Valószínűségszámítás

Csercsik Dávid, Szűcs Zsolt

Tartalomjegyzék

1 Alapfogalmak

1.1 Általános jelölések és ismétlés

$\stackrel{\circ}{=}$	definíció szerint egyenlő
2^{Ω}	$\{A \mid A \subseteqq \Omega\}$, azaz Ω összes részhalmazának halmaza
HR	Halmazrendszer
$\mathbb{N}$	Természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$	Valós számok halmaza
$\mathbb{Q}$	Racionális számok halmaza
$\exists!$	Egyértelműen létezik
$\underline{1}$	csupa 1-ből álló vektor

Ismétlés. $G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt[1] ha $(\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0): \ \left]x - \varepsilon, x + \varepsilon\right[\ \subseteq G$

Megjegyzés. $\left]x, y\right[$ az x, y nyílt intervallum jelölése. A kerek zárójellel rendezett párt jelölünk: (x, y) az x-bol és y-ból álló rendezett pár.

1.2 σ-algebra és mérhető tér

Definíció 1.1. Eseménytér
Legyen Ω nemüres halmaz, melyet a jegyzetben eseménytérnek nevezünk.

Definíció 1.2. σ-algebra vagy eseményelgebra
Legyen $\mathfrak{F}$ az Ω olyan részhalmazainak rendszere, mely rendelkezik a köv. tulajdonságokkal:

- $\mathfrak{F}$ zárt a megszámlálható (véges vagy végtelen) unióra (jele '$\cup$')
- $\mathfrak{F}$ zárt a különbségképzésre (jele '$\setminus$')
- $\Omega \in \mathfrak{F}$

Az ilyen tulajdonságú HR-eket nevezzük σ-algebrának, $\mathfrak{F}$ elemeit pedig eseményeknek.

Megjegyzés. Ekkor komplementerképzésre ('A^C') és metszetre ('$\cap$') is zárt hiszen

$$\begin{aligned} A^C &= \Omega \setminus A \\ A \cap B &= \left(A^C \cup B^C\right)^C = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)) \end{aligned}$$

Ismétlés. Egy halmaz megszámlálhatóan végtelen ha létezik bijekció $\mathbb{N}$-el.

[1] itt: metrikus értelemben nyílt, azaz feltételezünk egy távolságfüggvényt. Van még pl. olyan hogy 'topologikus értelemben nyílt' - ekkor direkt módon definiáljuk a nyíltnak tekintett halmazokat, és ezekre bizonyos tulajdonságoknak teljesülnie kell: bármely két nyílt halmaz uniója illetve metszete is nyílt kell legyen.

Definíció 1.3. Mérhető tér
Legyen $\Omega \neq \emptyset$, $\mathfrak{F} \subseteqq 2^{\Omega}$ σ-algebra. Ekkor az $(\Omega, \mathfrak{F})$ rendezett pár neve mérhető tér.

Definíció 1.4. Elemi események (véges eseménytér esetén)
Ha Ω véges, az egyelemű részhalmazait elemi eseményeknek nevezzük.

Definíció 1.5. Teljes eseményrendszer
$\big(A_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer ha $A_i \cap A_j = \emptyset \quad, i \neq j$ és

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Példa 1.1. Különböző σ-algebrák ugyanazon eseménytér felett

$$\mathfrak{F}_1 = \big\{\emptyset, \Omega\big\} = \big\{\emptyset, \{🐶, 🐱, 🐰, 🐷\}\big\}$$

$$\mathfrak{F}_2 = \big\{\emptyset, \Omega, \{🐶, 🐱\}, \{🐰, 🐷\}\big\}$$

$$\mathfrak{F}_3 = 2^{\Omega}$$

Példa 1.2. Legyen Ω (nemüres) tetszőleges és $x \in \Omega$. Legyen $\mathfrak{F} \stackrel{\circ}{=} \big\{\emptyset\big\} \bigcup \big\{A \subseteqq \Omega | x \in A\big\}$ σ-algebra-e $\mathfrak{F}$?
MO: Nem mert ugyan $\cup$-ra és $\cap$-re zárt, de $A \in \mathfrak{F} \rightsquigarrow A^C \notin \mathfrak{F}$.

Állítás 1.1. *$\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{H} \subseteqq 2^{\Omega}$ tetszőleges. Ekkor $\exists$ egy legszűkebb Ω-beli σ-algebra ($\mathfrak{F}$) amire $\mathcal{H} \subseteqq \mathfrak{F}$.*

Definíció 1.6. Generált σ-algebra
A $\mathcal{H}$ által generált σ-algebra a legszűkebb Ω-beli σ-algebra ($\mathfrak{F}$) amire $\mathcal{H} \subseteqq \mathfrak{F}$. Jele: $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}$

Példa 1.3. Generált σ-algebra
$\Omega = \{🐶, 🐱, 🐰, 🐷\}$

$\mathcal{H} = \big\{🐰\big\} \rightsquigarrow \mathfrak{F}_{\mathcal{H}} = \big\{\emptyset, \Omega, \{🐰\}, \{🐶, 🐱, 🐷\}\big\}$

1.3 Borel halmazok, mérhető függvény

Ahhoz, hogy a következő fogalmakat korrekt módon tudjuk bevezetni, definiálnunk kell az ún Borel-halmazok fogalmát. Ha matmatikailag korrektek szeretnénk lenni, sok állítás esetében nem mondhatunk 'bármilyen részhalmaz'-t, mert (legfőképp megszámlálhatatlanul végtelen számosságú halmazok esetén) nagyon elvetemült részhalmazok is lehetnek (ők a nem Borelek).

Tehát akkor Borel halmazok:

$\Omega \stackrel{\circ}{=} \mathbb{R}$

$\mathcal{G} \overset{\circ}{=} \big\{G \subseteq \mathbb{R} \mid G \text{ nyílt}\big\}$
$\mathcal{P} \overset{\circ}{=} \big\{[a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\big\}$
$\mathcal{I} \overset{\circ}{=} \big\{I \subseteq \mathbb{R} \mid I \text{ intervallum}\big\}$

Megjegyzés. A '$\overset{\circ}{=}$' jelölés jelentése: definíció szerint egyenlő, azaz 'legyen'.

Állítás 1.2. $\mathfrak{F}_{\mathcal{G}} = \mathfrak{F}_{\mathcal{P}} = \mathfrak{F}_{\mathcal{I}}$

Definíció 1.7. Borel halmazok
$\mathfrak{F}_{\mathcal{I}}$ elemei: $\mathbb{R}$-beli Borel-halmazok. Jelölésük: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ vagy $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Definíció 1.8. Mérhető függvény
$(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fv mérhető ha $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén
$\overset{-1}{f} < B > \overset{\circ}{=} \big\{\omega \in \Omega | f(\omega) \in B\big\} \in \mathfrak{F}$
avagy 'minden Borel halmaz ősképe $\mathfrak{F}$-beli'

Megjegyzés. Vegyük észre hogy a definícióban csak '$\in$' szerepel, nem kell hogy ráképzés legyen.

Példa 1.4. Nem mérhető függvény
$\Omega \overset{\circ}{=} \{$ 🐷, 🐱 $\}$, $\mathfrak{F} \overset{\circ}{=} \{\emptyset,\ \Omega\}$
$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f($🐷$) \overset{\circ}{=} 1$, $f($🐱$) \overset{\circ}{=} 0$
$\rightsquigarrow \overset{-1}{f} < \{1\} > = \{$ 🐷 $\} \notin \mathfrak{F}$

Megjegyzés. Miért Borel az $\{1\}$ (azon kívül hogy megbeszéltük hogy minden olyan $\mathbb{R}$-beli halmaz amit el tudunk képzelni Borel)? Mert pl a [0,1] és az [1,2] intervallumok metszete. Márpedig a Borelek halmaza megegyezik az intervallumok által generált σ-algebrával, a σ-algebra pedig, mint tudjuk, metszetzárt.

Megjegyzés. Változtassuk meg a σ-algebrát: Legyen
$\mathfrak{F}' \overset{\circ}{=} 2^{\Omega} = \{\emptyset,$ { 🐷 }, { 🐱 }, { 🐷, 🐱 } $\}$ $\rightsquigarrow$ ekkor f mérhető!

Megjegyzés. A rövidebb jelölés érdekében amikor a továbbiakban azt mondjuk hogy $f : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mérhető, továbbra is arra gondolunk hogy f Ω-ból $\mathbb{R}$-be képez, de hozzátesszük hogy f $\mathfrak{F}$ szerint mérhető (ha nem mondjuk meg hogy mi szerint, nincs értelme). A pontos terminológia: Az f függvény $\mathfrak{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mérhető.

Állítás 1.3. $f, g : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *mérhető,* $\lambda \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f + g,\ f \cdot g,\ \lambda \cdot f,\ \lambda \cdot g$ *mérhető*[2].

1.4 Mérték, Valószínűség

Definíció 1.9. Mérték
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér. Egy $\mu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ fv mérték ha

1. $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{F}$

[2] ahol persze $(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$ stb

2. $\mu(\emptyset) = 0$

3. Teljesül az úgynevezett σ-additivitás, azaz:

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathfrak{F}$-beli sorozatra melyre $A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m$

Megjegyzés. Ha a 3-ik tulajdonságnál a szumma csak véges sok elemet tartalmaz, az egy speciális eset (csak véges sok $A_n \neq \emptyset$).

Definíció 1.10. Valószínűség
Ha μ mérték, és $\mu(\Omega) = 1$, akkor μ valószínűség vagy valószínűségi mérték (röviden: valség vagy valségi mérték). Jelölése: P.

Definíció 1.11. Valószínűségi mező
Az $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ hármas valószínűségi mező, ha

- $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér
- $P : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}_+$ valség

Megjegyzés. Valószínűség tulajdonságai: $\forall A, B \in \mathfrak{F}$

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
- $P(\Omega \setminus A) = P(A^C) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.5 Valószínűségi változó, eloszlás, eloszlásfüggvény

Definíció 1.12. Valószínűségi változó
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező. Egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető fv neve: valószínűségi változó.

Megjegyzés. A $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ jelölés alatt továbbra is egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valváltozót értünk, de ezzel a jelöléssel hangsúlyozzuk, hogy Ω-hoz az $\mathfrak{F}$ eseményalgebra, ehhez pedig a P valószínűség tartozik, a valváltozót pedig ezek esetén vizsgáljuk. Ahogy látni fogjuk, minden amit valváltozókról mondani fogunk függ ezen 'kísérő' objektumtól. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a valváltozó 'csomagban jön' egy valószínűségi mezővel.

Definíció 1.13. Valószínűségi változó által generált σ-algebra
Legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált. A ξ által generált σ-algebra:

$$\mathfrak{F}_\xi \stackrel{\circ}{=} \text{ a } \overset{-1}{\xi} < B > \text{ halmazok által generált } \sigma\text{-algebra, ahol } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{1}$$

Definíció 1.14. Valószínűségi változó eloszlása
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ξ eloszlása:

$$Q_\xi(A) \stackrel{\circ}{=} P\left(\overset{-1}{\xi} < A >\right)$$

Megjegyzés. A valószínűségi változó eloszlása

Definíció 1.15. Azonos eloszlású valószínűségi változók
$\xi,\ \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valváltozók azonos eloszlásúak, ha $Q_\xi = Q_\eta$

Definíció 1.16. Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált A ξ val vált eloszlás fv-e:

$$\begin{aligned} F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ F_\xi(x) &= P(\xi < x) = P(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) < x\}) \\ &= P\left(\overset{-1}{\xi} <] -\infty, x[>\right) \end{aligned}$$

Eloszlásfüggvény tulajdonságai:

- Monoton nő
- $\lim\limits_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$
- F_ξ balról folytonos

Megjegyzés. Eloszlás és eloszlásfüggvény kapcsolata Speciális eset ha a halmaz, ami az eloszlás argumentuma egy félegyenes ($\xi < x$):

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P\left(\overset{-1}{\xi} <] -\infty, x[>\right) = Q_\xi\left(] -\infty, x[\right)$$

Megjegyzés. Azonos eloszlású valószínűségi változók eloszlásfüggvénye Ha $\xi,\ \eta$ azonos eloszlásúak akkor persze)

$$P\big(\xi < x\big) = P\big(\eta < x\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Állítás 1.4. *Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan fv hogy*

- *F monoton nő*
- $\lim\limits_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$
- *F balról folytonos*

$\Rightarrow \exists\, (\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *val mező és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *val vált hogy* $F_\xi = F$

bizonyítás: [1]

2 Függetlenség

2.1 Események függetlensége, teljes valószínűség tétel, Bayes tétel

Definíció 2.1. Események függtlensége
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $A, B \in \mathfrak{F}$ függetlenek ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Definíció 2.2. Feltételes valószínűség
Legyen $B \in \mathfrak{F}$. Egy $A \in \mathfrak{F}$ feltételes valsége B szerint (tfh $P(B) \neq 0$)

$$P(A|B) \stackrel{\circ}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$$

Megjegyzés. A és B független $\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$ $\Leftrightarrow$ $P(B|A) = P(B)$ (tfh $P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0$)

Definíció 2.3. Eseményrendszer függetlensége
$n \in \mathbb{N}$ $\big(A_k\big)_{1 \leq k \leq n}$ eseményrendszer független, ha páronként függetlenek.

