Valószínűségszámítás vizsgatételek

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Tétel

1.1. Eseménytér

Eseménytérnek nevezünk egy Ω nemüres halmazt.

1.1.1. Esemény

Események az eseménytér részhalmazai. Elemi események az esetménytér egyelemű részhalmazai.

1.2. σ-algebra

$\mathcal{F}$ legyen Ω részhalmazainak olyan rendszere, hogy

1. $\mathcal{F}$ zárt a véges és a megszámlálhatóan végtelen unióra
2. $\mathcal{F}$ zárt a különbségképzésre
3. $\Omega \in \mathcal{F}$.

Ekkor $\mathcal{F}$ egy σ-algebra, az elemeit pedig eseménynek nevezzük.

1.2.1. Következmény

Ha $\mathcal{F}$ egy σ-algebra, akkor zárt a komplementerképzésre és a metszetre is, hiszen

$$A^C = \Omega \backslash A$$
$$A \cap B = \left(A^C \cup B^C\right)^C = \Omega \backslash \big((\Omega \backslash A) \cup (\Omega \backslash B)\big).$$

1.2.2. Példa azonos eseménytér feletti különböző σ-algebrákra

Legyen $\Omega = \{1, 2\}$. Ekkor legyen

$$\mathcal{F}_1 = \big\{\emptyset, \{1, 2\}\big\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}.$$

2. Tétel

2.1. Eloszlás

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ξ eloszlása

$$Q_\xi(A) = P\big(\xi^{-1}(A)\big).$$

2.2. Eloszlásfüggvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye $F_\xi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P\big(\omega \in \Omega \big| \xi(\omega) < x\big) = P\big(\xi^{-1}(-\infty, x)\big) = Q_\xi\big((-\infty, x)\big).$$

2.2.1. Tulajdonságok

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye F_ξ. Ekkor

1. F_ξ monoton nő
2. F_ξ balról folytonos
3. $$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$$
4. $$\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1.$$

2.3. Diszkrét eloszlású valószínűségi változó

Egy valószínűségi változót diszkrétnek nevezünk, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel.

2.3.1. Képtér

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ képtere

$$\operatorname{Im} \xi = \{\xi_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \big| \omega \in \Omega\}.$$

2.3.2. Eloszlás

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ξ eloszlása

$$Q_\xi(A) = P\big(\xi^{-1}(A)\big) = \sum_{\xi_i \in \xi^{-1}(A)} P(\xi = \xi_i).$$

2.3.3. Eloszlásfüggvény

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$F_\xi(x) = Q_\xi\big((-\infty, x)\big) = \sum_{\xi_i < x} P(\xi = \xi_i).$$

3. Tétel

3.1. Független események

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. $A, B \in \mathcal{F}$ függetlenek pontosan akkor, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

3.2. Független eseményrendszer

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor az $(A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ eseményrendszer független, ha az A_k események páronként függetlenek. Ekkor

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

3.3. Feltételes valószínűség

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor $A \in \mathcal{F}$ feltételes valószínűsége $B \in \mathcal{F}$ szerint

$$P_B(A) = P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

3.4. Teljes valószínűség tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $(B_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer, melyre $\forall P(B_k) > 0$. Ekkor $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k).$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k) \implies P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k)$$

és $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Ekkor

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k).$$

3.5. Bayes tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $(B_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer, melyre $\forall P(B_k) > 0$. Ekkor $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $P(B_k|A)P(A) = P(B_k \cap A) = P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$. Ebből

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}.$$

4. Tétel

4.1. Binomiális eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, ha

$$P(\xi = k)_{k \leq n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ekkor

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \sum_{m=0}^{k} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, & \text{ha } k < x \leq k+1. \\ 1, & \text{ha } x > n. \end{cases}$$

4.1.1. Példa

Valószínűségszámításból egy hallgató p valószínűséggel megy át. Ekkor n hallgatóból átment hallgatók száma binomiális eloszlású.

4.2. Poisson eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

4.3. Kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között

A Poisson eloszlás közelíti, illetve határértékben felveszi a binomiális eloszlást ha $np = \lambda$ állandó (tehát a várható értékük azonos).

Bizonyítás

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

5. Tétel

5.1. Geometrikus eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó p paraméterű geometrikus eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

5.1.1. Példa

Valószínűségszámításból egy hallgató p valószínűséggel megy át. Ekkor annak a valószínűsége, hogy hanyadik hallgató megy át először, geometrikus eloszlású.

