Matematika Szigorlat - Lineáris Algebra

Erdélyi Áron

2018.06.25.

Tartalomjegyzék

1 Vektoralgebra

1.1 A 3 dimenziós vektorok tere

Definíció: Az irányított szakaszt vektornak nevezzük.

Definíció: Két vektor egyenlő, ha irányuk és hosszuk megegyezik.

1.2 Lineáris kombináció fogalma

Definíció: Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ekkor

- Az $\mathbf{a}$ vektor lineáris kombinációja az $\alpha\mathbf{a}$ kifejezés.
- Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációja az $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kifejezés
- Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációja az $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ kifejezés.

1.3 Síkbeli felbontási tétel

Tétel: Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor, $\mathbf{a}$, és $\mathbf{b}$, akkor minden más $\mathbf{c}$ síkbeli vektor egyértelműen felírható az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás: A $\mathbf{c}$ vektor kezdőpontján (A) áthúzunk egy $\mathbf{a}$-val, végpontján (B) egy $\mathbf{b}$-vel párhuzamos vektort. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamosak, ezért az M pontban metszik egymást. Mivel $\overrightarrow{AM}$ párhuzamos $\mathbf{a}$-val, ezért $\overrightarrow{AM} = \alpha\mathbf{a}$. Hasonlóan mivel $\overrightarrow{BM}$ párhuzamos $\mathbf{b}$-vel, ezért $\overrightarrow{BM} = \beta\mathbf{b}$. Ekkor mivel a $\mathbf{c}$ vektor előáll: $\mathbf{c} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$-ből, ezért

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}.$$

1.4 Térbeli felbontási tétel

Tétel: Ha adott a térben három nem párhuzamos, nem egysíkú vektor, akkor minden más vektort előállítanak a térben lineáris kombinációjukként.

1.5 Lineáris kombináció, koordináta fogalma

Definíció: Alkossanak $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok a térben bázist. Ekkor $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$, lineáris kombinációban szereplő α, β, γ a $\mathbf{d}$ vektor e bázisra vonatkozó koordinátái.

1.6 Speciális műveletek

1.6.1 Skaláris szorzat

Definíció: Két vektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatán azt a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$-vel jelölt skalárt értjük, ahol $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{b} \cdot \cos(\alpha)$, ahol α a két vektor által bezárt szög.

Geometriai jelentés: Az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skaláris szorzat geometriai jelentése a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$-ra vetett merőleges vetületének $|\mathbf{b}|$ szerese.

Tétel: Skalárszorzat tulajdonságai:

- Pozitív definit: $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >\geq 0$, és $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- Szimetrikus: $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >=< \mathbf{y}, \mathbf{x} >$.
- Lineáris: $< \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} >=< \mathbf{x}, \mathbf{z} > + < \mathbf{y}, \mathbf{z} >$, $< \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > + < \mathbf{x}, \mathbf{z} >$.
- Homogén: $< \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} >= \alpha < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$, $< \mathbf{x}, \beta\mathbf{y} >= \beta < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$.

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha skaláris szorzatuk 0.

1.6.2 Vektoriális szorzat

Definíció: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ha közös kezdőpontból ábrázolva a $\mathbf{c}$ irányából nézve az $\mathbf{a}$ vektort π-nél kisebb szög elforgatásával tudjuk a $\mathbf{b}$ vektor irányába vinni.

Definíció: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-vel jelölt vektort értjük, amire $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\alpha) \cdot \mathbf{e}$, ahol α a két vektor hajlásszöge, és $\mathbf{e}$ egy egység hosszú, az $\mathbf{a}$-ra, és $\mathbf{b}$-re egyenként merőleges, velük jobbrendszert alkotó vektor.

Geometriai jelentés: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatának geometriai jelentése, az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe.

Tétel: Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor nulla, ha a két vektor párhuzamos.

1.7 Sík normálvektoros egyenlete

Definíció: Ha $\mathbf{n}$ vektor merőleges az S síkra, akkor ez a vektor a sík normálvektora.

Tétel: Ha az S sík egy normálvektora $\mathbf{n}$ és adott egy P_0 pontja, amelybe mutató helyvektor legyen $\mathbf{p}_0$. Az S sík tetszőleges pontja legyen P, és az ebbe mutató helyvektor legyen $\mathbf{p}$. Ekkor a sík egyenlete:

$$S : \mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$$

Bizonyítás: Ha $\mathbf{n}$ merőleges a síkra, akkor merőleges minden vektorára, így a $\overrightarrow{PP_0}$ vektorra is. Ezért skalárszorzatuk 0.

1.8 Pont és sík távolsága

Adott egy S sík, és ennek egy P_0 pontja. Ha ismerjük a sík normálvektorát ($\mathbf{n}$), akkor az S sík és egy A pont távolsága:

$$d = \overrightarrow{P_0A} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}.$$

1.9 Vektor összetevőkre bontása és merőleges kiegészítő

Adottak az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok. Az $\mathbf{a}$ vektor felírható a $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos, illetve erre merőleges összetevők összegeként:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_b} + \mathbf{a}_m, \quad \mathbf{a_b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e_b})\mathbf{e_b}, \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a_b}$$

2 Lineáris függetlenség, összefüggőség

2.1 Lineáris függetlenség, összefüggőség fogalma

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha egyik sem állítható elő a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ csak úgy lehetséges, hogy minden $\lambda_i = 0$.

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vektorokat lineárisan összefüggőnek nevezzük, ha valamelyik előáll a többi lineáris kombinációjaként.

Definíció: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vektorokat lineárisan összefüggőnek nevezzük, ha $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ úgy is lehetséges, hogyha valamely $\lambda_i \neq 0$.

Tétel: Ha a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor még egy vektort hozzávéve, továbbra is lineárisan összefüggő marad.

Bizonyítás: Tekintsük a nullvektort előállító lineáris kombinációt, ahol $\lambda_j \neq 0$:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_j \mathbf{v}_j + ... + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Vegyünk hozzá még egy $\mathbf{v}_{n+1}$ vektort a lineáris kombinációhoz, úgy hogy $\lambda_{n+1} = 0$. Ekkor a lineáris kombináció továbbra is a nullvektort állítja elő, úgy hogy $\lambda_j \neq 0$, tehát a kapott vektorok lineárisan összefüggőek maradtak.

Tétel: Ha $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vektorok függetlenek, akkor tetszőleges vektort elhagyva a maradék vektorok függetlenek maradnak.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekten, hogy egy lineárisan független rendszerből, ha elveszünk egy vektort, akkor összefüggő lesz. Ekkor az előző tétel miatt, ha visszavennénk ugyan ezt a vektort, akkor a vektoroknak összefüggőnek kellene lennie, ami ellentmondás.

Tétel: A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ független vektorokhoz ha hozzávesszük a $\mathbf{v}_{n+1}$ vektort, és ezáltal a vektorok összefüggőek lesznek, akkor a $\mathbf{v}_{n+1}$ vektor előáll a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás: Először bizonyítsuk, hogy $\lambda_{n+1} \neq 0$.
Tegyük fel indirekt módon, hogy $\lambda_{n+1} = 0$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i + 0 \cdot \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0}.$$

Mivel ezek a vektorok összefüggőek, ezért valamely $\lambda_i \neq 0$. Viszont ekkor ellentmondásba ütközünk, hiszen az eredeti vektorok függetlenek. Tehát $\lambda_{n+1} \neq 0$.
Másodszor lássuk be azt, hogy ez a vektor előáll a többi lineáris kombinációjaként.

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{v}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0}$$

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{v}_n = -\lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}$$

$$\frac{\lambda_1}{-\lambda_{n+1}} \mathbf{v}_1 + \frac{\lambda_2}{-\lambda_{n+1}} \mathbf{v}_2 + ... + \frac{\lambda_n}{-\lambda_{n+1}} \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n+1}.$$

Az osztás megtörténhet, hiszen az előbb beláttuk, hogy $\lambda_{n+1} \neq 0$.

2.2 Bázis és generátorrendszer fogalma

Definíció: Azok a vektorok, melyek lineáris kombinációjaként a vektortér összes eleme előáll, generátorrendszert alkotnak.

Definíció: Bázisnak nevezzük a lineárisan független vektorokat tartalmazó generátorrendszereket.

2.3 Példák a legfeljebb másodfokú, és az $m \times n$ –es mátrixok vektorteréből

3 Lineáris tér

3.1 Lineáris tér (vektortér) fogalma

A V nemüres halmazt vektortérnek nevezzük a T test felett, ha a V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, bármely $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ elemekhez egyértelműen hozzárendel egy V-beli elemet, amelyet $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$-vel jelölünk. Az összeadásra érvényesek a következő axiómák:

1. Asszociatív: $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V, \quad (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$.
2. Van egységeleme: $\exists \mathbf{0} \in V$, hogy $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
3. Van inverz eleme: $\forall \mathbf{v} \in V$-hez $\exists \mathbf{v}^{-1} \in V$, hogy $\mathbf{v} + \mathbf{v}^{-1} = \mathbf{0}$.
4. Kommutatív: $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$-re $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$.

A T test és a V halmaz között értelmezve van a skallárral való szorzás: bármely $\lambda \in T$ skalárhoz és bármel $\mathbf{v} \in V$-hez egyértelműen hozzárendelünk egy V-beli elemet, amelyet $\lambda\mathbf{v}$-vel jelölünk. A skalárszoros a következő axiómákkal rendelkezik:

1. $\mathbf{v} \in V$ esetén $1\mathbf{v} = 1$, ahol 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme.
2. Vegyes asszociatív szabály: $\lambda, \mu \in T$ esetén $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$.
3. Vegyes disztributív szabály:
   (a) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$.
   (b) $\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$.

3.2 Axiómák következményei

Tétel: Bármely $\lambda \in T$-re $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ a V halmazbeli összeadás egységeleme.

Tétel: Bármely $\mathbf{v} \in V$-re $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ahol 0 a T testbeli összeadás egységeleme, és $\mathbf{0}$ a V halmazbeli összeadás egységeleme.

Tétel: Bármely $\mathbf{v} \in V$-re $(-1)\mathbf{v} = \mathbf{v}^{-1}$, ahol (-1) a T testbeli szorzás egységelemének összeadásra vonatkozó inverze, $\mathbf{v}^{-1}$ pedig a vektortérben a $\mathbf{v}$ vektor összeadására vonatkozó inverze.

