges vetületének **hossza**.




$$\cos\alpha = \frac{x}{|a|} \Rightarrow \mathbf{x} = |\mathbf{a}|\cos\alpha$$

## Megjegyzés:

A geometriai jelentés a definícó egyszerű **következménye**.

## A skalárszorzat tulajdonságai:

1 . **Kommutatív:** $a \cdot b = b \cdot a$

2. **NEM** asszociatív: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, ugyanis:
Bal oldal=szám · **c** =(**c**-vel párhuzamos vektor)
Jobb oldal= **a** · szám (**a**-val párhuzamos vektor)

3. $\lambda\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$
**Biz.:** Nyilvánvaló, ha $\lambda=0$, akkor az azonosság fennáll. Továbbá a kommutativitás miatt elegendő a $\lambda\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ azonosság bizonyítása.

BALOLDAL: $\lambda\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \lambda\, (|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha)$
JOBBOLDAL: $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (|\lambda\, \mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha) = \lambda\, (|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha)$, ha $\lambda > 0$.

Ha $\lambda<0$, akkor $\lambda= (-1)\, |\lambda|$, emmiatt elegendő a $\lambda= (-1)$ eset tárgyalása:
BALOLDAL: $(-1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (-1)\, |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha$
JOBBOLDAL: $(-1\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |(-1)\, \mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(180-\alpha) = (-1)\, |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha$

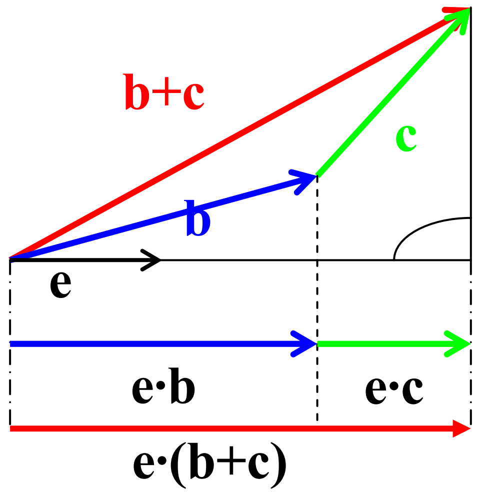
4. **Disztributív:** $\mathbf{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$

**Biz.:**

$\mathbf{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$

$\mathbf{e\cdot(b+c)=e\cdot b+e\cdot c}\ /\cdot\lambda \qquad \mathbf{e}\,||\,\mathbf{a}\Rightarrow\lambda\cdot\mathbf{e}=\mathbf{a}$

$\lambda\cdot\mathbf{e(b+c)=(\lambda e)\cdot b+(\lambda e)\cdot c}$



**<u>Tétel:</u>** **a**·**b**=0 ⇔ **a**⊥b (milyen koordináta rendszerben?)

**<u>Biz.:</u>** **Ha a·b**=0 **akkor a⊥b:**

Ha $|\underline{a}|\neq 0$ és $|\underline{b}|\neq 0$, akkor $|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos(a,b)=0 \Rightarrow \cos(a,b)=0 \Rightarrow (a,b)\angle=90°$

Ha valamelyik vektor nullvektor, annak iránya tetszőleges, így a merőlegesség teljesül.

**Ha a⊥b akkor a·b**=0

$|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos 90°=0 \Rightarrow \cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=0 \Rightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b})_1\angle=90°$ vagy $(a,b)_2\angle=270°$, de mivel a megállapodás szerint a kisebb szöget tekintjük, ezért a két vektor 90°-os szöget zár be

Ha a két vektor merőlegessége oly módon biztosított, hogy legalább egyikük nullvektor, akkor a **0** def. alapján $|\mathbf{a}|=0$ vagy $|\mathbf{b}|=0$, tehát **a·b**=0

## A skalárszorzat általános tulajdonságai

A skalárszorzat a V x V halmazon (ahol V vektortér) értelmezett, kétváltozós valós **függvény**, (nem művelet!) amely az alábbi, 1.-4. tulajdonságokkal rendelkezik. Minden olyan függvény, amely ennek eleget tesz, **skalárszorzat**-nak nevezhető.

