# Elsőrendű logika gyakorló feladatok

1. **Formalizáld az alábbi mondatokat:**

    a) Bármely két racionális szám között található irracionális szám. (U=valós számok)

    b) Minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként. (U=valós számok)

    c) Minden lében van két kanál. (U= minden dolgok halmaza)
    d) Van olyan kalap, mi minden zoknihoz illik. (U= minden dolgok halmaza)
    e) Egy, csak egy legény van talpon a vidéken. (U=emberek)
    f) Minden racionális szám estén létezik nála nagyobb irracionális szám. (Univerzum: R)
    g) Minden egész szám páros vagy páratlan. ( U = R)
    h) Minden arany, ami fénylik.
    i) Van olyan cápa, amelyik dorombol.
    j) Vannak repülő és futómadarak.
    k) Minden egész számnál létezik nagyobb egész szám. (U = R)
    l) Malacka mindenkinél kisebb, aki idősebb Zsebi babánál (U = Százholdas pagony)
    m) Szaffinak van egy fekete macskája. (U = élőlények)
    n) Minden kutya teát iszik, ha álmos. (U = élőlények)
    o) Az intelligens delfinek között van, amelyik tud labdát egyensúlyozni az orrán. (U=élőlények)
    p) A páros számok oszthatók a 2 valamelyik hatványával. (U = R)
    q) Van olyan kutya, amelyik megugatja a postást. (U = élőlények)
    r) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár. (U = élőlények)

2. **Hozd Prenex konjunktív normál formára, majd Skólem normálformára.**

    a) $\exists x\left[\exists y\left(B(x,y)\wedge P(y)\right)\rightarrow \forall y\exists z\left(G(x,y,z)\right)\right]$

    b) $\exists x K(x)\vee\neg\forall x\left[((R(x)\wedge T(x))\rightarrow Q(x))\rightarrow\neg\forall y(\neg Q(y)\rightarrow P(x,y))\right]$

    c) $\forall x(\exists y Q(x,y)\wedge(P(x)\rightarrow R(x,y))\wedge\neg\forall z(P(z)\rightarrow Q(z,x)))$

    d) $\neg\left[\forall x\exists y(P(x,y)\vee Q(x,y))\right]\wedge\left[\exists x\forall y(S(x,y)\rightarrow T(x,y))\right]$

    e) $\forall x\exists y A(x,y)\rightarrow\neg\forall x\left(\neg B(x)\rightarrow C(x)\right)$

    f) $\forall x\ P(x)\vee\neg\exists x\forall y[Q(x,y)\vee\neg R(c,y)]$

    g) $\forall x\left(A(x)\rightarrow\neg B(x)\right)\rightarrow\neg\forall x\exists y\ \ C(x,y)$

    h) $\forall x\left[\forall y\left(A(y)\rightarrow B(x,y)\right)\rightarrow\exists y C(y)\right]$

3. **Rezolúció**

a) Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma:

$\forall x((A(x, Ern\H{o}) \wedge N(x)) \rightarrow B(x))$
$\forall x((T(x) \vee S(x)) \rightarrow \forall y A(x, y))$
$\neg T(Lajos) \wedge S(Lajos)$
$\forall x(S(x) \rightarrow N(x))$
$\Rightarrow B(Lajos)$

b) Döntse el elsőrendű rezolúcióval, hogy helyes-e az alábbi következtetés!

$\forall x[A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x)]$
$\forall x[B(x) \rightarrow (D(x) \wedge E(x)]$
$\forall x[E(x) \rightarrow (F(x) \vee \neg C(x))]$
$\underline{A(Kati)}$
$F(Kati)$

c) $\forall x[(T(x) \vee F(x)) \rightarrow R(x)]$
$\forall x[C(x) \rightarrow (\neg O(x) \wedge F(x))]$
$C(Gábor)$

Fogalmazza meg a mondatok jelentését, ha az univerzum a gőték halmaza, és adottak a következők:

T(x) = Tüskés F(x) = Tud fütyülni R(x) = Szereti a répatortát
C(x) = Csíkos O(x) = Okos

Rezolúció segítségével bizonyítsa be, hogy Gábor a gőte szereti a répatortát!

d)
$\forall x[Z(x) \rightarrow (\neg L(x) \wedge P(x))]$
$\forall x[(P(x) \vee T(x)) \rightarrow M(x)]$
$Z(Dumbó)$

Fogalmazza meg a mondatok jelentését, ha az univerzum az elefántok halmaza, és adottak a következők:

Z(x) = Zöld L(x) = Lila fülü P(x) = Pöttyös fülü
T(x) = Látott már zebrát M(x) = Szereti Mozartot

Rezolúció segítségével bizonyítsa be, hogy Dumbó a kiselefánt szereti Mozartot!

e) Formalizálja az alábbi mondatokat! Az alábbi jelöléseket használja:
P(x): x puli, K(x): x kutya, U(x): x ugat, H(x): x harap.

Bogáncs puli.
A pulik kutyák.
Amelyik kutya ugat, az nem harap.
Bogáncs mindig ugat.

Bizonyítsa rezolúcióval, hogy van olyan puli, amelyik nem harap!

f) Rezolúció segítségével igazolja, hogy az első három állítás logikai következménye a negyedik!

