Diagonalizálás

Elméleti háttér:

Def: Az **A** mátrix hasonló a **B** mátrixhoz, ha létezzik olyan **S** mátrix, amelyre: $S^{-1}AS = B$

Def: Az **A** négyzetes mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.
($S^{-1}AS = D$)

Tétel: Hasonló mátrixok sajátértékei páronként megegyeznek.

Tétel: Ha valamely **A** négyzetes mátrix sajátértékei mind különböznek, akkor a mátrix diagonalizálható.

Megjegyzés: Tudjuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek. Ha egy *nxn*-es A mátrix esetén van *n* különböző sajátérték, akkor létezik *n* lineárisan független sajátvektor, vagyis létezik sajátvektorokból álló bázis. Ezt felhasználva az **A** mátrix diagonális alakra hozható, hiszen a diagonalizálás felfogható úgy is, mintha a lineáris transzformáció **A** mátrixát a sajátvektorok bázisában írnánk fel (emlékeztető: $S^{-1}AS$ báztis transzformáció) . Enenk eredménye lesz a diagonális mátrix.

Tétel: Ha valamely **A** négyzetes mátrix minden sajátértéke esetén az algebrai és geometriai multiplicitás megegyezik, akkor a mátrix diagonalizálható. (Hiszen így létezik sajátvektorokból álló bázis, amivel elvégezhetjük a diagonális alakra hozó bázistranszformációt).

Megjegyzés: Az $S^{-1}AS = D$ összefüggésben az **S** mátrix oszlopaiban a bázist alkotó sajátvektorok szerepelnek, mint oszlop vektorok. A **D** mátrix főátlójában pedig a sajátértékek állnak ugyan olyan sorrendben, ahogy az **S** mátrixba beírtuk a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

1. Diagonalizálja az alábbi mátrixokat, amennyiben lehetséges. Ez esetben írja fel a megfelelő áttérési mátrixot és annak inverzét is. Mátrix szorzással ellenőrizze, hogy valóban kijön-e a diagonális mátrix.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldások:

a) Az **A** mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -2$

Mivel két különböző sajátértéke van, így biztosan van sajátvektorokból álló bázis (későbbiekben SB), tehát diagonalizálható az **A** mátrix.
Az egyes sajátértékekhez tartozó ajátvektorok alakja rendre:

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 5a \\ 2a \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix},$ ahol $a, b \in R$ és $a \neq 0,\ b \neq 0.$

Ezekből az alterekből választva egy-egy vektort: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Igy az áttérési mátrix: $S = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, aminek megfelelő diagonális mátrix $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ellenőrzéshez: $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \to S^{-1}AS = D$

b) A **B** mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 2$

A hozzá tartozó sajátaltér $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix},$ ahol $a \in R$ és $a \neq 0.$

Tehát a sajátérték algebrai multiplicitása 2 , viszont a geometriai multiplicitása csak 1 (1 dimenziós a hozzá tartozó altér). Így nincs sajátvektorokból álló bázis (2 lineárisan független sajátvektor kellene, de csak egyet tudunk kiválasztani az altérből), így **nem** diagonalizálható a **B** mátrix.

c) A **C** mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -6$

Mivel két különböző sajátértéke van, így biztosan van SB, tehát diagonalizálható a **C** mátrix.
Az egyes sajátértékekhez tartozó ajátvektorok alakja rendre:

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix},$ ahol $a, b \in R$ és $a \neq 0,\ b \neq 0.$

Ezekből az alterekből választva egy-egy vektort: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Így az áttérési mátrix: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, aminek megfelelő diagonális mátrix $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

Ellenőrzéshez:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \to S^{-1} \cdot C \cdot S = D$$

d) A **F** mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = -1$

(Mivel felsőháromszög mátrix, ezért a főátlóban vannak a sajátértékek. Ez a determináns számolás következménye.)
Mivel a 2-es sajátértéknek az algebrai multiplicitása kettő (kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak), ahhoz, hogy létezzen SB, szükséges lenne, hogy a hozzá tartozó sajátaltér dimenziója is 2 legyen, vagyis a sajátérték geometriai multiplicitása is 2 legyen (így tudnánk kiválasztani 2 lineárisan független vektort az adott altérből). Emiatt a sajátvektor számolást ezzel érdemes kezdeni.

$$\text{A } \lambda_{1,2} = 2 - \text{höz tartozó sajátvektorok alakja}: \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ahol } a \in R,\ a \neq 0.$$

Egy egy dimenziós, vagyis a sajátérték geometriai multiplicitása 1, így nincs SB, vagyis az **F** mátrix nem diagonalizásható. (A másik sajátvektor számítása ez esetben felesleges.)

e) A **G** mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 3,\ \lambda_3 = -2$

Mivel a 3-as sajátértéknek az algebrai multiplicitása kettő, hosonlan az előző feladathoz, ennek geometriai multiplicitásától függ a diagonalizálhatóság.

$$\text{A } \lambda_{1,2} = 3 - \text{hoz tartozó sajátvektorok alakja}: \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 5a \\ a \\ b \end{pmatrix}, \text{ ahol } a, b \in R,\ a \neq 0,\ b \neq 0.$$

Ez két dimenziós, vagyis a sajátérték geometriai multiplicitása 2, így biztosan van SB, vagyis biztosan diagonalizálható a **G** mátrix.

$$\text{A } \lambda_3 = -2 - \text{höz tartozó sajátvektorok alakja}: \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}, \text{ ahol } a \in R,\ a \neq 0..$$

Így egy sajátvektorokból álló bázis (SB) például: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ezzel:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amivel számolva}: S^{-1} \cdot G \cdot S = D.$$

2. Adja meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, és diagonalizálja őket, amennyiben lehetséges. Adja meg a megfelelő áttérési mátrixot is a diagonális alakhoz.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 14 & -15 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

h) $H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Megoldások:

a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$, tehát biztosan diagonalizálható.

b) $\lambda_1 = 29,\ \lambda_2 = -1$, tehát biztosan diagonanlizálható

c) $\lambda_{1,2} = 3,\ \lambda_3 = -6$. A 3-hoz tartozó sajátaltér alakja $\begin{pmatrix} 2a-2b \\ b \\ a \end{pmatrix}$, $a, b \in R,\ a \neq 0,\ b \neq 0$.

Mivel ez az altér 2 dimenziós, így létezik SB, tehát diagonalizálható a mátrix.

d) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$, tehát biztosan diagonalizálható.

e) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$, tehát biztosan diagonalizálható.

f) $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 4$, tehát biztosan diagonalizálható.

g) $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 1$. A 2-höz tartozó sajátaltér alakja $\begin{pmatrix} -a \\ b \\ a \end{pmatrix}$, $a, b \in R,\ a \neq 0,\ b \neq 0$. Mivel ez az altér 2 dimenziós, így létezik SB, tehát diagonalizálható a mátrix.

h) $\lambda_{1,2} = -1,\ \lambda_3 = -2.$ A $-1-$hez tartozó sajátaltér alakja $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix},\ a, b \in R,\ a \neq 0,\ b \neq 0.$ Mivel ez az altér 2 dimenziós, így létezik SB, tehát diagonalizálható a mátrix.