**Skalárszorzat:** $V \times V \to R$

A skalárszorzat egy másik, szokásos jelölése: s(**x**, **y**)

1. $s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, $s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ - szám $\leftrightarrow$ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ **–vektor** pozitív definit tulajdonság
2. $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ kommutatív tulajdonság
3. $s(\lambda\, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ lineáris
4. $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = s(\mathbf{x},\mathbf{y}) + s(\mathbf{x},\mathbf{z})$ lineáris

A skalárszorzat egy másik, szokásos jelölése: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (pozitív definit)
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (kommutatív)
3. $\langle \lambda\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (lineáris )
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x},\mathbf{z} \rangle$ (lineáris )

A 3.-4. linearitás a következőképpen is megfogalmazható: $<\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z}>=\lambda<\mathbf{x},\mathbf{y}>+\mu<\mathbf{x},\mathbf{z}>$

A vektoralgebrában a skalárszorzatot $<\mathbf{x}, \mathbf{y}>:= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos(\mathbf{x},\mathbf{y})$ függvénnyel adtuk meg, és bizonyítottuk a fenti tulajdonságokat. Ezen definíció alapján bebizonyítható a következő tétel (ld. e jegyzet 28. oldalán):

Az **i, j, k** ortonormált bázisra vonatkoztatott koordinátákkal (a 3 dimenziós térben) a skalárszorzat:

$<\mathbf{x}, \mathbf{y}>:=|\mathbf{x}||y|\cos(x,y)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

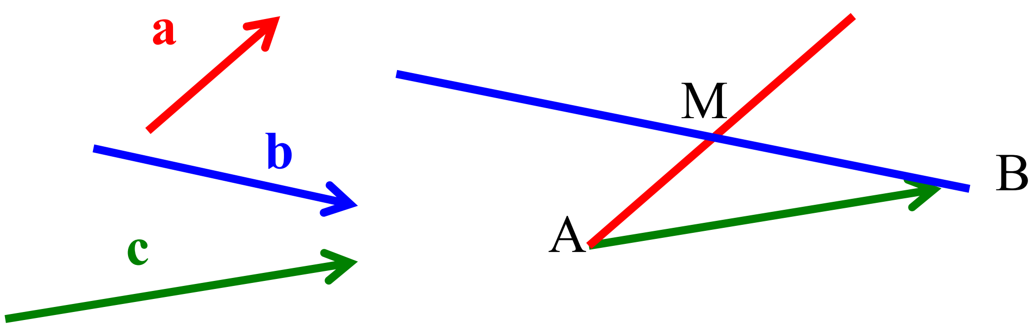
A $<\underline{x}, \underline{y}>:= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ is lehetett volna a definíciója a skalárszorzatnak, azonban így az eredeti fizikai jelentése elsikkadt volna. Magasabb dimenziós vektorterekben azonban a definíció lehetősége éppen fordított, szög geometriai értelmezhetetlensége miatt éppen a skalárszorzat segítségével lehet a szög fogalmát kialakítani.

**Tétel (Vektorok felbontása síkban):** Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor (**a** és **b**), akkor minden más **c** síkbeli vektor felbontható **a** és **b** vektorokkal párhuzamos összetevőkre:

$$\underline{\mathbf{c}}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}, \text{ ahol } \alpha,\beta\in\mathbf{R}$$

A felbontás egyértelmű.

**<u>Biz.:</u> felbonthatóság:** A c vektorkezdőpontján át húzzunk **a**-val, végpontján át **b**-vel (vagy fordíva) párhuzamos egyeneseket. Mivel a és b nem párhuzamosak, ezért M-ben metszik egymást.




c

mivel $\overrightarrow{AM} \| \underline{a} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathrm{R} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \underline{a}$

mivel $\overrightarrow{MB} \| \underline{b} \Rightarrow \exists \beta \in \mathrm{R} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \beta \underline{b}$, és **c**$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \alpha$**a**$+\beta$**b**

**<u>Tétel (Vektorok felbontása síkban):</u>** Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor (**a** és **b**), akkor minden más **c** síkbeli vektor felbontható **a** és **b** vektorokkal párhuzamos összetevőkre: $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, ahol $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. A felbontás egyértelmű.