Tétel: Ha $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor vagy $\lambda = 0$, vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

3.3 Vektorrendszer függetlensége és rangja

Tétel: Egy vektorrendszer független, ha lineáris kombinációjukként csak úgy kapjuk a $\mathbf{0}$-t, hogy ha minden skalár együttható 0.

Definíció: A vektorrendszer rangján a vektorok által generált altér dimenzióját értjük.

3.4 Bázis, koordináták, dimenzió

Definíció: Bázisnak nevezzük a lineárisan független vektorokat tartalmazó generátorrendszereket.

Definíció: Legyen a V vektortér egy bázisa $[\mathbf{b}] = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$, és legyen $\mathbf{v} \in V$ vektor e bázisvektorokkal való felírásban $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{b}_n$. Ebben a lineáris kombinációban szereplő $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalárokat a $\mathbf{v}$ vektor $[\mathbf{b}]$ bázis szerinti koordinátáinak nevezzük.

Definíció: A V vektortér dimenzióján bármely bázisának elemszámát értjük.

3.5 Dimenzió ekvivalens megfogalmazásai

Definíció: A független irányok számát tekintjük dimenziónak.

3.6 Kicserélési tétel

Tétel: Az $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n$ független vektorokból álló rendszer bármely $\mathbf{f}_i$ vektorához a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_m$ generátorrendszerből található olyan $\mathbf{g}_k$ vektor, amellyel $\mathbf{f}_i$-t kicserélve az $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_{i-1}, \mathbf{g}_k, f_{i+1}, ..., \mathbf{f}_n$ vektorokból álló rendszer független.

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy az $\mathbf{f}_i$ vektorhoz egyik $\mathbf{g}_j$ vektor sem jó, tehát minden $\mathbf{g}_k$-ra a $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_{i-1}, \mathbf{g}_j, f_{i+1}, ..., \mathbf{f}_n$ lineárisan összefüggő lesz, azaz előáll minden $\mathbf{g}_k$ az $\mathbf{g}_k$-ra a $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_{i-1}, f_{i+1}, ..., \mathbf{f}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\forall \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{g}_k = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \Phi_j \mathbf{f}_j.$$

Ekkor mivel a generátorrendszer előállít minden vektort a vektortérben, így az $\mathbf{f}_i$-t is, ezért $\mathbf{f}_i$ előáll:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{g}_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \Phi_j \mathbf{f}_j.$$

Viszont ez ellentmondás, mivel ekkor $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n$ összefüggő vektorok lennének.

4 Mátrix algebra

4.1 Mátrix algebra

Definíció: Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az $n \times m$-es mátrixokon olyan téglalap alakú táblázatot értünk, aminek n sora és m oszlopa va, elemei pedig a valós számok.

4.2 Mátrixok struktúrája

Állítás: Az $n \times m$-es mátrixok az összeadásra nézve Abel-csoportot alkotnak.

Állítás: Az $n \times m$-es mátrixok a valós számok teste fölött vektorteret alkotnak.

4.3 Műveletek

Definíció: Tekintsük matematikai objektumok egy halmazát. A művelet olyan függvény, amely az adott halmaz elemeihez egy (másik) halmazbeli elemet rendel. Egyváltozós (unáris) a művelet, ha egy elemhez rendel egy (másik) elemet. Kétváltozós (bináris) a művelet, ha két elemhez rendel egy (mások) elemet.

4.3.1 Mátrixok összeadása

Definíció: Az $\mathbf{A} = (a_{ik})$ és $\mathbf{B} = (b_{ik})$ mátrixok összegén azt a $\mathbf{C} = (c_{ik})$ mátrixot értjük, amelynek az adott pozíciójú elemét az **A** és a **B** mátrixok megfelelő pozíciójában lévő elemeinek összeadásával kapjuk.

Tétel: Mátrixok összeadásának tulajdonságai:

1. Kommutatív: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
2. Asszociatív: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.
3. Van egységelem: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.
4. Van inverzelem: $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$.

4.3.2 Mátrixok szorzása

Definíció: Az **A** $n \times m$, és a **B** $m \times k$ típusú mátrixok szorzata a **C** $n \times k$ típusú mátrix, ahol $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} blj$.

Tétel: Mátrixok szorzásának tulajdonságai:

1. Nem kommutatív: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
2. Asszociatív: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.
3. Disztributív az összeadásra nézve: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

4.3.3 Négyzetes mátrixok szorzásra vonatkozó egységeleme

Definíció: Az $n \times n$-es mátrixok körében az $\mathbf{E}_n = diag(1, 1, ..., 1)$ egységmátrix egységelemet képez a szorzásra nézve.

Tétel: $\mathbf{AE}_n = \mathbf{E}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

4.3.4 Négyzetes mátrixok szorzásra vonatkozó inverze

Definíció: Legyen **A** $n \times n$ típusú mátrix. Az $\mathbf{A}^{-1}$-el jelölt $n \times n$-es mátrixot, melyre $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$, az **A** mátrix inverzének nevezzük.

Tétel: Ha az **A** mátrixnak van baloldali, és jobboldali inverze, akkor az egyértelmű szorzásra és összeadásra is.

Tétel: Az inverz mátrix tulajdonságai:

1. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, akkor inverzének inverze önmaga: $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
2. Ha az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrix invertálhatók, akkor szorzatuk is invertálható, és inverze a tényezők inverzének fordított sorrendű szorzata: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
3. Ha a $\mathbf{C}$ mátrix invertálható, akkor az egyenletet a szokásos módon lehet rendezni:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{BC} \to \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{CA} = \mathbf{CB} \to \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

4.4 Egyenletrendszerek megoldása inverz mátrix segítségével

Legyen adott egy egyenletrendszer mátrix alakban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ahol $\mathbf{x}$ az ismeretleneket tartalmazó vektor, $\mathbf{b}$ pedig adott vektor. Így az egyenletrendszer:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Ha $det(\mathbf{A}) \neq 0$ és $n = m$, akkor $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, és az egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

4.5 Inverz mátrix képlete, e képlet levezetése

Tétel: Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixot az adjungáltjával jobbról megszorozva az eredmény $\det(\mathbf{A})\mathbf{E}_n$.

Bizonyítás: A szóban forgó szorzat így néz ki:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D1n \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & Dnn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & cnn \end{bmatrix}$$

Ekkor az eredménymátrix elemeit kiszámítva:

$$c_{11} = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{21} + ... + a_{1n}Dn1 = a_{11}D_{11}$$

$$c_{21} = a_{21}D_{12} + a_{22}D_{22} + ... + a_{2n}Dn2 = a_{22}D_{22}$$

$\vdots$

$$c_{11} = a_{n1}D_{1n} + a_{n2}D_{2n} + ... + a_{nn}Dnn = a_{nn}D_{nn}$$

A nem főátlóban elhelyezkedő elemek szintén a ferde kifejtés miatt 0-k lesznek.

Tétel: Ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, és $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor $\exists\mathbf{A}^{-1}$, és $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}adj(\mathbf{A})$.

Bizonyítás: Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, ezért az inverz egyértelmű. Ha tehát létezik egy mátrix, melyre $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_n$, akkor ez a $\mathbf{B}$ mátrix inverze az $\mathbf{A}$ mátrixnak. A fenti tétel szerint $\mathbf{A}adj(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{E}_n$. Ezt beszorozva $\frac{1}{\det(\mathbf{A})}$-val kapjuk az állítást.

4.6 Mátrix polinomok

Definíció: Polinomnak nevezzük az $a_0 + a_1\mathbf{x}^1 + a_2\mathbf{x}^2 + ... + a_n\mathbf{x}^n$ formát, ahol $a_i \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{x}$-ek helyébe számot, vektort, de akár négyzetes mátrixok is helyettesíthetők.

Definíció: Behelyettesítve, és elvégezve a műveleteket, ha az eredmény nulla, nullvektor illetve nullmátrix, akkor azt mondjuk, hogy a behelyettesített szám, vektor, vagy mátrix gyöke a polinomnak.

4.7 Cayley-Hamilton tétel kimondása és példán keresztül illusztrálása

Tétel: Tetszőleges $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét.

4.8 Mátrix-vektor szorzat mint lineáris kombináció

Állítás: Egy $m \times n$ típusú mátrix, és egy n sorú vektor szorzata $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ megfeleltethető egy $L : V^n \to W^m$ leképezésnek, ahol $\mathbf{x} \in V^n$, és $\mathbf{b} \in W^m$.

5 Bilineáris formák

Definíció: Legyen a V vektortér a valós test felett. Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezést bilineáris függvénynek nevezzük, ha mindkét változójában lineáris. L minden $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ vektorpárjához egyértelműen hozzárendel egy valós számot, amit $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$-vel jelölünk.

1. Lineáris:
   (a) $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
   (b) $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$.
2. Homogén:
   (a) $L(\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \lambda L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
   (b) $L(\mathbf{v}_1, \lambda\mathbf{v}_2) = \lambda L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ vektorok.

Definíció: Az L bilineáris függvénynek a $[\mathbf{b}] = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$ bázis szerinti $\mathbf{L}$ mátrixán azt az $n \times n$-es mátrixot értjük, melyben az i-dik sor j-dik eleme $l_{ij} = L(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$.

Tétel: Ha $L : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris függvény, akkor $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ és $\mathbf{A}$ a bilineáris függvény mátixa.

Definíció: Az L bilineáris függvény szimetrikus, ha $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$.

Tétel: Az L bilineáris függvény akkor és csak akkor szimetrikus, ha a mátrixa szimetrikus.

5.1 Kvadratikus alakok és szimmetrikus mátrixok

Definíció: Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris függvényhez tartozó $Q(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{x}) : V \to \mathbb{R}$ függvényt az L kvadratikus alakjának nevezzük.

Definíció: Egy mátrix ortogonális, ha $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$, ahol $\mathbf{E}$ egy megfelelő nagyságú egységmátrix (Más szóval ortogonális, ha $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$).

Tétel: Szimetrikus mátrix külömböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak.

Tétel: (Spektrál tétel): Valamely négyzetes mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimetrikus.

5.2 A sajátvektorok bázisában (ha létezik) felírt mátrix

Tétel: Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve e bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, ahol a főátlóban a sajátértékek állnak.

$$\mathbf{A}_{[\mathbf{a}']} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik egy olyan $\mathbf{S}$ mátrix, amellyel fennáll, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$.

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel: A hasonlóság az $n \times n$-es mátrixok körében ekvivalencia reláció.

Tétel: Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, és $\mathbf{A}$ sajátvektora $\mathbf{s}$, akkor $\mathbf{B}$ ugyanazon sajátértékéhez tartozó sajátvektora $\mathbf{T}\mathbf{s}$.

