

Determináns segítségével megoldható feladatok:

8. Milyen paraméter esetén lesznek a vektorok lin. összefüggőek? $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$

$$\text{Megoldás: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 10 & 7 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = 2(-2a - 21) - 1(-6a - 30) = 2a - 12$$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok pontosan akkor összefüggőek, ha a vegyes szorzatuk, vagyis a belőlük alkotott 3×3 -as mátrix determinánsa 0, vagyis, ha $a=6$.

9. Lineárisan függetlenek-e? $\underline{a} = (-2 \ -4 \ -1), \underline{b} = (3 \ 5 \ 1),$ és $\underline{c} = (-3 \ -2 \ 4)$

$$\text{Megoldás: } \begin{vmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2(20 + 2) - (-4)(12 + 3) + (-1)(-6 + 15) = 7 \Rightarrow \text{függetlenek}$$

10. Milyen paraméter esetén alkotnak generátorrendszert? $\underline{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} a^2 - 2 \\ 1 \\ a - 1 \end{pmatrix}$

Megoldás: 3 darab R^3 -beli vektor gen. rsz. pontosan akkor, ha független, vagyis ha $\det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ a^2 - 2 & 1 & a - 1 \end{vmatrix} = a^3 + a^2 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, a \neq 1, a \neq -2$$

11. Bázist alkotnak-e R^4 -ben az megadott vektorok? $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ -65 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Megoldás: } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 5 & -65 \\ -2 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Tehát nem alkotnak bázist!}$$