**<u>Biz.:</u> Egyértelműség:**

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{c}&=\alpha_1\mathbf{a}+\beta_1\mathbf{b}\\ \mathbf{c}&=\alpha_2\mathbf{a}+\beta_2\mathbf{b}\end{aligned}\right\}$$

$$0=\underbrace{(\alpha_2-\alpha_1)}_{0}\mathbf{a}+\underbrace{(\beta_1-\beta_2)}_{0}\mathbf{b}$$

Mivel **a** nem párhuzamos **b**-vel, így számszorosaik sem párhuzamosak, ezért számszoroaik összege nem lehet nulla a jobb oldalon. Tehát a és b együtthatói egyenlők nullával: $\alpha_1=\alpha_2$ és $\beta_1=\beta_2$

**<u>Definíció:</u>**
**a** és **b lineáris kombinációja**: **c**=αa+βb

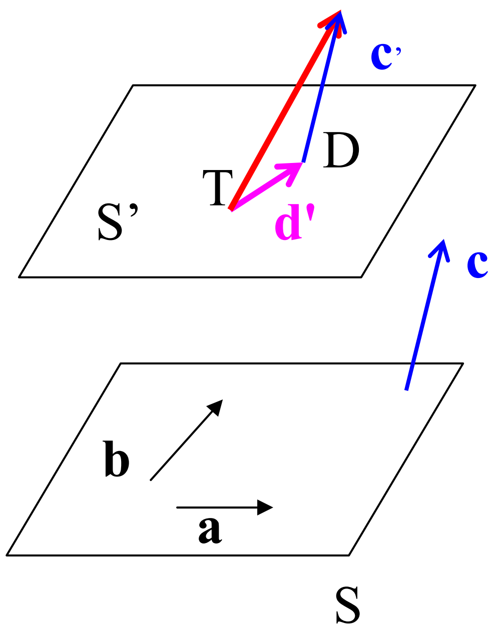
**{ a,b**}, ha **a** nem párhuzamos **b**-vel, akkor **függetlenek**. Maximális számú független vektor **bázis**t alkot. Később részletesen tárgyaljuk..

α,β az { **<u>a</u>**,**<u>b</u>**}bázisra vonatkoztatott **koordináták.**

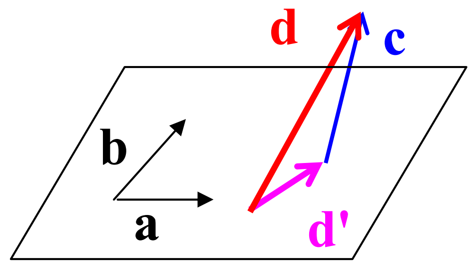
## Tétel (Vektorok felbontása térben):

Ha adott a térben három, nem egysíkú, páronként nem párhuzamos vektor, **a, b, c**, akkor bármely **d** térbeli vektorhoz van olyan $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, amelyekre igaz, hogy $\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$.
Ez a felbontás egyértelmű.

**Biz.:**



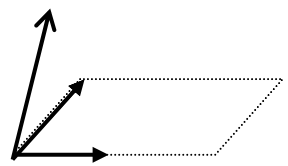

1. **d** talppontján, T-n át az S síkkal || S' síkot rajzolunk.
2. **c** nem párhuzamos **a**-val és **b**-vel, tehát a **d** végpontjában **c**-vel húzott || egyenes D-ben döfi S'-t.
3. D-ből T-be mutató vektor legyen **d'**.




$\mathbf{d}=\mathbf{d}'+\mathbf{c}'=(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})+\gamma\mathbf{c}$,
hiszen **d**' egy síkban van **a**-val és **b**-vel, így az előző tétel miatt felírható azok lineáris kombinációjaként.

**<u>Bázis:</u>** A térben bármely 3, nem egysíkú, páronként nem párhuzamos vektor független. Maximális számú független vektor **bázis**t alkot. Később részletesen tárgyaljuk.

Például:



Ha **a, b, c,** a tér egy bázisa, az előző tétel értelmében bármely **d** vektorra:

$\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$.

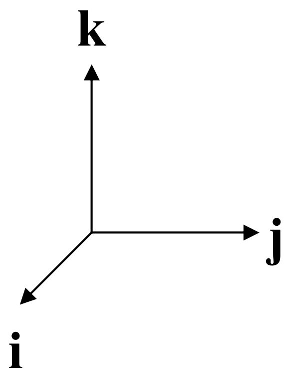
A jobb oldalon álló kifejezés az **a, b, c** vektorok egy **lineáris kombinációja**.
Az $\alpha$, $\beta$,$\gamma$ számokat a **d** vektor **a, b, c bázisra vonatkoztatott koordinátáinak** nevezzük.
Ha a bázisvektorok sorrendjét rögzítjük, a lineáris kombinációt rövidíthetjük a következő számhármassal: $[\alpha, \beta,\gamma]$.

