ANALÍZIS II. Példatár

Többváltozós valós függvények differenciálszámítása.

2008. március

1. fejezet

Feladatok

1.1. Határérték, folytonosság

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

1.1. $f(x,y)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$

1.2. $f(x,y)=\dfrac{1}{R^2-x^2-y^2}$

1.3. $f(x,y)=\ln(xy)$

1.4. $f(x,y)=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$

1.5. $f(x,y)=\ln(y^2-4x+8)$

1.6. $f(x,y)=\ln x-\ln\sin y$

1.7. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

1.8. $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x}$

1.9. $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

1.10. $f(x,y,z)=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$\boxed{\textbf{1.11.}}$ $\lim\limits_{x\to 2,\ y\to\infty}\dfrac{2xy-1}{y+1}$

1.12. $\lim\limits_{x\to\infty,\ y\to\infty}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$ és a $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$ ismételt határértékeket az alábbi esetekre:

1.13. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=b=\infty$

1.14. $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a=\infty$, $b=+0$

$\boxed{\textbf{1.15.}}$ Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$$

függvény esetén $\lim\limits_{x\to 0\ y\to 0}f(x,y)$ létezik, de az ismételt határértékek nem léteznek!

Vizsgáljuk meg az alábbi függvények megadott helyen vett határértékét és ismételt határértékeit az adott pontban!

$\boxed{\textbf{1.16.}}$ $f(x,y)=x\cos y$, $P(0,\infty)$

$\boxed{\textbf{1.17.}}$ $f(x,y)=\dfrac{xy-x+y}{xy+x+y}$, $P(0,0)$

$\boxed{\textbf{1.18.}}$ $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $P(0,0)$

1.2. Parciális deriválás

Számítsuk ki az alábbi függvények x és y szerinti parciális deriváltjait:

1.19. $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$

1.20. $f(x,y) = \mathrm{tg}\ (3x - 5y)$

1.21. $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y}$

1.22. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

1.23. $f(x,y) = \sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}$

1.24. $f(x,y) = \ln \sqrt{x^7y^4}$

1.25. $f(x,y) = \arcsin \sqrt{xy}$

1.26. $f(x,y) = \dfrac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$

1.27. $f(x,y) = \mathrm{arctg}\ \dfrac{y}{x}$

Számítsuk ki a következő függvények parciális deriváltjainak adott pontbeli értékét!

1.28. $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2;\ x = 1, y = -2$

1.29. $f(x,y) = \arccos \dfrac{x}{y};\ x = 1, y = 2$

1.30. $f(x,y) = \mathrm{tg}\ xy;\ x = 2, y = \dfrac{\pi}{8}$

1.31. $f(x,y) = \ln(3x + y^2);\ x = 2, y = 0$

1.32. $f(x,y) = e(\sqrt[3]{x}) + \sqrt[3]{y});\ x = 1, y = 8$

Deriváljuk x és y szerint az alábbi implicit függvényeket:

1.33. $x^x y^y z^z = 1$

1.34. $2xz + 6yz + 5z^2 + 12 = 0$

1.35. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$

1.36. $e^{x+y+2z} = 3x + 7y + 11z$

1.37. $e^{x+y+z} = x + 2y + 3z$

1.3. Érintősík

Írjuk fel az alábbi felületek érintősíkjainak egyenletét a megadott pontban!

1.38. $f(x,y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6$; $(x_0, y_0) = (1, -1)$

1.39. $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y}$; $(x_0, y_0) = (1, 2)$

1.40. $f(x,y) = (x^2 + y^2) \ln(xy)$; $(x_0, y_0) = (2, \dfrac{1}{2})$

1.41. $f(x,y) = x\mathrm{tg}\ y - y\mathrm{tg}\ x$; $(x_0, y_0) = (\dfrac{\pi}{4}, 0)$

1.42. Meghatározandó azon sík egyenlete, amely a $P(2, -1, 3)$ ponton halad át, és párhuzamos a $z = \cos(x^2 + y^2)$ felület $(x_0, y_0) = (\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \dfrac{\sqrt{\pi}}{2})$ koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.

1.43. Az $f(x,y) = \ln(xy)$ felületnek mely pontjaiban párhuzamos az érintősík az $x+y+z = 0$ síkkal?

1.44. A $z = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?

1.4. Iránymenti derivált

Meghatározandók az alábbi függvények adott α iránymenti differenciálhányadosai!

1.45. $f(x,y) = e^{x+y^2}$; $\alpha = 45°$

1.46. a., $f(x,y) = y^2 e^x + \cos(x+y)$; $\alpha = 135°$

b., $f(x,y) = x \sin y + y \cos x$; $\alpha = 120°$

1.47. $f(x,y) = e^y \ln x - xe^x$; $\alpha = 30°$

Számítsuk ki az alábbi függvények adott irány szerinti deriváltjait a megadott pontban!