Ekkor

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P\big(A_k\big)$$

Megjegyzés. A fenti következmény általános esetben (több mint 2 esemény esetén) nem elégséges feltétele a függetlenségnek.

Tétel 2.1. Teljes valószínűség tétele
$B_1, ..., B_n$ teljes eseményrendszer, és $\forall i$-re $P\big(B_i\big) > 0$. $A \in \mathfrak{F}$ tetszőleges, $P(A) \neq 0$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \tag{2}$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} A =& A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n) \\ \Rightarrow& P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \end{aligned}$$

és mivel

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ \Rightarrow\ P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \qquad \square$$

Tétel 2.2. Bayes tétel
$B_1, ..., B_n$ teljes eseményrendszer, és $\forall i$-re $P\big(B_i\big) > 0$. $A \in \mathfrak{F}$ tetszőleges, $P(A) \neq 0$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} \tag{3}$$

Bizonyítás

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} \quad , \quad P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)}$$

$$P(B_k|A)P(A) = P(B_k \cap A) = P(A|B_k)P(B_k)$$

$$\Rightarrow P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} \qquad \square \tag{4}$$

2.2 Valószínűségi változók függetlensége

Definíció 2.4. Valószínűségi változók függetlensége
$\xi,\ \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valváltozók. ξ és η függetlenek, ha $\forall \big(A_k\big)_{1 \leq k \leq n}$ $\mathfrak{F}_\xi$-beli és $\big(B_j\big)_{1 \leq j \leq m}$ $\mathfrak{F}_\eta$-beli rendszer független ($n, m \in \mathbb{N}^+$).

A két rendszer függetlensége azt jelenti hogy ha bármit veszek a két rendszerből (A_k-ból és B_j-ból) azok függetlenek (mint események).

3 Diszkrét eloszlások

Diszkrétnek akkor hívunk egy valváltozót, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel.

3.1 Binomiális eloszlás

Definíció 3.1. Binomiális eloszlás
Azt mondjuk hogy a $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó (n, p)-paraméterű binomiális eloszlású ($p \in]0, 1[$), ha

$$P\big(\xi = k\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \le k \le n \tag{5}$$

Binomiális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \sum\limits_{m=0}^{k} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} & \text{ha } k < x \le k+1 \quad 0 \le k < n \\ 1 & \text{ha } x > n \end{cases} \tag{6}$$

Megjegyzés. Az 1.4 állítás értelmében ilyen F-hez létezik $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező (mivel a feltételek teljesülnek).

Példa 3.1. Hogy néz ki egy binomiális eloszlású valváltozóhoz tartozó valószínűségi mező? ($\Omega =?$, $\mathfrak{F} =?$, $P =?$)
Tekintsük az n=200, p=0.1 paraméterű binomiális eloszlást. Legyen

$$\Omega \stackrel{\circ}{=} \{0, 1, 2, \ldots, 200\} \qquad \mathfrak{F} \stackrel{\circ}{=} 2^\Omega \qquad \xi \text{ pedig az identitás: } \xi(\omega) \stackrel{\circ}{=} \omega$$

mivel $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 200\}$, az alábbi jelölést is használhatjuk: $\xi(k) = k$.
Legyen továbbá

$$P\big(\xi = j\big) = P\big(\{j\}\big) \stackrel{\circ}{=} \binom{200}{j} (0.1)^j (0.9)^{200-j} \qquad 0 \le j \le 200$$

Megjegyzés. Szigurúan véve így csak az elemi eseményekre $(\{0\}, \{1\}, \{2\} \ldots \{200\})$ definiáltuk P-t. Általában nem hangsúlyozzuk, de természetesen (hogy mérték lehessen), a nem elemi eseményekre az additivitást feltételezzük (pl $P(\{1,2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\})$ - így már valóban $\mathfrak{F} = 2^\Omega$ minden elemére, azaz $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 200\}$ minden részhalmazára tudjuk P értékét)

Teljesíti-e ez a konstrukció azon tulajdonságokat, melyeket a valószínűségtol elvárunk? A pozitivitás és a (σ-)additivitás triviálisan teljesül. Kell továbbá hogy Ω-ra P értéke 1 legyen:

$$\sum_{j=0}^{200} P\big(\{j\}\big) = \sum_{j=0}^{200} \binom{200}{j} (0.1)^j (0.9)^{200-j}$$

A binomiális tétel alapján tudjuk hogy $a, b \in \mathbb{R}$-re:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

Legyen $a \mathrel{\overset{\circ}{=}} p$, $b \mathrel{\overset{\circ}{=}} 1-p$ ekkor

$$(p+1-p)^n = (1)^n = \sum_{j=0}^{200} P\big(\{j\}\big) = P\big(\Omega\big) \tag{7}$$

A valváltozónk és eloszlása pedig (kicsit részletesebben kifejtve)

$$\begin{aligned}
&\xi : \Omega \to \mathbb{R} \quad \xi(k) = k \\
&P\big(\xi = k\big) = P\big(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = k\}\big) = P\big(\{k\}\big) = \binom{200}{j} (0.1)^j (0.9)^{200-j}
\end{aligned}$$

3.2 Geometrikus és hipergeometrikus eloszlás

Definíció 3.2. Geometrikus eloszlás
Azt mondjuk hogy a $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó p-paraméterű geometrikus eloszlású ($p \in]0, 1[$), ha

$$P\big(\xi = k\big) = p(1-p)^{k-1} \qquad k \in \mathbb{N} \tag{8}$$

Megjegyzés. Tételezzük fel a továbbiakban hogy a valváltozó az identitás. k nem korlátos, így ebben az esetben ξ ∞ sok (de megszámlálhatóan ∞ sok) értéket vehet fel.

Ebben az esetben a val. mezőnk a következo:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \mathbb{N} \qquad \mathfrak{F} = 2^\Omega \\
&P\big(\{k\}\big) = p(1-p)^{k-1} \ \text{ ha } \ k \neq 0, \quad P\big(\{0\}\big) 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Vizsgáljuk meg ismét hogy Ω-ra 1-e P!

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\big(\{k\}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1 \tag{10}$$

Megjegyzés. $k = 0$-ra a valség 0, így azt a tagot az elso átalakításnál elhagytuk a szummából. Az utolsó egyenloség a geometriai sor összegképletébol következik.

Definíció 3.3. Hipergeometrikus eloszlás
Azt mondjuk hogy a $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó (N, n, K)-paraméterű hipergeometrikus eloszlású ($K \leq n \leq N$, $N, n, K \in \mathbb{N}$), ha

$$P\big(\xi = k\big) = \frac{\begin{pmatrix} K \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-K \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \tag{11}$$

3.3 Poisson eloszlás

Definíció 3.4. Poisson eloszlás
Azt mondjuk hogy a $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó λ-paraméterű Poisson eloszlású ($\lambda > 0$), ha

$$P\big(\xi = k\big) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{12}$$

Ismét csak kell: $P(\mathbb{N}) = 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^\lambda} = 1$$

Az exponenciális függvény Taylor-sorát használtuk.

3.4 Binomiális és Poisson eloszlás kapcsolata

A Poisson eloszlás jól közelíti a binomiálist, ha n nagy és p kicsi, sőt a Poisson eloszlás a binomiális határértéke, ha $np = \lambda$ állandó és $n \to \infty$. Ekkor $p = \frac{\lambda}{n}$

$$P(\xi = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \tag{13}$$

Rögzített k esetén az első tényező 1-hez tart ha $n \to \infty$, hiszen

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}...\frac{n-k+1}{n}$$

$$= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \tag{14}$$

mind a k darab tényezője 1-hez tart. Az $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ hatványnak is 1 a határértéke, mert az alapja 1-hez tart, a kitevője pedig konstans. Az utolsó tényezőre pedig

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^n = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}, \text{ ha } n \to +\infty$$

Tehát

$$\lim_{n\to+\infty} P(\xi = k) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \tag{15}$$

ami valóban a Poisson-eloszlás k indexű valószínűsége.

4 Integrál és várható érték

4.1 Függvény halmaz feletti, mérték szerinti integrálja

Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűség imező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valvált (így mérhető)

Definíció 4.1. Karakterisztikus függvény vagy indikátorfüggvény
Legyen $A \in \mathfrak{F}$. A karakterisztikus/indikátor függvénye:

$$\chi_A(\omega) \overset{\circ}{=} \begin{cases} 0 \text{ ha } \omega \in \Omega \setminus A \\ 1 \text{ ha } \omega \in A \end{cases}$$

Megjegyzés. Valószínűségszámításban inkább az utóbbi kifejezés elterjedt, mivel a karakterisztikus függvény-t egy kifejezetten valószínűségszámítási fontos konstrukcióra használják. Hívjuk a továbbiakban $A - t$ a χ_A függvény generátorhalmazának.

Definíció 4.2. Lépcsos függvény vagy egyszeru függvény
Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $\left(\lambda_k\right)_{1 \le k \le n}$ $\mathbb{R}$-beli véges rendszer[3]. Legyen $\left(A_k\right)_{1 \le k \le n}$ $\mathfrak{F}$-beli (halmaz)rendszer.

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(\omega) \overset{\circ}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{A_j}(\omega)$$

Definíció 4.3. Lépcsos függvény (halmaz feletti, mérték szerinti) integrálja
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűség imező, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lépcsos fv. olyan hogy

$$f(\omega) \overset{\circ}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}(\omega)$$

ahol $\left(A_k\right)_{1 \le k \le n}$ olyan $\mathfrak{F}$-beli rendszer hogy $A_j \bigcap A_k = \emptyset$ ha $j \neq k$ és $\alpha_j \in \mathbb{R}$
Ekkor

$$\int_\Omega f dP \overset{\circ}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P(A_j)$$

Megjegyzés. Az $A_j \bigcap A_k = \emptyset$ ha $j \neq k$ feltétel nem szerepel a lépcsos fv-k általános definíciójában, itt viszont megköveteljük.

Példa 4.1. $\Omega = \{$🐶, 🐱, 🐷$\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$, P a számlálómérték ($P(X) = |X|$ azaz X elemszáma), $f = 4\chi_{\{🐱\}} + 3\chi_{\{🐶, 🐷\}}$ ekkor $\int\limits_\Omega f dP = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$

Megjegyzés. Tekintsük a következő példát:

- $\Omega = [0, 1]$
- $f = \chi_{[0, \frac{1}{2}[} + 3\chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$
- $f' = \chi_{[0, \frac{1}{2}[} + 3\chi_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[} + 3\chi_{[\frac{3}{4}, 1]}$

[3] $\mathbb{R}$-beli véges rendszer = véges sok valós szám

Látjuk hogy itt 'valójában' ugyanazt az f-et adtuk, meg, de formálisan f és f' mégis különbözőek. Felvetődik a kérdés hogy ilyen esetekben mi a helyzet $\int\limits_{\Omega} f dP$-vel?

Ilyen esetekben belátható (itt nem részletezzük de lásd MISSSINGREF) hogy $\int\limits_{\Omega} f dP$ $P(A_j)$ tulajdonságai miatt nem függ f alakjától.

Megjegyzés. Általánosságban a lépcsős függvényeknél megengedjük hogy a generátorhalmazok (a halmazok amiknek a karakterisztikus függvényeiből összerakjuk őket) nem diszjunktak legyenek, de tegyük fel a továbbiakban hogy diszjunkt halmazok karakterisztikus függvényeiből állnak. Nyilván ha nem így van, könnyen segíthetünk a dolgon: Ha $\exists A, B \quad A \cap B \neq \emptyset$ és χ_A és χ_B is szerepel a lépcsős függvényben α_A és α_B együtthatóval, definiálhatok a 2 tag helyett 3-at: $\alpha_A \chi_{A \setminus B}$, $\alpha_B \chi_{B \setminus A}$, $(\alpha_A + \alpha_B)\chi_{A \cap B}$

Állítás 4.1. *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mérhető, korlátos fv. $\Rightarrow \exists \big(f_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ fv. sorozat, hogy*

- $\forall n \in \mathbb{N} : f_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *lépcsős*
- $\forall n \in \mathbb{N}$ *és* $\omega \in \Omega$ *esetén* $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ *(azaz $\big(f_n(\omega)\big)_{n \in \mathbb{N}}$) rögzített ω esetén monoton növő.*
- $\forall \omega \in \Omega : f_n(\omega) \to f(\omega)$ *(ahogy $n \to \infty$)*

Az állítás bizonyítását lásd: MISSSINGREF.

