PPKE ITK ● 2013/14/2. tanulmányi időszak

LINEÁRIS ALGEBRA II.

ÍRÁSBELI VIZSGA

2014. május 27.

PÁZMÁNY PÉTER KATOLIKUS EGYETEM

INFORMÁCIÓS TECHNOLÓGIAI ÉS BIONIKAI KAR

Fontos tudnivalók

Tisztelt Vizsgázó!

Jelen füzet a 2013/14/2. tanulmányi időszak, vizsgaidőszakának Lineáris algebra II. írásbeli (és szóbeli) vizsgájához lett kiadva. A füzet tartalmazza az intézmény által nyilvánosságra hozott vizsgainformációkat, valamint a tárgy témaköreinek kidolgozott formáját is.

A füzetben mindemellett megtalálható a Lineáris algebra II. vizsga menetének leírása, a pontszámítás módja, és egyéb fontos tudnivalók.

A kiadványban bárhol, de különösen a kidolgozott témakörökben előfordulhatnak hiányosságok, bővebb magyarázatra szoruló részek. Az ezek kiegészítése illetve jegyzetelés, feladatmegoldás céljából a kidolgozott tételeket a füzetben jegyzetoldalak követik.

Eredményes felkészülést kívánunk!

A kiadványt összeállította:
Naszlady Márton Bese – 2014

Tartalomjegyzék

Témakörök

Mátrixok egyéb tulajdonságai

Mátrixok sajátértéke, nyoma és determinánsa közti összefüggés

Definíció Az $\boldsymbol{A}$ $n \times n$-es mátrix *nyoma* a főátlóbeli elemek összege:

$$\operatorname{trace}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Állítás *Az $\boldsymbol{A}$ $n \times n$-es mátrix sajátértékeinek összege egyenlő a főátlóbeli elemek összegével: $trace(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$*

Bizonyítás Algebrailag megoldva a feladatot egy 2×2-es mátrixra. A sajátértékek ismeretében a karakterisztikus polinom:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Egy tetszőleges mátrix esetén a karakterisztikus polinomot a mátrix elemeiből kifejezve:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix}\right) = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb =$$

$$= ad - d\lambda - a\lambda + \lambda^2 - cb = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb)$$

A két fölírásból látszik, hogy $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$, így az állítás beigazolódott. ■

Következmény

Állítás *Az A $n \times n$-es mátrix sajátértékeinek szorzata egyenlő a mátrix determinánsának értékével:* $\det(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Bizonyítás Az előző állítás bizonyításában az $(ad - cb) = \lambda_1\lambda_2$ egyenlőség is beigazolódott, így ebből a második állítás is következik. ■

Mátrix rangja, egyenletrendszer megoldhatósága

Definíció Vektorrendszer *rangján* a vektorok által generált altér dimenzióját értjük. Mátrix sorrangján a sorvektorok rangját, mátrix oszloprangján az oszlopvektorok rangját, determináns rangján pedig a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nem nulla determináns méretét értjük.

Tétel *Ugyanazon mátrix sor-, oszlop-, és determinánsrangja megegyezik.*

Tétel *Az $\boldsymbol{A}$ $n \times n$-es mátrix akkor és csak akkor reguláris (van inverze), ha rangja n.*

Bizonyítás Ha $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = n$, akkor nem nulla determinánsának mérete $n \times n$. Ekkor az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

Ha $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) < n$, akkor az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ egyenletnek van triviálistól különböző megoldása. ■

Tétel *Ha $\boldsymbol{A}$ $m \times n$-es mátrix, akkor az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha* $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rang}([\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}])$, *vagyis az együtthatómátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával.*

Bizonyítás Az egyenletrendszert a következő alakban írjuk: $x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + x_k\boldsymbol{a_k} = \boldsymbol{b}$.

Ha a rangok egyenlők, az egyenletrendszer megoldható:

Ha $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rang}([\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]) = r$, akkor bármely $r+1$ darab oszlopvektor összefüggő. Legyenek $\boldsymbol{A}$ független oszlopvektorai $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \dots \boldsymbol{a_r}$. Ezekhez $\boldsymbol{b}$-t hozzávéve összefüggő rendszert kapunk. Mivel $\boldsymbol{b}$ vektor hozzáadásával vált összefüggővé a rendszer, ezért $\boldsymbol{b}$ kifejezhető az $\boldsymbol{a_i}$-k lineáris kombinációjával, amelyben a skalár együttható x_i-k az egyenletrendszer megoldásai, vagyis:

$$b = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k$$

Ha az egyenletrendszer megoldható, a rangok egyenlők:

Legyen egy megoldás $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + x_k\boldsymbol{a_k}$, és $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = r$. Azt kell belátni, hogy $\mathrm{rang}([\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]) = r$, vagyis hogy van r darab lineárisan független oszlopa, de $r+1$ már összefügg. Előbbi az $\boldsymbol{A}$ rangjából következik, utóbbi pedig kétféle módon lehetséges. Ha $r+1$ vektor mindegyike $\boldsymbol{a}$ vektorokból áll, akkor $\boldsymbol{A}$ rangja miatt összefüggők. Ha az $r+1$ vektor közül valamelyik $\boldsymbol{b}$ vektor, akkor két eset van:

- az r darab $\boldsymbol{a_i}$ vektor összefüggő; ekkor $\boldsymbol{b}$-t hozzávéve is összefüggő marad, vagyis rangja nem változik meg
- az r darab $\boldsymbol{a_i}$ vektor lineárisan független. Ekkor bármely más $\boldsymbol{a_j}$-t hozzávéve összefüggő lesz, különben $\boldsymbol{A}$ rangja $r+1$ kellene legyen. A hozzávett $\boldsymbol{a_j}$-k azonban az ismert tétel szerint kifejezhetők az eredeti $\boldsymbol{a_i}$ vektorokkal. Ezeket $\boldsymbol{b}$ előállításába helyettesítve azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{b}$ kifejezhető az r darab $\boldsymbol{a_i}$ lineárisan független vektorokkal, tehát az r darab $\boldsymbol{a_i}$ vektorok és $\boldsymbol{b}$ vektor lineárisan összefüggnek, ezért a rang nem változik. ∎

Cayley-Hamilton tétel

Tétel *Minden négyzetes mátrix gyöke saját karakterisztikus polinomjának.*

Bizonyítás Fölhasználva azt, hogy egy mátrixot az adjungáltjával megszorozva olyan diagonális mátrixot kapunk, amelyben a főátlóbeli elemek a mátrix determinánsai:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{adj}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{E}$$

A fenti egyenletben a polinomokat átírva formális alakra:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) \cdot (\boldsymbol{M_{n-1}}\lambda^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{M_2}\lambda^2 + \boldsymbol{M_1}\lambda + \boldsymbol{M_0}) = (\alpha_n\lambda^n + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha) \cdot E$$

A baloldalon álló polinomot átírva úgy, hogy a benne lévő mátrixokat az $n = 3$ esetre vizsgálva egy nagy mátrixba összefoglaljuk, a következőt kapjuk:

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{bmatrix} b_{11}\lambda^2 + c_{11}\lambda + d_{11} & b_{12}\lambda^2 + c_{12}\lambda + d_{12} & b_{13}\lambda^2 + c_{13}\lambda + d_{13} \\ b_{21}\lambda^2 + c_{21}\lambda + d_{21} & b_{22}\lambda^2 + c_{22}\lambda + d_{22} & b_{23}\lambda^2 + c_{23}\lambda + d_{23} \\ b_{31}\lambda^2 + c_{31}\lambda + d_{31} & b_{32}\lambda^2 + c_{32}\lambda + d_{32} & b_{33}\lambda^2 + c_{33}\lambda + d_{33} \end{bmatrix}$$

melyből kifejezve $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ és $\boldsymbol{D}$ mátrixokat:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Így ezekkel a mátrixokkal: $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{B}\lambda^2 + \boldsymbol{C}\lambda + \boldsymbol{D}$

Ezt alkalmazva $n \times n$-es mátrixokra $(M_k)_{ij} = m_{ijk}$.