1.48. $f(x,y) = x^3 - 5xy^2 + y^2 - 2x + 1$; $\alpha = 40°, (x_0, y_0) = (1, 0)$

1.49. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\alpha = 135°$, $(x_0 y_0) = (-5, 5)$

1.50. $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\alpha = 60°$, $(x_0, y_0) = (\sqrt{3}, -1)$

1.51. $f(x,y) = \sin(xy)$; $\alpha = 150°$, $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \pi)$

1.52. $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2$; $\alpha = 60°$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$

Számítsuk ki az alábbi függvények mind a négy másodrendű parciális deriváltját!

1.53. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

1.54. $f(x,y) = \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}$

1.55. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

1.56. $f(x,y) = y - x \cdot e^y + x$

1.57. $f(x,y) = x \cdot \sin(x+y) + y \cdot \sin(x+y)$

1.58. $f(x,y) = e^{xy}$

Igazoljuk, hogy a következő függvények harmonikusak, vagyis kielégítik az $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ másodrendű parciális differenciálegyenletet!

1.59. $f(x,y) = e^x \cos y$

1.60. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

1.61. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

1.5. Taylor polinom

Írjuk fel az alábbi kétváltozós függvények P_0 pont körül vett másodrendű Taylor polinomját!

1.62. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $P_0(1, 3)$

1.63. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$; $P_0(1, \frac{1}{2})$

1.64. $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$; $P_0(1, -2)$

1.65. $f(x,y) = x^y$; $P_0(1, 1)$

1.6. Szélsőérték magasabb dimenzióban

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke, van-e, s ha létezik, maximum, vagy minimum!

1.66. $f(x, y) = x^2 + y^2$

1.67. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - y + 5$

1.68. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$

1.69. $f(x, y) = (x + 1)^2 + 4(y - 3)^2$

1.70. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$

1.71. $f(x, y) = 4x^2 + 2xy - 5y^2 + 2$

1.72. $f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$

1.73. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

1.74. Az $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ függvényt tekintjük az

$$\{(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\}$$

négyszögben.

1.75. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.76. Egy bádogkanna egymásra helyezett hengerből és kúpból áll. Térfogata V. Milyennek válasszuk a méreteket, hogy elkészítéséhez a legkevesebb bádogot használjuk?

1.77. 12-t osszuk három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!

1.78. Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege 45cm. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?

1.79. Egy R sugarú körből maximális területű háromszöget kell kivágni. Mekkorák a háromszög oldalai?

1.80. 18-at osszuk fel három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második köbének, és a harmadiknak a szorzata maximális legyen!

1.7. Feltételes szélsőérték

Határozzuk meg az adott kétváltozós függvényeknek előírt feltételek mellett vett feltételes szélsőértékeit!

1.81. $f(x, y) = xy$, feltétel: $x + y - 1 = 0$.

1.82. $f(x, y) = x^2 + y^2$, feltétel: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

1.83. $f(x, y) = x^2 - y^2$, feltétel: $3x + 2y + 5 = 0$.

1.84. $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, feltétel: $x - y = \frac{\pi}{4}$.

2. fejezet

Megoldások

1.1. Határérték, folytonosság

1.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$

1.2. A sík összes pontjai, az $x^2 + y^2 = R^2$ kör pontjai kivételével.

1.3. Az első, és harmadik síknegyed pontjai, az x és y tengely pontjai azonban nem.

1.4. A sík összes pontjai, kivéve azokat a pontokat, melyre $x + y = n$, ahol n egész szám.

1.5. $y^2 > 4x - 8$.

1.6. $x > 0$ és $2n\pi < y < 2(n+1)\pi$, (n egész szám).

1.7. $x^2 + y^2 \leqq 1$ kör.

1.8. $|x| \geqq |y|$, de $x \neq 0$.

1.9. A $2k\pi \leqq x^2 + y^2 \leqq (2k+1)\pi$, $(k = 0, 1, 2....)$.

1.10. Az $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ kúp külseje, belevéve a határt is a kúp csúcsát kivéve.

1.11. Minden véges $y \neq 0$-ra

$$\frac{2xy - 1}{y + 1} = \frac{2x - \frac{1}{y}}{1 + \frac{1}{y}},$$

és így ha $x \to 2$ és $y \to \infty$, akkor $f(x, y) \to 4$.

1.12. $\lim f(x, y) = 0$.

1.13.

