Név: .... Neptun: ....

PPKE ITK ● 2013/14/2. tanulmányi időszak

MATEMATIKA SZIGORLAT

SZÓBELI VIZSGA

2014. június 11.

II. Diszkrét matematika és Lineáris algebra

PÁZMÁNY PÉTER KATOLIKUS EGYETEM

INFORMÁCIÓS TECHNOLÓGIAI ÉS BIONIKAI KAR

Fontos tudnivalók

Tisztelt Vizsgázó!

Jelen füzet a 2013/14/2. tanulmányi időszak Matematika szigorlatához lett kiadva. A füzet tartalmazza az intézmény által nyilvánosságra hozott tételjegyzéket, valamint azok kidolgozott formáját is.

A kiadvány két füzetre bontva jelenik meg, ezen II. összetevő a Diszkrét matematika és Lineáris algebra, az I. összetevő pedig a Matematika analízis tantárgy tételeinek jegyzékét és azok kidolgozott formáját tartalmazza.

A kiadványban bárhol, de különösen a kidolgozott tételek körében előfordulhatnak hiányosságok, bővebb magyarázatra szoruló részek. Az ezek kiegészítése illetve jegyzetelés, feladatmegoldás céljából a kidolgozott tételeket a füzetben jegyzetoldalak követik.

Eredményes felkészülést kívánunk!

A kiadványt összeállította:
Naszlady Márton Bese – 2014

Tartalomjegyzék

Szóbeli vizsga tételjegyzék

1A. Algebrai struktúrák. Művelet, műveleti tulajdonságok, inverzelem, egységelem fogalma. **Csoport, kommutatív csoport, gyűrű, test, kapcsolatuk.** Példák.
1B. Lineárisan függetlenség összefüggőség. Vektorokból elvéve, hozzávéve, hogyan változik e tulajdonság (B).

2A. Mátrix algebra. **Műveletek** (Inverz mátrix fogalma, számítási módszerei is). **Egyenletrendszerek megoldása inverz** mátrix segítségével. Inverz mátrix képletének levezetése (B).
2B. Homogén lineáris leképezések lineáris terének és a (megfelelő típusú) mátrixok lineáris terének kapcsolata.

3A. Mátrix rangja. **Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának kritériuma, mátrix rangja** Az $n \times m$- es mátrixok struktúrája. Mátrix rangja, determinánsa és inverz létezésének összefüggése.
3B. Kiértékelési szabályok az ítéletkalkulusban. Modus ponens helyes következtetési séma (B)

4A. Komplex számok. **Komplex számok különböző alakjai, műveletek. Átszámolás az egyes alakok között**. Hatványozás, Moivre-formula, **gyökvonás (B).** Konjugált. Egységgyök, primitív egységgyök fogalma, egységgyökök struktúrája. **Komplex számokra vonatkozó Euler formula.**
4B. Az algebra alaptétele. Komplex együtthatós másodfokú egyenlet megoldása.

5A. Relációk. Reláció általános fogalma. **Bináris reláció, nevezetes bináris relációk és tulajdonságaik. Ekvivalencia reláció és partíció kapcsolata.** Hasonló transzformációk és tulajdonságaik (B). Példa hasonló transzformációkra. **Ekvivalencia reláció és partíció kapcsolata.**
5B. Altér fogalma.

6A. Hálók. **Háló kétfajta definíciója.** Hasse diagram. Boole-algebra. **Hálóelméleti fixpont tétel (Tarski)** (B). Komplementumos, egységelemes hálók. Példák hálóra.
6B. Koordináta és koordináta mátrix fogalma.

7A. Halmazalgebra. **Műveletek. Halmaz részhalmazainak száma**. Szita formula. **Komplex számok részhalmazai.** Halmazelméleti azonosságok és bizonyítási módszer igazolásukra. Skatulya elv, példa. Halmaz részhalmazainak száma (B).
7B. Skalárszorzat fogalma, skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

8A. Számosságok. **Egyenlő, kisebb/nagyobb számosságú halmazok.** Természetes számok, racionális számok, valós számok számossága (B). Cantor-féle átlós eljárás. **Cantor tétel** (Halmaz és hatványhalmazának számossága közti összefüggés). **Kontinuum hipotézis.**
8B. Vektortér fogalma.

9A. Nagyságrend. Függvények növekedése, aszimptotikus közelítések, **kis ordó, nagy ordó**. **Nagyságrend fogalma.** Példa egyenlő nagyságrendekre. **Exponenciális növekedés, ennek illusztrálása példával.**
9B. Gram-Schmidt ortogonalizáció (B)

10A. Nulladrendű logika. **Műveletek, kiértékelési szabályok, interpretációk**. **Logikai (szemantikai) következmény fogalma, példák.** A rezolúció alapelve (B). Példák matematikai bizonyítási módszerekre.
10B. Szita formula.

11A. Elsőrendű logika. **Szintaxis nullad-, és elsőrendben.** Szemantika: **kvantorok, interpretációk elsőrendben**. Szemantikai következmény elsőrendben. Szintaktikai következmény fogalma. Rezolúció elsőrendben.
11B. Sajátérték, sajátvektor fogalma. Sajátvektorok bázisában a transzf. mátrix (B)**.**

12A. Lineáris tér. **Lineáris tér fogalma. Lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség, ennek igazolási módszere**. **Generátorrendszer, bázis, koordináták, dimenzió.** Dimenzió ekvivalens megfogalmazásai. Kicserélési tétel (B).
12B. Komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakja.

13A. Vektoralgebra. A 3 dimenziós vektorok tere. Speciális műveletek: **skaláris szorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat, és erre vonatkozó tételek, geometriai jelentésük.** Sík normálvektoros egyenlete. Pont és sík távolsága. Vektor összetevőkre bontása és merőleges kiegészítő.
13B. Dimenzió tétel. (B)

14A. Lineáris leképezések. Lineáris leképezések összege, skalárszorosa, példák. Homogén lineáris leképezések lineáris tere. **Áttérés más bázispárra**.
14B. Kromatikus szám fogalma. Sík gráfok kromatikus száma. Ötszín tétel (B).

15A. Izomorfia. **Izomorfia fogalma.** Izomorfiára vonatkozó szükséges és elégséges feltétel. **A vektorterek közti izomorfia ekvivalencia reláció.** Mátrixok lineáris terének és a lineáris leképezések terének kapcsolata. **Példa: az $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0})$ $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ alakú komplex számok és a valós számok izomorfiája.** Az $a + bi$ képlet magyarázata (B)**.**
15B. Kúpszeletek, mint mértani helyek.

16A. Lineáris leképezés mátrixa. **Lineáris leképezés mátrixának definíciója, szerepe** (B)**, példák**. Speciális lineáris leképezések mátrixai: vetítés, forgatás, skalárszorzat, mint lineáris leképezés. A legfeljebb $(n - 1)$-edfokú polinomok tere, és a **polinomok deriválása, integrálása, mint lineáris leképezés, ezek mátrixai.**
16B. Fa fogalma, éleinek száma.

17A. Altér. **Altér fogalma.** Szükséges és elégséges feltétel. **Példák: magtér (B), képtér (B), adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok tere, merőleges kiegészítő**. Merőleges kiegészítő számítására vonatkozó tétel. Dimenziótétel.
17B. Lineáris leképezés fogalma.

18A. Sajátérték, sajátvektor. **Sajátérték, sajátvektor fogalma. Példák.** Speciális transzformációk mátrixai, sajátértékei, sajátvektorai. Sajátvektorok bázisában felírt transzformációs mátrix (B).
18B. Lineáris függetlenség, összefüggőség fogalma.

19A. Bilineáris formák. **Kvadratikus alakok és szimmetrikus mátrixok. Főtengelytranszformáció és diagonalizálás.** Kúpszeletek kanonikus alakja. A sajátvektorok bázisában (ha létezik) felírt mátrix.
19B. Binomiális tétel (B). **Binomiális együtthatók tulajdonságai.**

20A. Euklideszi tér. **Euklideszi tér definíciója. Skalárszorzat, norma, metrika, és ezek kapcsolata** euklideszi terekben. Ortogonalitás. **CBS euklideszi terekben** (B) **és speciálisan $\mathbb{R}^n$ -ben.** Ortonormált rendszer létezése.
20B. Transzformáció mátrixa, ha áttérünk másik bázisra.

21A. Lineáris egyenletrendszerek. Lineáris homogén, lineáris inhomogén egyenletrendszer fogalma. **Gauss elimináció, az algoritmus pontos ismertetése. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele és mátrix rangja. Egyenletrendszer megoldása inverz mátrixszal.** Lineáris egyenletrendszerek néhány alkalmazása: vektorok függetlenségének, generátorrendszer és bázis megállapítására, **Gauss elimináció és mátrix inverz számítása.**
21B. Euler poliéder tétele (B).

22A. Determinánsok. **Definíció, tulajdonságok.** Vondermonde determináns. Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra. **Cramer szabály, inverz mátrix képlete** (B)**,** vegyes szorzat és geometriai jelentése.
22B. Generátorrendszer és bázis.

23A. Kombinatorikus módszerek. **Összeg- és szorzatszabály, permutáció, variáció, kombináció (B).** Szita formula. Binomiális tétel. Binomiális együtthatók tulajdonságai.
23B. Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra.

24A. Gráfok. **Irányítatlan, irányított, súlyozott gráfok.** Gráfok mátrixai. **Élszám és fokszám összefüggése.** Speciális gráfok: fa, út, kör, teljes gráf. **N pontú összefüggő gráfok élszámára, körök létezésére vonatkozó tételek** (B)**.** Részgráfok. **Izomorfia**. Összefüggő komponensek. Hamilton-kör/út, szükséges ill. elégséges feltételek (Dirac, Ore).
24B. Komplex szám algebrai alakja. Az imaginárius egység hatványai.

25A. Fák. **Fa ekvivalens definíciói** (B)**. N pontú fa éleinek száma.** Prüfer kód ismertetése. Az n-pontú teljes gráf feszítő fáinak száma.
25B. Inverz mátrix kiszámítási módjai.

26A. Gráfok bejárása és súlyozott gráfok. Szélességi és mélységi keresés. Bináris fák bejárási módjai (műveleti fák). Súlyozott gráf fogalma. **Kruskal, Prim, Dijkstra algoritmusok.**
26B. Determináns kifejtési és ferde (B) **kifejtési tétele.**

27A. Sík gráfok és színezésük. **Euler poliéder tétele** (sík gráfok pontjainak, tartományainak, éleinek számára vonatkozó tétel). **Kuratowski-tétel. Euler-kör/út és létezésére vonatkozó szükséges és elégséges feltételek. Kromatikus szám fogalma. Sík gráfok kromatikus száma.**
27B. Lineáris leképezés mátrixa (B)

28A. Hálózati folyamok. **Hálózat, folyam, vágás fogalma. Javító út. Ford-Fulkerson tétel.**
28B. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség (B) **általános, és $\mathbb{R}^n$-ben használatos alakja.**

Kidolgozott tételek, tételvázlatok

1A Algebrai struktúrák. Művelet, műveleti tulajdonságok, inverzelem, egységelem fogalma. **Csoport, kommutatív csoport, gyűrű, test, kapcsolatuk.** Példák.

Műveletek

Definíció Tekintsük matematikai objektumok egy H halmazát. A *művelet* olyan függvény, amely az adott objektumok halmazából vett objektum(ok)hoz egy (másik) halmazbeli objektumot rendel.

Egyváltozós (unáris) az $f: H \to H$ művelet, ha egy objektumhoz rendel egy (másik) objektumot.

Kétváltozós (bináris) az $f: H \times H \to H$ művelet, ha két objektumhoz rendel hozzá egy (másik) objektumot.

Az n változós művelet $f: H^n \to H$

Műveleti tulajdonságok

Definíció Egy H halmazon értelmezett $*$ bináris műveletel *asszociatív* (csoportosítható), ha bármely $a, b, c \in H$ esetén $a * (b * c) = (a * b) * c$ teljesül.

Definíció Egy H halmazon értelmezett $*$ bináris művelet *kommutatív* (felcserélhető), ha bármely $a, b \in H$ esetén $a * b = b * a$ teljesül.

Definíció Egy H halmazon értelmezett $*$ művelet disztributív a $\circ$ műveletre nézve, ha bármely $a, b, c \in H$ esetén $a * (b \circ c) = a * b \circ a * c$ és $(b \circ c) * a = b * a \circ c * a$.

Definíció Egy H halmazon értelmezett $*$ bináris művelet *bal oldali egységelemének* egy olyan $e_b \in H$ elemet nevezünk, melyre $\forall a \in H$ esetén $e_b * a = a$ teljesül.

Egy H halmazon értelmezett $*$ bináris művelet *jobb oldali egységelemének* egy olyan $e_j \in H$ elemet nevezünk, melyre $\forall a \in H$ esetén $a * e_j = a$ teljesül.

Tétel *Legyen értelmezve H halmazon egy $*$ bináris művelet. Ha a kétoldali egységek léteznek, akkor $e_b = e_j = e$, vagyis az egység kétoldali és egyértelmű.*

Bizonyítás $e_b = e_b * e_j = e_j$ ■

Definíció Az $e \in H$ elem a $*$ bináris művelet *egységeleme,* ha mind bal-, mind jobboldali egységelem, azaz $\forall a \in H$ esetén $e * a = a * e = a$ teljesül.

Definíció Az $a \in H$ elem $*$ bináris műveletre vonatkozó *bal oldali inverze* egy olyan $a_b^{-1} \in H$ elem, melyre $a_b^{-1} * a = e$, ahol $e \in H$ elem a $*$ művelet egységeleme.

Az $a \in H$ elem $*$ bináris műveletre vonatkozó *jobb oldali inverze* egy olyan $a_j^{-1} \in H$ elem, melyre $a * a_j^{-1} = e$, ahol $e \in H$ elem a $*$ művelet egységeleme.

Tétel *Legyen értelmezve H halmazon egy $*$ bináris, asszociatív művelet. Ha a kétoldali inverzek léteznek, akkor $a_b^{-1} = a_j^{-1} = a^{-1}$, vagyis asszociatív műveletnél az inverz kétoldali és egyértelmű.*

Bizonyítás $a_b^{-1} = a_b^{-1} * e = a_b^{-1} * (a * a_j^{-1}) = (a_b^{-1} * a) * a_j^{-1} = e * a_j^{-1} = a_j^{-1}$ ■

Definíció Az $a \in H$ elem $*$ bináris műveletre vonatkozó *inverze* egy olyan $a^{-1} \in H$ elem, mely az a elemnek bal- és jobboldali inverze is, azaz $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Algebrai struktúrák

Definíció Algebrai struktúra alatt olyan nem üres H halmazt értünk, melyben legalább egy $*$ művelet van definiálva. Jelölés: $\langle H| *\rangle$ több művelet esetén $\langle H| *,\circ\rangle$. Az algebrai struktúrában a művelet(ek) mellett szerepelhetnek függvények is.

Csoport, félcsoport

Definíció Egy G nemüres halmazt *félcsoportnak* nevezünk, ha értelmezve van rajta egy $*$ bináris művelet, amely asszociatív: $\forall a, b, c \in G$ esetén $a * (b * c) = (a * b) * c$

Példa: $\langle \mathbb{R}^{n\times n}| \cdot\rangle$ (az $n \times n$-es mátrixok a szorzásra nézve)

Definíció Egy G nemüres halmazt *csoportnak* nevezünk, ha értelmezve van rajta egy $*$ bináris művelet, amely:
1.) asszociatív: $\forall a, b, c \in G$ esetén $a * (b * c) = (a * b) * c$
2.) van egységeleme: $\exists e \in G$, melyre $e * a = a, \forall a \in G$
3.) van inverze: $\forall a \in G$ esetén $\exists a^{-1} \in G$, melyre $a^{-1} * a = e$

Definíció Az olyan csoportot, melyben a $*$ művelet kommutatív, vagyis $\forall a, b \in G$ esetén $a * b = b * a$, kommutatív vagy Abel-csoportnak nevezzük.

Példa: $\langle\mathbb{R}|+\rangle$ (valós számok összeadása), $\langle\mathbb{Q}^+| \cdot\rangle$ (pozitív racionális számok szorzása)

Tétel *Ha G csoport, akkor $\forall a, x, y \in G$ esetén ha*
(1) $a * x = a * y$, *akkor* $x = y$, *illetve ha*
(2) $x * a = y * a$, *akkor* $x = y$.

Bizonyítás (1) $x = e * x = a^{-1} * a * x = a^{-1} * a * y = e * y = y$
(2) $x = x * e = x * a * a^{-1} = y * a * a^{-1} = y * e = y$ ■

Tétel *Ha G csoport, akkor $\forall a, b, x \in G$ esetén, ha*
(1) $a * x = b$, *akkor* $x = a^{-1} * b$, *illetve ha*
(2) $x * a = b$, *akkor* $x = b * a^{-1}$.

Bizonyítás (1) $x = e * x = (a^{-1} * a) * x = a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$
(2) $x = x * e = x * (a * a^{-1}) = (x * a) * a^{-1} = b * a^{-1}$ ■

Gyűrű

Definíció Egy R nemüres halmazt gyűrűnek nevezünk, ha értelmezve van rajta két művelet, $*$ és $\circ$, melyekre teljesülnek a következő tulajdonságok:
1.) a $*$ művelet Abel-csoport
2.) a $\circ$ művelet félcsoport
3.) a két műveletet a disztributív szabályok kötik össze, azaz $\forall a, b, c \in R$ esetén:

$$a \circ (b * c) = a \circ b * a \circ c$$
$$(b * c) \circ a = b \circ a * c \circ a$$

A $*$ műveletet összeadásnak, a $\circ$ műveletet szorzásnak nevezzük. Ha a szorzás kommutatív, akkor kommutatív gyűrűről beszélünk.

Példa: $\langle\mathbb{R}^{n\times n}|+,\cdot\rangle$ (az $n \times n$-es mátrixok az összeadásra és szorzásra nézve gyűrű)
$\langle\mathbb{Q}|+,\cdot\rangle$ (a racionális számok az összeadásra, szorzásra nézve kommutatív gyűrű)

Test, ferdetest

Definíció Egy T nemüres halmazt *testnek* nevezünk, ha értelmezve van rajta két művelet, $*$ és $\circ$, melyekre teljesülnek a következő tulajdonságok:

1.) a $*$ és a $\circ$ művelet Abel-csoport
2.) a $*$ művelet egységelemének nincs a $\circ$ műveletre vonatkozó inverze
3.) a két műveletet a disztributív szabályok kötik össze, azaz $\forall a, b, c \in R$ esetén:

$$a \circ (b * c) = a \circ b * a \circ c$$
$$(b * c) \circ a = b \circ a * c \circ a$$

Ha a $\circ$ művelet nem kommutatív, akkor *ferdetestről* beszélünk.

Példa: $\langle \mathbb{R}|+,\cdot\rangle$ (a valós számok az összeadásra és szorzásra nézve testet alkotnak)

1B **Lineárisan függetlenség összefüggőség.** Vektorokból elvéve, hozzávéve, hogyan változik e tulajdonság (B).

Lineárisan függetlenség összefüggőség

Definíció A $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$$

csak úgy lehetséges, hogy miden $\lambda_i = 0$.

Definíció A $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, .., \boldsymbol{v_n}$ vektorok lineárisan összefüggők, ha

$$\sum_{n=i}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$$

lineáris kombinációban van olyan λ_i, amelyre $\lambda_1 \neq 0$.

Vektorokból elvéve, hozzávéve, hogyan változik e tulajdonság (B)

Tétel *Ha a $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor tetszőleges vektort hozzávéve, továbbra is lineárisan összefüggők maradnak.*

Bizonyítás Tekintsük a nullvektort előállító lineáris kombinációt, melyben legyen $\lambda_j \neq 0$:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v_1} + \lambda_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \lambda_j \boldsymbol{v_j} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

Vegyünk hozzá még egy v_{n+1} vektort e lineáris kombinációhoz úgy, hogy $\lambda_{n+1} = 0$, és az összes többi skalár ugyan az marad. Ekkor:

$$\lambda_1 \boldsymbol{v_1} + \lambda_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \lambda_j \boldsymbol{v_j} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v_n} + \lambda_{n+1} \boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{0}$$

Ebben az új lineáris kombinációban is $\lambda_j \neq 0$, hiszen így választottuk meg e második lineáris kombinációt. Mivel így a nullvektort előállító lineáris kombinációban az egyik skalár együttható nem nulla, ezért a vektorok továbbra is lineárisan összefüggők. ■

Tétel *Ha a $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor tetszőleges vektort elhagyva a maradék vektorok függetlenek maradnak.*

Bizonyítás Az előző tétellel. Indirekt módon tegyük fel, hogy a független rendszerből már elhagytunk egy vektort és az így kapott rendszer összefüggő. Az előző tétel szerint, ha ehhez az összefüggő rendszerhez hozzáveszünk egy vektort, akkor összefüggő marad. Most vegyük vissza az eredetileg elhagyott vektort. Ekkor a rendszer összefüggő kéne legyen, ami ellentmond a kezdeti függetlenségnek. ■

2A Mátrix algebra. **Műveletek** (Inverz mátrix fogalma, számítási módszerei is). **Egyenletrendszerek megoldása inverz** mátrix segítségével. Inverz mátrix képletének levezetése (B).

Mátrix algebra

Definíció Legyen $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, és m, n természetes számok. Ekkor az $\mathbb{R}$ feletti $m \times n$-es mátrixon egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek m sora és n oszlopa van, elemei pedig valós számok. A mátrix típusa $m \times n$.

