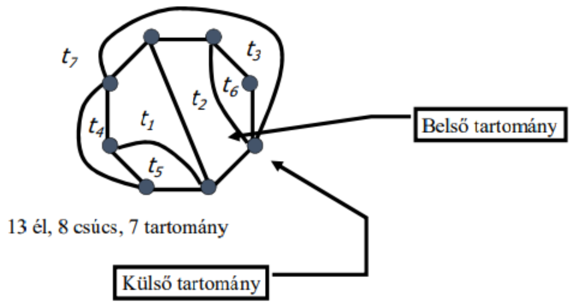
1. Síkbarajzolhatóság

egy gráf a síkba rajzolható, ha lerajzolható úgy, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást
ha egy gráf lerajzolható a síkba, akkor lerajzolható úgy is, hogy minden éle egyenes szakasz



Fáry-Wagner tétel: ha egy G gráf egy síkbarajzolható gráf, akkor létezik olyan síkbarajzolása, hogy minden éle egyenes szakasz

Euler-féle poliéder tétel

egy G összefüggő gráf esetében $p-e+t=2$ ahol p a gráf csúcsai, e az élei t pedig a tartományok jele

biz: az adott síkgráfot újra lerajzoljuk

- 1 csúcsra igaz az állítás: $1-0+1=2$
- 2 csúcsra is igaz: $2–1+1=2$
- tfh az n-dik csúcsra is igaz: $p–e+t=2$ ekkor az n+1-dik lépés kétféle lehet
  - vagy már meglévő csúcsokat kötünk össze egy új éllel: $p–(e+1)+(t+1)=p–e-1+t+1=p–e+t=2$
  - egy új csúcsot rajzolunk be a rá illeszkedő éllel együtt, melynek másik csúcsa egy már meglévő csúcs: $(p+1)-e(+1)+t=p+1-e-1+t=p–e+t=2$

I. következmény: ha az összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma, akkor $e \leq 3*p-6$

biz: mivel egyszerű gráfról van szó, ezért minden területet legaláb három él határol (vagyis elgalább 3 a fokszáma). A területeket határoló éleket összeadva az élek kétszeresét kapjuk, hiszen minden területet határoló él két területhez tartozik, így kétszer számoljuk őket össze. Vagyis $2e \geq 3t$ (mivel akkor lenne a fokszáma három, ha minden terület háromszög lenne). Így $t \leq \frac{2}{3}t$. $p-e+t=2$-ből e-t kifejezve: $e=p+t-2 \geq p+\frac{2}{3}e-2$ amiből $e \leq 3p-6$

II. következmény: ha G egyszerű síkbarajzolható gár, akkorminimális fokszáma legfeljebb 5

biz: indirekten tegyük fel, hogy a minimális fokszám legalább 6. A kázfogási tétel miatt a fokszámok összege az élek számának kétszerese, így $6 \leq 2e$. Az előző tétel ($e \leq 3p-6$) miatt ez ellentmondás.

IV. következmény (a III.-at nem kell tudni): ha az összefüggő, egyszerű skígráf pontjainak száma legalább 3 és nincsen 3 hosszú köre, akkor $e \leq 2p-4$

biz: a feltételek miatt most minden területet legalább 4 él határol, fokszáma legalább 4, tehát: $2e \geq 4t$ vagyis $e \geq 3t, \frac{1}{2}e \geq t$. A $p-e+t=2$-ből e-t kifejezve $e=p+t-2 \leq p+\frac{1}{2}e-2$ amiből $e \leq 2p-4$

megjegyzés: egyik Kuratowski gráf ($K_5, K_{3,3}$) sem síkgráf.