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} f(x, y) = 0, \qquad \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} f(x, y) = 1.$$

1.14.

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} f(x, y) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} f(x, y) = 1.$$

1.15. Mivel

$$|f(x, y)| = |x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}| \leqq |x \sin \frac{1}{y}| + |y \sin \frac{1}{x}| \leqq |x| + |y|$$

ezért

$$\lim_{x\to 0 y\to 0} f(x, y) = 0.$$

Az ismételt határértékek azonban nem léteznek, ugyanis a

$$\lim_{y\to 0} (x \sin \frac{1}{y})$$

határérték nem létezik, s így sem a $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ sem a másik ismételt határérték nem létezik.

1.16. Mivel $|\cos y| \leq 1$, tehát korlátos, és $\lim_{x\to 0} x = 0$ és

$$\lim_{x\to 0 y\to\infty} x\cdot\cos y = 0.$$

Mivel $\lim_{y\to\infty} x\cdot\cos y$ nem létezik, ezért a

$$\lim_{x\to}\lim_{y\to\infty} x\cdot\cos y$$

határérték sem létezik, viszont

$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to 0} x\cdot\cos y = \lim_{y\to\infty} 0 = 0.$$

1.17. Mivel $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1$, ha $y \neq 0$, ezért

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 1.$$

Hasonlóan $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = -1$.

A $\lim_{x\to 0 y\to 0} f(x,y)$ határérték nem létezik, ugyanis a függvénynek más a határértéke, ha az x tengely mentén, vagy ha az y tengely mentén tartunk az origóhoz.

1.18. Bár teljesül, hogy

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0,$$

mégis a

$$\lim_{x\to 0 y\to 0} f(x,y)$$

határérték nem létezik. Ugyanis az $x = t\cdot\cos\alpha$, $y = t\cdot\sin\alpha$ félegyenesek mentén

$$f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sin 2\alpha,$$

α-tól függő állandó. Ezért egy α irányszögű egyenes mentén a határérték is $\sin 2\alpha$, és ez α-val együtt változik. A fenti határérték α-tól függően más és más értékű.

1.2. Parciális deriválás

1.19. $f'_x(x,y) = 2x - 5y - 6$ és $f'_y(x,y) = -5x + 6y + 7$.

1.20. $f'_x(x,y) = \dfrac{3}{\cos^2(3x-5y)}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{-5}{\cos^2(3x-5y)}$.

1.21. $f'_x(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

1.22. $f'_x(x,y) = (\dfrac{y}{x+y})^2$ és $f'_y(x,y) = (\dfrac{x}{x+y})^2$.

1.23. $f'_x(x,y) = \dfrac{3x^2-10xy}{2\sqrt{x^3-5x^2y+y^4}}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{-5x^2+4y^3}{2\sqrt{x^3-5x^2y+y^4}}$.

1.24. $f'_x(x,y) = \dfrac{7}{2x}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{2}{y}$.

1.25. $f'_x(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}}$.

1.26. $f'_x(x,y) = \dfrac{2\cdot e^{2x-3y}(2x-3y-1)}{(2x-3y)^2}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{-3\cdot e^{2x-3y}(2x-3y-1)}{(2x-3y)^2}$.

1.27. $f'_x(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ és $f'_y(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

1.28. $f'_x(1,-2) = -4$ és $f'_y(1,-2) = -1$.

1.29. $f'_x(1,2) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -0,5777$ és $f'_y(1,2) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = 0,289$.

1.30. $f'_x(2,\dfrac{\pi}{8}) = \dfrac{\pi}{4} = 0,785$ és $f'_y(2,\dfrac{\pi}{8}) = 4$.

1.31. $f'_x(2,0) = \dfrac{1}{2}$ és $f'_y(2,0) = 0$.

1.32. $f'_x(1,8) = \dfrac{e}{3} = 0,906$ és $f'_y(1,8) = \dfrac{e}{12} = 0,227$.

1.33. $f'_x(x,y) = -\dfrac{1+\ln x}{1+\ln z}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{1+\ln y}{1+\ln z}$.

1.34. $f'_x(x,y) = -\dfrac{z}{x+3y+5z}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{3z}{x+3y+5z}$.

1.35. $f'_x(x,y) = -\dfrac{x(x^2+y^2+z^2-1)}{z(x^2+y^2+z^2-3)}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{y(x^2+y^2+z^2-2)}{z(x^2+y^2+z^2-3)}$.

1.36. $f'_x(x,y) = -\dfrac{e^{x+y+2z}-3}{2e^{x+y+2z}-11}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{e^{x+y+2z}-7}{2e^{x+y+2z}-11}$.