A fenti egyenlet tehát írható a következő alakban:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \cdot (\boldsymbol{M_{n-1}} \lambda^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{M_1} \lambda + \boldsymbol{M_0}) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{E}$$

A baloldali szorzást elvégezve:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_{n-1}} \lambda^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_1} \lambda + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_0} - \lambda \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{M_{n-1}} \lambda^{n-1} - \cdots - \lambda \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{M_1} \lambda - \lambda \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{M_0} =$$
$$= -\boldsymbol{M_{n-1}} \lambda^n + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_{n-1}} \lambda^{n-1} - \boldsymbol{M_{n-2}} \lambda^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_0} = (\alpha_n \lambda^n + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) \cdot \boldsymbol{E}$$

Ezzel egy olyan egyenlőséghez jutottunk, melynek mindkét oldalán λ különböző együtthatós polinomokban van fölírva. Mivel két (mátrix)polinom akkor és csak akkor egyenlő egymással, hogyha az együtthatók megegyeznek, ezért fölírható a következő egyenletrendszer:

$$\left\{\begin{array}{rrll}
\lambda^n: & -\boldsymbol{M_{n-1}} & = \alpha_n \cdot \boldsymbol{E} & /\cdot \boldsymbol{A^n} \\
\lambda^{n-1}: & \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_{n-1}} - \boldsymbol{M_{n-2}} & = \alpha_{n-1} \cdot \boldsymbol{E} & /\cdot \boldsymbol{A^{n-1}} \\
\lambda^{n-2}: & \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_{n-2}} - \boldsymbol{M_{n-3}} & = \alpha_{n-2} \cdot \boldsymbol{E} & /\cdot \boldsymbol{A^{n-2}} \\
 & & \vdots & \vdots \\
\lambda: & \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_1} - \boldsymbol{M_0} & = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{E} & /\cdot \boldsymbol{A^1} = \boldsymbol{A} \\
1: & \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M_0} & = \alpha_0 \cdot \boldsymbol{E} & /\cdot \boldsymbol{A^0} = \boldsymbol{E} \\ \hline
\end{array}\right.$$

Az egyenleteket a jelölt módon beszorozva, majd pedig mindegyiket összeadva a baloldalon az eredmény a nullmátrix, a jobboldalon pedig az egységmátrixszal való beszorzás után előáll a karakterisztikus polinom:

$$\boldsymbol{0} = \alpha_n \boldsymbol{A^n} + \alpha_{n-1} \boldsymbol{A^{n-1}} + \cdots + \alpha_2 \boldsymbol{A^2} + \alpha_1 \boldsymbol{A} + \alpha_0 \boldsymbol{E}$$

■

Leképezések, izomorfia

Izomorfia

Definíció Az egy-egy értelmű $L: V \to W$ lineáris leképezést *izomorf leképezésnek* nevezzük. Az izomorf vektorterek jelölése: $V \cong W$

Tétel *Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk egyenlő.*

Bizonyítás Ha két vektortér dimenziója egyenlő, akkor bármely két bázisának elemszáma egyenlő. Legyen a V vektortér egy bázisa $[a]$, a W vektortéré pedig $[b]$. A V-beli x vektort az $[a]$ bázisra vonatkozó koordinátamátrixával reprezentáljuk. Rendeljük hozzá a W-ben azt az y vektort, aminek $[b]$-re vonatkoztatva ugyan az a koordinátamátrixa. Nyilvánvaló, hogy az így adott leképezés egy-egy értelmű. ■

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{[a]} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}_{[b]} = \boldsymbol{y}$$

Leképezések vektortere, összege, szorzata

Definíció Legyenek V és W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A, B: V^n \to W^k$ lineáris leképezések. Legyen továbbá egy $\boldsymbol{x} \in V$ vektor. Az A és B lineáris leképezések *összege:* $(A+B)(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})$

Definíció Legyenek V és W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A: V^n \to W^k$ lineáris leképezés. Legyenek továbbá $x \in V$ vektor és λ szám. Az A lineáris leképezés *számszorosa* (skalárszorosa): $(\lambda A)(\boldsymbol{x}) = \lambda A(\boldsymbol{x})$

Tétel *A fent definiált összeg és számszoros valóban homogén lineáris leképezés.*

Bizonyítás Be kell látni, hogy a fent definiált leképezésre szintén teljesülnek a homogén és lineáris leképezés tulajdonságai. Összegre:

$(A+B)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{y}) = (A+B)(\boldsymbol{x}) + (A+B)(\boldsymbol{y})$

$(A+B)(\mu\boldsymbol{x}) = A(\mu\boldsymbol{x}) + B(\mu\boldsymbol{x}) = \mu\big(A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})\big) = \mu\big((A+B)(\boldsymbol{x})\big)$

Számszorosra:

$(\lambda A)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\lambda A)(\boldsymbol{x}) + (\lambda A)(\boldsymbol{y}) = \lambda A(\boldsymbol{x}) + \lambda A(\boldsymbol{y}) = \lambda A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$

$(\lambda A)(\mu\boldsymbol{x}) = \lambda A(\mu\boldsymbol{x}) = \mu\lambda A(\boldsymbol{x})$

■

Tétel *A $V^n \to W^k$ lineáris leképezések halmaza a fent definiált összegre és számszorosra nézve $k \times n$ dimenziós vektorteret alkot.*

Bizonyítás Mivel a fenti leképezések homogén lineáris tulajdonságúak, felírhatók a leképezés mátrixával, ami épp $k \times n$-es. ■

Ebből a bizonyításból következik az alábbi tétel:

Tétel *A $V^n \to W^k$ lineáris leképezések vektortere izomorf a $k \times n$ típusú mátrixok vektorterével.*

Definíció Legyenek U, V és W ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen továbbá két lineáris leképezés, $A: V \to W$ és $B: U \to V$. Az A és B lineáris leképezések *szorzata:* $AB: U \to W$ leképezés, melyre $(AB)(\boldsymbol{x}) = A\big(B(\boldsymbol{x})\big)$, (ahol $\boldsymbol{x} \in U$).

Bázistranszformáció

Diagonalizálás

Definíció Az $\boldsymbol{A}$ mátrix *hasonló* a $\boldsymbol{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan $\boldsymbol{S}$ mátrix, mellyel fennáll, hogy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{BS}$.

Definíció Az $\boldsymbol{A}$ mátrix *diagonalizálható,* ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel *Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha $\boldsymbol{A}$ hasonló $\boldsymbol{B}$-hez, azaz $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}$, és $\boldsymbol{A}$ sajátvektora $\boldsymbol{s}$, akkor $\boldsymbol{B}$ ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektora $\boldsymbol{Ts}$.*

Bizonyítás Fölírva az egyenlőséget, majd pedig beszorozva:

$$\boldsymbol{T}\cdot/ \qquad \boldsymbol{As} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BTs} = \lambda\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{BTs} = \lambda(\boldsymbol{Ts}) \qquad \blacksquare$$

Tétel *Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve e bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, melynek főátlójában a sajátértékek állnak.*

Bizonyítás A transzformáció mátrixának oszlopvektorai a bázisvektorok képei. Minden sajátvektor képe önmagának sajátértékszerese. Ezért például az i-edik sajátvektor ($\boldsymbol{s_i}$) mátrixos alakja a sajátértékek bázisában csak az i-edik helyen tartalmazza a sajátértéket, a többi koordináta nulla. Ezekből az oszlopvektorokból alkotott mátrix valóban diagonális lesz. ■

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{s_i}) = 0\cdot\boldsymbol{s_1} + \cdots + \lambda_i\cdot\boldsymbol{s_i} + \cdots + 0\cdot\boldsymbol{s_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[s]} \qquad S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Tétel *Az $\boldsymbol{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa.*

Bizonyítás Ha a sajátvektorok bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra, a már igazolt tétel alapján a transzformáció mátrixa a sajátvektorok bázisában diagonális.

Ha az A mátrix diagonalizálható, vagyis hasonló egy $\boldsymbol{D}$ diagonális mátrixhoz, akkor be kell látni, hogy $\boldsymbol{D}$ elemei $\boldsymbol{A}$ mátrix sajátértékei, és $\boldsymbol{S}$ elemei az $\boldsymbol{A}$ mátrix sajátvektorai. Az, hogy ez utóbbiak bázist alkotnak, következik abból, hogy $\boldsymbol{S}$-nek létezik inverze, így $\det(\boldsymbol{S}) \neq 0$, vagyis a vektorok függetlenek. Mivel bármely független vektorrendszer bázis, ha elemszáma egyenlő a dimenzióval, ezért csak azt kell bizonyítani, hogy $\boldsymbol{S}$ oszlopai valóban sajátvektorok.

Legyen $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, illetve $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{s_1}|\boldsymbol{s_2}|\dots|\boldsymbol{s_n}]$. A hasonlóság képletéből kiindulva $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}$. Ezt balról beszorozva $\boldsymbol{S}$ mátrixszal: $\boldsymbol{SD} = \boldsymbol{AS}$.