Kuratowski tétel: valamely gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalamz K_5-tel(5 pontú teljesgráf) vagy $K_{3,3}$-mal (6 pontú párosgráf) sem izomorf sem homeomorf részgráfot

homeomorf: egy élre szabad pontot beiktatni; ha van a gráfnak olyan részgráfja, amelyben minden pont foka kettő, de mégsem kör, akkor ezeket a pontokat szabad törölni azért hívjuk Euler-féle poliéder tételnek, mert e a szabályos testekre is igazolható tulajdonság

egy gráf pontosan akkor rajzolható síkba, ha gömbre rajzolható

biz: Sztereografikus projekció. A gömböt a síkra helyezzük, (déli pólus), majd az északi pólusból egyeneseket húzunk a gráf pontjaihoz (éleinek pontjaihoz), ezen egyeneseknek a gömbbel levő másik metszéspontja lesz a vetített képpont.

Egy csúcsban találkozik	p	t	e	Név
3 db háromszög	4	4	6	Szabályos tetraéder
4 db háromszög	6	8	12	Oktaéder
5 db háromszög	12	20	30	Ikozaéder
3 db négyszög	8	6	12	Hexaéder (kocka)
3 db ötszög	20	12	30	Dodekaéder

2. Gráfok színezése

χ(G): a kromatikus szám - az a szám, ahány szín kell a G gráf csúcsainak olyan kiszínezéséhez, hogy a szomszédok más színűek legyenek

- páros körökre, páros gárfokra: $\chi = 2$
- páratlan gárfokra: $\chi = 3$
- n csúcsú teljes gárfokra: $\chi = n$
- fa gráf: $\chi = 2$ - minden színtje különböző, váltakozva
- $K_{m,n}$ gráf: $\chi = 2$ - mivel egy osztályon belül nincsenek élen, a két osztálynak elég különböző színünek lennie

négyszín tétel: minden térkép kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy a szomszédos területek más színűek lesznek

ötszín tétel: ha G síkba rajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 5$

biz: teljes indukcióval a gráf pontszámára

- tegyük fel, hogy $n = k$ csúcsú gráf kiszínezhető öt színnel
- $n = k + 1$-re:
  - ha az élek száma $\leq 3n - 6$, akkor van olcsan csúcsa melynek foskzáma maximum 5
  - hs x foka=4, akkor x-et elhagyva a csúcsok száma eggyel csökken, tehát az indukciós feltevés miatt ez kiszínezhető 5 színnel, visszavéve ezt a csúcsot, a szomszédait ki lehet színezni 4-gyel, +x, 5 szín
  - ha x foka=5, akkor minden szomszédja nem lehet összekötve egymással, mert akkor K5 részgráf lenne, ami nem síkgráf
  - legyen z, y az x olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk össze egy ponttá, hagyjuk el x-et. Az indukciós feltevés miatt a maradék kiszínezhető 5 színnel. Visszavéve és szétszedve x-y-z csúcsokat, ezek kiszínezhetők max 3 színnel, hiszen x-nek összesen 5 szomszédja van, az y és z-kívüli csúcsok 3 színt lefoglalnak, de y és z egyszínű (nem szomszédok), marad egy szín x-nek

egyszerűb biz: tekintsük a max ötödfokú csúcsot (P). Ezt elvéve a gráf az indukciós feltevés szerint kiszínezhető 5 színnel. Visszavéve, ha a szomszédjai csak 4 színnel vannak kiszínezve, az ötödik szín elegendő.

$\hookrightarrow$ minden sík gráf kiszínezhető négy színnel

duális gráf: minden területhez egy pontot rendelünk, ezek lesznek a gráf csúcsai, és azokat a potokat kötjük össze, amelyek a térképen is szomszédosak voltak

egy egyszerű gráf n-színezhető, ha minden csúcsához hozzárendelhető úgy egy szín hogy két szomszédos csúcshoz rendelt szín különböző