Definíció 4.4. Korlátos pozitív mérhető függvény integrálja
$f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mérhető és korlátos. Legyen $\big(f_n\big)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$ lépcsős fv. sorozat: $f_n \nearrow f$. Ekkor

$$\int\limits_{\Omega} f dP \stackrel{\circ}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\int\limits_{\Omega} f_n dP \right) \tag{16}$$

Megjegyzés. A fenti limes létezik, mert az integrálok sorozata monoton és korlátos. Ami nem triviális az az hogy nem függ f_n-től MISSSINGREF.

Megjegyzés. Az $f_n \nearrow f$ jelölés jelentése: monoton növekvően tart.

Állítás 4.2. *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mérhető, (nem feltétlenül korlátos) fv. $\Rightarrow \exists \big(f_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ fv. sorozat, hogy*

- $f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *mérhető és korlátos*
- $f_n \nearrow f$

Az állítás bizonyítását lásd: MISSSINGREF.

Definíció 4.5. Mérhető pozitív függvény integrálja
$f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mérhető. Legyen $\big(f_n\big)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$ mérhető, korlátos fv-k sorozata: $f_n \nearrow f$. Ekkor

$$\int\limits_{\Omega} f dP \stackrel{\circ}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\int\limits_{\Omega} f_n dP \right) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \tag{17}$$

ahol $\overline{\mathbb{R}}_+ \stackrel{\circ}{=} \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$

Definíció 4.6. Függvény pozitív és negatív része
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető.

- $f^+ \stackrel{\circ}{=} \max\{f, 0\}$ azaz f pozitív része
- $f^- \stackrel{\circ}{=} \max\{-f, 0\}$ azaz f negatív része

$\omega \in \Omega$ tetszőleges esetén

$$f^+(\omega) = \begin{cases} f(\omega) \text{ ha } f(\omega) \geq 0 \\ 0 \text{ ha } f(\omega) < 0 \end{cases}$$

Megjegyzés. $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

Állítás 4.3. *$f : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető $\Leftrightarrow$ f^+ és f^- mérhető.*

Definíció 4.7. Mérhető függvény integrálja
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető.

$$\int\limits_\Omega f dP \stackrel{\circ}{=} \left(\int\limits_\Omega f^+ dP\right) - \left(\int\limits_\Omega f^- dP\right) \tag{18}$$

ha a jobb oldal értelmes (azaz legfeljebb az egyik tag végtelen)

- f integrálható (vagy röviden intható) ha $\exists \int\limits_\Omega f dP$ $(\in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, \infty\})$
- f végesen integrálható (végesen intható) ha $\int\limits_\Omega f dP \in \mathbb{R}$

Állítás 4.4. *$f : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető*

$$\exists \text{ és } \left(\int\limits_\Omega f dP\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int\limits_\Omega |f| dP = \int\limits_\Omega f^+ dP + \int\limits_\Omega f^- dP \in \mathbb{R} \tag{19}$$

Megjegyzés. A jobb oldal mindig létezik, mert pozitív függvény integrálja létezik (persze lehet ∞ is).

Állítás 4.5. *$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető, $\lambda \in \mathbb{R}$*

- $\int\limits_\Omega (f + g) dP = \left(\int\limits_\Omega f dP\right) + \left(\int\limits_\Omega g dP\right)$, *ha a jobb oldal* $\exists$
- $\int\limits_\Omega \lambda f dP = \lambda \int\limits_\Omega f dP$
- $\left|\int\limits_\Omega f dP\right| \leq \int\limits_\Omega |f| dP$, *ha a bal oldal* $\exists$
- $f \leq g \Rightarrow \int\limits_\Omega f dP \leq \int\limits_\Omega g dP$

Definíció 4.8. Várható érték
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó

A ξ valószínűségi változó várható értéke (ha $\exists$):

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi \, dP \tag{20}$$

Tétel 4.1. Markov egyenlőtlenség
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi \geq 0 : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó , $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon} \tag{21}$$

Megjegyzés. A fenti tételben fontos feltétel hogy $\xi \geq 0$

Bizonyítás

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \xi \, dP \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \varepsilon \, dP = \varepsilon \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} 1 \, dP = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon)$$

4.2 Várható érték kiszámítása

Legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valvált. Ekkor ξ képtere

$$Im\ \xi = \{\xi_n | n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) | \omega \in \Omega\}$$

Tfh. ξ integrálható ($\exists E(\xi)$). Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n) \tag{22}$$

Ahol ξ_n: ξ lehetséges értékei

Példa 4.2. Kockadobás $\xi_n :\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$E(\xi) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = 3.5$$

4.3 Diszkrét eloszlások várható értéke

4.3.1 Binomiális eloszlás várható értéke

Állítás 4.6. *Az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke $= np$*

Bizonyítás

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \le k \le n$$

$$E(\xi) = \sum_{j=0}^{n} (\xi_j P(\xi = \xi_j)) = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \underbrace{j \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}}_{j=0\text{-ra } 0 \ (0!=1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \tag{23}$$

$$y \stackrel{\circ}{=} j-1 \quad m \stackrel{\circ}{=} n-1 \quad \rightsquigarrow \quad j = 1 \to y = 0 \quad j = n \to y = n-1 = m$$

$$E(\xi) = \sum_{y=0}^{m} \frac{(m+1)!}{y!(m-y)!} p^{y+1} (1-p)^{m-y}$$

$$= (m+1)p \sum_{y=0}^{m} \frac{(m)!}{y!(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y}$$

$$= np \underbrace{\sum_{y=0}^{m} \frac{(m)!}{y!(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y}}_{*} \tag{24}$$

$$a \stackrel{\circ}{=} p \quad b \stackrel{\circ}{=} (1-p)$$

$$* = \sum_{y=0}^{m} \frac{(m)!}{y!(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y} = \sum_{y=0}^{m} \underbrace{\frac{(m)!}{y!(m-y)!}}_{\binom{m}{y}} a^y b^{m-y}$$

$$= (a+b)^m = (p+1-p)^m = 1 \qquad \square \tag{25}$$

Ahol az utolsó előtti egyenlőség a binomiális tételből következik

$$(a+b)^m = \sum_{y=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ y \end{array} \right) a^y b^{m-y}$$

Megjegyzés. Binomiális eloszlás várható értéke máshogy Tekintsünk a ξ (n,p) paraméterű binomiális eloszlású változóra úgy mintha n db (cinkelt - $p \neq 1/2$) érmét dobnánk fel. Az egyes érmék vagy fejek vagy nem (a fej dobás valsége p), és valószínűségi változóknak tekinthetőek $(\xi_1, ..., \xi_n)$. Ha fej akkor ξ_j értéke 1, egyébként 0.

Ekkor az eredeti valváltozó (értéke) tekinthető egy származtatott értéknek:

$$\xi \stackrel{\circ}{=} \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$$

ekkor (mivel láttuk hogy a várható érték képzés egy integrálnak felel meg, az integrál pedig lineáris)

$$E(\xi_j) = p \rightarrow E(\xi) = np$$

4.3.2 Geometrikus eloszlás várható értéke

Geometrikus eloszlás esetén

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Állítás 4.7. *A p paraméterű geometrikus eloszlás várható értéke* $= \frac{1}{p}$

Bizonyítás

$$E(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j P(\xi = \xi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} jp(1-p)^{j-1} = p \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1}$$

Tudjuk hogy $\frac{1}{1-x}$ hatvnysora a $]-1,1[$ intervallumon

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

Ebből következik hogy

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} jx^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1}$$

Legyen $x \stackrel{\circ}{=} (1-p)$. Ekkor a hatványsor konvergenciasugarán belül maradunk, így használhatjuk a fenti összefüggéseket. Ekkor

$$E(\xi) = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \tag{26}$$

4.3.3 Poisson eloszlás várható értéke

Poisson eloszlás esetén

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Állítás 4.8. *A λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke = λ*

Bizonyítás

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j P(\xi = \xi_j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{(j)!} = e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda \end{aligned} \tag{27}$$

4.3.4 Hipergeometrikus eloszlás várható értéke

Tudjuk hogy a $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó (N, n, K)-paraméterű hipergeometrikus eloszlású ($K \leq n \leq N$, $N, n, K \in \mathbb{N}$), ha

$$P(\xi = k) = \frac{\begin{pmatrix} K \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-K \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \tag{28}$$

Állítás 4.9. *Az (N, n, K) paraméterű hipergeometrikus eloszlás várható értéke = $n\frac{K}{N}$*

Bizonyítás Gondoljunk a szokásos példára. Egy urnában N darab golyó van, közölük K darab piros és $N-K$ darab fehér (ebből húzunk n-et). Egymás után, visszatevés nélkül húzva a golyókat legyen

$$\xi_i = \begin{cases} 1 \text{ , ha az i-ik alkalommal piros golyót húzunk} \\ 0 \text{ , ha az i-ik alkalommal fehér golyót húzunk} \end{cases}$$

Első húzáskor $P(\xi_1 = 1) = \frac{K}{N}$ és $P(\xi_1 = 0) = 1 - \frac{K}{N}$, tehát

$$E(\xi_1) = 1\frac{K}{N} + 0\left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N}$$

A második húzáskor

$$\begin{aligned} P(\xi_2 = 1) &= P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 1)P(\xi_1 = 1) + P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 0)P(\xi_1 = 0) \\ &= \frac{K-1}{N-1}\frac{K}{N} + \frac{K}{N-1}\left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N} \end{aligned} \tag{29}$$

ezért $P(\xi_2 = 0) = 1 - \frac{K}{N}$ és

$$E(\xi_2) = 1\frac{K}{N} + 0\left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N}$$

Hasonlóan a többi ξ_i várható értéke is $\frac{K}{N}$ ezért

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n \quad \Rightarrow \quad E\big(\xi\big) = E(\xi_1) + ... + E(\xi_n) = n\frac{K}{N}$$

5 Lebesgue mérték és mértékek tulajdonságai

5.1 Lebesgue mérték

Definíció 5.1. Lebesgue-külső mérték

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges.

$$\overline{\lambda}(A) \stackrel{\circ}{=} inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \ \mid \ A \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n \ \ , \ \ (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \ \text{ intervallum} \right\} \tag{30}$$

Ahol $\lambda(I)$: I hossza.

$\overline{\lambda}(A) \geq 0$ (lehet $+\infty$ is)

Példa 5.1. Tekintsük a következő eseteket

- $A \stackrel{\circ}{=} [1,2] \rightsquigarrow \overline{\lambda}(A) = 1$
- $A \stackrel{\circ}{=} [1,2] \bigcup]3,5[\rightsquigarrow \overline{\lambda}(A) = 3$
- $A \stackrel{\circ}{=} \sqrt{2}$ legyen $I_m \stackrel{\circ}{=} \left[\sqrt{2} - \frac{1}{m}, \sqrt{2} + \frac{1}{m}\right]$ ekkor

$$\overline{\lambda}\left(I_m\right) = \frac{2}{m} \qquad \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\sqrt{2}\} \qquad \overline{\lambda}\left(A\right) = 0 = inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_m) \ \mid \ \{\sqrt{2}\} \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_m \right\}$$

Állítás 5.1. $\overline{\lambda}(\mathbb{N}) = 0$

Bizonyítás:

- Első lépesben az $\{1\}$-et lefedem egy 1 hosszú intervallummal (pl $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$), a $\{2\}$-t egy $1/2$ hosszúval (így véges lesz az öszhossz), stb.
- Második lépesben $\{1\}$-et egy $1/2$ hosszú intervallummal fedem, a $\{2\}$-t egy $1/4$ hosszúval, stb
- $\vdots$

Az összhosszak inf-a=0.

