

# Diszkrét Matematika II

Erdélyi Áron

2018.06.13.

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>Kombinatorika</b>	<b>3</b>
1.1	Permutáció . . . . .	3
1.1.1	Ismétlés nélküli . . . . .	3
1.1.2	Ismétléses . . . . .	3
1.2	Variáció . . . . .	3
1.2.1	Ismétlés nélküli . . . . .	3
1.2.2	Ismétléses . . . . .	4
1.3	Kombináció . . . . .	4
1.3.1	Ismétlés nélküli . . . . .	4
1.3.2	Ismétléses . . . . .	4
1.4	Binomiális tétel . . . . .	4
1.4.1	Binomiális együtthatók . . . . .	4
1.4.2	Binomiális tétel . . . . .	5
1.5	Binomiális együtthatók tulajdonságai . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Halmazok</b>	<b>6</b>
2.1	Halmazok egyenlősége . . . . .	6
2.2	Üres halmaz . . . . .	6
2.3	Részhalmaz definíciója . . . . .	6
2.4	Hatványhalmaz . . . . .	6
2.5	Halmazok számossága . . . . .	6
2.6	Műveletek halmazok között . . . . .	6
2.6.1	Halmazok uniója . . . . .	6
2.6.2	Halmazok metszete . . . . .	6
2.6.3	Halmazok különbsége . . . . .	6
2.6.4	Direkt szorzat . . . . .	6
2.7	Műveleti azonosságok . . . . .	6
2.8	Szita formula . . . . .	7
2.9	Venn diagramm . . . . .	7
2.10	Háló . . . . .	7
2.11	Tarski hálóelméleti fixpont . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Relációk</b>	<b>9</b>
3.1	Reláció általános fogalma . . . . .	9
3.2	Bináris reláció, tulajdonságok . . . . .	9
3.3	Ekvivalencia reláció és partíció . . . . .	9
3.4	Rendezési reláció . . . . .	9
3.5	Hesse diagramm . . . . .	10
3.5.1	Legkisebb, legnagyobb elem . . . . .	10
3.5.2	Maximális, minimális elem . . . . .	10
3.5.3	Korlát . . . . .	10
3.5.4	Határ . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Számosságok</b>	<b>11</b>
4.1	Nevezetes halmazok számossága . . . . .	11
4.1.1	Természetes számok . . . . .	11
4.1.2	Páros és páratlan számok . . . . .	11
4.1.3	Racionális számok . . . . .	11
4.1.4	Valós számok . . . . .	11
4.2	Egységnégyzet és egységszakasz pontjainak száma . . . . .	11
4.2.1	Egységszakasz pontjainak száma . . . . .	11
4.2.2	Egységnégyzet pontjainak száma . . . . .	12
4.3	Megszámlálhatóan sok megszámlálható számosságú halmaz uniója . . . . .	12
4.4	Cantor féle eljárás . . . . .	12
4.5	Kontinuum hipotézis . . . . .	12

<b>5</b>	<b>Nagyságrendek</b>	<b>13</b>
5.1	Függvények növekedése . . . . .	13
5.1.1	Kis ordó . . . . .	13
5.1.2	Függvények növekedése . . . . .	13
5.1.3	Függvények nagyságrendje . . . . .	13
5.2	Exponenciális növekedés, példa . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Logika</b>	<b>14</b>
6.1	Szintaxis nullad-, és elsőrendben . . . . .	14
6.1.1	Nullarendű logika . . . . .	14
6.1.2	Elsőrendű logika . . . . .	14
6.2	Szemantika: kvantorok, interpretációk elsőrendben . . . . .	14
6.3	Szemantikai következmény nulladrendben, elsőrendben . . . . .	15
6.4	Helyes következtetési sémák . . . . .	15
6.5	Ekvivalens formulák nulladrendben és elsőrendben . . . . .	16
6.6	Konjunktív normálforma . . . . .	16
6.7	Prenex konjunktív normálforma . . . . .	16
6.8	Skólem normálforma . . . . .	17
6.9	Rezolúció elve nulladrendben és elsőrendben . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Gráfok</b>	<b>18</b>
7.1	Élszám és fokszám összefüggése irányított és irányítatlan gráfokra . . . . .	18
7.2	Kör létezésének szükséges feltételei irányítatlan gráfokra . . . . .	18
7.3	Részgráfok . . . . .	18
7.4	Izomorfia fogalma, felismerése, megadása . . . . .	19
7.5	Gráfbejárások . . . . .	19
7.5.1	Szélességi bejárás . . . . .	19
7.5.2	Mélységi bejárás . . . . .	19
7.6	Euler kör, út . . . . .	19
7.6.1	Hamilton kör, út . . . . .	20
7.7	Dijkstra algoritmusa minimális út kérésére . . . . .	21
7.8	Irányított és irányítatlan gráfok mátrixai . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Síkgráfok és színezésük</b>	<b>22</b>
8.1	Euler poliéder tétele . . . . .	22
8.1.1	Következményei . . . . .	22
8.2	Kuratowski-gráfok . . . . .	23
8.3	Kurakowski tétel . . . . .	23
8.4	Fáry-Wagner tétel . . . . .	23
8.5	Síkba rajzolható gráfok és gömbre rajzolható gráfok . . . . .	23
8.6	Színezés fogalma, alkalmazásai . . . . .	23
8.7	4-szín tétel . . . . .	23
8.8	5-szín tétel . . . . .	23
<b>9</b>	<b>Fák</b>	<b>25</b>
9.1	Fa ekvivalens definíciói . . . . .	25
9.2	Prüfer kód . . . . .	25
9.3	Feszítőfák keresésére vonatkozó algoritmusok: Prim, Kurskal . . . . .	25
9.4	Fabejárások: pre-,in-,post-order . . . . .	26
<b>10</b>	<b>Hálózati folyamatok</b>	<b>27</b>
10.1	Hálózat . . . . .	27
10.2	Folyam . . . . .	27
10.3	Vágás . . . . .	27
10.4	Javító út . . . . .	27
10.5	Ford-Fulkerson tétel . . . . .	27

# 1 Kombinatorika

## 1.1 Permutáció

### 1.1.1 Ismétlés nélküli

**Definíció:** Adott  $n$  különböző elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott  $n$  elem egy ismétlés nélküli permutációjának nevezzük. Jele:  $P_n$ .

**Tétel:** Az  $n$  különböző elem permutációinak száma  $P_n = n!$ , ahol  $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$ , és  $0! = 1$ .

**Bizonyítás:** Az első helyen az  $1, 2, \dots, n$  elem bármelyike állhat, utána a maradék  $(n-1)$  elem összes lehetséges sorrendje követi. És így tovább az utolsó elemig. Az összefüggéseket visszafelé felírva adódik az állítás:

$$\begin{aligned} P_n &= n \cdot P_{n-1} \\ P_{n-1} &= (n-1) \cdot P_{n-2} \\ &\vdots \\ P_1 &= 1 \\ &\Downarrow \\ P_n &= n(n-1)(n-2)\dots 1 = n! \end{aligned}$$

### 1.1.2 Ismétléses

**Definíció:** Adott  $n$  elem, melyek között  $k_1$  darab egyenlő, másik  $k_2$  egyenlő, ...,  $k_s$  darab egyenlő, ahol  $k_v \geq 2$ , ha  $v = 1, 2, \dots, s$ , és  $k_1 + k_2 + \dots + k_s \leq n$ . Az adott  $n$  elem egy meghatározott sorrendjét ezen elemek ismétléses permutációjának nevezzük. Jele:  $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_s)}$ .

**Tétel:** Adott  $n$ , és  $k_1, k_2, \dots, k_s$  esetén az ismétléses permutációk száma:

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}.$$

**Bizonyítás:** Tekintsük az  $n$  elem egy tetszőleges permutációját. Ekkor

$k_1$  azonos elemekhez  $k_1!$  különböző indexet rendelhetünk.

$k_2$  azonos elemekhez  $k_2!$  különböző indexet rendelhetünk.

...

$k_s$  azonos elemekhez  $k_s!$  különböző indexet rendelhetünk.

Ekkor fennáll a következő összefüggés, amiből következik a bizonyítandó:

$$k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s! \cdot P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_s)} = P_n = n!$$

## 1.2 Variáció

### 1.2.1 Ismétlés nélküli

**Definíció:** Adott  $n$  különböző elem. Ha  $n$  elem közül  $k$  elemet ( $0 < k \leq n$ ) úgy választunk ki, hogy mindegyik elem csak egyszer szerepel, és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az  $n$  elem  $k$ -ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk. Jele:  $V_n^k$ .

**Tétel:** Az  $n$  különböző elem  $k$ -ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

**Bizonyítás:** Rögzített  $n$  mellett,  $k$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

$k = 1$  esetén az állítás igaz, mivel  $n$  elemből 1-et pontosan  $n$  féle képpen lehet kiválasztani.

Tegyük fel, hogy igaz  $k$ -ra, és igazoljuk  $(k+1)$ -re. Bármelyik  $(h_1, h_2, \dots, h_k)$   $k$ -ad osztályú variációhoz  $(n-k)$  elem közül választhatunk, egy  $h_{k+1}$ -ediket, hogy egy  $(h_1, h_2, \dots, h_{k+1})$   $(k+1)$ -es osztályú variációt kapjunk. Azaz igaz a következő összefüggés:  $V_n^k \cdot (n-k) = V_n^{k+1}$ .

### 1.2.2 Ismétléses

**Definíció:** Adott  $n$  különböző elem. Ha az  $n$  elem közül úgy választunk ki  $k$  elemet, hogy egy elem többször is szerepelhet, és a sorrend számít, akkor  $n$   $k$ -ad osztályú ismétléses variációját kapjuk. Jele:  $V_n^{k,i}$ .