5.1.2. Várható érték

ξ p paraméterű geometrikus eloszlású valószínűség változó várható értéke $\frac{1}{p}$.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{n} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}.$$

Tudjuk, hogy $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ha $x \in (-1,1)$. Ezen felül tudjuk, hogy egy hatványsor a konvergenciahalmaz belső pontjaiban tagonként differenciálható, tehát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Mivel $1-p \in (-1,1)$, így azonnal kapjuk, hogy $E(\xi) = \frac{1}{p}$.

5.2. Hipergeometrikus eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó (N, K, n) paraméterű hipergeometrikus eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

5.2.1. Példa

Valószínűségszámításból K darab fiú és $N-K$ darab lány vizsgázik. Feltéve, hogy ugyanakkora valószínűséggel mennek át, annak a valószínűsége, hogy pontosan k hallgató megy át, hipergeometrikus eloszlású.

6. Tétel

6.1. Diszkrét eloszlású valószínűségi változó

Egy valószínűségi változót diszkrétnek nevezünk, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel.

6.1.1. Képtér

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ képtere

$$\operatorname{Im} \xi = \{\xi_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \big| \omega \in \Omega\}.$$

6.1.2. Várható érték kiszámítása

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó és képtere

$$\operatorname{Im} \xi = \{\xi_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \big| \omega \in \Omega\}.$$

Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n).$$

6.2. Binomiális eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, ha

$$P(\xi = k)_{k \leq n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

6.2.1. Várható érték

ξ (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke np.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

hiszen $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ (elnyelési tulajdonság).

$$E(\xi) = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np$$

6.3. Poisson eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

6.3.1. Várható érték

ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értéke λ.

Bizonyítás
Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

7. Tétel

7.1. Valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor a $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

7.1.1. Eloszlás

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ξ eloszlása

$$Q_\xi(A) = P\big(\xi^{-1}(A)\big).$$

7.2. Folytonos eloszlású valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy ξ folytonos eloszlású, ha $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}}$.

7.2.1. Sűrűségfüggvény

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\exists! f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ esetén

$$Q_\xi(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\lambda_{\mathbb{R}} \,.$$

Ekkor f a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, illetve a Q_ξ eloszlás sűrűségfüggvénye.

7.2.1.1. Tulajdonságok

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűség változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel.

1. $f_\xi \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f_\xi \, \mathrm{d}\lambda_{\mathbb{R}} = Q_\xi(\mathbb{R}) = P\big(\xi^{-1}(\mathbb{R})\big) = 1$$

7.2.2. Intervallumba esés valószínűsége

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ folytonos eloszlású valószínűségi változó és $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor

$$P(a < \xi < b) = P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

7.2.3. Kapcsolatos a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény között

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t) \, \mathrm{d}t$$

illetve

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x).$$

8. Tétel

8.1. Folytonos eloszlású valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy ξ folytonos eloszlású, ha $Q_\xi \ll \lambda_\mathbb{R}$.

8.2. Várható érték kiszámítása

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értéke

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi \,\mathrm{d}P = \int_\mathbb{R} \mathrm{id}_\mathbb{R} \,\mathrm{d}Q_\xi = \int_\mathbb{R} \mathrm{id}_\mathbb{R} \frac{\mathrm{d}Q_\xi}{\mathrm{d}\lambda_\mathbb{R}} \,\mathrm{d}\lambda_\mathbb{R} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

8.3. Exponenciális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó α paraméterű exponenciális eloszlású, ha

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

8.3.1. Tétel

Adott ξ α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor f_ξ valóban sűrűségfüggvény.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $f_\xi \ge 0$. Ezen felül

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x = -e^{-\alpha x} \Big|_0^\infty = 1$$

tehát f_ξ valóban sűrűségfüggvény.

8.3.2. Várható érték

ξ α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{\alpha}$.

Bizonyítás

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x \alpha e^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x = -x e^{-\alpha x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

9. Tétel

9.1. Normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó (m, σ) paraméterű normális eloszlású, ha

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

9.1.1. Standard normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha $(m = 0, \sigma = 1)$ paraméterű normális eloszlású. Ekkor

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

és

$$\Phi(x) = F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \, \mathrm{d}t\,.$$

9.1.1.1. Kapcsolat a normális és a standard normális eloszlás között

Adott ξ (m, σ) normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye visszavezethető standard normális eloszlásúra.