Általában: Ha $A \subseteq \mathbb{R}$ megszámlálható $\rightsquigarrow \overline{\lambda}(A) = 0$

A probléma az hogy $\overline{\lambda}$ $2^{\mathbb{R}}$-en nem mérték, mivel nem minden halmaz mérhető (az ellenpélda nem triviális, és a kiválasztási axiómát használja MISSINGREF), ezért, hogy korrektek legyünk, kissé meg kell szorítani a konstrukciót hogy tényleg mérték legyen - szerencsére mint látni fogjuk így is minden 'értelmes' halmazon működni fog.

Állítás 5.2. $\exists\ \mathcal{M}_\lambda \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ *halmazrendszer hogy*

- $\mathcal{M}_\lambda$ *σ-algebra*
- $\mathcal{M}_\lambda \neq 2^{\mathbb{R}}$
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_\lambda$ *(tartalmazza a Borel-eket)*
- $\overline{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda} : \quad \mathcal{M}_\lambda \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *mérték (ahol* $\overline{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda}$ *jelentése:* $\overline{\lambda}$ *megszorítva* $\mathcal{M}_\lambda$*-ra)*

Definíció 5.2. Lebesgue mérték

$$\lambda = \lambda \mathrel{\overset{\circ}{=}} \overline{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda} \tag{31}$$

Definíció 5.3. Lebesgue 0-mértékű halmaz

$A \in \mathcal{M}_\lambda$ Lebesgue-0 mértékű ha $\lambda(A) = 0$

Ilyen például $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{Q}$

Definíció 5.4. Lebesgue mérték szerinti integrál

$$\int_{[a,b]} f d\lambda$$

ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető fv (mérhető λ szerint, azaz $\forall$ Borel őssképe $\mathcal{M}_\lambda$-beli)
A konstrukció ugyanúgy felépíthető $\mathbb{R}$-en λ szerint, mint $\int\limits_{\Omega} f dP$ Ω-n P szerint. Lásd: 4.1. fejezet.

Állítás 5.3. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhaó $\Leftrightarrow$ f folytonos egy Lebesgue 0 mértékű halmazon kívül. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$$

Tehát 'szép' függvények esetén a Lebesgue integrál megegyezik a hagyományos, Riemann integrállal.

Példa 5.2. $\mathbb{R}$-en nem Lebesgue integrálható fv
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) \mathrel{\overset{\circ}{=}} \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

A pozitív rész:

$$g^+(x) \mathrel{\overset{\circ}{=}} \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

A negatív rész:

$$g^-(x) \mathrel{\overset{\circ}{=}} \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} g\ d\lambda = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g^{+} d\lambda}_{+\infty} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g^{-} d\lambda}_{+\infty}$$

tehát $\infty - \infty$ alakú, azaz nem létezik (indefinit).

5.2 Mértékek abszolút folytonossága és szingularitása

Definíció 5.5. Mértékek abszolút folytonossága és szingularitása
$(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér. Legyen $\mu_1, \mu_2 : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}_+$ mérték

- μ_1 abszolút folytonos μ_2-re, ha

$$(\forall A \in \mathfrak{F})\,(\mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0)$$

  jelölés: $\mu_1 \ll \mu_2$

- μ_1 szinguláris μ_2-re, ha

$$\begin{aligned} &\exists\ \Omega_1,\ \Omega_2 \in \mathfrak{F} \quad \Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega_1 \bigcup \Omega_2 = \Omega \\ &\mu_1(\Omega_1) = 0 \ \text{ és } \ \mu_2(\Omega_2) = 0 \end{aligned}$$

jelölés $\mu_1 \perp \mu_2$

Abszolút folytonosság tulajdonságai:

- tranzitív: $\mu_1 \ll \mu_2 \ \ \& \ \ \mu_2 \ll \mu_3 \quad \Rightarrow \mu_1 \ll \mu_3$
- reflexív: $\mu_1 \ll \mu_1$
- nem szimmetrikus: $\mu_1 \ll \mu_2 \not\Rightarrow \mu_2 \ll \mu_1$

Szingularitás tulajdonságai:

- Nem tranzitív
- nem reflexív
- Szimmetrikus $(\Omega_1' = \Omega_2,\ \Omega_2' = \Omega_1)$

Definíció 5.6. σ-véges mérték
$(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér, $\mu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}_+$ mérték σ-véges, ha $\exists\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathfrak{F}$-ben haladó sorozat hogy

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega \ \text{ és } \ \mu\left(A_n\right) < +\infty \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Példa 5.3. Lefedjük $\mathbb{R}$-et 1 hosszú intervallumokkal, μ pedig λ. Ekkor μ σ-véges, pedig $\mathbb{R}$ mértéke ∞

Tétel 5.1. Lebesgue-felbontás
$(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér, $\mu, \nu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}_+$ σ-véges mérték. Ekkor $\exists!$ μ_1 & $\mu_2 : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}_+$ mérték, hogy $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 \ll \nu$, $\mu_2 \perp \nu$

Ahol $\exists!$ jelentése: Egyértelműen létezik. μ_1 elnevezése: μ abszolút folytonos része, μ_2 elnevezése: μ szinguláris része.

Tétel 5.2. Radon-Nikodym
$(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér, $\mu, \nu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}_+$ mértéke, $\mu \ll \nu$. Ekkor $\exists!$ $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mérhető hogy

$$\forall A \in \mathfrak{F} : \ \mu(A) = \int_A f d\nu = \int_\Omega (\chi_A f) d\nu$$

Definíció 5.7. Radon-Nickodym derivált
Ekkor f-et $\frac{d\mu}{d\nu}$-vel jelöljük és a μ mérték Radon-Nickodym deriváltjának hívjuk ν szerint.

5.3 Improprius Riemmann és Lebesgue integrálhatóság kapcsolata

Példa 5.4. Nem improprius Riemann-integrálható, de Lebesgue integrálható fv
A Dirichlet fv (1-et vesz fel ha az argumentuma racionális szám, 0-t egyébként):

$$\lambda(\mathbb{Q}) = 0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda$$

Példa 5.5. Improprius Riemann-integrálható, de nem Lebesgue integrálható fv

$$f(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

Belátható hogy improprius Riemann integrálható MISSINGREF, viszont:

- a $-\pi$ és π közti rész területét ha alulról közelítem egy befoglalt háromszöggel akkor annak a területe (alap $\cdot$ magasság /2): π
- a π és 2π közti rész területét ha alulról közelítem egy befoglalt háromszöggel, akkor annak a területe (alap $\cdot$ magasság /2):

$$\frac{sin\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}$$

- A 2π és 3π közti rész hasonlóan $\frac{1}{5}$.

A pozitív rész alsó becslése tehát:

$$\pi + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + ...$$

ami divergens. Hasonlóan a negatív rész is divergens, ezért a Lebesgue integrál nem létezik.

6 Folytonos eloszlások

6.1 Sűrűségfüggvény

Ismétlés. Eloszlás (1.14-as definíció)
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ξ eloszlása:

$$Q_\xi(A) \overset{\circ}{=} P\left(\overset{-1}{\xi}< A >\right)$$

Definíció 6.1. Folytonos eloszlású valószínűségi változó A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált. folytonos eloszlású ha $Q_\xi \ll \lambda_\mathbb{R}$

ahol $Q_\xi, \lambda_\mathbb{R} : \quad \mathcal{B}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

Megjegyzés. Ha ξ folytonos eloszlású akkor amiatt, hogy abszolút folytonos a Lebesgue mértékre, mindenhol nulla, ahol a Lebesgue 0. Ebből következik, hogy egy adott a érték felvételének a valószínűsége 0 $P(\xi = a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$, sőt annak a valószínűsége is 0, hogy megszámlálhatóan sok érték közül valamelyiket felvegye. Folytonos valószínűségi változóknál intervallumba esés valószínűségéről fogunk beszélni, mivel ez már kontinuum sok lehetőséget jelent, ez már lehet nagyobb mint 0.

Állítás 6.1. *Ha ξ folytonos eloszlású, akkor a Radon-Nickodym tétel (5.2) miatt $\exists! f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető*[4] *hogy*

$$\forall A \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : Q_\xi(A) = \int_A f d\lambda_\mathbb{R} \tag{32}$$

Definíció 6.2. Sűrűségfüggvény A fenti állításban szereplő f a ξ val vált. sűrűségfüggvénye. (Vagy a Q_ξ eloszlás sűrűségfüggvénye)

Példa 6.1. Eloszlás értékének kiszámolása sűrűségfüggvény segítségével ha a vizsgált halmaz speciálisan egy x végpontú balra végtelen intervallum
Ez valójában az eloszlásfüggvény (ezt már láttuk - lásd 1.5 megjegyzés.)

$$A =]-\infty, x] \qquad Q_\xi(A) = P\left(\overset{-1}{\xi}< A >\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F_\xi(x)$$

ahol felhasználtuk, hogy szép függvények esetén a Lebesgue és a Riemann integrál megegyezik.[5]

[4]Ami itt most annyit jelent hogy Borel őse Borel.
[5]Itt kicsit csaltunk, mert ezt eredetileg csak korlátos intervallumra mondtuk, ki, valamint nem mutattuk meg hogy a sűrűségfüggvény szükség szerűen 'szép'

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- $$f \geq 0$$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f \ dx = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = Q_\xi(\mathbb{R}) = P\big(\overset{-1}{\xi}< \mathbb{R} > \big) = 1$$

A ξ val vált. sűrűségfüggvényét ezen túl f_ξ-vel jelöljük.

Állítás 6.2. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan hogy*

- *f integrálható $\mathbb{R}$-en λ szerint*
- $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$
- *$f \geq 0$, akkor $\exists\, (\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező és $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált. hogy $Q_\xi \ll \lambda$ és f ξ (illetve Q_ξ) sűrűségfüggvénye.*

Állítás 6.3.

$$P(x < \xi < y) = P(x \leq \xi < y) = P(x < \xi \leq y) = P(x \leq \xi \leq y) = F(y) - F(x)$$

6.2 Folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értéke

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_\Omega \xi dP = \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}} dQ_\xi = \int_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{R}} \left(\frac{dQ_\xi}{d\lambda}\right) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \end{aligned} \tag{33}$$

ahol $id_{\mathbb{R}}$ a valós számok felett értelmezett identitásfüggvény. Az első egyenlőség az úgynevezett *mértéktartás* tulajdonságból következik MISSINGREF. $\left(\frac{dQ_\xi}{d\lambda}\right)$ a Radon-Nickodym derivált.

Állítás 6.4. *Ha h $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető (Borel képe Borel), akkor*

$$E(h(\xi)) = \int_\Omega h \ \ dQ_\xi$$

(mivel Q_ξ egy mérték lehet Q_ξ szerint integrálni). Továbbá az abszolút folytonosság miatt ($Q_\xi \ll \lambda$)igaz hogy

$$\int_\Omega h \ \ dQ_\xi = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_\xi dx$$

Állítás 6.5.
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad E(\xi) \text{ véges}$$

Bizonyítás
$E(\xi)$ véges pontosan akkor, ha $E(|\xi|)$ véges, mivel

$$E(\xi) = E(\xi^+) - E(\xi^-) \quad \text{és} \quad E(|\xi|) = E(\xi^+) + E(\xi^-)$$

A baloldali integrál pedig pontosan $E(|\xi|)$ várható értéke (lásd a 6.4 állítást - h az abszolútérték fv). Ezen integrál mindig kétezik, hiszen pozitív függvény integrálját tekintjük (persze nem mindig véges).

Példa 6.2. Cauchy-eloszlás
Legyen
$$f_\xi(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$
tudjuk hogy $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = \pi$ tehát a 6.2 állítás alapján létezik $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ és ξ valváltozó, aminek ez a sűrűségfv-e. A várható érték végességéhez kellene hogy
$$A \stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} |x| f_\xi dx < \infty$$
Viszont
$$A \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx \geq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx}_{\to\infty}$$
Ahol az utolsó tag becslése abból következik hogy ha $x > 1$ akkor
$1 + x^2 < 2x^2 \quad \rightsquigarrow \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{2x^2}$
Eddig csak azt mutattuk meg hogy a várható érték nem véges, de megmutathaó az is hogy nem létezik:
$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} ln(1+x^2)\right]_0^\infty = \infty$$
A $]-\infty, 0[$ tartományon vett integrál ugyanilyen megfontolással $-\infty$. Tehát $\infty - \infty$ (indefinite) alakot kapunk, a várható érték nem létezik.