Definíció Tekintsük matematikai objektumok egy halmazát. A művelet olyan függvény, amely az adott halmaz elemeihez egy (másik) halmazbeli elemet rendel. Egyváltozós (unáris) a művelet, ha egy elemhez rendel egy (másik) elemet. Kétváltozós (bináris) a művelet, ha két elemhez rendel egy (mások) elemet.

Mátrixok összeadása

Definíció Az $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ és $\boldsymbol{B} = (b_{ik})$ mátrixok összegén azt a $\boldsymbol{C} = (c_{ik})$ mátrixot értjük, amelynek adott pozíciójú elemét az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ mátrixok megfelelő pozíciójú elemeinek összeadásával kapjuk: $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$

Tétel *Mátrixok összeadásának tulajdonságai:*
1.) Kommutatív. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
2.) Asszociatív: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$
3.) Van egységelem: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$
4.) Van inverz elem: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{0}$

Mátrixok szorzata

Definíció Az $\boldsymbol{A}$ $m \times n$ típusú mátrix és a $\boldsymbol{B}$ $n \times k$ típusú mátrix szorzata az a $\boldsymbol{C}$ $m \times k$ típusú mátrix, melynek elemeit a következőképp számoljuk ki:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$$

Tétel *Mátrixok szorzásának tulajdonságai:*
1.) Nem kommutatív. $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$
2.) Asszociatív: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
3.) Disztributív az összeadásra nézve:
  a. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$
  b. $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{CA}$

Négyzetes mátrixok szorzásra vonatkozó egységeleme

Definíció Az $n \times n$-es mátrixok körében az $n \times n$-es $\boldsymbol{E_n} = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1)$ egységmátrix a szorzás egysége, neve *egységmátrix.*

Tétel *Legyen* $\boldsymbol{A}$ $n \times n$ *típusú mátrix. Ekkor* $\boldsymbol{AE_n} = \boldsymbol{E_n A} = \boldsymbol{A}$

Négyzetes mátrixok szorzásra vonatkozó inverze

Definíció Legyen $\boldsymbol{A}$ $n \times n$-es mátrix. Azt az $\boldsymbol{A}^{-1}$-gyel jelölt $n \times n$-es mátrixot, amelyre $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E_n}$ az $\boldsymbol{A}$ mátrix inverzének nevezzük.

Tétel *Ha az $\boldsymbol{A}$ mátrixnak van baloldali inverze és jobboldali inverze, akkor az egyértelmű összeadásra és szorzásra is.*

Tétel *Az inverz mátrix tulajdonságai:*

1.) Ha az $\boldsymbol{A}$ mátrix invertálható, inverzének inverze önmaga. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$

2.) Ha az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ mátrixok invertálhatók, akkor szorzatuk is invertálható, és inverze a tényezők inverzének fordított sorrendű szorzata. $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3.) Ha a $\boldsymbol{C}$ mátrix invertálható (nem szinguláris), akkor a mátrixegyenletet lehet szokásos módon rendezni.

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC} \rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{CB} \rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

Inverz mátrix kiszámítási módszere, képletének levezetése (B)

Az $\boldsymbol{A}$ mátrix inverze többféle módon is kiszámolható. Egyrészt, tudva azt, hogy mátrixot az inverzével beszorozva az egységmátrix áll elő, felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezt az egyenletrendszert Gauss-Jordan eliminációval megoldva az egységmátrix helyén előáll az $\boldsymbol{A}$ mátrix inverze, míg az $\boldsymbol{A}$ mátrix helyén az egységmátrix jelenik meg.

A másik inverz számítási módszer az adjungált mátrix és a mátrix determinánsának használatával történik. Ekkor az $\boldsymbol{A}$ mátrix inverzére vonatkozó kiszámítási képlet:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$$

Tétel *Az $n \times n$-es $\boldsymbol{A}$ mátrixot az adjungáltjával jobbról megszorozva az eredmény* $\det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{E_n}$.

Bizonyítás A szóban forgó szorzat a következőképpen néz ki:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Ekkor az eredménymátrix elemeit kiszámítva:

$c_{11} = a_{11}D_{11} + \cdots + a_{1n}D_{1n} = \det(\boldsymbol{A})$, mert ez az 1. sor szerinti kifejtés.

$$\vdots$$

$c_{nn} = a_{n_1}D_{n_1} + \cdots + a_{nn}D_{nn} = \det(\boldsymbol{A})$, mert ez az n. sor szerinti kifejtés.

A többi elem nulla, hiszen $c_{ik} = a_{i1}D_{k1} + \cdots + a_{in}D_{kn} = 0$, mert az i-edik sorhoz tartozó elemek rendre a k-adik sorhoz tartozó aldeterminánsokkal vannak szorozva, és így a ferde kifejtés tétele miatt az összes ilyen c_{ik} elem 0. ■

Tétel *Ha $\boldsymbol{A}$ négyzetes mátrix, és* $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, *akkor* $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$, *ahol* $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$ *az $\boldsymbol{A}$ mátrix úgynevezett klasszikus adjungált mátrixa.*

Bizonyítás Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, ezért pontosan egy inverz létezik. Ha tehát létezik egy mátrix, melyre $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E_n}$, akkor ez a $\boldsymbol{B}$ mátrix inverze $\boldsymbol{A}$-nak. A fenti tétel szerint $\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{E_n}$. Ezt beszorozva $\frac{1}{\det(A)}$-val, igazolódik a tétel állítása. ■

Egyenletrendszerek megoldása inverz mátrix segítségével.

Legyen adott egy egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ugyanez mátrix alakban

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ahol $\boldsymbol{x}$ az ismeretleneket tartalmazó vektor, $\boldsymbol{b}$ pedig adott vektor. Így az egyenletrendszer

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Ha az egyenletrendszernél $n = m$ és $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, akkor az egyenletrendszer inverz mátrix segítségével is megoldható:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

2B Homogén lineáris leképezések lineáris terének és a (megfelelő típusú) mátrixok lineáris terének kapcsolata.

Ha adott egy V_1 és egy V_2 vektortér, melyek dimenziói $\dim(V_1) = n$ és $\dim(V_2) = m$, akkor e két vektortér között bármely lineáris leképezés egyértelműen megfeleltethető egy $m \times n$-es mátrixnak. Ez a tény lehetővé teszi, hogy a lineáris leképezéseket mátrixokkal adjuk meg, ugyanakkor minden mátrix egy lineáris leképezést is reprezentál.

Hogy megadjunk egy ilyen leképezés-mátrix hozzárendelést, a kiindulási és a képtérben is rögzített báziskora van szükség. A leképezést reprezentáló mátrix e bázispárra vonatkoztatva egyértelmű. Ha ismerjük e mátrixot, akkor bármely vektor képe úgy kapható meg, hogy a vektort beszorozzuk a leképezés mátrixával.

Képletben összefoglalva: $\boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$, ahol $L: V_1 \to V_2$ a lineáris leképezés, az $\boldsymbol{A}$ mátrix pedig a leképezés mátrixa, $\boldsymbol{x} \in V_1$ tetszőleges, ennek képe pedig $\boldsymbol{y} \in V_2$.

Definíció Az $L: V^n \to W^k$ *lineáris leképezés mátrixa* $\boldsymbol{A}_{[[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}]]} = [\boldsymbol{k_1}|\boldsymbol{k_2}| \dots |\boldsymbol{k_n}]$, ahol $\boldsymbol{k_i} \stackrel{\text{def}}{=} L(\boldsymbol{a_i})$. Azaz az A mátrix oszlopai a V^n-beli $[a]$ bázis $\boldsymbol{a_i}$ bázisvektorainak a W^k-beli $[b]$ bázisra vonatkozó képei.

Tétel *Legyen $L: V^n \to W^k$ a lineáris leképezés, az $\boldsymbol{A}$ mátrix a leképezés mátrixa, $\boldsymbol{x} \in V$ tetszőleges, ennek képe pedig $\boldsymbol{y} \in W$, $\boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{x})$. Ekkor $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$.*

3A Mátrix rangja. **Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának kritériuma, mátrix rangja** Az $n \times m$-es mátrixok struktúrája. Mátrix rangja, determinánsa és inverz létezésének összefüggése.

Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának kritériuma, mátrix rangja

Definíció Vektorrendszer *rangján* a vektorok által generált altér dimenzióját értjük. Mátrix sorrangján a sorvektorok rangját, mátrix oszloprangján az oszlopvektorok rangját, determináns rangján pedig a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nem nulla determináns méretét értjük.

Tétel *Ugyanazon mátrix sor-, oszlop-, és determinánsrangja megegyezik.*

Tétel *Ha $\boldsymbol{A}$ $m \times n$-es mátrix, akkor az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha* $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rang}([\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}])$*, vagyis az együtthatómátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával.*

Tétel *Ha az $\boldsymbol{A}$ mátrix rangja és a kibővített együtthatómátrix rangja egyenlő az ismeretlenek számával, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.*

Következmény
Homogén lináris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az együttható mátrix rangja az ismeretlenek számánál kisebb.

Az $n \times m$-es mátrixok struktúrája.

Állítás *Az $n \times m$-es mátrixok az összeadásra nézve kommutatív (Abel) csoportot alkotnak.*

Állítás *Az $n \times m$-es mátrixok a valós számok/racionális számok teste fölött vektorteret alkotnak. Ebben a vektortérben az $n \times m$-es mátrixok a vektorok.*

Mátrix rangja, determinánsa és inverz létezésének összefüggése.

Állítás *Ha a mátrix determinánsa nulla, azaz $det(\boldsymbol{A}) = 0$, akkor az $\boldsymbol{A}$ mátrix szinguláris (nincs inverze).*

Tétel *Az $\boldsymbol{A}$ $n \times n$-es mátrix akkor és csak akkor reguláris (van inverze), ha rangja n.*

3B **Kiértékelési szabályok az ítéletkalkulusban**. Modus ponens helyes következtetési séma (B)

Kiértékelési szabályok az ítéletkalkulusban

Szemantika

A $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ jelek az igazságértékeken értelmezett **műveleteknek** felelnek meg. E műveletek közül csak az egy-, és kétváltozós műveleteknek, és azok közül is csak néhánynak van gyakorlati jelentősége. A műveletek definícióját szokás kiértékelésnek, kiértékelési szabálynak is nevezni. A kiértékelés az igazságtábla eredménynek megfelelő oszlopában van.

Műveletek

Egyváltozós műveletek

Negáció (tagadás)

A	$\neg A$
I	H
H	I

Kétváltozós műveletek

Konjunkció (és)

A	B	$A \wedge B$
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	H

Diszjunkció (vagy)

A	B	$A \vee B$
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H

Implikáció (következtetés)

A	B	$A \rightarrow B$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

Ekvivalencia

Definíció $\alpha \leftrightarrow \beta \coloneqq (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\beta \rightarrow \alpha$	$A \leftrightarrow B$
I	I	I	I	I
I	H	H	I	H
H	I	I	H	H
H	H	I	I	I

Modus ponens helyes következtetési séma (B)

Definíció Azokat a következtetési sémákat tekintjük *helyes következtetési sémának,* amelyekben a következmény valóban a feltételek (szemantikai) következménye.

Modus ponens (leválasztási szabály)

Azt kell vizsgálnunk, hogy ahol α és $\alpha \rightarrow \beta$ igazak, ott a β igaz-e. Ha igen, akkor helyes, ha nem, akkor helytelen a következtetési séma. Csak az első interpretációban teljesül, hogy α és $\alpha \rightarrow \beta$ igaz. Ebben az interpretációban β is igaz, tehát valóban $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \vDash_0 \beta$.

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

Tétel $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vDash_0 \beta$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vDash_0 \beta$

Bizonyítás Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ együttesen akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ igaz. ■

A fenti tétel miatt a $\vDash_0$ jel bal oldalát a továbbiakban egyszerű α-val jelöljük, ahol α-n mindig az $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ formulát értjük.

Tétel $\alpha \vDash_0 \beta$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha \rightarrow \beta$ *tautológia.*

Bizonyítás 1.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \vDash_0 \beta$, akkor $\alpha \to \beta$ tautológia:
Írjuk föl az igazságtáblázatot. A jelölt sort ez esetben nem lehet figyelembe venni, ugyanis akkor $\alpha \vDash_0 \beta$ nem teljesülne. A maradék sorokra pedig valóban az I az igazságérték.

	α	β	$\alpha \to \beta$
	I	I	I
$\to$	I	H	H
	H	I	I
	H	H	I

2.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \to \beta$ tautológia, akkor $\alpha \vDash_0 \beta$:
Ha $\alpha \to \beta$ tautológia, akkor a fenti igazságtáblában a jelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen, I sorok. Ezekben a sorokban viszont valóban a β legalább ott igaz, ahol α igaz. ■

Tétel *$\alpha \vDash_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \wedge \neg\beta$ kontradikció.*

Bizonyítás Az $\alpha \vDash_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \to \beta$ tautológia, vagyis $\neg(\alpha \to \beta)$ kontradikció. Ezt kifejtve: $\neg(\alpha \to \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ ■

4A Komplex számok. **Komplex számok különböző alakjai, műveletek. Átszámolás az egyes alakok között**. Hatványozás, Moivre-formula, **gyökvonás (B).** Konjugált. Egységgyök, primitív egységgyök fogalma, egységgyökök struktúrája. **Komplex számokra vonatkozó Euler formula.**

Komplex számok

Definíció Legyen $\mathbb{C}$ a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a, b) : \ a, b \in \mathbb{R}\}$. A $\mathbb{C}$ halmazon két műveletet értelmezünk a következőképpen:

összeadás: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}$

szorzás: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$

A $\mathbb{C}$ halmaz elemei a műveletekkel együtt alkotják a *komplex számokat.*

Definíció Két komplex szám akkor és csak akkor *egyenlő,* ha első és második elemeik egymással páronként egyenlők: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Tétel *A $\mathbb{C} = \{(a, b) : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok testet alkotnak a definícióban megadott műveletekre nézve.*

Komplex számok különböző alakjai, átszámolás az egyes alakok között

Algebrai alak

Tétel *Minden komplex szám felírható olyan kéttagú összegként, ahol az első tag mindkét tényezőjének van izomorf képe a valós számok között, a másodiknak pedig egy tényezője rendelkezik e tulajdonságokkal:* $(a, b) = (a, 0)(1,0) + (b, 0)(0,1)$

Definíció A $z = (a, b)$ komplex szám *algebrai alakja* $z = (a, b) = a + b\mathrm{i}$, ahol $\mathrm{i}^2 \leftrightarrow -1$.

Definíció A $z = a + b\mathrm{i}$ komplex szám *abszolút értéke* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Trigonometrikus alak

Definíció A $z = (a, b)$ komplex szám *trigonometrikus alakját* kapjuk, ha a komplex számsíkon ábrázolt algebrai alak polárkoordinátáit adjuk meg. A polártengely a valós tengely pozitív félegyenese. Ekkor a z szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi))$$

ahol $a = r \cdot \cos(\varphi)$ és $b = r \cdot \sin(\varphi)$.

Exponenciális alak

Az Euler formulából kiindulva a trigonometrikus alak írható másképpen is.

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \cdot \sin(x)$$

Definíció A $z = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$ alakot, ahol r a z komplex szám abszolút értéke, a φ az argumentuma, a komplex szám *exponenciális alakjának* nevezzük.

Műveletek

Szorzás

Algebrai alakban:

$$(a+bi)(c+di) = ac + bc\mathrm{i} + ad\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 = ac - bd + (bc+ad)\mathrm{i}$$

Trigonometrikus alakban:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2)) =$$

$$= r_1 r_2\big((\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + \mathrm{i}\cdot(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big) =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$z_1 z_2 = \left(r_1\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_1}\right)\left(r_2\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_2}\right) = r_1 r_2\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_1}\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 r_2\cdot e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Osztás

Algebrai alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})} = \frac{ac+bci-adi+bd\mathrm{i}^2}{c^2-d^2\mathrm{i}^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$$

Trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos(\varphi_1)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1))}{r_2(\cos(\varphi_2)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos(\varphi_1)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2)-\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))}{(\cos(\varphi_2)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))(\cos(\varphi_2)-\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos(\varphi_1)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2)-\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))}{\cos^2(\varphi_2)-\mathrm{i}^2\cdot\sin^2(\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\big((\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + \mathrm{i}\cdot(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Hatványozás, Moivre-formula, **gyökvonás (B)**

Trigonometrikus alakban:

Tétel *(Moivre formula) A hatványozás trigonometrikus alakban elvégezhető a következőképp:*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(n\varphi))$$

Bizonyítás Teljes indukcióval. Az $n = 1$ esetre nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy eddig minden k-ra igazolást nyert az állítás. Ekkor $n = k+1$ esetre vizsgálva:

$$\mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi))^{\mathrm{k}+1} = \mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi))^{\mathrm{k}}\cdot(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi)) =$$

$$= \mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}[\cos(\mathrm{k}\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\mathrm{k}\varphi)](\cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi)) =$$

$$= \mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}\big(\cos(\mathrm{k}\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\mathrm{k}\varphi)\sin(\varphi) + \mathrm{i}\cdot(\cos(\varphi)\sin(\mathrm{k}\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\mathrm{k}\varphi))\big) =$$

$$= \mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}\big(\cos\big((\mathrm{k}+1)\varphi\big) + \mathrm{i}\cdot\sin\big((\mathrm{k}+1)\varphi\big)\big)$$

■

Exponenciális alakban:

$$z^n = \left(r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{\mathrm{i}n\varphi}$$

Gyökvonás

Definíció A z komplex számot a $z^* \neq 0$ komplex szám n-*edik gyökének* nevezzük, ha $z^n = z^*$

$$\sqrt[n]{z^*} = z \Leftrightarrow z^n = z^*$$

Trigonometrikus alakban:
A trigonometrikus alakban fölírt $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi))$ komplex szám összes n-edik gyökét a következőképpen lehet megtalálni:

Legyen $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi))$ és $z^* = r^*(\cos(\varphi^*) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi^*))$. A két trigonometrikus egyenlőségből a következőt kapjuk:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n\varphi)) = r^*(\cos(\varphi^*) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi^*))$$

$$r^* = r^n \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{r^*} \text{ és } n\varphi = \varphi^* + 2k\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\varphi^* + 2k\pi}{n}, \text{ ahol } k = 0,1,2, \dots, n-1$$

Egy képletben összefoglalva:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \qquad k = 0,1,2, \dots, n-1$$

Konjugált

Definíció A $z = a + b\mathrm{i}$ komplex szám *konjugáltja* a $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ komplex szám.

Egységgyök, primitív egységgyök fogalma, egységgyökök struktúrája

Definíció A z komplex számot n-*edik (komplex) egységgyöknek* nevezzük, ha $z^n = 1$.

Jelölés: $\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Tétel *Az összes n-edik egységgyök előáll az első; ε_1 egységgyök hatványaiként.*

Tétel *Az n-edik egységgyökök csoportot alkotnak a komplex számok szokásos szorzására nézve.*

Definíció 1 Azt az ε_k n-edik egységgyököt, melynek hatványai az összes többi egységgyököt előállítják, *primitív egységgyöknek* nevezzük.

Definíció 2 Az az egységgyök, amelynek n-edik hatványa 1, és semelyik ennél kisebb hatványa nem 1, *primitív egységgyök.*

Definíció 3 Ha ε_k n-edik egységgyök, továbbá k és n relatív prímek, akkor ε_k *primitív egységgyök.*

Tétel *(Definíció 2 ⇒ Definíció 1) Legyen n az a legkisebb szám, amire ε_k n-edik egységgyök. Mivel az egységgyökök csoportot alkotnak, mindegyik hatvány egységgyök. Mivel pontosan n különböző egységgyök van, ha a hatványok mind különbözők, akkor elő is állítják a többi egységgyököt.*

Tétel *(Definíció 1 ⇒ Definíció 3) Ha ε_k n-edik primitív egységgyök, akkor k és n relatív prímek.*

Tétel *(Definíció 3 ⇒ Definíció 2) Ha k és n relatív prímek, akkor ε_k n-edik primitív egységgyök.*

A fenti tételek miatt beláttuk, hogy a három primitív egységgyök definíció ekvivalens.

Komplex számokra vonatkozó Euler formula

A 0 körüli Taylor sorfejtéssel a $\sin(x)$ és a $\cos(x)$ is fölírható, ezzel pedig kifejezhető $e^{\mathrm{i}x}$. A sorokat átrendezve, a konvergens tagokat átírva adódik az Euler formula:

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

4B Az algebra alaptétele. Komplex együtthatós másodfokú egyenlet megoldása.

Az algebra alaptétele

Az n-edfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok körében. Másképpen fogalmazva: multiplicitással számolva a gyököket, pontosan n darab komplex gyök van.

Komplex együtthatós másodfokú egyenlet megoldása

Tétel *Ha a z komplex szám gyöke egy polinomnak, akkor konjugáltja is gyöke.*

A másodfokú egyenletre tanult megoldóképlet komplex számokra is érvényes. A D diszkrimináns segítségével a következő eseteket különböztetjük meg:

$D > 0$, két különböző valós gyök
$D = 0$, egy valós, kétszeres multiplicitású gyök
$D < 0$, két komplex konjugált gyök.

A másodfokú egyenleteknek multiplicitással számolva pontosan két gyöke van a komplex számok körében.

5A Relációk. Reláció általános fogalma. **Bináris reláció, nevezetes bináris relációk és tulajdonságaik. Ekvivalencia reláció és partíció kapcsolata.** Hasonló transzformációk és tulajdonságaik (B). Példa hasonló transzformációkra.

Relációk

Definíció A $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ direkt szorzat bármely részhalmazát *relációnak* nevezzük.