**Tétel:** Az  $n$  különböző elem  $k$ -ad osztályú ismétléses variációjainak száma  $V_n^{k,i} = n^k$ .

**Bizonyítás:** Írjuk föl a kiválasztott elemeket, sorrendben. Az első helyre az adott  $n$  elemek bármelyikét választhatjuk, így  $V_n^{1,i} = n$ . Mivel az kiválasztott elemeknek nem kell feltétlenül különbözni egymástól, így a következő helyre is az adott  $n$  elemek bármelyikét választhatjuk, ekkor ezeknek a száma  $V_n^{2,i} = n^2$  lesz, és így tovább:

$$V_n^{k,i} = n^k.$$

## 1.3 Kombináció

### 1.3.1 Ismétlés nélküli

**Definíció:** Adott  $n$  különböző elem. Ha  $n$  elem közül  $k$  ( $0 < k \leq n$ ) elemet úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer szerepelhet, és a sorrend nem számít, akkor az  $n$  elem  $k$ -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

**Tétel:** Az  $n$  különböző elem ismétléses kombinációinak száma

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

**Bizonyítás:** Az  $n$  elem  $k$ -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma megegyezik a  $k$  darab kiválasztott és az  $(n-k)$  ki nem választott elem ismétléses permutációinak számával:

$$C_n^k = P_n^{(k, (n-k))} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

### 1.3.2 Ismétléses

**Definíció:** Adott  $n$  különböző elem. Ha  $n$  elem közül  $k$  elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az  $n$  elem  $k$ -ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk. Jele:  $C_n^{k,i}$ .

**Tétel:** Az  $n$  különböző elem  $k$ -ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}.$$

**Bizonyítás:** Az  $n$  elem  $k$ -ad osztályú ismétléses kombinációinak száma megegyezik  $n+k-1$  elemből  $k$  kiválasztott elem és  $n-1$  ki nem választott elem ismétléses permutációinak számával:

$$C_n^{k,i} = P_{n+k-1}^{k, n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}.$$

## 1.4 Binomiális tétel

### 1.4.1 Binomiális együtthatók

**Definíció:** Az  $\binom{n}{k}$  kifejezést binomiális együtthatónak nevezzük. Megállapodás szerint:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1.$$

A binomiális együttható fogalma általánosítható tetszőleges valós számra:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k! \cdot (\alpha-k)!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

### 1.4.2 Binomiális tétel

Kéttagú kifejezés (binom) bármely nemnegatív egész kitevőjű hatványa polinommal alakítható a következőképp:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

ahol  $n \in \mathbb{Z}$ , és  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Bizonyítás:** Tudjuk, hogy kommutatív gyűrűben a több tag szorzását több taggal úgy végezzük, hogy minden tagot szorzunk minden taggal. Írjuk fel az  $n$  tényezős  $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$  szorzatot. Ha mindegyik tényezőből az  $a$ -kat szorozzuk össze,  $a^n$ -t kapjuk. Ha  $(n-1)$  tagból az  $a$ -t, és egy tényezőből a  $b$ -t választjuk, ezt éppen  $n$  féle képpen tehetjük meg, így  $na^{n-1}b$ -t kapunk. Ha  $(n-2)$  tényezőből az  $a$ -kat és 2 tényezőből a  $b$ -ket választjuk, ezt  $\binom{n}{2}$  féle képpen tehetjük meg, akkor  $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$  lesz az eredmény. Ezt folytatva kapjuk a polinomot.

### 1.5 Binomiális együtthatók tulajdonságai

Legyen  $n$  nemnegatív egész szám és legyen  $k$  ( $0 < k \leq n$ ) szintén egész. Ekkor fennállnak a következő összefüggések:

1. Szimmetria:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2. Összegzés:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

3. Kettőhatvány:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

- 4.

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n > 0 \\ 1, & \text{ha } n = 0 \end{cases}$$

**Bizonyítás:**

- 1.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

- 2.

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

3. Helyettesítsük be a binomiális tételbe  $a = 1$  és  $b = 1$ -et!

4. Helyettesítsük be a binomiális tételbe  $a = 1$  és  $b = -1$ -et!

## 2 Halmazok

### 2.1 Halmazok egyenlősége

**Definíció:** Az  $A$  és a  $B$  halmaz egyenlők, ha ugyanazok az elemeik. Jelölés  $A = B$ .

### 2.2 Üres halmaz

**Definíció:** Egy halmazt akkor hívunk üres halmaznak, ha nem tartalmaz elemet. Jele:  $\emptyset$ .

### 2.3 Részhalmaz definíciója

**Definíció:** Az  $A$  halmaz részhalmaza a  $B$  halmaznak, ha  $A$  minden eleme  $B$  eleme is. Jelölés:  $A \subseteq B$ . Ha  $A \subseteq B$  és  $A \neq B$ , akkor  $A$  valódi részhalmaza  $B$ -nek. Jelölése:  $A \subset B$ .

### 2.4 Hatványhalmaz

Az  $A$  halmaz hatványhalmazán  $A$  részhalmazainak halmazát értjük.

### 2.5 Halmazok számossága

**Definíció:** A halmaz számosságán a halmaz elemeinek számát értjük. Jelölése  $|A|$ . Ha  $A$  számossága véges, az  $A$  halmazt is végesnek nevezzük. Ellenkező esetben  $A$  végtelen.

### 2.6 Műveletek halmazok között

#### 2.6.1 Halmazok uniója

**Definíció:** Az  $A$  és  $B$  halmazok egyesítése (uniója, összege) az az  $A \cup B$ -vel jelölt halmaz, amelynek elemei  $A$ -nak vagy  $B$ -nek elemei.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

#### 2.6.2 Halmazok metszete

**Definíció:** Az  $A$  és  $B$  halmazok közös része (metszete, szorzata) az az  $A \cap B$ -vel jelölt halmaz, amelynek elemei  $A$ -nak és  $B$ -nek elemei.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

#### 2.6.3 Halmazok különbsége

**Definíció:** Az  $A$  és  $B$  halmazok különbsége, vagy a  $B$  halmaz  $A$  halmazra vonatkozó komplementere  $A \setminus B$ -vel jelölt halmaz, amely  $A$  azon elemeinek halmaza amik nincsenek  $B$ -ben.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

#### 2.6.4 Direkt szorzat

**Definíció:** Legyenek  $D_1, D_2, \dots, D_n$  adott halmazok. E halmazok Descartes (direkt) szorzata  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n := \{(d_1, d_2, \dots, d_n) | d_k \in D_k, 1 \leq k \leq n\}$ .

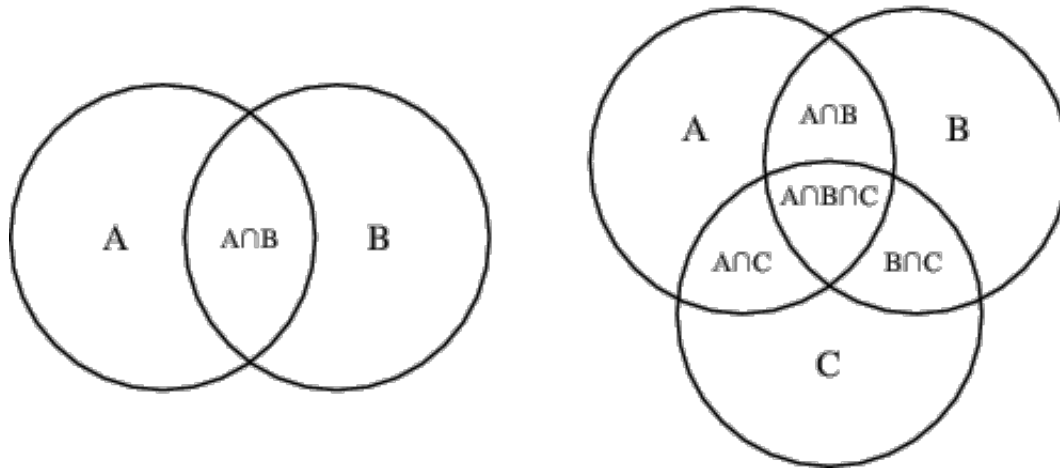
### 2.7 Műveleti azonosságok

- $A \cup B = B \cup A$  és  $A \cap B = B \cap A$ .
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  és  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  és  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  és  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

## 2.8 Szita formula

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ .

## 2.9 Venn diagramm



## 2.10 Háló

**Definíció 1:** A  $H$  részben rendezett halmaz háló, ha bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma. A  $H$  háló teljes, ha bármely részhalmazának van infimuma és supremuma.

**Definíció 2:** A  $H$  halmaz háló, ha értelmezve van rajta két,  $*$  és  $\circ$  által jelölt művelet, melyekre  $\forall a, b, c \in H$  esetén teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- kommutatívak
- asszociatívak
- elnyelési tulajdonság:

$$a * (a \circ b) = a, \quad a \circ (a * b) = a.$$

**Tétel:** A háló két fajta definíciója ekvivalensek egymással.

**Bizonyítás:** Konstruktív módon.

Legyen  $a \circ b = \inf(a, b)$ , és  $a * b = \sup(a, b)$ . Ekkor a második definícióban szereplő tulajdonságok teljesülnek, és megadható egy  $\leq$  rendezési reláció:

Legyen  $a \leq b$ , akkor és csak akkor, ha  $a \circ b = a$ . Ekkor a  $\leq$  reláció:

- Reflexív.
- Antiszimmetrikus.
- Tranzitív.

## 2.11 Tarski hálóelméleti fixpont

**Definíció:** Valamely  $H$  rendezett halmazon értelmezett  $f : H \rightarrow H$  függvény monoton (rendezéstartó), ha minden  $h_1 \leq h_2$ -re  $f(h_1) \leq f(h_2)$ . A  $h \in H$  fixpontja  $f$ -nek, ha  $f(h) = h$ .

**Tétel:** Teljes hálón értelmezett monoton függvénynek van legnagyobb és legkisebb fixpontja.



**Bizonyítás:** Legyen  $G$  azon elemek halmaza, melyre  $f(x) \leq x$ . Ennek alsó határa, vagyis  $g = \inf(G)$  lesz a legkisebb fixpont.

Egyrészt  $g \in G$ , ugyanis  $g \leq f(x) \leq x$ , ebből  $f(g) \leq f(f(x)) \leq f(x) \leq x$ , vagyis  $f(g)$  alsó korlát. Mivel  $g$  a legnagyobb alsó korlát, ezért  $f(g) \leq g$ , tehát  $g \in G$ .