Tétel: Diagonalizálhatóság elégséges feltétele: Ha valamely kvadratikus ($n \times n$) mátrix sajátértékei mind külömbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.

Tétel: Az $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa.

Tétel: Ha valamely $\mathbf{A}$ ($n \times n$) típusú mátrix sajátaltereinek dimenzióinak összege éppen n, akkor a mátrix diagonalizálható.
(Geometriai multiplicitás = algebrai multiplicitás).

5.3 Mátrixok otogonális diagonalizálása

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, ahol $\mathbf{S}$ ortogonális, $\mathbf{D}$ diagonális mátrix.

5.4 Főtengelytranszformáció

Tétel: (Főtengely tétel): A $\mathbf{Q} = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ kvdratikus alakhoz tekintsük az S ortogonális transzformációt, amelynek $\mathbf{S}$ mátrixában az oszlopok a $\mathbf{Q}$ szimetrikus mátrix ortonormált sajátvektorai. Áttérve ezen ortonormált sajátvektorok bázisára, vagyis alkalmazva az $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{u}$ koordináta transzformációt, a Q kvadratikus alak a következőképpen írható: $Q = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u} = \sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i^2$, ahol λ_i-k az $\mathbf{Q}$ mátrix sajátértékei. Ezt a transzformációt főtengely transzformációnak nevezzük.

Bizonyítás:

$$Q = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = (\mathbf{S}\mathbf{u})^T\mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{S}^T\mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u}.$$

Definíció: A $Q = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ kvadratikus alak $\mathbf{Q} \in T^{n\times n}$ szimetrikus mátrixának n külömböző sajátaltereit a Q kvadratikus alak főtengelyeinek nevezzük. Két dimenzióban a megfelelő kúpszelet szimetria tengelyei a főtengelyek.

Definíció: A Q kvadratikus alak

- pozitív definit, ha minden $x \neq 0$ helyettesítésre $Q > 0$.
- pozitív szemidefinit, ha minden x-re $Q \geq 0$.
- indefinit, ha mind pozitív, mind negatív értékeket is felvesz.

Tétel: Az $n \times n$-es Q mátrix akkor és csak akkor

- pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív.
- pozitív szemidefinit, ha minden sajátértéke pozitív, vagy nulla.

5.5 Kúpszeletek, mint mértani helyek

Egy egyenes körkúpot a csúcsára nem illeszkedő síkkal elmetszve különböző görbéket kapunk síkmetszetként, aszerint, hogy a sík a kúp tengelyével mekkora szöget zár be.
Ha a bezárt szög megegyezik a kúp félnyílásszögével, azaz a sík egy alkotóval párhuzamos, akkor parabola; ha kisebb, mint félnyílásszög, akkor hiperbola; ha nagyobb, mint félnyílásszög, akkor ellipszis; ha pedig a sík a tengelyre merőleges, akkor kör lesz a síkmetszet.

Definíció: Az ellipszis azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának összege állandó, mely állandó nagyobb az adott pontok távolságánál

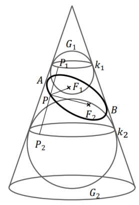
Definíció: A hiperbola azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának különbsége állandó, mely állandó kisebb az adott pontok távolságánál.

Definíció: A parabola azon pontok mértani helye a síkban, amik egy adott egyenestől és egy adott, az egyenesre nem illeszkedő ponttól egyenlő távolságra vannak.

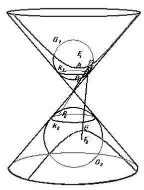
5.6 Kúpszeletek és az ellipszis, hoperbola, parabola ekvivalenciája

5.6.1 Ellipszis

Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba olyan gömböket, amik érintik a kúpot és a metszősíkot is. A G_1 gömb a kúp palástját k_1 körben, a síkot F_1 pontban érinti. A G_2 gömb a kúpot k_2 körben, a metszősíkot F_2 pontban érinti. A P ponton áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi. Teljesül rájuk, hogy $PP_1 = PF_1$ és $PP_2 = PF_2$, mivel ezek a szakaszok a gömbhöz húzott érintőszakaszok egy külső pontból. Ugyanakkor PP_1 és PP_2 egy közös alkotón vannak és ezek hosszának összege a forgásszimmetria miatt állandó. Tehát egy tetszőleges P pontnak a fókuszoktól vett távolságainak összege állandó, ezért ez ellipszis.



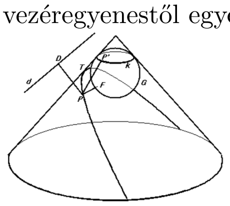
5.6.2 Hiperbola

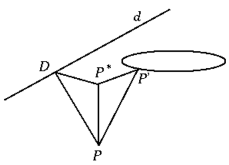


Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba olyan gömböket, amik érintik a kúpot és a metszősíkot is. A G_1 gömb a kúp palástját k_1 körben, a síkot F_1 pontban érinti. A G_2 gömb a kúpot k_2 körben, a metszősíkot F_2 pontban érinti. A P ponton áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi. Teljesül rájuk, hogy $PP_1 = PF_1$ és $PP_2 = PF_2$, mivel ezek a szakaszok a gömbhöz húzott érintőszakaszok egy külső pontból. Ugyanakkor P_1 és P_2 egy közös alkotón vannak és a forgásszimmetria miatt P_1P_2 szakasz hossza állandó és P ugyanazon az egyenesen van, ezért PP_1 és PP_2 szakaszok különbségének abszolút értéke állandó. Tehát egy tetszőleges P pontnak a fókuszoktól vett távolságainak különbségének abszolút értéke állandó, ezért ez hiperbola.

5.6.3 Parabola

Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba egy olyan érintőgömböt G, ami egyúttal a síkot is érinti. A kúpot k körben, a síkot F pontban érinti a G gömb. P-ből a gömbhöz húzott érintőszakaszok PF és PP', amik egyenlő hosszúságúak. A metszősík és k síkja d egyenesben metszik egymást. P-ből merőlegest állítva d-re és k síkjára kapjuk a D és a P^* talppontokat. PD a metszősíkban van és párhuzamos azzal az alkotóval, amivel a sík is párhuzamos. Így a DPP^* és a P^*PP' szög is váltószöge egy-egy olyan szögnek, melynek egyik szára a kúp tengelye, másik szára pedig egy alkotó; a két szög tehát egyenlő. Ezért a kapott $PP'P^*$ derékszögű háromszög egybevágó a PP^*D derékszögű háromszöggel (egy oldaluk közös és a rajta fekvő szögeik egyenlők). Tehát az átfogók egyenlő hosszúak: $DP = PP'$, másrészről $PP' = PF$. Tehát egy tetszőleges P pont távolsága a fókusztól és a vezéregyenestől egyenlő, ezért ez parabola.





5.7 Másodrendű görbék középponti egyenletei

Egy megfelelően választott koordinátarendszerben a kúpszeleteket fel lehet írni a következő (kanonikus) egyenletekkel:

- Ellipszis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol a és b az ellipszis nagy és kis féltengelye.
- Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol a és b a hiperbola valós és képzetes féltengelye.
- Parabola: $y^2 = 2px$, ahol p a parabola paramétere.

6 Komplex számok

Definíció: Legyen $\mathbb{C}$ a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$. A $\mathbb{C}$-n két műveletet értelmezünk: egy összeadás, és egy szorzás nevűt. A szokásos módon $+$ és $\cdot$ jelekkel jelöljük ezeket. A $\mathbb{C}$ halmaz elemei a műveletekkel együtt alkotják a komplex számokat.

Definíció: Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha első és második elemeik egymással páronként egyenlők: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

Következmény: $(a, b) \neq (b, a)$, kivéve, ha $a = b$.

Definíció: Összeadás: $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}$.

Definíció: Szorzás: $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$.

Tétel: A $\mathbb{C} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok testet alkotnak az előző műveletekre nézve.

6.1 Komplex számok különböző alakjai, Átszámolás az egyes alakok között

Tétel: Az $(a, 0)$ komplex számok és a valós számok között egy-egy értelmű, művelettartó leképezés létesíthető. Másképpen fogalmazva, az $(a, 0)$ komplex számok izomorfak a valós számokkal.

Tétel: Minden komplex szám felírható olyan kéttagú összegként, ahol az első tag mindkét tényezőjének van izomorf képe a valós számok között, a másodiknak pedig egyik tényezője rendelkezik e tulajdonsággal: $(a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$

Definíció: A $\mathbf{z} = (a, b)$ komplex szám algebrai alakja $\mathbf{z} = (a, b) = a + b\mathbf{i}$, ahol $\mathbf{i}^2 = -1$.

Definíció: A $\mathbf{z} = a + b\mathbf{i}$ komplex szám abszolút értéke $|\mathbf{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definíció: A $\mathbf{z}$ komplex szám trigonometrikus alakja $\mathbf{z} = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{b}{a}.$$

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Definíció:

$$\mathbf{z} = re^{\mathbf{i}\varphi}$$

alakot, ahol r a $\mathbf{z}$ komplex szám abszolút értéke, és φ az argumentuma, a komplex szám exponenciális alakjának nevezzük.

6.2 Műveletek

Számolás algebrai alakban:

- Összeadás: $(a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i}) = (a + c) + (b + d)\mathbf{i}$.
- Szorzás: $(a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = ac + ad\mathbf{i} + bc\mathbf{i} + bd\mathbf{i}^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}$.
- Osztás:
$$\frac{a + b\mathbf{i}}{c + d\mathbf{i}} = \frac{a + b\mathbf{i}}{c + d\mathbf{i}}\frac{c - d\mathbf{i}}{c - d\mathbf{i}} = \frac{(ac - bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(ad + bc)}{c^2 + d^2}\mathbf{i}.$$

Számolás trigonometrikus alakban:

- Szorzás: $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
- Osztás: $\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Számolás exponenciális alakban:

- $$\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = r_1 e^{\mathbf{i}\varphi_1} r_2^{\mathbf{i}\varphi_2} = r_1 r_2 e^{\mathbf{i}(\varphi_1+\varphi_2)}.$$
- $$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1 e^{\mathbf{i}\varphi_1}}{r_2 e^{\mathbf{i}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathbf{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

6.3 Hatványozás, Moivre- formula

Tétel: (Moivre formula:) $\mathbf{z}^k = r^k(\cos(k\varphi) + \mathbf{i}\sin(k\varphi))$.