## Speciális bázisok:

**Ortogonális:** a vektorok páronként merőlegesek

**Normált:** a vektorok egységnyi hosszúak

**Ortonormált:** ortogonális és normált, szokásos jelölése 3 dimenzióban: **i, j, k** (Descartes), jobbrendszer:



# Vektorműveletek, ha a vektorok koordinátáikkal adottak

**Összeadás:** megfelelő koordinátákat összeadjuk

**Biz.:**

$X = \alpha b1 + \beta b2 + \gamma b3$

$Y = \delta b1 + \varepsilon b2 + \phi b3$

$$x+y = (\alpha b1 + \beta b2 + \gamma b3)+(\delta b1 + \varepsilon b2 + \phi b3) =$$
$$= (\alpha b1 + \delta b1) + (\beta b2 + \varepsilon b2) + (\gamma b3 + \phi b3) =$$
$$(\alpha + \delta) b1 + (\beta + \varepsilon) b2 + (\gamma + \phi) b3 =$$

$$x+y = (\alpha + \delta) b1 + (\beta + \varepsilon) b2 + (\gamma + \phi) b3$$

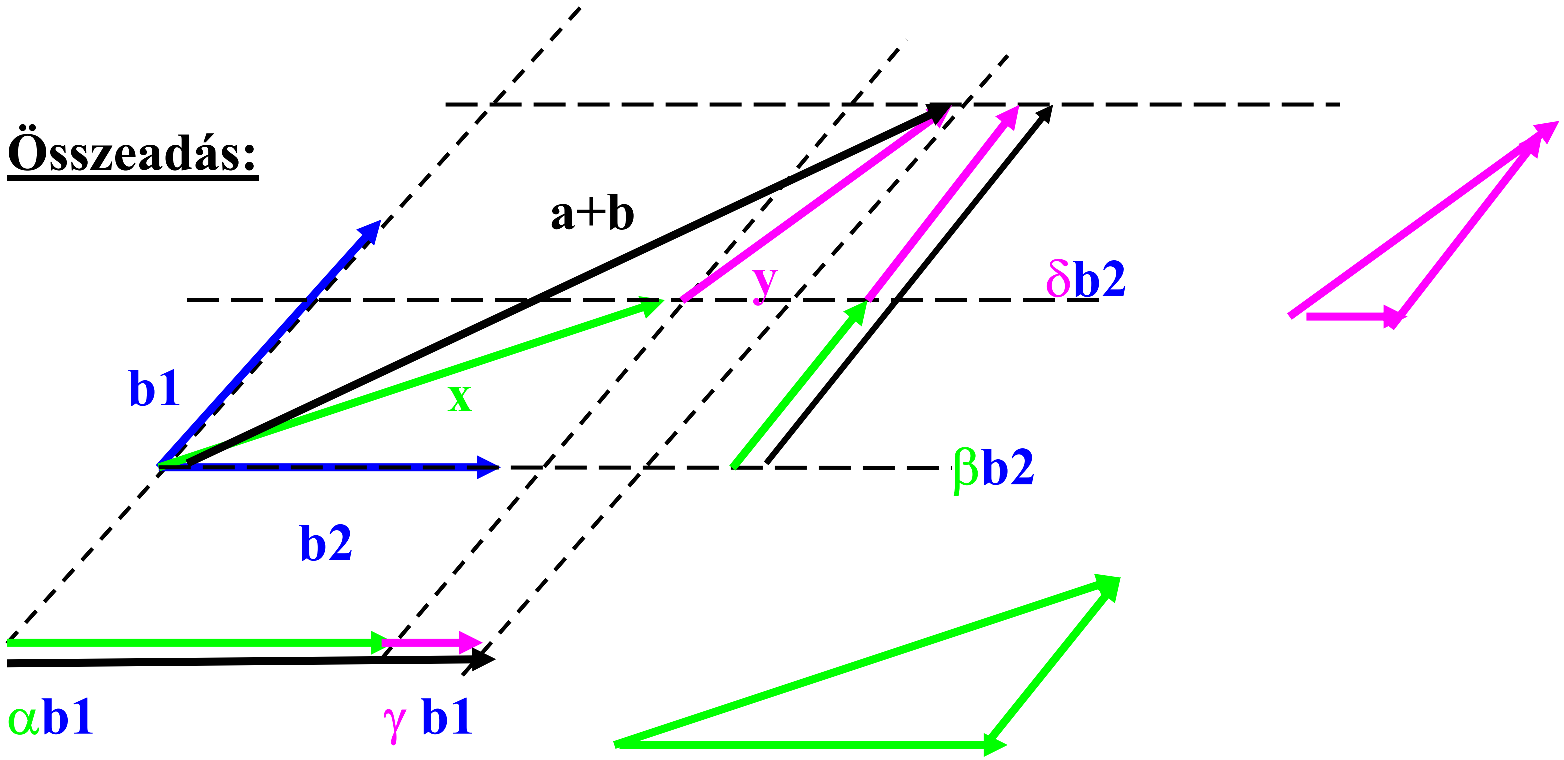
**VEKTOR ÖSSZEADÁS + SZÁMOK ÖSSZADÁSA+**

**Számmal való szorzás: koordinátánként szorozzuk a számmal**
**Biz.: HF**

**Kivonás: Megfelelő koordinátákat kivonjuk**
**Biz.: HF**

# Vektorműveletek, ha a vektorok koordinátáikkal adottak

## Összeadás:




X=αb1+βb2

Y=γ b1+δb2

x+y=αb1+βb2+γ b1+δb2=(αb1+γ b1) + (βb2+δb2)

x+y=(α+γ )b1+ (β+δ)b2

