Képtér, magtér

Elméleti összefoglalás:

Definíció: Legyen L:V –> W lineáris leképezés. Azon vektorok összességét L-ben, amelyek képe a nullvektor, a leképezés magterének nevezzük. Jele: Ker(L) (Ker: kernel – mag)
Beláthatjuk, hogy a magtér soha sem üres, hiszen a V-beli nullvektor képe a W-beli nullvektor.
Definíció: Legyen L:V –> W lineáris leképezés. Azon vektorok összességét W-ben, amelyek valamely V-beli vektor(ok) képei, a leképezés képterének nevezzük. Jele: Im(L) (Im: image – kép)
Dimenzió tétel: Legyen L:V –> W lineáris leképezés.
Dim(Ker(L)) + Dim(Im(L)) = Dim(V),
azaz a magtér és a képtér dimenziójának összegéből megkapjuk a kiindulási vektortér dimenzióját.
Másképp:
***Magtér*:** $\mathrm{Ker}(\underline{\underline{A}}) = \{\underline{x} \in V \mid \underline{\underline{A}} * \underline{x} = \underline{0} \in W\}$
Képtér: $\mathrm{Im}(\underline{\underline{A}}) = \{\underline{y} \in W \mid \underline{x} \in V;\ \underline{\underline{A}} * \underline{x} = \underline{y}\}$.
Praktikusan:
$\mathrm{Ker}(\underline{\underline{A}})$ az $\underline{\underline{A}}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza.
$\mathrm{Im}(\underline{\underline{A}})$ azon "jobb oldalak" halmaza az $\underline{\underline{A}} * \underline{x} = \underline{y}$ egyenletrendszerben, melyekre az egyenletrendszer megoldható.

Gyakorló feladatok:

1.) Adjuk meg a leképezés magterét és képterét. Ellenőrizzük a dimenzió tételt is.

a) $L:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x + y \\ x + y \end{bmatrix}$$

b) $L:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + 2y \\ -x - y \end{bmatrix}$$

c) $L:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) $L:\mathbf{R}^{2x2} \to \mathbf{R}$

$$L\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$$

e) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, ahol A a leképezés mátrixa.

f) $A = \begin{bmatrix} 8 & 21 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

g) Az origóra középpontos tükrözés síkban.

h) Az x,y,z tengelyek által meghatározott térből x,y síkra vetítés