Bizonyítás: A trigonometrikus szorzásból következik. Nézzük meg $\mathbf{z}^2$-t:

$$\mathbf{z}^2 = r^2(\cos(\varphi+\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi+\varphi)) = r^2(\cos(2\varphi) + \mathbf{i}\sin(2\varphi)).$$

Folytatva a gondolatmenetet nézzük meg $\mathbf{z}^n$-t:

$$\mathbf{z}^n = r^n(\cos(\varphi+\varphi+...+\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi+\varphi+...+\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi)).$$

Exponenciális alakban:

$$\mathbf{z}^n = re^{\mathbf{i}\varphi})^n = r^n e^{n\mathbf{i}\varphi}.$$

6.4 Gyökvonás

Definíció: A $\mathbf{z}$ komplex számot a $\mathbf{z}^* \neq 0$ komplek szám n-edik gyökének nevezzük, ha $\mathbf{z}^n = \mathbf{z}^*$:

$$\sqrt[n]{\mathbf{z}^*} = z \Leftrightarrow \mathbf{z}^n = \mathbf{z}^*.$$

Definíció: $w(\mathbf{z}) = x + \mathbf{i}y = \sqrt{a + \mathbf{i}b}$ komplek számokon értelmezett omplex értékű x függvény értéke az a komplex szám, aminek négyzete $a + b\mathbf{i}$, továbbá vagy $x > 0$, vagy $x = 0$, vagy $y \geq 0$.

Exponenciális alakban:

$$\sqrt[n]{\mathbf{z}} = \sqrt[n]{re^{\mathbf{i}\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{\mathbf{i}\frac{\varphi+k2\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

6.5 Konjugált

Definíció: A $\mathbf{z} = a + b\mathbf{i}$ komplex szám konjugáltja a $\overline{\mathbf{z}} = a - b\mathbf{i}$ komplex szám.

6.6 Egységgyökök, primitív egységgyökök

Definíció: n-edik (komplex) egységgyöknek nevezzük a $\mathbf{z}$ komplex számot, ha $\mathbf{z}^n = 1$.
Másképpen: az $x^n - 1 = 0$ úgynevezett binom egyenlet komplex számok körében vett megoldásait n-edik egységgyöknek nevezzük. A valós megoldások: 1, ha n páratlan, és ± 1, ha n páros.
Jelölés: $\epsilon_k^n = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$.

Tétel: Az összes n-edik egységgyök előáll az első; $\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ egységgyök hatványaiként.

Bizonyítás: A moivre formulából azonnal következik.

Definíció 1: Azt az ϵ_k n-edik egységgyököt, amelynek hatványai az összes többi egységgyököt előállítják, primitív egységgyöknek nevezzük.

Definíció 2: Az az egységgyök, amelynek n-dik hatványa 1, és semelyik ennél kisebb hatványa nem 1, primitív egységgyök.

Tétel: (Definíció 2 $\Rightarrow$ Definíció 1): Legyen n az a legkisebb szám, amire ϵ_k n-edik egységgyök. Mivel az egységgyökök csoportot alkotnak, mindegyik hatvány egységgyök. Mivel pontosan n különböző egységgyök van, ha a hatványok mind különbözők, akkor elő is állítják a többi egységgyököt.

Tétel: (Definíció 1 $\Rightarrow$ Definíció 3): Ha ϵ_k n-edik primitív egységgyök, akkor k és n nem relatív prímek (nincs közös osztójuk).

Tétel: (Definíció 3 $\Rightarrow$ Definíció 2): Ha n és k relatív prímek, akkor ϵ_k n-edik egységgyök.

Definíció 3: Ha ϵ_k n-edik egységgyök, továbbá n, k relatív prímek, akkor ϵ_k primitív n-edik egységgyök.

Tétel: Definíció 2 $\rightarrow$ Definíció 1 $\rightarrow$ Definíció 3 $\rightarrow$ Definíció 2. Mivel a bizonyításban körbeértünk, beláttuk a 3 definíció egyenértékűségét.

6.7 Egységgyökök struktúrája

Tétel: Az n-edik egységgyökök csoportot alkotnak a komplex számok szokásos szorzására nézve.

Bizonyítás:

1. Zártság:

$$(\epsilon_k \epsilon_l)^n = (\cos\frac{(k+l)2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{(k+l)2\pi}{n})^n = \cos\frac{(k+l)n2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{(k+l)n2\pi}{n} =$$

$$= \cos((k+l)2\pi) + \mathbf{i}\sin((k+l)2\pi) = 1.$$

2. Egység: Az $1 = 1(\cos\frac{0}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{0}{n})$.

3. Inverz: $\epsilon_k\epsilon_j = 1(\cos\frac{0}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{0}{n})$ alapján:$\frac{k2\pi}{n} + \frac{j2\pi}{n} = \frac{n2\pi}{n}$, ahonnan $j = n - k$. Tehát $\epsilon_k^{-1} = \epsilon_{n-k}$.

6.8 Komplex számokra vonatkozó Euler formula

A 0 körüli Taylor sorfejtéssel a $\cos(x)$ és a $\sin(x)$ is fölírható, ezzel pedig kifejezhető $e^{\mathbf{i}x}$. A sorokat átrendezve, a konvergens tagokat átírva adódik az Euler formula:

$$e^{\mathbf{i}x} = \cos(x) + \mathbf{i}\sin(x).$$

6.9 Az algebra alaptétele

Tétel: (Az algebra alaptétele:) Az n-ed fokú komplex együtthatós polinomnak pontosan n darab komplex gyöke van.

6.10 Komplex együtthatós másodfokú egyenlet megoldása

Tétel: Ha a z komplex szám gyöke egy polinomnak, akkor konjugáltja is gyöke.
A másodfokú egyenletre tanult megoldóképlet komplex számokra is érvényes. A diszkrimináns segítségével a következő eseteket különböztetjük meg:
$D > 0$, két különböző valós gyök,
$D = 0$, egy valós, kétszeres multiplicitású gyök,
$D < 0$, két komplex konjugált gyök.
A másodfokú egyenleteknek multiplicitással számolva pontosan két gyöke van a komplex számok körében.

7 Vektortér, altér

7.1 Vektortér és altér fogalma

Definíció: A V nemüres halmazt vektortérnek nevezzük a T test felett, ha a V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, bármely $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ elemekhez egyértelműen hozzárendel egy V-beli elemet, amelyet $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$-vel jelölünk. Az összeadásra érvényesek a következő axiómák:

1. Asszociatív: $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V, \quad (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$.
2. Van egységeleme: $\exists \mathbf{0} \in V$, hogy $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
3. Van inverz eleme: $\forall \mathbf{v} \in V$-hez $\exists \mathbf{v}^{-1} \in V$, hogy $\mathbf{v} + \mathbf{v}^{-1} = \mathbf{0}$.
4. Kommutatív: $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$-re $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$.

A T test és a V halmaz között értelmezve van a skallárral való szorzás: bármely $\lambda \in T$ skalárhoz és bármel $\mathbf{v} \in V$-hez egyértelműen hozzárendelünk egy V-beli elemet, amelyet $\lambda\mathbf{v}$-vel jelölünk. A skalárszoros a következő axiómákkal rendelkezik:

1. $\mathbf{v} \in V$ esetén $1\mathbf{v} = 1$, ahol 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme.
2. Vegyes asszociatív szabály: $\lambda, \mu \in T$ esetén $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$.
3. Vegyes disztributív szabály:
   (a) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$.
   (b) $\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$.

Definíció: Ha $< H|* >$, és $H_1 \subseteq H$-ra is $< H_1|* >$, akkor azt mondjuk, hogy H_1 részstruktúrája H-nak.

Elnevezés: Ha a struktúra vektortér, akkor a részstruktúrát altérnek nevezzük.

7.2 Altér megállapítására vonatkozó tétel

Tétel: Legyen V egy vektortér valamely T test felett, és $W \subseteq V$. W akkor és csak akkor altere a V-nek, ha minden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W$-re és $\lambda \in T$-re:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W, \qquad \lambda\mathbf{v}_1 \in W.$$

Bizonyítás: Ha W altér, akkor a definícióból adódik az állítás.
Az állítás másik része: ha

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W, \qquad \lambda\mathbf{v}_1 \in W,$$

akkor W altér. Ahhoz, hogy W altér legyen, az összes vektortér axiómának teljesülnie kell. Ezek közül az összeadásra vonatkozó kommutativitás, asszociativitás, valamint a vegyes asszociatív, és disztributív szabályok automatikusan teljesülnek, külömben V nem lehetne vektortér. Ugyan így $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ axióma is igaz kell legyen a V minden elemére.
A fennmaradó két axióma közül az egyik az összeadás egységének W-beli létezése, a másik pedig az inverz létezése. Ha vesszük az 1 és a -1 akkor a második feltétel szerint $1\mathbf{v} \in W$, és $-1\mathbf{v} \in W$. Ebből rögtön a másodikként említett hiányzó axióma is teljesül: A $\mathbf{v}$ összeadásra vonatkozó inverze is W-beli. Az első feltétel szerint W-beli vektorok összege is W-beli, ezzel bizonyítható, hogy az összeadás egysége is W-beli: $\mathbf{0} = 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v}$.

7.3 Nevezetes alterek: generátumok, képtér, magtér, sajátaltér

Definíció: (Generátum:) A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ vektorok által generált altér, melyet $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n >$-vel jelölünk, ezen vektorok minden lehetséges lineáris kombinációja.

$$< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n >= \{\mathbf{v} \in V | \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n\}.$$

Bizonyítás: A definíció helyes, ugyanis, mint az előzőben bizonyítottuk, valamely vektorok halmaza akkor és csak akkor altér, ha bármely halmazbeli vektorok összege, vagy skalárszorosa is halmazbeli. Egy lineáris kombinációnál nyílván mindkét feltétel teljesül.

Definíció: Legyen L valamely $V \to W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összességét, amelyek képe a nullvektor, a leképezés magterének nevezzük, és $Ker(L)$-lel jelöljük.

Definíció: Legyen L valamely $V \to W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összességét W-ben, amelyek valamely V-beli vektor(ok) képei, a leképezés képterének nevezzük, és $Im(L)$-lel jelöljük.

Definíció: A λ sajátértékhez tartozó alteret a λ-hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.

7.4 A merőleges kiegészítő altér

Definíció: Egy V euklideszi térben egy H részhalmaz $H\perp$ merőleges kiegészítőjén a H minden elemére merőleges vektorok halmazát értjük.
Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $H\perp$ minden esetben altér V-ben.

