Kombinatorika

Permutáció

Ismétlés nélküli permutáció

Definíció Adott n elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott n elem egy *ismétlés nélküli permutációjának* nevezzük.
Jele: P_n

Tétel *Az n különböző elem permutációinak száma $P_n = n!$, ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ és* $0! = 1$.

Bizonyítás Az első helyen az $1, 2, \ldots, n$ elem bármelyike állhat, utána a maradék $(n-1)$ elem összes lehetséges sorrendje következik. És így tovább, az utolsó elemig. Az összefüggéseket visszafelé fölírva adódik az állítás.

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$
$$P_{n-1} = (n-1)P_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$P_1 = 1$$
$$\Downarrow$$
$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Ismétléses permutáció

Definíció Adott n elem, melyek között k_1 darab egyenlő, másik k_2 darab is egyenlő, … k_s darab is egyenlő, ahol $k_v \geq 2$, ha $v = 1, 2, \ldots s$, és $k_1 + k_2 + \cdots + k_s \leq n$. Az adott n elem egy meghatározott sorrendjét ezen elemek egy *ismétléses permutációjának* nevezzük.
Jele: $P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_s)}$

Tétel *Adott n, s és $k_1, k_2, \ldots k_s$ esetén az ismétléses permutációk száma*

$$P_n^{(k_1,k_2,\ldots k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

Bizonyítás Tekintsük az n elem egy tetszőleges permutációját. Ekkor
k_1 azonos elemhez $k_1!$ különböző indexet rendelhetünk;
k_2 azonos elemhez $k_2!$ különböző indexet rendelhetünk;

$$\vdots$$

k_s azonos elemhez $k_s!$ különböző indexet rendelhetünk.
Ekkor fennáll az alábbi összefüggés:

$$k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s! \cdot P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_s)} = P_n = n!$$

Variáció

Ismétlés nélküli variáció

Definíció Adott n különböző elem. Ha n elem közül k elemet $(0 < k \leq n)$ úgy választunk ki, hogy mindegyik elem csak egyszer szerepel, és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli variációját* kapjuk.
Jele: V_n^k

Tétel *Az n különböző elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma*

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Bizonyítás Rögzített n mellett, k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.
$k = 1$ esetén az állítás igaz, mert n elemből 1-et pontosan n féleképpen lehet kiválasztani.
Tételezzük fel, hogy k-ra teljesedik, és igazoljuk $(k+1)$-re. Bármelyik $(h_1, h_2, \dots, h_k)$ k-ad osztályú variációhoz $(n-k)$ elem közül választhatunk egy h_{k+1}-ediket, hogy egy $(h_1, h_2, \dots h_k, h_{k+1})$ $(k+1)$-ed osztályú variációt kapjunk. Azaz igaz a következő összefüggés: $V_n^k \cdot (n-1) = V_n^{k+1}$. ■

Ismétléses variáció

Definíció Adott n különböző elem. Ha n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elemet többször is választhatunk és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor n elem k-ad osztályú *ismétléses variációját* kapjuk.
Jele: $V_n^{k,i}$.

Tétel *Az n különböző elem k-ad osztályú ismétléses variációinak száma $V_n^{k,i} = n^k$.*

Bizonyítás Írjuk föl a kiválasztott elemeket, sorrendben. Az első helyre az adott n elem bármelyikét választhatjuk, így $V_n^{1,i} = n$. A másodosztályú ismétléses variációkat az első osztályúból úgy nyerjük, hogy azok mindegyikéhez hozzáírjuk az n elem bármelyikét, hiszen az elemeknek nem kell feltétlenül különbözniük egymástól. Így minden első osztályú ismétléses variációból újabb n darab másodosztályú ismétléses variációt kapuk. Ezek száma tehát $V_n^{2,i} = n^2$. Hasonlóan tovább:

$$V_n^{k,i} = n^k$$

Kombináció

Ismétlés nélküli kombináció

Definíció Adott n különböző elem. Ha n elem közül $k : 0 < k \leq n$ elemet úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer szerepelhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem k-ad osztályú *ismétlés nélküli kombinációját* kapjuk. Jele: C_n^k

Tétel *Az n különböző elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Bizonyítás Az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma megegyezik a k darab kiválasztott és az $(n-k)$ ki nem választott elem ismétléses permutációinak számával.

$$C_n^k = P_n^{(k,(n-k))} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ismétléses kombináció

Definíció Adott n különböző elem. Ha n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem k-ad osztályú *ismétléses kombinációját* kapjuk.
Jele: $C_n^{k,i}$

Tétel *Az n különböző elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma*

$$C_n^{k,i} = C_{n-k+1}^{k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Bizonyítás Az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma megegyezik $n+k-1$ elemből k kiválasztott elem és $n-1$ ki nem választott elem ismétléses permutációinak számával.

$$C_n^{k,i} = P_{n+k-1}^{(k,n-1)} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Definíció Az $\binom{n}{k}$ kifejezést *binomiális együtthatónak* nevezzük. Megállapodás szerint:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{0}{0} = 1$$

A binomiális együttható fogalma általánosítható tetszőleges valós számra:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

A kombinatorika alkalmazásai

Binomiális tétel

Tétel *Kéttagú kifejezés (binom) bármely nemnegatív egész kitevőjű hatványa polinommá alakítható a következőképp:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $a, b \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás Tudjuk, hogy bármely kommutatív gyűrűben a több tag szorzását több taggal oly módon végezhetjük el, hogy minden tagot szorzunk minden taggal. Írjuk fel az n tényezős $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$ szorzatot. Ha mindegyik tényezőből az a-kat szorozzuk össze, a^n-t kapjuk. Ha $(n-1)$ tényezőből az a-kat és egy tényezőből a b-t választjuk, ezt n féleképp tehetjük meg, így $na^{n-1}b$-t kapunk. Ha $(n-2)$ tényezőből az a-kat és 2 tényezőből a b-ket választjuk, amit $\binom{n}{2}$ féleképp tehetünk meg, akkor $\binom{n}{2} a^{n-2} b^2$ lesz az eredmény. Így folytatva, az összes eset előáll. ■

Halmazalgebra

Definíció Az A és B halmazok *egyenlők,* ha ugyanazok az elemeik. Jelölés: $A = B$

Definíció Azt a halmazt, amely egy elemet sem tartalmaz, *üres halmaznak* nevezzük. Jele: $\emptyset$

Definíció Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$. Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor azt mondjuk, hogy A valódi részhalmaza B-nek. Ennek jelölése: $A \subset B$

$A \subseteq B$ tulajdonságai

- $A \subseteq A$ (reflexív)
- $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$ (tranzitív)
- $A \subseteq B \nRightarrow B \subseteq A$ (nem kommutatív)
- $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$ (antiszimmetrikus)

rendezési reláció

Definíció Az A halmaz $P(A)$ *hatványhalmazán* az A részhalmazainak halmazát értjük.

Definíció A halmaz *számosságán* a halmaz elemeinek számát értjük. Jelölés: $|A|$ Ha a halmaz számossága véges, akkor az A halmazt végesnek nevezzük; ellenkező esetben az A halmaz végtelen.

Műveletek halmazok között

Definíció Az A és B halmazok *egyesítése* (uniója, összege) az az $A \cup B$-vel jelölt halmaz, amelynek elemei A-nak vagy B-nek elemei.

$$A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

Definíció Az A és B halmazok *közös része* (metszete, szorzata) az az $A \cap B$-vel jelölt halmaz, amelynek elemei A-nak és B-nek elemei.

$$A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$$

Definíció Az A és B halmazok *különbsége*, vagy a B halmaz A halmazra vonatkozó *komplementere* A azon elemeinek halmaza, amelyek nincsenek B-ben.