Bináris reláció, nevezetes bináris relációk és tulajdonságaik

Definíció Az $\mathcal{R}$ *bináris reláció H* halmazon, ha $\mathcal{R} \subseteq H \times H = \{(a,b) \mid a \in H, b \in H\}$

Állítás *A bináris reláció tulajdonságai*

1.) reflexív, ha $(x,x) \in \mathcal{R}$

2.a) szimmetrikus, ha $(x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$

2.b) antiszimmetrikus, ha $(x,y) \in \mathcal{R}$ *és* $(y,x) \in \mathcal{R}$ *csakis úgy lehet, ha* $x = y$

3.) tranzitív, ha $(x,y) \in \mathcal{R}$ *és* $(y,z) \in \mathcal{R}$ *esetén* $(x,z) \in \mathcal{R}$

Példák: Oszthatóság, háromszögek hasonlósága.

Ekvivalencia reláció

Definíció Az $\mathcal{R}$ bináris reláció a H halmazon *ekvivalencia reláció,* ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Definíció A *partíció* a H halmaz olyan részhalmaz rendszere, amelyre $H_i \cap H_j = \emptyset$ és

$$\bigcup_{k=1}^{n} H_k = H$$

Tétel *Ha az $\mathcal{R}$ bináris reláció a H halmazon ekvivalencia reláció, akkor a H azon részhalmazai, amelyek egymással relációban álló elemeket tartalmaznak, azok a H halmaz egy partícióját adják.*

Tétel *(az előző megfordítása) Ha a H_i halmazrendszer a H halmaz egy partíciója, akkor ez a H-n ekvivalencia relációt határoz meg, ha $(a,b) \in \mathcal{R}$ akkor és csak akkor, ha $a \in H_i$ és $b \in H_j$.*

Hasonló transzformációk és tulajdonságaik (B)

Minden lineáris transzformáció megvalósítható a vektor egy alkalmas mátrixszal való szorzásával. Így a hasonlóság felfogható a négyzetes mátrixok körében bevezetett relációként: két mátrix relációban áll egymással, ha hasonlók.

Tétel A hasonlóság az $n \times n$-es mátrixok körében ekvivalencia reláció.

Bizonyítás Az ekvivalencia reláció tulajdonságait kell bizonyítani:

Reflexív: $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{A}$ akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$ (tehát a hasonlóság definícióját adó képletben az egységmátrixot választjuk).

Szimmetrikus: Ha $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$, akkor $\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$. Felírva a hasonlóság definícióját: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$. Ezt balról $\boldsymbol{C}$-vel, jobbról $\boldsymbol{C}^{-1}$-gyel beszorozva: $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{B}$

Tranzitív: Ha $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C}$, akkor $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{C}$. Felírva a hasonlóság definícióit:

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}\end{array}\right\} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{V})\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{V}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{U})$$ ■

Példa hasonló transzformációkra.

Olyan transzformációk, melyek mátrixai hasolók.

5B Altér fogalma.

Altér fogalma

Definíció Ha $\langle H| *\rangle$ és $H_1 \subseteq H$-ra is $\langle H_1| *\rangle$, akkor azt mondjuk, hogy H_1 *részstruktúrája* H-nak.

Elnevezés Ha a struktúra vektortér, akkor a részstruktúrát *altérnek* nevezzük.

Példa Az $n \times n$-es mátrixok vektorterében a diagonális mátrixok alteret alkotnak.

6A Hálók. **Háló kétfajta definíciója.** Hasse diagram. Boole-algebra. **Hálóelméleti fixpont tétel (Tarski)** (B). Komplementumos, egységelemes hálók. Példák hálóra.

Hálók, **háló kétfajta definíciója**

Definíció 1 A H részben rendezett halmaz *háló,* ha bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma. A H háló *teljes,* ha bármely részhalmazának van infimuma és supremuma.

Definíció 2 A H halmaz *háló,* ha értelmezve van rajta két, $*$ és $\circ$ által jelölt művelet, melyekre $\forall a, b, c \in H$ esetén teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1.) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $\qquad$ $(a * b) * c = a * (b * c)$

2.) $a \circ b = b \circ a$ $\qquad$ $a * b = b * a$

3.) elnyelési tulajdonság

$$a \circ (b * a) = a$$
$$a * (b \circ a) = a$$

Tétel *A háló kétfajta definíciója ekvivalens egymással.*

Hasse diagram

A Hasse-diagramban a halmaz elemeit lerajzoljuk úgy, hogy a diagramban feljebb rajzoljuk azokat az elemeket, amelyeknél vannak kisebbek. Az elemeket akkor kötjük össze, ha azok az adott rendezés szerint közvetlenül összehasonlíthatók. Nem kötjük össze sem a reflexív, sem a tranzitív tulajdonság miatt relációban álló elemeket.

Boole-algebra

A komplementumos disztributív hálókat Boole-hálónak nevezzük. A Bool-algebrában a komplementer képzés egyváltozós műveletként van értelmezve, így ebben a struktúrában nem kettő, hanem három művelet van.

Példa A halmazok az unió és metszet műveletekkel Boole-hálót alkotnak. A kivonás (komplementer kijelöléssel) műveletet hozzávéve a struktúra Boole algebra lesz.

Hálóelméleti fixpont tétel (Tarski) (B)

Definíció Valamely H rendezett halmazon értelmezett $f : H \to H$ függvény *monoton* (rendezéstartó), ha minden H halmazbeli $h_1 \leq h_2$-re $f(h_1) \leq f(h_2)$. A $h \in H$ fixpontja f-nek, ha $f(h) = h$.

Tétel *(Tarski fixpont tétele) Teljes hálón értelmezett monoton (rendezéstartó) f függvénynek van legkisebb és legnagyobb fixpontja.*

Bizonyítás Legyen G azon elemek halmaza, melyekre $f(x) \leq x$. Ennek alsó határa, vagyis $g = \inf(G)$ lesz a legkisebb fixpont.

Egyrészt $g \in G$, ugyanis $g \leq f(x) \leq x$. Ezért $f(g) \leq f\big(f(x)\big) \leq f(x) \leq x$, vagyis $f(g)$ is alsó korlát. Mivel g a legnagyobb alsó korlát, ezért $f(g) \leq g$, tehát $g \in G$.

Másrészt g fixpont, vagyis $g = f(g)$. Mivel $f(g) \leq g$, ezért $f\big(f(g)\big) \leq f(g)$, vagyis $f(g) \in G$. De akkor g alsó korlát volta miatt $g \leq f(g)$. A rendezési reláció antiszimmetrikus tulajdonága miatt $g = g(f)$.

Harmadrészt g legkisebb fixpont. Legyen G^* a fixpontok halmaza, $g^* = \inf(G^*)$. Mivel $G^* \subseteq G$, ezért $g \leq g^*$; továbbá mivel g^* infimuma G^*-nak, és g is G^*-beli, ezért $g^* \leq g$. A két egyenlőtlenségből az antiszimmetrikus tulajdonság miatt $g^* = g$, vagyis g valóban a legkisebb fixpont. ■

Komplementumos, egységelemes hálók

Definíció Ha egy hálónak van legkisebb és legnagyobb eleme, melyeket 0-val és 1-gyel jelölünk, és e két elem a két művelet egysége, azaz $0 \cup x = x$ és $1 \cap x = x$, akkor *egységelemes hálóról* beszélünk.

Definíció Az $a \in H$ elem komplementer eleme az az $a' \in H$ elem, melyre $a \cup a' = 1$ és $a \cap a' = 0$.

Példák hálóra

Példa A természetes számok halmazán az oszthatóság mint részbenrendezési reláció, hálót alkot.

Nemüres halmaz részhalmazai hálót alkotnak a metszet és unió műveletekkel.

6B Koordináta és koordináta mátrix fogalma.

Tétel *(Síkbeli felbontási tétel) Ha adott a síkben két nem párhuzamos vektor, $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$, akkor minden más c síkbeli vektor felírható az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorokal párhuzamos összetevőkre, melyek összege adja a $\boldsymbol{c}$ vektort.*

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Ez a felbontás egyértelmű.

Definíció Legyenek α, β, γ valós számok. Az $\boldsymbol{a}$ vektor *lineáris kombinációja* az $\alpha\boldsymbol{a}$ kifejezés. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok lineáris kombinációja az $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$, az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektoroké pedig az $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$ kifejezés.

Definíció *Bázisnak* nevezzük azokat a független vektorokat, melyek lineáris kombinációjával az összes vektor előállítható.

Definíció Legyenek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ ugyanazon síkbeli vektorok, melyek közül $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ bázist alkot. Ekkor a $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ lineáris kombinációban szereplő α és β valós számokat a $\boldsymbol{c}$ vektor $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *bázisra vonatkozó koordinátáinak* nevezzük.

Definíció Legyen a sík egy bázisa $b = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})$. Ha $\boldsymbol{c} = \alpha_1\boldsymbol{b_1} + \alpha_2\boldsymbol{b_2}$, akkor az

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}_{[b]} = [\alpha_1, \alpha_2]^T_{[b]}$$

oszlopvektort a c vektor *koordináta-mátrixa.* Ha a bázis a $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ egymásra merőleges, jobbrendszert alkotó egységvektorokból áll, akkor a jobb alsó indexet nem írjuk ki.

7A Halmazalgebra. **Műveletek. Halmaz részhalmazainak száma**. Szita formula. **Komplex számok részhalmazai.** Halmazelméleti azonosságok és bizonyítási módszer igazolásukra. Skatulya elv, példa. Halmaz részhalmazainak száma (B).

Halmazalgebra

Definíció Az A és B halmazok *egyenlők,* ha ugyanazok az elemeik. Jelölés: $A = B$

Definíció Azt a halmazt, amely egy elemet sem tartalmaz, *üres halmaznak* nevezzük. Jele: $\emptyset$

Definíció Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$. Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor azt mondjuk, hogy A valódi részhalmaza B-nek. Ennek jelölése: $A \subset B$

$A \subseteq B$ tulajdonságai

- $A \subseteq A$ (reflexív)
- $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$ (tranzitív)
- $A \subseteq B \not\Rightarrow B \subseteq A$ (nem kommutatív)
- $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$ (antiszimmetrikus)

rendezési reláció

Műveletek

Definíció Az A és B halmazok *egyesítése* (uniója, összege) az az $A \cup B$-vel jelölt halmaz, amelynek elemei A-nak vagy B-nek elemei.

$A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$

Definíció Az A és B halmazok *közös része* (metszete, szorzata) az az $A \cap B$-vel jelölt halmaz, amelynek elemei A-nak és B-nek elemei.

$A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$

Definíció Az A és B halmazok *különbsége*, vagy a B halmaz A halmazra vonatkozó *komplementere* A azon elemeinek halmaza, amelyek nincsenek B-ben.

$A \setminus B = \overline{B_A} \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$

Definíció Legyenek $D_1, D_2, \dots D_n$ adott halmazok. E halmazok *Descartes (direkt) szorzata* $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \coloneqq \{(d_1, d_2, \dots, d_n) \mid d_k \in D_k : 1 \leq k \leq n\}$

Halmaz részhalmazainak száma (B)

Definíció Az A halmaz $P(A)$ *hatványhalmazán* az A részhalmazainak halmazát értjük.

Definíció A halmaz *számosságán* a halmaz elemeinek számát értjük. Jelölés: $|A|$ Ha a halmaz számossága véges, akkor az A halmazt végesnek nevezzük; ellenkező esetben az A halmaz végtelen.

Tétel *Az n elemű halmaz részhalmazainak száma* 2^n.

Bizonyítás Mivel a halmaz elemeinek száma véges, sorszámozhatjuk az elemeket 1-től n-ig. Ha az i-edik elemet kiválasztjuk a részhalmazba, akkor ehhez a sorszámhoz rendeljünk 1-et, különben 0-t. Így minden részhalmazhoz egy n hosszúságú, 0,1 számjegyekből álló számsort lehet kölcsönösen hozzárendelni. Az összes lehetőséget ismétléses variációval kapjuk meg. Így egy n elemű halmaz esetén 2^n részhalmaz van. ■

Szita formula

A halmazokba rendezés valamilyen közös tulajdonság alapján végzett csoportosítást jelent. A logikai szita (más néven szita formula) a halmazokkal kapcsolatos feladatoknál alkalmazható eljárás. A logikai szita kapcsolatot teremt a halmazok uniójának elemszáma és a metszetek elemszáma között.

A logikai szitát olyan feladatoknál használjuk általában, ahol unióba vont halmazokról meg kell adni azon elemek számát, amelyek egy adott tulajdonsággal nem rendelkeznek. A logikai szita elve az, hogy több halmaz uniójának elemszáma egyenlő az egyes részhalmazok elemszámának összege és a metszetek elemszámának különbségével. Erre felírható egy általános képlet:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i|\right) - \left(\sum_{i,j:i<j} |A_i \cap A_j|\right) + \left(\sum_{i,j,k:i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|\right) - \cdots \pm |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Komplex számok részhalmazai

Komplex szám akkor és csak akkor 0, ha algebrai alakjában, $a + \mathrm{i}b$-ben mind az a, mind a b szám nulla.
$a = b = 0$-ra a komplex számok részhalmaza a nullát tartalmazó halmaz.
$a = 0$-ra a komplex számok részhalmaza az imaginárius számok.
$b = 0$-ra a komplex számok részhalmaza a valós számok.

Halmazelméleti azonosságok és bizonyítási módszer igazolásukra

Halmazelméleti azonosságok

1.a)	$A \cup B = B \cup A$	1.b)	$A \cap B = B \cap A$
2.a)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2.b)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3.a)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3.b)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4.a)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	4.b)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Bizonyítási módszer igazolásukra

Az azonosságok a kétoldali tartalmazás módszerével láthatók be, melynek lényege, hogy oda-vissza igazoljuk azt, hogy ha egy elem az egyenlőség egyik oldalán lévő halmazban benne van, akkor szükségszerűen a másik oldali halmaz is tartalmazza ezt az elemet.

Skatulya elv, példa

A skatulya elv azt állítja, hogy ha m dolgot szétosztunk n csoportba, és $m > n$, akkor legalább két dolog azonos csoportba fog kerülni.

Példa Egy osztályba 30 gyerek jár. Igazoljuk, hogy biztosan van 3 olyan tanuló, akik ugyanabban a hónapban születtek.

Megoldás Kezdjük el „szétosztani” a tanulókat születési hónapjaik szerinti csoportokba úgy, hogy lehetőleg ne kerüljön 3 gyerek egy csoportba. Mivel 12 hónap van, ezért legfeljebb 24 tanulót lehet úgy hónapok szerint rendezni, hogy egy csoportban se legyen legalább 3 gyerek. A 25. tanulót már mindenképpen olyan csoportba kell rakni, ahol rajta kívül legalább ketten vannak, és így az állítás igazolást nyert.

7B Skalárszorzat fogalma, skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

Skalárszorzat fogalma

Definíció Az $\langle .,. \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek függvényértékét $s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$-ként jelöljük, *skalárszorzatnak* nevezzük, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

1.) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ és $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (pozitív definit)

2.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ (szimmetrikus)

3.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ (homogén)

4.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ esetén $\langle (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ (lineáris)

Szokásos skalárszorzat

Két geometriai vektor skaláris szorzatán az $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||b| \cos \varphi$ számot értjük.

Két tetszőleges, n dimenziós $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektor skaláris szorzatán a következő számot értjük:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ahol a_i és b_i a vektorok megfelelő koordinátái.

8A Számosságok. **Egyenlő, kisebb/nagyobb számosságú halmazok.** Természetes számok, racionális számok, valós számok számossága (B). Cantor-féle átlós eljárás. **Cantor tétel** (Halmaz és hatványhalmazának számossága közti összefüggés). **Kontinuum hipotézis.**

Egyenlő, kisebb/nagyobb számosságú halmazok

Definíció Egy A és egy B halmaz egyenlő számosságú, ha létezik $f: A \to B$ függvény, amely a két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít. Jelölés: $|A| = |B|$

Definíció Egy A halmaz *számossága legalább akkora,* mint B számossága, ha létezik $A_1 \subset A$ részhalmaz, amely B halmazzal egyenlő számosságú. Jelölés: $|A| \geq |B|$

Definíció Egy A halmaz *véges számosságú,* ha van olyan véges $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre az $\{1,2,3, \dots, k\}$ halmaz és az A halmaz egyenlő számosságú.

Definíció Egy halmaz *megszámlálhatóan végtelen számosságú* (vagy röviden megszámlálható), ha a természetes számok $\mathbb{N} = \{1,2, \dots\}$ halmazával egyenlő számosságú.

Állítás *Ha A megszámlálható és a tőle diszjunkt B halmaz véges, akkor $A \cup B$ is megszámlálható.*

Állítás *A diszjunkt A, B halmazok egyesítésének s számossága csak A és B számosságától függ, vagyis ha A és B helyére a velük egyenlő számosságú A' és B' halmazokat tesszük úgy, hogy A' és B' diszjunktak, akkor $A' \cup B'$ számossága is s.*

Állítás *Véges sok (k darab) diszjunkt, megszámlálható A_i halmaz uniója $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$ is megszámlálható.*

Állítás *Megszámlálhatóan sok diszjunkt A_i halmaz, melyek mindegyike megszámlálható, egyesítve megszámlálható halmazt alkotnak, vagyis $B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz megszámlálható.*

Állítás *A $(0,1)$ intervallumba tartozó összes valós szám H halmaza megszámlálhatónál nagyobb számosságú.*

Állítás *Legye A egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, B pedig egy tőle diszjunkt, kontinuum számosságú halmaz. Ekkor $|A \cup B| = |B|$.*

Bizonyítás Ez a $|H|$ számosság leaglább megszámlálható, hiszen H tartalmazza például a nyilvánvalóan megszámlálható $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ részhalmazt. Indirekt módon tegyük fel, hogy H megszámlálható, vagyis elemeit valamilyen $v_1, v_2, \dots$ sorrendbe rendezhetjük. Minden ilyen v_i egy 0 és 1 közötti valós szám, felírható tehát végtelen tizedestörtként, $0, v_{i1} v_{i2} v_{13}$ .... (az egyértelműség miatt $\forall v_{jk}\ v_{jk} = 9$, ha $k > K \in \mathbb{N}$ végződésű számot kizárunk a halmazból). Az indirekt feltevés szerint tehát a következő sorozat H minden elemét tartalmazná:

$$
\begin{gathered}
0, v_{11} v_{12} v_{13} \dots \\
0, v_{21} v_{22} v_{23} \dots \\
0, v_{31} v_{32_{v33}} \dots \\
\vdots
\end{gathered}
$$

A táblázat „átlója" mentén végighaladva készítsünk olyan w valós számot, melynek $w = 0, w_1 w_2 w_3 \ldots$ tizedestört alakjához a következőképp jutunk:

$$w_i = \begin{cases} w_i = 2, & \text{ha } v_{ii} = 1 \\ w_i = 1, & \text{ha } v_{ii} \neq 1 \end{cases}$$

Ez a w szám biztosan nem szerepelhet a fenti táblázatban, hisz bármely j-re elmondható, hogy a v_j szám j-edik tizedesjegye különbözik a w szám j-edik tizedesjegyétől. Mivel így nem minden 0 és 1 közötti valós szám szerepel a felsorolásban, ellentmondáshoz jutunk, tehát $|H|$ nem lehet megszámlálható. ∎

Cantor-féle átlós eljárás

A fenti bizonyítás az ún. Cantor-féle átlós eljárást használja. Leggyakrabban a rekurzív függvények matematikájában alkalmazzák olyan esetben, amikor azt szeretnék igazolni, hogy egy univerzális kiszámítási tulajdonsággal rendelkező függvény nem eleme annak a függvényosztálynak, melynek kiszámítására hivatott.

Természetes számok, racionális számok, valós számok számossága (B)

Természetes számok

A megszámlálhatóan végtelen számosság definíciójából következően az $\mathbb{N}$ halmaz számossága megszámlálható.

Racionális számok

Állítás *A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás Helyezzük az $A_1 = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$ halmazba az összes egész számot, az $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots\right\}$ halmazba az összes olyan törtet, melynek a nevezője 2 és már nem egyszerűsíthető; az $A_3 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots\right\}$ halmazba az összes olyan törtet, melynek a nevezője 3 és már nem egyszerűsíthető és így tovább. Ezek az A_i halmazok megszámlálhatóak, hisz elemeiket föl tudjuk sorolni. Így megszámlálható sok diszjunkt halmazhoz jutunk, melyek egyesítése szintén megszámlálható, és kiadja $\mathbb{Q}$ halmazt. ∎

Valós számok

Mivel a valós számok halmazának része a $(0,1)$ intervallum, melyről már korábban beláttuk, hogy kontinuum számosságú, így a fenti állításból következik, hogy $\mathbb{R}$ számossága kontinuum.

Cantor tétel (Halmaz és hatványhalmazának számossága közti összefüggés)

Tétel *Ha H halmaz, akkor nincs olyan H-n értelmezett f függvény, mely ráképez a H hatványlahmazára, azaz $|H| < |2^H|$.*

Kontinuum hipotézis

A kontinuumhipotézis szerint nincs olyan halmaz, amelynek számossága a valós számok számossága (kontinuum-számosság) és a természetes számok számossága (megszámlálhatóan végtelen) közé esne.

Jelölje a továbbiakban a számosságokat az $\aleph$ (alef) jel. A megszámolható számosság jele $\aleph_0$, a rákövetkező $\aleph_1$ és rekurzívan, minden k esetén az $\aleph_k$-ra rákövetkezőt $\aleph_{k+1}$ jelölje.

A kontinuumhipotézis szerint: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

Az általánosított kontinuumhipotézis szerint tetszőleges k-ra teljesül, hogy ha X számossága $\aleph_k$, akkor $|2^X| = \aleph_{k+1}$

8B Vektortér fogalma.