7.5 Példa merőleges kiegészítőre $\mathbb{R}^3$-ban, geometriai jelentése

7.6 Dimenzió tétel

Definíció: A V vektortér dimenzióján bármely bázisának elemszámát értjük. Jelölés: $Dim(V)$.

Tétel: (Dimenzió tétel:) Legyen L valamely $V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor

$$Dim(Ker(L)) + Dim(Im(L)) = Dim(V).$$

8 Homogén lineáris leképezések vektortere

8.1 Lineáris leképezések

Legyenek V és W vektorterek, valamint $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Azt az $L : V \to W$ függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, homogén lineáris leképezésnek nevezzük.

1. Linearitás: $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$.
2. Homogenitás: $L(\lambda\mathbf{v}) = \lambda L(\mathbf{v})$.

Ha $V = W$, akkor a leképezést lineáris transzformációnak hívjuk.

8.2 Homogén lineáris leképezések összeadása

Definíció: Legyenek V és W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A, B : V^n \to W^k$ lineáris leképezések. Továbbá legyen $\mathbf{x} \in V$ vektor. Az A és B lineáris leképezések összege:

$$(A + B)\mathbf{x} = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}).$$

8.3 Homogén lineáris leképezések szorzása

Definíció: Legyenek V és W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A : V^n \to W^k$ lineáris leképezés. Továbbá legyen $\mathbf{x} \in V$ vektor, és λ szám. Az A lineáris λ skalárszorosa:

$$(\lambda A)\mathbf{x} = \lambda A(\mathbf{x}).$$

8.4 Homogén lineáris leképezések polinomja

Tétel: Legyen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{[\mathbf{b}]}$, ahol az $\mathbf{A}$ e transzformáció egy mátrixa, az $\mathbf{x}_{[\mathbf{b}]}$ pedig az $\mathbf{x}$ vektor koordináta mátrixa, mindkettő valamely rögzített $[\mathbf{b}]$ bázisra vonatkozóan. Ekkor az L transzformáció sajátértékei a $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai. A $p(\lambda) = \det(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ polinom λ-ban n-edfokú, ez az úgy nevezett karakterisztikus polinom, melynek gyökei a sajátértékek. A sajátvektorok pedig e sajátértékek ismeretében a $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletből kaphatók.

8.5 Homogén lineáris leképezések lineáris tere

Tétel: A $V^n \to W^k$ leképezés halmaza a fent definiált összegre és számszorosra nézve $k \times n$ dimenziós vektorteret alkot.

Tétel: A $V^n \to W^k$ leképezés lineáris tere izomorf a $k \times n$-es mátrixok vektorterével.

8.6 Kapcsolata a (megfelelő típusú) mátrixok lineáris terével

Ha adott egy V_1 és V_2 vektortér, melynek dimenziói $Dim(V_1) = n, Dim(V_2) = m$ akkor e két vektortér között bármely lineáris leképezés egyértelműen megfeleltethető egy $m \times n$-es mátrixnak. Ez a tény lehetővé teszi, hogy a lineáris leképezéseket mátrixokkal adjuk meg, ugyanakkor minden mátrix egy lineáris leképezést is reprezentál.
Hogy megadjunk egy ilyen leképezés-mátrix hozzárendelést, a kiindulási és a képtérben is rögzített báziskora van szükség. A leképezést reprezentáló mátrix e bázispárra vonatkoztatva egyértelmű. Ha ismerjük e mátrixot, akkor bármely vektor képe úgy kapható meg, hogy a vektort beszorozzuk a leképezés mátrixával.

8.7 Cayley-Hamilton tétel

Tétel: Tetszőleges $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét.

9 Sajátérték, sajátvektor

9.1 Sajátérték, sajátvektor fogalma

Definíció: A λ szám sajátértéke az L transzformációnak, ha van olyan nem nulla vektor, amelyre:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}.$$

Definíció: Azokat a nem nulla vektorokat az L leképezés λ sajátértékhez tartozó sajátvektorának nevezzük, amelyekre

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}.$$

Tétel: Legyen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és $L(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}_{[\mathbf{b}]}$, ahol az $\mathbf{A}$ e transzformáció egy mátrixa, az $\mathbf{x}_{[\mathbf{b}]}$ pedig az $\mathbf{x}$ vektor koordináta mátrixa, mindkettő valamely rögzített $[\mathbf{b}]$ bázisra vonatkozóan. Ekkor az L transzformáció sajátértékei a $\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai. A $p(\lambda) = \det(\mathbf{E}-\mathbf{A})$ polinom λ-ban n-edfokú, ez az úgy nevezett karakterisztikus polinom, melynek gyökei a sajátértékek. A sajátvektorok pedig e sajátértékek ismeretében a $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletből kaphatók.

9.2 Sajátvektorok függetlenségének kritériuma

Tétel: Külömböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

9.3 Speciális transzformációk mátrixai

9.3.1 Szimetrikus mátrixok

Definíció: Egy mátrix szimetrikus, ha megyegyezik a transzponáltjával: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Tétel: Szimetrikus mátrix külömböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak.

9.3.2 Ferdén szimetrikus mátrixok

Definíció: Egy mátrix ferdén szimetrikus, ha megyegyezik a transzponált (-1)-szeresével: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Tétel: A ferdén szimetrikus mátrixok sajátértékei vagy nullák, vagy tisztán képzetesek.

9.3.3 Ortogonális mátrixok

Definíció: Egy mátrix ortogonális, ha inverze megyegyezik a transzponáltjával: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

Tétel: Az ortogonális mátrixok sajátértékeinek abszolút értéke 1.

9.4 Hasonló mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Tétel: Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, és $\mathbf{A}$ sajátvektora $\mathbf{s}$, akkor $\mathbf{B}$ ugyanazon sajátértékéhez tartozó sajátvektora $\mathbf{Ts}$.

9.5 Azonos sajátérékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak

Tétel: Azonos sajátérékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak.

Bizonyítás: Ha teljesül, hogy egy sajátértékhez tartozó két sajátvektor összege is ugyanehez a sajátértékhez tartozik, illetve hogy a sajátvektor μ skalárszorosa is ugyan azon sajátértékhez tartozik, akkor beláttuk, hogy altér lesz.
Nézzük először az összeadást: $\lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ a vektorok homogén és lineáris tulajdonsága miatt. Hasonlóan a skalárral való szorzásnál: $\mu(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mu\mathbf{v})$ az asszociativitás és a skalárok szrzásra néző kommutativitása miatt.

9.6 Sajátvektorok bázisában a transzformáció mátrixa

Tétel: Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, melynek főátlójában a sajátértékek szerepelnek.

10 Izomorfia

10.1 Izomorf struktúrák

Definíció: Az izomorfia két matematikai struktúrának az a tulajdonsága, hogy elemeik a strukturális tulajdonságokat megőrizve egymásra kölcsönösen egyértelműen (bijektíven) leképezhetők.

10.2 Izomorf gráfok

Definíció: Két gráfot akkor nevezünk izomorfnak, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetők egymásnak.

10.3 Izomorf vektorterek

Definíció: Az egy-egyértelmű $L : V \to W$ leképezést izomorf leképezésnek nevezzük. Az izomorf vektortereket a következő képpen jelöljük: $V \cong W$.

10.3.1 Vektorterek izomorfiára vonatkozó szükséges és elégséges feltételei

Tétel: Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk egyenlő.

Bizonyítás: Ha a két vektortér dimenziója egyenlő, akkor mármely két bázisának elemszáma egyenlő. Legyen a V tér egy bázisa $[\mathbf{a}]$, a W tér egy bázisa $[\mathbf{b}]$. A V-beli $\mathbf{x}$ vektort az $[\mathbf{a}]$ bázisra vonatkozó koordináta mátrikával reprezentáljuk. Rendeljük hozzá W-ben azt az y vektort, aminek a $[\mathbf{b}]$-re vonatkoztatva ugyan az a koordináta mátrixa:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[\mathbf{a}]} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} = \mathbf{y}.$$

Nyílvánvaló, hogy az így adott leképezés egy-egyértelmű lineáris leképezés.

Legyen két vektortér izomorf. Egyik tér egy bázisának képvektorai a művelettartás miatt a másik vektortérben is bázist alkotnak, tehát dimenziójuk egyenlő.

10.4 A vektorterek közti izomorfia ekvivalencia reláció

Tétel: A vektorterek körében az izomorfia ekvivalencia reláció.

10.5 Mátrixok lineáris terének és a lineáris leképezések terének kapcsolata

Az $L : V^n \to W^k$ leképezés izomorf a $k \times n$-es mátrixok vektorterével.

10.6 Példa: az $(a, 0), a \in \mathbb{R}$, alakú komplex számok és a valós számok izomorfiája

Tétel: Az $(a, 0)$ komplex számok és a valós számok között egy-egy értelmű, művelettartó leképezés létesíthető, vagyis az $(a, 0)$ komplex számok izomorfak a valós számokkal.

10.7 Az $a + b$i képlet magyarázata

Tétel: Minden komplex szám felírható olyan kéttagú összegként, ahol az első tag mindkét tényezőjének van izomorf képe a valós számok között, a másodiknak pedig egy tényezője rendelkezik e tulajdonságokkal: $(a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$.

Bizonyítás: Az $(1, 0)$ neve valós egység, valós megfelelője 1. A $(0, 1)$ neve képzetes egység, jelöljük őt i-vel. Az i komplex számnak nincs valós megfelelője!
Ekkor $\mathbb{C}$ minden eleme $a + bi$ alakban írható fel, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.

11 Lineáris leképezések

11.1 Lineáris leképezés mátrixának definíciója, szerepe, példák

Definíció: Az $L : V^n \to W^k$ lineáris leképezésn pátrixa $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}][\mathbf{b}]} = [\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2|...|\mathbf{k}_n]$, ahol $\mathbf{k}_i := L(\mathbf{a}_i)$ az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopai a V^n-beli $[\mathbf{a}]$ bázis $\mathbf{a}_i$ vektorainak képei a W^k-beli $[\mathbf{b}]$ bázisra vonatkozóan.