Fölírva a bal- és jobboldali mátrixszorzásokat, és a mátrixokat oszlopvektoraikkal reprezentálva a fentiekből a következőt kapjuk:

$$[\boldsymbol{s_1}|\boldsymbol{s_2}|\dots|\boldsymbol{s_n}]\cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{s_1}|\boldsymbol{s_2}|\dots|\boldsymbol{s_n}]$$

$$[\lambda_1\boldsymbol{s_1}|\lambda_2\boldsymbol{s_2}|\dots|\lambda_n\boldsymbol{s_n}] = [\boldsymbol{As_1}|\boldsymbol{As_2}|\dots|\boldsymbol{As_n}]$$

A két mátrix egyenlőségéből következik, hogy $\lambda_i\boldsymbol{s_i} = \boldsymbol{As_i}$, tehát a diagonális mátrix elemei valóban a sajátértékek, az áttérési mátrix elemei pedig a hozzátartozó sajátvektorok. ■

Tétel *(Diagonalizálhatóság elégséges feltétele) Ha valamely $\boldsymbol{A}$ kvadratikus $n \times n$-es mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.*

Bizonyítás Különböző sajátértékek esetén a sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért bázist alkotnak. ■

Tétel *(Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele) Ha valamely A $n \times n$-es mátrix sajátértékei által meghatározott alterek (sajátalterek) dimenzióinak összege pontosan n, akkor a mátrix diagonalizálható.*

Bilineáris függvények

Definíció Legyen a V vektortér a valós test felett. Az $L: V \times V \to \mathbb{R}$ leképezést *bilineárisnak* nevezzük, ha mindkét változójában lineáris. Az L minden $(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ vektorpárhoz egyértelműen hozzárendel egy valós számot, melyet $L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$-vel jelölünk. Tulajdonságai:

1.a) $L(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}) = L(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}) + L(\boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3})$

1.b) $L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}) = L(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) + L(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3})$

2.a) $L(\lambda\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = \lambda L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$

2.b) $L(\boldsymbol{v_1}, \lambda\boldsymbol{v_2}) = \lambda L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$

Definíció Az L bilineáris függvények a $[b] = \boldsymbol{b_1}, \dots \boldsymbol{b_n}$ *bázis szerinti* $\boldsymbol{L}$ *mátrixán* azt az $n \times n$-es mátrixot értjük, melyben az i-edig sor j-edik eleme $l_{ij} = L\left(\boldsymbol{b_i}, \boldsymbol{b_j}\right)$

Tétel *Ha $L: V \times V \to R$ bilineáris függvény, akkor $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x^T L y}$, ahol $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ és $\boldsymbol{L}$ a bilineáris függvény mátrixa.*

Bizonyítás Írjuk fel $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorokat a $[b]$ bázisra vonatkozó koordinátáikkal!

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b_1} + x_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n}$$
$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b_1} + y_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + y_n\boldsymbol{b_n}$$

Ezeket behelyettesítve és alkalmazva a bilineáris tulajdonságokat:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= L(x_1\boldsymbol{b_1} + x_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n}, y_1\boldsymbol{b_1} + y_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + y_n\boldsymbol{b_n}) = \\ &= x_1y_1L(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1}) + x_1y_2L(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) + \cdots + x_1y_nL(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_n}) + \\ &+x_2y_1L(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_1}) + x_2y_2L(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_2}) + \cdots + x_2y_nL(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_n}) + \\ &\vdots \\ &+x_ny_1L(\boldsymbol{b_n}, \boldsymbol{b_1}) + x_ny_2L(\boldsymbol{b_n}, \boldsymbol{b_2}) + \cdots + x_ny_nL(\boldsymbol{b_n}, \boldsymbol{b_n}) \end{aligned}$$

Az egész egyenletet mátrixokba rendezve és mátrixműveletekkel átírva:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} L(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_1}) & L(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}) & \cdots & L(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_n}) \\ L(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_1}) & L(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_2}) & \cdots & L(\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L(\boldsymbol{b_n}, \boldsymbol{b_1}) & L(\boldsymbol{b_n}, \boldsymbol{b_2}) & \cdots & L(\boldsymbol{b_n}, \boldsymbol{b_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x^T L y}$$

■

Definíció Az L bilineáris függvény *szimmetrikus*, ha $L(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = L(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1})$.

Tétel *Az L bilineáris függvény akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa szimmetrikus.*

Kvadratikus alakok

Definíció Az $L: V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris függvényhez tartozó $Q: V \to \mathbb{R}$ leképezést L *kvadratikus alakjának* nevezzük, ha teljesül $Q(\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, minden $\boldsymbol{x} \in V$ esetén.

Definíció A $\boldsymbol{G}$ mátrix *ortogonális,* ha $\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{E}$, ahol $\boldsymbol{E}$ a megfelelő típusú egységmátrix. Másképpen, $\boldsymbol{G}$ ortogonális, ha transzponáltja inverze is ($\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{G}^{-\boldsymbol{1}}$).

Tétel *Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai merőlegesek.*

Bizonyítás A bizonyításhoz induljunk ki a definiáló egyenlőségekből, majd szorozzuk be őket az első egyenletnél $\boldsymbol{s_2}$-vel, a másodiknál pedig $\boldsymbol{s_1}$-gyel.

$$\begin{cases} \boldsymbol{A s_1} = \lambda_1 \boldsymbol{s_1} \\ \boldsymbol{A s_2} = \lambda_2 \boldsymbol{s_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{A s_2 s_1} = \lambda_1 \boldsymbol{s_1 s_2} \\ \boldsymbol{A s_1 s_2} = \lambda_2 \boldsymbol{s_2 s_1} \end{cases}$$

A két egyenletet kivonva egymásból azt látjuk, hogy $0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{s_1 s_2}$. Mivel azonban a sajátértékek különbözők, az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha az $\boldsymbol{s_1 s_2}$ skalárszorzat nulla, vagyis a sajátvektorok merőlegesek. ■

Definíció Az $\boldsymbol{A}$ mátrix *ortogonálisan diagonalizálható,* ha $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{AS}$, ahol $\boldsymbol{S}$ ortogonális, $\boldsymbol{D}$ diagonális mátrix.

Tétel *(Főtengely tétel) A $Q = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ kvadratikus alakhoz tekintsük az S ortogonális transzformációt, amelynek $\boldsymbol{S}$ mátrixában az oszlopok $\boldsymbol{Q}$ szimmetrikus mátrix ortonormált sajátvektorai. Áttérve ezen ortonormált sajátvektorok bázisára, vagyis alkalmazva az $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}$ koordinátatranszformációt, a Q kvadratikus alak a következőképpen írható:*

$$Q = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{2}}$$

ahol λ_i-k az A mátrix sajátértékei. Ezt a transzformációt főtengely transzformációnak nevezzük.

Definíció A $Q = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ kvadratikus alak $A \in T^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixának n különböző sajátértékéhez tartozó sajátaltereit a Q kvadratikus alak *főtengelyeinek* nevezzük.

Definíció A Q kvadratikus alak *pozitív definit,* ha minden $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ helyettesítésre $Q > 0$.

A Q kvadratikus alak *pozitív szemidefinit,* ha minden $\boldsymbol{x}$-re $Q \geq 0$.

A Q kvadratikus alak *indefinit,* ha pozitív és negatív értékeket egyaránt fölvesz.

Tétel *Az $n \times n$-es Q mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív.*

Az $n \times n$-es Q mátrix akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha minden sajátértéke pozitív vagy nulla.

Bizonyítás A $Q = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{2}}$ összefüggésből az állítás következik. ■

Tétel *Q akkor és csak akkor pozitív definit, ha a bal felső négyzetes mátrixok aldeterminánsai mind pozitívak. (Bizonyítás nélkül.)*

Tétel *(Spektrál tétel) Valamely négyzetes mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus. (Bizonyítás nélkül.)*

Kúpszeletek

Egy egyenes körkúpot a csúcsára nem illeszkedő síkkal elmetszve különböző görbéket kapunk síkmetszetként, aszerint, hogy a sík a kúp tengelyével mekkora szöget zár be.

Ha a bezárt szög megegyezik a kúp félnyílásszögével, azaz a sík egy alkotóval párhuzamos, akkor parabola; ha kisebb, mint félnyílásszög, akkor hiperbola; ha nagyobb, mint félnyílásszög, akkor ellipszis; ha pedig a sík a tengelyre merőleges, akkor kör lesz a síkmetszet.

Definíció Az *ellipszis* azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának összege állandó, mely állandó nagyobb az adott pontok távolságánál.

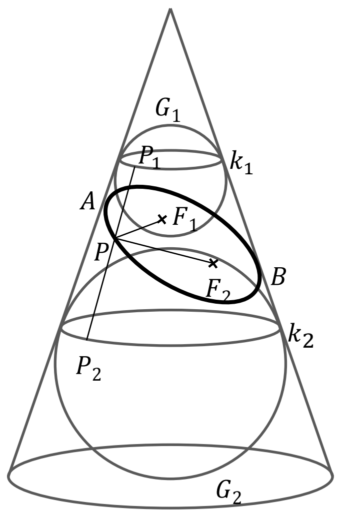
Definíció A *hiperbola* azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának különbsége állandó, mely állandó kisebb az adott pontok távolságánál.

Definíció A *parabola* azon pontok mértani helye a síkban, amik egy adott egyenestől és egy adott, az egyenesre nem illeszkedő ponttól egyenlő távolságra vannak.

