

meg. Végző soron az elemi függvényekből az előző csoportban bemutatott függvényekkel végezhető műveletek segítségével áll elő az összes számunkra releváns függvény, így ezeknek a képleteknek a segítségével *elvileg* minden szóba jöhető függvényt tudni kell deriválni.

$$c' = 0 \quad (4.6) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (4.11)$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (4.7) \quad (\sin x)' = \cos x \quad (4.12)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (4.8) \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (4.13)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (4.9) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (4.14)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (4.10) \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (4.15)$$

A legtöbb embernek a következő függvények ismeretére az életben nem lesz szüksége, ők felejték el az erre vonatkozó feladatokat is.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.16) \quad (\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x \quad (4.22)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.17) \quad (\operatorname{cth} x)' = 1 - \operatorname{cth}^2 x \quad (4.23)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (4.18) \quad (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (4.24)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (4.19) \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (4.25)$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad (4.20) \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (4.26)$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad (4.21) \quad (\operatorname{arch} x)' = -\frac{1}{1-x^2} \quad (4.27)$$

4.1. Elemi (\neq egyszerű) függvények deriválása

A következő függvények deriválásához elegendő a 4.1-4.2 és a 4.6-4.27 képletek használata!

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = 5$
3. $f(x) = \frac{4}{3}$
4. $f(x) = x^7$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^6$
7. $f(x) = x^8$
8. $f(x) = x^{273}$
9. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$
10. $f(x) = x^{-3}$
11. $f(x) = x^2$
12. $f(x) = x$
13. $f(x) = 4x$
14. $f(x) = 6x^7$
15. $f(x) = 3x^2$
16. $f(x) = 6x^9$
17. $f(x) = -x^7$
18. $f(x) = \frac{x^7}{3}$
19. $f(x) = \frac{2x^5}{7}$
20. $f(x) = x^7 - x^4 + 2$
21. $f(x) = 6x^5 - 7x^3 + x^2 - 5$
22. $f(x) = x^2 + 2x - 5$
23. $f(x) = 4x^2 - 3x - 5$
24. $f(x) = 5x^7 + 8x^3 - 2x$
25. $f(x) = 6x^5 - 2x^2 + \frac{x}{2} - 3$
26. $f(x) = \sqrt{x}$
27. $f(x) = (x - 5)^2$
28. $f(x) = \frac{1}{x^7}$
29. $f(x) = \frac{1}{2x^7}$
30. $f(x) = \frac{2}{x^7}$
31. $f(x) = \frac{6x}{5x^3}$
32. $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$
33. $f(x) = \sqrt[7]{2x^4}$
34. $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
35. $f(x) = \sqrt{x^3 \sqrt{x^2 \sqrt{x^3}}}$
36. $f(x) = (x^5 + 6x^3)(3x^2 + 2)$
37. $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 3}{2x}$
38. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 6x^5 + 2}{\sqrt{x^5}}$
39. $f(x) = 24^x$
40. $f(x) = \log_5 x$

41. $f(x) = \lg x$

42. $f(x) = \frac{1}{x}$

43. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

44. $f(x) = \frac{5}{x^2}$

45. $f(x) = \frac{5x}{x^2}$

46. $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 3}{x^2}$

47. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^5}$

48. $f(x) = \frac{x^6 + 2x^2 - x}{3x}$

49. $f(x) = \sqrt{x^3 \sqrt[4]{x^5} \sqrt[6]{x^7}}$

50. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^5 \sqrt{x}} - x^3}{\sqrt[4]{x}}$

51. $f(x) = e^x$

52. $f(x) = 2^x$

53. $f(x) = \ln x$

54. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)(\sqrt{x} - 3)$

55. $f(x) = 5^x$

56. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

57. $f(x) = \log_2 x$

58. $f(x) = \log_{23} x$

59. $f(x) = \log_{\frac{3}{5}} x$

60. $f(x) = \sin x$

61. $f(x) = \cos x$

62. $f(x) = \operatorname{tg} x$

63. $f(x) = \operatorname{ctg} x$

64. $f(x) = \frac{x^2}{x^7}$

65. $f(x) = \frac{2}{x}$

66. $f(x) = \frac{1}{2x}$

67. $f(x) = \frac{6}{7x^5}$

68. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

69. $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$

70. $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$

71. $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}$

72. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

73. $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$

74. $f(x) = \frac{4x^2}{3x^7}$

75. $f(x) = \frac{x^5}{2x^3}$

76. $f(x) = \frac{\sqrt[7]{x^2}}{2\sqrt[3]{x^5}}$

77. $f(x) = \frac{1}{x^8}$

78. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{x^8}}$

79. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

80. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$

81. $f(x) = \frac{3x^3 - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x}}$