Vektortér

Definíció A V nemüres halmazt *vektortérnek* nevezzük a T test felett, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

A V halmazon értelmezve van egy összeadás művelet, bármely $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ elemhez hozzárendel egy V-beli elemet, amelyet $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$-vel jelölünk. Az összeadás kommutatív csoport.

A T test és a V halmaz között értelmezve van a skalárral való szorzás (skalárszoros): bármely $\lambda \in T$ skalárhoz és bármely $\boldsymbol{v} \in V$ vektorhoz egyértelműen hozzárendelünk egy V-beli elemet, melyet $\lambda\boldsymbol{v}$-vel jelölünk. A skalárszoros a következő tuljadonságokkal rendelkezik:

Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v_2} \in V$ esetén teljesül:

- $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, ahol 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme.
- a vegyes asszociatív szabály: $(\lambda\mu)\boldsymbol{v} = \lambda(\mu\boldsymbol{v})$
- a vegyes disztributív szabályok:

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{v}$$

$$\lambda(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = \lambda\boldsymbol{v_1} + \lambda\boldsymbol{v_2}$$

9A Nagyságrend. Függvények növekedése, aszimptotikus közelítések, **kis ordó, nagy ordó**. **Nagyságrend fogalma.** Példa egyenlő nagyságrendekre. **Exponenciális növekedés, ennek illusztrálása példával.**

Függvények növekedése, aszimptotikus közelítések, **kis ordó, nagy ordó**

Definíció Legyen két függvény, f és g, melyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = O\big(g(x)\big)$ (nagy-ordó), ha létezik olyan C, k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|, \qquad \forall x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $g(x)$ *aszimptotikus felső korlátja* $f(x)$-nek.

Példa $f(n) = 3n^2 + 5$ esetén $f(n) = O\big(g(n)\big)$, ahol $g(n) = n^2, C = 4, k = 4$

Definíció Legyen két függvény, f és g, melyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Omega\big(g(x)\big)$ (nagy-omega), ha létezik olyan C, k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \geq C \cdot |g(x)|, \qquad \forall x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ *aszimptotikus felső korlátja* $C \cdot g(x)$-nek.

Példa $f(n) = \frac{n^2}{2} - 7$ esetén $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$, ahol $g(n) = n^2, C = \frac{1}{4}, k = 7$

Nagyságrend fogalma

Definíció Legyenek f és g, a valós vagy egész számok halmazából a valós vagy az egész számok halmazába képező függvények. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Theta\big(g(x)\big)$ (nagy-teta), ha teljesül:

$$f(x) = \Omega\big(g(x)\big) \text{ és}$$
$$f(x) = O\big(g(x)\big)$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a két függvény *nagyságrendje* megegyezik.

Példa egyenlő nagyságrendekre

Nagy ordó „rendezés”:

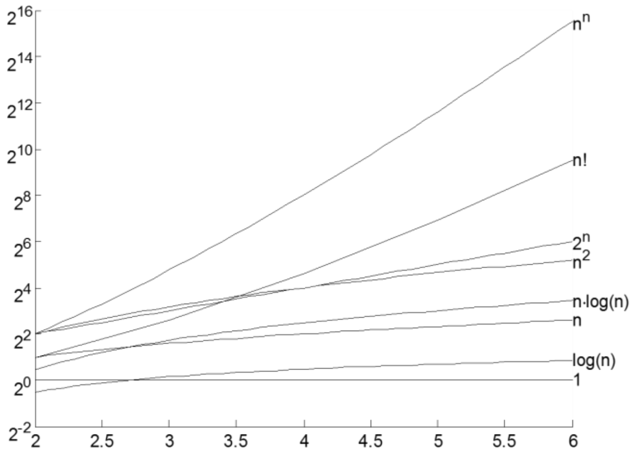
$f(n) = O\big(f(n)\big), \qquad \forall f$

$(\log(n))^k = O(n), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

$n^k = O(2^n), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

Függvények nagyságrendje:

1.) konstans
2.) logaritmus
3.) elsőfokú polinomok
4.) hatvány logaritmusok
5.) polinomok
6.) exponenciális
7.) faktoriális



Exponenciális növekedés, ennek illusztrálása példával

Az exponenciálisan növekvő mennyiségek minél nagyobbak, annál gyorsabban növekednek. A növekedés mértéke arányos a mennyiség nagyságával. Az exponenciálisan növekvő mennyiségek változását exponenciális függvény írja le.

Az időben lezajló exponenciális növekedés képlete: $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$

Példa Egy papírlap hajtogatása során minden félbehajtásnál a papír vastagsága megduplázódik.

9B Gram-Schmidt ortogonalizáció (B)

Tétel *Minden altérben van ortogonális bázis.*

Bizonyítás Konstruktív, azt bizonyítjuk, hogy bármely független rendszerből kiindulva, így bázisból is, tudunk ugyanolyan elemszámú ortogonális rendszert konstruálni. Az alkalmazott eljárás neve *Gram-Schmidt ortogonalizáció.*

Legyen $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}$ a független rendszer. Ebből $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ ortogonális rendszer a következőképpen kapható:

$\boldsymbol{c_1} \coloneqq \boldsymbol{b_1}$

$\boldsymbol{c_2} \coloneqq \boldsymbol{b_2} + \alpha_{21}\boldsymbol{c_1}$

Vegyük mindkét oldal skalárszorzatát $\boldsymbol{c_1}$-gyel, és válasszuk a $\langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \rangle$ skalárszorzatot nullának, így lesznek ortogonálisak e vektorok. Ebből:

$\alpha_{21} = \frac{\langle -\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{c_1} \rangle}{\langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_1} \rangle}$, így $\boldsymbol{c_2} = \boldsymbol{b_2} - \frac{\langle \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{c_1} \rangle}{\langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_1} \rangle}\boldsymbol{c_1}$

Ehhez hasonlóan általában a definiáló egyenletnek rendre vegyük a skalárszorzatát a $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_{k-1}}$ vektorokkal, az együtthatókra a következőt kapjuk:

$$\boldsymbol{c_k} \coloneqq \boldsymbol{b_k} + \alpha_{k1}\boldsymbol{c_1} + \alpha_{k2}\boldsymbol{c_2} + \dots + \alpha_{k,k-1}\boldsymbol{c_{k-1}}$$

$$\alpha_{kj} = \frac{\langle -\boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{c_j} \rangle}{\langle \boldsymbol{c_j}, \boldsymbol{c_j} \rangle}, \qquad j = 1,2, \dots, k-1$$

■

10A Nulladrendű logika. **Műveletek, kiértékelési szabályok, interpretációk. Logikai (szemantikai) következmény fogalma, példák.** A rezolúció alapelve (B). Példák matematikai bizonyítási módszerekre.

Műveletek

Egyváltozós műveletek

Negáció (tagadás)

A	$\neg A$
I	H
H	I

Kétváltozós műveletek

Konjunkció (és)

A	B	$A \wedge B$
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	H

Diszjunkció (vagy)

A	B	$A \vee B$
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H

Implikáció (következtetés)

A	B	$A \rightarrow B$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

Ekvivalencia

Definíció $\alpha \leftrightarrow \beta \coloneqq (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\beta \rightarrow \alpha$	$A \leftrightarrow B$
I	I	I	I	I
I	H	H	I	H
H	I	I	H	H
H	H	I	I	I

Definíciók

Definíció Az a formula, amely minden interpretációban *igaz, tautológia.*

Definíció Az a formula, amely minden interpretációban *hamis, kontradikció.*

Definíció Azt az interpretációt, amelyben a formula *igaz, modellnek* nevezzük.

Definíció Adott két formula α, β. A két formula *ekvivalens*, ha minden interpretációban ugyan az az igazságértékük. Jelölése: $\alpha \equiv \beta$

Fontos ekvivalens formulák

1.) $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

2.) $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \equiv \neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$ (De Morgan azonosság 1.)

3.) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (De Morgan azonosság 2.)

Lemma *α és β akkor és csak akkor ekvivalens, ha $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautológia.*

Tétel *Ha α tautológia, akkor az ítéletváltozók helyébe formulákat írva tautológiát kapunk.*

Tétel *Ha α tautológia, akkor bármely részformula helyett azzal ekvivalens formulát írva tautológiát kapunk.*

Tétel *Az ekvivalens nulladrendű formulák az összes formulák partícióit adják.*

$$\leftrightarrow \textit{ha } \alpha \equiv \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha \equiv \beta \\ \alpha \equiv \beta \text{ és } \beta \equiv \alpha \\ \alpha \equiv \beta \text{ és } \beta \equiv \gamma \Rightarrow \alpha \equiv \gamma \end{cases} \quad \textit{vagyis ekvivalencia reláció.}$$

Logikai következmény

Definíció Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz következménye β, ha minden olyan interpretációban, amelyben az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ formulák igazak, β is igaz.

Más szavakkal: az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz következménye β, ha β legalább akkor igaz, amikor az α_i-k igazak.

Jelölése: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vDash_0 \beta$

Példa Ha elfogy a benzin, az autó leáll. Elfogyott a benzin. $\vDash_0$ Az autó leáll.

Helyes következtetési sémák

Definíció Azokat a következtetési sémákat tekintjük *helyes következtetési sémának,* amelyekben a következmény valóban a feltételek (szemantikai) következménye.

Tétel $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vDash_0 \beta$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vDash_0 \beta$

Bizonyítás Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ együttesen akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ igaz. ■

A fenti tétel miatt a $\vDash_0$ jel bal oldalát a továbbiakban egyszerű α-val jelöljük, ahol α-n mindig az $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ formulát értjük.

Tétel $\alpha \vDash_0 \beta$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha \to \beta$ *tautológia.*

Bizonyítás 1.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \vDash_0 \beta$, akkor $\alpha \to \beta$ tautológia:
Írjuk föl az igazságtáblázatot. A jelölt sort ez esetben nem lehet figyelembe venni, ugyanis akkor $\alpha \vDash_0 \beta$ nem teljesülne. A maradék sorokra pedig valóban az I az igazságérték.

	α	β	$\alpha \to \beta$
	I	I	I
$\to$	I	H	H
	H	I	I
	H	H	I

2.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \to \beta$ tautológia, akkor $\alpha \vDash_0 \beta$:
Ha $\alpha \to \beta$ tautológia, akkor a fenti igazságtáblában a jelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen, I sorok. Ezekben a sorokban viszont valóban a β legalább ott igaz, ahol α igaz. ■

Tétel $\alpha \vDash_0 \beta$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha \wedge \neg\beta$ *kontradikció.*

Bizonyítás Az $\alpha \vDash_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \to \beta$ tautológia, vagyis $\neg(\alpha \to \beta)$ kontradikció. Ezt kifejtve: $\neg(\alpha \to \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ ■

Rezolúció

Tétel *(a rezolúció alapelve)* $\{\alpha \vee \beta, \gamma \vee \neg\beta\} \vDash_0 \alpha \vee \gamma$

Bizonyítás (igazságtáblával)

	α	β	γ	$\neg\beta$	$\alpha \vee \beta$	$\wedge$	$\gamma \vee \neg\beta$	$\alpha \vee \gamma$
	I	I	I	H	I	I	I	I
$\rightarrow$	I	I	H	H	I	H	H	I
	I	H	I	I	I	I	I	I
	I	H	H	I	I	I	I	I
	H	I	I	H	I	I	I	I
$\rightarrow$	H	I	H	H	I	H	H	H
$\rightarrow$	H	H	I	I	H	H	I	I
$\rightarrow$	H	H	H	I	H	H	I	H

A jelölt sorokban a feltétel nem teljesül, így a következmény teljesülését nem vizsgáljuk. A jelöletlen sorokban viszony a következmény legalább ott igaz, ahol a feltétel igaz, tehát ez egy helyes következtetési séma. ■

Tétel *(helyesség) Legyen S tetszőleges klózhalmaz. Ha S-ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.*

Lemma *Legyen S tetszőleges klózhalmaz és a $k_1, k_2, \dots k_m$ klózsorozat rezolúciós levezetés S-ből. Ekkor k_j minden $j = 1,2, \dots m$-re tautológikus következménye az S halmaznak, azaz $S \vDash_0 k_j$.*

Bizonyítás Teljes indukcióval.
1.) A levezetés első klóza, k_1 biztosan eleme S-nek, tehát $S \vDash_0 k_1$.
2.) Tegyük fel, hogy minden $j \leq n$-re igazoltuk már, hogy $S \vDash_0 k_j$.
3.) Belátjuk, hogy k_{n+1}-re is igaz az állítás. Ha $k_{n+1} \in S$, akkor $S \vDash_0 k_{n+1}$. Ha k_{n+1} valamely k_s, k_t klózok rezolvense, akkor $\{k_s, k_t\} \vDash_0 k_{n+1}$. Az indukciós feltevés miatt $S \vDash_0 k_s$ és $S \vDash_0 k_t$. Ebből $S \vDash_0 k_{n+1}$. ■

Bizonyítás Tegyük fel, hogy van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, ami kielégíti S-et. A lemma szerint S-ből való rezolúciós levezetésbeli bármely k_j klózra $S \vDash k_j$, tehát $\mathcal{I}$ kielégíti a rezolúciós levezetés minden klózát is. De az üres klóz kielégíthetetlen, tehát nem lehet eleme a levezetésnek. Így tehát ha S-ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen. ■

Tétel *(teljesség) Ha az S véges klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor S-ből levezethető az üres klóz.*

Példák matematikai bizonyítási módszerekre

Direkt bizonyítás, dedukció: „Tegyük fel, hogy A igaz”.
Indirekt bizonyítás: „tegyük fel, hogy A mégis igaz”; „Lehetetlen, hogy A igaz legyen, így ¬A igaz.”

10B Szita formula

*A szita formulát lásd a **7A.** tételben a 25. oldalon!*

11A Elsőrendű logika. **Szintaxis nullad-, és elsőrendben.** Szemantika: **kvantorok, interpretációk elsőrendben**. Szemantikai következmény elsőrendben. Szintaktikai következmény fogalma. Rezolúció elsőrendben.

Szintaxis

Nulladrendű logika

Jelkészlet
1.) $\boxed{\text{betűk}}$
2.) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ $\boxed{\text{atomok}}$
3.) $\boxed{I, H}$
4.) zárójelek

Formula
Minden atom formula.
Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha,\ \alpha \wedge \beta,\ \alpha \vee \beta,\ \alpha \rightarrow \beta$ is formulák.

A fenti két szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat. Az atomi formulákat latin, az összetett formulákat görög betűvel jelöljük.

Elsőrendű logika

Jelkészlet
1.) változószimbólumok: $x, y, z, \ldots$
2.) konstansszimbólumok: $a, b, c, \ldots$
3.) prédikátumszimbólumok: $P, Q, S, \ldots$
4.) függvényszimbólumok: $f, g, h, \ldots$
5.) logikai összekötő jelek (műveletek jelei): $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$
6.) kvantorok: $\forall$, $\exists$
7.) zárójelek

Kifejezés (term)
Minden individuumváltozó és konstans kifejezés. Ha $t_1, t_2, \ldots, t_n$ kifejezés és f n-változós függvény szimbólum, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is kifejezés.

A fentiek szerint a függvény argumentumaiba írhatunk változókat, konstansokat, de beágyazhatók más, vagy saját függvényértékek is. A kifejezések vagy prédikátumszimbólumok argumentumaiban, vagy függvények argumentumaiban fordulhatnak elő, önállóan nem.

Atomi formulák
Ha P n-argumentumú prédikátumszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ kifejezések, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomi formula.

Formula
Minden atom formula.
Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha,\ \alpha \wedge \beta,\ \alpha \vee \beta,\ \alpha \rightarrow \beta$ is formulák.
$\forall x \alpha(x), \exists x \alpha(x)$ is formula.

A fenti három szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat.

Szemantika

Kvantorok hatásköre

Megállapodás szerint a kvantor hatásköre a mögötte álló változó utáni atomi formula vagy zárójelben megadott formula. Az ezekben szereplő változó előfordulásokat kötöttnek nevezzük, a változó egyéb előfordulásait szabadnak.

Interpretáció

Az elsőrendű nyelvben is valamely formula igazságértékét csak úgy tudjuk megmondani, ha interpretáljuk a formulát. Az interpretáció több részből áll. Meg kell adni az alaphalmazt, aminek elemeire vonatkoznak a formulák. Ahogyan nulladrendben is tettük, itt is meg kell mondani az atomi formulák igazságértékét. Ezen túlmenően, a függvényeket is interpretálni kell, meg kell mondani, hogy az egyes individuumokon mi a felvett függvényérték (ami szintén az univerzum egy eleme, vagyis egy individuum).
Ezután az elsőrendben tanult kvantorok jelentése, és a műveletek nulladrendben tanult jelentése alapján kiértékelhető a formula.

Definíciók

Definíció Az elsőrendű mondat *kielégíthető,* ha van olyan interpretáció, amelyikben igaz. Ezt az interpretációt a formula *modelljének* nevezzük.

Definíció Az elsőrendű mondat *érvényes,* ha minden interpretációban igaz.

Definíció Az elsőrendű mondat *kontradikció/kielégíthetetlen,* ha minden interpretációban hamis.

Definíció Adott két formula α, β. A két formula *ekvivalens*, ha minden interpretációban ugyan az az igazságértékük. Jelölése: $\alpha \equiv \beta$

Szemantikai következmény

Definíció Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz szemantikai következménye β, ha minden olyan interpretációban, amelyben az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ formulák igazak, β is igaz.

Más szavakkal: az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz következménye β, ha β legalább akkor igaz, amikor az α_i-k igazak.

Jelölése: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vDash_1 \beta$

Helyes következtetési sémák

Definíció Azokat a következtetési sémákat tekintjük *helyes következtetési sémának,* amelyekben a következmény valóban a feltételek (szemantikai) következménye.

Rezolúció

Az elsőrendű rezolúció alapjai

A Skólem normálformát feltételezve, prenex elhagyható, csak megjegyezzük, hogy valóban, minden változó univerzálisan kvantált volt. Tehát a maradék részre, az ún. a mátrixra lehet alkalmazni a rezolúciót. A nulladrendhez képest különbséget jelent az, hogy a literálokat helyettesíteni kell.

A változó/term rendezett párokat tartalmazó $\alpha = \{v_1/t_1, \dots, v_n/t_n\}$ halmazt helyettesítésnek nevezzük, ha $v_1, \dots, v_n$ egymástól különböző változókat jelölnek, és $t_i \neq v_i$, $(1 \leq i \leq n)$.

Legáltalánosabb egységesítő helyettesítésnek nevezzük az $A_1, A_2, \dots, A_n$ kifejezéseknek egy δ egységesítő helyettesítését, ha bármely α egyesítő helyettesítés előállítható $\alpha = \alpha'\delta$ formában (α' egy alkalmas helyettesítés).

(Legáltalánosabb) egységesítő helyettesítés alapelvei:

Változóba szabad konstanst vagy másik változót helyettesíteni.

Változóba szabad olyan függvényt is helyettesíteni, amelynek argumentumában más változó, vagy konstansok szerepelnek. (függvénybe is, a termek képzésének szabályai szerint helyettesíthetők változók, illetve konstansok, illetve újabb függvények.)

A rezolúcióhoz a formulát és a következmény tagadását Skólem normálformára alakítjuk. Nevezzük át a változókat úgy, hogy a változónevek különbözőek legyenek a klózokban. A rezolúció tehát csak akkor alkalmazható, ha az egységesítés elvégezhető. Ekkor pedig rezolúció alapelvét adó következtetési sémát alkalmazzuk, és akárcsak nulladrendben, elvégezzük a rezolúciót.

11B Sajátérték, sajátvektor fogalma. Sajátvektorok bázisában a transzformáció mátrix (B).

Sajátérték, sajátvektor

Definíció A λ szám *sajátértéke* az L transzformációnak, ha van olyan nem nulla vektor, melyre $L(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$. Ez a nem nulla $\boldsymbol{x}$ vektor az L transzformáció λ sajátértékéhez tartozó *sajátvektora.*

Sajátvektorok bázisában a transzformáció mátrix (B)

Tétel *Tegyük fel, hogy egy $V^n \to V^n$ homogén lineáris transzformáció (különböző sajátértékhez tartozó) sajátvektorai bázist alkotnak. Ekkor a transzformáció mátrixa e bázisra vonathozóan diagonális, és a főátlóban rendre a megfelelő sajátértékek állnak.*

Bizonyítás A transzformáció mátrixának oszlopvektorai a bázisvektorok képei. Sajátvektor képe önmaga sajátértékszerese. Ezért az i-edik sajátvektor, s_i mátrixos alakja a sajátvektorok bázisában egy olyan oszlopvektor, melynek i-edik koordinátája λ_i, az összes többi koordináta pedig 0.

Mivel ezek az oszlopvektorok alkotják a transzformáció mátrixát, az első oszlopvektorban pedig az első helyen stb. áll a sajátérték, a kapott mátrix valóban diagonális lesz. ■

12A Lineáris tér. **Lineáris tér fogalma. Lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség, ennek igazolási módszere**. **Generátorrendszer, bázis, koordináták, dimenzió.** Dimenzió ekvivalens megfogalmazásai. Kicserélési tétel (B).

Lineáris tér fogalma

A vektortér, vagy más néven lineáris tér a lineáris algebra egyik legalapvetőbb fogalma, melyhez a geometriában is használatos vektor fogalmának általánosítása vezet.

Definíció A V nemüres halmazt *vektortérnek* nevezzük a T test felett, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

A V halmazon értelmezve van egy összeadás művelet, bármely $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ elemhez hozzárendel egy V-beli elemet, amelyet $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$-vel jelölünk. Az összeadás kommutatív csoport.