Másrészt  $g$  fixpont, tehát  $g = f(g)$ . Mivel  $f(g) \leq g$ , ezért  $f(f(g)) \leq f(g)$ , vagyis  $f(g) \in G$ . De akkor  $g$  alsó korlát volta miatt  $g \leq f(g)$ . A rendezési reláció antiszimmetrikus tulajdonsága miatt  $g = f(g)$ .

Harmadrészt  $g$  a legkisebb fixpont. Legyen  $G^*$  a fixpontok halmaza és legyen  $g^* = \inf(G^*)$ . Mivel  $G^* \subseteq G$ , ezért  $g \leq g^*$ . Továbbá mivel  $g^*$  infimuma  $G^*$ -nak és  $g$  is  $G^*$ -beli, ezért  $g^* \leq g$ . A rendezési reláció antiszimmetrikus tulajdonsága miatt  $g = g^*$ , vagyis  $g$  valóban a legkisebb fixpont.

### 3 Relációk

#### 3.1 Reláció általános fogalma

**Definíció:** A  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$  direkt szorzat bármely részhalmazát relációnak nevezzük.

#### 3.2 Bináris reláció, tulajdonságok

**Definíció:** A  $\mathfrak{R}$  bináris reláció  $H$  halmazon, ha  $\mathfrak{R} \subseteq H \times H = \{(a, b) | a, b \in H\}$ .

**Tulajdonságai:**

- Reflexív, ha  $(x, x) \in \mathfrak{R}$ .
- Szimmetrikus, ha  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  esetén  $(y, x) \in \mathfrak{R}$ .
- Antiszimmetrikus, ha  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  és  $(y, x) \in \mathfrak{R}$  csak akkor teljesül, ha  $x = y$ .
- Transzitiv, ha  $(x, y) \in \mathfrak{R}$  és  $(y, z) \in \mathfrak{R}$  esetén  $(x, z) \in \mathfrak{R}$ .

#### 3.3 Ekvivalencia reláció és partíció

**Definíció:** Az  $\mathfrak{R}$  bináris reláció ekvivalencia reláció, ha reflexív, szimmetrikus, és transzitiv.

**Definíció:** A partíció a  $H$  halmaz olyan részhalmazrendszer, ahol  $H_i \cap H_j = \emptyset$ , és

$$\bigcup_{k=1}^n H_k = H.$$

**Tétel:** Ha az  $\mathfrak{R}$  bináris reláció a  $H$  halmazon ekvivalencia reláció, akkor a  $H$  azon részhalmazai, amelyek egymással relációban álló elemeket tartalmaznak, azok a  $H$  halmaz egy partícióját adják.

**Bizonyítás:** Ha  $i \neq j$ , akkor  $H_i \cap H_j = \emptyset$ , ugyan is ha ez nem teljesülne, vagyis lenne olyan  $a$ , ahol  $a \in H_i \cap H_j$ , akkor  $\forall b_i \in H_i$ -re igaz lenne, hogy  $(a, b_i) \in \mathfrak{R}$ . Hasonlóan  $\forall c_j \in H_j$ -re igaz lenne, hogy  $(a, c_j) \in \mathfrak{R}$ . Továbbá a szimmetria miatt  $(b_i, a) \in \mathfrak{R}$ . Ekkor a transzitivitás miatt  $(b_i, c_j) \in \mathfrak{R}$ , amiből az következne, hogy  $(b_i, c_j) \in H_i$ , és  $(b_i, c_j) \in H_j$ ,  $\forall b_i, c_j$  esetén, vagyis  $H_i = H_j$ .

Az  $\bigcup_{k=1}^n H_k = H$  miatt  $H$  minden eleme benne van valamelyik  $H_k$ -ban, a reflexív tulajdonság miatt pedig ezek a  $H_k$  halmazok nem üresek, hiszen így  $(a, a) \in \mathfrak{R}$ , tehát  $\exists k$ , hogy  $a \in H_k$ .

**Tétel** (az előző megfordítása) Ha  $H_i$  halmazrendszer egy partíciója  $H$ -nak, akkor ez a  $H$ -n egy ekvivalencia relációt határoz meg, ha  $(a, b) \in \mathfrak{R}$  akkor és csak akkor, ha  $a, b \in H_i$ .

**Bizonyítás:** Az ekvivalencia reláció három tulajdonságát kell belátni.

- Reflexív, mert  $(a, a) \in \mathfrak{R}$ , ha  $a \in H_i$  és  $a \in H_i$ , ez pedig teljesül.
- Szimmetrikus, mert  $(a, b) \in \mathfrak{R}$  esetén  $(b, a) \in \mathfrak{R}$ . Ez teljesül, ha  $a, b \in H_i$ .
- Transzitiv, mert ha  $(a, b) \in \mathfrak{R}$  és  $(b, c) \in \mathfrak{R}$ , akkor  $(a, c) \in \mathfrak{R}$ , azaz ha  $a, b \in H_i$  és  $b, c \in H_j$ , mivel  $H_i \cap H_j = \emptyset$ , ahol  $i \neq j$ , ezért ebben az esetben  $i = j$ , és  $a, b, c \in H_i$ .

#### 3.4 Rendezési reláció

**Definíció:** Az  $\mathfrak{R}$  bináris reláció parciális (részben) rendezési reláció, ha reflexív, antiszimmetrikus és transzitiv.

**Definíció:** A  $H$  halmaz részben rendezett, ha rendezési reláció van megadva az elemein. Ezt a relációt a  $\leq$  jellel szokták jelölni.

**Definíció:** A  $H$  halmazon értelmezett parciális rendezési reláció teljes, ha a  $\forall x, y \in H$  esetén a  $(x, y) \in \mathfrak{R}$ , illetve  $(y, x) \in \mathfrak{R}$  relációk közül legalább az egyik teljesül.

### 3.5 Hasse diagramm

Egy tetszőleges részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja olyan irányított gráf, amelyben a részbenrendezett halmaz alaphalmazának az elemei alkotják a gráf pontjait, és a gráfban az  $a$  és  $b$  pontok között pontosan akkor halad él, ha  $a \leq b$  teljesül és nincs olyan  $c$  elem, amelyre  $a \leq c \leq b$  teljesülne az adott részbenrendezésben.

Az él irányítását a diagramon úgy ábrázoljuk, hogy a  $b$  pontot az  $a$  pont fölött helyezzük el. Ezzel az elrendezéssel azért lehet ábrázolni az élek irányítását, mert a Hasse-diagram körmentes.

A reflexivitásból adódó hurokéleket a diagramon nem ábrázoljuk.

#### 3.5.1 Legkisebb, legnagyobb elem

**Definíció:** A  $H$  halmazon adott parciális rendezési reláció szerinti legnagyobb elem  $N$ , ha  $\forall h \in H$ -ra  $h \leq N$  teljesül.

**Definíció:** A  $H$  halmazon adott parciális rendezési reláció szerinti legkisebb elem  $k$ , ha  $\forall h \in H$ -ra  $k \leq h$  teljesül.

**Tétel:** Ha van legnagyobb (legkisebb) elem, akkor az egyértelmű.

**Bizonyítás:** Indirekt módon tegyük fel, hogy két legnagyobb elem létezik, legyenek ezek  $M_1$  és  $M_2$ . A definíció szerint  $M_1 \leq M_2$  és  $M_2 \leq M_1$ . A reláció antiszimmetrikus tulajdonsága miatt ez csak akkor teljesül, ha  $M_1 = M_2$ .

#### 3.5.2 Maximális, minimális elem

**Definíció:** A  $H$  halmazon adott parciális rendezési reláció szerinti maximális elem  $M$ , ha  $\nexists h \in H$ , amelyre  $M \leq h$  teljesül.

**Definíció:** A  $H$  halmazon adott parciális rendezési reláció szerinti minimális elem  $m$ , ha  $\nexists h \in H$ , amelyre  $h \leq m$  teljesül.

#### 3.5.3 Korlát

**Definíció:** A részben rendezett  $H$  halmaznak valamely  $H_1$  részhalmazának felső korlátja (az adott rendezés és  $H$  szerint),  $K \in H$ , ha  $\forall h_1 \in H_1$ -re  $h_1 \leq K$ .

**Definíció:** A részben rendezett  $H$  halmaznak valamely  $H_1$  részhalmazának alsó korlátja (az adott rendezés és  $H$  szerint),  $k \in H$ , ha  $\forall h_1 \in H_1$ -re  $k \leq h_1$ .

#### 3.5.4 Határ

**Definíció:** A részben rendezett  $H$  halmaznak valamely  $H_1$  részhalmazra korlátos, ha a részhalmaznak létezik alsó és felső korlátja. Ha létezik alsó korlátok között legnagyobb, akkor ezt infimumnak (alsó határ), ha létezik a felső korlátok között legkisebb, akkor ezt supremumnak (felső határ) nevezzük.

## 4 Számosságok

**Definíció:** Az  $A$  és  $B$  halmazok számossága megegyezik, ha  $\exists f : A \rightarrow B$  kölcsönösen egyértelmű függvény. Jelölése:  $|A| = |B|$ .

**Definíció:** Az  $A$  halmaz számossága legalább akkora, mint a  $B$  számossága, ha  $\exists A_1 \subset A$ , hogy  $|A_1| = |B|$ . Jelölés:  $|A| \geq |B|$ .

**Definíció:** Egy  $A$  halmaz véges számosságú, ha  $\exists k \in \mathbb{N}$ , hogy  $|\{1, 2, \dots, k\}| = |A|$ .

**Definíció:** Egy  $A$  halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú, ha a természetes számok halmazával egyenlő számosságú.

**Definíció:** Egy  $A$  halmaz nem megszámlálhatóan végtelen számosságú, ha számossága nem is véges, és nem is megszámlálhatóan végtelen.

### 4.1 Nevezetes halmazok számossága

#### 4.1.1 Természetes számok

A megszámlálhatóan végtelen számosság definíciójából következtetve az  $\mathbb{N}$  számossága megszámlálhatóan végtelen.