Bizonyítás

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t \underset{\substack{z=\frac{t-m}{\sigma} \\ \mathrm{d}t=\sigma \mathrm{d}z}}{=} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-z^2}{2}} \sigma \, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \, \mathrm{d}z = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

10. Tétel

10.1. Szórás, szórásnégyzet

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó véges várható értékkel. Ekkor ξ szórása

$$\sigma(\xi) = \sqrt{E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)^2\Big)}.$$

ξ szórásnégyzete vagy varianciája

$$\sigma^2(\xi) = E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)^2\Big).$$

10.1.1. Kiszámítása

Adott ξ valószínűségi változó. Ekkor

$$\sigma^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi) &= E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)^2\Big) = E\big(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)\big) = E\big(\xi^2\big) - 2E\big(E(\xi)\xi\big) + E\big(E^2(\xi)\big) = \\ &= E\big(\xi^2\big) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi)\end{aligned}$$

10.1.1.1. Diszkrét eset

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és képtere

$$\operatorname{Im}\xi = \{\xi_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \big| \omega \in \Omega\}.$$

Ekkor

$$\sigma^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 P(\xi = \xi_n) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n)\right)^2.$$

10.1.1.2. Folytonos eset

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete

$$\sigma^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

10.2. k oldalú szabályos testtel való dobás szórása

Legyen a dobás eredményét jelző valószínűségi változó ξ. Tudjuk, hogy $\forall P(\xi = n) = \frac{1}{k}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi) &= \sum_{n=1}^{k} n^2 P(\xi = n) - \left(\sum_{n=1}^{k} nP(\xi = n)\right)^2 = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} n^2 - \frac{1}{k^2}\left(\sum_{n=1}^{k} n\right) = \\ &= \frac{1}{k}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{1}{k^2}\frac{k^2(k+1)^2}{4} = \frac{2(k+1)(2k+1) - 3(k+1)^2}{12} = \frac{k^2-1}{12}\end{aligned}$$

11. Tétel

11.1. Mérhető tér

Adott Ω eseménytér és $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ σ-algebra. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F})$ rendezett párt mérhető térnek nevezzük.

11.2. Mérhető függvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér. $f : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{R}$ függvény mérhető, ha $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ esetén

$$f^{-1}(B) := \big\{\omega \in \Omega \big| f(\omega) \in B\big\} \in \mathcal{F}$$

teljesül.

11.2.1. Példa nem mérhető függvényre

Legyen $\Omega = \{1, 2\}, \mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{1, 2\}\big\}$ és f identitásfüggvény. Ekkor

$$f^{-1}(1) = \{1\} \notin \mathcal{F}.$$

11.3. Mérték

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérthető tér. $\mu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ függvény mérték, ha

1. $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén $\mu(A) \geq 0$ teljesül
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $\forall \big(A_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ páronként diszjunkt halmazrendszerre teljesül a σ-additivitás, azaz

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

11.3.1. Példa mértékekre

1. Nullmérték mindenhez 0-t rendel.
2. Számláló mérték elemszámot rendel.
3. x-re koncentrált Dirac-mérték

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A. \end{cases}$$

11.4. Valószínűségi mérték

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mérték. Ha $\mu(\Omega) = 1$, akkor valószínűségi mértéknek nevezzük, jele P.

11.5. Valószínűségi mező

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és P valószínűségi mérték. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ rendezett hármast valószínűségi mezőnek nevezzük.

11.6. Valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor a $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

12. Tétel

12.1. Indikátorfüggvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor $A \in \mathcal{F}$ indikátorfüggvénye

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega \notin A \\ 1, & \text{ha } \omega \in A. \end{cases}$$

12.2. Lépcsős függvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $(A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ rendszer és $(\lambda_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ rendszer. Ekkor $f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ lépcsős függvény

$$f(\omega) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}(\omega).$$

12.3. Lépcsős függvény adott halmaz feletti és mérték szerinti integrálja

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ olyan lépcsős függvény, hogy

$$f(\omega) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}(\omega)$$

és az A_k halmazok páronként diszjunktak. Ekkor

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}P := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(A_k).$$

12.4. Várható érték

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ várható értéke

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi \, \mathrm{d}P \, .$$

12.4.1. Kiszámítása diszkrét esetben

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és képtere

$$\operatorname{Im} \xi = \{\xi_n \big| n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \big| \omega \in \Omega\}.$$

Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n).$$

12.5. Markov egyenlőtlenség

Adott ξ valószínűségi változó és $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ skalár. Ekkor

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi \, \mathrm{d}P \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \xi \, \mathrm{d}P \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \varepsilon \, \mathrm{d}P = \varepsilon \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \mathrm{d}P = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon) \implies P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}$$

13. Tétel

13.1. Külső Lebesgue-mérték

Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ külső Lebesgue-mértéke

$$\overline{\lambda}(A) := \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \middle| A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \right\}$$

ahol $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, $\lambda(I_n)$ pedig az intervallum hossza.

13.2. Mértékek abszolút folytonossága

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mértékek. Azt mondjuk, hogy μ_1 abszolút folytonos μ_2-re nézve, azaz $\mu_1 \ll \mu_2$, ha $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén $\mu_2(A) = 0 \implies \mu_1(A) = 0$.

13.3. Mértékek szingularitása

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mértékek. Azt mondjuk, hogy μ_1 szinguláris μ_2-re nézve, azaz $\mu_1 \perp \mu_2$, ha $\exists \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ olyan halmazok, hogy $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ és $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ és $\mu_1(\Omega_1) = 0$ és $\mu_2(\Omega_2) = 0$.

13.4. Radon-Nikodym tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu, \nu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ olyan mértékek, hogy $\mu \ll \nu$. Ekkor $\exists! f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ olyan mérhető függvény, hogy $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega \chi_A f \,\mathrm{d}\nu \,.$$

Ekkor $f = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$ a μ mérték ν szerinti Radon-Nikodym deriváltja.

14. Tétel

14.1. Valószínűségi változó által generált σ-algebra

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó által generált σ-algebra $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_{\xi^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})}$.

14.1.1. Valószínűségi változó által generált σ-algebra

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó által generált σ-algebra $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_{\xi^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})}$.

14.2. Független valószínűségi változók

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi, \mu : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változók. Ekkor ξ, μ függetlenek, ha $\forall (A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\xi$ és $\forall (B_j)_{j \leq m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\mu$ rendszerek függetlenek, azaz $\forall (A_k, B_j) \in (A_k) \times (B_j)$ független.

14.2.1. Független valószínűségi változók várható értéke

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta).$$

14.2.2. Független valószínűségi változók szórása

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor

$$\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi + \eta) &= E\big((\xi + \eta)^2\big) - E^2(\xi + \eta) = E\big(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2\big) - E^2(\xi) - 2E(\xi)E(\eta) - E^2(\eta) = \\ &= E\big(\xi^2\big) - E^2(\xi) + E\big(\eta^2\big) - E^2(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)\end{aligned}$$

14.2.3. Független valószínűségi változók együttes eloszlása

Adottak $(\xi_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ független valószínűségi változók együttes eloszlása

$$Q_\xi = \prod_{i=1}^{n} Q_{\xi_i}.$$

15. Tétel

15.1. Vektor értékű valószínűségi változó

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ valószínűségi változó

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

ahol $\forall \xi_i : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$.

15.1.1. Eloszlás

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó eloszlása

$$Q_\xi(A) = P\big(\xi^{-1}(A)\big).$$

15.1.2. Eloszlásfüggvény

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_\xi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = P\big(\omega \in \Omega \big| \forall \xi_i(\omega) < x_i\big) = P\left(\xi^{-1}\left(\prod_{i=1}^n (-\infty, x_i)\right)\right) = Q_\xi\left(\prod_{i=1}^n (-\infty, x_i)\right).$$

15.1.2.1. Tulajdonságok

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó és $a < b \in \mathbb{R}^n$.

1. F_ξ minden változójában monoton nő
2. F_ξ minden változójában balról folytonos
3. $$\forall \lim_{x_i \to -\infty} F_\xi(x) = 0$$
4. $$\lim_{\forall x_i \to \infty} F_\xi(x) = 1$$
5. $$\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\varepsilon|} F_\xi\big(a\varepsilon + b(1-\varepsilon)\big) \geq 0$$

   ahol $|\varepsilon|$ az ε 1-es koordinátáinak száma.