82. $f(x) = x^{244}$

83. $f(x) = 2x^5$

84. $f(x) = x^7 + x^2$

85. $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$

86. $f(x) = x^6$

87. $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$

88. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

89. $f(x) = \frac{x^7}{x^2}$

90. $f(x) = \frac{x^7 - 4x - 2}{x^3}$

91. $f(x) = 6x^2 - 3x + 2$

92. $f(x) = 4x^7 + 6x^5 - 7x^2 + x - 5$

93. $f(x) = 36x^2 - 18x + 2$

94. $f(x) = 5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x$

95. $f(x) = 4x - 2$

96. $f(x) = 2 - 6x + x^2$

97. $f(x) = 4x^3 - x$

98. $f(x) = 6 \cdot e^x$

99. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

100. $f(x) = 4 \log_{26} x$

101. $f(x) = 8 \sin x$

102. $f(x) = 2 \cos x$

103. $f(x) = \frac{\sin x}{3}$

104. $f(x) = 4x^3$

105. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

106. $f(x) = \frac{x^2}{x^7}$

107. $f(x) = \frac{4}{x^8}$

108. $f(x) = \frac{x^8}{4}$

109. $f(x) = \sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}$

110. $f(x) = \frac{4x^2 - 6x + 2}{x}$

111. $f(x) = \frac{2x^6 + 4\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x}}{3x^4}$

4.2. Szorzat és tört deriválása

A következő függvényeket deriváljuk a szorzási, illetve a hányadosra vonatkozó szabály (4.3-4.4) felhasználásával.

1. $f(x) = (x+1)(x-1)$

2. $f(x) = (2x-3)(5x+1)$

3. $f(x) = (3x+2)^2$

4. $f(x) = \operatorname{tg} x$ (most ne használjuk a 4.14 képletet)

5. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ (most ne használjuk a 4.15 képletet)

6. $f(x) = (\ln x + e^x)(\operatorname{tg} x - \cos x)$

7. $f(x) = \frac{\log_3 x + \sin x}{28^x}$

8. $f(x) = \frac{\arcsin \frac{1}{2} + \ln e^2}{\sin \frac{\pi}{4} + \cos 2}$

9. $f(x) = (2 \sin x - 5x^7) \cdot \log_7 x$

10. $f(x) = \frac{x^7 \cdot \ln x}{\cos x}$

11. $f(x) = 10^x \cdot (\ln x + x^2) \cdot \operatorname{ctg} x$

12. $f(x) = (x^2 + 3x + 5) \cdot \sin x$

13. $f(x) = \log_{28} x \cdot \cos x$

14. $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 3}{x^3 - 6}$

15. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

16. $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{\cos x}$

17. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x \cdot x^2}$

18. $f(x) = x^5 \cdot 2^x \cdot \ln x$

19. $f(x) = \frac{x-3}{e^x}$

20. $f(x) = \frac{e^x}{x^6}$

21. $f(x) = x \cdot \ln x$

22. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

23. $f(x) = \frac{2x-5}{3x^2+6x-2}$

24. $f(x) = \frac{e^x}{3x+2}$

25. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x^8 - \sqrt[3]{x} + 1}$

26. $f(x) = \frac{e^x - \log_2 x}{x^7 + \sin x}$

27. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{e^x}$

28. $f(x) = e^x (\ln x - 2^x)$

29. $f(x) = x^7 \cdot e^x$

30. $f(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot \ln x$

31. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

$$32. f(x) = \log_2 x \cdot \sqrt[3]{x^7}$$

$$36. f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$33. f(x) = 2^x \cdot (\sqrt{x} - x^2)$$

$$37. f(x) = x^2 \cdot 2^x \cdot \log_3 x$$

$$34. f(x) = (\cos x - \ln x)(e^x + 7\sqrt[3]{x})$$

$$35. f(x) = \frac{x^2 - 5x}{2x - 3}$$

$$38. f(x) = \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 - 3x}$$

4.3. Összetett, de nem feltétlenül bonyolult függvények deriválása

$$1. f(x) = (x + 7)^5$$

$$14. f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$2. f(x) = (2x^3 - 6x^2 + 5)^8$$

$$15. f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 4x - 2)}$$

$$3. f(x) = e^{x^2 - 7x + 2}$$

$$16. f(x) = (2x + 2)^6$$

$$4. f(x) = 29^{\sin x}$$

$$17. f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

$$5. f(x) = \ln(2x + 3)$$

$$18. f(x) = \sqrt[3]{6x^7 - 5x^2 + 2}$$

$$6. f(x) = \log_5(\operatorname{tg} x)$$

$$19. f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{(3x^7 - 5x^3 + 2x)^2}}$$

$$7. f(x) = \sqrt{x^2 + 9x - 3}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{2x^2 + 9x - 3}$$