A T test és a V halmaz között értelmezve van a skalárral való szorzás (skalárszoros): bármely $\lambda \in T$ skalárhoz és bármely $\boldsymbol{v} \in V$ vektorhoz egyértelműen hozzárendelünk egy V-beli elemet, melyet $\lambda\boldsymbol{v}$-vel jelölünk. A skalárszoros a következő tuljadonságokkal rendelkezik:

Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v_2} \in V$ esetén teljesül:

- $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, ahol 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme.
- a vegyes asszociatív szabály: $(\lambda\mu)\boldsymbol{v} = \lambda(\mu\boldsymbol{v})$
- a vegyes disztributív szabályok:

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{v}$$
$$\lambda(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = \lambda\boldsymbol{v_1} + \lambda\boldsymbol{v_2}$$

Lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség, ennek igazolási módszere

Definíció A $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$$

csak úgy lehetséges, hogy miden $\lambda_i = 0$.

Definíció A $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, .., \boldsymbol{v_n}$ vektorok *lineárisan összefüggők*, ha

$$\sum_{n=i}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}$$

lineáris kombinációban van olyan λ_i, amelyre $\lambda_1 \neq 0$.

A lineáris függőség megállapításához azt kell eldönteni, hogy miként állítható elő a **0** vektor. Ha az egyenletrendszernek csak triviális megoldása létezik, akkor az adott vektorok lineárisan függetlenek.

Generátorrendszer, bázis, koordináták, dimenzió

Definíció Azok a vektorok, melyek lineáris kombinációjaként a vektortér minden eleme előáll, *generátorrendszert* alkotnak.

Definíció A V vektortér lineárisan független vektorokat tartalmazó generátorrendszerét *bázisnak* nevezzük.

Definíció Legyen a V vektortér egy bázisa $[b] = \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}$. A $\boldsymbol{v} \in V$ vektor e bázisvektorokkal való felírásában a $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{b_1} + \lambda_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{b_n}$ lineáris kombinációban szereplő $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalárokat a v vektor $[b]$ bázisra vonatkozó *koordinátáinak* nevezzük.

Definíció A V vektortér *dimenzióján* bármely bázisának elemszámát értjük.

Dimenzió ekvivalens megfogalmazásai

A „hétköznapi" értelemben is a független irányok számát tekintjük dimenziónak, a konkrét irányok nem lényegesek.

Kicserélési tétel (B)

Tétel *Az $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ független vektorokból álló rendszer bármely $\boldsymbol{f_i}$ vektorához található a $\boldsymbol{g_1}, \dots, \boldsymbol{g_j}$ generátorrendszerből olyan g_k vektor, amellyel $\boldsymbol{f_i}$-t kicserélve az $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_{i-1}}, \boldsymbol{g_k}, \boldsymbol{f_{i+1}}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ vektorokból álló rendszer független.*

Bizonyítás Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{f_1}$-hez nem jó egyik $\boldsymbol{g_i}$ sem. Vagyis minden egyes $\boldsymbol{g_i}$-re a $\boldsymbol{g_i}, \boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ vektorok lineárisan összefüggők. Az $\boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ vektorok függetlenek voltak, (mivel független rendszerből vektort elhagyva az független marad). Mivel a függetlenség $\boldsymbol{g_i}$ hozzátételével szűnt, meg, ezért $\boldsymbol{g_i}$ kifejezhető az $\boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ vektorokkal:

$$\boldsymbol{g_i} = \sum_{k=2}^{n} \gamma_{ik} \boldsymbol{f_k}$$

Ugyanakkor, mivel a $\boldsymbol{g_i}$ vektorok generátorrendszert alkotnak, ezért a tér minden vektora, vagyis $\boldsymbol{f_1}$ is kifejezhető segítségükkel:

$$\boldsymbol{f_1} = \sum_{k=1}^{j} \phi_{1k} \boldsymbol{g_k} = \sum_{k=1}^{j} \phi_{1k} \left(\sum_{l=2}^{n} \gamma_{kl} \boldsymbol{f_l} \right)$$

Tehát az $\boldsymbol{f_2}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ vektorok lineáris kombinációja előállítja az $\boldsymbol{f_1}$ vektort. Ez azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ vektorok lineárisan összefüggőek lennének, azonban ez ellentmondás. ■

12B Komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakja.

*A komplex számok trigonometrikus és exponenciális alakját lásd a **4A.** tételben a 16. oldalon!*

13A Vektoralgebra. A 3 dimenziós vektorok tere. Speciális műveletek: **skaláris szorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat, és erre vonatkozó tételek, geometriai jelentésük.** Sík normálvektoros egyenlete. Pont és sík távolsága. Vektor összetevőkre bontása és merőleges kiegészítő.

A háromdimenziós vektorok tere

Definíció Az irányított szakaszt *vektornak* nevezzük.

Definíció Két vektor *egyenlő,* ha hosszuk és irányuk is megegyezik.

Speciális műveletek és geometriai jelentéseik

Skaláris szorzat

Definíció Két vektor, $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ *skalárszorzatán* azt az $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$-vel jelölt számot értjük, amelyre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\alpha)$, ahol α a két vektor által bezárt szög.

Tétel *Az $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ skalárszorzat geometria jelentése a $\boldsymbol{b}$ vektor $\boldsymbol{a}$-ra vett előjeles merőleges vetületének $|\boldsymbol{b}|$-szerese.*

Tétel *A skalárszorzat tulajdonságai:*
1.) pozitív definit: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0,\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
2.) szimmetrikus: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
3.) homogén: $\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$
4.) lineáris: $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

Tétel *Két vektor skalárszorzata akkor és csak akkor* 0, *ha a vektorok merőlegesek.*

Vektoriális szorzat

Definíció Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektorok *jobbrendszert alkotnak,* ha közös kezdőpontból ábrázolva a $\boldsymbol{c}$ vektor irányából nézve az $\boldsymbol{a}$ vektort π-nél kisebb szögű pozitív forgatással tudjuk $\boldsymbol{b}$ vektor irányába vinni.

Definíció Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ vektorok *vektoriális szorzata* az az $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$-vel jelölt vektor, melyre $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin(\alpha)\, \boldsymbol{e}$, ahol $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{b}, |\boldsymbol{e}| = 1$ és $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}$ vektorok jobbrendszert alkotnak.

Tétel *A vektoriális szorzat geometriai jelentése az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.*

Tétel *Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor nullvektor, ha a vektorok párhuzamosak.*

Vegyes szorzat

Definíció Az $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ valós számot az a, b, c vektorok *vegyes szorzatának* nevezzük. Az eddigi definíciókat felhasználva: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin(\alpha))|\boldsymbol{c}| \cos(\beta)$

Tétel *Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektorok vegyes szorzatának jelentése a vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata.*

Sík normálvektoros egyenlete

Definíció Ha az $\boldsymbol{n}$ vektor merőleges az S síkra, akkor az $\boldsymbol{n}$ az S sík *normálvektora.*

Tétel *Ha az S sík egy normálvektora $\boldsymbol{n}$, egy adott pontja P_0, ebbe mutató helyvektor $\boldsymbol{p_0}$, tetszőleges pontja P, az ebbe mutató helyvektor $\boldsymbol{p}$, akkor a sík egyenlete:*

$$S\colon \boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p_0})=0$$

Pont és sík távolsága

Ha adott egy S sík, melynek ismerjük az n normálvektorát és egy P_0 pontját, akkor a nem síkbeli A pont távolságát a síktól az alábbi képlet adja meg:

$$d=\overrightarrow{\boldsymbol{P_0A}}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$$

Vektor összetevőkre bontása és merőleges kiegészítő

Tétel *Adottak az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok. Az $\boldsymbol{a}$ vektor fölírható a $\boldsymbol{b}$ vektorral párhuzamos $\boldsymbol{a_b}$ és a $\boldsymbol{b}$ vektorra merőleges $\boldsymbol{a_m}$ vektorok összegeként:*

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_b}+\boldsymbol{a_m},\qquad \boldsymbol{a_b}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e_b})\boldsymbol{e_b},\qquad \boldsymbol{a_m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a_b}$$

ahol $\boldsymbol{e_b}$ vektor a $\boldsymbol{b}$ vektorral egyirányú egységvektor.

13B Dimenzió tétel. (B)

Dimenzió tétel (B)

Tétel *Legyen L valamely $V\to W$ lineáris leképezés. Ekkor*

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(L)\big)+\dim\big(\mathrm{Im}(L)\big)=\dim(V)$$

Bizonyítás Bizonyítandó, hogy a leképezés magterének és képterének dimenziójának összege éppen a kiindulási tér dimenziójával egyenlő.

Mivel $\mathrm{Ker}(L)$ altér, így van bázisa. Legyen az a bázis $\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},\dots,\boldsymbol{b_m}$. Egészítsük ki ezt a független rendszer úgy, hogy $\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},\dots,\boldsymbol{b_m},\boldsymbol{b_{m+1}},\dots,\boldsymbol{b_n}$ legyen V bázisa.

Azt kell bizonyítani, hogy $\boldsymbol{b_{m+1}},\dots,\boldsymbol{b_n}$ képei bázist alkotnak W-ben. Ezzel a tétel bizonyítása kész, hiszen a dimenzió a báziselemek száma, és így az $n=m+(n-m)$ képlet, ahol n a kiindulási tér, m a magtér, $(n-m)$ pedig a képtér dimenziója, éppen a tétel állítása.

Először azt látjuk be, hogy az $L(\boldsymbol{b_{m+1}}),\dots,L(\boldsymbol{b_n})$ vektorok $\mathrm{Im}(L)$-ben generátorrendszert alkotnak, majd azt, hogy függetlenek. E két tulajdonság biztosítja, hogy $L(\boldsymbol{b_{m+1}}),\dots,L(\boldsymbol{b_n})$ az $\mathrm{Im}(L)$ egy bázisa.

Tekintsük $\mathrm{Im}(L)$ tetszőleges $\boldsymbol{y}$ vektorát. Ehhez van olyan $\boldsymbol{x}\in V$, melyre $\boldsymbol{y}=L(\boldsymbol{x})$. A V vektortér bázisával az $\boldsymbol{x}$ vektort kifejezve és erre alkalmazva az L lineáris leképezést:

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{b_1}+x_2\boldsymbol{b_2}+\dots+x_m\boldsymbol{b_m}+x_{m+1}\boldsymbol{b_{m+1}}+\dots+x_n\boldsymbol{b_n}$$

$$L(\boldsymbol{x})=L(x_1\boldsymbol{b_1}+x_2\boldsymbol{b_2}+\dots+x_m\boldsymbol{b_m}+x_{m+1}\boldsymbol{b_{m+1}}+\dots+x_n\boldsymbol{b_n})=$$

$$=x_1L(\boldsymbol{b_1})+x_2L(\boldsymbol{b_2})+\dots+x_mL(\boldsymbol{b_m})+x_{m+1}L(\boldsymbol{b_{m+1}})+\dots+x_nL(\boldsymbol{b_n})=$$

$$=0+0+\dots+0+x_{m+1}L(\boldsymbol{b_{m+1}})+\dots+x_nL(\boldsymbol{b_n})$$

Vagyis valóban, $\mathrm{Im}(L)$ vektorai felírhatók az $L(\boldsymbol{b_{m+1}})+\dots+L(\boldsymbol{b_n})$ vektorok lineáris kombinációiként, tehát ezek a vektorok generátorrendszert alkotnak.

A függetlenség bizonyításához felírjuk a definíciót:

$$\mathbf{0} = \alpha_{m+1} L(\boldsymbol{b_{m+1}}) + \cdots + \alpha_n L(\boldsymbol{b_n})$$

Mivel L lineáris leképezés, ezért

$$\mathbf{0} = L(\alpha_{m+1} \boldsymbol{b_{m+1}} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b_n})$$

Eszerint az $\boldsymbol{x}^* = \alpha_{m+1} \boldsymbol{b_{m+1}} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b_n}$ vektor benne van a magtérben, így felírható a magtérbeli bázis vektorainak lineáris kombinációjával:

$$\boldsymbol{x}^* = \alpha_{m+1} \boldsymbol{b_{m+1}} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b_n} = \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{b_m}$$

amiből

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{b_m} - \alpha_{m+1} \boldsymbol{b_{m+1}} - \cdots - \alpha_n \boldsymbol{b_n}$$

Mivel a V bázisát alkotó $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_m}, \boldsymbol{b_{m+1}}, \ldots, \boldsymbol{b_n}$ vektorok függetlenek, ezért a $\mathbf{0}$ vektort csak úgy tudják előállítani, ha minden $\alpha_i = 0$. ■

14A Lineáris leképezések. Lineáris leképezések összege, skalárszorosa, példák. Homogén lineáris leképezések lineáris tere. **Áttérés más bázispárra.**

Lineáris leképezések

Definíció Legyenek V és W vektorterek, valamint $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Azt az $L: V \to W$ függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, *homogén lineáris leképezésnek* nevezzük.

1. lineáris tulajdonság: $L(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v})$

2. homogén tulajdonság: $L(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda L(\boldsymbol{u})$

Ha $V = W$, akkor a leképezést lineáris *transzformációnak* hívjuk.

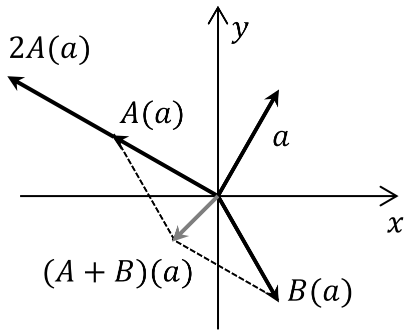
Leképezések összege, skalárszorosa, példák

Definíció Legyenek V és W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A, B: V^n \to W^k$ lineáris leképezések. Legyen továbbá egy $\boldsymbol{x} \in V$ vektor. Az A és B lineáris leképezések *összege:* $(A + B)(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})$

Definíció Legyenek V és W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A: V^n \to W^k$ lineáris leképezés. Legyenek továbbá $x \in V$ vektor és λ szám. Az A lineáris leképezés *számszorosa* (skalárszorosa): $(\lambda A)(\boldsymbol{x}) = \lambda A(\boldsymbol{x})$

Tétel *A fent definiált összeg és számszoros valóban homogén lineáris leképezés.*

Példa Legyen adott az A, origó körüli pozitív irányú 90°-os forgatás, és a B x tengelyre tükrözés leképezések. Az ábrán látható e leképezések összege és skalárszorosa.



Homogén lineáris leképezések lineáris tere

Tétel *A $V^n \to W^k$ lineáris leképezések halmaza a fent definiált összegre és számszorosra nézve $k \times n$ dimenziós vektorteret alkot.*

Tétel *A $V^n \to W^k$ lineáris leképezések vektortere izomorf a $k \times n$ típusú mátrixok vektorterével.*

Áttérés más bázispárra

Tétel *Legyen $V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ n dimenziós vektortér, $[e]$ és $[u]$ két bázis V-ben. Ha a V tér $\boldsymbol{x}$ vektorának koordináta mátrixa $\boldsymbol{x}_{[e]} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T_{[e]}$ az $[e]$ bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon $\boldsymbol{x}$ vektor $[u]$ bázisra vonatkozó koordinátái az alábbi képletből számolhatók:*

$$\boldsymbol{x}_{[u]} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}_{[e]}$$

*ahol az **U** mátrix oszlopai az $[u]$ bázis vektorainak $[e]$ bázisra vonatkozó koordinátamátrixai. Az **U** mátrixot áttérési mátrixnak nevezzük.*

14B **Kromatikus szám fogalma. Sík gráfok kromatikus száma.** Ötszín tétel (B).

Kromatikus szám fogalma

Definíció A $\chi(G)$ a G gráf *kromatikus száma,* vagyis az a szám, amely megmutatja, legkevesebb hány szín kell a gráf csúcsainak olyan kiszínezéséhez, hogy a szomszédos csúcsok más színűek legyenek.

Sík gráfok kromatikus száma

Definíció Egy egyszerű gráf n*-színezhető,* ha minden csúcsához hozzárendelhető úgy egy szín hogy két szomszédos csúcshoz rendelt szín különböző.

Állítás *Teljesül az alábbi összefüggés:* $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, *ahol* $\omega(G)$ *a* G *gráfban található legnagyobb fokszámú teljes gráf és* $\Delta(G)$ *a legnagyobb fokszám.*

Ötszín tétel (B)

Tétel *Ha* G *gráf síkba rajzolható, akkor* $\chi(G) \leq 5$.

Bizonyítás Teljes indukcióval. Ha a gráfnak legfeljebb 5 csúcsa van, akkor biztosan kiszínezhető 5 (vagy kevesebb) színnel. Tegyük fel, hogy eddig minden n csúcsú gráfra igazoltuk a tétel állítását. Tekintsük most az $n + 1$-edik esetet, mikor is a G gráf $n + 1$ csúcsú.

Mivel síkgráfokra $e \leq 3n - 6$, ezért van olyan csúcs, melynek fokszámának maximuma 5.

Ha x fokszáma 4, akkor x-et elhagyva a csúcsok száma eggyel csökken, így az indukciós feltevés miatt kiszínezhető 5 színnel. Visszatéve ezt a csúcsot, a szomszédjait legfeljebb 4 színnel színezhetjük, tehát x kapja az ötödik színt.

Ha x fokszáma 5, akkor minden szomszédja nem lehet összekötve egymással, mert akkor K_5 részgráf lenne, ami nem síkgráf. Legyen y és z az x olyan szomszédai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk össze egy ponttá és hagyjuk el x-et. Az indukciós feltevés miatt ekkor az egész gráf kiszínezhető 5 színnel. Visszatéve x-et és szétszedve az y és z csúcsokat, ezek kiszínezhetők legfeljebb 3 színnel, hiszen x-nek öt szomszédja közül három színe rögzített, viszont y és z azonos színűek, így x számára marad az ötödik szín. ■

15A Izomorfia. **Izomorfia fogalma.** Izomorfiára vonatkozó szükséges és elégséges feltétel. **A vektorterek közti izomorfia ekvivalencia reláció.** Mátrixok lineáris terének és a lineáris leképezések terének kapcsolata. **Példa: az $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R})$ alakú komplex számok és a valós számok izomorfiája.** Az $a + b$i képlet magyarázata (B).

Izomorfia fogalma

Definíció Az egy-egy értelmű $L: V \to W$ lineáris leképezést *izomorf leképezésnek* nevezzük. Az izomorf vektorterek jelölése: $V \cong W$

Izomorfiára vonatkozó szükséges és elégséges feltétel

Tétel *Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk egyenlő.*

A vektorterek közti izomorfia ekvivalencia reláció

Tétel *A vektorterek körében az izomorfia ekvivalencia reláció.*

Mátrixok lineáris terének és a lineáris leképezések terének kapcsolata

Tétel *A $V^n \to W^k$ lineáris leképezések vektortere izomorf a $k \times n$ típusú mátrixok vektorterével.*

Az $a + b$i képlet magyarázata (B)

Példa: az $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R})$ alakú komplex, és a valós számok izomorfak

Tétel *Az $(a, 0)$ komplex számok és a valós számok között egy-egy értelmű, műveletlettartó leképezés létesíthető, vagyis az $(a, 0)$ komplex számok izomorfak a valós számokkal.*

Bizonyítás Konstruktív módon, megadva az izomorfiát biztosító egy-egy értelmű leképezést: $(a, 0) \in \mathbb{C} \leftrightarrow a \in \mathbb{R}$.

A kommutatív és asszociatív tulajdonságok a komplex számokra is teljesülnek, így elegendő annak bizonyítása, hogy mind az összeadásra, mind a szorzásra nézve is zárt a halmaz: két ilyen komplex szám szorzata és összege is ugyanilyen típusú komplex szám. Szükséges még az inverz és az egységelem létezésének bizonyítása is.

Az összeadás nem vezet ki az $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazból, mivelhogy

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

Az összeadás egysége $(0,0)$. Erre vonatkozó inverz: $(a, 0) + (-a, 0) = (0,0)$

A szorzás nem vezet ki az $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazból, mivelhogy

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0^2, 0a + 0b) = (ab, 0)$$

A szorzás egysége $(1,0)$. Erre vonatkozó inverz: $(a, 0) \cdot (\frac{1}{a}, 0) = (1,0)$ ■

Tétel *Minden komplex szám felírható olyan kéttagú összegként, ahol az első tag mindkét tényezőjének van izomorf képe a valós számok között, a másodiknak pedig egy tényezője rendelkezik e tulajdonságokkal:* $(a, b) = (a, 0)(1,0) + (b, 0)(0,1)$

Bizonyítás Az $(1,0)$ neve valós egység, valós megfelelője 1. A $(0,1)$ neve képzetes egység, jelöljük őt i-vel. Az i komplex számnak nincs valós megfelelője!

Ekkor $\mathbb{C}$ minden eleme $a + b\mathrm{i}$ alakban írható, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. ■

Megjegyzés Az i komplex szám négyzete $\mathrm{i}^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0)$.

15B Kúpszeletek, mint mértani helyek

Definíció Az *ellipszis* azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának összege állandó, mely állandó nagyobb az adott pontok távolságánál.

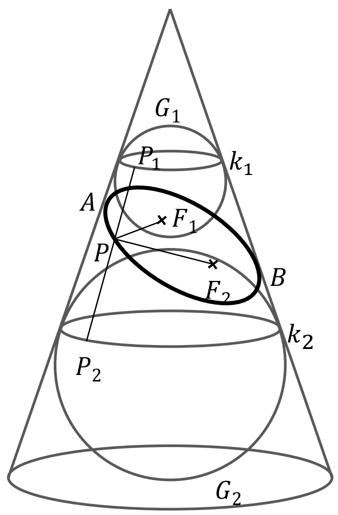
Definíció A *hiperbola* azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának különbsége állandó, mely állandó kisebb az adott pontok távolságánál.