15.1.2.2. Peremeloszlás-függvények diszkrét esetben

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ diszkrét eloszlású vektor értékű valószínűségi változó peremeloszlásai

$$P(\eta = i) = \sum_k P(\eta = i, \gamma = k) \qquad P(\gamma = k) = \sum_i P(\eta = i, \gamma = k).$$

15.2. Folytonos vektor értékű valószínűségi változók

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó folytonos eloszlású, ha $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^n}$.

15.2.1. Összefüggés a peremsűrűség-függvények és az együttes sűrűségfüggvény között független esetben

Adott ξ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ha $\forall \xi_i$ függetlenek, akkor

$$f_\xi(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x_i).$$

15.2.2. Peremsűrűség-függvények

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad f_\gamma(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

15.2.3. Intervallumba esés valószínűsége

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$P(\eta \in I, \gamma \in J) = \iint_{I \times J} f_\xi(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

16. Tétel

16.1. Kovariancia

Adottak ξ, η valószínűségi változók. Ekkor ξ és η kovarianciája

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)\big(\eta - E(\eta)\big)\Big).$$

16.1.1. Kovariancia kiszámítása

Adottak ξ, η valószínűségi változók. Ekkor

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi,\eta) &= E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)\big(\eta - E(\eta)\big)\Big) = E\big(\xi\eta - \xi E(\eta) - \eta E(\xi) + E(\xi)E(\eta)\big) = \\ &= E(\xi\eta) - 2E(\xi)E(\eta) + E(\xi)E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)\end{aligned}$$

16.1.1.1. Diszkrét eset

Adottak $\xi, \eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változók kovarianciája

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j P(\xi = \xi_i, \eta = \eta_j) - \left(\sum_i \xi_i P(\xi = \xi_i)\right)\left(\sum_j \eta_j P(\eta = \eta_j)\right).$$

16.1.1.2. Folytonos eset

Adottak ξ, η folytonos eloszlású valószínűségi változók kovarianciája

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{(\xi,\eta)}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) - \left(\int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} y f_\eta(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

16.1.2. Kovariancia független esetben

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$.

Bizonyítás

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = 0.$$

16.1.3. Valószínűségi változó standardizáltja

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó standardizáltja $\hat{\xi} = \frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}$.

16.2. Korrelációs együttható

Adott ξ, η valószínűségi változók korrelációja

$$\operatorname{corr}(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}.$$

17. Tétel

17.1. Diszkrét eset

Adott ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valószínűségi változóra

$$P(\eta = \eta_i) = \sum_{h(\xi_j)=\eta_i} P(\xi = \xi_j).$$

17.2. Folytonos eset

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó és $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható függvény. Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = f_\xi\big(h^{-1}(x)\big)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|.$$

Bizonyítás

Tegyük fel először, hogy h szigorúan monoton nő. Ekkor

$$\{\eta < x\} = \big\{h(\xi) < x\big\} = \big\{\xi < h^{-1}(x)\big\}$$

így

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\big(\xi < h^{-1}(x)\big) = F_\xi\big(h^{-1}(x)\big)$$

amiből

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = F'_\xi\big(h^{-1}(x)\big) = f\big(h^{-1}(x)\big)\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = f_\xi\big(h^{-1}(x)\big)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|$$

hiszen h szigorúan monoton nő, így a derivált pozitív.
Most tegyük fel, hogy h szigorúan monton csökken. Ekkor

$$\{\eta < x\} = \big\{h(\xi) < x\big\} = \big\{\xi > h^{-1}(x)\big\}$$

így

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\big(\xi > h^{-1}(x)\big) = 1 - F_\xi\big(h^{-1}(x)\big)$$

amiből

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = -F'_\xi\big(h^{-1}(x)\big) = -f\big(h^{-1}(x)\big)\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = f_\xi\big(h^{-1}(x)\big)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right|$$

hiszen h szigorúan monoton csökken, így a derivált negatív.