#### 4.1.2 Páros és páratlan számok

**Állítás:** A páros, illetve páratlan számok halmaza megszámlálható.

**Bizonyítás:** Páros számok hozzárendelése  $\mathbb{N}$ -hez:  $f(n) = 2n$ .

Páratlan számok hozzárendelése  $\mathbb{N}$ -hez:  $f(n) = 2n - 1$ .

#### 4.1.3 Racionális számok

**Állítás:** A racionális számok  $\mathbb{Q}$  halmaza megszámlálható.

**Bizonyítás:** Helyezzük az  $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$  egész számokat az  $A_1$  halazba. Legyen  $A_2 = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\}$ , az összes olyan tört, aminek nevezője 2, és nem egyszerűsíthető. Legyen  $A_3 = \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots\}$ , az összes olyan tört, aminek nevezője 3 és nem egyszerűsíthető, és így tovább. Ezek a halmazok megszámlálhatóak, hiszen elemeiket fel tudjuk sorolni. Így megszámlálható sok diszjunkt halmazhoz jutunk, aminek tudjuk, hogy számossága megszámlálható, és egyesítve őket megkapjuk a  $\mathbb{Q}$  halmazt.

#### 4.1.4 Valós számok

Mivel a valós számok halmazának részhalmaza a  $(0, 1)$  intervallum, melyről már beláttuk, hogy kontinuum számosságú, így  $\mathbb{R}$  számossága is kontinuum.

### 4.2 Egységnégyzet és egységszakasz pontjainak száma

#### 4.2.1 Egységszakasz pontjainak száma

**Állítás:** A  $(0, 1)$  intervallumba tartozó összes szám  $H$  halmaza a megszámlálhatónál nagyobb számosságú.

**Bizonyítás:** Ez a  $|H|$  legalább megszámlálható, hiszen  $H$  tartalmazza például a nyilván megszámlálható  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$  részhalmazt. Tegyük fel indirekt módon, hogy  $H$  megszámlálható, vagyis elemeit valamilyen  $v_1, v_2, \dots$  sorrendbe állíthatjuk. Minden ilyen  $v_i$  egy 0, és 1 közötti valós szám, tehát felírható végtelen tizedestörtként,  $0.v_{i1}v_{i2}\dots$  alakban. Az indirekt feltevés szerint tehát a következő sorozat  $H$  minden elemét tartalmazza:

$$0, v_{11}v_{12}v_{13}\dots$$

$$0, v_{21}v_{22}v_{23}\dots$$

$\vdots$

A táblázat "átlója" mentén végighaladva készítsünk egy olyan  $w$  valós számot, melynek  $w = 0, w_1 w_2, \dots$  alakjához a következő képp jutunk:

$$w_i = \begin{cases} w_i = 2, & \text{ha } v_{ii} = 1 \\ w_i = 1, & \text{ha } v_{ii} \neq 1 \end{cases}.$$

Ez a  $w$  biztosan nem szerepelt a fenti táblázatban, hiszen minden  $j$ -re  $v_{jj} \neq w_j$ . Mivel így nem minden 0 és 1 közötti valós szám szerepel a  $H$  halmazban, így ellentmondáshoz jutunk, tehát  $|H|$  nem lehet megszámlálható.

#### 4.2.2 Egységnégyzet pontjainak száma

**Állítás** Az egységnégyzet számossága megegyezik az egységszakasz számosságával.

**Bizonyítás:** Az egységnégyzet pontjainak halmaza:

$$S = (0, 1) \times (0, 1) = \{(x, y) | x, y \in (0, 1)\}.$$

A Descartes koordinátarendszerben az egységnégyzet pontjai megadhatók  $(x, y) \in S$  pontokban. Ezen számpárok és az egységszakasz pontjai között egyértelmű megfeleltetés létesíthető a következőképpen: Írjuk fel az  $x$  és  $y$  koordinátákat  $x = 0, x_1 x_2 \dots$ ,  $y = 0, y_1 y_2 \dots$  tizedestört alakban. Ekkor a konstruált  $z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots$  valós szám eleme az egységszakasznak.

#### 4.3 Megszámlálhatóan sok megszámlálható számosságú halmaz uniója

**Állítás:** Véges sok ( $k$  darab) diszjunkt megszámlálható számosságú halmaz uniója is megszámlálható.

**Bizonyítás:** Az  $A$  halmaz elemeit először úgy soroljuk föl, hogy először minden halmaz első elemét, azután minden halmaz második elemét, és így tovább vesszük. Formálisan az egyes halmazok elemeit kettős indexszel látjuk el, vagyis legyen minden  $i = 1, 2, \dots, k$ , értékre  $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots\}$ . Ezután  $A = \{b_1, b_2, \dots\}$ , ahol  $b_t$ -t a következő képpen definiáljuk:  $t - 1 = \alpha k + \beta$ ,  $0 \leq \beta < k$  (vagyis legyen  $\beta = (t - 1) \% k$ ), akkor  $b_t = a_{\beta+1, \alpha+1}$ .

#### 4.4 Cantor féle eljárás

**Állítás:** Legyen  $A$  egy véges, vagy megszámlálható számosságú halmaz, és legyen egy tőle diszjunkt, kontinuum számosságú  $B$  halmaz. Ekkor  $|A \cup B| = |B|$ .

**Bizonyítás:** Legyen  $B_1$  egy megszámlálható részhalmaza, és legyen  $B_2 = B \setminus B_1$ . A megszámlálható számosságú halmazokra vonatkozó tételek alapján  $|A \cup B_1| = |B_1|$ , tehát  $\exists f : A \cup B_1 \rightarrow B_1$ , kölcsönösen egyértelmű függvény. Ekkor legyen

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \cup B_1 \\ x, & \text{ha } x \in B_2 \end{cases}.$$

Ez a függvény  $A \cup B$  elemeit fogja kölcsönösen egyértelműen rendelni a  $B$  elemeihez.

#### 4.5 Kontinuum hipotézis

A kontinuum hipotézis szerint nincs olyan halmaz, amelynek számossága, ami a természetes számok halmazának és a valós számok halmazának számossága közé esne.

Jelölje a továbbiakban a számosságokat az  $\aleph$ . A megszámlálható számosság jele legyen  $\aleph_0$ , a rákövetkező  $\aleph_1$  és rekurzívan minden  $k$  esetén  $\aleph_k$ -ra rákövetkező számosságot  $\aleph_{k+1}$  jelölje.

A kontinuum hipotézis szerint  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ .

Az általánosított kontinuum hipotézis szerint  $\aleph_{k+1} = 2^{\aleph_k}$ .

## 5 Nagyságrendek

### 5.1 Függvények növekedése

**Definíció:**  $f$  és  $g$  két függvény, melyek a valós, vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy  $f(x) = O(g(x))$  ("nagy ordó  $g(x)$ "), ha  $\exists c, x_0$  pozitív konstansok, hogy  $x \geq x_0$  esetén  $|f(x)| \leq |c \cdot g(x)|$ .

Azt mondjuk ekkor, hogy  $g$  aszimptotikus felső korlátja  $f$ -nek.

**Definíció:** : Legyen  $f, g$  két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy  $f(x) = \Omega(g(x))$  ( $f(x)$  nagy-Omega  $g(x)$ ), ha  $\exists c, n_0$  pozitív konstans, amelyekre:  $|f(x)| \geq |c \cdot g(x)|$ .

Ekkor azt mondjuk, hogy  $f$  aszimptotikus felső korlátja  $g$ -nek.

**Definíció:** : Legyen  $f, g$  két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy  $f(x) = \Theta(g(x))$  ( $f(x)$  nagy-Theta  $g(x)$ ), ha teljesül:

$$f(x) = O(g(x)),$$

$$f(x) = \Omega(g(x)).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a két függvény nagyságrendje megegyezik.

#### 5.1.1 Kis ordó

A nagy prdóval szemben a kis ordónál ( $f(x) = o(g(x))$ ), az  $f$  határozottan kisebb a  $g$ -nél.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

#### 5.1.2 Függvények növekedése

Nagy ordó rendezés:

$$f(n) = O(f(n)), \quad \forall f.$$

$$(\log(n))^k = O(n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$n^k = O(2^n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

#### 5.1.3 Függvények nagyságrendje

1. Konstans
2. Logaritmus
3. Elsőfokú polinom
4. Hatvány logaritmusok
5. Polinomok
6. Exponenciális
7. Faktoriális

### 5.2 Exponenciális növekedés, példa

Exponenciális növekedésnek nevezzük az  $n^k$  alakú növekedéseket. Példa:  $e^n$ .

## 6 Logika

### 6.1 Szintaxis nullad-, és elsőrendben

#### 6.1.1 Nullarendű logika

**Jelkészlet:**

1. Atomok:
  - (a) Betűk
  - (b) Igaz, Hamis (I,H)
2.  $\neg, \wedge, \vee$
3. Zárójelek

**Formula:** Minden atom formula. Ha  $\alpha$  és  $\beta$  formulák, akkor  $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$  is formulák.

A fenti szabályok véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat. Az atomokat latin, a formulákat görög betűkkel jelöljük.

#### 6.1.2 Elsőrendű logika

**Jelkészlet:**

1. Változószimbólumok:  $x, y, z, \dots$
2. Konstansszimbólumok:  $a, b, c, \dots$
3. Prédikátumszimbólumok:  $P, Q, S, \dots$
4. Függvényyszimbólumok:  $f, g, h, \dots$
5. logikai összekötő jelek (műveleti jelek):  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
6. Kvantorok:  $\forall, \exists$
7. Zárójelek

**Kifejezés (term):** Minden idividuumváltozó és konstans kifejezés. Ha  $t_1, t_2, \dots, t_n$  kifejezések és  $f$   $n$ -változós függvény szimbóluma, akkor  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  is kifejezés. A fentiek szerint a függvény argumentumaiba írhatunk változókat, konstansokat, de beágyazhatók más, vagy saját függvényértékek is. A kifejezések vagy prédikátumszimbólumok argumentumaiban, vagy függvények argumentumaiban fordulhatnak elő, önállóan nem.

**Atomi formulák:** Ha  $P$   $n$ -argumentumú prédikátumszimbólum, és  $t_1, t_2, \dots, t_n$  kifejezések, akkor  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$  atomi formula.