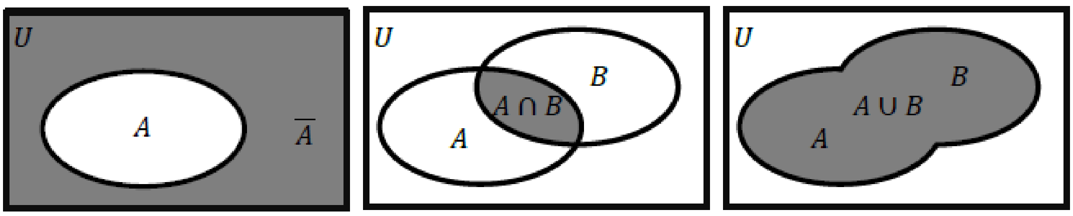
$$A \setminus B = \overline{B_A} \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

Definíció Legyenek $D_1, D_2, \dots D_n$ adott halmazok. E halmazok *Descartes (direkt) szorzata* $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \coloneqq \{(d_1, d_2, \dots, d_n) \mid d_k \in D_k : 1 \leq k \leq n\}$

Műveleti azonosságok

1.a)	$A \cup B = B \cup A$	1.b)	$A \cap B = B \cap A$
2.a)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2.b)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3.a)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3.b)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4.a)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	4.b)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Venn diagramm



Szita formula

$|S\setminus(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = |S| - (|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots$
$+ |A_{n-1} \cap A_n|) - \ldots + (-1)^i (|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i| + |A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1}| + \cdots$
$+ |A_{n-i+1} \cap \ldots \cap A_n|) + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$

Háló

Definíció 1 A H részben rendezett halmaz *háló,* ha bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma. A H háló *teljes,* ha bármely részhalmazának van infimuma és supremuma.

Definíció 2 A H halmaz *háló,* ha értelmezve van rajta két, $*$ és $\circ$ által jelölt művelet, melyekre $\forall a, b, c \in H$ esetén teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1.) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $\quad (a * b) * c = a * (b * c)$

2.) $a \circ b = b \circ a$ $\quad a * b = b * a$

3.) elnyelési tulajdonság

$$a \circ (b * a) = a$$
$$a * (b \circ a) = a$$

Tétel *A háló kétfajta definíciója ekvivalens egymással.*

Bizonyítás Konstruktív módon.

Ha létezik $\preccurlyeq$ rendezési reláció, megadható $*$ és $\circ$ műveletek:

Legyen $a \circ b \stackrel{\text{def}}{=} \inf(a; b)$ és $a * b \stackrel{\text{def}}{=} \sup(a; b)$. Ekkor a $*$ és $\circ$ műveletek:

1.) kommutatív

2.) asszociatív

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ $\quad a * (b * c) = (a * b) * c$

$\inf(a; \inf(b; c) = \inf(\inf(a; b)\,; c)$ $\quad \sup(a; \sup(b; c)) = \sup(\sup(a; b)\,; c)$

3.) elnyelés

$$a \circ (b * a) = a \qquad \inf(a; \sup(a; b)) = \begin{cases} \inf(a; b) & \text{ha } a \preccurlyeq b \\ \inf(a; a) & \text{ha } b \preccurlyeq a \end{cases}$$

$$a * (b \circ a) = a \qquad \sup(a; \inf(b; a)) = \begin{cases} \sup(a; b) & \text{ha } b \preccurlyeq a \\ \sup(a; a) & \text{ha } a \preccurlyeq b \end{cases}$$

Ha léteznek $*$ és $\circ$ műveletek, megadható $\preccurlyeq$ rendezési reláció:

Legyen $a \preccurlyeq b$, akkor és csak akkor, ha $a \circ b = a$. Ekkor $\preccurlyeq$ reláció:

1.) reflexív

2.) antiszimmetrikus $\quad \left.\begin{matrix} a \circ b = a \\ b \circ a = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$

3.) tranzitív $\quad \left.\begin{matrix} a \circ b = a \\ b \circ c = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = a \circ c$

Tétel *(Tarski fixpont tétele) Teljes hálón értelmezett monoton (rendezéstartó) f függvénynek van legkisebb és legnagyobb fixpontja.*

Bizonyítás Legyen G azon elemek halmaza, melyekre $f(x) \leq x$. Ennek alsó határa, vagyis $g = \inf(G)$ lesz a legkisebb fixpont.

Egyrészt $g \in G$, ugyanis $g \leq f(x) \leq x$. Ezért $f(g) \leq f\big(f(x)\big) \leq f(x) \leq x$, vagyis $f(g)$ is alsó korlát. Mivel g a legnagyobb alsó korlát, ezért $f(g) \leq g$, tehát $g \in G$.

Másrészt g fixpont, vagyis $g = f(g)$. Mivel $f(g) \leq g$, ezért $f\big(f(g)\big) \leq f(g)$, vagyis $f(g) \in G$. De akkor g alsó korlát volta miatt $g \leq f(g)$. A rendezési reláció antiszimmetrikus tulajdonága miatt $g = g(f)$.

Harmadrészt g legkisebb fixpont. Legyen G^* a fixpontok halmaza, $g^* = \inf(G^*)$. Mivel $G^* \subseteq G$, ezért $g \leq g^*$; továbbá mivel g^* infimuma G^*-nak, és g is G^*-beli, ezért $g^* \leq g$. A két egyenlőtlenségből az antiszimmetrikus tulajdonság miatt $g^* = g$, vagyis g valóban a legkisebb fixpont. ■

Definíció A $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ direkt szorzat bármely részhalmazát *relációnak* nevezzük.

Definíció Az $\mathcal{R}$ *bináris reláció* H halmazon, ha $\mathcal{R} \subseteq H \times H = \{(a, b) \mid a \in H, b \in H\}$

A bináris reláció tulajdonságai

1.) reflexív, ha $(x, x) \in \mathcal{R}$
2.a) szimmetrikus, ha $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$
2.b) antiszimmetrikus, ha $(x, y) \in \mathcal{R}$ és $(y, x) \in \mathcal{R}$ csakis úgy lehet, ha $x = y$
3.) tranzitív, ha $(x, y) \in \mathcal{R}$ és $(y, z) \in \mathcal{R}$ esetén $(x, z) \in \mathcal{R}$

Ekvivalencia reláció

Definíció Az $\mathcal{R}$ bináris reláció a H halmazon *ekvivalencia reláció,* ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Rendezési reláció

Definíció Az $\mathcal{R}$ bináris reláció H halmazon *parciális (részben) rendezési reláció,* ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. A H halmazt ekkor *részben rendezettnek* nevezzük.

Definíció A H halmaz *részben rendezett,* ha rendezési reláció van megadva H elemein. Ezt a relációt szokás a $\leq$ jellel jelölni.

Definíció Az $\mathcal{R}$ parciális rendezési reláció H halmazon *teljes,* ha az $x, y \in H$ esetén a $(x, y) \in \mathcal{R}$ és az $(y, x) \in \mathcal{R}$ relációk közül legalább az egyik teljesül.

Definíció A H halmazon adott parciális rendezés szerinti *legnagyobb elem* N, ha minden $h \in H$-ra $h \leq N$.
A H halmazon adott parciális rendezés szerinti *legkisebb elem* k, ha minden $h \in H$-ra $k \leq h$.

Definíció A H halmazon adott parciális rendezés szerinti *maximális elem* M, ha nincsen olyan $h \in H$, melyre $M \leq h$.
A H halmazon adott parciális rendezés szerinti *minimális elem* m, ha nincsen olyan $h \in H$, melyre $h \leq m$.

Definíció A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmazának *felső korlátja* (az adott rendezés és H szerint) $K \in H$, ha minden $h_1 \in H_1$-re $h_1 \leq K$.
A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmazának *alsó korlátja* (az adott rendezés és H szerint) $k \in H$, ha minden $h_1 \in H_1$-re $k \leq h_1$.

Definíció A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmaza *korlátos,* ha létezik alsó és felső korlátja. Ha létezik a felső korlátok közül legkisebb, akkor azt supremumnak, ha létezik az alsó korlátok közül legnagyobb, azt infimumnak nevezzük.

A matematikában a **Hasse-diagram** a részben rendezett halmazok ábrázolására használt ábra.

Egy tetszőleges $(M, \leq)$ részben rendezett halmaz Hasse-diagramja olyan irányított gráf, amelyben a részben rendezett halmaz M alaphalmazának az elemei alkotják a gráf pontjait, és a gráfban az a és b pontok között pontosan akkor halad él, ha $a < b$ teljesül és nincs olyan c elem, amelyre $a < c < b$ teljesülne az adott részben rendezésben. Az él irányítását a diagramon úgy ábrázoljuk, hogy a b pontot az a pont fölött helyezzük el. Ezzel az elrendezéssel azért lehet ábrázolni az élek irányítását, mert a Hasse-diagram körmentes. A reflexivitásból adódó hurokéleket a diagramon nem ábrázoljuk.