**VEKTOROK ÖSSZEADÁSA: koordinátánként**

**Milyen koordinátarendszerben igaz e szabály?**

## Műveletek koordinátás alakban, ORTONORMÁLT BÁZISBAN

**A koordináták szemléltetésére animáció:**

**http://www.usd.edu/~jflores/MultiCalc02/WebBook/Chapter_13/Graphics/Chapter13_1/DemoHtml13_1/13.1coorsys.htm**

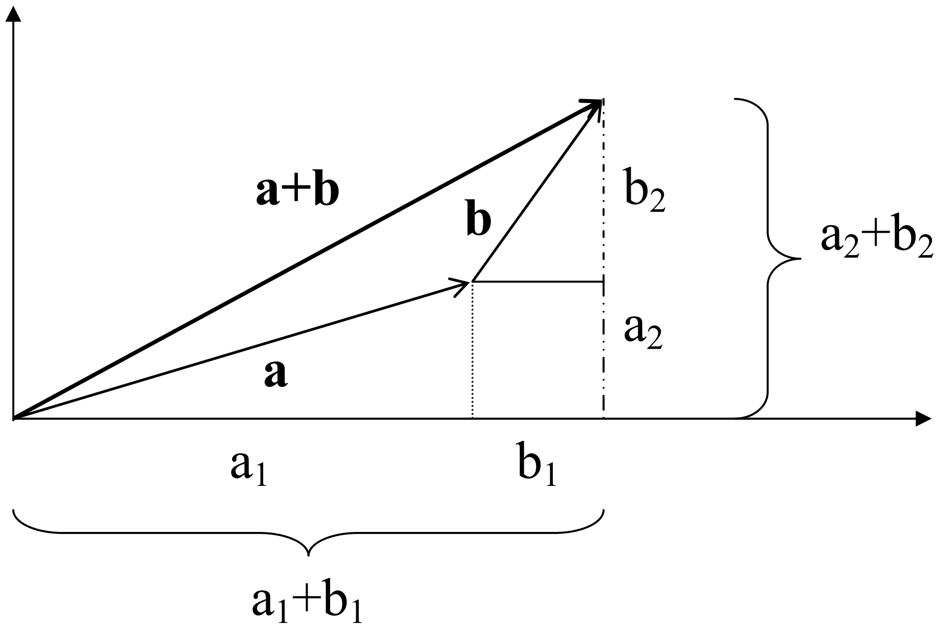
## Műveletek koordinátás alakban, ORTONORMÁLT BÁZISBAN

Uu., mint általános bázisban:

$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k} \Leftrightarrow x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ $b=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$

$\lambda\mathbf{a}=\lambda(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})=(\lambda a_1)\mathbf{i}+(\lambda a_2)\mathbf{j}+(\lambda a_3)\mathbf{k}$

$a+b=a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+b_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}+b_3\mathbf{k}=(a_1+b_1)\mathbf{i}+(a_2+b_2)\mathbf{j}+(a_3+b_3)\mathbf{k}$



# Skalárszorzat kiszámítása ORTONORMÁLT BÁZISban

**Animáció:**

http://www.falstad.com/dotproduct/
**(**mind a piros, mind a kék vektort a végénél fogva lehet mozgatni, jobb felső sarokban leolvasható minden számadat. A piros vektor vetülete látható a kék vektoron.)

http://magnus.poly.edu/~mleung/java/vectors/dproduct/dproduct.html

# Skalárszorzat kiszámítása ORTONORMÁLT BÁZISban

A skalárszorzat értéke függ a bázistól.