**Formula:** Minden atom formula.

Ha  $\alpha$  és  $\beta$  formulák, akkor  $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$  is formulák.

$\forall x\alpha(x), \exists x\alpha(x)$  is formula.

A fenti szabályok véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat.

### 6.2 Szemantika: kvantorok, interpretációk elsőrendben

**Kvantorok hatásköre:** Megállapodás szerint a kvantor hatásköre a mögötte álló változó utáni atomi formula vagy zárójelben megadott formula. Az ezekben szereplő változó előfordulásokat kötöttnek nevezzük, a változó egyéb előfordulásait szabadnak.

**Interpretáció:** Az elsőrendű nyelvben is valamely formula igazságértékét csak úgy tudjuk megmondani, ha interpretáljuk a formulát. Az interpretáció több részből áll. Meg kell adni az alaphalmazt, aminek elemeire vonatkoznak a formulák. Ahogyan nulladrendben is tettük, itt is meg kell mondani az atomi formulák igazságértékét. Ezen túlmenően, a függvényeket is interpretálni kell, meg kell mondani, hogy az egyes individuumokon mi a felvett függvényérték (ami szintén az univerzum egy eleme, vagyis egy individuum).

Ezután az elsőrendben tanult kvantorok jelentése, és a műveletek nulladrendben tanult jelentése alapján kiértékelhető a formula.

**Definíció:** Az elsőrendű mondat kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben igaz. Ezt az interpretációt a formula modelljének nevezzük.

**Definíció:** Az elsőrendű mondat érvényes, ha minden interpretációjában igaz.

**Definíció:** Az elsőrendű mondat kontradikció, ha minden interpretációjában hamis.

**Definíció:** Az  $\alpha$  és  $\beta$  formulák ekvivalensek, ha minden interpretációban megegyezik az igazságértékük. Jelölése:  $\alpha \equiv \beta$ .

### 6.3 Szemantikai következmény nulladrendben, elsőrendben

**Definíció:** Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy a  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  formulahalmaz szemantikai következménye  $\beta$ , ha  $\beta$  minden olyan interpretációban igaz, ahol  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  formulák igazak.

Más szavakkal  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  formulahalmaz következménye  $\beta$ , ha  $\beta$  legalább akkor igaz, amikor  $\alpha_i$ -k igazak.

Jelölése:  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ .

### 6.4 Helyes következtetési sémák

**Definíció:** Azokat a következtetési sémákat tekintjük helyesnek, amelyekben a következmény valóban a feltételek következménye.

**Modus Ponens** Azt kell vizsgálnunk, hogy ahol  $\alpha$  és  $\alpha \rightarrow \beta$  igazak ott  $\beta$  is igaz-e. Ha igen, akkor helyes, ha nem, akkor helytelen a következtetési séma.

Csak az első interpretációban teljesül, hogy  $\alpha$  és  $\alpha \rightarrow \beta$  is igazak, és itt  $\beta$  is igaz, tehát a következtetési séma megfelelő.

**Tétel:** Az  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models \beta$  akkor és csak akkor, ha  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \models \beta$ .

**Bizonyítás:** Az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  együttesen akkor és csak akkor igaz, ha  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  igaz.

A fenti tétel miatt a  $\models$  jel bal oldalát jelöljük a továbbiakban egyszerű  $\alpha$ -val, ahol  $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ .

**Tétel:**  $\alpha \models \beta \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta$ .

**Bizonyítás:**

1. Lássuk be hogy ha  $\alpha \models \beta$ , akkor  $\alpha \rightarrow \beta$ .

Írjuk föl az igazságtáblázatot. A jelölt sort ez esetben nem lehet figyelembe venni, ugyanis akkor  $\alpha \models \beta$  nem teljesülne. A maradék sorokra pedig valóban az  $I$  az igazságérték.

	$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
	$I$	$I$	$I$
$\rightarrow$	$I$	$H$	$H$
	$H$	$I$	$I$
	$H$	$H$	$I$



2. Lássuk be, hogy ha  $\alpha \rightarrow \beta$ , akkor  $\alpha \models_1 \beta$ .

Ha  $\alpha \rightarrow \beta$ , akkor az igazságtáblában megjelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen  $I$  sorok. Ezekben a sorokban viszont  $\beta$  legalább akkor igaz, ha  $\alpha$  is igaz.

**Tétel:**  $\alpha \models_1 \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta$  kielégíthetetlen.

**Bizonyítás:** Az  $\alpha \models_1 \beta$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $\alpha \rightarrow \beta$  érvényes, vagyis  $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta)$  kielégíthetetlen. Ezt kifejezve:  $\neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ .

## 6.5 Ekvivalens formulák nulladrendben és elsőrendben

1.  $A \vee B \equiv B \vee A$ ,  $A \wedge B \equiv B \wedge A$ .
2.  $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ ,  $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ .
3.  $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ ,  $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ .
4.  $I \vee A \equiv I$ ,  $H \wedge A \equiv H$ .
5.  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ,  $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ .
6.  $A \vee \neg A \equiv I$ ,  $A \wedge \neg A \equiv H$ .
7.  $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ ,  $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ .
8.  $\neg\forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x)$ ,  $\neg\exists x \neg P(x) \equiv \forall x P(x)$ .
9.  $\forall x \forall y A(x, y, \dots) \equiv \forall y \forall x A(x, y, \dots)$ ,  $\exists x \exists y A(x, y, \dots) \equiv \exists y \exists x A(x, y, \dots)$ .
10.  $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ ,  $\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ .
11.  $\forall x \forall y (A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall y B(y)$ ,  $\exists x \exists y (A(x) \vee B(y)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$ .

## 6.6 Konjunktív normálforma

**Definíció:** Atomot, vagy annak tagadását literálnak hívjuk.

**Definíció:** A literálok diszjunkcióját klózoknak nevezzük.

**Definíció:** A klózok konjunkcióját konjunktív normálformának nevezzük.

**Tétel:** Minden formulához létezik vele ekvivalens konjunktív normálforma.

**Bizonyítás:**

1. Az implikáció felbontható:  $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ .
2. De Morgan azonosságok:
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ .
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ .
3. Disztributivitás:  $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ .

## 6.7 Prenex konjunktív normálforma

**A normálformára való átírás algoritmus:**

1. Logikai összekötőjelek átírása  $\neg, \wedge, \vee$ -ra.
2. A De Morgan szabályok alkalmazása, amíg a  $\neg$  hatásköre atomi formula nem lesz.
3. A változók standardizálása (kvantorok átnevezése).
4. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása, amíg a kvantorok a formula elejére nem kerülnek.
5. A kvantorok és az azokat közvetlenül követő változók sorrendjét meg kell tartani.
6. A formula konjunktív normálformára hozása a disztributív szabályok alkalmazásával.

## 6.8 Skólem normálforma

A  $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n$  formulát, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok szerepelnek, Skólem normálformának nevezzük.

**Tétel:** Minden elsőrendű formulához található olyan Skólem normálformában lévő formula, ami az eredeti formula logikai következménye.

**Skólemizálás folyamata:** A formula "Skólemizálásához" először átírjuk a formulát prenex formába, az előzőekben már ismertetett módon. Az egzisztenciális kvantorokat az ún. Skólem konstansok, illetve Skólem függvények segítségével kiküszöböljük.

Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a formulában, legyen ez  $\exists x_j$ . Ha a formula igaz, akkor az előtte álló  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$  változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az  $x_j$ -nek, melyre a formula még igaz. Ezt a tényt az  $f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}) = x_j$  függvénnyel fejezzük ki. Ha az első kvantor éppen egzisztenciális, akkor ez a függvény nulla változós, vagyis konstans.

Ez az  $f$  függvény formálisan megadja az  $x_j$  változó azon értékét, ami a formulát igazzá teszi. Ezt a formális függvényképzést végrehajtjuk a soron következő egzisztenciális kvantorra is. Addig folytatjuk, amíg minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk. Természetesen ügyelni kell arra, hogy a függvény szimbólumok különbözők legyenek.

Az így kapott formulák az eredeti formula logikai következményei. Azonban az átalakítás NEM ekvivalens, hiszen visszafelé nem jutunk el az eredeti formulához. A gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban ez elegendő, hiszen mi csak azt akarjuk eldönteni, lehetséges-e a formulát igazzá tenni, vagyis, más szavakkal: Kielégíthető-e a formula.

## 6.9 Rezolúció elve nulladrendben és elsőrendben

A rezolúcióhoz a formulát és a következmény tagadását Skólem normálformára alakítjuk. Nevezzük át a változókat úgy, hogy a változónevek különbözőek legyenek a klózokban. A rezolúció tehát csak akkor alkalmazható, ha az egységesítés elvégezhető. Ekkor pedig rezolúció alapelvét adó következtetési sémát alkalmazunk, és akár csak nulladrendben, elvégezzük a rezolúciót.

## 7 Gráfok

### 7.1 Élszám és fokszám összefüggése irányított és irányítatlan gráfokra

**Tétel:** (Handshake tétel): Minden gráf fokszáma az élszám kétszeresével egyenlő.

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy az  $e$  él az  $u$  és  $v$  csúcsokhoz illeszkedik, azaz  $u$  és  $v$  az él két végpontja. Ekkor ha

- Ha  $u \neq v$ , akkor az  $e$  élt  $\Phi(u)$ -nál, és  $\Phi(v)$ -nél is számoltuk.
- Ha pedig  $u = v$ , akkor az  $e$  él hurokél, és így  $\Phi(u)$ -nál számoltuk kétszer.

Tehát, ha a pontok foksámát összeadjuk, kapjuk az élek számának kétszeresét.

**Tétel:** Minden gráfban a páratlan foksámú csúcsok száma páros.

**Bizonyítás:** A handshake tételből következik, hogy a teljes gráf fokszáma páros. Ez csak akkor lehet, ha páros számú páratlan foksámú csúcs van.