Számosságok

Számosság fogalma

Definíció Egy A és egy B halmaz egyenlő számosságú, ha létezik $f: A \to B$ függvény, amely a két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít. Jelölés: $|A| = |B|$

Definíció Egy A halmaz *számossága legalább akkora,* mint B számossága, ha létezik $A_1 \subset A$ részhalmaz, amely B halmazzal egyenlő számosságú. Jelölés: $|A| \geq |B|$

Definíció Egy A halmaz *véges számosságú,* ha van olyan véges $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre az $\{1,2,3, \dots, k\}$ halmaz és az A halmaz egyenlő számosságú.

Nevezetes halmazok számossága

Természetes számok

A megszámlálhatóan végtele számosság definíciójából következően az $\mathbb{N}$ halmaz számossága megszámlálható.

Páros és páratlan számok

Állítás *A páros számok halmaza megszámlálható. A páratlan számok halmaza szintúgy megszámlálható.*

Bizonyítás Páros számok hozzárendelése az $\mathbb{N}$ halmazhoz: $f(n) = 2n$
Páratlan számok hozzárendelése az $\mathbb{N}$ halmazhoz $f(n) = 2n + 1$ ■

Racionális számok

Állítás *A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás Helyezzük az $A_1 = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ halmazba az összes egész számot, az $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\right\}$ halmazba az összes olyan törtet, melynek a nevezője 2 és már nem egyszerűsíthető; az $A_3 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \dots\right\}$ halmazba az összes olyan törtet, melynek a nevezője 3 és már nem egyszerűsíthető és így tovább. Ezek az A_i halmazok megszámlálhatóak, hisz elemeiket föl tudjuk sorolni. Így megszámlálható sok diszjunkt halmazhoz jutunk, melyek egyesítése szintén megszámlálható, és kiadja $\mathbb{Q}$ halmazt. ■

Valós számok

Mivel a valós számok halmazának része a $(0,1)$ intervallum, melyről már korábban beláttuk, hogy kontinuum számosságú, így a fenti állításból következik, hogy $\mathbb{R}$ számossága kontinuum.

Állítás *A* $(0{,}1)$ *intervallumba tartozó összes valós szám H halmaza megszámlálhatónál nagyobb számosságú.*

Bizonyítás Ez a $|H|$ számosság legalább megszámlálható, hiszen H tartalmazza például a nyilvánvalóan megszámlálható $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ részhalmazt. Indirekt módon tegyük fel, hogy H megszámlálható, vagyis elemeit valamilyen $v_1, v_2, \dots$ sorrendbe rendezhetjük. Minden ilyen v_i egy 0 és 1 közötti valós szám, felírható tehát végtelen tizedestörtként, $0, v_{i1}v_{i2}v_{13} \dots$. (az egyértelműség miatt $\forall v_{jk}\ v_{jk} = 9$, ha $k > K \in \mathbb{N}$ végződésű számot kizárunk a halmazból). Az indirekt feltevés szerint tehát a következő sorozat H minden elemét tartalmazná:

$$\begin{gathered} 0, v_{11}v_{12}v_{13} \dots \\ 0, v_{21}v_{22}v_{23} \dots \\ 0, v_{31}v_{32_{v}33} \dots \\ \vdots \end{gathered}$$

A táblázat „átlója" mentén végighaladva készítsünk olyan w valós számot, melynek $w = 0, w_1w_2w_3 \dots$ tizedestört alakjához a következőképp jutunk:

$$w_i = \begin{cases} w_i = 2, & \text{ha } v_{ii} = 1 \\ w_i = 1, & \text{ha } v_{ii} \neq 1 \end{cases}$$

Ez a w szám biztosan nem szerepelhet a fenti táblázatban, hisz bármely j-re elmondható, hogy a v_j szám j-edik tizedesjegye különbözik a w szám j-edik tizedesjegyétől. Mivel így nem minden 0 és 1 közötti valós szám szerepel a felsorolásban, ellentmondáshoz jutunk, tehát $|H|$ nem lehet megszámlálható. ■

Cantor-féle átlós eljárás

A fenti bizonyítás az ún. Cantor-féle átlós eljárást használja. Leggyakrabban a rekurzív függvények matematikájában alkalmazzák olyan esetben, amikor azt szeretnék igazolni, hogy egy univerzális kiszámítási tulajdonsággal rendelkező függvény nem eleme annak a függvényosztálynak, melynek kiszámítására hivatott.

Síkbeli alakzatok

Állítás *Az egységszakasz pontjainak számossága megegyezik az egységnégyzet pontjainak számosságával.*

Bizonyítás Az egységnégyzet pontjainak halmaza:

$$S = (0{,}1) \times (0{,}1) = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

A Descartes féle koordináta rendszerben az egységnégyzet pontjai megadhatók $(x, y) \in S$ alakban. Ezen (x, y) számpárok és az egységszakasz z pontjai között lehet egyértelmű megfeleltetést létesíteni a következőképp:

Írjuk fel az x és y koordinátákat $x = 0, x_1x_2x_3 \dots$ és $y = 0, y_1y_2y_3 \dots$ tizedestört alakban. Ekkor az x_i és y_i számjegyekből konstruált $z = 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3 \dots$ tizedestört alakban fölírt szám eleme az egységszakasz $(0{,}1)$ intervallumának. ■

Állítás *Megszámlálhatóan sok diszjunkt* $_i$ *halmaz, melyek mindegyike megszámlálható, egyesítve megszámlálható halmazt alkotnak, vagyis* $B = \cup_{i=1}^{\infty}\ _i$ *halmaz megszámlálható.*

Bizonyítás Jelöljük az egyes halmazok elemit kettős indexszel:

$$\begin{aligned} {}_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\} \\ {}_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\} \\ {}_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ezt követően az $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, \dots$ sorrendben (egy képzeletbeli kígyóvonal mentén) feleltessük meg B elemeit $\mathbb{N}$ elemeinek. ∎

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Számossággal kapcsolatos elméletek

Cantor tétel

Tétel *Ha H halmaz, akkor nincs olyan H-n értelmezett f függvény, mely ráképez a H hatványlahmazára, azaz $|H| < |2^H|$.*

Bizonyítás A $|H| \leq |2^H|$ állítás nyilvánvaló, mivel minden $a \in H$ esetén $\{a\} \in 2^H$, vagyis az $a \longmapsto \{a\}$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H elemei és H egyelemű részhalmazai közt.

Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $f: H \to 2^H$ függvény, mely a két halmaz között kölcsönösen egyértelmű leképezést teremt, vagyis $|H| = |2^H|$. Definiáljuk a következő halmazt:

$$F = \{x \in H : x \notin f(x)\}$$

Vagyis az F halmazba kerülnek azon elemek, melyek nincsenek benne az f szerinti képükben.

Egyrészt, mivel F halmazban H elemei vannak, azaz $F \subseteq H$, ezért F eleme lesz a H halmaz hatványhalmazának, vagyis $F \in 2^H$.

Másrészt, mivel $f: H \to 2^H$ függvény ráképezés, ezért van olyan $h \in H$ elem, melynek képe éppen F, vagyis $f(h) = F$.

$h \in f(h)$ esetén, ha $f(h) = F$ akkor *ellentmondásra jutunk,* mivel F képe önmagának, így tartalmaznia kellene h-t is, ekkor viszont $h \in f(h)$ ellentmond F definíciójának.

$h \notin f(h)$ esetén, ha $f(h) = F$ akkor is *ellentmondásra jutunk,* mivel ekkor h eleme kell legyen F-nek a definíció miatt, ugyanakkor, mivel F képe h-nak, teljesülnie kéne annak is, hogy $h \in f(h)$, ami ellentmondás. ∎

Kontinuum hipotézis

A kontinuumhipotézis szerint nincs olyan halmaz, amelynek számossága a valós számok számossága (kontinuum-számosság) és a természetes számok számossága (megszámlálhatóan végtelen) közé esne.

Jelölje a továbbiakban a számosságokat az $\aleph$ (alef) jel. A megszámolható számosság jele $\aleph_0$, a rákövetkező $\aleph_1$ és rekurzívan, minden k esetén az $\aleph_k$-ra rákövetkezőt $\aleph_{k+1}$ jelölje.