3. Hamilton kör, út

<u>hamilton út:</u> minden csúcson pontosan egyszer áthaladó út <u>hamilton kör:</u> minden csúcson pontosan egyszer áthaladó kör
ha egy egyszerű gráf minden pontjának foka minimum k, akkor van a gráfban $k+1 (k \geq 2)$ hosszúságú kör
biz: leghosszabb út módszere (???)
Dirac-tétel: egyszerű gráfban ha minden csúcs foka minimum $\frac{n}{2}$, akkkor a gráf összefüggő $\hookrightarrow$ egy gráf összefüggő, ha bármely két pontja között van út $\hookrightarrow$ az ilyen gráfban mindig van hamilton kör
biz: legyen u és v különböző csúcsai G-nek. Ekkor u-val és v-vel is van legalább $\frac{n}{2}$ pont van összekötve az u-ból és v-ből induló élek által. Az előbb említett u-val, illetve v-vel közvetlenül összekötött pontok között van olyan, mely u-val is v-vel is össze van kötve, azaz u és v között vezet út
Ore-tétel: ha egy $n \geq 3$ rendű (több mint 3 csúcsú) gráfnak bármely két nem szomszédos csúcs fokszámösszege nagyobb, mint a pontok száma, akkor van a gráfnak hamilton köre (Elégséges, de nem szksséges feltétel)
biz: a gráfba új éleket rajzolunk mindaddig, amíg egy hamilton kör létre nem jön. Ekkor kivesszük az utoljára berajzolt élt, amitől Hamilton út keletkezik, ahol a törölt él pontjai a kezdő- és végpont
következmény: Ha az $n = 2k$ csúcspontú egyszerű G gráf bármely pontjának a foka legalább k, akkor van G-nek Hamilton-köre.
ha x egy részhalmaza a csúcshalmanak és G-x komponenseinek száma nagyobb mint $|x|+2$ ($|x|$ az elhagyott pontok száma) akkor nincs benne Hamilton-út $\rightarrow$ szükséges feltétel, azt lehet vele bizonyítani, hogy mikor nincs Hamilton-kör
$\hookrightarrow$ ha $|x|+1$-nél nagyobb, akkor Hamilton-út még lehet benne, de Hamilto kör már nem

4. Iránított gráfok

erős összefüggés: bármely két pont között van irányított út
gyenge összefüggés: a mögötte lévő irányíttlan gráf összefüggő

- a Dijkstra módszer itt is működik
- kézfogási tétel: Σ befok + Σ kifok = 2∗ élek száma ahol befok a bemenő, kifok pedig a kimenő élek számát jelenti
- ha minden pontra $befok = kifok$ akkor van benne Euler kör
- van benne Euler kör, ha a kezdőcsúcsnál $befok+1 = kifok$ és a végcsúcsnál $befok-1 = kifok$

egy gráf **aciklikus**, ha nincs benne irányított kör $\rightarrow$ ekkor sorosozható

5. Aszimptotikus felsőkorlát

algoritmusok esetén nem megzámoljuk, hány lépés az algoritmus, hanem megbecsüljük, hogy a bementi aatok növekedésével milyen mértékben nő az algoritmus lépésszáma
$f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ képző függvények. f(n) = O(g(n)) akkor és csakis akkor, ha létezik c, n_0 poziítv konstans, amelyre $f(n) \leq c * g(n)$ minden $n \geq n_0$ erestén
$\hookrightarrow$ ekkor g(n) asszimptotikus felsőkorlátja f(n)-nek
f és g nagyságrendje egyenlő, ha f(n) = O(g(n)) és g(n) = O(f(n))

6. Hálózat, hálózati folyam

a hálózat egy irányított gráf, ahol minden élnek van egy nem negatív kapacitása és két speciális csúccsal rendelkezik:

- Forrás(**S**ource): kiindulási csúcs, csak kimenő élei vannak
- Nyelő (Sink, **T**arget): végpont, csak bemenő élei vannak

folyam: a kapacitásokat minél jobban kihasználva megjelöljük, mely élen, mennyi anyagot szállítunk – ez az éleken értelmezett nemnegatív számokba képező függvény a folyam

- élmegkötés: a folyamérték nem lehet nagyobb az adott él kapacitásánál
- anyagmegmaradás elve (Kirchhoff): ami egy adott pontba befolyik, az ki is folyik (kivéve a Forrást és a Nyelőt)