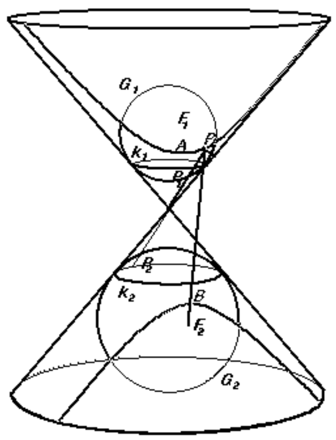
Kúpszeletek és az ellipszis, hiperbola, parabola ekvivalenciája

Ellipszis

Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba olyan gömböket, amik érintik a kúpot és a metszősíkot is. A G_1 gömb a kúp palástját k_1 körben, a síkot F_1 pontban érinti. A G_2 gömb a kúpot k_2 körben, a metszősíkot F_2 pontban érinti. P ponton áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi. Teljesül rájuk, hogy $PP_1 = PF_1$ és $PP_2 = PF_2$, mivel ezek a szakaszok a gömbhöz húzott érintőszakaszok egy külső pontból. Ugyanakkor PP_1 és PP_2 egy közös alkotón vannak és ezek hosszának összege a forgásszimmetria miatt állandó. Tehát egy tetszőleges P pontnak a fókuszoktól vett távolságainak összege állandó, ezért ez ellipszis.



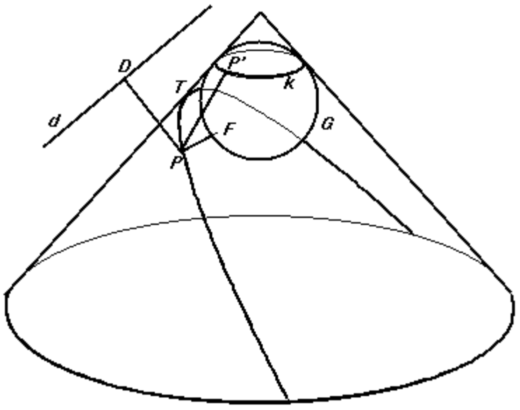
Hiperbola

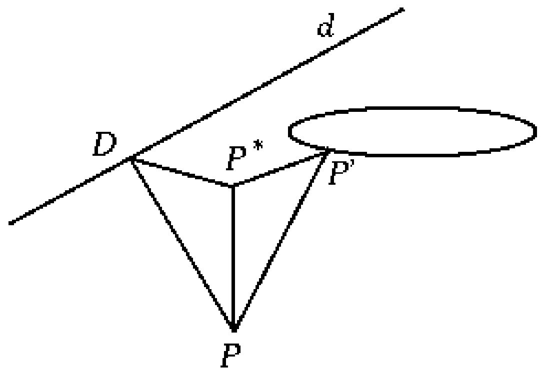


Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba olyan gömböket, amik érintik a kúpot és a metszősíkot is. A G_1 gömb a kúp palástját k_1 körben, a síkot F_1 pontban érinti. A G_2 gömb a kúpot k_2 körben, a metszősíkot F_2 pontban érinti. A P ponton áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi. Teljesül rájuk, hogy $PP_1 = PF_1$ és $PP_2 = PF_2$, mivel ezek a szakaszok a gömbhöz húzott érintőszakaszok egy külső pontból. Ugyanakkor PP_1 és PP_2 egy közös alkotón vannak és a forgásszimmetria miatt P_1P_2 szakasz hossza állandó és P ugyanazon az egyenesen van, ezért PP_1 és PP_2 szakaszok különbségének abszolút értéke állandó. Tehát egy tetszőleges P pontnak a fókuszoktól vett távolságainak különbségének abszolút értéke állandó, ezért ez hiperbola.

Parabola

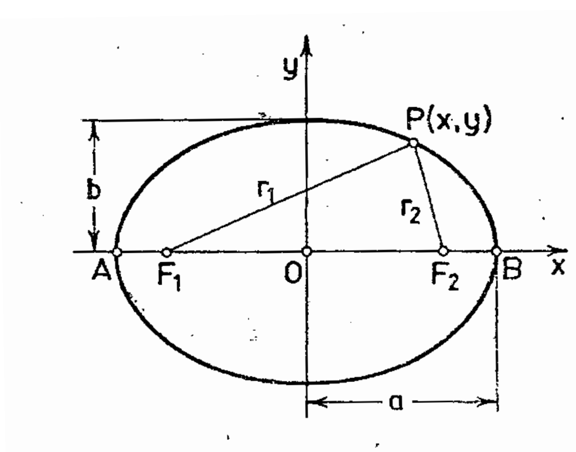
Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba egy olyan érintőgömböt G, ami egyúttal a síkot is érinti. A kúpot k körben, a síkot F pontban érinti a G gömb. P-ből a gömbhöz húzott érintőszakaszok PF és PP', amik egyenlő hosszúságúak. A metszősík és k síkja d egyenesben metszik egymást. P-ből merőlegest állítva d-re és k síkjára kapjuk a D és a P^* talppontokat. PD a metszősíkban van és párhuzamos azzal az alkotóval, amivel a sík is párhuzamos. Így a DPP^* és a P^*PP' szög is váltószöge egy-egy olyan szögnek, melynek egyik szára a kúp tengelye, másik szára pedig egy alkotó; a két szög tehát egyenlő. Ezért a kapott $PP'P^*$ derékszögű háromszög egybevágó a PP^*D derékszögű háromszöggel (egy oldaluk közös és a rajta fekvő szögeik egyenlők). Tehát az átfogók egyenlő hosszúak: $DP = PP'$, másrészről $PP' = PF$. Tehát egy tetszőleges P pont távolsága a fókusztól és a vezéregyenestől egyenlő, ezért ez parabola.

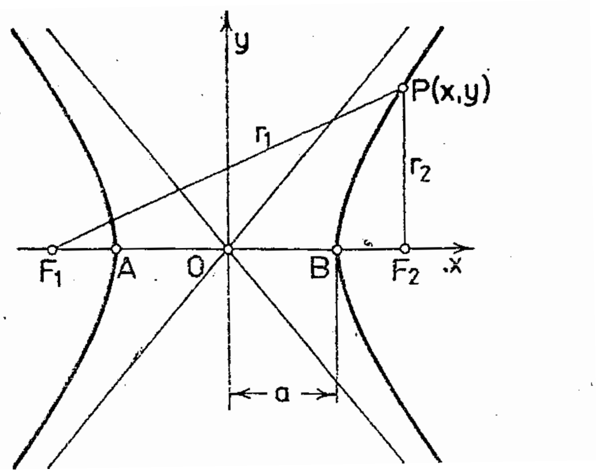




Kanonikus alakok

Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy $F_1 = (-c, 0)$ és $F_2 = (c, 0)$ legyen, vagyis a fókuszok távolsága $2c$. Jelölje a definícióban szereplő állandót $2a$.





Állítás *Egy megfelelően választott koordinátarendszerben a kúpszeleteket fel lehet írni a következő (kanonikus) egyenletekkel:*

Ellipszis	*Hiperbola*	*Parabola*
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
ahol a és b az ellipszis nagy és kis féltengelye.	*ahol a és b a hiperbola valós és képzetes féltengelye.*	*ahol p a parabola paramétere.*

Bizonyítás Az ellipszis és a hiperbola egyenletét egyszerre lehet tárgyalni. Jelölje r_1 és r_2 a sík egy tetszőleges $P(x,y)$ pontjának távolságát az $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ fókuszoktól. Az

$$(r_1+r_2+2a)(r_1+r_2-2a)(r_1-r_2+2a)(-r_1+r_2+2a)=0$$

egyenlet, ha $a>c$, akkor a $2a$ nagytengelyű ellipszis pontjaira és csak azokra, ha viszont $a<c$, akkor a $2a$ valós tengelyű hiperbola pontjaira és csak azokra teljesül. Ugyanis az első tényező nem lehet 0, mivel nem negatív számok összege és $2a$ pozitív. Továbbá a második tényező akkor és csak akkor 0, ha igaz, hogy $r_1+r_2=2a$, és ez az $r_1+r_2\geq 2c$ háromszög-egyenlőtlenség miatt az $a<c$ esetben nem következhet be. Végül az utolsó két tényező valamelyike akkor és csak akkor 0, ha $|r_1+r_2|=2a$, és ez az $|r_1+r_2|\leq 2c$ háromszög-egyenlőtlenség miatt az $a>c$ esetben nem következhet be. Az egyenletet átalakítjuk:

$$(r_1+r_2+2a)(r_1+r_2-2a)\big((r_1-r_2)+2a\big)(-(r_1-r_2)+2a)=0$$

Ez két darab $(a+b)(a-b)$ alakú kifejezés, melyet így írhatunk át:

$$((r_1+r_2)^2-4a^2)(4a^2-(r_1-r_2)^2)=0$$

Elvégezve a beszorzást:

$$4a^2(r_1+r_2)^2-16a^4-(r_1+r_2)^2(r_1-r_2)^2+4a^2(r_1-r_2)^2=0$$

Átalakítva úgy, hogy a hatványozások a zárójelbe kerüljenek:

$$-(\mathrm{r}_1^2-\mathrm{r}_2^2)^2+8\mathrm{a}^2(\mathrm{r}_1^2+\mathrm{r}_2^2)-16\mathrm{a}^4=0$$

Az r_1 és r_2 távolságokra a pontok koordinátái alapján:

$$\mathrm{r}_1^2=(\mathrm{x}+\mathrm{c})^2+\mathrm{y}^2,\qquad \mathrm{r}_2^2=(\mathrm{x}-\mathrm{c})^2+\mathrm{y}^2$$

Ezért: $r_1^2-r_2^2=4cx,\ r_1^2+r_2^2=2(x^2+y^2+c^2)$

Ezeket az egyenletbe helyettesítve:

$$-(4cx)^2+8a^2\big(2(x^2+y^2+c^2)\big)-16a^4=0$$

$$-16c^2x^2+16a^2(x^2+y^2+c^2)-16a^4=0$$

Ezt 16-al osztva és átrendezve:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Ami az állítás, mivel ellipszisnél $a^2-c^2=b^2$, hiperbolánál $a^2-c^2=-b^2$, tehát aszerint behelyettesítve, hogy $a<c$ vagy $a>c$ megkapjuk az egyenleteket.