6.3 Exponenciális eloszlás

Definíció 6.3. Exponenciális eloszlású valószínűségi változó
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó. ξ α-paraméterű $(\alpha > 0)$ exponenciális eloszlású ha

- ξ folytonos eloszlású
- ξ sűrűségfv-e:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$$

Állítás 6.6. *Exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{ha } x \le 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \textit{ha } x > 0 \end{cases}$$

Bizonyítás

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \alpha e^{-\alpha t}dt & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \alpha e^{-\alpha t}dt = \alpha \left[\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t}\right]_0^x = -e^{-\alpha x} + 1$$

a fenti kifejezés $x \to \infty$ esetén (mivel $e^{-\infty} = 0$) 1-hez tart ($x \to -\infty$ esetén 0-hoz, valamint monoton nő), ami azt jelenti hogy a 6.3 definícióban szereplő függvény valóban sűrűségfüggvény.

Állítás 6.7. *α-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{\alpha}$*

Bizonyítás

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx}_{0} + \int_{0}^{\infty} x\ f(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\ \alpha e^{-\alpha x}dx \\ &= \left[x\left(-e^{-\alpha x}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-\alpha x}\right)dx \\ &= 0 - 0 + \left[\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^\infty = \left[\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_\infty^0 = \frac{1}{\alpha} - 0 = \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \tag{34}$$

6.4 Normális eloszlás

Definíció 6.4. Normális eloszlású valószínűségi változó
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó (m, σ) paraméterű normális eloszlású, ha ξ folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{35}$$

Definíció 6.5. Standard normális eloszlású valószínűségi változó
Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó $(m = 0, \sigma = 1)$ paraméterű normális eloszlású, ha ξ folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye [6]:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \tag{36}$$

ekkor eloszlásfüggvényét Φ-vel jelöljük:

$$\Phi(x) \stackrel{\circ}{=} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{37}$$

Állítás 6.8. *Minden normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye (F_ξ) visszavezethető standard normális eloszlásúra mert ha ξ (m, σ) paraméterű normális eloszlású akkor*

$$F_\xi = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{38}$$

Bizonyítás

$$F_\xi = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Legyen

$$z \stackrel{\circ}{=} \frac{t-m}{\sigma} \quad \rightsquigarrow \quad t = m + \sigma z$$

$$t \to -\infty \Leftrightarrow z \to -\infty \qquad t = x \Leftrightarrow z = \frac{x-m}{\sigma}$$

Ekkor, a helyettesítéses integrál képletének segítségével:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = \int_a^b f(g(z))g'(z)dz$$

ahol $g(z) = m + \sigma z$, így $g'(z) = \sigma$

$$F_\xi = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

[6] Az hogy ebben az esetben $\int_{\mathbb{R}} f_\xi = 1$, komplex függvénytan segítségével látható be. Azt kell belátni hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2} dz = \sqrt{2\pi}}$$

(MISSINGREF)

7 Szórás

Definíció 7.1. Szórás és szórásnégyzet
$\xi : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó . Tfh $E(\xi)$ véges. Ekkor ξ szórását $\sigma(\xi)$-vel, vagy $D(\xi)$-vel jelöljük, és a következőképp definiáljuk

$$\sigma(\xi) \mathrel{\overset{\circ}{=}} \sqrt{E\left((\xi - E(\xi))^2\right)}$$

Ennek megfelelően $\sigma^2(\xi)$ elnevezése: Szórásnégyzet vagy variancia. Jelölésére $\sigma^2(\xi)$-n kívül használatos a $V(\xi)$ jelölés is.

Állítás 7.1.

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) \tag{39}$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi) &= E\big((\xi - E(\xi))(\xi - E(\xi))\big) = E\big(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)\big)\\ &= E(\xi^2) - E\big(2E(\xi)\xi\big) + E\big(E^2(\xi)\big) = E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)\end{aligned}$$

A fenti bizonyításban egyrészt a várható érték mint integrál linearitását használtuk, másrészt azt a tényt, hogy konstans függvény (valváltozó), itt $(E^2(\xi))$ várható értéke egyenlő a függvény értékével.

Megjegyzés. Speciálisan, folytonos eloszlású, $f_\xi(x)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változó esetén: $E(\xi) = \int_R x f_\xi(x)dx$ (lásd (33) egyenlet).

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (x - E(\xi))^2 f_\xi(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - 2E(\xi)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx}_{E(\xi)} + E^2(\xi)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx}_{1}\\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\xi(x)dx - E^2(\xi)\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az $E\big((\xi - a)^2\big)$ értéket nevezik másképp ξ a középpontú második *momentum*ának is. E szerint az elnevezés szerint a szórásnégyzet $(\sigma^2(\xi))$ épp ξ $\mu = E(\xi)$ középpontú második, vagy másnéven centrált momentuma.
A második momentum mechanikai interpretációja: Képzeljük el, hogy ξ eloszlása egy tömegeloszlás $\mathbb{R}$-en. Ekkor ξ a középpontú második momentuma épp a tömegeloszlás a középpontú tehetetlenségi nyomatéka, vagyis nem más, mint a tömegeloszlás ellenállása az a középpontú forgatásokkal szemben. Speciálisan, ξ szórásnégyzete épp a $\mu = E(\xi)$ tömegközéppontú tehetetlenségi nyomaték.

Definíció 7.2. Legyen $k > 0$. A ξ valváltozó k-ik (0 középpontú) momentumának az $E(\xi^k)$ mennyiséget nevezik - ha létezik.

Ha nem tesszük hozzá hogy milyen középpontú, vagy hogy centrált, akkor a 0 középpontú momentumra gondolunk.

Példa 7.1. Az exponenciális eloszlás momentumai
Legyen ξ α paraméterű, exponenciális eloszlású. Ekkor a (0-középpontú) k-ik momentumai:

$$E(\xi^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x)dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x^k}_{f} \underbrace{\alpha e^{-\alpha x}}_{g'} dx$$

parciális integrálással ($g = -e^{-\alpha x}$)

$$E(\xi^k) = \left[-x^k e^{-\alpha x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -kx^{k-1}e^{-\alpha x}dx = \frac{k}{\alpha}\int_0^{\infty} x^{k-1}\alpha e^{-\alpha x}dx = \frac{k}{\alpha}E(\xi^{k-1})$$

tehát egy rekurzív képletet kaptunk.

$$E(\xi^0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1 \quad \rightsquigarrow \quad E(\xi^1) = \frac{1}{\alpha} \quad \rightsquigarrow \quad E(\xi^2) = \frac{2}{\alpha^2}..$$

Az első momentum nem más mint a várható érték, ezt már bizonyítottuk a 6.7 állításban. Általánosságban

$$E(\xi^k) = \frac{k!}{\alpha^k}$$

7.1 A szórásnégyzet tulajdonságai

- $\sigma^2(\xi) \geq 0$
- $\sigma^2(a\xi + b) = a^2\sigma^2(\xi)$

Bizonyítás
Az első tulajdonság triviális. A második sem túl bonyolult:

$$\begin{aligned}\sigma^2(a\xi + b) &= E\big(((a\xi + b) - E(a\xi + b))^2\big) = E\big((a\xi + b - aE(\xi) - E(b)))^2\big) \\ &= E\big((a\xi + b - aE(\xi) - b)^2\big) = E\big((a(\xi - E(\xi)))^2\big) = E\big(a^2(\xi - E(\xi))^2\big) \\ &= a^2E\big((\xi - E(\xi))^2\big) = a^2\sigma^2(\xi)\end{aligned}$$

7.2 A szórásnégyzet kiszámítása

A valódi kérdés az, hogyan számítjuk ki $E(\xi^2)$-et (mivel $E^2(\xi)$ kiszámítása triviális).

Diszkrét eset:
Ha ξ diszkrét valváltozó,

$$E(\xi^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\xi_n)^2 P(\xi = \xi_n) \tag{40}$$

ahol ξ_n a ξ valváltozó lehetséges értékeit jelöli.

Folytonos eset:
Ha ξ folytonos valváltozó,

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx \tag{41}$$

Példa 7.2. A Poisson eloszlás szórásnégyzete
Ha ξ Poisson eloszlású valváltozó, akkor

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} [(k-1)+1] \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^\lambda} + \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda + \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Így

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

A várható értéket ($E(\xi) = \lambda$) lásd a 4.8 állításban.

Példa 7.3. Az egyenletes eloszlás szórásnégyzete
Legyen ξ egyenletes eloszlású $[a, b]$-n. Ekkor

$$f_\xi = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in [a, b] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor

$$E(\xi^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)}$$

Példa 7.4. Az exponenciális eloszlás szórásnégyzete
Legyen a ξ valváltozó α paraméterű, exponenciális eloszlású. Ekkor a szórásnégyzete

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

ahol a korábban kiszámolt 2. momentumot és a várható értéket (=első momentum) használtuk fel.

7.3 Csebisev egyenlőtlenség

Állítás 7.2. *Legyen ξ valószínűségi változó, $\varepsilon > 0$ Tegyük fel hogy $E(\xi)$ véges. Ekkor*

$$P\left(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\left(|\xi - E(\xi)|^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2} \tag{42}$$

Bizonyítás

$$\{|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\} = \left\{|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2\right\}$$

erre pedig használjuk a Markov egyenlőtlenséget (21):

$$P\left(|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(|\xi - E(\xi)|^2\right)}{\varepsilon^2}$$

7.4 Független valószínűségi változók várható értéke és szórása

Állítás 7.3. *Ha ξ és η független valváltozók, $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$, ha a várható értékek léteznek.*

Állítás 7.4. *Ha ξ és η független valváltozók, $\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)$.*

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi) \quad \sigma^2(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) \\
\sigma^2(\xi + \eta) &= E\left((\xi + \eta)^2\right) - E^2(\xi + \eta) \\
&= E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - E(\xi + \eta)E(\xi + \eta) \\
&= E(\xi^2) + 2E(\xi)E(\eta) + E(\eta^2) - \left(E^2(\xi) + 2E(\xi)E(\eta) + E^2(\eta)\right) \\
&= E(\xi^2) + E(\eta^2) - E^2(\xi) - E^2(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)
\end{aligned}$$

Példa 7.5. A binomiális eloszlás szórásnégyzete
Ahogy korábban láttuk a 4.3.1 állításban, tekinthetünk a ξ (n, p) paraméterű binomiális eloszlású változóra úgy mintha n db (cinkelt) érmét dobnánk fel. Az egyes érmék vagy fejek vagy nem (a fej dobás valsége p), és valószínűségi változóknak tekinthetőek $(\xi_1, ..., \xi_n)$. Ha fej akkor ξ_j értéke 1, egyébként 0. Ekkor $\xi = \xi_1 + ... + \xi_n$ Ekkor

$$\begin{aligned}
&E(\xi_j^2) = 1^2 p + 0^2(1 - p) = p \\
&\sigma^2(\xi_j) = E(\xi_j^2) - E^2(\xi_j) = p - p^2 = p(1 - p)
\end{aligned}$$

Ebből pedig a 7.4 állítással: $\sigma^2(\xi) = np(1 - p)$ (szigorúan véve a 7.4 állítás csak n=2 esetre alkalmazható, de ebből rekurzióval általános esetben is igaz n-re)

8 Vektor értékű valószínűségi változók

Definíció 8.1. Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k \quad (k \in \mathbb{N}^+)$ fv mérhető ha $\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : \ \overset{-1}{\xi} < B > \in \mathfrak{F}$

Megjegyzés. $\mathbb{R}^k$-beli Borel halmazokat tartalmazó σ-algebrát például nyílt gömbökkel tudjuk generálni.

Definíció 8.2. Vektor értékű valószínűségi változó alatt a

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_k(\omega))$$

vektort értjük, ahol $\omega \in \Omega$ és ξ_j-k valószínűségi változók $1 \le j \le k$.