A kontinuumhipotézis szerint: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

Az általánosított kontinuumhipotézis szerint tetszőleges k-ra teljesül, hogy ha X számossága $\aleph_k$, akkor $|2^X| = \aleph_{k+1}$

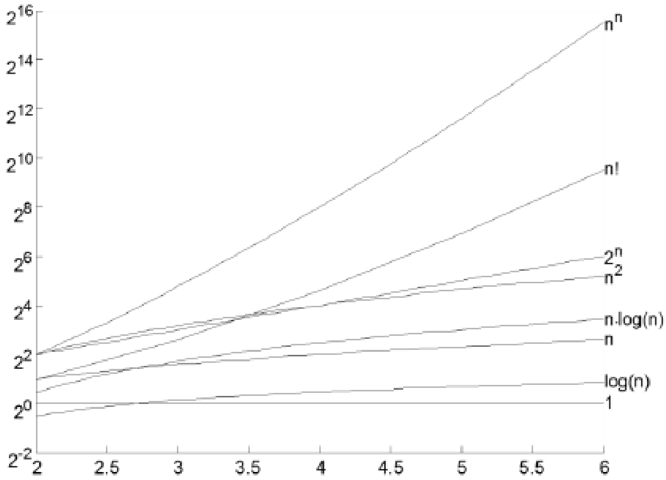
Nagyságrendek

Függvények növekedése

Nagy ordó „rendezés":

$$f(n) = O(f(n)), \qquad \forall f$$
$$(\log(n))^k = O(n), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$n^k = O(2^n), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Függvények nagyságrendje:
1.) konstans
2.) logaritmus
3.) elsőfokú polinomok
4.) hatvány logaritmusok
5.) polinomok
6.) exponenciális
7.) faktoriális



Aszimptotikus közelítések, nagyságrend

Definíció Legyen két függvény, f és g, melyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = O(g(x))$ (nagy-ordó), ha létezik olyan C, k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|, \qquad \forall x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $g(x)$ *aszimptotikus felső korlátja* $f(x)$-nek.

Definíció Legyen két függvény, f és g, melyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Omega(g(x))$ (nagy-omega), ha létezik olyan C, k pozitív konstans, amelyekre:

$$|f(x)| \geq C \cdot |g(x)|, \qquad \forall x > k$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ *aszimptotikus felső korlátja* $C \cdot g(x)$-nek.

Definíció Legyenek f és g, a valós vagy egész számok halmazából a valós vagy az egész számok halmazába képező függvények. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Theta(g(x))$ (nagy-teta), ha teljesül:

$$f(x) = \Omega(g(x)) \text{ és}$$
$$f(x) = O(g(x))$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a két függvény *nagyságrendje* megegyezik.

Logika

Szintaxis

Nulladrendű logika

Jelkészlet

1.) $\boxed{\text{betűk}}$
2.) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ $\boxed{\text{atomok}}$
3.) $\boxed{I, H}$
4.) zárójelek

Formula

Minden atom formula.
Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ is formulák.

A fenti két szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat. Az atomi formulákat latin, az összetett formulákat görög betűvel jelöljük.

Elsőrendű logika

Jelkészlet

1.) változószimbólumok: $x, y, z, \ldots$
2.) konstansszimbólumok: $a, b, c, \ldots$
3.) prédikátumszimbólumok: $P, Q, S, \ldots$
4.) függvényszimbólumok: $f, g, h, \ldots$
5.) logikai összekötő jelek (műveletek jelei): $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$
6.) kvantorok: $\forall, \exists$
7.) zárójelek

Kifejezés (term)

Minden individuumváltozó és konstans kifejezés. Ha $t_1, t_2, \ldots, t_n$ kifejezés és f n-változós függvény szimbólum, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is kifejezés.

A fentiek szerint a függvény argumentumaiba írhatunk változókat, konstansokat, de beágyazhatók más, vagy saját függvényértékek is. A kifejezések vagy prédikátumszimbólumok argumentumaiban, vagy függvények argumentumaiban fordulhatnak elő, önállóan nem.

Atomi formulák

Ha P n-argumentumú prédikátumszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ kifejezések, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomi formula.

Formula

Minden atom formula.
Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ is formulák.
$\forall x\alpha(x), \exists x\alpha(x)$ is formula.

A fenti három szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat.

Szemantika

A jelkészlet elemeit értelmezzük.

A betűk az ún. **ítéletváltozók.** Kijelentéseknek felelnek meg. A klasszikus logikában csak olyan kijelentésekre gondolunk, amelyek *igaz* vagy *hamis* volta egyértelműen eldönthető. Ezáltal egyfajta ítéletet képviselnek e mondatok. Változók pedig azért, mert az eredeti kijelentés tartalmától függetlenül, csakis annak igazságértékeit vehetik fel: az *igaz,* vagy a *hamis* értékek valamelyikét.

Az **igazságértékek** az ítéletváltozók lehetséges értékei, jelöljük ezek a halmazát I-vel. I csak a klasszikus logikában kételemű halmaz.

Azt a függvényt, amely a betűkkel jelölt változókhoz hozzárendeli a lehetséges igazságértékek valamelyikét, **interpretációnak** hívjuk. (Az interpretációk az igazságtábla atomokat tartalmazó oszlopaiban találhatók, ezen oszlopok minden egyes sora egy interpretáció.)

Praktikus, ha az I és H betűt kiemeljük a betűk közül, és rögzítjük igazságértéküket – ezáltal e betűk nem ítéletváltozók, hanem **ítéletkonstansok** lesznek. Az I betű igazságértéke minden interpretációban legyen *igaz,* a H betű igazságértéke minden interpretációban legyen *hamis*. A többi ítéletváltozó esetében az igazságérték az interpretációtól függ.

A **zárójelek** értelmezése és használata a matematikában szokásos módon történik: lényegében a műveletek kiértékelési sorrendjét tudjuk általuk meghatározni.

A $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ jelek az igazságértékeken értelmezett **műveleteknek** felelnek meg. E műveletek közül csak az egy-, és kétváltozós műveleteknek, és azok közül is csak néhánynak van gyakorlati jelentősége. A műveletek definícióját szokás kiértékelésnek, kiértékelési szabálynak is nevezni. A kiértékelés az igazságtábla eredménynek megfelelő oszlopában van.

Szemantika

Kvantorok hatásköre

Megállapodás szerint a kvantor hatásköre a mögötte álló változó utáni atomi formula vagy zárójelben megadott formula. Az ezekben szereplő változó előfordulásokat kötöttnek nevezzük, a változó egyéb előfordulásait szabadnak.

Interpretáció

Az elsőrendű nyelvben is valamely formula igazságértékét csak úgy tudjuk megmondani, ha interpretáljuk a formulát. Az interpretáció több részből áll. Meg kell adni az alaphalmazt, aminek elemeire vonatkoznak a formulák. Ahogyan nulladrendben is tettük, itt is meg kell mondani az atomi formulák igazságértékét. Ezen túlmenően, a függvényeket is interpretálni kell, meg kell mondani, hogy az egyes individuumokon mi a felvett függvényérték (ami szintén az univerzum egy eleme, vagyis egy individuum).

Ezután az elsőrendben tanult kvantorok jelentése, és a műveletek nulladrendben tanult jelentése alapján kiértékelhető a formula.

Szemantikai következmény

Definíció Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz szemantikai következménye β, ha minden olyan interpretációban, amelyben az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ formulák igazak, β is igaz.

Más szavakkal: az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz következménye β, ha β legalább akkor igaz, amikor az α_i-k igazak.

Jelölése: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vDash_1 \beta$

Helyes következtetési sémák

Definíció Azokat a következtetési sémákat tekintjük *helyes következtetési sémának,* amelyekben a következmény valóban a feltételek (szemantikai) következménye.

Modus ponens (leválasztási szabály)

Azt kell vizsgálnunk, hogy ahol α és $\alpha \to \beta$ igazak, ott a β igaz-e. Ha igen, akkor helyes, ha nem, akkor helytelen a következtetési séma. Csak az első interpretációban teljesül, hogy α és $\alpha \to \beta$ igaz. Ebben az interpretációban β is igaz, tehát valóban $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vDash_1 \beta$.

α	β	$\alpha \to \beta$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

Tétel *$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vDash_1 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \vDash_1 \beta$*

Bizonyítás Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ együttesen akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ igaz. ■

A fenti tétel miatt a $\vDash_1$ jel bal oldalát a továbbiakban egyszerű α-val jelöljük, ahol α-n mindig az $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ formulát értjük.