Parabolánál $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ a fókusz, és $x+\frac{p}{2}=0$ a vezéregyenes egyenlete. Legyen r és t a $P(x,y)$ pontnak a fókusztól és az egyenestől vett távolsága. Ha P a parabola egy pontja, akkor $r^2=t^2$ is teljesül. Ebből

$$r^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2,\qquad t^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

Tehát $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$, amit átalakítva az állítás egyenletét kapjuk. ■

Komplex számok

Definíció Legyen $\mathbb{C}$ a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a,b) : \ a,b \in \mathbb{R}\}$. A $\mathbb{C}$ halmazon két műveletet értelmezünk a következőképpen:

összeadás: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{C}$

szorzás: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc) \in \mathbb{C}$

A $\mathbb{C}$ halmaz elemei a műveletekkel együtt alkotják a *komplex számokat.*

Definíció Két komplex szám akkor és csak akkor *egyenlő,* ha első és második elemeik egymással páronként egyenlők: $(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Tétel *A* $\mathbb{C} = \{(a,b) : \ a,b \in \mathbb{R}\}$ *alakú számok testet alkotnak a definícióban megadott műveletekre nézve.*

Bizonyítás Ahhoz, hogy belássuk, hogy valóban testet alkot, teljesülnie kell a műveletekre hogy kommutatív csoportot alkotnak, és a műveleteket a disztributív szabályok kötik össze.

Összeadás: Az egységelem $(0,0)$, az (a,b) pár összeadására vonatkozó inverz eleme $(-a,-b)$. A többi tulajdonság a valós számok tulajdonságából következik, mivel $a+c$ és $b+d$ is valós számok.

Szorzás: Az asszociativitás és kommutativitás könnyen belátható:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc) = (ca-db, da+cb) = (c,d)\cdot(a,b)$$

illetve

$$\big((a,b)(c,d)\big)(e,f) = (ac-bd, ad+bc)(e,f) =$$
$$= \big(e(ac-bd) - f(ad+bc), e(ad+bc) + f(ac-bd)\big) =$$
$$= (eac - ebd - fad - fbc, ead + ebc + fac - fbd) =$$
$$= \big(a(ec-fd) - b(ed+fc), a(ed+fc) + b(ec-fd)\big) =$$
$$= (a,b)(ec-fd, ed+fc) = (a,b)\big((c,d)(e,f)\big)$$

A szorzás egységeleme $(1,0)$, mivel minden $z = (a,b)$ számra igaz, hogy

$$(1,0)(a,b) = (1a - 0b, 0a + 1b) = (a,b)$$

A szorzás inverzeleme az $(1,0)$ egységelemre nézve a $z = (a,b)$ számnak:

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

hiszen igaz a következő:

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

A disztributív tulajdonságok belátásához pedig tekintsük a következőt:

$$(a,b)[(c,d)+(e,f)] = (a,b)(c+e, d+f) =$$
$$= \big(a(c+e) - b(d+f), a(d+f) - b(c+e)\big) =$$
$$= (ac + ae - bd - bf, ad + af - bc - be) =$$
$$= (a,b)(c,d) + (a,b)(e,f) \ ■$$

Algebrai alak

Tétel *Az $(a, 0)$ komplex számok és a valós számok között egy-egy értelmű, művelettartó leképezés létesíthető, vagyis az $(a, 0)$ komplex számok izomorfak a valós számokkal.*

Bizonyítás Konstruktív módon, megadva az izomorfiát biztosító egy-egy értelmű leképezést: $(a, 0) \in \mathbb{C} \leftrightarrow a \in \mathbb{R}$.

A kommutatív és asszociatív tulajdonságok a komplex számokra is teljesülnek, így elegendő annak bizonyítása, hogy mind az összeadásra, mind a szorzásra nézve is zárt a halmaz: két ilyen komplex szám szorzata és összege is ugyanilyen típusú komplex szám. Szükséges még az inverz és az egységelem létezésének bizonyítása is.

Az összeadás nem vezet ki az $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazból, mivelhogy

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

Az összeadás egysége $(0,0)$. Erre vonatkozó inverz: $(a, 0) + (-a, 0) = (0,0)$

A szorzás nem vezet ki az $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ halmazból, mivelhogy

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0^2, 0a + 0b) = (ab, 0)$$

A szorzás egysége $(1,0)$. Erre vonatkozó inverz: $(a, 0) \cdot (\frac{1}{a}, 0) = (1,0)$ ■

Tétel *Minden komplex szám felírható olyan kéttagú összegként, ahol az első tag mindkét tényezőjének van izomorf képe a valós számok között, a másodiknak pedig egy tényezője rendelkezik e tulajdonságokkal:* $(a, b) = (a, 0)(1,0) + (b, 0)(0,1)$

Bizonyítás Az $(1,0)$ neve valós egység, valós megfelelője 1. A $(0,1)$ neve képzetes egység, jelöljük őt i-vel. Az i komplex számnak nincs valós megfelelője!

Ekkor $\mathbb{C}$ minden eleme $a + b\mathrm{i}$ alakban írható, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. ■

Megjegyzés Az i komplex szám négyzete $\mathrm{i}^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0)$.

Definíció A $z = (a, b)$ komplex szám *algebrai alakja* $z = (a, b) = a + b\mathrm{i}$, ahol $\mathrm{i}^2 \leftrightarrow -1$.

Definíció A $z = a + b\mathrm{i}$ komplex szám *abszolút értéke* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Definíció A $z = a + b\mathrm{i}$ komplex szám *konjugáltja* a $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ komplex szám.

Trigonometrikus alak

Definíció A $z = (a, b)$ komplex szám *trigonometrikus alakját* kapjuk, ha a komplex számsíkon ábrázolt algebrai alak polárkoordinátáit adjuk meg. A polártengely a valós tengely pozitív félegyenese. Ekkor a z szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi))$$

ahol $a = r \cdot \cos(\varphi)$ és $b = r \cdot \sin(\varphi)$.

Exponenciális alak

Az Euler formulából kiindulva a trigonometrikus alak írható másképpen is.

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \cdot \sin(x)$$

Definíció A $z = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$ alakot, ahol r a z komplex szám abszolút értéke, a φ az argumentuma, a komplex szám *exponenciális alakjának* nevezzük.

Műveletek komplex számokkal

Szorzás

Algebrai alakban:

$$(a+bi)(c+di)=ac+bc\mathrm{i}+ad\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2=ac-bd+(bc+ad)\mathrm{i}$$

Trigonometrikus alakban:

$$z_1z_2=r_1(\cos(\varphi_1)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1))\cdot r_2(\cos(\varphi_2)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))=$$

$$=r_1r_2\big((\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2))+\mathrm{i}\cdot(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2))\big)=$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$z_1z_2=\left(r_1\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_1}\right)\left(r_2\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_2}\right)=r_1r_2\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_1}\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_2}=r_1r_2\cdot e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Osztás

Algebrai alakban:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{ac+bci-adi+bd\mathrm{i}^2}{c^2-d^2\mathrm{i}^2}=\frac{ac-bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$$

Trigonometrikus alakban:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos(\varphi_1)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1))}{r_2(\cos(\varphi_2)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos(\varphi_1)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2)-\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))}{(\cos(\varphi_2)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))(\cos(\varphi_2)-\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos(\varphi_1)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2)-\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_2))}{\cos^2(\varphi_2)-\mathrm{i}^2\cdot\sin^2(\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\big((\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2))+\mathrm{i}\cdot(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2))\big)=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2\cdot e^{\mathrm{i}\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Hatványozás

Trigonometrikus alakban:

Tétel *(Moivre formula) A hatványozás trigonometrikus alakban elvégezhető a következőképp:*

$$z^n=r^n(\cos(n\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(n\varphi))$$

Bizonyítás Teljes indukcióval. Az $n=1$ esetre nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy eddig minden k-ra igazolást nyert az állítás. Ekkor $n=k+1$ esetre vizsgálva:

$$\mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi))^{\mathrm{k}+1}=\mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi))^{\mathrm{k}}\cdot(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi))=$$

$$=\mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}[\cos(\mathrm{k}\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(\mathrm{k}\varphi)](\cos(\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi))=$$

$$=\mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}\big(\cos(\mathrm{k}\varphi)\cos(\varphi)-\sin(\mathrm{k}\varphi)\sin(\varphi)+\mathrm{i}\cdot(\cos(\varphi)\sin(\mathrm{k}\varphi)+\sin(\varphi)\cos(\mathrm{k}\varphi))\big)=$$

$$=\mathrm{r}^{\mathrm{k}+1}\big(\cos\big((\mathrm{k}+1)\varphi\big)+\mathrm{i}\cdot\sin\big((\mathrm{k}+1)\varphi\big)\big)$$