Definíció A *parabola* azon pontok mértani helye a síkban, amik egy adott egyenestől és egy adott, az egyenesre nem illeszkedő ponttól egyenlő távolságra vannak.

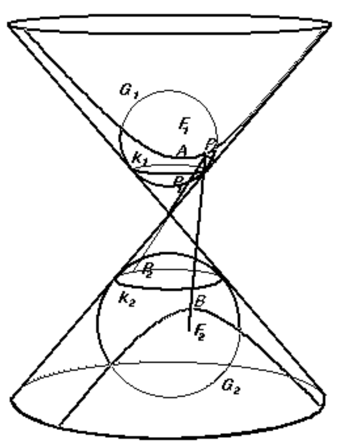
Kúpszeletek és az ellipszis, hiperbola, parabola ekvivalenciája

Ellipszis

Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba olyan gömböket, amik érintik a kúpot és a metszősíkot is. A G_1 gömb a kúp palástját k_1 körben, a síkot F_1 pontban érinti. A G_2 gömb a kúpot k_2 körben, a metszősíkot F_2 pontban érinti. P ponton áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi. Teljesül rájuk, hogy $PP_1 = PF_1$ és $PP_2 = PF_2$, mivel ezek a szakaszok a gömbhöz húzott érintőszakaszok egy külső pontból. Ugyanakkor PP_1 és PP_2 egy közös alkotón vannak és ezek hosszának összege a forgásszimmetria miatt állandó. Tehát egy tetszőleges P pontnak a fókuszoktól vett távolságainak összege állandó, ezért ez ellipszis.



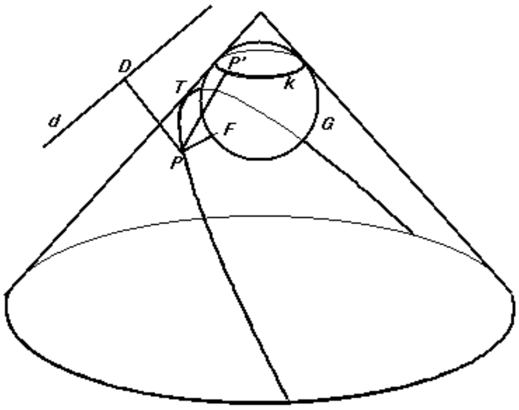
Hiperbola

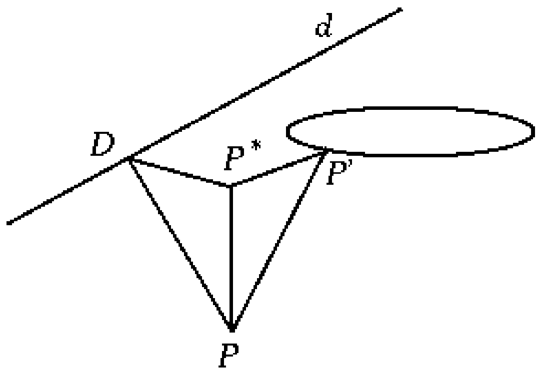


Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba olyan gömböket, amik érintik a kúpot és a metszősíkot is. A G_1 gömb a kúp palástját k_1 körben, a síkot F_1 pontban érinti. A G_2 gömb a kúpot k_2 körben, a metszősíkot F_2 pontban érinti. A P ponton áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi. Teljesül rájuk, hogy $PP_1 = PF_1$ és $PP_2 = PF_2$, mivel ezek a szakaszok a gömbhöz húzott érintőszakaszok egy külső pontból. Ugyanakkor PP_1 és PP_2 egy közös alkotón vannak és a forgásszimmetria miatt P_1P_2 szakasz hossza állandó és P ugyanazon az egyenesen van, ezért PP_1 és PP_2 szakaszok különbségének abszolút értéke állandó. Tehát egy tetszőleges P pontnak a fókuszoktól vett távolságainak különbségének abszolút értéke állandó, ezért ez hiperbola.

Parabola

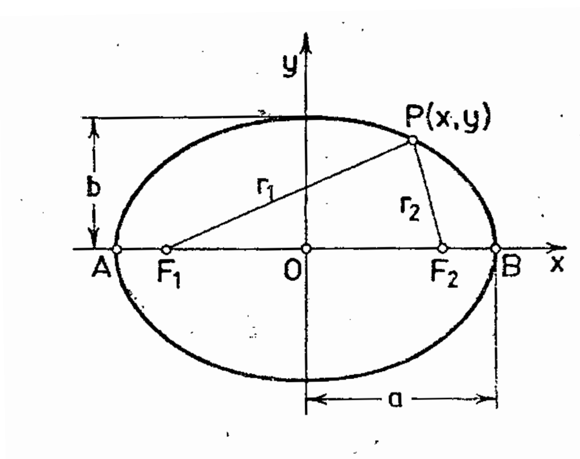
Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba egy olyan érintőgömböt G, ami egyúttal a síkot is érinti. A kúpot k körben, a síkot F pontban érinti a G gömb. P-ből a gömbhöz húzott érintőszakaszok PF és PP', amik egyenlő hosszúságúak. A metszősík és k síkja d egyenesben metszik egymást. P-ből merőlegest állítva d-re és k síkjára kapjuk a D és a P^* talppontokat. PD a metszősíkban van és párhuzamos azzal az alkotóval, amivel a sík is párhuzamos. Így a DPP^* és a P^*PP' szög is váltószöge egy-egy olyan szögnek, melynek egyik szára a kúp tengelye, másik szára pedig egy alkotó; a két szög tehát egyenlő. Ezért a kapott $PP'P^*$ derékszögű háromszög egybevágó a PP^*D derékszögű háromszöggel (egy oldaluk közös és a rajta fekvő szögeik egyenlők). Tehát az átfogók egyenlő hosszúak: $DP = PP'$, másrészről $PP' = PF$. Tehát egy tetszőleges P pont távolsága a fókusztól és a vezéregyenestől egyenlő, ezért ez parabola.

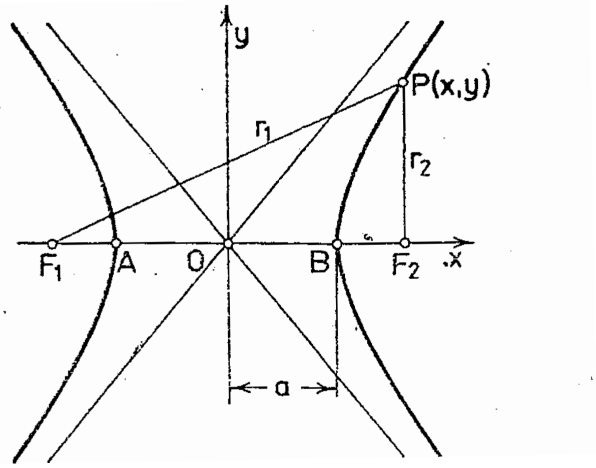




Kanonikus alakok

Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy $F_1 = (-c, 0)$ és $F_2 = (c, 0)$ legyen, vagyis a fókuszok távolsága $2c$. Jelölje a definícióban szereplő állandót $2a$.





Állítás *Egy megfelelően választott koordinátarendszerben a kúpszeleteket fel lehet írni a következő (kanonikus) egyenletekkel:*

Ellipszis	*Hiperbola*	*Parabola*
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2 = 2px$
ahol a és b az ellipszis nagy és kis féltengelye.	*ahol a és b a hiperbola valós és képzetes féltengelye.*	*ahol p a parabola paramétere.*

16A Lineáris leképezés mátrixa. **Lineáris leképezés mátrixá-nak definíciója, szerepe** (B)**, példák**. Speciális lineáris leképezések mátrixai: vetítés, forgatás, skalárszorzat, mint lineáris leképezés. A legfeljebb (n-1)-edfokú polinomok tere, és a **polinomok deriválása, integrálása, mint lineáris leképezés, ezek mátrixai.**

Lineáris leképezés mátrixa

Ha adott egy V_1 és egy V_2 vektortér, melyek dimenziói $\dim(V_1) = n$ és $\dim(V_2) = m$, akkor e két vektortér között bármely lineáris leképezés egyértelműen megfeleltethető egy $m \times n$-es mátrixnak. Ez a tény lehetővé teszi, hogy a lineáris leképezéseket mátrixokkal adjuk meg, ugyanakkor minden mátrix egy lineáris leképezést is reprezentál.

Hogy megadjunk egy ilyen leképezés-mátrix hozzárendelést, a kiindulási és a képtérben is rögzített báziskora van szükség. A leképezést reprezentáló mátrix e bázispárra vonatkoztatva egyértelmű. Ha ismerjük e mátrixot, akkor bármely vektor képe úgy kapható meg, hogy a vektort beszorozzuk a leképezés mátrixával.

Képletben összefoglalva: $\boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$, ahol $L: V_1 \to V_2$ a lineáris leképezés, az $\boldsymbol{A}$ mátrix pedig a leképezés mátrixa, $\boldsymbol{x} \in V_1$ tetszőleges, ennek képe pedig $\boldsymbol{y} \in V_2$.

Lineáris leképezés mátrixának definíciója, szerepe (B), példák

Definíció Az $L: V^n \to W^k$ *lineáris leképezés mátrixa* $\boldsymbol{A}_{[[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}]]} = [\boldsymbol{k_1}|\boldsymbol{k_2}| \dots |\boldsymbol{k_n}]$, ahol $\boldsymbol{k_i} \stackrel{\text{def}}{=} L(\boldsymbol{a_i})$. Azaz az A mátrix oszlopai a V^n-beli $[a]$ bázis $\boldsymbol{a_i}$ bázisvektorainak a W^k-beli $[b]$ bázisra vonatkozóan.

Tétel *Legyen $L: V^n \to W^k$ a lineáris leképezés, az $\boldsymbol{A}$ mátrix a leképezés mátrixa, $\boldsymbol{x} \in V$ tetszőleges, ennek képe pedig $\boldsymbol{y} \in W$, $\boldsymbol{y} = L(\boldsymbol{x})$. Ekkor $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$.*

Bizonyítás Konstruktív, a bizonyítás során meg is adjuk a kérdéses mátrixot. Legyen V^n bázisa $[a] = \boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$, W^k bázisa $[b] = \boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_k}$. A tétel állítása szerint a kiindulási tér bázisvektorait kell fölírnunk:

$$L(\boldsymbol{a_1}) = \beta_{11}\boldsymbol{b_1} + \beta_{21}\boldsymbol{b_2} + \dots + \beta_{k1}\boldsymbol{b_k} \in W^k$$
$$L(\boldsymbol{a_2}) = \beta_{12}\boldsymbol{b_1} + \beta_{22}\boldsymbol{b_2} + \dots + \beta_{k2}\boldsymbol{b_k} \in W^k$$
$$\vdots$$
$$L(\boldsymbol{a_n}) = \beta_{1n}\boldsymbol{b_1} + \beta_{2n}\boldsymbol{b_2} + \dots + \beta_{kn}\boldsymbol{b_k} \in W^k$$

Egyszerűbben ezt így írhatjuk át

$$L(\boldsymbol{a_i}) = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ji}\boldsymbol{b_j}$$

Tetszőleges vektort a kiindulási térben az $[a]$ bázisra vonatkozó koordinátákkal fölírva:

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{a_i} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \dots + \alpha_n\boldsymbol{a_n} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\boldsymbol{a_j}$$

A vektor képe:

$$L(\boldsymbol{x}) = L(\alpha_1 \boldsymbol{a_i} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a_n}) = L\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(\boldsymbol{a_i})$$

Behelyettesítve az $L(\boldsymbol{a_i})$ bázisvektorok képeinek előállítását:

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(\boldsymbol{a_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{k} \beta_{ji} \boldsymbol{b_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_i \beta_{ji} \boldsymbol{b_j}\right)$$

Ezt kifejtve:

$$L(\boldsymbol{x}) = (\beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \cdots + \beta_{1n}\alpha_n)\boldsymbol{b_1} + \cdots + (\beta_{k1}\alpha_1 + \beta_{k2}\alpha_2 + \cdots + \beta_{kn}\alpha_n)\boldsymbol{b_k}$$

A felírásból látszik, hogyha $\beta_{i1}, \dots, \beta_{in}$ skalárokat egy mátrix i-edik sorának tekintjük, akkor $\boldsymbol{x}$ képének γ_k-kból álló koordináta vektorát e mátrix segítségével egyszerű szorzással számíthatjuk:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}_{[b]}$$

A tétel állításában szereplő $\boldsymbol{A}_{[a][b]}$ mátrix oszlopai valóban a kiindulási V^n-bli $[a]$ bázis $\boldsymbol{a_i}$ vektorainak képei a W^k-beli $[b]$ bázisra vonatkozóan. ■

Speciális lineáris leképezések mátrixai: vetítés, forgatás, skalárszorzat, mint lineáris leképezés

Vetítés

Vetítés az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ síkra
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vetítés az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}$ síkra
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vetítés a $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ síkra
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forgatás

Két dimenzióban, az origó körül θ szöggel való pozitív forgatás mátrixa:

$$G = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

A legfeljebb (n-1)-edfokú polinomok tere, és a **polinomok deriválása, integrálása, mint lineáris leképezés, ezek mátrixai**

Az $n-1$-ed fokú polinomok a következő alakban írhatók:

$$P = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

Az ilyen alakú polinomok vektorteret alkotnak. Ha ebben a vektortérben rendre az $1, x, x^2, \dots$ ismeretleneket tekintjük bázisvektoroknak, akkor a fenti egyenlet koordinátás alakja:

$$P = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

A deriválás és integrálás ezen a vektortéren lineáris leképezés, ezért fölírható mátrixszal. A leképezés mátrixába a bázisvektorok képei kerülnek, tehát:

Deriválás
A deriválás $L_D: P^{n-1} \to P^{n-2}$ leképezés, melynek A_D mátrixa:

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{bmatrix}$$

ahol A_D egy $(n-1) \times n$-es mátrix.

Integrálás
Az integrálás $L_I: P^{n-1} \to P^{n}$ leképezés, melynek I_D mátrixa:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ {}^{1}\!/_{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}^{1}\!/_{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {}^{1}\!/_{n} \end{bmatrix}$$

ahol A_I egy $(n+1) \times n$-es mátrix.

16B Fa fogalma, éleinek száma.

Definíció Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor azt *fagráfnak (fának)* nevezzük.

Tétel *Az* n *csúcsú,* $n-1$ *élű összefüggő gráfok fák.*

Tétel *Az* n *csúcsú fagráf éleinek száma* $n-1$.

Definíció Egy gráf minden csúcsát tartalmazó fát a gráf *feszítőfájának* nevezzük.

Tétel *Minden (összefüggő) gráfnak van feszítőfája.*

17A Altér. **Altér fogalma.** Szükséges és elégséges feltétel. **Példák: magtér (B), képtér (B), adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok tere, merőleges kiegészítő**. Merőleges kiegészítő számítására vonatkozó tétel. Dimenziótétel.

Altér fogalma

Definíció Ha $\langle H| *\rangle$ és $H_1 \subseteq H$-ra is $\langle H_1| *\rangle$, akkor azt mondjuk, hogy H_1 *részstruktúrája* H-nak.

Elnevezés Ha a struktúra vektortér, akkor a részstruktúrát *altérnek* nevezzük.

Példa Az $n \times n$-es mátrixok vektorterében a diagonális mátrixok alteret alkotnak.

Szükséges és elégséges feltétel

Tétel *Legyen V vektortér valamely T test felett, és $W \subseteq V$. V akkor és csak akkor altere V-nek, ha minden $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in W$ és $\lambda \in T$-re $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in W$ és $\lambda \boldsymbol{v_1} \in W$*

Példák: magtér (B), képtér (B), adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok tere, merőleges kiegészítő

Definíció Legyen L valamely $V \to W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összességét V-ben, amelyek képe a nullvektor, a leképezés *magterének* nevezzük. Jelölése $\mathrm{Ker}(L)$

Definíció Legyen L valamely $V \to W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összességét W-ben, amelyek valamely V-beli vektorok képei, a leképezés *képterének* nevezzük. Jelölése $\mathrm{Im}(L)$

Tétel *Legyen L valamely $V \to W$ lineáris leképezés $\mathbb{R}$ felett.* $\mathrm{Ker}(L)$ *altere V-nek.*

Bizonyítás Legyenek $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ a magtér vektorai, vagyis $L(\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \in W$

$L(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, összegük magtérbeli

$L(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda L(\boldsymbol{u}) = \lambda \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, skalárszorosuk magtérbeli

A fenti két tulajdonság miatt a magtár zárt a műveletekre, tehát a magtér altér. ■

Tétel *Legyen L valamely $V \to W$ lineáris leképezés $\mathbb{R}$ felett. $Im(L)$ altere V-nek.*

Bizonyítás *hasonlóan*

Merőleges kiegészítő számítására vonatkozó tétel (?)

Dimenziótétel

*A dimenziótételt (bizonyítással együtt) lásd a **13B.** tételben a 41. oldalon!*

17B **Lineáris leképezés fogalma**

*A lineáris leképezés fogalmát lásd a **14A.** tételben a 43. oldalon!*

18A Sajátérték, sajátvektor. **Sajátérték, sajátvektor fogalma. Példák.** Speciális transzformációk mátrixai, sajátértékei, sajátvektorai. Sajátvektorok bázisában felírt transzformációs mátrix (B).

Sajátérték, sajátvektor fogalma, sajátvektorok bázisában felírt transzformációs mátrix (B). **Példák.**

*A címben összefoglaltakat lásd a **11B.** tételben a 37. oldalon!*

Speciális transzformációk mátrixai, sajátértékei, sajátvektorai.

Valós speciális mátrixok

Szimmetrikus, azaz $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$

Antiszimmetrikus, azaz $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$

Ortogonális, azaz $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}}$

Komplex speciális mátrixok

Hermitikus, azaz $\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}$

Ferdén hermitikus, azaz $\boldsymbol{A} = -\overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}$

Unitér, azaz $\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}$

Tétel *Hermitikus mátrix sajátértékei valósak.*

Tétel *Ferdén hermitikus mátrix sajátértékei tisztán képzetesek vagy nullák.*

Tétel *Unitér mátrix sajátértékeinek abszolút értéke* 1.

18B **Lineáris függetlenség, összefüggőség fogalma**.

*A lineáris függőséget és függetlenséget lásd a **1B.** tételben a 9. oldalon!*

19A Bilineáris formák. **Kvadratikus alakok és szimmetrikus mátrixok. Főtengelytranszformáció és diagonalizálás.** Kúpszeletek kanonikus alakja. A sajátvektorok bázisában (ha létezik) felírt mátrix.

Bilineáris függvények

Definíció Legyen a V vektortér a valós test felett. Az $L: V \times V \to \mathbb{R}$ leképezést *bilineárisnak* nevezzük, ha mindkét változójában lineáris. Az L minden $(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ vektorpárhoz egyértelműen hozzárendel egy valós számot, melyet $L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$-vel jelölünk. Tulajdonságai:

1.a) $L(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}) = L(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}) + L(\boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3})$

1.b) $L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}) = L(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) + L(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3})$

2.a) $L(\lambda\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = \lambda L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$

2.b) $L(\boldsymbol{v_1}, \lambda\boldsymbol{v_2}) = \lambda L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$

Definíció Az L bilineáris függvények a $[b] = \boldsymbol{b_1}, \dots \boldsymbol{b_n}$ *bázis szerinti* $\boldsymbol{L}$ *mátrixán* azt az $n \times n$-es mátrixot értjük, melyben az i-edig sor j-edik eleme $l_{ij} = L\left(\boldsymbol{b_i}, \boldsymbol{b_j}\right)$

Tétel *Ha $L: V \times V \to R$ bilineáris függvény, akkor $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x^T L y}$, ahol $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ és $\boldsymbol{L}$ a bilineáris függvény mátrixa.*

Definíció Az L bilineáris függvény *szimmetrikus*, ha $L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = L(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1})$.

Tétel *Az L bilineáris függvény akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa szimmetrikus.*

Kvadratikus alakok

Definíció Az $L: V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris függvényhez tartozó $Q: V \to \mathbb{R}$ leképezést L *kvadratikus alakjának* nevezzük, ha teljesül $Q(\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, minden $\boldsymbol{x} \in V$ esetén.

Definíció A $\boldsymbol{G}$ mátrix *ortogonális,* ha $\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{G^T} = \boldsymbol{E}$, ahol $\boldsymbol{E}$ a megfelelő típusú egységmátrix. Másképpen, $\boldsymbol{G}$ ortogonális, ha transzponáltja inverze is ($\boldsymbol{G^T} = \boldsymbol{G^{-1}}$).

Tétel *Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai merőlegesek.*

Definíció Az $\boldsymbol{A}$ mátrix *ortogonálisan diagonalizálható,* ha $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S^{-1} A S}$, ahol $\boldsymbol{S}$ ortogonális, $\boldsymbol{D}$ diagonális mátrix.

Tétel *(Főtengely tétel) A $Q = \boldsymbol{x^T Q x}$ kvadratikus alakhoz tekintsük az S ortogonális transzformációt, amelynek $\boldsymbol{S}$ mátrixában az oszlopok $\boldsymbol{Q}$ szimmetrikus mátrix ortonormált sajátvektorai. Áttérve ezen ortonormált sajátvektorok bázisára, vagyis alkalmazva az $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S u}$ koordinátatranszformációt, a Q kvadratikus alak a következőképpen írható:*

$$Q = \boldsymbol{x^T Q x} = \boldsymbol{u^T D u} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{u_i^2}$$

ahol λ_i-k az A mátrix sajátértékei. Ezt a transzformációt főtengely transzformációnak nevezzük.