**Tétel:** Legyenek **i, j, k** páronként merőleges egységvektorok, amelyek jobbrendszert alkotnak. (Descartes). A felbontási tétel szerint ekkor:

$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$

$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i}$$

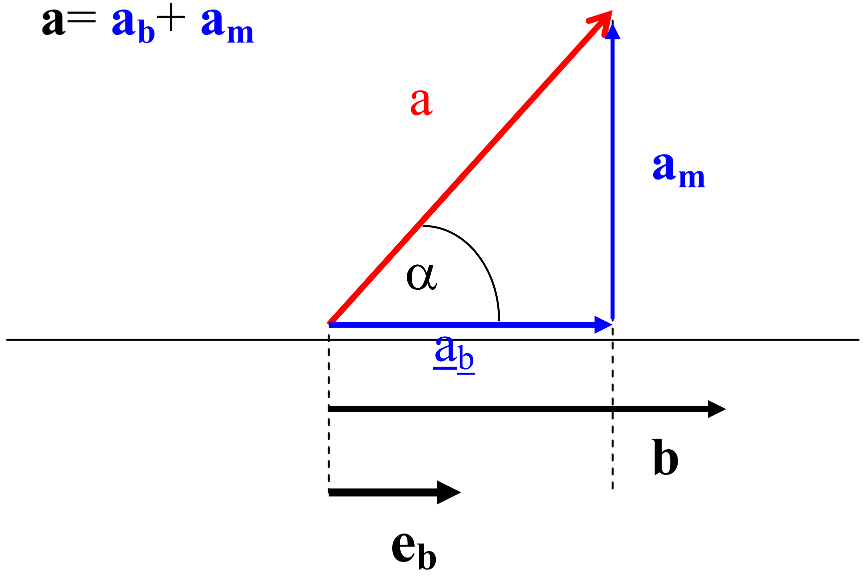
Alkalmazva a skalárszorzat disztributív tulajdonságát:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})=a_1\mathbf{i}\cdot b_1\mathbf{i}+a_1\mathbf{i}\cdot b_2\mathbf{j}+a_1\mathbf{i}\cdot b_3\mathbf{k}+$
$a_2\mathbf{j}\cdot b_1 i+a_2\mathbf{j}\cdot b_2\mathbf{j}+a_2\mathbf{j}\cdot b_3\mathbf{k}+a_3\mathbf{k}\cdot b_1\mathbf{i}+a_3\mathbf{k}\cdot b_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}\cdot b_3\mathbf{k}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

## Felhasználása:

I. Fizika, pl. W=**F**·**s**
II. Vetületek (Pl. fizikában is erők felbontása)

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_m$




$\mathbf{a}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b)\, \mathbf{e}_b$ $\mathbf{a}_b$ = (hossz) irány

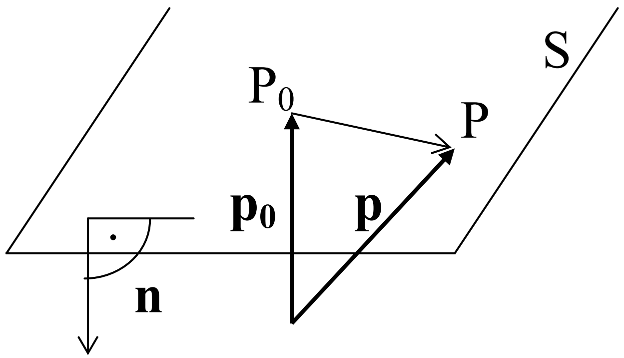
## III. Sík normálvektoros egyenlete

**Animáció:**

**http://www.usd.edu/~jflores/MultiCalc02/WebBook/Chapter_13/Graphics/Chapter13_5/DemoHtml13_5/13.5%20LinesAndPlanes.htm**

## IV. Sík normálvektoros egyenlete

**n** az S sík normálvektora (**n** a síkra merőleges)




$P_0(x_0, y_0, z_0)$ – a sík tartópontja (tetszőleges, de rögzített)
$P(x, y, z)$ – a sík tetszőleges pontja, futópont

