Determináns

2. 2×2-es mátrixok determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = ?$

Megoldás: A $\det A = ad - bc$ képlet alapján, ahol $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Hasonlóak: $\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -16 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2000 & 6000 \\ -5000 & -4000 \end{vmatrix}$

3. 3×3-as mátrixok determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$

Megoldás: Például a $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ képlettel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-93) - 2 \cdot 78 - 3 \cdot 67 = -450$$

Hasonlóak: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -8 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

4. 4×4-es mátrixok determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = ?$

Megoldás például: $\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + a_{13} \cdot \det A_{13} - a_{14} \cdot \det A_{14}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot (-12) - 4 \cdot 14 - 3 \cdot 4) + 2 \cdot (0 - 4 \cdot 33 - 3 \cdot 6) + 3 \cdot (0 - 1 \cdot 33 - 3 \cdot 4) - 0 = -80 - 300 - 135 = -515$$

Természetesen a kifejtést egyszerűsíthetjük a gauss algoritmus és a determinánsra vonatkozó tételek alapján!!

5. Paraméteres feladatok:

5.1 Oldja meg a következő egyenletet:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 - x^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Megoldás: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 - x^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + (2 - x^2)(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = 3x^2 - 3 = 0$

egyenlet megoldásai $x_1 = 1, x_2 = -1$

5.2 $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$ M.o.: $a = 0, \pm 1$

6. Számolja ki az alábbi determinánsokat

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = ?$ Mo: -170

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = ?$ Mo: -61

c) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -6 \\ 8 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = ?$ Mo: - 1127

d) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = ?$ Mo: -327

7. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 4 & -3 & 18 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

c)

$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 10 \\ 5 & -2 & 8 & -12 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$