Definíció A $Q = \boldsymbol{x^T A x}$ kvadratikus alak $A \in T^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixának n különböző sajátértékéhez tartozó sajátaltereit a Q kvadratikus alak *főtengelyeinek* nevezzük.

Definíció A Q kvadratikus alak *pozitív definit,* ha minden $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ helyettesítésre $Q > 0$.

A Q kvadratikus alak *pozitív szemidefinit,* ha minden $\boldsymbol{x}$-re $Q \geq 0$.

A Q kvadratikus alak *indefinit,* ha pozitív és negatív értékeket egyaránt fölvesz.

Tétel *Az $n \times n$-es Q mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív.*

Az $n \times n$-es Q mátrix akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha minden sajátértéke pozitív vagy nulla.

Tétel *Q akkor és csak akkor pozitív definit, ha a bal felső négyzetes mátrixok aldeterminánsai mind pozitívak. (Bizonyítás nélkül.)*

Tétel *(Spektrál tétel) Valamely négyzetes mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus. (Bizonyítás nélkül.)*

Diagonalizálás

Definíció Az $\boldsymbol{A}$ mátrix *hasonló* a $\boldsymbol{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan $\boldsymbol{S}$ mátrix, mellyel fennáll, hogy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Definíció Az $\boldsymbol{A}$ mátrix *diagonalizálható,* ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel *Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha $\boldsymbol{A}$ hasonló $\boldsymbol{B}$-hez, azaz $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$, és $\boldsymbol{A}$ sajátvektora $\boldsymbol{s}$, akkor $\boldsymbol{B}$ ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektora $\boldsymbol{T}\boldsymbol{s}$.*

Tétel *Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve e bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, melynek főátlójában a sajátértékek állnak.*

Tétel *Az $\boldsymbol{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa.*

Tétel *(Diagonalizálhatóság elégséges feltétele) Ha valamely $\boldsymbol{A}$ kvadratikus $n \times n$-es mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.*

Tétel *(Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele) Ha valamely A $n \times n$-es mátrix sajátértékei által meghatározott alterek (sajátalterek) dimenzióinak összege pontosan n, akkor a mátrix diagonalizálható.*

Kúpszeletek kanonikus alakjai

Állítás *Egy megfelelően választott koordinátarendszerben a kúpszeleteket fel lehet írni a következő (kanonikus) egyenletekkel:*

Ellipszis	*Hiperbola*	*Parabola*
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2 = 2px$
ahol a és b az ellipszis nagy és kis féltengelye.	*ahol a és b a hiperbola valós és képzetes féltengelye.*	*ahol p a parabola paramétere.*

19B Binomiális tétel (B). Binomiális együtthatók tulajdonságai.

Binomiális tétel

Tétel *Kéttagú kifejezés (binom) bármely nemnegatív egész kitevőjű hatványa polinommá alakítható a következőképp:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $a, b \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás Tudjuk, hogy bármely kommutatív gyűrűben a több tag szorzását több taggal oly módon végezhetjük el, hogy minden tagot szorzunk minden taggal. Írjuk fel az n tényezős $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ szorzatot. Ha mindegyik tényezőből az a-kat szorozzuk össze, a^n-t kapjuk. Ha $(n-1)$ tényezőből az a-kat és egy tényezőből a b-t választjuk, ezt n féleképp tehetjük meg, így $na^{n-1}b$-t kapunk. Ha $(n-2)$ tényezőből az a-kat és 2 tényezőből a b-ket választjuk, amit $\binom{n}{2}$ féleképp tehetünk meg, akkor $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$ lesz az eredmény. Így folytatva, az összes eset előáll. ■

Pascal háromszög

Írjuk fel a binomiális együtthatókat az alábbi formában:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Tétel *Legyen n nemnegatív egész szám és legyen $k : 0 \le k \le n$ szintén egész. Ekkor fennállnak a következő összefüggések:*

1.) szimmetria tulajdonság

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2.) összegzés

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

3.) kettőhatvány

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

4.)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = \begin{cases} 0, ha\ n > 0 \\ 1, ha\ n = 0 \end{cases}$$

20A Euklideszi tér. **Euklideszi tér definíciója. Skalárszorzat, norma, metrika, és ezek kapcsolata** euklideszi terekben. Ortogonalitás. **CBS euklideszi terekben** (B) **és speciálisan $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ -ben.** Ortonormált rendszer létezése.

Skalárszorzat

Definíció Az $\langle .,. \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek függvényértékét $s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$-ként jelöljük, *skalárszorzatnak* nevezzük, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

5.) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ és $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (pozitív definit)

6.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ (szimmetrikus)

7.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ (lineáris)

8.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ esetén $\langle (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$

Definíció A skalárszorzattal ellátott tereket *Euklideszi tereknek* nevezzük.

Tétel *Minden, véges dimenziós térben megadható skalárszorzat.*

Metrika

Definíció A H halmazt *metrikus térnek* nevezzük, ha van rajta olyan, *metrikának* nevezett $d: H \times H \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ függvény, melyre teljesülnek a következők:

1.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$-ra $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ és $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (pozitív definit)

2.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$-ra $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (szimmetrikus)

3.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in H$-ra $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Norma

Definíció A V vektortér *normált térnek nevezzük,* ha van rajta olyan, *normának* nevezett $n: V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ függvény, melyre teljesülnek a következők:

1.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ esetén $n(\boldsymbol{x}) \geq 0$ és $n(\boldsymbol{x}) = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (pozitív definit)

2.) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $n(\alpha \boldsymbol{x}) = |\alpha| \cdot n(\boldsymbol{x})$

3.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ esetén $n(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq n(\boldsymbol{x}) + n(\boldsymbol{y})$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Tétel *Minden normált tér metrikus tér.*

Tétel *Minden skalárszorzatos tér normált tér.*

Tétel *Minden Euklideszi tér metrikus tér.*

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőség

Tétel *(Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőség)* $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle|^2 \leq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle$

Bizonyítás Tekintsük az $\langle \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} \rangle$ skalárszorzatot. A pozitív definit tulajdonság miatt $0 \leq \langle \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} \rangle$. Fejtsük ki ezt a következőképp:

$$0 \le \langle \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + \langle \lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle + \langle \boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}\rangle + \langle \lambda\boldsymbol{b}, \lambda\boldsymbol{b}\rangle =$$
$$= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle + 2\lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \lambda^2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle$$

Ez λ-ra nézve egy másodfokú egyenlőtlenség: $\lambda^2 A + \lambda B + C \ge 0$.

Mivel e függvénynek legfeljebb egy gyöke lehet, a diszkrimináns nem pozitív, azaz $B^2 - 4AC \le 0$. A megfelelő értékeket behelyettesítve:

$$(2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)^2 \le 4(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle)$$
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle^2 \le \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle$$

■

A norma függvény bevezetésével az egyenlőség a következőképp írható: $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|$

Ortogonalitás

Definíció Euklideszi térben két vektor, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ által *bezárt α szöget* a következőképpen lehet értelmezni. Legyen $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ egy skalárszorzat V-ben, és $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$ valamely $\boldsymbol{x}$ vektor normája. Ekkor

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|}$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{a}$ vektor *ortogonális* a $\boldsymbol{b}$ vektrorra, ha $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0$.

Tétel *Ortogonális, nem nulla vektorok lineárisan függetlenek.*

Tétel *Minden altérben van ortogonális bázis.*

Definíció *Ortonormált* a vektorrendszer, ha páronként ortogonális, és minden elemének normája 1.

Tétel *Minden euklideszi térnek van ortonormált bázisa.*

Tétel *Az euklideszi tér valamely bázisa akkor és csak akkor ortonormált, ha egy vektor koordinátáját a következőképpen kapjuk meg:*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\,, \qquad \alpha_k = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e_k}\rangle$$

20B Transzformáció mátrixa, ha áttérünk másik bázisra.

Lineáris leképezések mátrixa bázisváltás esetén

Tétel *Ha az $L: V^n \to W^k$ lineáris leképezés mátrixa rögzített $[a] \in V^n$ és $[b] \in W^k$ bázisokra $\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}]}$, akkor ugyanezen leképezés $\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}'][\boldsymbol{b}']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ és $[b'] \in W^k$ bázisokra az áttérési formulával számolható:*

$$\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}'][\boldsymbol{b}']} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}]}\boldsymbol{S}$$

ahol $\boldsymbol{T}$ a képtér, $\boldsymbol{S}$ a kiindulási tér áttérési mátrixa.

Tétel *Ha az $L: V^n \to V^n$ lineáris leképezés mátrixa rögzített $[a] \in V^n$ bázisra $\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}]}$, akkor ugyanezen leképezés $\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ bázisora az áttérési formulával számolható: $\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}']} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}_{[\boldsymbol{a}]}\boldsymbol{S}$*

$\boldsymbol{S}$ a kiindulási tér áttérési mátrixa.

21A Lineáris egyenletrendszerek. Lineáris homogén, lineáris inhomogén egyenletrendszer fogalma. **Gauss elimináció, az algoritmus pontos ismertetése. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele és mátrix rangja. Egyenletrendszer megoldása inverz mátrixszal.** Lineáris egyenletrendszerek néhány alkalmazása: vektorok függetlenségének, generátorrendszer és bázis megállapítására, **Gauss elimináció és mátrix inverz számítása.**

Lineáris homogén, lineáris inhomogén egyenletrendszer fogalma

Definíció A lineáris egyenletrendszer lineáris egyenletekből áll. Egy egyenletet *lineárisnak* nevezünk, ha a benne szereplő ismeretlenek legfeljebb első hatványon vannak.

Definíció Az egyenletrendszer *lépcsős alakjában* az $\boldsymbol{i}$-edik egyenlet tartalmazza az $\boldsymbol{x_i}$ ismeretlent, de nem tartalmazhatja az $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}}$ ismeretleneket.

Definíció *Ekvivalens* az egyenletrendszer átalakítása, ha az átalakítás után keletkező egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása, mint az eredetinek.

Egyenletrendszer megoldása inverz mátrixszal

A megoldási módszert lásd a ***2A.*** *tételben a 12. oldalon!*

Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele és mátrix rangja

A feltételt lásd a ***3A.*** *tételben a 13. oldalon!*

Gauss elimináció, az algoritmus pontos ismertetése

Algoritmus Lépcsős alak kialakítása Gauss eliminációval

1. lépés
Legyen $i = 1$.

2. lépés
Vizsgáljuk meg: $a_{ii} = 0$? Ha igen, az egyenletek cseréjével érjük el, hogy $a_{ii} \neq 0$. Ha nem, rátérünk a 3. lépésre.

3. lépés
Az i-edik ismeretlent kiküszöböljük a k-adik $(k = i + 1, i + 2, \dots, m)$ egyenletből úgy, hogy az i-edik egyenlet $\left(-\frac{a_{ki}}{a_{ii}}\right)$-szeresét hozzáadjuk a k-adik egyenlethez.

a. Ha ezáltal a k-adik egyenlet többi együtthatója is, és konstans tagja is nulla, az egyenletet elhagyjuk.

b. Ha ezáltal a k-adik egyenlet együtthatói nullák, de a konstans tag nem, akkor nyilván nem lehet olyan számokat találni, amiket behelyettesítve a bal és jobb oldal egyenlő. Ez az egyenlet ellentmondást tartalmaz. Az ilyen egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért röviden „tilos” egyenletnek nevezzük. Ekkor az eljárás befejeződött, az egyenletrendszernek nincsen megoldása.

c. Ha a fenti két eset nem fordul elő, és még van $(i+1)$-edik egyenlet, akkor növeljük meg i értékét eggyel, és ezzel az új i-vel végezzük el rendre a 2., 3. lépéseket. Ha nincsen már több egyenlet, akkor az eljárás véget ért, a lépcsős alak létrejött.

Lineáris egyenletrendszerek néhány alkalmazása: vektorok függetlenségének, generátorrendszer és bázis megállapítására, **Gauss elimináció és mátrix inverz számítása**

Ha az Olvasó az eddigi tételeket kimerítően áttanulmányozta, akkor erre mind látott példát.

21B **Euler poliéder tétele** (B)

Euler poliéder tétele (B)

Tétel *(Euler-féle poliéder tétel) A G összefüggő, egyszerű síkgráf esetében, ha p a gráf szögpontjainak száma, e a gráf éleinek száma és t a gráf által létrehozott területek száma a végtelen területet is számolva, akkor $p-e+t=2$.*

Bizonyítás Az adott gráfot lépésenként újra lerajzoljuk:

1. lépés: 1 csúcs, igaz az állítás: $1-0+1=2$
2. lépés: 2 csúcs, igaz az állítás: $2-1+1=2$
n. lépés: Tegyük fel, hogy $(n-1)$ esetre igazoltuk a formulát: $p-e+t=2$. A következő lépés kétféle lehet:

a) Vagy meglévő csúcsokat kötünk össze egy új éllel, ekkor az élek és területek száma eggyel növekszik, a pontok száma változatlan. Az állítás igaz:

$$p-e+t=2 \Leftrightarrow p-(e+1)+(t+1)=2$$

b) Egy új csúcsot rajzolunk be a rá illeszkedő éllel együtt, amelynek szomszédjai már a meglévő lerajzolt gráfban vannak. Ekkor a csúcsok és élek száma eggyel nő, míg a területek száma változatlan. Az állítás igaz:

$$p-e+t=2 \Leftrightarrow (p+1)-(e+1)+t=2$$

■

22A Determinánsok. **Definíció, tulajdonságok.** Vondermonde determináns. Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra. **Cramer szabály, inverz mátrix képlete** (B)**,** vegyes szorzat és geometriai jelentése.

Definíció, tulajdonságok

Definíció Az $n \times n$-es $\boldsymbol{A}$ mátrix a_{ik} eleméhez tartozó *minormátrixának* nevezzük és $\boldsymbol{A_{ik}}$-val jelöljük azt az $(n-1)$-ed rendű mátrixot, melyet úgy kapunk A-búl, hogy annak i-edik sorát és k-adik oszlopát elhagyjuk.

Definíció Ha az $(n-1)$-edrendű mátrix determinánsát már értelmeztük, akkor az n-ed rendű A mátrix *determinánsának* nevezzük a következő számot:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det\left(\boldsymbol{A_{1j}}\right)$$

Tulajdonságok

1. A determináns egy sorát λ számmal beszorozva a determináns az eredeti λ-szorosa lesz.
2. Ha a determináns i-edik sorának minden eleme egy kéttagú összeg, akkor két olyan determinánsra bontható fel, mely elsőben az i-edik sor összegeinek első; másodikban a második tagjai szerepelnek, a többi elem pedig változatlan.
3. Ha a determináns egy sora csupa nulla elemet tartalmaz, akkor értéke 0.
4. Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke (-1)-szerese lesz.
5. Ha egy determináns két sora megegyezik, akkor a determináns 0.
6. Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk valamely sorának λ-szorosát, akkor a determináns nem változik.
7. Egy alsó (felső) háromszög-determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata.
8. A determinánst ferdén kifejtve az eredmény 0.
9. A fenti, sorra vonatkozó tulajdonságok mindegyike igaz oszlopra is.

Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra

A fenti tulajdonságok használatával elérhetjük, hogy a determináns háromszög-determináns legyen, és így értéke a főátlóból leolvasható.

Vandermonde determináns

A Vandermonde-determináns egy speciális, a lineáris algebrában és a matematika más ágaiban is gyakran használt nevezetes determináns. Alakja:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j<i} \left(x_i - x_j\right)$$

Cramer szabály

Tétel *Ha az $\boldsymbol{A}$ négyzetes mátrix, és $D = \det(A) \neq 0$, akkor az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A megoldásban $x_j = D_j/D$, ahol D_j determinánst úgy kapjuk, hogy D-ben a j-edik oszlop helyére a jobb oldali konstansokat, azaz $\boldsymbol{b}$ vektor komponenseit tesszük.*

Inverz mátrix képlete (B)

Inverz mátrix kiszámítási képletét lásd a ***2A.*** *tételben a 11. oldalon.*

Vegyes szorzat és geometriai jelentése

A vegyes szorzat koordinátákkal adott esetben, az i, j, k ortonormált, jobbrendszert alkotó bázison determinánssal is kiszámolható.

Tétel *Ha* $\boldsymbol{a} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{b} = (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{c} = (c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k})$, *vektorok adottak, akkor e három vektor vegyes szorzata kiszámítható a következő módon:*

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Tétel *Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektorok vegyes szorzatának jelentése a vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata.*

22B Generátorrendszer és bázis.

Generátorrendszerekről és bázisokról bővebben a ***12A.*** *tétel szól a 38. oldalon!*

23A Kombinatorikus módszerek. **Összeg- és szorzatszabály, permutáció, variáció, kombináció (B).** Szita formula. Binomiális tétel. Binomiális együtthatók tulajdonságai.

Permutáció

Ismétlés nélküli permutáció

Definíció Adott n elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott n elem egy *ismétlés nélküli permutációjának* nevezzük.
Jele: P_n

Tétel *Az n különböző elem permutációinak száma $P_n = n!$, ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ és $0! = 1$.*

Bizonyítás Az első helyen az $1, 2, \ldots, n$ elem bármelyike állhat, utána a maradék $(n-1)$ elem összes lehetséges sorrendje következik. És így tovább, az utolsó elemig. Az összefüggéseket visszafelé fölírva adódik az állítás.

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$
$$P_{n-1} = (n-1)P_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$P_1 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

■

Ismétléses permutáció

Definíció Adott n elem, melyek között k_1 darab egyenlő, másik k_2 darab is egyenlő, … k_s darab is egyenlő, ahol $k_v \geq 2$, ha $v = 1, 2, \ldots s$, és $k_1 + k_2 + \cdots + k_s \leq n$. Az adott n elem egy meghatározott sorrendjét ezen elemek egy *ismétléses permutációjának* nevezzük.
Jele: $P_n^{(k_1, k_2, \ldots, k_s)}$

Tétel *Adott n, s és $k_1, k_2, \ldots k_s$ esetén az ismétléses permutációk száma*

$$P_n^{(k_1, k_2, \ldots k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

Bizonyítás Tekintsük az n elem egy tetszőleges permutációját. Ekkor
k_1 azonos elemhez $k_1!$ különböző indexet rendelhetünk;
k_2 azonos elemhez $k_2!$ különböző indexet rendelhetünk;
$$\vdots$$
k_s azonos elemhez $k_s!$ különböző indexet rendelhetünk.
Ekkor fennáll az alábbi összefüggés:

$$k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s! \cdot P_n^{(k_1, k_2, \ldots, k_s)} = P_n = n!$$

■

Variáció

Ismétlés nélküli variáció

Definíció Adott n különböző elem. Ha n elem közül k elemet $(0 < k \leq n)$ úgy választunk ki, hogy mindegyik elem csak egyszer szerepel, és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli variációját* kapjuk. Jele: V_n^k

Tétel *Az n különböző elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma*

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Bizonyítás Rögzített n mellett, k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.
$k = 1$ esetén az állítás igaz, mert n elemből 1-et pontosan n féleképpen lehet kiválasztani.
Tételezzük fel, hogy k-ra teljesedik, és igazoljuk $(k+1)$-re. Bármelyik $(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ k-ad osztályú variációhoz $(n-k)$ elem közül választhatunk egy h_{k+1}-ediket, hogy egy $(h_1, h_2, \ldots h_k, h_{k+1})$ $(k+1)$-ed osztályú variációt kapjunk. Azaz igaz a következő összefüggés: $V_n^k \cdot (n-1) = V_n^{k+1}$. ∎

Ismétléses variáció

Definíció Adott n különböző elem. Ha n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elemet többször is választhatunk és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor n elem k-ad osztályú *ismétléses variációját* kapjuk.
Jele: $V_n^{k,i}$.

Tétel *Az n különböző elem k-ad osztályú ismétléses variációinak száma* $V_n^{k,i} = n^k$.

Bizonyítás Írjuk föl a kiválasztott elemeket, sorrendben. Az első helyre az adott n elem bármelyikét választhatjuk, így $V_n^{1,i} = n$. A másodosztályú ismétléses variációkat az első osztályúból úgy nyerjük, hogy azok mindegyikéhez hozzáírjuk az n elem bármelyikét, hiszen az elemeknek nem kell feltétlenül különbözniük egymástól. Így minden első osztályú ismétléses variációból újabb n darab másodosztályú ismétléses variációt kapuk. Ezek száma tehát $V_n^{2,i} = n^2$. Hasonlóan tovább:

$$V_n^{k,i} = n^k$$

∎

Kombináció

Ismétlés nélküli kombináció

Definíció Adott n különböző elem. Ha n elem közül $k : 0 < k \leq n$ elemet úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer szerepelhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli kombinációját* kapjuk. Jele: C_n^k

Tétel *Az n különböző elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Bizonyítás Az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma megegyezik a k darab kiválasztott és az $(n-k)$ ki nem választott elem ismétléses permutációinak számával.

$$C_n^k = P_n^{(k,(n-k))} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

∎

Definíció Az $\binom{n}{k}$ kifejezést *binomiális együtthatónak* nevezzük. Megállapodás szerint:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{0}{0} = 1$$

A binomiális együttható fogalma általánosítható tetszőleges valós számra:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

Ismétléses kombináció

Definíció Adott n különböző elem. Ha n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem k-ad osztályú *ismétléses kombinációját* kapjuk.
Jele: $C_n^{k,i}$

Tétel *Az n különböző elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma*

$$C_n^{k,i} = C_{n-k+1}^{k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Bizonyítás Az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma megegyezik $n + k - 1$ elemből k kiválasztott elem és $n - 1$ ki nem választott elem ismétléses permutációinak számával.

$$C_n^{k,i} = P_{n+k-1}^{(k,n-1)} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

■

Szita formula

A szita formulát lásd a ***7A.*** *tételben a 25. oldalon!*

Binomiális tétel. Binomiális együtthatók tulajdonságai.