■

Exponenciális alakban:

$$z^n = \left(r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{\mathrm{i}n\varphi}$$

Gyökvonás

Definíció A z komplex számot a $z^* \neq 0$ komplex szám n-*edik gyökének* nevezzük, ha $z^n = z^*$

$$\sqrt[n]{z^*} = z \Leftrightarrow z^n = z^*$$

Trigonometrikus alakban:

A trigonometrikus alakban fölírt $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi))$ komplex szám összes n-edik gyökét a következőképpen lehet megtalálni:

Legyen $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi))$ és $z^* = r^*(\cos(\varphi^*) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi^*))$. A két trigonometrikus egyenlőségből a következőt kapjuk:

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(n\varphi)) = r^*(\cos(\varphi^*) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi^*))$$

$$r^* = r^n \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{r^*} \text{ és } n\varphi = \varphi^* + 2k\pi \;\Leftrightarrow\; \varphi = \frac{\varphi^* + 2k\pi}{n}, \text{ ahol } k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Egy képletben összefoglalva:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Speciális eset: négyzetgyök vonása

Pozitív szám négyzetgyöke:

A pozitív számok argumentuma 0, így trigonometrikus alakjuk $a = a(\cos(0) + \mathrm{i} \cdot \sin(0))$
$x^2 = a$ megoldása:

$$z_0 = \sqrt{a} \cdot \left(\cos\left(\frac{0°}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{0°}{2}\right)\right) = \sqrt{a}$$

$$z_1 = \sqrt{a} \cdot \left(\cos\left(\frac{0°}{2} + \frac{360°}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{0°}{2} + \frac{360°}{2}\right)\right) = (-1) \cdot \sqrt{a}$$

Negatív szám négyzetgyöke:

A negatív számok argumentuma 180°, ezért alakjuk $a = |a| \cdot (\cos(180°) + i \cdot \sin(180°))$
$x^2 = a$ megoldása:

$$z_0 = \sqrt{|a|} \cdot \left(\cos\left(\frac{180°}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{180°}{2}\right)\right) = \mathrm{i} \cdot \sqrt{|a|}$$

$$z_1 = \sqrt{|a|} \cdot \left(\cos\left(\frac{180°}{2} + \frac{360°}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{180°}{2} + \frac{360°}{2}\right)\right) = (-\mathrm{i}) \cdot \sqrt{|a|}$$

Exponenciális alakban:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathrm{i} \cdot \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Egységgyökök struktúrája, primitív egységgyökök

Definíció A z komplex számot n-*edik (komplex) egységgyöknek* nevezzük, ha $z^n = 1$.

Jelölés: $\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Tétel *Az összes n-edik egységgyök előáll az első; ε_1 egységgyök hatványaiként.*

Bizonyítás Az n-edik gyökvonásra vonatkozó képletből azonnal adódik. ■

Tétel *Az n-edik egységgyökök csoportot alkotnak a komplex számok szokásos szorzására nézve.*

Bizonyítás Zártság: $(\varepsilon_k\varepsilon_l)^n = \left(\cos\left((k+l)\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left((k+l)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n =$

$$= \cos\left((k+l)\cdot n\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left((k+l)\cdot n\frac{2\pi}{n}\right) = 1$$

Egység: az $1 = 1\left(\cos\left(\frac{0}{n}\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{0}{n}\right)\right)$

Inverz: $\varepsilon_k\varepsilon_j = 1\left(\cos\left(\frac{0}{n}\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{0}{n}\right)\right)$ alapján $\frac{k\cdot 2\pi}{n} + \frac{j\cdot 2\pi}{n} = \frac{n\cdot 2\pi}{n} \to j = n - k$

Tehát ε_k inverze $(\varepsilon_k)^{-1} = \varepsilon_{n-k}$

Az asszociatív és kommutatív tulajdonság a valós számok összegének asszociatív és kommutatív tulajdonságaiból következik, hiszen két egységgyök szorzatát úgy kapjuk, hogy argumentumaikat összeadjuk. ■

Definíció 1 Azt az ε_k n-edik egységgyököt, melynek hatványai az összes többi egységgyököt előállítják, *primitív egységgyöknek* nevezzük.

Definíció 2 Az az egységgyök, amelynek n-edik hatványa 1, és semelyik ennél kisebb hatványa nem 1, *primitív egységgyök.*

Definíció 3 Ha ε_k n-edik egységgyök, továbbá k és n relatív prímek, akkor ε_k *primitív egységgyök.*

Tétel *(Definíció 2 ⇒ Definíció 1) Legyen* n *az a legkisebb szám, amire* ε_k n*-edik egységgyök. Mivel az egységgyökök csoportot alkotnak, mindegyik hatvány egységgyök. Mivel pontosan* n *különböző egységgyök van, ha a hatványok mind különbözők, akkor elő is állítják a többi egységgyököt.*

Bizonyítás Indirekt módon tegyük fel, hogy vannak egyenlők is az ε_k hatványai között, pl:

$$(\varepsilon_k)^j = (\varepsilon_k)^l \to \frac{(\varepsilon_k)^j}{(\varepsilon_k)^l} = 1 = (\varepsilon_k)^{j-l}$$

A csoport struktúra miatt van inverz, ezért pl. a jobboldal inverzével beszorozva $j - l < n$ hatványt kapunk. Ez azt jelenti, hogy (ε_k)-hoz nem az n lenne a legkisebb olyan szám, amire n-edik egységgyök. Ez ellentmondás, tehát feltevésünk igaz volt. ■

Tétel *(Definíció 1 ⇒ Definíció 3) Ha* ε_k n*-edik primitív egységgyök, akkor* k *és* n *relatív prímek.*

Bizonyítás A primitív egységgyökök hatványaival minden egységgyök előállítható, így az első is. Tegyük fel, hogy ε_k j-edik hatványa állítja elő ε_1-et: $(\varepsilon_k)^j = \varepsilon_1$. Írjuk fel mindkét oldalt trigonometrikus alakban!

$$\cos\left(jk\frac{360°}{n}\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left(jk\frac{360°}{n}\right) = \cos\left(1\frac{360°}{n}\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left(1\frac{360°}{n}\right)$$

Mivel egységgyökök, így abszolút értékük 1, tehát ahhoz, hogy az egyenlőség fennálljon, az argumentumok csak $360°$ egész számú többszörösével különbözhetnek egymástól.

$$jk\frac{360°}{n} = \frac{360°}{n} + u\cdot 360°$$

Ezt az egyenletet alakítjuk át,

$$\frac{jk\frac{360°}{n}-\frac{360°}{n}}{u}=360°$$

ahonnan $360° \cdot n^{-1}$-el való leosztás után:

$$\frac{jk-1}{u}=n$$

$$jk-1=nu$$

$$jk-nu=1$$

Tehát ha lenne k-nak és n-nek közös osztója, akkor az osztója lenne 1-nek is, ami viszont lehetetlen. Ebből következik, hogy k és n legnagyobb közös osztója 1, vagyis k és n relatív prímek. ■

Tétel *(Definíció 3 ⇒ Definíció 2) Ha k és n relatív prímek, akkor ε_k n-edik primitív egységgyök.*

Bizonyítás A második definíció teljesülését bizonyítjuk. Ha k relatív prím, akkor az n az a legkisebb szám, amire ε_k n-edik egységgyök. Indirekt módon tegyük fel, hogy ε_k-t $j<n$ hatványra emeljük, és 1-et kapunk. A Moivre tétel szerint ez azt jelenti, hogy

$$(\varepsilon_k)^j=\cos\left(jk\frac{360°}{n}\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(jk\frac{360°}{n}\right)\neq\cos(0°)+\mathrm{i}\cdot\sin(0°)$$

A 0° úgy jöhetne ki, hogy hogy a $jk\frac{360°}{n}$ szög a $360°$ egész számú többszöröse lenne. Mivel k relatív prím n-hez, ez csak úgy lehetne, ha n osztója lenne j-nek, de ez lehetetlen, hiszen feltettük, hogy $j<n$. ■

A fenti tételek miatt beláttuk, hogy a három primitív egységgyök definíció ekvivalens.

Euklideszi tér

Skalárszorzat

Definíció Az $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek függvényértékét $s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle$-ként jelöljük, *skalárszorzatnak* nevezzük, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

1.) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ és $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (pozitív definit)

2.) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x} \rangle$ (szimmetrikus)

3.) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle$ (lineáris)

4.) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in V$ esetén $\langle (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \rangle$

Definíció A skalárszorzattal ellátott tereket *Euklideszi tereknek* nevezzük.