Tétel *$\alpha \vDash_1 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \to \beta$ érvényes.*

Bizonyítás 1.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \vDash_1 \beta$, akkor $\alpha \to \beta$ érvényes:
Írjuk föl az igazságtáblázatot. A jelölt sort ez esetben nem lehet figyelembe venni, ugyanis akkor $\alpha \vDash_1 \beta$ nem teljesülne. A maradék sorokra pedig valóban az I az igazságérték.

	α	β	$\alpha \to \beta$
	I	I	I
$\to$	I	H	H
	H	I	I
	H	H	I

2.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \to \beta$ érvényes, akkor $\alpha \vDash_1 \beta$:
Ha $\alpha \to \beta$ tautológia, akkor a fenti igazságtáblában a jelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen, I sorok. Ezekben a sorokban viszont valóban a β legalább ott igaz, ahol α igaz. ■

Tétel *$\alpha \vDash_1 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \wedge \neg\beta$ kielégíthetetlen.*

Bizonyítás Az $\alpha \vDash_1 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \to \beta$ érvényes, vagyis $\neg(\alpha \to \beta)$ kielégíthetetlen. Ezt kifejtve: $\neg(\alpha \to \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ ■

Rezolúció

Konjunktív normálforma

Definíció Atomot vagy annak tagadását *literálnak* nevezzük.

Definíció Literálok diszjunkcióját *klóznak* nevezzük.

Definíció Klózok konjunkcióját *konjunktív normálformának (KNF)* nevezzük.

Tétel *Minden formulához létezik vele ekvivalens konjunktív normálforma.*

Bizonyítás 1.) Az implikáció fölbontható: $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

2.) De Morgan azonosságok

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$$
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$$

3.) „disztributivitás"

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$
$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

■

Definíció A konjunkciók diszjunkcióját *diszjunktív normálformának (DNF)* nevezzük.

Rezolúció

Tétel *(a rezolúció alapelve)* $\{\alpha \vee \beta, \gamma \vee \neg\beta\} \vDash_0 \alpha \vee \gamma$

Bizonyítás (igazságtáblával)

	α	β	γ	$\neg\beta$	$\alpha \vee \beta$	$\wedge$	$\gamma \vee \neg\beta$	$\alpha \vee \gamma$
	I	*I*	*I*	*H*	*I*	***I***	*I*	*I*
→	*I*	*I*	*H*	*H*	*I*	***H***	*H*	*I*
	I	*H*	*I*	*I*	*I*	***I***	*I*	*I*
	I	*H*	*H*	*I*	*I*	***I***	*I*	*I*
	H	*I*	*I*	*H*	*I*	***I***	*I*	*I*
→	*H*	*I*	*H*	*H*	*I*	***H***	*H*	*H*
→	*H*	*H*	*I*	*I*	*H*	***H***	*I*	*I*
→	*H*	*H*	*H*	*I*	*H*	***H***	*I*	*H*

A jelölt sorokban a feltétel nem teljesül, így a következmény teljesülését nem vizsgáljuk. A jelöletlen sorokban viszony a következmény legalább ott igaz, ahol a feltétel igaz, tehát ez egy helyes következtetési séma. ■

Prenex konjunktív normálforma

Fontosabb elsőrendű ekvivalens formulák

1.a) $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ 1.b) $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$

2.a) $\neg\forall x\, \neg P(x) \equiv \exists x\, P(x)$ 2.b) $\neg\exists x\, \neg P(x) \equiv \forall x\, P(x)$

3.a) $\forall x \forall y\, A(x, y, \dots) \equiv \forall y \forall x\, A(x, y, \dots)$ 3.b) $\exists x \exists y\, A(x, y, \dots) \equiv \exists y \exists x\, A(x, y, \dots)$

4.a) $\forall x\, \big(A(x) \wedge B(x)\big) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$ 4.b) $\exists x \big(A(x) \vee B(x)\big) \equiv \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$

5.a) $\forall x \forall y\, \big(A(x) \wedge B(y)\big) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall y\, B(y)$

5.b) $\exists x \exists y \big(A(x) \vee B(y)\big) \equiv \exists x\, A(x) \vee \exists y\, B(y)$

Normálformára való átírás algoritmusa

1. A logikai összekötőjelek átírása ¬, ∧, ∨-ra.
2. A De Morgan szabályok alkalmazása addig, amíg a ¬ hatásköre atomi formula nem lesz.
3. A változók standardizálása (kvantoronkénti átnevezése).
4. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig, amíg minden kvantor a formula elejére nem kerül.
5. A kvantorok és az azokat közvetlenül követő változó sorrendjét meg kell tartani.
6. A formula konjunktív normálformára hozása disztributív törvények alkalmazásával.

Fontos ekvivalens formulák

1.) $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

A	B	$A \to B$	$\neg\alpha \vee \beta$
I	I	I	I
I	H	H	H
H	I	I	I
H	H	I	I

2.) ¬(A ∨ B) ≡ ¬A ∧ ¬B (De Morgan azonosság 1.)

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
I	I	H	H
I	H	H	H
H	I	H	H
H	H	I	I

3.) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (De Morgan azonosság 2.)

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
I	I	H	H
I	H	I	I
H	I	I	I
H	H	I	I

A konjunkció és diszjunkció tulajdonságai

1.a) $A \vee B \equiv B \vee A$ 1.b) $A \wedge B \equiv B \wedge A$

2.a) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ 2.b) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

3.a) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ 3.b) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

4.a) $I \vee A \equiv I$ 4.b) $H \wedge A \equiv H$

5.a) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 5.b) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

6.a) $A \vee \neg A \equiv I$ 6.b) $A \wedge \neg A \equiv H$

Rezolúció

Skólem normálforma

A $\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_n$ formulát, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok vannak Skólem formulának nevezzük.

Tétel *Minden elsőrendű formulához található olyan Skólem normálformában lévő formula, amely az eredeti formula logikai következménye.*

A formula „Skólemizálásához" először átírjuk a formulát prenex formába, az előzőekben már ismertetett módon. Az egzisztenciális kvantorokat az ún. Skólem konstansok, illetve Skólem függvények segítségével kiküszöböljük.

Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prefixumban, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz, akkor az előtte álló, univerzálisan kvantált $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$ változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j változónak, amelyre a formula értéke igaz. Ezt a tényt az $f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}) = x_j$ függvénnyel fejezzük ki. Ha az első kvantor éppen egzisztenciális, akkor ez a függvény nulla változós, vagyis konstans.

Ez az f függvény formálisan megadja, melyik az az x_j objektum az univerzumban, ami a formulát igazzá teszi.

Ezt a formális függvényképzést végrehajtjuk a soron következő egzisztenciális kvantorra is. Addig folytatjuk, amíg minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk. Természetesen ügyelni kell arra, hogy a függvény szimbólumok különbözők legyenek.

Az így kapott formulák az eredeti formula logikai következményei. Azonban az átalakítás NEM ekvivalens, hiszen visszafelé nem jutunk el az eredeti formulához. A gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban ez elegendő, hiszen mi csak azt akarjuk eldönteni, lehetséges-e a formulát igazzá tenni, vagyis, más szavakkal: Kielégíthető-e a formula.

Az elsőrendű rezolúció alapjai

A Skólem normálformát feltételezve, prenex elhagyható, csak megjegyezzük, hogy valóban, minden változó univerzálisan kvantált volt. Tehát a maradék részre, az ún. a mátrixra lehet alkalmazni a rezolúciót. A nulladrendhez képest különbséget jelent az, hogy a literálokat helyettesíteni kell.

A változó/term rendezett párokat tartalmazó $\alpha = \{v_1/t_1, \ldots, v_n/t_n\}$ halmazt helyettesítésnek nevezzük, ha $v_1, \ldots, v_n$ egymástól különböző változókat jelölnek, és $t_i \neq v_i$, $(1 \leq i \leq n)$.

Legáltalánosabb egységesítő helyettesítésnek nevezzük az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kifejezéseknek egy δ egységesítő helyettesítését, ha bármely α egyesítő helyettesítés előállítható $\alpha = \alpha'\delta$ formában (α' egy alkalmas helyettesítés).