Definíció 8.3. Ekkor a várható érték a következő vektor (ha létezik)

$$E(\xi) \overset{\circ}{=} (E(\xi_1), E(\xi_2), ..., E(\xi_k))$$

Definíció 8.4. Vektor valváltozó (együttes) eloszlásfüggvénye alatt a következőt értjük

$$F_\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad F_\xi(t) \overset{\circ}{=} P\left(\overset{-1}{\xi} < \prod_{j=1}^{k}] - \infty, t_j[> \right) \tag{43}$$

ahol

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$$

Állítás 8.1. *Vektor valváltozó eloszlásfüggvényének tulajdonságai ($k \ge 2$ esetén).*

- F_ξ *minden változóban monoton nő: Ha* $x_i^* < x_i^{**}$

$$F_\xi(x_1, ..., x_i^*, ..., x_k) \le F_\xi(x_1, ..., x_i^{**}, ..., x_k)$$

- F_ξ *minden változóban balról folytonos*

- $$\lim_{t_j \to -\infty} F_\xi(t) = 0 \qquad \forall\ j = 1, ..., k$$

- $$\lim_{t_1, t_2, ..., t_k \to \infty} F_\xi(t) = 1$$

- $\forall a, b \in \mathbb{R}^k$ *ha* $a < b$ *(minden koordinátában)*

$$\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k} (-1)^{|\varepsilon|} F_\xi \left(a\varepsilon + b(\underline{1} - \varepsilon)\right) \geq 0$$

ahol $|\varepsilon|$*: ahány 1-es van* ε*-ban,* $a\varepsilon$ *és* $b(\underline{1} - \varepsilon)$ *pedig koordinátánkénti szorzatot jelöl, pl:*

$$a\varepsilon = \begin{pmatrix} a_1\varepsilon_1 \\ a_2\varepsilon_2 \\ \vdots \\ a_k\varepsilon_k \end{pmatrix}$$

Megjegyzés. Speciálisan 1 dimenzióban ha $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$

$$\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k} (-1)^{|\varepsilon|} F_\xi \left(a\varepsilon + b(\underline{1} - \varepsilon)\right) \geq 0 \tag{44}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^0 F_\xi(b) + (-1)^1 F_\xi(a) \geq 0 \Leftrightarrow F_\xi(b) \geq F_\xi(a)$$

ami teljesül, hiszen az eloszlásfüggvény monoton nő.

Példa 8.1. Milyen F-et zár ki például az utolsó tulajdonság?
Legyen

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 0 \text{ ha } x + y \leq 0 \\ 1 \text{ ha } x + y > 0 \end{cases} \qquad a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ekkor az utolsó tulajdonságot kivéve minden más követelménynek eleget tesz. A (44) kifejezés tagjai a következők:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = [0,0] &\to (-1)^0 F \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \\
\varepsilon = [0,1] &\to (-1)^1 F \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1 \\
\varepsilon = [1,0] &\to (-1)^1 F \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = -1 \\
\varepsilon = [1,1] &\to (-1)^2 F \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Állítás 8.2. *Ha* $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *olyan hogy a 8.1 definíció tulajdonságai teljesülnek, akkor* $\exists\, (\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *valószínűségi mező, és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *valváltozó, hogy* $F = F_\xi$

Definíció 8.5. Vektor valváltozó eloszlása

$$Q_\xi(B) = P\left(\overset{-1}{\xi} < B >\right) \tag{45}$$

Megjegyzés. 2 dimenzióban a ξ valváltozó 2 komponensének jelölésére általánosságban az η és γ jelölést használjuk, tehát $\xi_1 \stackrel{\circ}{=} \eta, \quad \xi_2 \stackrel{\circ}{=} \gamma$

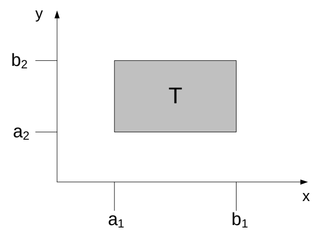
Állítás 8.3. *Legyen* $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *egy 2 dimenziós valváltozó, melynek eloszlásfüggvénye:* $F(x,y) = P(\eta < x, \gamma < y)$. *Ekkor*

$$P\left(a_1 \leq \eta < b_1,\ a_2 \leq \gamma < b_2\right) = F(b_1,b_2) + F(a_1,a_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) \tag{46}$$

Bizonyítás

Jelöljük a η-hoz tartozó értéket x-el, a γ-hoz tartozó értéket y-al. Jelöljük T-vel a kérdéses eseményhez tartozó esetet:

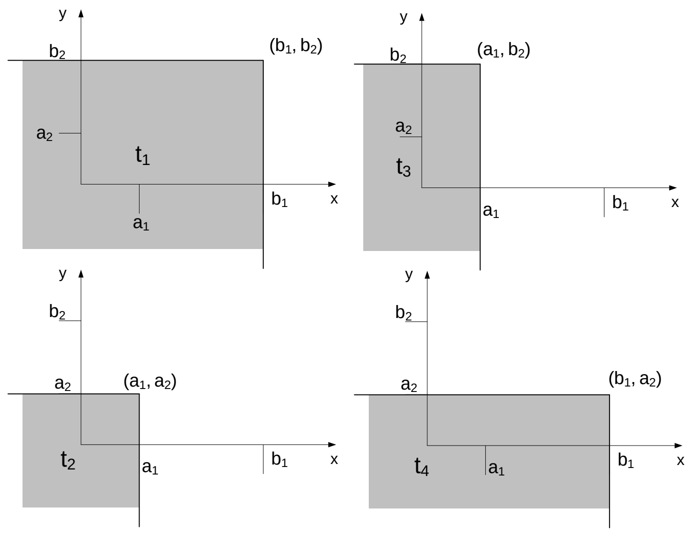
$$T \stackrel{\circ}{=} \{a_1 \leq \eta < b_1,\ a_2 \leq \gamma < b_2\}$$



Legyen ezen kívül

$$t_1 \stackrel{\circ}{=} \{\eta < b_1, \gamma < b_2\} \quad t_3 \stackrel{\circ}{=} \{\eta < a_1, \gamma < b_2\}$$
$$t_2 \stackrel{\circ}{=} \{\eta < a_1, \gamma < a_2\} \quad t_4 \stackrel{\circ}{=} \{\eta < b_1, \gamma < a_2\}$$

Ekkor



$T = t_1 \setminus (t_3 \cup t_4) \quad \rightsquigarrow \quad P(T) = P(t_1) - P(t_3 \cup t_4) = P(t_1) - [P(t_3) + P(t_4)) - P(t_3 \cap t_4)]$

mivel $t_3 \cap t_4 = t_2$, ezért

$P(T) = P(t_1) - P(t_3) - P(t_4) + P(t_2) = F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2) \qquad \square$

Állítás 8.4. *Tegyük fel hogy* $F(x,y)$ $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *együttes eloszlásfüggvénye,* $F_\eta(x)$ *a* η*,* $F_\gamma(y)$ *pedig az* γ *valvált eloszlásfüggvénye. Ekkor*

$$F_\eta(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) \qquad F_\gamma(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) \tag{47}$$

Állítás 8.5. *Legyen* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *valváltozó. Ekkor ekvivalens:*

- $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ *függetlenek*
- $$Q_\xi = \prod_{j=1}^{k} Q_{\xi_j}$$
- $$F\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}\right) = \prod_{j=1}^{k} F_{\xi_j}(t_j)$$

Definíció 8.6. Egy valószínűségi vektorváltozó bármely komponensének valószínűségeloszlását peremeloszlásnak nevezzük.

Megjegyzés. Az együttes eloszlásból a peremeloszlások meghatározhatóak. 2 dimenzióban, diszkrét esetben

$$P(\eta = i) = p_i = \sum_k p_{ik} \qquad P(\gamma = k) = q_k = \sum_i p_i k$$

ahol p_{ik} az együttes eloszlásban a $\eta = i,\ \gamma = k$ eset valószínűsége (lásd a következő példát).

Példa 8.2. Tekintsük a $\xi(\eta, \gamma)$ 2 dim valváltozót, és komponenseit $(\eta,\ \gamma)$, melyek $\{-1, 0, 1\}$ értékeket vehetnek fel. Az együttes eloszlás, azaz a ξ vektor valváltozó eloszlása: A kom-

η \ γ	-1	0	1	η perem
-1	$\frac{1}{8}+\varepsilon$	0	$\frac{1}{8}-\varepsilon$	0.25
0	0	0.5	0	0.5
1	$\frac{1}{8}-\varepsilon$	0	$\frac{1}{8}+\varepsilon$	0.25
γ perem	0.25	0.5	0.25	

ponensek eloszlásai pedig a peremeloszlások. Látható hogy a peremeloszlásokból általános esetben nem határozható meg az együttes eloszlás.

8.1 Folytonos vektor értékű valószínűségi változók

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ valváltozó folytonos eloszlású ha

$$Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^\mathrm{k}}$$

ahol $\lambda_{\mathbb{R}^\mathrm{k}}$ az $\mathbb{R}^k$-beli Lebesgue mérték (ugyanúgy definiálható mint az egydimenziós esetben, csak intervallumok Descartes-szorzatának uniójával fedek). Jelölés: $\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^\mathrm{k}}$

Állítás 8.6. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$

- *Ha* $\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^k}$*:*

$$\xi_1, \xi_2, ...\xi_k \text{ függetlenek } \Leftrightarrow \prod_{j=1}^{k} f_{\xi_j}(t_j) = f_\xi(t_1, ..., t_k)$$

ahol f_{ξ_j} *jelöli a peremsűrűség-függvényeket vagy másnéven marginálisokat,* f_ξ *pedig az együttes sűrűségfüggvény.*

- *Ha a* ξ_j *valváltozók függetlenek és* $Q_{\xi_j} \ll \lambda_\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^k}$

Megjegyzés.

$$\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^\mathrm{k}} \quad \Rightarrow \quad \exists! f_\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \text{ mérhető hogy } Q_\xi(B) = \int_B f_\xi d\lambda_{\mathbb{R}^\mathrm{k}}$$

ahol B egy $\mathbb{R}^k$-bei Borel halmaz.

Megjegyzés.

$$Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^\mathrm{k}} \quad \Rightarrow \quad Q_{\xi_\mathrm{j}} \ll \lambda_\mathbb{R} \quad \forall j$$

Állítás 8.7. *Ha* $\xi(\eta, \gamma) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *és az* $F_\xi(x, y) = F_{(\eta,\gamma)}(x, y) = F(x, y)$ *eloszlásfüggvénynek léteznek a folytonos vegyes 2. rendű parciális deriváltjai, akkor*

$$f_\xi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

az együttes sűrűségfüggvény

A marginálisok és az együttes sűrűségfüggvény kapcsolatát a következő állítás írja le:

Állítás 8.8. *Ha* $\xi(\eta,\gamma):\Omega\to\mathbb{R}^2$ *valvált,* $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^2}$*, és a sűrűségfüggvénye* $f_{(\eta,\gamma)}$*, akkor*

$$f_\eta(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{(\eta,\gamma)}(x,y)dy \quad \textit{és} \quad f_\gamma(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{(\eta,\gamma)}(x,y)dx$$

Állítás 8.9. *Ha* $\xi(\eta,\gamma):\Omega\to\mathbb{R}^2$ *valvált,* $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^2}$*, és a sűrűségfüggvénye* $f_{(\eta,\gamma)}(x,y)$*, akkor A téglalapba (intervallumok Descartes szorzatába) történő esés valószínűsége:*

$$P(\eta\in I, \quad \gamma\in J)=\int_{I\times J} f(x,y)dxdy$$

Példa 8.3. 2-dimenziós standard normális eloszlás: Legyen

$$f(x,y)=\frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi} \tag{48}$$

ekkor, a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének képletét felhasználva

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-(x^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-(y^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}dy=1\cdot 1=1$$

Megjegyzés. Független esetben

$$f_{(\eta,\gamma)}(x,y)=f_\eta(x)f_\gamma(y) \quad \rightsquigarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(\eta,\gamma)}(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(x)f_\gamma(y)dy=f_\eta(x)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_\gamma(y)dy}_{1}$$

Definíció 8.7. $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényre vonatkoztatott várható érték: Ha $\xi(\eta,\gamma)$ valvált és a sűrűségfüggvénye $f_{(\eta,\gamma)}(x,y)$, valamint $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mérhető, $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^2}$

$$E(h(\eta,\gamma)) \mathrel{\mathring{=}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f_{(\eta,\gamma)}(x,y)dxdy$$

Állítás 8.10.

$$E(h(\eta,\gamma))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f_{(\eta,\gamma)}(x,y)dxdy$$

véges ha

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |h(x,y)|f_{(\eta,\gamma)}(x,y)dxdy<+\infty$$

Megjegyzés. Leggyakoribb választás: $h(x,y)=xy$, ennek rövid jelölése lehet $E(\eta\gamma)$ illetve $E\eta\gamma$

Független esetben

$$E(\eta\gamma)=E(\eta)E(\gamma)$$

9 Kovariancia és Korreláció

Definíció 9.1. Legyenek ξ és η valváltozók. Tegyük fel hogy $\exists\sigma^2(\xi)$ és $\exists\sigma^2(\eta)$.
Ekkor ξ és η kovarianciája: a $\beta \overset{\circ}{=} (\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))$ valváltozó várható értéke.