Tétel *Minden, véges dimenziós térben megadható skalárszorzat.*

Bizonyítás Konstruktív módon, megadva egyet.

$$s(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

Erre teljesülnek a skalárszorzat tulajdonságai:

1.) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ és $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (pozitív definit)

$$x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_nx_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

2.) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x} \rangle$ (szimmetrikus)

$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i = s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

3.) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle$ (lineáris)

$$s(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_iy_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \lambda \cdot s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

4.) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in V$ esetén $\langle (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \rangle$

$$s(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} x_iz_i + \sum_{i=1}^{n} y_iz_i = s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

■

Metrika

Definíció A H halmazt *metrikus térnek* nevezzük, ha van rajta olyan, *metrikának* nevezett $d: H \times H \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ függvény, melyre teljesülnek a következők:

1.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$-ra $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ és $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (pozitív definit)

2.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$-ra $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (szimmetrikus)

3.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in H$-ra $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Norma

Definíció A V vektortér *normált térnek nevezzük,* ha van rajta olyan, *normának* nevezett $n: V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ függvény, melyre teljesülnek a következők:

1.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ esetén $n(\boldsymbol{x}) \geq 0$ és $n(\boldsymbol{x}) = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (pozitív definit)

2.) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $n(\alpha \boldsymbol{x}) = |\alpha| \cdot n(\boldsymbol{x})$

3.) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ esetén $n(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq n(\boldsymbol{x}) + n(\boldsymbol{y})$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Tétel *Minden normált tér metrikus tér.*

Bizonyítás Konstruktív módon, megadva egy metrikát: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \coloneqq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$. Erről könnyen belátható, hogy rendelkezik a metrika tulajdonságaival. ■

Tétel *Minden skalárszorzatos tér normált tér.*

Bizonyítás Konstruktív módon, megadva egy normát: $n(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$. A norma első és második tulajdonsága a skalárszorzat első és második tulajdonságából teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség pedig a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőségből következik. ■

Tétel *Minden Euklideszi tér metrikus tér.*

Bizonyítás Konstruktívan, megadva egy metrikát: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \coloneqq \sqrt{\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle}$ ■

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőség

Tétel *(Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőség)* $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle|^2 \leq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle$

Bizonyítás Tekintsük az $\langle \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} \rangle$ skalárszorzatot. A pozitív definit tulajdonság miatt $0 \leq \langle \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} \rangle$. Fejtsük ki ezt a következőképp:

$$0 \leq \langle \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \lambda \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b} \rangle + \langle \lambda \boldsymbol{b}, \lambda \boldsymbol{b} \rangle =$$

$$= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle + 2\lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \lambda^2 \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle$$

Ez λ-ra nézve egy másodfokú egyenlőtlenség: $\lambda^2 A + \lambda B + C \geq 0$.

Mivel e függvénynek legfeljebb egy gyöke lehet, a diszkrimináns nem pozitív, azaz $B^2 - 4AC \leq 0$. A megfelelő értékeket behelyettesítve:

$$(2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)^2 \leq 4(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle)$$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle$$

■

A norma függvény bevezetésével az egyenlőség a következőképp írható: $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|$

Ortonormált bázis, Gram-Schmidt ortogonalizáció

Definíció Euklideszi térben két vektor, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ által *bezárt α szöget* a következőképpen lehet értelmezni. Legyen $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ egy skalárszorzat V-ben, és $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$ valamely $\boldsymbol{x}$ vektor normája. Ekkor

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|}$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{a}$ vektor *ortogonális* a $\boldsymbol{b}$ vektrorra, ha $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$.

Tétel *Ortogonális, nem nulla vektorok lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás Induljunk ki a függetlenség definíciójából: $\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{0}$.

Azt kell bizonyítani, hogy mindegyik $\alpha_i = 0$. Vegyük rendre az $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_k}$ vektorokkal való skalárszorzatokat.

$$\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{0} \quad / \cdot \boldsymbol{x_j}, j = 1,2, \dots, k$$

Ezzel azt kapjuk, hogy $\alpha_i \langle \boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_i} \rangle = 0$. A skalárszorzat pozitív definit tulajdonsága miatt $\langle \boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_i} \rangle > 0$, ezért minden $\alpha_i = 0$. ■

Tétel *Minden altérben van ortogonális bázis.*

Bizonyítás Konstruktív, azt bizonyítjuk, hogy bármely független rendszerből kiindulva, így bázisból is, tudunk ugyanolyan elemszámú ortogonális rendszert konstruálni. Az alkalmazott eljárás neve *Gram-Schmidt ortogonalizáció.*

Legyen $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}$ a független rendszer. Ebből $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ ortogonális rendszer a következőképpen kapható:

$\boldsymbol{c_1} \coloneqq \boldsymbol{b_1}$

$\boldsymbol{c_2} \coloneqq \boldsymbol{b_2} + \alpha_{21} \boldsymbol{c_1}$

Vegyük mindkét oldal skalárszorzatát $\boldsymbol{c_1}$-gyel, és válasszuk a $\langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \rangle$ skalárszorzatot nullának, így lesznek ortogonálisak e vektorok. Ebből:

$\alpha_{21} = \frac{\langle -\boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{c_1} \rangle}{\langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_1} \rangle}$, így $\boldsymbol{c_2} = \boldsymbol{b_2} - \frac{\langle \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{c_1} \rangle}{\langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_1} \rangle} \boldsymbol{c_1}$

Ehhez hasonlóan általában a definiáló egyenletnek rendre vegyük a skalárszorzatát a $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_{k-1}}$ vektorokkal, az együtthatókra a következőt kapjuk:

$$\boldsymbol{c_k} \coloneqq \boldsymbol{b_k} + \alpha_{k1} \boldsymbol{c_1} + \alpha_{k2} \boldsymbol{c_2} + \cdots + \alpha_{k,k-1} \boldsymbol{c_{k-1}}$$

$$\alpha_{kj} = \frac{\langle -\boldsymbol{b_k}, \boldsymbol{c_j} \rangle}{\langle \boldsymbol{c_j}, \boldsymbol{c_j} \rangle}, \qquad j = 1,2, \dots, k-1$$

■

Definíció *Ortonormált* a vektorrendszer, ha páronként ortogonális, és minden elemének normája 1.

Tétel *Minden euklideszi térnek van ortonormált bázisa.*

Bizonyítás Konstruktív, megmutatjuk, hogyan lehet az ortonormált rendszert létrehozni. Legyen a norma a skalárszorzatból származtatott: $\|\boldsymbol{c_i}\|^2 = \langle \boldsymbol{c_i}, \boldsymbol{c_i} \rangle$

Tetszőleges bázisból kiindulva, a Gram-Schmidt eljárással kapott ortogonális bázis minden elemét szorozzuk ezen norma reciprokával:

$$\boldsymbol{c}_i^* = \frac{\boldsymbol{c}_i}{\|\boldsymbol{c}_i\|}$$

Ekkor valóban,

$$\|\boldsymbol{c}_i^*\|^2 = \langle \frac{\boldsymbol{c}_i}{\|\boldsymbol{c}_i\|}, \frac{\boldsymbol{c}_i}{\|\boldsymbol{c}_i\|} \rangle = \frac{1}{\|\boldsymbol{c}_i\|^2} \langle \boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_i \rangle = \frac{1}{\|\boldsymbol{c}_i\|^2} \|\boldsymbol{c}_i\|^2 = 1$$

■

Tétel *Az euklideszi tér valamely bázisa akkor és csak akkor ortonormált, ha egy vektor koordinátáját a következőképpen kapjuk meg:*

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \qquad \alpha_k = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e_k} \rangle$$

Valós euklideszi terek transzformációi

Szimmetrikus transzformáció

Definíció Egy transzformációt *szimmetrikusnak* nevezünk, ha van olyan bázis, amelyre nézve a transzformáció mátrixa szimmetrikus.

Lemma *Ha a leképezés $\boldsymbol{A}$ mátrixa szimmetrikus és $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \coloneqq \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}$, akkor $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$*

Bizonyítás $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \rangle = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, merthogy $\boldsymbol{A}$ szimmetriája azt jelenti, hogy $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$. ■

Tétel *Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.*

Bizonyítás $\boldsymbol{A}\boldsymbol{s_1} = \lambda_1 \boldsymbol{s_1}$-ből: $\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2} \rangle = \lambda_1 \langle \boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2} \rangle$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{s_2} = \lambda_2 \boldsymbol{s_2}$-ből: $\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{s_2}, \boldsymbol{s_1} \rangle = \lambda_2 \langle \boldsymbol{s_2}, \boldsymbol{s_1} \rangle$

Ezért $0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \boldsymbol{s_2}, \boldsymbol{s_1} \rangle$, és mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ezért $\langle \boldsymbol{s_2}, \boldsymbol{s_1} \rangle = 0$, vagyis valóban ortogonálisak. ■

Ortogonális transzformáció

Definíció Egy transzformáció *ortogonális,* ha van olyan bázis, melyben mátrixa ortogonális.

Tétel *Az ortogonális transzformáció megőrzi a $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \coloneqq \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}$ slakárszorzatot.*

Tétel *Ortogonális transzformáció távolságtartó, normatartó, szögtartó, ha e függvényeket a skalárszorzatból származtatjuk.*

Tétel *(Determinánsok szorzás tétele)* $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{B})$, *ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ egyaránt $n \times n$-es mátrixok.*

Tétel *Ortogonális mátrix determinánsának abszolút értéke* 1.