I. minden él kap egy pozitív címkét (kapacitás)
II. javító utakat keresek (javítóút: h minden előre mutató él (S $\rightarrow$ T) út éleinek iránya megegyezik az eredeti irányított gráf éleinek irányával, akkor az út minden élén megnézzük a maradék kapacitásokat és vesszük ezek minimumát
   (a) kiválasztok egy random utat
   (b) kiválasztom a minimális értéket ezen az úton és ezzel csökkentem az élek kapacitását, miközben növelem a folyamértéket ugyanezzel a számmal
   (c) berajzol szaggatott vonallal a "visszaéleket" ezt addig folytatom, amíg van olyan út, amin még eljuthatok S-ből T-be
   (d) ha már nincs több, találni kell egy vágást, amit ha törlünk, akkor nem jutunk el S-ből T-be és a kapaciáta az eredeti gráfon nem nagyobb, min a maximális folyamérték
   (e) az eredeti gráfon bekarikázom azokat a csúcsokat, amelyek elérhetőek előre úton S-ből az utolsó segédgráfon $\hookrightarrow$ olyan éleket törölhetek csak le, amik karikázott csúcsból mutatnak nem karikázottba

7. TARSKI fixpont tétele

háló: részben rendezett (nem minden elem hasonlítható össze) halmaz, amelyben bármely véges részhalaznak van infimuma és szupremuma
$\hookrightarrow$ a háló akkor teljes ha minden részhalmazának (véges és végtelennek is) van infimuma és supremuma
rendezési reláció:

(1) reflexív: $\forall$ h $\in$H-ra h $\leq$ h
(2) antiszimmetrikus: ha a $\leq$ b és b $\leq$ a akkor a = b
(3) tranzitív ha a $\leq$ b és b $\leq$ c akkor a $\leq$ c

egy függvény akkor és csak akkor monoton, ha rendezéstartó is $(hah_1 \leq x_2 akkor f(x_1) \leq f(x_2))$
egy függvény fixpontja egy $x \in D_f$ ha f(x) = x
legyen H egy teljes háló és $f : H \rightarrow H$ egy monoto függvény, ekkor f-nek van legkisebb/legnagyobb fixpontja
biz (legkisebb fixpont létezése): legyen $G = \{x | x \in H f(x) \leq x\} \subseteq H$; mivel H teljes háló, van egy olyan g pont, ami infimuma G-nek

- tudjuk, hogy $g \leq x$, mivel f monoton, ezért $f(g) \leq f(x)$ vagyis f(g) alsó korlátja G-nek ezért $f(g) \leq g = inf(G)$ vagy is $g \in G$
- láttuk, hogy $f(g) \leq g$ és f monotonítása miatt $f(f(g)) \leq f(g)$ ezért G definíciója miatt $f(g) \in G$, De G alsó korlátja g, vagyis $f(g) \geq g$ de mivel az első lépésben beláttuk, hogy $f(g) \leq g$ a rendezési reláció asszimetrikus tulajdonsága miatt f(g) = g

- legyen G' = { x — x ∈ H f(x) = x} a fixpontok halmaza, g∈ G' és g'=inf(G'). Ha G' részhalmaza G-nek akkor inf(G') ≥ inf(G) vagyis g' = inf(G') ≥ g. Másrészt g' = inf(G') ≤ g. A rendezési reláció asszimetriája miatt g' = g vagyis ez tényleg a legkisebb fixpont.

következmény: a fixpontok halmaza is háló ugyanarra a rendezésre

8. Végtelen halmazok számossága

A és B halmazok ekvivalensek (egyenlő számosságúak) ha van egy olyan f kölcsönös leképezés, mely A-t B-be képzi → A B
↪ ez ekvivalencia reláció

- reflexív: A A
- szimmetrikus: ha A B akkor B A
- tranzitív: ha A B és B C akkor A C

A természetes számok számmossága megszámlálhatóan végtelen, ez az $\aleph_0$ (alef-null)
Einstein ekvivalencia: ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ akkor $|A| = |B|$
$\mathbb{R}$ nem megszámlálható, azaz $\mathbb{R} > \aleph_0$