17.2.1. Lineáris transzformáció

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó és $\eta = a\xi + b$. Tehát $h(x) = ax + b$, amiből $h^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$, illetve $\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right| = \frac{1}{|a|}$. Tehát

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

18. Tétel

18.1. Diszkrét feltételes eloszlás eloszlásfüggvénye

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ diszkrét eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$F^*(x|y_i < \gamma < y_j) = P(\xi < x|y_i < \gamma < y_j) = \frac{F_\xi(x, y_j) - F_\xi(x, y_i)}{F_\gamma(y_j) - F_\gamma(y_i)}.$$

18.2. Folytonos feltételes eloszlás eloszlásfüggvénye

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$F^*(x|z) = P(\eta \in I|\gamma = z)) = \begin{cases} \int_I \frac{f_\xi(x,z)}{f_\gamma(z)}\,\mathrm{d}x & f_\gamma(z) \neq 0 \\ 0 & f_\gamma(z) = 0. \end{cases}$$

18.2.1. Sűrűségfüggvény

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$f_{(\eta|\gamma=z)}(x) = \frac{f_\xi(x, z)}{f_\gamma(z)}.$$

18.2.2. Várható érték

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$E(\eta|\gamma = z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(\eta|\gamma=z)}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

18.2.2.1. Regressziós függvény

Adott $\xi = \binom{\eta}{\gamma}$ vektor értékű valószínűségi változó. Az η γ-ra vonatkoztatott regressziós függvény

$$r(z) = E(\eta|\gamma = z).$$

19. Tétel

19.1. 1-valószínűséggel megegyező valószínűségi változók

Adot $\xi, \eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változók 1-valószínűséggel megegyeznek, ha

$$P\big(\omega \in \Omega \big| \xi(\omega) = \eta(\omega)\big) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\xi = \eta$ P-majdnem mindenütt.

19.2. $\mathcal{L}^p$ tér

Adott $p \in [1, \infty)$

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P) = \left\{ f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R} \middle| f \text{ mérhető}, \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}P < \infty \right\}.$$

19.3. p-norma

Adott $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}P \right)^{\frac{1}{p}} & p \in [0, \infty) \\ \sup\limits_{\omega \in \Omega \setminus A} \big|f(\omega)\big| & p = \infty \end{cases}$$

19.4. Konvergencia-fajták $\mathcal{L}^p$ terekben

Adott $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$ függvénysorozat és $f \in \mathcal{L}^p$, illetve $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valószínűségi változósorozat és ξ valószínűségi változó.

19.4.1. 1-valószínűséggel egyenletes konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \to f$ 1-valószínűséggel egyenletesen, ha

$$\lim_{n \to \infty} \big\|f_n - f\big\|_\infty = 0.$$

Ekkor $f_n \overset{m.m.e.}{\longrightarrow} f$.

19.4.2. 1-valószínűséggel konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \to f$ 1-valószínűséggel, ha

$$P\big(\omega \in \Omega \big| f_n(\omega) \to f(\omega)\big) = 1.$$

Ekkor $f_n \overset{m.m.}{\longrightarrow} f$.

19.4.3. $\mathcal{L}^p$-ben való konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \to f$ $\mathcal{L}^p$-ben, ha

$$\lim_{n \to \infty} \big\|f_n - f\big\|_p = 0.$$

Ekkor $f_n \overset{\mathcal{L}^p}{\longrightarrow} f$.

19.4.4. Sztochasztikus konvergencia

Azt mondjuk, hogy $\xi_n \to \xi$ sztochasztikusan, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

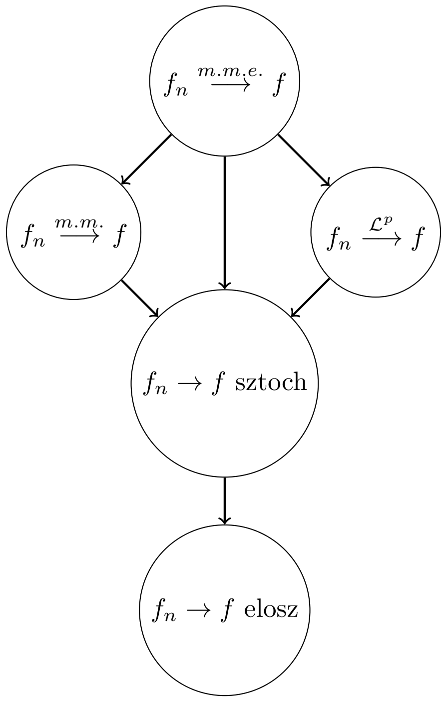
$$\lim_{n \to \infty} P\Big(\omega \in \Omega \Big| \big|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\big| > \varepsilon \Big) = 0.$$

19.4.5. Eloszlásban való konvergencia

Azt mondjuk, hogy $\xi_n \to \xi$ eloszlásban, ha

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x).$$

19.4.6. Konvergencia-fajták közti összefüggés



19.5. Centrális határeloszlás tétel

Adottak $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

19.6. DeMoivre-Laplace tétel

A (n,p) paraméterű binomiális eloszlás sztochasztikusan konvergál a $\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ paraméterű normális eloszláshoz.