**Tétel:** Az  $n$  csúcsú összefüggő, egyszerű gráf éleinek száma legalább  $n - 1$ .

**Bizonyítás:** Teljes indukcióval. Az  $n = 1$  esetre nyilván igaz. Tegyük fel, hogy valamely  $n > 1$ -re teljesül. Belátjuk, hogy ekkor minden  $n + 1$  csúcsú összefüggő gráfnak legalább  $n$  éle van. Legyen  $G$  egy  $n + 1$  csúcsú gráf, és legyen  $n$  éle. Ekkor létezik egy elsőfokú csúcs, ugyanis mivel  $G$  összefüggő, ezért izolált csúcsa nincs. Vegyük ezt az elsőfokú csúcsot, és a hozzátartozó élel együtt töröljük a gráfból. Ekkor  $n$  csúcsú összefüggő gráfot kapunk, aminek minimum  $n - 1$  éle van. Ekkor teljesül az indukciós feltevés. A törölt élt újra hozzáadva  $G$  egy  $n + 1$  csúcsú,  $n$  élű gráf lesz.

**Tétel:** Bármely egyszerű gráfban van két olyan pont, amelyek fokszáma egyenlő.

**Bizonyítás:** Egy  $n$  csúcsú gráfban a csúcsok lehetséges foksámjai:  $n = 0, 1, \dots, n - 1$ . Viszont a  $0$ , és az  $n - 1$  nem teljesülhet egyszerre, ezért a skatulya elv alapján kell lennie legalább két megegyező foksámú csúcsnak.

### 7.2 Kör létezésének szükséges feltételei irányítatlan gráfokra

**Tétel:** Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma legalább  $2$ , akkor a gráfban van kör.

**Bizonyítás:** Alkalmazzuk a leghosszabb út módszerét. Legyen  $L$  hosszúságú út a  $G$  gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja  $v$ . Tekintsük  $G$   $v$ -hez illeszkedő éleit. Ezek közül bármelyiknek a végpontja  $L$ -hez tartozik, különben  $L$  hossza  $1$ -nél nagyobb lenne, ami ellentmond azzal, hogy  $L$  a leghosszabb út. Ha  $G$  minden pontjának fokszáma legalább  $2$ , akkor illeszkedik a  $v$ -hez egy  $e$  él is. Ha  $e$  hurokél, akkor ez  $G$  egy körét kijelöli. Ha nem hurokél, akkor  $u$ -nak  $v$ -től különböző  $w$  végpontja  $L$ -ben van, tehát  $L$ -nek  $v$  és  $w$  pontokat összekötő  $e$  élel együtt  $G$  körét adják.

**Tétel:** Ha egy  $n$  csúcsú gráfnak legalább  $n$  éle van, akkor van benne kör.

**Bizonyítás:** Teljes indukcióval.  $n = 1$ -re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy valamilyen  $n > 1$ -re minden  $n$  csúcsú, legalább  $n$  élű gráfban van kör. Legyen  $G$  egy  $n + 1$  csúcsú, legalább  $n + 1$  élű gráf. Visszatérve a bizonyításra, vegyük  $G$  egy  $L$  leghosszabb útját. Ha  $L$  valamelyik végpontja  $G$ -nek nem elsőfokú csúcsai, akkor az előzőek szerint  $G$ -ben van kör. Ellenkező esetben töröljük  $G$  elsőfokú csúcsát az élel együtt. Ekkor egy  $n$  csúcsú, legalább  $n$  élű gráfot kapunk, tehát az indukciós feltevés miatt tartalmaz kört, amit  $G$  is tartalmaz.

### 7.3 Részgráfok

**Definíció:**  $R$  részgráfja  $G$ -nek, ha  $R$  előállítható a  $G$ -ből csúcsok és élek elhagyásával.

## 7.4 Izomorfia fogalma, felismerése, megadása

**Definíció:** Két gráf izomorf, ha egyik csúcsai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másik pontjainak és éleinek.

**Definíció:** Legyenek  $G = (V, E)$ , és  $G' = (V', E')$  homeomorf gráfok, ha  $\exists f : V \rightarrow V'$  függvény, melyre  $\{u, v\} \in E$  esetén  $\{f(u), f(v)\} \in E'$ , mindezt úgy, hogy ha két csúcs szomszédos a  $G$ -ben, akkor  $G'$ -ben is szomszédos.

## 7.5 Gráfbejárások

Adott gráfban keresünk szisztematikusan adott tulajdonságú (pl. címkéjű) csúcsot. A szisztéma sokféle lehet, a két alap a szélességi és a mélységi keresés.

### 7.5.1 Szélességi bejárás

**Algoritmus:** Meglátogatjuk az első csúcsot, majd ennek a csúcsnak az összes szomszédját. Aztán a szomszédok összes olyan szomszédját, ahol még nem jártunk, és így tovább. Berakjuk az épp meglátogatott csúcsot, hogy majd a megfelelő időben a szomszédjaira is sort keríthessünk.

Általános lépés: vesszük a sor elején levő  $x$  csúcsot, töröljük a sorból, meglátogatjuk azokat az  $y$  szomszédait, amelyeket eddig még nem láttunk, majd ezeket az  $y$  csúcsokat a sor végére tesszük.

### 7.5.2 Mélységi bejárás

Tetszés szerinti csúcstól elindulva egy úton addig megyünk "mélyre", ameddig lehet: vagy nincsen további szomszédos csúcs, vagy már jártunk ott. Ha így megakadunk, akkor visszalépünk (backtrack) az előző csúcshoz, ha onnan tudunk továbbmenni, akkor megint elindulunk, és a lehető legmélyebbre megyünk, ha nem, akkor visszalépünk.

## 7.6 Euler kör, út

**Definíció:** A  $G$  gráf Euler-köre egy olyan zárt élsorozat, mely  $G$  összes élét pontosan egyszer érinti. Euler-útról akkor beszélünk, ha az élsorozat nem feltétlenül zárt.

**Tétel:** Egy összefüggő  $G$  gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha minden csúcsának fokszáma páros.

**Bizonyítás:** Először belátjuk, hogy ha a gráf tartalmaz Euler-kört, akkor minden csúcsának fokszáma páros.

Ha a gráfot az Euler-köre mentén járjuk be, akkor minden csúcsba pontosan annyszor haladunk be, mint ahányszor kihaladunk belőle. Ezért nyilvánvalóan a bemenések és kijövetek csúcsonkénti száma páros, mely éppen a csúcsok fokszámát adja.

Másodszor bizonyítandó, hogy ha minden pont fokszáma páros, akkor valóban tartalmaz Euler-kört. Ezt  $G$  pontszámára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

A legkisebb pontszámú, minden csúcsában páros fokszámú gráf a három pontú teljes gráf (háromszög). Ebben van Euler-kör. Tegyük fel, hogy minden  $k < |V(G)|$  esetén igaz az állítás.

Induljunk el  $G$  egyik csúcsából, és haladjunk úgy az élek mentén, hogy egyiken sem megyünk át egynél többször. Ha elakadunk, vagyis az egyik csúcsból már nem vezet ki él, akkor az biztosan a kiindulási csúcs a páros fokszáma miatt. Ekkor kaptunk egy zárt élsorozatot. Legyen  $F$  egy olyan zárt élsorozat  $G$ -ben, melyben a lehető legtöbb él szerepel. A fenti eljárásban azért álltunk meg, mert a kezdőpontból nem indult ki újabb él, tehát az ebből a pontból kiinduló összes él  $F$ -ben van. Ha  $F$   $G$ -nek Euler-köre, akkor készen vagyunk.

Amennyiben  $F$  nem Euler-köre -nek, akkor vizsgáljuk  $G$ -nek azt a részgráfját, mely pontosan azokat az éleket tartalmazza, amelyeket  $F$  nem tartalmaz. Ennek a részgráfnak kevesebb csúcsa van, mint  $G$ -nek, hiszen nem tartalmazza azt a csúcsot, amely a fenti eljárásban a kiindulópont volt. Az indukciós feltevés miatt ennek a részgráfnak minden komponensében található Euler-kör. Ennek a részgráfnak valamely komponense tartalmaz egy olyan pontot, mely  $F$ -ben is szerepel. Ha ugyanis nem lenne közös pontjuk, akkor  $G$  nem lenne összefüggő. Az előbb említett komponens Euler-körét járjuk be a közös pontból elindulva, majd járjuk be  $F$ -et. Ekkor egy  $F$ -nél nagyobb élszámú zárt élsorozatot kapunk. Ez azonban ellentmond a feltevésünknek, tehát Euler-kör.

**Tétel:** (Szükséges és elégséges feltétel Euler-út létezésére): Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor tartalmaz Euler utt, ha a páratlan fokszerű csűcsok száma 0, vagy 2.

**Bizonyítás:** Az előző tétel alapján 0 páratlan fokszerű csűcs esetén Euler-kört kapunk, ami egyben Euler-út is. Ha 2 páratlan fokú él van, akkor ezeket összekötve egy Euler-kört kapunk. Ezt az élt elhagyva egy olyan élsorozatot kapunk, melynek kezdő és végpontja a két páratlan fokszerű csűcs.

**Tétel:** (Szükséges és elégséges feltétel irányított gráfokra) Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-kör, ha minden csűcsnál a bemenő és kimenő élek száma megegyezik. Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-út, ha van benne Euler-kör, vagy ha két csűcs kivételével a bemenő és kimenő élek száma minden csűcsban megegyezik, a kivételeknél pedig az egyik (kiindulási) csűcsban a kimenő élek száma eggyel több, a másik (érkezési) csűcsban pedig a bemenő élek száma több eggyel.

**Bizonyítás:** A fenti gondolatmenet alapján belátható a tétel állítása.

### 7.6.1 Hamilton kör, út

**Definíció:** Egy  $P$  kör egy  $G = (V, E)$  gráfban Hamilton-kör, ha  $P$  a  $V$  összes elemét pontosan egyszer tartalmazza. Hamilton-útról akkor beszélünk, ha  $P$  kör helyett út.

**Tétel:** (Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére) Ha egy gráfban  $k$  pontot elhagyva  $k$ -nál több komponens keletkezik, akkor nem tartalmazhat Hamilton-kört.