S egyenlete: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, hiszen merőleges vektorok

$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{p} - \mathbf{p_0}$

## Példa:

$\mathbf{n}(1,2,3)$

$\mathbf{p_0}(4,5,6)$, $\overrightarrow{P_0 P} = (x-4), (y-5), (z-6)$

$P(x,y,z)$ $(x-4)\cdot 1+(y-5)\cdot 2+(z-6)\cdot 3=0$

Rendezve: $1x+2y+3z-4-10-18=0$

$(1)x+(2)y+(3)z=32$

Általában az

$Ax+By+Cz=D$ lineáris egyenlet egy A, B, C, normálvektorú sík egyenletének tekinthető.

## Típusfeladatok:

1. Koordinátáival adott a sík 3 pontja. Adja meg a sík egyenletét!
2. Adott 4 pont. Hogyan lehet eldönteni, hogy egysíkúak-e?

## Vektoriális szorzat:

vektor×vektor=vektor (CROSS product)

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot\mathbf{e}$

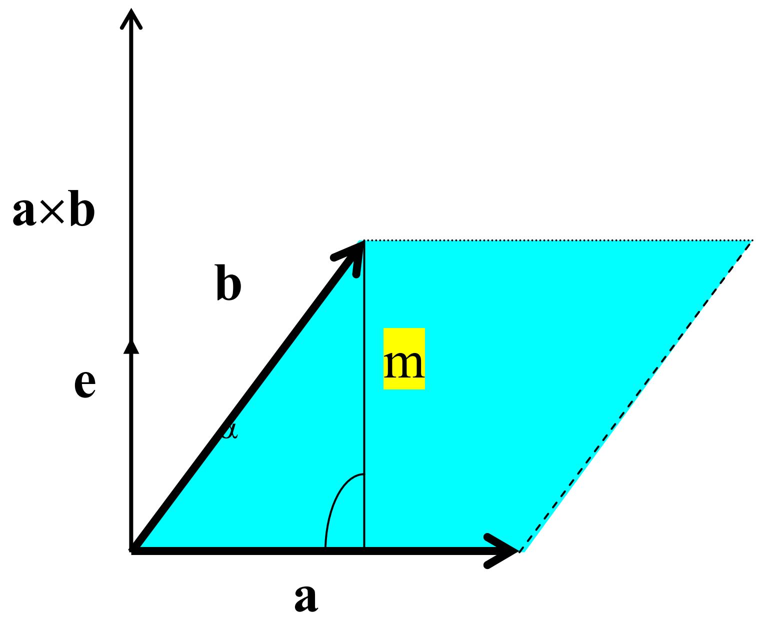
hossz=$=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$

$|\mathbf{e}|=1$ $\mathbf{a}\perp\mathbf{e}$, $\mathbf{b}\perp\mathbf{e}$ **a,b,e** jobbrendszert alkot(**a**-hüvelyk-,**b**-mutató-,**e**-középsőujj)

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\parallel\mathbf{e}$

Érdekes ez az animáció:
http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html
(Megjegyzés: az **a** és **b** vektorokat lehet mozgatni az egérrel, a **c** vektorral lehet forgatni az ábrát)

## A vektoriális szorzat geometriai jelentése:



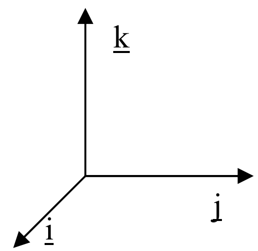

$m = |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$

alap: $|\mathbf{a}|$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha =$ Terület = (alap·magasság)

## Fontosabb vektoriális szorzatok:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0} & \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0} & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} \\ \mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0} & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \end{array}\right\}\ \text{Jobbrendszert alkot és merőleges, így nem lehet más, mint a 3. vektor.}$$




$\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$ , stb.