20. Tétel

20.1. Minta

Mintának nevezzük a (ξ_i) mintavételi változók összességét. A nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezett elemeket (ξ_i^*)-al jelöljük.

20.1.1. Középérték

A minta középértéke

$$\overline{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}.$$

20.1.2. Empirikus szórás

A minta empirikus szórása

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2}{n}}.$$

20.1.2.1. Korrigált empirikus szórásnégyzet

A minta korrigált empirikus szórásnégyzete

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_n^2.$$

20.1.3. Középpont

A minta középpontja

$$\frac{\xi_1^* + \xi_n^*}{2}.$$

20.1.4. Medián

A minta mediánja

$$\begin{cases} \xi_k^* & n = 2k-1 \\ \frac{\xi_k^* + \xi_{k+1}^*}{2} & n = 2k \end{cases}.$$

20.1.5. Terjedelem

A minta terjedelme

$$\xi_n^* - \xi_1^*.$$

20.1.6. Empirikus eloszlásfüggvény

A minta empirikus eloszlásfüggvénye

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \xi_1^* \\ \frac{k}{n} & \xi_k^* < x \leq \xi_{k+1}^* \\ 1 & \xi_n^* < x \end{cases}.$$

20.1.7. Empirikus sűrűségfüggvény

A minta empirikus sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{k(x+h) - k(x)}{nh}$$

ahol $k(x)$ azon mintaelemek száma, melyek értéke kisebb, mint x.

20.2. Becslés

Adott

1. ξ megfigyelt valószínűségi változó
2. θ ξ eloszlása
3. (ξ_i) ξ-ből vett n-elemű minta.

A becslés célja, hogy készítsünk egy

$$\hat{\theta} = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

függvényt, mellyel becsüljük θ-t.

20.2.1. Tulajdonságok

1. A becslés torzítatlan, ha $E(\hat{\theta}) = \theta$.
2. $\hat{\theta}_1$ hatásosabb, mint $\hat{\theta}_2$, ha $\sigma(\hat{\theta}_1) < \sigma(\hat{\theta}_2)$.
3. A $(\hat{\theta}_n)$ sorozat aszimptotikusan torzítatlan, ha $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$.
4. A becslés elégséges, ha a változók együttes feltételes eloszlása bármilyen $\hat{\theta} = y$ feltétel esetén nem tartalmazza a becsült θ paramétert.
5. A becslés konzisztens, ha torzzítatlan és $\hat{\theta} \xrightarrow{m.m.} \theta$.

20.3. Maximum likelihood estimation

Az MLE során az $L(\theta)$ likelihood függvényt kell maximalizálnunk, ahol n független minta esetén

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta).$$

Hasonló elv alapján az $l(\theta)$ log likelihood függvény is elég maximalizálnunk, ahol

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta).$$

20.4. Konfidenciaintervallum

A $\hat{\theta}$ becsléshez tartozó $(\hat{\theta} - z, \hat{\theta} + z)$ konfidenciaintervallumról azt mondjuk, hogy $100(1-\alpha)$%-os megbízhatósági szinthez tartozik, ha $1 - \alpha$ valószínűséggel a ténylegesen meghatározott intervallum lefedi a becsült paraméter valódi értékét.

20.4.1. Normális eloszlás ismert szórással

Becsüljük $E(\xi) = m$-t a középértékkel! Definiáljunk egy új változót

$$\eta = \frac{\overline{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

így η standard normális eloszlású. Ekkor kell

$$P(-z < \eta < z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 1 - \alpha$$

amiből $\Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, amiből z meghatározható. Ekkor

$$-z < \frac{\overline{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z$$

$$\overline{\xi} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{\xi} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

tehát a konfidenciaintervallum

$$\left(\overline{\xi} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{\xi} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

20.4.2. Nem normális eloszlás ismert szórással

Becsüljük $E(\xi) = m$-t a középértékkel! A centrális határeloszlás tételből

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} < z\right) \approx \Phi(z).$$

Tehát

$$P\left(\frac{|\overline{\xi} - m|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) < z \approx 2\Phi(z) - 1 = 1 - \alpha$$

amiből a konfidenciaintervallum

$$\left(\overline{\xi} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{\xi} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$