Jelölés: $cov(\xi,\eta) = E\left((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))\right)$

Állítás 9.1. *A kovariancia tulajdonságai:*

- $cov(\xi,\xi) = \sigma^2(\xi)$
- $cov(\xi,\eta) = cov(\eta,\xi)$
- $\forall a \in \mathbb{R}: \quad cov(a\xi,\eta) = a\ cov(\xi,\eta)$
- $cov(\xi+\eta,\gamma) = cov(\xi,\gamma) + cov(\eta,\gamma)$

Állítás 9.2.

$$cov(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} cov(\xi,\eta) &= E\left((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))\right) \\ &= E\left(\xi\eta - \xi E(\eta) - \eta E(\xi) + E(\xi)E(\eta)\right) \\ &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) - E(\eta)E(\xi) + E(\xi)E(\eta) \\ &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha ξ és η függetlenek, akkor $cov(\xi,\eta) = 0$, de ez visszafelé nem igaz. Lásd a következő példát

Példa 9.1. Legyen ξ és η 2 valváltozó melyek $\{-1,0,1\}$ értékeket vehetnek fel. Az együttes eloszlás:

η \ ξ	-1	0	1	η perem
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
ξ perem	0.25	0.5	0.25	

Ekkor

$E(\xi) = E(\eta) = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}1 = 0 \qquad E(\xi\eta) = (-1)\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0 + ... = 0$
$cov(\xi,\eta) = E(\xi,\eta) - E(\xi)E(\eta) = 0$

Viszont ξ és η nem függetlenek hiszen pl.

$$P(\xi = 0, \eta = 1) = \frac{1}{4} \neq P(\xi = 0)P(\eta = 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

Megjegyzés. Kovariancia számítás diszkrét esetben:

$$cov(\xi,\eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j \left(P(\xi = x_i, \eta = y_j)\right) - \left(\sum_i x_i P(\xi = x_i)\right)\left(\sum_j y_j P(\eta = y_j)\right)$$

ahol x_i és y_j a ξ és η valváltozók lehetséges értékei.

Megjegyzés. Kovariancia számítás folytonos esetben:

$$cov(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)dy\right)$$

ahol $f_{\xi,\eta}(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvény, $f_\xi(x)$ és $f_\eta(y)$ a perem-sűrűségfüggvények vagy marginálisok (lásd a 8.8 állítást).

Állítás 9.3. *Ha $\exists\sigma^2(\xi)$ és $\exists\sigma^2(\eta)$, akkor*

$$\sigma^2(\xi \pm \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \pm 2cov(\xi,\eta)$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi \pm \eta) &= E\left((\xi\pm\eta)^2\right) - (E(\xi\pm\eta))^2 \\ &= E\left(\xi^2 \pm 2\xi\eta + \eta^2\right) - \left(E^2(\xi) \pm 2E(\xi)E(\eta) + E^2(\eta)\right) \\ &= E(\xi^2) \pm 2E(\xi\eta) + E(\eta^2) - E^2(\xi) \mp 2E(\xi)E(\eta) - E^2(\eta) \\ &= \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \pm 2cov(\xi,\eta)\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél felhasználtuk hogy $cov(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$ és hogy $\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$ (lásd 9.2 állítás).

Definíció 9.2. Ha ξ és η olyanok hogy $E(\xi^2) < \infty$ és $E(\eta^2) < \infty$ akkor a következőképpen definiálhatjuk ξ és η kovariancimátrixát (Σ):

$$\Sigma = \Sigma\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} \overset{\circ}{=} \begin{pmatrix}\sigma^2(\xi) & cov(\xi,\eta) \\ cov(\eta,\xi) & \sigma^2(\eta)\end{pmatrix}$$

Megjegyzés. Minden kovarianciamátrix szimmetrikus (mivel $cov(\xi,\eta) = cov(\eta,\xi)$) és pozitív szemidefinit.

Definíció 9.3. Egy ξ valváltozó standardizáltja: $\widetilde{\xi} \overset{\circ}{=} \frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}$

Megjegyzés. $E(\widetilde{\xi}) = 0 \quad \sigma^2(\widetilde{\xi}) = 1$

Definíció 9.4. Legyenek ξ és η valváltozók. Ekkor ξ és η korrelációja:

$$R(\xi,\eta) = corr(\xi,\eta) \overset{\circ}{=} \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}$$

Megjegyzés. A korreláció felfogható úgy is, mint a valváltozók standardizáltjának kovarianciája.

Definíció 9.5. ξ és η korrelálatlanok ha $cov(\xi,\eta) = 0$

Állítás 9.4. *A korreláció tulajdonságai:*

- *-1<$corr(\xi,\eta)$<1*
- *Ha ξ és η független, $corr(\xi,\eta) = 0$*

10 Valószínűségi változók transzformációja

Az általános probléma a következő: Tegyük fel, hogy ismerem ξ eloszlását. Ha h egy (szép) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, mit tudok mondani $h(\xi)$ eloszlásáról?

Definíció 10.1. Legyenek a ξ diszkrét valváltozó lehetséges értékei $x_1,\ x_2, \ldots$ és a megfelelő valószínűségek $p_1,\ p_2, \ldots$ (nem feltétlenül véges sok, lásd pl a geometriai eloszlást). Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valváltozó lehetséges értékei az $y_1 = h(x_1),\ y_2 = h(x_2), \ldots$ számok és a megfelelő valószínűségek:

$$P(\eta = y_k) \overset{\circ}{=} q_k = \sum_{h(x_i)=y_k} P(\xi = x_i) = \sum_{h(x_i)=y_k} p_i$$

Megjegyzés. A szumma azért kell, mert h nem feltétlenül injektív.

Állítás 10.1. *Ha h szigorú monoton, akkor az η valváltozó $y_k = h(x_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$ értékeihez tartozó eloszlás megegyezik a ξ valváltozó eloszlásával.*

Állítás 10.2. *Tegyük fel hogy $h(x)$ szigorúan monoton és diffható, ξ folytonos eloszlású valváltozó, sűrűségfv-e: $f(x)$. Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valváltozó sűrűségföggvénye:*

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Bizonyítás

Tegyük fel hogy $h(x)$ szig mon nő. Ekkor az $\{\eta < y\} = \{h(\xi) < y\}$ esemény egyenlő[7] a $\{\xi < h^{-1}(y)\}$ eseménnyel:

$$\{\eta < y\} = \{\omega \in \Omega |\ \eta(\omega) < y\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega |\ h(\xi(\omega)) < y\}}_{\bigstar}$$

Ha h növő

$$\bigstar = \{\omega \in \Omega |\ \xi(\omega) < h^{-1}(y)\}$$

Így η eloszlásfüggvénye:

$$G(y) = P(\eta < y) = P(h(\xi) < y) = P(\xi < h^{-1}(y)) = F(h^{-1}(y))$$

ahol F a ξ valváltozó eloszlásfüggvénye. Ekkor a láncszabály alkalmazásával:

$$g(y) = G'(y) = \frac{dF(h^{-1}(y))}{dy} = f(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

ahol $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} > 0$, mert h szig mon nő ($\rightsquigarrow \quad h^{-1}$ szig mon nő).

[7] Azért használjuk az egyenlő kifejezést, mert halmazokról van szó - lásd lejebb.

Tegyük fel hogy $h(x)$ szig mon csökken. Ekkor az $\{\eta < y\} = \{h(\xi) < y\}$ esemény egyenlő a $\{\xi > h^{-1}(y)\}$ eseménnyel. Ekkor

$$\bigstar = \{\omega \in \Omega |\ \xi(\omega) > h^{-1}(y)\}$$

(Ha ezt nem látjuk, gondoljunk arra hogy pl $\xi(\omega) = 2 > h^{-1}(y) = 1$ ekkor $h(2) < h(1)$, mert, h szig mon csökken.) Ekkor

$$G(y) = P(\eta < y) = P(h(\xi) < y) = P(\xi > h^{-1}(y)) = 1 - P(\xi < h^{-1}(y)) = 1 - F(h^{-1}(y))$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = -f(h^{-1}(y))\frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

ahol $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$, mert h szig mon csökken ($\rightsquigarrow$ h^{-1} szig mon csökken). □

Példa 10.1. Lineáris transzformáció: $\eta = a\xi + b$, ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$. Ekkor η sgfv-e:

$$g(y) = \underbrace{\frac{1}{|a|}}_{\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|}\ \underbrace{f\left(\frac{y-b}{a}\right)}_{f(h^{-1}(y))}$$

mert $h(x) = ax + b \quad \rightsquigarrow \quad h^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

Példa 10.2. Tegyük fel hogy ξ normális eloszlású, és legyen $\eta = e^{\xi}$. Ekkor

$h(x) = e^x \ \rightarrow \ h^{-1}(y) = ln(y) \rightarrow \frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{y}$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \le 0 \\ \frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left(\frac{-(ln(y)-m)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{ha y>0} \end{cases}$$

Példa 10.3. Tegyük fel hogy ξ eloszlás és sűrűségfv-e $F(x)$ és $f(x)$, $h = \xi^2$ ($h(x)$ nem monoton). Ekkor

$$G(y) = P(\xi^2 < y) = P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \quad \text{ha y>0}$$

Összetett függvény deriválásával az első tag:

$$\frac{d}{dy}F(\sqrt{y}) = \underbrace{\frac{d}{dy}F(y)\bigg|_{y=\sqrt(y)}}_{f(\sqrt(y))}\ \underbrace{\frac{d\sqrt{y}}{dy}}_{\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

A második tag:

$$\frac{d}{dy}(-F(-\sqrt{y})) = \underbrace{-\frac{d}{dy}F(y)\bigg|_{y=-\sqrt(y)}}_{-f(-\sqrt(y))}\underbrace{\frac{d(-\sqrt{y})}{dy}}_{-\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

így:

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \le 0 \\ \frac{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & \text{ha y>0} \end{cases}$$

10.1 Valószínűségi vektorváltozók transzformációja

Nagyon röviden: A derivált helyét a Jacobi-mátrix determinánsa veszi át.

Példa 10.4. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

Írjuk fel az $\alpha_1 = \xi + \eta, \quad \alpha_2 = \xi - \eta$ valváltozók együttes sűrűségfüggvényét!

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = x+y \\ z_2 = x-y \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x = \frac{z_1+z_2}{2} \\ y = \frac{z_1-z_2}{2} \end{array}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dz_1} & \frac{dx}{dz_2} \\ \frac{dy}{dz_1} & \frac{dy}{dz_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow det(J) = -\frac{1}{2}$$

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{\frac{(z_1+z_2)^2}{4} + \frac{(z_1-z_2)^2}{4}}{2}\right) = \frac{1}{4\pi} exp\left(-\frac{z_1^2+z_2^2}{4}\right)$$

11 Feltételes eloszlások

11.1 Feltételes eloszlások diszkrét valószínűségi változók esetén

Legyen (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó. Jelöljük ξ és γ lehetséges értékeit $x_1,\ x_2,\ \ldots$-vel és $y_1,\ y_2, \ldots$-vel.

Definíció 11.1. A $\xi = x_i$ esemény $\eta = y_k$ feltétel melletti valószínűsége

$$P(\xi = x_i | \eta = y_k) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_k)}{P(\eta = y_k)}$$

Megjegyzés. A számláló nem más, mint az együttes eloszlást megadó táblázat egy cellája, a nevező pedig η peremeloszlásának 1 értéke.

Definíció 11.2. A ξ valváltozó $y_i < \eta < y_j$ feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvénye:

$$F^*(x|y_i < \eta < y_j) \overset{\circ}{=} P(\xi < x | y_i < \eta < y_j)$$

Állítás 11.1. *Legyen a (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó (együttes) eloszlásfüggvénye $F(x, y)$, és η peremeloszlás-függvénye*

$$F_\eta(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y)$$

ekkor, ha feltesszük hogy $F_\eta(y_j) \neq F_\eta(y_i)$

$$F^*(x|y_i < \eta < y_j) = \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)}$$

Bizonyítás

A 8.3 tételhez hasonló megfontolások alapján

$$P(\xi < x, y_i < \eta < y_j) = F(x, y_j) - F(x, y_i)$$

másrészt definíció szerint

$$F^*(x|y_i < \eta < y_j) = P(\xi < x | y_i < \eta < y_j) = \frac{P(\xi < x, y_i < \eta < y_j)}{P(y_i < \eta < y_j)}$$

$$= \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)}$$

11.2 Feltételes eloszlások folytonos valószínűségi változók esetén

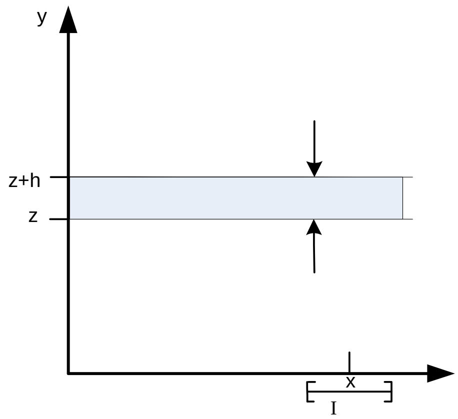
Folytonos esetben a fenti gondolatmenet azért szorul még némi megfontolásra, mivel a feltétel valószínűsége lehet 0, ha $\eta = y$.