**Bizonyítás:** Indirekt módon. Tegyük fel, hogy van a gráfban Hamilton-kör, legyen ez  $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$  és legyen  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$  az a  $k$  pont, melyet elhagyva a gráf több, mint  $k$  komponensre esik szét. Vegyük észre azonban, hogy az elhagyott pontok közötti "ívek" biztosan összefüggő komponenseket alkotnak. Pl.: a  $(v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, \dots, v_{i_2-1})$  ív is biztosan összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti Hamilton-kör egy éle fut. Mivel éppen  $k$  ilyen ívet kapunk, nem lehet több komponens  $k$ -nál. Kevesebb lehet, hiszen különböző ívek között futhatnak élek.

**Tétel:** (Ore tétel) Ha  $G$  gráfra teljesül, hogy két nem szomszédos  $u, v$  csűcsok fokszerűségének összege nagyobb a  $G$  gráf csűcsainak számánál, akkor  $G$ -nek Hamilton-köre van.

**Bizonyítás:** Tegyük fel indirekt módon, hogy a gráf kielégíti a feltételt, de nincsen benne Hamilton-kör. Ez az ellenpélda gráfunk legyen  $G'$ . Húzzunk be  $G'$ -be további éleket úgy, hogy az új gráf is ellenpélda legyen (továbbra sincs benne Hamiltonkör). Így kapunk egy  $G$  gráfot, ami továbbra is ellenpélda, hisz új élek behúzása- val "rossz pontpárt" nem lehet létrehozni, de ha még egy élet akárhogy behú- zunk, akkor már tartalmaz a gráf Hamilton-kört. Biztosan van két olyan pont, hogy  $\{x, y\} \notin E(G)$ , hiszen egy  $n$  csűcsú teljes gráfban ( $n \geq 3$  esetén) van Hamilton-kör. Ekkor viszont a  $G \cup \{x, y\}$  gráfban van Hamilton-kör, tehát  $G$ -ben van Hamilton-út. ( $n = 2$  esetén is van Hamilton-út,  $n = 1$  esetén pedig a gráfunk egy izolált pont, nincs éle, nincs benne Hamilton-kör). Legyenek  $P$  a Hamilton-út csűcsai:  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , és  $v_1 = x$  és  $v_2 = y$ . Ha  $x$  szomszédos a  $P$  út valamely  $v_i$  pontjával, akkor  $y$  nem lehet összekötve  $v_{i-1}$ -gyel, mert ez esetben  $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_i, v_1)$  egy Hamilton-kör lenne. Így tehát  $y$  nem lehet összekötve legalább  $d(x)$  darab ponttal, ezért

$$d(y) \leq n - 1 - d(x)$$

$$d(y) + d(x) \leq n - 1$$

ami viszont ellentmondás, hiszen  $d(y) + d(x) \geq n$  volt feltéve.

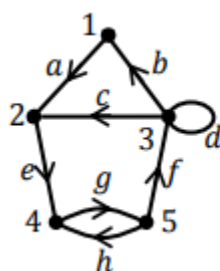
**Tétel:** (Dirac tétele) Ha az  $n = 2k$  csűcsszűmű gráfnak van olyan csűcsa, amely legalább  $k$  fokú, akkor van  $G$ -nek Hamilton köre.

**Bizonyítás:** A Dirac tétel az Ore tételnél erősebb feltételt fogalmaz meg, mivel ha minden pont foksűműje legalább  $\frac{|V(G)|}{2}$ , akkor teljesül az Ore tétel feltétele.

### 7.7 Dijkstra algoritmusa minimális út kérésére

**Algoritmus:** Választunk egy kiindulási csúcsot. Mindegyik csúcshoz rendeljük hozzá azt, hogy mekkora volt az élsúlyok összege, amik mentén a csúcsba eljutottunk. Kezdetben mindegyik végtelen. Válasszuk a kiindulási csúcsunkhoz illeszkedő éleket, és az élek másik végén lévő csúcsokhoz rendeljük hozzá az élsúlyok összegét, amin eljutunk a csúcsba. Ezt követően minden lépésben a legkisebb összegű csúcsból indulunk ki, és nézzük meg a többi csúcsba vezető élek súlyösszegét. Ha ez kevesebb, mint az adott csúcshoz hozzárendelt érték, akkor erre módosítjuk, ha nagyobb, akkor változatlanul hagyjuk. Végül, ha már nem találunk semelyik csúcsba vezető éleket, végeztünk.

### 7.8 Irányított és irányítatlan gráfok mátrixai



Szomszédsági mátrix

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0
3	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	1	1	0

Illeszkedési mátrix (nem irányított)

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1	1	1

## 8 Síkgráfok és színezésük

**Definíció:** Egy gráf síkba rajzolható gráf, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást. Ezt az így lerajzol gráfot síkgráfnak nevezzük.

### 8.1 Euler poliéder tétele

**Tétel:** A  $G$  összefüggő, egyszerű síkgráf esetén, ahol  $p$  a csúcsok,  $e$  az élek, és  $t$  a  $G$  gráf által létrehozott területek száma, a végtelen területet is számítva, akkor  $p - e + t = 2$ .

**Bizonyítás:** Rajzoljuk le lépésenként az adott gráfot:

1. 1 csúcsra igaz az állítás:  $1 - 0 + 1 = 2$ .
2. 2 csúcsra és egy élre igaz az állítás:  $2 - 1 + 1 = 2$ .

Tegyük fel, hogy  $(n - 1)$  esetre igazoltuk a formulát. A következő lépés két féle lehet:

1. Egy új csúcs és egy új él hozzáadása.  
Ekkor mivel az egyenlethez hozzáadnánk és levonnánk egyet, ezért a formula teljesül.
2. Két csúcs között egy új élet húzunk.  
Ekkor az új éllel létrehozok egy új területet is, tehát hasonlóan az előzőhöz, az egyenlethez hozzáadva, majd levonva egyet, az eredeti értéket kapjuk vissza

#### 8.1.1 Következményei

**Következmény:** Ha  $G$  összefüggő, egyszerű síkgráf csúcsainak száma legalább 3, akkor  $e \leq 3p - 6$ .

**Bizonyítás:** Mivel  $G$  egyszerű gráf, ezért minden területet legalább 3 él határol. A területeket határoló éleket összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden területet határoló él két területhez tartozik. Ekkor felírható, hogy  $2e \geq 3t$ , hiszen ha mindegyik terület háromszög lenne, akkor lenne a fokszáma 3. Így  $t \leq \frac{2}{3}e$ . Ebből kifejezve az Euler poliéder tételt:

$$e = p + t - 2 \leq p + \frac{2}{3}e - 2.$$

Ebből következik az állítás.

**Következmény:** Ha  $G$  összefüggő, síkba rajzolható, egyszerű gráf, akkor a minimális fokszáma legfeljebb 5.

**Bizonyítás:** Indirekt módon tegyük fel, hogy a minimális fokszám 6. A fokszámsok összege az élek kétszerese (handshake tétel), így tudhatjuk, hogy  $6n \leq 2e$ . ugyanakkor az előző következmény alapján:  $e \leq 3p - 6$ , tehát  $2e \leq 6n - 12 \leq 6n$ , ami viszont ellentmondás.

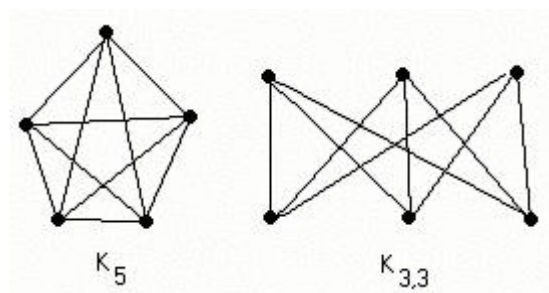
**Következmény:** Ha  $G$  összefüggő, síkba rajzolható, egyszerű gráf csúcsainak száma legalább 3, és nincs 3 hosszú köre, akkor  $e \leq 2p - 4$ .

**Bizonyítás:** A feltételek miatt most a területek fokszáma legalább 4, így  $2e \geq 4t$ , amiből  $t \leq \frac{1}{2}e$ . Az Euler poliéder tételbe visszahelyettesítve kapjuk:

$$e = p + t - 2 \leq p + \frac{1}{2}e - 2.$$

Ebből következik az állítás.

## 8.2 Kuratowski-gráfok



## 8.3 Kuratowski tétele

**Tétel:** A  $G$  gráf síkba rajzolható, ha nem tartalmaz  $K_5$ -el, illetve  $K_{3,3}$ -al izomorf, vagy homeomorf részgráfot.

**Bizonyítás:** Az esetek az Euler tétel következményei miatt megoldódnak.

## 8.4 Fáry-Wagner tétele

**Tétel:** Ha  $G$  síkba rajzolható gráf, akkor lerajzolható a síkba úgy is, hogy minden éle egyenes szakasz.

## 8.5 Síkba rajzolható gráfok és gömbre rajzolható gráfok

**Tétel:** A  $G$  gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható, ha gömbre rajzolható.

**Bizonyítás:** Sztereografikus projekció (bijekció) révén konstruktívan, az adott gráfot a gömbről a síkra vetítve bizonyítható.

## 8.6 Színezés fogalma, alkalmazásai

**Definíció:** A  $\chi(G)$  a  $G$  gráf kromatikus száma, vagyis az a szám, amely megmutatja, legkevesebb hány szín kell a gráf csúcsainak olyan kiszínezéséhez, hogy a szomszédos csúcsok más színűek legyenek.

**Definíció:** Egy egyszerű gráf  $n$ -színezhető, ha minden csúcsához hozzárendelhető úgy egy szín hogy két szomszédos csúcsra rendelt szín különböző.

## 8.7 4-szín tétel

**Tétel:** Minden térkép kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy a szomszédos területek más színűek legyenek.

## 8.8 5-szín tétel

**Tétel:** Minden térkép kiszínezhető 5 színnel úgy, hogy a szomszédos területek más színűek legyenek.

**Bizonyítás:** Teljes indukcióval. Ha a  $G$  gráfnak maximum 5 csúcsa van. Ekkor nyilván teljesül.

Tegyük fel, hogy  $n > 5$  csúcsú gráf színezhető 5 színnel.

$(n + 1)$ -re: Ekkor az élek száma:  $e \leq 3n - 6$ , azaz lesz olyan csúcsa, amelynek fokszáma max 5.