## A vektoriális szorzat tulajdonságai:

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ **antikommutatív**

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (nem asszociatív)

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) \end{array}\right\}\ \text{kétoldali disztributivitás}$$

# Vektoriális szorzat kiszámítása ORTONORMÁLT BÁZISban

## Tétel:

Ha

$\mathbf{a}=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})$

$\mathbf{b}=(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$ adottak, akkor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_1 i\times b_1\mathbf{i})+(a_1\mathbf{i}\times b_2\mathbf{j})+(a_1\mathbf{i}\times b_3\mathbf{k})+$$
$$(a_2\mathbf{j}\times b_1\mathbf{i})+(a_2\mathbf{j}\times b_2\mathbf{j})+(a_2\mathbf{j}\times b_3\mathbf{k})+$$
$$(a_3\mathbf{k}\times b_1\mathbf{i})+(a_3\mathbf{k}\times b_2\mathbf{j})+(a_3\mathbf{k}\times b_3\mathbf{k})$$

Felhasználva az előzőleg kiszámított vektoriális szorzatokat, és alkalmazva a disztributivitást (kiemelés):

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\mathbf{j}(a_1b_3-a_3b_1)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1) = i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{(Determináns)}$$

## Determinánsok kiszámítása a kifejtési TÉTEL szerint (nem definíció, később biz.):

1 x 1: $|a_{1_1}| = a_{1_1}$

$2\times 2$: Sor szerinti kifejtés: a sor minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó (előjeles) aldeterminánssal és az így kapott számokat összeadjuk.

Adott elemhez tartozó (előjeles) **aldetermináns:** Az elem sorát és oszlopát elhagyva újabb determinánst kapunk. Előjele a sakktábla szabály szerint.

Pl. első sor szerint kifejtve: $\begin{vmatrix} a_{1_1} & a_{1_2} \\ a_{2_1} & a_{2_2} \end{vmatrix} = a_{1_1} a_{2_2} - a_{2_1} a_{1_2}$

3 x 3: Sor szerinti kifejtés: a sor minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó (előjeles) aldeterminánssal és az így kapott számokat összeadjuk.

**Tétel:**

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}$$

**Biz.:**

1) $\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$

Ha a két vektor egymással párhuzamos, akkor a bezárt szög 0 vagy $\pi$, és így a $\sin(\underline{a},\underline{b})=0$, tehát $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

2) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b}$

Ha **a** és **b** vektoriális szorzata **0**, akkor a

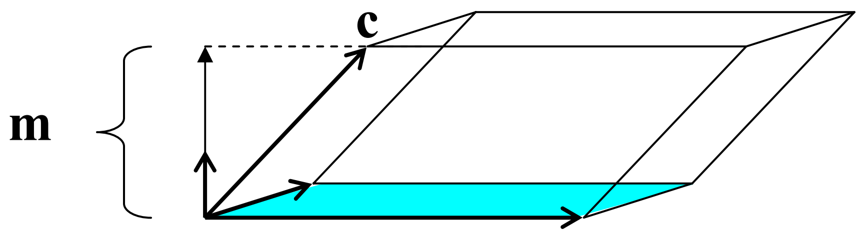
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(a,b)=\mathbf{0}$$

A jobb oldalon álló nullvektor kétféleképpen állhat elő. Vagy $\sin(a,b)=0$, és ekkor a bezárt szög $=0°$ vagy $\pi\Rightarrow$ a két vektor párhuzamos. A másik eset, hogy **a** vagy **b** legalább egyike nullvektor. Nullvektor iránya tetszőleges, így a párhuzamosság fennáll.

# Vegyes szorzat

**Definíció:** Az (**a** x **b** ) ·**c** szorzatot vegyes szorzatnak nevezzük.

**Geometriai jelentés:**




**e** legyen **a** x **b**-vel || egységvektor, tehát merőleges az **a**_és **b** vektorok síkjára

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ : alapterület ,

$$\overbrace{(|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}^{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\underbrace{\cdot\mathbf{e})\cdot c}_{\text{magasság}} = (\text{alapterület} \cdot \text{magasság}) = \text{előjeles térfogat}$$

Az előjel a paralelepipedon elhelyezkedését (attól függően + vagy -, hogy a c vektor ugyanabba a térfélbe mutat-e, mint az **a** x **b**) adja meg, a szám pedig a térfogat mérőszámát.

# Vegyes szorzat kiszámítási módja ortonormált bázis esetén

**Tétel:** Ha $\mathbf{a}=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})$
$\mathbf{b}=(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$
$\mathbf{c}=(c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k})$ adottak, akkor $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=$

$$=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

**Biz.:** $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\boldsymbol{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\mathbf{j}(a_1b1 1_3-a_3b_1)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)=$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot\mathbf{c}=\left(\mathbf{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)\cdot(c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k})= c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}- c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+ c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$