1.37. $f'_x(x,y) = -\dfrac{e^{x+y+z}-1}{e^{x+y+z}-3}$ és $f'_y(x,y) = -\dfrac{e^{x+y+z}-2}{e^{x+y+z}-3}$.

1.3. Érintősík

1.38. $17x - 8y - z = 16$

1.39. $2x - y - 2\sqrt{3}z + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} = 0$

1.40. $17x + 68y - 8z = 68$

1.41. $z - (\dfrac{\pi}{4} - 1)y = 0$

1.42. $\sqrt{\pi}x + \sqrt{\pi}y - (\sqrt{\pi} + 3) = 0$

1.43. $x = y = -1$

1.44. $x = 3\ ,\ y = \dfrac{1}{2}$

1.4. Iránymenti derivált

1.45. $f'_\alpha(x,y) = \sqrt{2} \cdot e^{x+y^2}(\dfrac{1}{2} + y)$

1.46. a., $f'_\alpha(x,y) = -\sqrt{2} \cdot y \cdot e^x(1 - \frac{y}{2})$
b., $f'_\alpha(x,y) = \dfrac{1}{2}(y \cdot \sin x - \sin y) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x \cdot \cos y + \cos x)$

1.47. $f'_\alpha(x,y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}[\dfrac{1}{x} \cdot e^y - (x+1)e^x] + \dfrac{1}{2} \cdot e^y \cdot \ln x$

1.48. $f'_\alpha(1,0) = \cos 40^\circ = 0,766$

1.49. $f'_\alpha(-5,5) = 1$

1.50. $f'_\alpha(3,-1) = 0$

1.51. $f'_\alpha(\dfrac{1}{4},\pi) = \dfrac{\sqrt{2}}{16} - \dfrac{\pi\sqrt{6}}{4} = -1,835$

1.52. $f'_\alpha(1,1) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2.5) = 7.33$

1.53. $f''_{xx}(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\ f''_{yy}(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$

1.54. $f''_{xx}(x,y) = \dfrac{3}{4\sqrt{x}},\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0,\ f''_{yy}(x,y) = \dfrac{3}{4\sqrt{y}}$

1.55. $f''_{xx}(x,y) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$, $f''_{yy}(x,y) = \dfrac{-2y}{(1+x^2)^2}$

1.56. $f''_{xx}(x,y) = 0$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -e^y$, $f''_{yy}(x,y) = -x \cdot e^y$

1.57. $f''_{xx}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot \cos(x+y) - (x+y)\sin(x+y)$

1.58. $f''_{xx}(x,y) = y^2 \cdot e^{xy}$, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (1+xy)e^{xy}$, $f''_{yy}(x,y) = x^2 \cdot e^{xy}$

1.5. Taylor polinom

1.62.

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{10}}[(x-1) + 3(y-3)] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10\sqrt{10}}[9(x-1)^2 - 6(x-1)(y-3) + (y-3)^2]. \end{aligned}$$

1.63.

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= e^{-\frac{5}{4}}[1 - 2(x-1) - (y-\frac{1}{2}) + (x-1)^2 + \\ &+ 2(x-1)(y-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(y-\frac{1}{2})^2]. \end{aligned}$$

1.64. $z = T_2(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$

1.65. $T_2(x,y) = 1 + (x-1) + (x+1)(y-1)$

1.6. Szélsőérték magasabb dimenzióban

1.66. A $P(0,0)$ pontban minimum van.

1.67. A $P(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3})$ pontban minimum van.

1.68. A $P(-1,-1)$ pontban maximum van, a $P(0,0)$ pontban nincs szélsőérték.

1.69. A $P(-1,3)$ pontban minimum van.

1.70. Nincs szélsőérték.

1.71. Nincs szélsőérték.

1.72. A $P(2,3)$ pontban maximum van.

1.73. A $P(1,1)$ és $P(-1,-1)$ pontokban minimum van, a $P(0,0)$ pontban nincs szélsőérték.

1.74. A $P(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ pontban maximum van.

1.75. A $P(0,0)$ pontban minimum van.

1.76.

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi(\sqrt{5}+3)}} = 0,567\sqrt[3]{V},$$

$$m_{henger} = 0,821\sqrt[3]{V}, \qquad m_{kup} = 0,507\sqrt[3]{V}.$$

1.77. 4, 4, 4

1.78. 15, 15, 15

1.79. $a = \sqrt{3}R$.

1.80. 6, 9, 3

1.7. Feltételes szélsőérték

1.81. $x = y = \frac{1}{2}$.

1.82. $x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$; $y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$.

1.83. $x = -3$; $y = 2$.

1.84. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $y = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k = \pm 1, \pm 2, ...$