- Ha  $x$  foka 4, akkor  $x$ -t elhagyva, teljesül az indukciós feltevés, tehát a kapott gráf színezhető 5 színnel. Visszarakva az  $x$ -t mivel 4 fokú, ezért biztosan van olyan szín, amit a szomszédokon még nem használtunk föl, tehát az eredeti gráf színezhető 5 színnel.
- Ha  $x$  foka 5, akkor a szomszédainak a foka nem lehet 5, mert a  $K_5$  nem síkba rajzolható, ezért lesz legalább egy olyan szín, amit két szomszédján is használhatunk. Az előző ponthoz analóg módon bizonyítjuk, hogy 5 színnel színezhető:



- Legyen  $z, y$  az  $x$  olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk össze egy ponttá, hagyjuk el  $x$ -et. Az ind. feltevés miatt a maradék kiszínezhető 5 színnel. Visszavéve és szétszedve  $x$ - $y$ - $z$  csúcsokat, ezek kiszínezhetők max 3 színnel, hiszen  $x$ -nek összesen 5 szomszédja van, az  $y$  és  $z$ -kívüli csúcsok 3 színt lefoglalnak, de  $y$  és  $z$  egyszínű (nem szomszédok), marad egy szín  $x$ -nek.

## 9 Fák

### 9.1 Fa ekvivalens definíciói

**Definíció:** Ha egy gráf összefüggő, és nincs benne kör, akkor azt fagráfnak hívjuk.

**Tétel:** Az  $n$  csúcsú,  $n - 1$  élű gráfok fagráfok.

**Bizonyítás:** Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ekkor ha eltöröljük a kör egyik élét, egy összefüggő,  $n$  csúcsú,  $n - 2$  élű gráfot kapnánk, ami ellentmondás. Be kell még látnunk, hogy ha egy összefüggő gráf valamely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk. Tegyük fel ehhez, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük a  $G$  gráf  $K$  körének  $(u, v)$  élét. A  $G$  gráfban viszont még mindig eljuthatunk  $u$ -ból  $v$ -be, ha a  $K$  kör megmaradt élein keresztül, tehát a törlés után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a  $G$  gráf összefüggő.

**Tétel:** Az  $n$  csúcsú fagráf énszáma  $n - 1$ .

**Bizonyítás:** Tudjuk, hogy minden  $n$  csúcsú, összefüggő gráfnak legalább  $n - 1$  éle van, valamint ha egy  $n$  csúcsú, összefüggő gráfban legalább  $n$  él van, akkor van benne kör. Ezért mivel a fa körmentes, összefüggő gráf, pontosan  $n - 1$  éle kell, hogy legyen.

### 9.2 Prüfer kód

A Prüfer kód fák tárolására alkalmas. A fa csúcsát  $k = 1, 2, \dots, n$  számokkal tetszőlegesen címkézzük. A Prüfer kód alkalmazásához tudjuk, hogy minden legalább két csúcsú fában van legalább két csúcs, amelyek fokszáma 1.

**Algoritmus:** Kiindulásként meg van adva egy fa (ábrával, mátrixszal stb.) Első lépésként sorszámozzuk a csúcsokat 1-től  $n$ -ig. A következő lépésben megkeressük a legkisebb sorszámú csúcsot a (maradék) fán. Hagyjuk el ezt a csúcsot a rá illeszkedő éllel együtt, és fűzzük a lista végéhez az él másik végén található csúcs sorszámát. Ezt a lépést addig ismételve, míg a fából csak egy csúcs marad, kapjuk a Prüfer kódot.

### 9.3 Feszítőfák keresésére vonatkozó algoritmusok: Prim, Kurskal

**Definíció:** Egy gráf minden csúcsát tartalmazó fát a gráf feszítőfájának nevezzük.

**Tétel:** Minden (összefüggő) gráfnak van feszítőfája.

**Bizonyítás:** Legyen  $G$  a gráf, melyben feszítőfát keresünk. Ha  $G$  fa, akkor készen vagyunk. Ha  $G$  nem fa, vagyis tartalmaz kört, akkor minden körből egy élt elhagyva fához jutunk.

**Tétel:** (Caeley tétel) Feszítőfák száma  $n$  csúcsú teljes gráfban  $n^{n-2}$ .

**Bizonyítás:** Prüfer kód segítségével,  $n - 2$  hosszú különböző sztringek száma  $n$  számjegy ismételt felhasználása esetén  $n^{n-2}$ .

**Minimális feszítőfa keresése** A probléma lényege, hogy egy élsúlyozott összefüggő egyszerű gráfban keressük a legkisebb élsúlyösszegű feszítőfát.

**Algoritmus:** (Prim algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Az ebből kiinduló élek közül a legkisebb súlyú mentén választjuk a következő csúcsot. A legkisebb súlyú élhez fűzzük a rá illeszkedő legkisebb súlyú élet, ha az nem alkot kört az eddig vizsgált élekkel. Ha már van  $n - 1$  él, akkor készen vagyunk.

**Algoritmus:** (Kruskal algoritmus) Az éleket súlyuk szerint növekvő sorrendbe rendezzük. A legkisebbtől kezdve vesszük őket (nem feltétlenül illeszkedően) úgy, hogy ne képezzenek kört. Ha már van  $n - 1$  él, akkor készen vagyunk.

## 9.4 Fabejárások: pre-,in-,post-order

Megkülönböztetünk egy csúcsot, ezt gyökérnek nevezzük. A gyökér őse (szülője) a szomszédos csúcsainak, és ezek a csúcsok az ősök (szülők) utódai (gyerekei). Az az utód, aki nem szülő, a fa levele. A fában egy út nevezhető "ág"-nak is.

**Definíció:** Ha egy fában minden csúcsnak legfeljebb két gyereke van, akkor a fát bináris fának nevezzük.

**Algoritmus:** Preorder bejárás: azaz a gyökér elem majd a bal oldali részfa preorder bejárása, végül a jobboldali részfa preorder bejárása.

**Algoritmus:** Inorder bejárás: azaz először a bal részfa inorder bejárása, majd a gyökérelem, végül a jobboldali részfa inorder bejárása.

**Algoritmus:** Postorder bejárás: azaz először a bal részfa posztorder bejárása, majd a jobboldali részfa posztorder bejárása, végül a gyökérelem feldolgozása.

## 10 Hálózati folyamok

### 10.1 Hálózat

**Definíció:** Adott  $G = (N, E)$  irányított gráf, és ennek kettő különböző pontja  $s$  és  $t$ , melyeket forrásnak és nyelőnek neveziünk (a forrásból csak kifelé, a nyelőbe csak befelé jönnek élek). Adott továbbá az éleken értelmezett  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , nemnegatív értékű kapacitásfüggvény.

Ekkor a  $G = (N, E)$  gráfot a  $c$  függvénnyel együtt  $(G, c)$  hálózatnak nevezzük.

### 10.2 Folyam

**Definíció:** Az  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt folyamnak nevezzük, ha teljesülnek rá:

$$f(n_1, n_2) = -f(n_2, n_1), \quad \forall (n_1, n_2) \in E, n_1, n_2 \in N.$$

$$f(n_1, n_2) \leq c(n_1, n_2), \quad \forall (n_1, n_2) \in E.$$

### 10.3 Vágás

Legyen  $H = (G, c)$  hálózat,  $s$  forrás és  $t$  nyelő és legyen adott  $N_1, N_2$  az  $N$  partíciója. Legyen továbbá  $s \in N_1, t \in N_2$ . Ekkor az  $N_1, N_2$  halmazt  $s, t$  vágásának hívjuk. Az  $N_1, N_2$  kapacitásán a

$$c(N_1, N_2) = \sum_{n_i \in N_1, n_j \in N_2} c(n_i, n_j)$$

számot értjük.

### 10.4 Javító út

**Definíció:** Adott  $H = (G, c)$  háló  $s$  forrással, és  $t$  nyelővel. Jelölje  $r : E \rightarrow \mathbb{R}$  a maradék.kapacitás függvény, amely  $\forall n_1, n_2 \in N$  esetén  $r(n_1, n_2) = c(n_1, n_2) - f(n_1, n_2)$ . Az  $f$  folyamhoz tartozó javító gráf a  $G_f = (N, E_f)$ , az élein értelmezett maradék-kapacitás függvénnyel, ahol  $E_f = \{(n_1, n_2) | n_1, n_2 \in N, r(n_1, n_2) > 0\}$ .

A  $G_f$  belí irányított  $s, t$  utakat javító utaknak nevezzük.

### 10.5 Ford-Fulkerson tétel

**Tétel:** Ha  $s \in N_0$  és  $t \in N \setminus N_0$ , akkor a folyam akkor és csak akkor maximális, ha nincsen javítóút.

**Bizonyítás:** Ha a folyam maximális, nem létezhet javítóút, mert akkor azt használva a folyam értéke növelhető lenne.

Ha nincsen javító út, akkor a folyam maximális. Ennek belátásához tekintsük azokat a csúcsokat, ahová még nem vezet javító út, legyen ezek halmaza  $N_0$  és  $s$  is kerüljön ebbe a halmazba. Tekintsük az  $(N_0, N \setminus N_0)$  vágást. Tekintsük azokat az  $i \rightarrow j$  előremutató éleket, melyek  $N_0$ -ból  $N \setminus N_0$ -ba mutatnak. Ezeknek a folyamértéke egyenlő a kapacitásukkal, különben  $j$  is  $N_0$ -hoz tartozna. Ehhez hasonló hátramutató  $j \rightarrow i$  éleken a folyam 0.

**Tétel:** (Ford-Fulkerson tétel) Legyen  $H = (G, c)$  hálózat. Ekkor a maximális folyamérték egyenlő a minimális vágással.

**Bizonyítás:** Az előző tételnél láttuk, hogy a maximális folyam egyenlő egy alkalmas vágás kapacitásával. Másrészt azt is bizonyítottuk, hogy bármely folyam nem lehet nagyobb bármely vágás kapacitásánál. Ezért az előző tétel bizonyításában szereplő  $(N_0, N \setminus N_0)$  vágás minimális vágás kell legyen.