(Legáltalánosabb) egységesítő helyettesítés alapelvei:

Változóba szabad konstanst vagy másik változót helyettesíteni.

Változóba szabad olyan függvényt is helyettesíteni, amelynek argumentumában más változó, vagy konstansok szerepelnek. (függvénybe is, a termek képzésének szabályai szerint helyettesíthetők változók, illetve konstansok, illetve újabb függvények.)

A rezolúcióhoz a formulát és a következmény tagadását Skólem normálformára alakítjuk. Nevezzük át a változókat úgy, hogy a változónevek különbözőek legyenek a klózokban. A rezolúció tehát csak akkor alkalmazható, ha az egységesítés elvégezhető. Ekkor pedig rezolúció alapelvét adó következtetési sémát alkalmazzuk, és akárcsak nulladrendben, elvégezzük a rezolúciót.

Gráfok

Általános összefüggések

Tétel *(Handshaking tétel) Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy az e él az u és v csúcsokhoz illeszkedik, azaz u és v az e él két végpontja. Ekkor, ha $u \neq v$, akkor az e élt $\varphi(u)$-nál és $\varphi(v)$-nél is számoltuk. Ha pedig $u = v$, akkor az e él hurokél, és így $\varphi(u)$-nál számoltuk kétszer. Tehát a gráf összes csúcsainak fokszámát összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk. ■

Tétel *Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma legalább 2, akkor a gráfban van kör.*

Bizonyítás Alkalmazzuk a leghosszabb út módszerét. Legyen 1 hosszúságú L út a G gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja v. Tekintsük most G-nek v-hez illeszkedő éleit. Ezek közül bármelyiknek a végpontja L-hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben L hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy L a leghosszabb út. Ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik v-hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét kijelöli. Ha e nem hurokél, akkor u-ak v-től különböző w végpontja L-ben van, tehát L-nek a v és w pontokat összekötő része e-vel együtt G egy körét alkotja. ■

Tétel *Ha egy n csúcsú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.*

Bizonyítás Teljes indukcióval. Az állatás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$-re minden n csúcsú és legalább n élű gráfban van kör. Legyen G egy $n + 1$ csúcsú gráf, amelynek legalább $n + 1$ éle van. Visszatérve a bizonyításra, vegyük G egy L leghosszabb útját. Ha L valamelyik végpontja G-nek nem elsőfokú csúcsai, akkor az előzőek szerint G-ben van kör. Ellenkező esetben töröljük G-nek egy elsőfokú csúcsát a hozzátartozó éllel együtt. Ekkor a kapott gráfnak n éle és n csúcsa van, tehát az indukciós feltevés miatt tartalmaz kört, amit G is tartalmaz. ■

Részgráfok, izomorfia

Definíció Az R gráf egy G gráf *részgráfja,* ha R megkapható G-ből pontok és élek elhagyásával.

Definíció Két gráf *izomorf,* ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másik pontjainak és éleinek.

Definíció Legyenek $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfok. A két gráf *homeomorf,* ha létezik $f: V \to V'$ függvény, melyre, ha $\{u, v\} \in E \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$, mindezt úgy, hogy ha két csúcs szomszédos G-ben, akkor f-szerinti képeik is szomszédosak G'-ben.

Körök és utak

Euler-kör, Euler-út

Definíció A G gráf *Euler-köre* olyan zárt élsorozat, mely G összes élét pontosan egyszer tartalmazza. *Euler-útról* akkor beszélünk, hogyha az élsorozat nem feltétlenül zárt.

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel Euler-kör létezésére) Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha minden csúcsának fokszáma páros.*

Bizonyítás Először belátjuk, hogy ha a gráf tartalmaz Euler-kört, akkor minden csúcsának fokszáma páros.

Ha a gráfot az Euler-köre mentén járjuk be, akkor minden csúcsba pontosan annyiszor haladunk be, mint ahányszor kihaladunk belőle. Ezért nyilvánvalóan a bemenések és kijövetelek csúcsonkénti száma páros, mely éppen a csúcsok fokszámát adja.

Másodszor bizonyítandó, hogy ha minden pont fokszáma páros, akkor valóban tartalmaz Euler-kört. Ezt G pontszámára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

A legkisebb pontszámú, minden csúcsában páros fokszámú gráf a három pontú teljes gráf (háromszög). Ebben van Euler-kör. Tegyük fel, hogy minden $k < |V(G)|$ esetén igaz az állítás.

Induljunk el G egyik csúcsából, és haladjunk úgy az élek mentén, hogy egyiken sem megyünk át egynél többször. Ha elakadunk, vagyis az egyik csúcsból már nem vezet ki él, akkor az biztosan a kiindulási csúcs a páros fokszáma miatt. Ekkor kaptunk egy zárt élsorozatot. Legyen F egy olyan zárt élsorozat G-ben, melyben a lehető legtöbb él szerepel. A fenti eljárásban azért álltunk meg, mert a kezdőpontból nem indult ki újabb él, tehát az ebből a pontból kiinduló összes él F-ben van. Ha F G-nek Euler-köre, akkor készen vagyunk. Amennyiben F nem Euler-köre G-nek, akkor vizsgáljuk G-nek azt a részgráfját, mely pontosan azokat az éleket tartalmazza, amelyeket F nem tartalmaz. Ennek a részgráfnak kevesebb csúcsa van, mint G-nek, hiszen nem tartalmazza azt a csúcsot, amely a fenti eljárásban a kiindulópont volt. Az indukciós feltevés miatt ennek a részgráfnak minden komponensében található Euler-kör. Ennek a részgráfnak valamely komponense tartalmaz egy olyan pontot, mely F-ben is szerepel. Ha ugyanis nem lenne közös pontjuk, akkor G nem lenne összefüggő. Az előbb említett komponens Euler-körét járjuk be a közös pontból elindulva, majd járjuk be F-et. Ekkor egy F-nél nagyobb élszámú zárt élsorozatot kapunk. Ez azonban ellentmond a feltevésünknek, tehát F Euler-kör.

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel Euler-út létezésére) Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor tartalmaz Euler-utat, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.*

Bizonyítás Az előző tétel alapján egyértelmű, hogy 0 páratlan csúcs esetében a gráfban van Euler-kör, tehát Euler-út is. Ha 2 páratlan fokú csúcs van, akkor ezeket összekötve a gráfban keletkezik egy Euler-kör. Ha ezt az élet újból elhagyjuk, akkor olyan élsorozatot kapunk, amely nem zárt, de eleget tesz az Euler-út definíciójának.

Tétel *(Szükséges és elégséges feltétel irányított gráfokra) Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-kör, ha minden csúcsnál a bemenő és kimenő élek száma megegyezik.*

Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-út, ha van benne Euler-kör, vagy ha két csúcs kivételével a bemenő és kimenő élek száma minden csúcsban megegyezik, a kivételeknél pedig az egyik (kiindulási) csúcsban a kimenő élek száma eggyel több, a másik (érkezési) csúcsban pedig a bemenő élek száma több eggyel.

Bizonyítás A fenti gondolatmenet alapján belátható a tétel állítása.

Hamilton-kör, Hamilton-út

Definíció Egy P kör egy $G = (V, E)$ gráfban *Hamilton-kör*, ha P a V összes elemét (a gráf csúcsait) pontosan egyszer tartalmazza. *Hamilton-útról* akkor beszélünk, ha P kör helyett út.

Tétel *(Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére) Ha egy gráfban k pontot elhagyva k-nál több komponens keletkezik, akkor nem tartalmazhat Hamilton-kört.*

Bizonyítás Indirekt módon. Tegyük fel, hogy van a gráfban Hamilton-kör, legyen ez $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ és legyen $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ az a k pont, melyet elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét. Vegyük észre azonban, hogy az elhagyott pontok közötti „ívek" biztosan összefüggő komponenseket alkotnak. Pl.: a $\left(v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, \dots, v_{i_2-1}\right)$ ív is biztosan összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti Hamilton-kör egy éle fut. Mivel éppen k ilyen ívet kapunk, nem lehet több komponens k-nál. Kevesebb lehet, hiszen különböző ívek között futhatnak élek.