A binomiális tételt és az együtthatók tulajdonságai lásd a ***19B.*** *tételben az 55. oldalon!*

23B Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra.

A módszert lásd a ***22A.*** *tételben a 60. oldalon!*

24A Gráfok. **Irányítatlan, irányított, súlyozott gráfok.** Gráfok mátrixai. **Élszám és fokszám összefüggése.** Speciális gráfok: fa, út, kör, teljes gráf. **N pontú összefüggő gráfok élszámára, körök létezésére vonatkozó tételek** (B)**.** Részgráfok. **Izomorfia**. Összefüggő komponensek. Hamilton-kör/út, szükséges ill. elégséges feltételek (Dirac, Ore).

Gráfelmélet alapjai

Definíció Egy $G = \{V, E, \Theta\}$ *gráf*
- szögpontok (pontok, csúcsok) egy V halmazából,
- élek egy E halmazából, és
- egy Θ függvényből áll, amely minden egyes $a \in E$ élnek egy $(u, v) = (v, u)$ rendezett párt feleltet meg, ahol $u, v \in V$ szögpontok, melyeket az a él *végpontjainak* nevezünk.

Definíció Ha az $a \in E$ élnek egy (u, v) rendezett pár felel meg, akkor az élt *irányított élnek,* különben *irányítatlan élnek* nevezzük.

Definíció Ha egy gráf minden éle irányított, akkor a gráfot *irányított gráfnak,* különben ha minden éle irányítatlan, akkor *irányítatlan gráfnak* nevezzük.

Definíció Két gráf *izomorf,* ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másik pontjainak és éleinek.

Definíció A gráf v pontjához illeszkedő élvégek számát *v fokszámának (fokának)* nevezzük. Jelölése: $\varphi(v)$

Definíció Egy gráfot *egyszerű gráfnak* nevezünk, ha sem hurokélt, sem többszörös élt nem tartalmaz.

Definíció Ha egy gráfban bármely két csúcs úttal elérhető, akkor a gráfot *összefüggőnek* nevezzük.

Tétel *(Handshaking tétel) Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy az e él az u és v csúcsokhoz illeszkedik, azaz u és v az e él két végpontja. Ekkor, ha $u \neq v$, akkor az e élt $\varphi(u)$-nál és $\varphi(v)$-nél is számoltuk. Ha pedig $u = v$, akkor az e él hurokél, és így $\varphi(u)$-nál számoltuk kétszer. Tehát a gráf összes csúcsainak fokszámát összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk. ■

Tétel *Minden gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.*

Bizonyítás Minden gráfban a fokszámok összege páros, amely a páros és páratlan fokszámok összegéből tevődik össze. A páros fokszámok összege nyilván páros, hiszen páros számok összege páros. Így a páratlan fokszámok összegének is párosnak kell lenni, ami csak úgy valósulhat meg, hogy ha a páratlan fokszámú csúcsok száma páros. ■

Tétel *Az n csúcsú összefüggő egyszerű gráf éleinek száma legalább $n - 1$.*

Bizonyítás Teljes indukcióval. Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ esetén minden n csúcsú gráfnak van $n - 1$ éle. Belátjuk, hogy akkor minden $n+1$ csúcsú összefüggő gráfnak van n éle. Legyen G egy $n+1$ csúcsú összefüggő gráf. Ha G-nek kevesebb éle van, mint $n+1$, akkor van elsőfokú csúcsa. Ugyanis mivel G összefüggő, így izolált csúcsa nincs. Vegyük ezt az elsőfokú csúcsot, és a hozzátartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Ekkor n csúcsú összefüggő gráfot kapunk minimum $n-1$ éllel, tehát teljesült az indukciós feltevés. A törölt élt újra hozzáadva következik, hogy G-nek nimimum n éle van. Ha nem lenne elsőfokú csúcsa, akkor minden csúcsának fokszáma legalább 2 lenne, így a fokszámok összege legalább $2(n+1)$, amiből következik, hogy az élek száma $n+1$. ■

Tétel *Bármely egyszerű gráfban van két olyan pont, amelyek fokszáma egyenlő.*

Bizonyítás A lehetséges fokszámok $n = 0,1,2 \dots n-1$, vagyis n darab fokszám. Egyszerre azonban nem teljesülhet, hogy van 0 és $n-1$ fokszámú csúcs, mivel az $n-1$ fokszámúból az összes csúcsba kell él vezessen, ami ellentmond annak, hogy van olyan csúcs, amibe nem vezet él. Ekkor már csak $n-1$ féle fokszám közül választhatunk, amit a skatulya-elv miatt csak úgy osztatunk szét, hogy ha van legalább kettő csúcs, aminek ugyan az a fokszám jut. ■

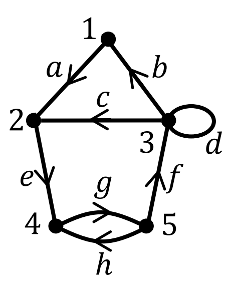
Tétel *Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma legalább* 2*, akkor a gráfban van kör.*

Bizonyítás Alkalmazzuk a leghosszabb út módszerét. Legyen 1 hosszúságú L út a G gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja v. Tekintsük most G-nek v-hez illeszkedő éleit. Ezek közül bármelyiknek a végpontja L-hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben L hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy L a leghosszabb út. Ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik v-hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét kijelöli. Ha e nem hurokél, akkor u-ak v-től különböző w végpontja L-ben van, tehát L-nek a v és w pontokat összekötő része e-vel együtt G egy körét alkotja. ■

Tétel *Ha egy* n *csúcsú gráfnak legalább* n *éle van, akkor van benne kör.*

Bizonyítás Teljes indukcióval. Az állatás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$-re minden n csúcsú és legalább n élű gráfban van kör. Legyen G egy $n+1$ csúcsú gráf, amelynek legalább $n+1$ éle van. Visszatérve a bizonyításra, vegyük G egy L leghosszabb útját. Ha L valamelyik végpontja G-nek nem elsőfokú csúcsai, akkor az előzőek szerint G-ben van kör. Ellenkező esetben töröljük G-nek egy elsőfokú csúcsát a hozzátartozó éllel együtt. Ekkor a kapott gráfnak n éle és n csúcsa van, tehát az indukciós feltevés miatt tartalmaz kört, amit G is tartalmaz. ■

Gráfok felírása mátrixokkal



Szomszédsági mátrix

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Illeszkedési mátrix (nem irányított)

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hamilton-kör, Hamilton-út

Definíció Egy P kör egy $G = (V, E)$ gráfban *Hamilton-kör,* ha P a V összes elemét (a gráf csúcsait) pontosan egyszer tartalmazza. *Hamilton-útról* akkor beszélünk, ha P kör helyett út.

Tétel *(Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére) Ha egy gráfban k pontot elhagyva k-nál több komponens keletkezik, akkor nem tartalmazhat Hamilton-kört.*

Tétel *(Ore tétele) Ha a G gráfra teljesül, hogy bármely két nem szomszédos u, v csúcs fokának összege nagyobb egyenlő G fokszámánál* $(\deg(u) + \deg(v) \geq n)$, *akkor G-nek van Hamilton-köre.*

Ore tételének speciális esete Dirac tétele.

Tétel *(Dirac tétele) Ha az $n = 2k$ csúcspontú G egyszerű gráf bármely pontjának a foka legalább k, akkor vany G-nek Hamilton-köre.*

24B Komplex szám algebrai alakja. Az imaginárius egység hatványai.

A témakör bővebb tárgyalását lásd a ***4A.*** *tételben a 16. oldalon!*

25A Fák. **Fa ekvivalens definíciói (B). N pontú fa éleinek száma.** Prüfer kód ismertetése. Az n-pontú teljes gráf feszítő fáinak száma.

Fák

Definíció Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor azt *fagráfnak (fának)* nevezzük.

Tétel *Az n csúcsú, $n-1$ élű összefüggő gráfok fák.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy a G gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ha a kör egy élét töröljük, akkor n csúcsú, $n-2$ élű összefüggő gráfot kapunk, ami ellentmond annak, hogy egy n csúcsú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van. Be kell még látnunk, hogy ha egy összefüggő gráf valamely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk. Tegyük fel ehhez, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük a G gráf K körének (u,v) élét. A G gráfban az u-ból a v-be most is el tudunk jutni a K kör megmaradt élein keresztül, azaz az (u,v) törlése után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a kapott gráf is összefüggő. ■

Tétel *Az n csúcsú fagráf éleinek száma $n-1$.*

Bizonyítás Tudjuk, hogy minden n csúcsú gráfnak legalább $n-1$ éle van. Mivel ha az n csúcsú gráfban legalább n él van, akkor van benne kör, ezért mivel a fa körmentes, összefüggő gráf, pontosan $n-1$ éle kell legyen. ■

Az előzőek alapján a fák négy tulajdonsága, hogy összefüggőek, csúcsaik száma n, éleik száma $n-1$, nem tartalmaznak kört.

Prüfer kód

A Prüfer kód fák tárolására alkalmas. A fa n csúcsát $k = 1,2,\dots n$ számokkal tetszőlegesen címkézzük. A Prüfer kód alkalmazásához tudjuk, hogy minden legalább két csúcsú fában van legalább két csúcs, amelyek fokszáma 1.

Algoritmus (A Prüfer kód előállítása) Kiindulásként meg van adva egy fa (ábrával, mátrixszal stb.) Első lépésként sorszámozzuk a csúcsokat 1-től n-ig. A következő lépésben megkeressük a legkisebb sorszámú csúcsot a (maradék) fán. Hagyjuk el ezt a csúcsot a rá illeszkedő éllel együtt, és fűzzük a lista végéhez az él másik végén található csúcs sorszámát. Ezt a lépést addig ismételve, míg a fából csak egy csúcs marad, kapjuk a Prüfer kódot.

Tétel *Az $n-2$ db számból álló $1,2,\dots,n$ számokból készített kódok és a fák között egy-egy értelmű megfeleltetés (bijekció) van. (Nem bizonyítjuk.)*

Tétel *(Caeley tétel) Feszítőfák száma n csúcsú teljes gráfban n^{n-2}.*

Bizonyítás Prüfer kód segítségével, $n-2$ hosszú különböző sztringek száma n számjegy ismételt felhasználása esetén n^{n-2}. ■

25B Inverz mátrix kiszámítási módjai.

*A módszereket lásd a **2A.** tételben a 11. oldalon!*

26A Gráfok bejárása és súlyozott gráfok. Szélességi és mélységi keresés. Bináris fák bejárási módjai (műveleti fák). Súlyozott gráf fogalma. **Kruskal, Prim, Dijkstra algoritmusok.**

Minimális feszítőfa keresése

A probléma lényege, hogy egy élsúlyozott összefüggő egyszerű gráfban keressük a legkisebb élsúlyösszegű feszítőfát.

Algoritmus (Prim algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Az ebből kiinduló élek közül a legkisebb súlyú mentén választjuk a következő csúcsot. A legkisebb súlyú élhez fűzzük a rá illeszkedő legkisebb súlyú élet, ha az nem alkot kört az eddig vizsgált élekkel. Ha már van $n-1$ él, akkor készen vagyunk.

Algoritmus (Kruskal algoritmus) Az éleket súlyuk szerint növekvő sorrendbe rendezzük. A legkisebbtől kezdve vesszük őket (nem feltétlenül illeszkedően) úgy, hogy ne képezzenek kört. Ha már van $n-1$ él, akkor készen vagyunk.

Adott csúcsból a legrövidebb út keresése a többi csúcsba

Algoritmus (Dijkstra algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Mindegyik csúcshoz rendeljük hozzá azt, hogy mekkora volt az élsúlyok összege, amik mentén a csúcsba eljutottunk. Kezdetben mindegyik végtelen. Válasszuk a kiindulási csúcsunkhoz illeszkedő éleket, és az élek másik végén lévő csúcsokhoz rendeljük hozzá az élsúlyok összegét, amin eljutunk a csúcsba. Ezt követően minden lépésben a legkisebb összegű csúcsból indulunk ki, és nézzük meg a többi csúcsba vezető élek súlyösszegét. Ha ez kevesebb, mint az adott csúcshoz hozzárendelt érték, akkor erre módosítjuk, ha nagyobb, akkor változatlanul hagyjuk. Végül, ha már nem találunk semelyik csúcshoz sem kisebb összeget, végeztünk.

Gráfbejárások

Adott gráfban keresünk szisztematikusan adott tulajdonságú (pl. címkéjű) csúcsot. A szisztéma sokféle lehet, a két alap a szélességi és a mélységi keresés.

Szélességi keresés (Breadth-First Search = BFD)

Algoritmus Meglátogatjuk az első csúcsot, majd ennek a csúcsnak az összes szomszédját. Aztán e szomszédok összes olyan szomszédját, ahol még nem jártunk, és így tovább. Berakjuk az épp meglátogatott csúcsot, hogy majd a megfelelő időben a szomszédjaira is sort keríthessünk.
Általános lépés: vesszük a sor elején levő x csúcsot, töröljük a sorból, meglátogatjuk azokat az y szomszédait, amelyeket eddig még nem láttunk, majd ezeket az y csúcsokat a sor végére tesszük.

Mélységi keresés (Depth-First Search = DFS)

Algoritmus Tetszés szerinti csúcstól elindulva egy úton addig megyünk „mélyre”, ameddig lehet: vagy nincsen további szomszédos csúcs, vagy már jártunk ott. Ha így megakadunk, akkor visszalépünk (backtrack) az előző csúcshoz, ha onnan tudunk továbbmenni, akkor megint elindulunk, és a lehető legmélyebbre együnk, ha nem, akkor visszalépünk.

Fabejárás

Megkülönböztetünk egy csúcsot, ezt gyökérnek nevezzük. A gyökér őse (szülője) a szomszédos csúcsainak, és ezek a csúcsok az ősök (szülők) utódai (gyerekei). Az az utód, aki nem szülő, a fa levele. A fában egy út nevezhető „ág”-nak is.

Definíció Ha egy fában minden csúcsnak legfeljebb két gyereke van, akkor a fát *bináris fának* nevezzük.

Preorder, inorder, postorder bejárások

Algoritmus Preorder bejárás: azaz a gyökér elem majd a bal oldali részfa preorder bejárása, végül a jobboldali részfa preorder bejárása.

Algoritmus Inorder bejárás: azaz először a bal részfa inorder bejárása, majd a gyökérelem, végül a jobboldali részfa inorder bejárása.

Algoritmus Postorder bejárás: azaz először a bal részfa posztorder bejárása, majd a jobboldali részfa posztorder bejárása, végül a gyökérelem feldolgozása.

26B Determináns kifejtési és ferde (B) kifejtési tétele.

Definíció Az a_{ij} elem előjeles *aldeterminánsán* értjük a $D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$ számot.

Tétel *(Kifejtési tétel) Egy n-ed rendű determináns tetszőleges sora van oszlopa szerint kifejthető, és*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot D_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot D_{ij}$$

Tétel *(Ferde kifejtés tétele) Ha egy determináns egyik sorának elemeit rendre valamely másik sorhoz tartozó aldeterminánsokkal szorzunk meg, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, az eredmény* 0.

Bizonyítás Ezt a tételt 3×3-as determinánsra bizonyítjuk. Szorozzuk meg az első sor elemeit a második sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Az így kapott determináns két sora megegyezik, tehát értéke nulla. ■

27A Sík gráfok és színezésük. **Euler poliéder tétele** (sík gráfok pontjainak, tartományainak, éleinek számára vonatkozó tétel). **Kuratowski-tétel. Euler-kör/út és létezésére vonatkozó szükséges és elégséges feltételek. Kromatikus szám fogalma. Sík gráfok kromatikus száma.**

Euler poliéder tétele

*Euler poliéder tételét lásd a **21B.** tételben az 59. oldalon!*

Kuratowski-tétel

Tétel *(Kuratowski tétel) Valamely gráf akkor és csak akkor sík gráf, ha nem tartalmaz K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal izomorf/homeomorf részgráfot.*

Euler-kör/út és létezésére vonatkozó szükséges és elégséges feltételek

Definíció A G gráf *Euler-köre* olyan zárt élsorozat, mely G összes élét pontosan egyszer tartalmazza. *Euler-útról* akkor beszélünk, hogyha az élsorozat nem feltétlenül zárt.

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel Euler-kör létezésére) Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha minden csúcsának fokszáma páros.*

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel Euler-út létezésére) Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor tartalmaz Euler-utat, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.*

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel irányított gráfokra) Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-kör, ha minden csúcsnál a bemenő és kimenő élek száma megegyezik.*

Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-út, ha van benne Euler-kör, vagy ha két csúcs kivételével a bemenő és kimenő élek száma minden csúcsban megegyezik, a kivételeknél pedig az egyik (kiindulási) csúcsban a kimenő élek száma eggyel több, a másik (érkezési) csúcsban pedig a bemenő élek száma több eggyel.

Kromatikus szám fogalma. Sík gráfok kromatikus száma

*Síkgráfok kromatikus számát lásd a **14B.** tételben a 44. oldalon!*

27B **Lineáris leképezés mátrixa** (B)

*A témakört lásd a **16A.** tételben a 48. oldalon!*

28A Hálózati folyamok. **Hálózat, folyam, vágás fogalma. Javító út. Ford-Fulkerson tétel.**

Fogalmak

Definíció Adott egy $G = (N, E)$ irányított gráf, és ennek két különböző pontja, s és t, melyeket forrásnak és nyelőnek nevezünk. (A forrásból csak kifelé, a nyelőbe meg csak befelé mutatnak élek.) Adott továbbá az éleken értelmezett $c: E \to \mathbb{R}^+$ nemnegatív értékű kapacitásfüggvény.

Ekkor $G = (N, E)$ gráfot a c függvénnyel együtt (G, c) *hálózatnak* nevezzük.

Definíció Az $f: E \to \mathbb{R}$ függvényt *folyamnak* hívjuk, ha teljesülnek a következők:

$$f(n_1, n_2) = -f(n_2, n_1), \qquad \forall (n_1, n_2) \in E, n_1, n_2 \in V$$
$$f(n_1, n_2) \leq c(n_1, n_2), \qquad \forall (n_1, n_2) \in E$$

Definíció Legyen $H = (G, c)$ egy hálózat s forrással és t nyelővel. Legye $N_1, N_2 \subseteq N$ egy partíciója N-nek, vagyis $N_1 \cup N_2 = N$ és $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Legyen továbbá $s \in N_1$ és $t \in N_2$. Ekkor az N_1, N_2 halmazt s, t-*vágásnak* hívjuk. Az N_1, N_2 kapacitásán

$$c(N_1, N_2) = \sum_{n_i \in N_1, n_j \in N_2} c(n_1, n_2)$$

számot értjük.

Definíció Adott $H = (G, c)$ hálózat s forrással és t nyelővel. Jelölje $r: A \to \mathbb{R}$ a maradékkapacitás-függvényt, ahol $\forall n_1, n_2 \in V$ esetén $r(n_1, n_2) = c(n_1, n_2) - f(n_1, n_2)$. Az f folyamhoz tartozó *javító gráf* a $G_f = \left(V, E_f\right)$ az élein értelmezett maradékkapacitás-függvénnyel, ahol $A_f = \{(n_1, n_2) : n_1, n_2 \in N, r(n_1, n_2) > 0\}$

A G_f-beli irányított s, t utakat *javító utaknak* hívjuk.

Tételek hálózatokra

Tétel *A folyam értéke egyenlő bármelyik vágáson átfolyó folyammal.*

A folyam értéke nem lehet nagyobb, mint bármelyik vágás kapacitása.

Tétel *Ha $s \in N_0, t \in N \setminus N_0$, akkor a folyam akkor és csak akkor maximális, ha nincsen javító út.*

Tétel *(Ford-Fulkerson tétel) Legyen $H = (G, c)$ hálózat. Ekkor a maximális folyamérték egyenlő a minimális vágással.*

28B **Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség** (B) **általános, és $\mathbb{R}^n$-ben használatos alakja.**

*Az egyenlőséget lásd a **20A.** tételben az 56. oldalon!*

Jegyzetek

Félév végi eredmények Diszkrét matematika és Lineáris algebra tárgyakból

<table>
<tr><th></th><th></th><th>kredit</th><th>érdemjegy</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Diszkrét matematika és Lineáris algebra érdemjegyek</td><td>Diszkrét matematika I.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Lineáris algebra I.</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>Diszkrét matematika II.</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Lineáris algebra II.</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Érdemjegyek kreditértékkel súlyozott átlaga:</td><td></td></tr>
</table>

A Matematika szigorlat tárgyra való jelentkezés előfeltétele, hogy a hallgató rendelkezzen az alábbi tárgyakból elégségesnél jobb osztályzattal:

Matematikai analízis I.
Matematikai analízis II.
Lineáris algebra I.
Lineáris algebra II.
Diszkrét matematika I.
Diszkrét matematika II.

Amennyiben a tárgyak kreditértékkel súlyozott jegyátlaga a 4,0-t eléri vagy meghaladja, a hallgató (kérése alapján) mentesül a szigorlat írásbeli részének teljesítése alól.

Összesített érdemjegyátlag

	kredit	átlag
I. Matematikai analízis	13	
II. Diszkrét matematika és Lineáris algebra	15	
Érdemjegyek kreditértékkel súlyozott átlaga:		