Bizonyítás $1 = \det(\boldsymbol{E}) = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{A}) = \det^2(\boldsymbol{A})$

■

Tétel *Ortogonális transzformáció sajátértékeinek abszolút értéke* 1.

Bizonyítás Ha $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$, akkor $(\boldsymbol{Ax})^{\boldsymbol{T}} = (\lambda\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}}$. A két egyenletet összeszorozva:

$$(\boldsymbol{Ax})^T\boldsymbol{Ax} = (\lambda\boldsymbol{x})^T\lambda\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = (\lambda\boldsymbol{x})^T\lambda\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = (\lambda^2\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ex} = \lambda^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$
$$\lambda^2 = 1$$

■

Komplex euklideszi terek transzformációi

Definíció Az $\langle .,. \rangle: V \times V \to \mathbb{C}$ függvényt, *komplex skalárszorzatnak* nevezzük, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

1.) $\forall \boldsymbol{z} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle \geq 0$ és $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ (pozitív definit)

2.) $\forall \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_1} \rangle}$ (konjugáltan szimmetrikus)

3.a) $\forall \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in V$ esetén $\langle \lambda\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \rangle = \overline{\lambda}\langle \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \rangle$

3.b) $\forall \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{z_1}, \lambda\boldsymbol{z_2} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \rangle$

4.a) $\forall \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3} \rangle = \langle \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_3} \rangle + \langle \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3} \rangle$

4.b) $\forall \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3} \in V$ esetén $\langle \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} + \boldsymbol{z_3} \rangle = \langle \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \rangle + \langle \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_3} \rangle$

Komplex speciális mátrixok

hermitikus	ferdén hermitikus	unitér
$A = \overline{A}^T$	$A = -\overline{A}^T$	$A^{-1} = \overline{A}^T$

Tétel *Hermitikus mátrix sajátértékei valósak.*

Bizonyítás $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. Ezt balról megszorozva $\overline{\boldsymbol{x}}^T$-tal:

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax} = \overline{\boldsymbol{x}}^T\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \lambda\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$$

Mivel a jobboldal valós szám, ezért $\lambda = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{Ax}}{\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}}$

Most már csak azt kell belátni, hogy nemcsak a nevező, de a számláló is valós. Ezt úgy fogjuk bizonyítani, hogy tudjuk, a komplex szám akkor és csak akkor egyenlő a konjugáltjával, ha csak valós része van. Azt tudjuk, hogy a számláló is egyetlen komplex szám, hiszen a skalárszorzatnak ez volt a definíciója, így a szám megegyezik a „transzponáltjával":

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{Ax}) = \left(\overline{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{Ax})\right)^T = (\boldsymbol{Ax})^T\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{Ax}} = \overline{\overline{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{Ax})}$$

Következésképpen a sajátérték, λ is valós. ■

Tétel *A ferdén hermitikus mátrix sajátértékei vagy nullák, vagy tisztán képzetesek.*

Bizonyítás Az előzőhöz hasonlóan a bizonyítás lényege, hogy a komplex szám akkor és csak akkor képzetes, ha egyenlő konjugáltja (-1)-szeresével.

$$\lambda = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{x}}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \left(\overline{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\right)^T = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\overline{\boldsymbol{x}}^T = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T\left(-\overline{\boldsymbol{A}}\right)\overline{\boldsymbol{x}} = -\overline{\overline{\boldsymbol{x}}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}$$

Eszerint valóban a 0 illetve képzetes szám lehet a sajátérték. ■

Tétel *Unitér mátrix sajátértékeinek abszolút értéke* 1.

Bizonyítás A bizonyítás analóg a valós esetben tanult szimmetrikus mátrixra vonatkozó hasonló állítás bizonyításával:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

$$\overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}^T = \overline{\lambda\boldsymbol{x}}^T$$

A két egyenletet összeszorozva:

$$\overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}^T \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}}^T \cdot \lambda\boldsymbol{x}$$

$$\overline{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}^T \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T\overline{\boldsymbol{A}}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \lambda^2 \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T\left(\overline{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x} = \lambda^2 \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = \lambda^2 \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$$

Amiből valóban, $\lambda^2 = 1$. ■

Vizsgainformációk

A tantárgyi leírásból, szöveghűen

A tárgy vizsgaköteles. Azonban csak azok tehetnek vizsgát, akik az ún. aláírás feltételt teljesítik. Akinek a matematika felmérő dolgozata nem sikerült, annak KÖTELEZŐ a felzárkóztató gyakorlatokra járni, vizsgát csak akkor tehet, ha a felzárkóztató anyagából megszerzi a tanár által előírt pontszámot.

A zárthelyikkel szerezhető pontszám összesen 100 pont, egy nagy zh kb. 40 pont lesz, a két nagy zh összesen 80 pont. a kis zh-k segítségével még további 20 pont szerezhető. Az kap aláírást, aki mindkét évközi nagy zárthelyi dolgozatot legalább 50%-ra teljesít, és összességében megszerzi a félév során a nagy és kis zh-kon szerezhető 100 pont 50%-át.

A féléves munkára megajánlott jegyet lehet kapni, ez a NEPTUN-ba bekerül. Ha ezt a hallgató nem fogadja el, akkor a szokásos módon a kiírt vizsgákon 2 alkalommal javíthat. A végső eredmény az UTOLSÓ vizsga eredménye, akkor is, ha az rosszabb, mint az előző eredmények.

A vizsga írásbeli és szóbeli részből áll. A vizsgaidőpontok a szorgalmi időszak végén lesznek kihirdetve.

Azok a hallgatók, akiknek nem sikerült valamelyik évfolyam-zárthelyi 50%-át teljesíteni, vagy összességében nem szerezték meg a pontok 50%-át, javító dolgozatot írhatnak. A sikeres javító dolgozatot írók vizsgára vitt pontszáma egységesen a megszerezhető pontok 50%-a. Ha megvan az aláíráshoz szükséges 50%, de az elégséges megajánlott jegy megszerzéséhez nincsen meg a szükséges pontszám, úgy a hallgató szintén javító dolgozatot írhat, de csak elégséges megajánlott jegyért. Amennyiben a javító dolgozattal sem sikerül jogot szerezni a vizsgára, a tárgyat a következő év tavaszi félévében lehet csak teljesíteni.

A régi tanterv (osztatlan képzés) szerint tanulók, amennyiben teljesítették a fenti feltételeket, gyakorlati jegyet is kapnak: 0-50%:1, 51-65%: 2, 65-75%: 3, 76-89% : 4, 90%-tól: 5.

A gyakorlati jegy megszerzése után szintén VIZSGÁT kell tenniük.

A vizsga 3 részből tevődik össze: Az első rész beugró jellegű, ha ez nem sikerül, a második részt nem értékeljük (technikai okok miatt a 2. részt is mindenki megírja). Itt definícók, és könnyű bizonyítások szerepelnek. A második részben nehezebb fogalmakat, eljárásokat, bizonyításokat kérdezünk. A két rész, és az évközi teljesítmény alapján jegyet ajánlunk meg, melyet a vizsga 3. részében, szóbelivel lehet javítani (rontani). Az évfolyam legjobb 10%-a a félév végén csak szóbeli elővizsgát tehet.

A félév során megírt zárthelyikből származó pontok alapján a megajánlott jegy, illetve a vizsga írásbelin szerzett pontok alapján az ajánlott jegy számítása (régi tanterv szerint tanulók vizsgajegyének számítása):

0%-59%: elégtelen (1)
60%-69% elégséges (2)
70%-79% közepes (3)
80%-89% jó (4)
90%- jeles (5)

Az elégtelen érdemjegyet szerzőknek meg kell ismételni a vizsgát. Az elégséges és közepes jegyet írásban megszerzők szóban javíthatják (ronthatják) eredményüket. A jó és jeles pontszámot elérők szóbelin „védik meg ” eredményeiket.

Jegyzetek

Évközi eredmény

		maximális pontszám	elért pontszám
Nagy zárthelyi dolgozatok	1. nagy zárthelyi dolgozat	40	
	2. nagy zárthelyi dolgozat	40	
	Összesen	80	
Röpdolgozatok	**Összesen**	20	
	Elért pontszám		

Az évközi és a vizsgán nyújtott teljesítmény értékelése

vizsga \ évközi	50%	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%
50%	50%	53%	55%	58%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%
55%	53%	55%	58%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%
60%	55%	58%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%
65%	58%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%
70%	60%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%
75%	63%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%
80%	65%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%
85%	68%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%	93%
90%	70%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%	93%	95%
95%	73%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%	93%	95%	98%
100%	75%	78%	80%	83%	85%	88%	90%	93%	95%	98%	100%

Érdemjegyek megállapítása

Érdemjegy	%
1 (elégtelen)	0 – 59
2 (elégséges)	60 – 69
3 (közepes)	70 – 79
4 (jó)	80 – 89
5 (jeles)	90 – 100