1. $\forall x[\neg A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))]$
2. $\forall x[(B(x) \wedge C(x)) \rightarrow \neg D(x)]$
3. $D(Marci)$
4. $A(Marci)$

g) Az univerzum legyen a komplex számok halmaza, kivéve a 0 (0+0i) számot.
A prédikátumok és függvények a következők:

V(x) – x tisztán valós szám
P(x) – x pozitív szám
N(x) – x negatív szám
f(x) = x2
Fogalmazza meg szöveggel az alábbi formulák jelentését!

(1) $\forall x(V(x) \rightarrow (P(x) \vee N(x)))$
(2) $\forall x(N(x) \rightarrow P(f(x))) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x)))$
(3) $\neg P(f(i))$

Bizonyítsa be rezolúcióval, hogy a fenti (1),(2) és (3) állítások logikai következménye, hogy az *i* nem valós szám!

# Megoldások:

**1. a)** $\forall x \forall y[(R(x) \wedge R(y) \wedge N(y,x)) \rightarrow \exists z(I(z) \wedge N(z,x) \wedge N(y,z))]$

R(x): racionális, I(y): irracionális N(x,y): x nagyobb y

**f)** $\forall x(R(x) \rightarrow \exists y(I(y) \wedge N(y,x)))$

R(x): racionális, I(y): irracionális N(x,y): x nagyobb y

**g)** $\forall x(Z(x) \rightarrow (P(x) \vee T(x)))$

Z( ): egész; P( ): páros; T( ): páratlan

**h)** $\forall x(F(x) \to A(x))$

**i)** $\exists x(C(x) \wedge D(x))$

**j)** $\exists x(M(x) \wedge R(x)) \wedge \exists y(M(y) \wedge F(y))$

**k)** $\forall x(E(x) \to \exists y(E(y) \wedge N(y,x)))$

**2.**

**a)**

$\exists x[\neg\exists y(B(x,y) \wedge P(y)) \vee \forall y\exists z(G(x,y,z))]$

$\exists x[\forall y\neg(B(x,y) \wedge P(y)) \vee \forall y\exists z(G(x,y,z))]$

$\exists x[\forall y(\neg B(x,y) \vee \neg P(y)) \vee \forall y\exists z(G(x,y,z))]$

$\forall y$ nem emelhető ki ezért új ismeretlenek kellenek:

$\exists x[\forall y_1(\neg B(x,y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee \forall y_2\exists z(G(x,y_2,z))]$

$\exists x\forall y_1\forall y_2\exists z[(\neg B(x,y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee (G(x,y_2,z))]$

$\exists x\forall y_1\forall y_2\exists z[\neg B(x,y_1) \vee \neg P(y_1) \vee G(x,y_2,z)]$ Prenex KNF

Skólemizálás: $x \leftarrow c$; $z \leftarrow f(y_1,y_2)$

$\forall y_1\forall y_2[(\neg B(c,y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee (G(c,y_2,f(y_1,y_2)))]$

**b)**

$\exists xK(x) \vee \neg\forall x[\neg(\neg(R(x) \wedge T(x)) \vee Q(x)) \vee \neg\forall y(Q(y) \vee P(x,y))]$

$\exists xK(x) \vee \exists x\neg[((R(x) \wedge T(x)) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y\neg(Q(y) \vee P(x,y))]$

$\exists xK(x) \vee \exists x[\neg(R(x) \wedge T(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg\exists y\neg(Q(y) \vee P(x,y))]$

$\exists xK(x) \vee \exists x[(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y(Q(y) \vee P(x,y))]$

$\exists x$ kiemelhető itt, ezér nem kell új ismeretlen:

$\exists x\forall y[K(x) \vee [(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(y) \vee P(x,y))]]$

Ez Prenex, de nem KNF, ezért disztributív szabályt használunk:

$\exists x\forall y[(K(x) \vee \neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (K(x) \vee Q(y) \vee P(x,y))]$ Prenex KNF

Skólemizálás: $x \leftarrow c$

$\forall y[(K(c) \vee \neg R(c) \vee \neg T(c) \vee Q(c)) \wedge (K(c) \vee Q(y) \vee P(c,y))]$

**c)**

$\forall x(\exists yQ(x,y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x,y)) \wedge \neg\forall z(\neg P(z) \vee Q(z,x)))$

$\forall x(\exists yQ(x,y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x,y)) \wedge \exists z\neg(\neg P(z) \vee Q(z,x)))$

$\forall x(\exists yQ(x,y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x,y)) \wedge \exists z(P(z) \wedge \neg Q(z,x)))$

$\forall x\exists y\exists z(Q(x,y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x,y)) \wedge (P(z) \wedge \neg Q(z,x)))$

$\forall x\exists y\exists z(Q(x,y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x,y)) \wedge P(z) \wedge \neg Q(z,x))$ Prenex KNF

Skólemizálás: $y \leftarrow f(x)$; $z \leftarrow g(x)$

$\forall x(Q(x,f(x)) \wedge (\neg P(x) \vee R(x,f(x))) \wedge P(g(x)) \wedge \neg Q(g(x),x))$