Tétel: Legyen $L : V^n \to W^k$ a lineáris leképezés, $\mathbf{A}$ a leképezés mátrixa, $\mathbf{x} \in V$ tetszőleges, $y \in W$ ennek képe:

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Bizonyítás: Konstruktív, a bizonyítás során meg is adjuk a kérdéses mátrixot. Legyen V^n bázisa $[\mathbf{a}] = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$, W^k bázisa $[\mathbf{b}] = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_k$. A tétel állítása szerint a kiindulási tér bázisvektorainak képét kell felírnunk:

$$L(\mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ji}\mathbf{b}_j.$$

Tetszőleges vektor a kiindulási térben az $[\mathbf{a}]$ bázis szerint:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i.$$

A vektor képe:

$$L(\mathbf{x}) = L(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i) = \alpha_1 L(\mathbf{a}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{a}_2) + ... + \alpha_n L(\mathbf{a}_n).$$

Behelyettesítve az $L(\mathbf{a}_i)$ bázisvektorok képeit:

$$L(\mathbf{x}) = \alpha_1(\beta_{11}\mathbf{b}_1 + \beta_{21}\mathbf{b}_2 + ... + \beta_{k1}\mathbf{b}_k) + \alpha_2(\beta_{12}\mathbf{b}_1 + \beta_{22}\mathbf{b}_2 + ... + \beta_{k2}\mathbf{b}_k) + ... + \alpha_n(\beta_{1n}\mathbf{b}_1 + \beta_{2n}\mathbf{b}_2 + ... + \beta_{kn}\mathbf{b}_k)$$

Csoportosítsuk az egyenletet a bázisvektorok szerint, hogy leolvashassuk a koordinátákat:

$$L(\mathbf{x}) = (\beta_{11}\alpha_1 + \beta 12\alpha_2 + ... + \beta_{1n}\alpha_n)\mathbf{b}_1 + (\beta_{21}\alpha_1 + \beta 22\alpha_2 + ... + \beta_{2n}\alpha_n)\mathbf{b}_2 + ... + (\beta_{k1}\alpha_1 + \beta k2\alpha_2 + ... + \beta_{kn}\alpha_n)\mathbf{b}_k.$$

Látható, hogyha a $\beta_{i1}, \beta_{i2}, ..., \beta_{in}$ skalárokat egy mátrik i-edik sorának tekintjük, akkor $\mathbf{x}$ képének a koordináta vektorát e mátrix segítségével egyszerű szorzással számolhatjuk:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{[\mathbf{a}]} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

Ahol a γ_i a kép koordinátái $[\mathbf{b}]$ bázisban.

11.2 Speciális valós lineáris leképezések mátrixai

11.2.1 Vetítés:

- Vetítés az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ síkra:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Vetítés az $\mathbf{i}, \mathbf{k}$ síkra:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Vetítés a $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ síkra:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11.2.2 Forgatás:

Két dimenzióban az origó körüli θ szöggel való forgatás mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

11.3 A trigonometrikus addíciós tételek bizonyítása forgatási mátrixokka

Tétel: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$, valamint $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Bizonyítás: A feladatot felfoghatjuk úgy, mintha először α, majd β szöggel fordítsuk el a leképezendő vektorokat, tehát a leképezések mátrixait így írhatjuk föl:

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\alpha+\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Tehát ha először α-val, majd β-val forgatjuk el, akkor

$$\mathbf{C}_{\alpha+\beta} = \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\alpha \mathbf{x})$$

ami a mátrixok tulajdonságai miatt:

$$\mathbf{C}_{\alpha+\beta} = (\mathbf{B}_\beta \mathbf{A}_\alpha)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

Ebből nyílván kapjuk a bizonyítandót.

11.4 A skalárszorzat, mint lineáris leképezés

11.5 A legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomok tere, és a polinomok deriválása, integrálása, mint lineáris leképezés, ezek mátrixai

Az $n-1$-edfokú polinomot a következő képpen írhatjuk fel:

$$P = a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1}$$

Az ilyen alakú polinomok vektorteret alkotnak. Ha ebben a vektortérben rendre az $1, x, x^2, ...$ ismeretleneket tekintjük bázisvektoroknak, akkor a fenti egyenlet koordinátás alakja:

$$P = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

A deriválás és integrálás ezen a vektortéren lineáris leképezés, ezért fölírható mátrixszal. A leképezés mátrixába a bázisvektorok képei kerülnek, tehát:

11.5.1 Deriválás

A deriválás $L_D : p^{n-1} \to p^{n-2}$ leképezés, melynek A_D mátrixa:

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{bmatrix}.$$

Ahol $\mathbf{A}_d$ egy $(n-1) \times n$-es mátrix.

11.5.2 Integrálás:

Az integrálás $L_I : p^{n-1} \to p^n$ leképezés, melynek $\mathbf{A}_i$ mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Ahol $\mathbf{A}_i$ egy $(n+1) \times n$-es mátrix.

11.6 Lineáris leképezések összege, skalárszorosa

11.7 Homogén lineáris leképezések összeadása

Definíció: Legyenek V és W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A, B : V^n \to W^k$ lineáris leképezések. Továbbá legyen $\mathbf{x} \in V$ vektor. Az A és B lineáris leképezések összege:

$$(A+B)\mathbf{x} = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}).$$

Definíció: Legyenek V és W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A : V^n \to W^k$ lineáris leképezés. Továbbá legyen $\mathbf{x} \in V$ vektor, és λ szám. Az A lineáris λ skalárszorosa:

$$(\lambda A)\mathbf{x} = \lambda A(\mathbf{x}).$$

11.8 Homogén lineáris leképezések lineáris tere

Tétel: A $V^n \to W^k$ leképezés halmaza a fent definiált összegre és számszorosra nézve $k \times n$ dimenziós vektorteret alkot.

Tétel: A $V^n \to W^k$ leképezés lineáris tere izomorf a $k \times n$-es mátrixok vektorterével.

11.9 Áttérés más bázispárra

Tétel: Legyen $V \neq \{0\}$ vektortér, $[\mathbf{e}]$ és $[\mathbf{u}]$ két bázis V-ben. Ha V vektortér $\mathbf{x}$ vektorának koordináta mátrixa $\mathbf{x}_{[\mathbf{e}]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]}$ az $[\mathbf{e}]$ bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon $\mathbf{x}$ vektor $[\mathbf{u}]$ bázisban felírt koordináta mátrixa az alábbi képletből számolható:

$$\mathbf{x}_{[\mathbf{u}]} = \mathbf{U}_{[\mathbf{e}]}^{-1} \mathbf{x}_{[\mathbf{e}]},$$

ahol az $\mathbf{U}$ mátrix oszlopai az $[\mathbf{u}]$ bázis vektorainak az $[\mathbf{e}]$ bázisra vonatkozó koordinátamátrixai. Az $\mathbf{U}$ mátrixot áttérési mátrixnak hívjuk.

11.10 Mátrixok diagonalizálása

Tétel: Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve e bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, ahol a főátlóban a sajátértékek állnak.

$$\mathbf{A}_{[\mathbf{a}']} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

12 Euklideszi tér

12.1 Bilineáris függvény fogalma

Definíció: Legyen a V vektortér a valós test felett. Az $L : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezést bilineáris függvénynek nevezzük, ha mindkét változójában lineáris. L minden $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ vektorpárjához egyértelműen hozzárendel egy valós számot, amit $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$-vel jelölünk.

1. Lineáris:
   (a) $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
   (b) $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$.
2. Homogén:
   (a) $L(\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \lambda L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
   (b) $L(\mathbf{v}_1, \lambda\mathbf{v}_2) = \lambda L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ vektorok.

Definíció: Az L bilineáris függvénynek a $[\mathbf{b}] = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$ bázis szerinti $\mathbf{L}$ mátrixán azt az $n \times n$-es mátrixot értjük, melyben az i-dik sor j-dik eleme $l_{ij} = L(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$.

Tétel: Ha $L : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris függvény, akkor $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ és $\mathbf{A}$ a bilineáris függvény mátixa.

Definíció: Az L bilineáris függvény szimetrikus, ha $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$.

Tétel: Az L bilineáris függvény akkor és csak akkor szimetrikus, ha a mátrixa szimetrikus.

12.2 Példa: skalárszorzat fogalma, skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-ben és $\mathbb{C}^n$-ben

Definíció: Az $s : V \times V \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvényt, melynek függvényértékét $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =< \mathbf{x}, \mathbf{y} >$-nal jelöljük, skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall\mathbf{x} \in V$ esetén $< \mathbf{x}, \mathbf{x} >\geq 0$, és $< \mathbf{x}, \mathbf{x} >= 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Szimetrikus: $\forall\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$-re $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >=< \mathbf{y}, \mathbf{x} >$.
3. Homogén: $\forall\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ és $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $< \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} >= \lambda < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$.
4. Lineáris: $\forall\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$-re $< \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} >=< \mathbf{x}, \mathbf{z} > + < \mathbf{y}, \mathbf{z} >$.

Tétel: Két tetszőleges n dimenziós $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatán a következő számot értjük:

$$\mathbf{ab} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

ahol a_i, b_i a vektorok megfelelő koordinátái.

Definíció: A $V \times V \to \mathbb{C}$ függvényt skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall\mathbf{z} \in V$-re $< \mathbf{z}, \mathbf{z} >\geq 0, < \mathbf{z}, \mathbf{z} >= 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = 0$.
2. Szimetrikus: $\forall\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$-re $< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >=< \overline{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1} >$.
3. Homogén:
   (a) $\forall\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$-re $< \lambda\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >= \overline{\lambda} < \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >$.
   (b) $\forall\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$-re $< \mathbf{z}_1, \lambda\mathbf{z}_2 >= \lambda < \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >$.
4. Lineáris:
   (a) $\forall\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in V$-re $< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 >=< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 > + < \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 >$.
   (b) $\forall\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in V$-re $< \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 >=< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 > + < \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 >$.

12.3 Euklideszi tér definíciója

Definíció: A skalárszorzattal ellátott tereket Euklideszi tereknek nevezzük.

12.4 Skalárszorzat, norma, metrika, és ezek kapcsolata euklideszi terekben

Definíció: A H halmazt metrikus térnek nevezzük, ha van olyan metrikának nevezett $d : H \times H \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kétváltozós függvény, amelyre a következők teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. Szimetrikus: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Definíció: A V vektorteret normált-nak nevezzük, ha van olyan $n : V \to \mathbb{R}$ egyváltozős függvény, az úgynevezett norma (jelölése: $n(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||$), amelyre a következők teljsülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{x} \in V$-re $||\mathbf{x}|| \geq 0$, és $||\mathbf{x}|| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Homogén: $\forall \mathbf{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$-re $||\alpha \mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||$.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.

Tétel: Minden normált tér metrikus tér.

Tétel: Minden euklideszi tér normált tér.

Tétel: Minden euklideszi tér metrikus tér.

12.5 Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség euklideszi terekben és speciálisan $\mathbb{R}^n$-ben

Tétel: (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség): $| < \mathbf{a}, \mathbf{b} > | \leq ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||$.