$$20. f(x) = e^{x^2 - 2x + 2}$$

$$9. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$$

$$21. f(x) = \ln(2x^6 - 3x + 2)$$

$$10. f(x) = (2x^2 - 3x + 2)^7$$

$$22. f(x) = (e^x)^6$$

$$11. f(x) = \sqrt{3x - 2}$$

$$23. f(x) = e^{x^6}$$

$$12. f(x) = e^{x^2 - 3x + 5}$$

$$24. f(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$13. f(x) = \ln \sqrt{x}$$

$$25. f(x) = \ln \operatorname{tg} x$$

$$26. f(x) = \operatorname{tg} \ln x$$

$$27. f(x) = \ln \frac{x^2 + 2}{x + 2}$$

$$28. f(x) = 2^{\sin x \cdot e^x}$$

$$29. f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$30. f(x) = \log_5 (e^x + \operatorname{tg} x) (x^2 - 3x + 2)$$

$$31. f(x) = \arcsin (x^7 - 3x^2 + 2x - 5)$$

$$32. f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$$

$$33. f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 5x - 3}}$$

$$34. f(x) = \operatorname{tg} (\arcsin e^x)$$

$$35. f(x) = e^{\operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 2)}$$

$$36. f(x) = \sqrt[4]{\ln \ln x}$$

$$37. f(x) = \sin x^2$$

$$38. f(x) = \sin^2 x$$

$$39. f(x) = \ln x^2$$

$$40. f(x) = \ln^2 x$$

$$41. f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$42. f(x) = e^{x^2 - 5x - \cos x}$$

$$43. f(x) = \ln \frac{x + 1}{2^x}$$

$$44. f(x) = (x^2 - 3x + 2)^7$$

$$45. f(x) = \sqrt{2x - 5}$$

$$46. f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{e^x - \log_7 x}}$$

$$47. f(x) = (2x - 3)^7$$

$$48. f(x) = (e^x + \operatorname{ctg} x)^2$$

$$49. f(x) = \operatorname{ctg}^6 x$$

$$50. f(x) = e^{x^2 - 3x + 5}$$

$$51. f(x) = e^{\sin x}$$

$$52. f(x) = \ln \sin x$$

$$53. f(x) = \sin \ln x$$

$$54. f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

$$55. f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cdot \cos x}}$$

$$56. f(x) = e^{\frac{x^2 - 3x + 2}{2x - x^3}}$$

$$57. f(x) = \frac{6}{(x^2 - 3)^5}$$

$$58. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^3 + \cos x}}$$

$$59. f(x) = \frac{1}{3x^4 - 5x^2 + 2}$$

$$60. f(x) = \operatorname{ctg} x^6$$

$$61. f(x) = (x^2 + 2)^7$$

$$62. f(x) = \sqrt{3x^5 + 2x}$$

$$63. f(x) = \sqrt[5]{(6x - \sqrt[3]{x})^2}$$

$$64. f(x) = e^{x^2 - 3x + 1}$$

$$65. f(x) = 5^{-x} + 2^x - 3^{2x - 6}$$

$$66. f(x) = e^{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

67. $f(x) = \ln(6x^5 - 2x^3 + 3x)$

71. $f(x) = \cos(5x^2 - 3x + 2)$

68. $f(x) = \ln \frac{2x-6}{6x^3+2x}$

72. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}$

69. $f(x) = \sin e^x$

73. $f(x) = e^{\sqrt{2x^2+5}}$

70. $f(x) = \sin \cos x$

74. $f(x) = \sin \sqrt{\frac{2x^2-5}{3x^3+2x^2}}$

4.4. Mire jó a deriválás I.: érintő egyenlete

Adjuk meg a következő függvények adott x_0 pontbeli érintőjének egyenletét!

1. $f(x) = \sqrt{x+2} \quad x_0 = 14$

3. $f(x) = \ln(2x+2) \quad x_0 = \frac{1}{2}$

2. $f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad x_0 = 5$

4.5. Mire jó a deriválás II.: elaszticitás

4.6. Mire jó a deriválás III.: függvényvizsgálat

4.6.1. Monotonitás, szélsőérték

Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

1. $f(x) = x^2$

4. $f(x) = x^3$

2. $f(x) = \frac{x^3}{x}$

5. $f(x) = x^3 - 12x$

3. $f(x) = \sqrt{x-2}$

6. $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 2)$

4.6.2. Konvex-konkáv szakaszok, inflexiós pont

Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket szélsőértékek és monotonitás, illetve konvex-konkáv intervallumok és inflexiós pontok szempontjából!

Matematika, statisztika, közgazdaságtan, pénzügytan korrepetálás.

Tel.: (20) 932-2134

<http://matstat.fw.hu>

email: matstat@fw.hu