Tétel *(Ore tétele) Ha a G gráfra teljesül, hogy bármely két nem szomszédos u, v csúcs fokának összege nagyobb egyenlő G fokszámánál* ($\deg(u) + \deg(v) \geq n$), *akkor G-nek van Hamilton-köre.*

Bizonyítás Tegyük fel indirekt módon, hogy a gráf kielégíti a feltételt, de nincsen benne Hamilton-kör. Ez az ellenpélda gráfunk legyen G'. Húzzunk be G'-be további éleket úgy, hogy az új gráf is ellenpélda legyen (továbbra sincs benne Hamilton-kör). Így kapunk egy G gráfot, ami továbbra is ellenpélda, hisz új élek behúzásával „rossz pontpárt" nem lehet létrehozni, de ha még egy élet akárhogyan behúzunk, akkor már tartalmaz a gráf Hamilton-kört. Biztosan van két olyan pont, hogy $\{x, y\} \notin E(G)$, hiszen egy n csúcsú teljes gráfban ($n \geq 3$ esetén) van Hamilton-kör. Ekkor viszont a $G \cup \{x, y\}$ gráfban van Hamilton-kör, tehát G-ben van Hamilton-út. ($n = 2$ esetén is van Hamilton-út, $n = 1$ esetén pedig a gráfunk egy izolált pont, nincs éle, nincs benne Hamilton-kör). Legyenek a P Hamilton-út csúcsai: $v_1, v_2, \dots, v_n$, és $v_1 = x$ és $v_n = y$. Ha x szomszédos a P út valamely v_i pontjával, akkor y nem lehet összekötve v_{i-1} -gyel, mert ez esetben $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_i, v_1)$ egy Hamilton-kör lenne.

Így tehát y nem lehet összekötve legalább $d(x)$ darab ponttal, ezért

$$d(y) \leq n - 1 - d(x)$$

$$d(y) + d(x) \leq n - 1$$

ami viszont ellentmondás, hiszen $d(y) + d(x) \geq n$ volt feltéve. ∎

Ore tételének speciális esete Dirac tétele.

Tétel *(Dirac tétele) Ha az $n = 2k$ csúcspontú G egyszerű gráf bármely pontjának a foka legalább k, akkor van G-nek Hamilton-köre.*

Bizonyítás A Dirac tétel az Ore tételnél erősebb feltételt fogalmaz meg, mivel ha minden pont fokszáma legalább $\frac{|V(G)|}{2}$, akkor teljesül az Ore tétel feltétele.

Adott csúcsból a legrövidebb út keresése a többi csúcsba

Algoritmus (Dijkstra algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Mindegyik csúcshoz rendeljük hozzá azt, hogy mekkora volt az élsúlyok összege, amik mentén a csúcsba eljutottunk. Kezdetben mindegyik végtelen. Válasszuk a kiindulási csúcsunkhoz illeszkedő éleket, és az élek másik végén lévő csúcsokhoz rendeljük hozzá az élsúlyok összegét, amin eljutunk a csúcsba. Ezt követően minden lépésben a legkisebb összegű csúcsból indulunk ki, és nézzük meg a többi csúcsba vezető élek súlyösszegét. Ha ez kevesebb, mint az adott csúcshoz hozzárendelt érték, akkor erre módosítjuk, ha nagyobb, akkor változatlanul hagyjuk. Végül, ha már nem találunk semelyik csúcshoz sem kisebb összeget, végeztünk.

Gráfbejárások

Adott gráfban keresünk szisztematikusan adott tulajdonságú (pl. címkéjű) csúcsot. A szisztéma sokféle lehet, a két alap a szélességi és a mélységi keresés.

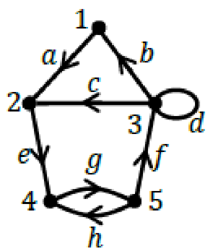
Szélességi keresés (Breadth-First Search = BFD)

Algoritmus Meglátogatjuk az első csúcsot, majd ennek a csúcsnak az összes szomszédját. Aztán e szomszédok összes olyan szomszédját, ahol még nem jártunk, és így tovább. Berakjuk az épp meglátogatott csúcsot, hogy majd a megfelelő időben a szomszédjaira is sort keríthessünk.
Általános lépés: vesszük a sor elején levő x csúcsot, töröljük a sorból, meglátogatjuk azokat az y szomszédait, amelyeket eddig még nem láttunk, majd ezeket az y csúcsokat a sor végére tesszük.

Mélységi keresés (Depth-First Search = DFS)

Algoritmus Tetszés szerinti csúcstól elindulva egy úton addig megyünk „mélyre", ameddig lehet: vagy nincsen további szomszédos csúcs, vagy már jártunk ott. Ha így megakadunk, akkor visszalépünk (backtrack) az előző csúcshoz, ha onnan tudunk továbbmenni, akkor megint elindulunk, és a lehető legmélyebbre együnk, ha nem, akkor visszalépünk.

Gráfok felírása mátrixokkal



Szomszédsági mátrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array} & \begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

Illeszkedési mátrix (nem irányított)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc}a&b&c&d&e&f&g&h\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array} & \begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

Síkgráfok és színezésük

Definíció Egy gráf síkba rajzolható gráf, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást. Ezt az így lerajzol gráfot síkgráfnak nevezzük.

Tétel *(Fáry-Wagner tétel) Ha G egy síkba rajzolható gráf, akkor léteik olyan síkbarajzolása, amelyben minden él egyenes szakasz.*

Tétel *(Euler-féle poliéder tétel) A G összefüggő, egyszerű síkgráf esetében, ha p a gráf szögpontjainak száma, e a gráf éleinek száma és t a gráf által létrehozott területek száma a végtelen területet is számolva, akkor* $p - e + t = 2$.

Bizonyítás Az adott gráfot lépésenként újra lerajzoljuk:

1. lépés: 1 csúcs, igaz az állítás: $1 - 0 + 1 = 2$
2. lépés: 2 csúcs, igaz az állítás: $2 - 1 + 1 = 2$

n. lépés: Tegyük fel, hogy $(n-1)$ esetre igazoltuk a formulát: $p - e + t = 2$. A következő lépés kétféle lehet:

a) Vagy meglévő csúcsokat kötünk össze egy új éllel, ekkor az élek és területek száma eggyel növekszik, a pontok száma változatlan. Az állítás igaz:

$$p - e + t = 2 \Leftrightarrow p - (e+1) + (t+1) = 2$$

b) Egy új csúcsot rajzolunk be a rá illeszkedő éllel együtt, amelynek szomszédjai már a meglévő lerajzolt gráfban vannak. Ekkor a csúcsok és élek száma eggyel nő, míg a területek száma változatlan. Az állítás igaz:

$$p - e + t = 2 \Leftrightarrow (p+1) - (e+1) + t = 2$$

■

Következmény Ha G összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma legalább 3, akkor $e \leq 3p - 6$

Bizonyítás Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért minden területet legalább 3 él határol (legalább 3 a fokszáma). A területeket határoló éleket összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden területet határoló két területhez tartozik. Vagyis $2e \geq 3t$, hiszen ha mindegyik terület háromszög lenne, akkor lenne a fokszáma 3. Így $t \leq \frac{2}{3e}$. Ebből kifejezve $p - e + t = 2$-t

$$e = p + t - 2 \leq p + \frac{2}{3e} - 2$$

Ebből az állítás következik. ■

Következmény Ha G összefüggő, egyszerű síkba rajzolható gráf, akkor a minimális fokszáma legfeljebb 5.

Bizonyítás Indirekt módon tegyük fel, hogy a minimális fokszám 6. A fokszámok összege az élek számának kétszerese (handshaking), így $6n \leq \sum p \leq 2e$. Az előző következmény alapján: $e \leq 3p - 6$, vagyis $2e \leq 6n - 12$, ami viszont ellentmondás. ■

Következmény Ha a G összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma legalább 3, és nincsen 3 hosszú köre, akkor $e \leq 2p - 4$.

Bizonyítás A feltételek miatt most minden területet legalább 4 él határol, fokszáma legalább 4, tehát $2e \geq 4t$, vagyis $e \geq 2t$, $\frac{1}{2}e \geq t$. Kifejezve $p - e + t = 2$ szerint:

$$e = p + t - 2 \leq p + \frac{1}{2}e - 2$$

Ebből az állítás következik. ■

Tétel (Kuratowski tétel) Valamely gráf akkor és csak akkor sík gráf, ha nem tartalmaz K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal izomorf/homeomorf részgráfot.