Bizonyítás: Tekintük az $< \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} >$ skalárszorzatot. $0 \leq < \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} >$ a pozitív definitség miatt.

$$0 \leq < \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} > = < \mathbf{a}, \mathbf{a} > + < \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} > + < \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} > + < \lambda \mathbf{b}, \lambda \mathbf{b} > =$$

$$= < \mathbf{a}, \mathbf{a} > +2 < \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} > + < \lambda \mathbf{b}, \lambda \mathbf{b} > = \lambda^2 < \mathbf{b}, \mathbf{b} > +2\lambda < \mathbf{a}, \mathbf{b} > + < \mathbf{a}, \mathbf{a} > .$$

Ez λ-ra nézve egy kétismeretlenes másodfokú egyenlőtlenség. Mivel ennek a függvénynek legfeljebb 1 gyöke lehet, a diszkrimináns nem pozitív, azaz

$$4(< \mathbf{a}, \mathbf{b} >)^2 - 4 < \mathbf{b}, \mathbf{b} >< \mathbf{a}, \mathbf{a} > \leq 0 \Rightarrow < \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2 \leq < \mathbf{a}, \mathbf{a} >< \mathbf{b}, \mathbf{b} >,$$

Amiből

$$| < \mathbf{a}, \mathbf{b} > | \leq ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||.$$

12.6 Szög fogalmának általánosítása

Definíció: Euklideszi térben két vektor, az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ által beárt α szöget a következőképpen lehet értelmezni. Legyen $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ egy skalárszorzat V-ben, és valamely $\mathbf{x}$ vektor normája $||\mathbf{x}|| := \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >}$. Ekkor

$$\cos \alpha = \frac{< \mathbf{a}, \mathbf{b} >}{||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||}.$$

13 Lineáris egyenletrendszerek

13.1 Lineáris egyenletrendszer

Definíció: A lineáris egyenletrendszer lineáris egyenletekből áll. Egy egyenletet lineárisnak nevezünk, ha a benne szereplő ismeretlenek legfeljebb első hatványon vannak.
Általános alakja:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + 1_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + 1_{2n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + 1_{nn}x_n = b_n$$

Olyan lineáris egyenletrendszert nevezünk homogénnek, amelyben az egyenletrendszer egyenleteiben a jobboldali konstansok mindegyike 0.
A lineáris egyenletrendszer inhomogén, ha nem homogén.

13.2 Gauss elimináció

Algoritmus: Lépcsős alak kialakítása Gauss eliminációval:

1. Legyen $i = 1$.
2. Vizsgáljuk meg: $a_{ii} = 0$? Ha igen, akkor érjük el sorok cseréjével, hogy $a_{ii} \neq 0$, ha nem, lépjünk a harmadik lépésre.
3. Az i-edik ismeretlent kiküszöböljük a k-adik $(k = i + 1, i + 2, ..., n)$ egyenletből, úgy, hogy az i-edik egyenlet $(\frac{a_{ki}}{a_{ii}})$ szeresét hozzáadjuk a k-adik sorhoz.
4. Ekkor ha
   (a) a k-adik sor többi együtthatója is, és konstans tagja is nulla, akkor ezt a sort elhagyjuk.
   (b) a k-adik sor együtthatói nullák, de a konstans nem nulla, tiltó sort kapunk, hiszen a nullák lineáris kombinációjából csak nullát kaphatnánk. Ekkor az eljárás befejeződött, az egyenletrendszernek nincs megoldása.
   (c) Ha a fenti két eset nem fordul elő, és van $(i + 1)$-edik sor, akkor növeljük meg az i értékét egyel, és ezzel az új i-vel az 2., 3., 4., lépést újra hajtsuk végre. Ha nincsen már több sor, akkor végrehajtottuk a Gauss eliminációt, és megkaptuk a lépcsős alakot.

13.3 Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága, mátrix rangja

Definíció: Vektorrendszer rangján a vektorok által generált altér dimenzióját értjük. Mátrix sorrangján a sorvektorok rangját, mátrix oszloprangján az oszlopvektorok rangját, determináns rangján pedig a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nem nulla determináns méretét értjük.

Tétel: Mátrix sor-, oszlop-, és determinánsrangja megegyezik. E tétel miatt elegendő egyszerűen a mátrix rangjáról beszélni, jelölése: $rang(\mathbf{A})$.

Következmény: Az $n \times m$-es mátrixok rangja legfeljebb $\min(n, m)$ lehet.

Tétel: Ha A $n \times n$ típusú mátrix, akkor

- $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor reguláris, ha rangja n.
- $rang(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{A}$ is reguláris $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$-nek egyetlen megoldása van.
- $rang(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$-nak van nem triviális megoldása.

Tétel: Ha $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $rang(\mathbf{A}) = rang(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, vagyis az együttható mátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával.

Bizonyítás: Az egyenletrendszert a következő alakban írjuk: $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$.
Ha a rangok egyenlők, az egyenletrendszer megoldható:
Ha $rang(\mathbf{A}) = rang(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$, akkor bármely $r+1$ darab oszlopvektor összefüggő. Legyenek $\mathbf{A}$ független vektorai $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_r$. Ezekhez $\mathbf{b}$-t hozzátéve összefüggő rendszert kapunk. Mivel $\mathbf{b}$ "rontotta" el a függetlenséget, ezért $\mathbf{b}$ kifejezhető az $\mathbf{a}_i$-k lineáris kombinációjával, amelyben a skalár együttható x_i-k az egyenletrendszer megoldásai, vagyis:

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n.$$

Az állítás másik része: ha az egyenletrendszer megoldható, akkor a rangok egyenlők.
Legyen egy meoldás: $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n$, és $rang(\mathbf{A}) = r$.
Azt kell bizonyítani, hogy $rang(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$, vagyis hogy bármely $r+1$ oszlopvektora lineárisan összefügg, és van r lineárisan független oszlopa. Ezen utóbbi $\mathbf{A}$ rangja miatt teljesül.
Ha az $r+1$ vektor csak $\mathbf{a}$-kból áll, akkor $\mathbf{A}$ rangja miatt ezek összefüggők.
Ha az $r+1$ vektor egyike a $\mathbf{b}$ vektor, akkor két eset van:

1. Az r darab $\mathbf{a}_i$ vektor összefüggő, ekkor $\mathbf{b}$-t hozzátéve is összefüggő marad, ezért a rang nem változik.
2. Az r darab $\mathbf{a}_i$ vektor lineárisan független. Ekkor bármely más $\mathbf{a}_j$-t hozzátéve összefüggő lesz, külömben $\mathbf{A}$ rangja $r+1$ lenne. A hozzávett $\mathbf{a}_j$-k azonban az ismert tétel szerint kifejezhetők az eredeti $\mathbf{a}_i$-kkel. Ezeket a $\mathbf{b}$ előállításába helyettesítve azt kapjuk, hogy $\mathbf{b}$ kifejezhető az r darab $\mathbf{a}_i$ lineárisan független vektorral, tehát az r darab $\mathbf{a}_i$ vektor és $\mathbf{b}$ lineárisan összefüggő, ezért a rang nem változik.

13.4 Mátrix rangja, determinánsa és inverze létezésének összefüggése

Állítás: Ha $det(\mathbf{A}) = 0$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris, azaz nincs inverze.

Tétel: Egy $\mathbf{A}$ $n \times n$ típusú mátrix akkor és csak akkor reguláris (van inverze), ha rangja n.

13.5 Egyenletrendszer megoldása inverz mátrixszal

Legyen adott egy egyenletrendszer mátrix alakban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ahol $\mathbf{x}$ az ismeretleneket tartalmazó vektor, $\mathbf{b}$ pedig adott vektor. Így az egyenletrendszer:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Ha $det(\mathbf{A}) \neq 0$ és $n = m$, akkor $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, és az egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

13.6 Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása

13.6.1 Vektorok függetlenségének megállapítása

Állítás: Ha egy mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot felépítő vektorok lineárisan függetlenek.

13.6.2 Generátorrendszer és bázis megállapítása

A generátorrendszer vizsgálására alkalmazhatjuk a lineáris egyenletrendszerek tulajdpnságait, ugyanis megnézhetjük egyenként, hogy milyen vektorokat állít elő lineáris kombinációként.

Ha a vektorok lineárisan függetlenek is, és generátorrendszert alkotnak az adot vektortérre, akkor ezek a vektorok bázisok.

13.6.3 Mátrix inverz számítása Gauss eliminációval

Állítás: Adott $n \times n$ típusú mátrix inverzét számolhatjuk a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & | & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Gauss-Jordan eliminációjával.

Bizonyítás:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

A szorzat n azonos mátrixot ad, melyek rendre az egységmátrix elemeit adják. Tehát Gauss-Jordan eliminációt végezve felesleges n-szer leírni az együtthatómátrixot, elegendő egyszer leírni, és a kibővített mátrixba nem egy, hanem n további oszlopba beírni rendre a konstansok oszlopvektorait.

14 Determinánsok

14.1 Definíció, tulajdonságok

Definíció: Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix a_{ik} eleméhez tartozó minormátrixának nevezzük, és $\mathbf{A}_{ik}$-val jelöljük azt az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixot, melyet úgy kapunk az $\mathbf{A}$-ból, hogy annak i-edik sorát és k-adik oszlopát elhagyjuk.

Definíció: Ha az $(n-1)$-edrendű mátrix determinánsát már értelmeztük, az n-ed rendű $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának nevezzük a következő számot:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det(\mathbf{A}_{1j}).$$

Tulajdonságok:

1. A determináns egy sorát λ számmal beszorozva a determináns az eredeti értékének λ-szorosa lesz.
2. Ha a determináns i-edik sorának minden eleme kéttagú összeg, akkor két olyan determináns összegére bontható, melyből az első i-edik sorában az összeg első tagjai, a második determináns i-edik sorában az összeg második tagjai szerepelnek, a többi elem változatlan.
3. Ha egy determináns egy sora csupa 0 elemet tartalmaz, akkor a determináns 0.
4. Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor az eredeti determináns (-1)-szeresét kapjuk.
5. Ha egy determináns két sora megegyezik, akkor a determináns értéke 0.
6. Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk valamely sor λ-szorosát, a determináns értéke nem változik.
7. Egy alsó (vagy felső) háromszögdetermináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata.
8. A determinánst ferdén kifejtve 0-t kapunk.
9. A fenti, sorra vonatkozó tulajdonságok mindegyike igaz oszlopra is.