Bizonyítás Az esetek az Euler tétel következményei miatt megdőlnek. ■

Tétel A G gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható, ha gömbre rajzolható.

Bizonyítás Sztereografikus projekció (bijekció) révén konstruktívan, az adott gráfot a gömbről a síkra vetítve bizonyítható. ■

Gráfszínezések

Definíció A $\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma, vagyis az a szám, amely megmutatja, legkevesebb hány szín kell a gráf csúcsainak olyan kiszínezéséhez, hogy a szomszédos csúcsok más színűek legyenek.

Definíció Egy egyszerű gráf n-színezhető, ha minden csúcsához hozzárendelhető úgy egy szín hogy két szomszédos csúcshoz rendelt szín különböző.

Tétel: *(4-szín tétel gráfokra)* Minden síkgráf kiszínezhető négy színnel

Tétel: Ha G síkba rajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 5$

Bizonyítás: *Teljes indukció a gráf pontszámára*

Ha a gráfnak maximum 5 db csúcsa van, akkor nyilvánvalóan kiszínezhető 5 színnel. Tegyük fel, hogy $n = k$ csúcsú gráf kiszínezhető 5 színnel $n = k + 1$-re:

Ismétlés: síkgráfokra → *élek száma ≤ 3n-6*, következménye: van olyan csúcs, melynek fokszáma maximum 5.

Ha x *foka* = 4, akkor x-et elhagyva a csúcsok száma eggyel csökken, tehát az indukciós feltevés miatt ez kiszínezhető 5 színnel. Visszavéve ezt a csúcsot, a szomszédait ki lehet színezni 4 színnel, $+x$ → 5 színnel!

Ha x *foka* $= 5$, akkor minden szomszédja nem lehet összekötve egymással, mert akkor K_5 részgráf lenne, nem síkgráf! Legyen z, y az x olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk össze egy ponttá, hagyjuk el x-et. Az indukciós feltevés miatt a maradék kiszínezhető 5 színnel. Visszavéve és szétszedve x, y, z csúcsokat, ezek kiszínezhetők maximum 3 színnel, hiszen x-nek összesen 5 szomszédja van, az y-és z-kívüli csúcsok 3 színt lefoglalnak, de y és z egyszínű (nem szomszédok), marad egy szín x-nek.

Fák

Definíció Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor azt *fagráfnak (fának)* nevezzük.

Az előzőek alapján a fák négy tulajdonsága, hogy összefüggőek, csúcsaik száma n, éleik száma $n - 1$, nem tartalmaznak kört.

Prüfer kód

A Prüfer kód fák tárolására alkalmas. A fa n csúcsát $k = 1,2, \dots n$ számokkal tetszőlegesen címkézzük. A Prüfer kód alkalmazásához tudjuk, hogy minden legalább két csúcsú fában van legalább két csúcs, amelyek fokszáma 1.

Algoritmus (A Prüfer kód előállítása) Kiindulásként meg van adva egy fa (ábrával, mátrixszal stb.) Első lépésként sorszámozzuk a csúcsokat 1-től n-ig. A következő lépésben megkeressük a legkisebb sorszámú csúcsot a (maradék) fán. Hagyjuk el ezt a csúcsot a rá illeszkedő éllel együtt, és fűzzük a lista végéhez az él másik végén található csúcs sorszámát. Ezt a lépést addig ismételve, míg a fából csak egy csúcs marad, kapjuk a Prüfer kódot.

Feszítőfák

Definíció Egy gráf minden csúcsát tartalmazó fát a gráf *feszítőfájának* nevezzük.

Tétel *Minden (összefüggő) gráfnak van feszítőfája.*

Bizonyítás Legyen G a gráf, melyben feszítőfát keresünk. Ha G fa, akkor készen vagyunk. Ha G nem fa, vagyis tartalmaz köröket, akkor minden körből egy élt elhagyva fához jutunk. ■

Minimális feszítőfa keresése

A probléma lényege, hogy egy élsúlyozott összefüggő egyszerű gráfban keressük a legkisebb élsúlyösszegű feszítőfát.

Algoritmus (Prim algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Az ebből kiinduló élek közül a legkisebb súlyú mentén választjuk a következő csúcsot. A legkisebb súlyú élhez fűzzük a rá illeszkedő legkisebb súlyú élet, ha az nem alkot kört az eddig vizsgált élekkel. Ha már van $n-1$ él, akkor készen vagyunk.

Algoritmus (Kruskal algoritmus) Az éleket súlyuk szerint növekvő sorrendbe rendezzük. A legkisebbtől kezdve vesszük őket (nem feltétlenül illeszkedően) úgy, hogy ne képezzenek kört. Ha már van $n-1$ él, akkor készen vagyunk.

Fabejárás

Megkülönböztetünk egy csúcsot, ezt gyökérnek nevezzük. A gyökér őse (szülője) a szomszédos csúcsainak, és ezek a csúcsok az ősök (szülők) utódai (gyerekei). Az az utód, aki nem szülő, a fa levele. A fában egy út nevezhető „ág"-nak is.

Definíció Ha egy fában minden csúcsnak legfeljebb két gyereke van, akkor a fát *bináris fának* nevezzük.

Preorder, inorder, postorder bejárások

Algoritmus Preorder bejárás: azaz a gyökér elem majd a bal oldali részfa preorder bejárása, végül a jobboldali részfa preorder bejárása.

Algoritmus Inorder bejárás: azaz először a bal részfa inorder bejárása, majd a gyökérelem, végül a jobboldali részfa inorder bejárása.

Algoritmus Postorder bejárás: azaz először a bal részfa posztorder bejárása, majd a jobboldali részfa posztorder bejárása, végül a gyökérelem feldolgozása.

Hálózati folyamok

Fogalmak

Definíció Adott egy $G = (N, E)$ irányított gráf, és ennek két különböző pontja, s és t, melyeket forrásnak és nyelőnek nevezünk. (A forrásból csak kifelé, a nyelőbe meg csak befelé mutatnak élek.) Adott továbbá az éleken értelmezett $c: E \to \mathbb{R}^+$ nemnegatív értékű kapacitásfüggvény.

Ekkor $G = (N, E)$ gráfot a c függvénnyel együtt (G, c) *hálózatnak* nevezzük.

Definíció Az $f: E \to \mathbb{R}$ függvényt *folyamnak* hívjuk, ha teljesülnek a következők:

$$f(n_1, n_2) = -f(n_2, n_1), \qquad \forall (n_1, n_2) \in E, n_1, n_2 \in V$$
$$f(n_1, n_2) \leq c(n_1, n_2), \qquad \forall (n_1, n_2) \in E$$

Definíció Legyen $H = (G, c)$ egy hálózat s forrással és t nyelővel. Legye $N_1, N_2 \subseteq N$ egy partíciója N-nek, vagyis $N_1 \cup N_2 = N$ és $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Legyen továbbá $s \in N_1$ és $t \in N_2$. Ekkor az N_1, N_2 halmazt *s, t-vágásnak* hívjuk. Az N_1, N_2 kapacitásán

$$c(N_1, N_2) = \sum_{n_i \in N_1, n_j \in N_2} c(n_1, n_2)$$

számot értjük.

Definíció Adott $H = (G, c)$ hálózat s forrással és t nyelővel. Jelölje $r: A \to \mathbb{R}$ a maradékkapacitás-függvényt, ahol $\forall n_1, n_2 \in V$ esetén $r(n_1, n_2) = c(n_1, n_2) - f(n_1, n_2)$. Az f folyamhoz tartozó *javító gráf* a $G_f = \left(V, E_f\right)$ az élein értelmezett maradékkapacitás-függvénnyel, ahol $A_f = \{(n_1, n_2) : n_1, n_2 \in N, r(n_1, n_2) > 0\}$

A G_f-beli irányított s, t utakat *javító utaknak* hívjuk.

Tétel *(Ford-Fulkerson tétel) Legyen $H = (G, c)$ hálózat. Ekkor a maximális folyamérték egyenlő a minimális vágással.*

Bizonyítás Az előző tételnél láttuk, hogy a maximális folyam egyenlő egy alkalmas vágás kapacitásával. Másrészt azt is bizonyítottuk, hogy bármely folyam nem lehet nagyobb bármely vágás kapacitásánál. Ezért az előző tétel bizonyításában szereplő $(N_0, N \setminus N_0)$ vágás minimális vágás kell legyen.