14.2 Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra

A fenti tulajdonságok használatával elérhetjük, hogy a determináns háromszög-determináns legyen, és így értéke a főátlóból leolvasható.

14.3 Inverz mátrix képlete

Tétel: Ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, és $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor $\exists \mathbf{A}^{-1}$, és $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A})$.

14.4 Inverz mátrix képletének levezetése

Tétel: Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixot az adjungáltjával jobbról megszorozva az eredmény $\det(\mathbf{A})\mathbf{E}_n$.

Bizonyítás: A szóban forgó szorzat így néz ki:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D1n \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & Dnn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & cnn \end{bmatrix}$$

Ekkor az eredménymátrix elemeit kiszámítva:

$$c_{11} = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{21} + ... + a_{1n}Dn1 = a_{11}D_{11}$$

$$c_{21} = a_{21}D_{12} + a_{22}D_{22} + ... + a_{2n}Dn2 = a_{22}D_{22}$$

$\vdots$

$$c_{11} = a_{n1}D_{1n} + a_{n2}D_{2n} + ... + a_{nn}Dnn = a_{nn}D_{nn}$$

A nem főátlóban elhelyezkedő elemek szintén a ferde kifejtés miatt 0-k lesznek.

Bizonyítás: Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, ezért az inverz egyértelmű. Ha tehát létezik egy mátrix, melyre $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_n$, akkor ez a $\mathbf{B}$ mátrix inverze az $\mathbf{A}$ mátrixnak. A fenti tétel szerint $\mathbf{A}adj(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{E}_n$. Ezt beszorozva $\frac{1}{\det(\mathbf{A})}$-val kapjuk az állítást.

14.5 Három térvektor vegyes szorzata és geometriai jelentése

Definíció: Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ valós számot az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának nevezzük.
Az eddigi definíciókat felhasználva $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\alpha) \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos(\beta)$, ahol α az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge, β pedig $\mathbf{c}$, és az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok által meghatározott sík normálvektorának a hajlásszöge.

Geometriai jelentés: Tekintsük az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedont. Alapja az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott paralelogramma, aminek területét az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ adja meg.
$\cos(\beta) \cdot |\mathbf{c}|$, pedig a paralelepipedon magassága, hiszen ez a sík normálvektorára vetett merőleges vetülete. Ekkor ezek szorzataként kapjuk a paralelepipedon térfogatát.

14.6 Determináns kifejtési és ferde kifejtési tétele

Tétel: (Kifejtési tétel:) Egy n-edrendű determináns tetszőleges sora vagy oszlopa szerint kifejthető, és

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}D_{ij}$$

Tétel: (Ferde kifejtési tétel:) Ha egy determináns egyik sorának elemeit rendre valamely másik sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk meg, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, az eredmény 0.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_{kj} = 0, \quad i \neq k.$$

15 Komplex vektortér

15.1 Komplex vektortér

Definíció: Legyen $\mathbb{C}$ a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$. A $\mathbb{C}$-n két műveletet értelmezünk: egy összeadás, és egy szorzás nevűt. A szokásos módon $+$ és $\cdot$ jelekkel jelöljük ezeket. A $\mathbb{C}$ halmaz elemei a műveletekkel együtt alkotják a komplex számokat.

Definíció: Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha első és második elemeik egymással páronként egyenlők: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

Következmény: $(a,b) \neq (b,a)$, kivéve, ha $a = b$.

Definíció: Összeadás: $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{C}$.

Definíció: Szorzás: $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$.

Tétel: A $\mathbb{C} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok testet alkotnak az előző műveletekre nézve.

Tétel: A $\mathbb{C} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok vektorteret alkotnak a valós számok teste felett.

15.2 Komplex skalárszorzat, norma, metrika fogalma, kapcsolatuk egymással és számításuk

Definíció: A $V \times V \to \mathbb{C}$ függvényt skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{z} \in V$-re $< \mathbf{z}, \mathbf{z} > \geq 0, < \mathbf{z}, \mathbf{z} >= 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = 0$.
2. Szimetrikus: $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$-re $< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >=< \overline{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1} >$.
3. Homogén:
   (a) $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$-re $< \lambda\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >= \overline{\lambda} < \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >$.
   (b) $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$-re $< \mathbf{z}_1, \lambda\mathbf{z}_2 >= \lambda < \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >$.
4. Lineáris:
   (a) $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in V$-re $< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 >=< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 > + < \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 >$.
   (b) $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in V$-re $< \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 >=< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 > + < \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 >$.

Definíció: A H halmazt metrikus térnek nevezzük, ha van olyan metrikának nevezett $d : H \times H \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kétváltozós függvény, amelyre a következők teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. Szimetrikus: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Definíció: A V vektorteret normált-nak nevezzük, ha van olyan $n : V \to \mathbb{R}$ egyváltozős függvény, az úgynevezett norma (jelölése: $n(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||$), amelyre a következők teljsülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{x} \in V$-re $||\mathbf{x}|| \geq 0$, és $||\mathbf{x}|| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Homogén: $\forall \mathbf{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$-re $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||$.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.

Tétel: Minden normált tér metrikus tér.

Tétel: Minden skalárszorzaos tér normált tér.

Tétel: Minden Euklideszi tér metrikus tér.

15.3 Speciális komplex transzformációk (hermitikus, ferdén hermitikus, unitér) és tulajdonságaik

1. Hermitikus mátrixok:
$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T.$$
Sajátértékei tisztán valósak.

2. Ferdén Hermitikus mátrix:
$$\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}}^T.$$

3. Unitér mátrix:
$$\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}^T.$$
Sajátértékeinek abszolút értéke 1.

Bizonyítás: (Unitér mátrix sajátértékeinek abszolútértéke 1:)

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \quad (\overleftarrow{\mathbf{Ax}})^T = (\overline{\lambda\mathbf{x}})^T.$$

Ezt a két egyenletet összeszorozva kapjuk a következőt:

$$(\overleftarrow{\mathbf{Ax}})^T\mathbf{Ax} = (\overline{\lambda\mathbf{x}})^T\lambda\mathbf{x}$$

$$\overline{\mathbf{x}}^T\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{Ax} = \lambda\overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}$$

$$\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} = \lambda^2\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}$$

$$\lambda^2 = 1.$$

16 Ortogonalitás

16.1 Vektorterek és euklideszi terek kapcsolata

Definíció: A skalárszorzattal ellátott vektortereket euklideszi tereknek nevezzük.

Tétel: Minden véges dimenziós vektortérben megadható skalárszorzat.

16.2 Ortogonális vektorok függetlenségésnek bizonyítása térvektorok és magasabb dimenziók esetén

Tétel: Ortogonális, nem nulla vektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: A függetlenség definíciójából indulunk ki:
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i = 0$ csak akor, ha $\forall \lambda_i = 0$. Vegyük rendre az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ vektorokkal való skalárszorzatot.

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n = 0 \qquad / \cdot \mathbf{x}_j \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Ezzel azt kapjuk, hogy $\lambda_i < \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i >= 0$. A skalárszorzat pozitív definit tuljdonsága miatt ez csak akkor teljesül, ha $\lambda_i = 0$.

16.3 Gram Schmidt ortogonalizáció ismertetése

Tétel: Minden altérben van ortogonális bázis.

Bizonyítás: Konstruktív, azt bizonyítjuk, hogy minden független rendszerből kiindulva, így bázisból is, tudunk ugyanolyan elemszámú ortogonális rendszert konstruálni. Gram-Schmidt ortogonalizáció: Legyen $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$ egy független rendszer. Ebből képezzük $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, ..., \mathbf{c}_n$ ortogonális rendszert a következőképpen:

$$\mathbf{c}_1 := \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{c}_n := \mathbf{b}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_i >}{< \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i >} \mathbf{c}_i.$$

A konstrukció miatt a kapott rendszer ortogonális.

16.4 Ortonormált bázis létezése

Definíció: Ortonormált a vektorrendszer, ha páronként ortogonális, és minden elemének normája 1.

Következmény: Minden euklideszi térnek van ortonormált bázisa.

Bizonyítás: Konstruktívan, normáljuk a Gram-Schmidt ortogonalizációból kapott bázist.

16.5 Térvektorok felbontása adott vektorral párhuzamos, illetve arra merőleges összetevőkre

Tétel: Térvektorok felbontása adott vektorral párhuzamos, illetve arra merőleges összetevőkre: Adottak az **a** és a **b** vektorok. Az **a** vektor felírható a **b** vektorral párhuzamos, illetve erre merőleges összetevők összegeként:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_b} + \mathbf{a}_m, \quad \mathbf{a_b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e_b})\mathbf{e_b}, \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a_b}$$

16.6 Ortogonális mátrix fogalma

Definíció: A **G** mátrix ortogonális, ha $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{E}$, ahol **E** a megfelelő típusú egységmátrix.

17 Bázistranszformáció

17.1 Transzformáció mátrixa, ha áttérünk másik bázisra

Tétel: Legyen $V \neq \{0\}$ vektortér, $[\mathbf{e}]$ és $[\mathbf{u}]$ két bázis V-ben. Ha V vektortér $\mathbf{x}$ vektorának koordináta mátrixa $\mathbf{x}_{[\mathbf{e}]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]}$ az $[\mathbf{e}]$ bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon $\mathbf{x}$ vektor $[\mathbf{u}]$ bázisban felírt koordináta mátrixa az alábbi képletből számolható:

$$\mathbf{x}_{[\mathbf{u}]} = \mathbf{U}_{[\mathbf{e}]}^{-1} \mathbf{x}_{[\mathbf{e}]},$$

ahol az $\mathbf{U}$ mátrix oszlopai az $[\mathbf{u}]$ bázis vektorainak az $[\mathbf{e}]$ bázisra vonatkozó koordinátamátrixai. Az $\mathbf{U}$ mátrixot áttérési mátrixnak hívjuk.

17.2 Mátrixok diagonalizálása

Tétel: Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve e bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, ahol a főátlóban a sajátértékek állnak.

$$\mathbf{A}_{[\mathbf{a}']} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik egy olyan $\mathbf{S}$ mátrix, amellyel fennáll, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$.

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

17.3 Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció: Egy sajátérték algebrai multiplicitás alatt a gyöktényezős alakban felírt karakterisztikus polinomban a megfelelő sajátérték hatványa.

Definíció: A sajátérték geometriai multiplicitásán az általa meghatározott altér dimenzióját értjük.

17.4 A diagonalizálás elégséges feltétele

Ha valamely $\mathbf{A}$ kvadratikus $(n \times n)$-es mátrix sajátértékei mind külömbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.