Definíció 11.3. A ξ valváltozó $\eta = z$ feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvénye:

$$F^*(x|\eta = z) = \lim_{h\to 0} \left(P(\xi < x, z < \eta < z + h)\right)$$

(ha a határéték létezik)

A definíciót az alábbi ábra szemlélteti. Hogyan tudjuk kifejezni folytonos valószínűségi (vektor) változó esetén az intervallumba esés valószínűségét?



Tegyük fel hogy a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó (együttes) sűrűségfüggvénye $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$, és η peremsűrűség-függvénye $f_\eta(y)$.

Ekkor

$$P(\xi \in I|\eta \in [z, z + h]) = \frac{P(\xi \in I, \eta \in [z, z + h])}{P(\eta \in [z, z + h])}$$

$$\frac{\int_I \int_z^{z+h} f_{(\xi,\eta)}(x, y)dydx}{\int_z^{z+h} f_\eta(y)dy} = \frac{\frac{\int_I \int_z^{z+h} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dydx}{h}}{\frac{\int_z^{z+h} f_\eta(y)dy}{h}} \tag{49}$$

Tudjuk hogy η eloszlásfüggvénye $F_\eta(w) = \int_{-\infty}^{w} f_\eta(y)dy$. Tegyük fel hogy $f_{(\xi,\eta)(x,y)}$ és $f_\eta(y)$ folytonosak. Ekkor $F'_\eta = f_\eta$. Vegyük ezután a (49) kifejezés $h \to 0$ limesét e fenti megfontolással, és bontsuk két részre a számlálóban található integrált:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\int_I \left(\int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy - \int_{-\infty}^{z} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy\right)dx}{h}}{\frac{F_\eta(z+h)-F_\eta(z)}{h}}$$

a nevezőben szereplő kifejezés nem más, mint a derivált definíciója, tehát a nevező $= f_\eta(z)$, ami konstans. A határérték tehát a számláló határétéke osztva $f_\eta(z)$-val. A számláló határértéke pedig

$$\lim_{h\to 0} \int_I \frac{\left(\int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi,\eta)}(x, y)dy - \int_{-\infty}^{z} f_{(\xi,\eta)}(x, y)dy\right)}{h} dx$$

Általában véve tudjuk hogy ha g egy szép függvény aminek G a primitívfüggvénye, akkor

$$\int_z^{z+h} g(x)dx = G(z+h) - G(z)$$

és

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(z+h)-G(z)}{h} = G'(z) = g(z)$$

tehát

$$\lim_{h\to 0}\int_I \frac{\left(\int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy - \int_{-\infty}^{z} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy\right)}{h}dx =$$
$$\int_I \lim_{h\to 0} \frac{\left(\int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy - \int_{-\infty}^{z} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy\right)}{h}dx =$$
$$\int_I \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\left(\widetilde{F}(x,z+h) - \widetilde{F}(x,z)\right)}{h}}_{\widetilde{F}'(x,z)=f_{(\xi,\eta)}(x,z)} dx$$

Ahol a jelölés magyarázata: Bármilyen x-re tekinthetek $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$-ra úgy, mint egy egyváltozós függvényre, aminek y a változója. Ekkor ennek a függvénynek létezik $\widetilde{F}$ primitívfüggvénye. Tehát, visszatérve az eredei problémához

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\int_I\left(\int_{-\infty}^{z+h} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy - \int_{-\infty}^{z} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy\right)dx}{h}}{\frac{F_\eta(z+h)-F_\eta(z)}{h}} = \frac{\int_I f_{(\xi,\eta)(x,z)dx}}{f_\eta(z)} = \int_I \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,z)}{f_\eta(z)}dx$$

Tehát az intervallumba esés valószínűségét megkapjuk, ha az együttes sűrűségfüggvény második változóját fixálva a fenti függvényt integráljuk az adott intervallumon x szerint. Ez alapján

Definíció 11.4. Legyen

$$P(\xi\in I|\eta=z) \mathrel{\mathring{=}} \begin{cases} \int_I \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,z)}{f_\eta(z)}dx & \text{ha } f_\eta(z)\neq 0 \\ 0 & \text{ha } f_\eta(z)=0 \end{cases}$$

Definíció 11.5. ξ-nek az $\eta = z$ feltétel melletti sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi|\eta=z}(x) \mathrel{\mathring{=}} \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,z)}{f_\eta(z)}$$

Definíció 11.6. ξ-nek az $\eta = z$ feltétel melletti feltételes várható értéke

$$E(\xi|\eta=z) \mathrel{\mathring{=}} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta=z}(x)dx$$

Megjegyzés. $E(\xi|\eta=z)$ létezik és véges, ha $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_{\xi|\eta=z}(x) < \infty$

Definíció 11.7. A ξ valváltozó η-ra vonatkoztatott regressziós függvénye:

$$r(z) \mathrel{\mathring{=}} E(\xi|\eta=z)$$

12 L^p terek és konvergencia

Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ egy valószínűségi mező.

Definíció 12.1. $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valváltozók azonos eloszlásúak ha $Q_\xi = Q_\eta$

Megjegyzés. Ekkor persze $P(\xi < x) = P(\eta < x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Definíció 12.2. $A \in \mathfrak{F}$ esemény 1 vallal következik be, ha $P(A) = 1$

Definíció 12.3. Azt mondjuk hogy $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valváltozók 1-valószínűséggel (1-vallal) megegyeznek/egyenlőek, ha a

$$[\xi = \eta] \stackrel{\circ}{=} \{\xi = \eta\} \stackrel{\circ}{=} \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = \eta(\omega)\}$$

halmaz valószínűsége (valja) 1. Ekkor $\xi = \eta$ P-majdnem mindenütt (P.m.m.).

Megjegyzés. Ha $\xi = \eta$ P-majdnem mindenütt, akkor $E(\xi) = E(\eta)$

Példa 12.1. Legyen pl $(\Omega, \mathfrak{F}, P) = \big([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda_{[0,1]})\big)$ (ahol $\lambda_{[0,1]}$ a Lebesgue mérték) és

$$\xi : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \xi(\omega) = \omega \eta : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \eta(\omega) = \begin{cases} 200 & \text{ha } \omega \in \{\frac{1}{\sqrt{(2)}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \\ \omega & \text{ha } \omega \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{\sqrt{(2)}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} \end{cases}$$

Ekkor $\xi = \eta$ λ-majdnem mindenütt. Jelölés: $\xi \stackrel{\lambda_{mm}}{=} \eta$

12.1 L^p terek

Definíció 12.4. Legyen $p \in [1, +\infty[$

$$\mathfrak{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P) \stackrel{\circ}{=} \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} | \text{f mérhető és } \int_\Omega |f|^p dP < +\infty \right\}$$

Megjegyzés. Ha p irracionális akkor hogyan értelmezzük a fenti definíciót? Pl.

$$\omega \in \Omega \quad |f(\omega)|^{\sqrt{2}} = \lim_{n \to \infty} |f(\omega)|^{z_n}$$

ahol $z_n \to \sqrt{2}$ és $(z_n \in \mathbb{Q})(\forall n \in \mathbb{N})$

Megjegyzés. Ha $p = \infty$ akkor

$$\mathfrak{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P) \stackrel{\circ}{=} \{f : \Omega \to \mathbb{R} | f \text{ mérhető és } f \text{ P.m.m. korlátos}\}$$

azaz $\exists A \in \mathfrak{F}$ $P(A) = 0$ és $f|_{\Omega \setminus A}$ korlátos függvény.

Megjegyzés. f mérhető $\Rightarrow |f|^p$ $(p > 1)$ mérhető

Definíció 12.5. f p-normája:
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $p \in [1, \infty]$, $f \in \mathfrak{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

$$||f||_p \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p dP\right)^{1/p} & \text{ha } p \in [1, +\infty[\\ \sup\limits_{\omega \in \Omega \setminus A} |f(\omega)| & \text{ha } p = +\infty \end{cases}$$

ahol az A halmaz jelentése: A-n kívül f korlátos és $P(A) = 0$.

Megjegyzés. Speciálisan $p \in [1, \infty[$-re $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valváltozó esetén $||\xi||_p = (E(|\xi|^p))^{\frac{1}{p}}$

Állítás 12.1. *$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $p \in [1, \infty]$, $f, g \in \mathfrak{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$*

- $||f||_p \geq 0$
- $||\alpha f||_p = |\alpha| ||f||_p$
- $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$

Definíció 12.6. Az L^p tér nem más mint ekvivalencia osztályok összessége

$$L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P) \stackrel{\circ}{=} \left\{ \dot{f} | f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mérhető, } \int_\Omega |f|^p dP < +\infty \right\}$$

ahol f ekvivalencia osztálya P szerint:

$$\dot{f} \stackrel{\circ}{=} \{h : \Omega \to \mathbb{R} | h \text{ mérhető, és } h = f \text{ 1 vallal}\}$$

Az ekvivalencia relációt $f \sim h$-val jelöljük:

$$f \sim h \stackrel{\circ}{=} f = h \text{ P.m.m.}$$

Megjegyzés. Azért ekvivalencia reláció, mert reflexív, szimmetrikus és tranzitív

Állítás 12.2. *Az ekvivalencia osztályokra a következő tulajdonságok igazak:*

- $\dot{f} + \dot{g} = (f \dot{+} g)$
- $\alpha(\dot{f}) = (\alpha \dot{f})$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Mivel az ekvivalencia osztályok különféle elemei csak 0 mértékű halmazon térnek el egymástól, kiterjeszthetjük a norma fogalmát az ekvivalencia osztályokra.

Definíció 12.7. $\dot{f} \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

$$||\dot{f}||_p = \left(\int_\Omega |f|^p dP\right)^{1/p}$$

Megjegyzés. Mivel $\dot{f}$ elemei közt a fentiek értelmében igazából nincs számunkra érdekes eltérés, a továbbiakban nem teszünk különbséget aközött hogy $\dot{f}$-ről, vagy az ekvivalenciaosztály egy reprezentásáról, f-ről beszélünk.

Állítás 12.3. *Riesz-Fischer tétel. $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ Banach tér $\forall$ $p \in [1, +\infty]$-re, azaz: $\forall(\dot{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^p-beli sorozatra melyre $||f_n - f_m||_p \to 0$ $n, m \to \infty$ $\exists f \in L^p$ hogy $f_n \to f$ L^p-ben.*

12.2 Konvergencia-fajták L^p terekben

L^p terekben az alábbi konvergencia-fajtákat különböztetjük meg.

1 1-vallal egyenletes konvergencia.
Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L^p-beli fv sorozat, $f \in L^p$.
$f_n \to f$ 1 vallal egyenletesen (m.m. egyenletesen), ha

$$(f_n - f) \in L^\infty \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ és } ||f_n - f||_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

ez pontosan azzal ekvivalens hogy

$$a_n \stackrel{\circ}{=} \sup_{\omega\in\Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| \to 0$$

jelölés: $f_n \stackrel{mme}{\longrightarrow} f$

2 1-vallal konvergencia.
$f_n \to f$ 1 vallal, azaz $f_n \stackrel{mm}{\longrightarrow} f$ P.m.m., ha

$$\exists A \in \mathfrak{F} \text{ hogy } P(\Omega \setminus A) = 0 \text{ és } f_n(\omega) \to f(\omega) \ \ \forall \omega \in A\text{-ra}$$

másszóval, val. mező és valváltozó esetén:

$$P(\{\omega \in \Omega | \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}) = 1$$

3 L^p-ben való konvergencia ($p \in [1, +\infty[$).

$$f_n \stackrel{L_p}{\longrightarrow} f \text{ ha } ||f_n - f||_p \to 0 \text{ ,azaz } \left(\int_\Omega |f_n - f|^p dP \right)^{1/p} \to 0$$

Az eddigi konvergenciatípusok általános f-re vonatkoztak, a következő 2 kifejezetten valváltozókra, ezért használjuk a továbbiakban a ξ jelölést f helyett.

4 Sztochasztikus konvergencia.
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ val vált sorozat Ω-n, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált. $\xi_n \to \xi$ sztochasztikusan, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0$$

azaz

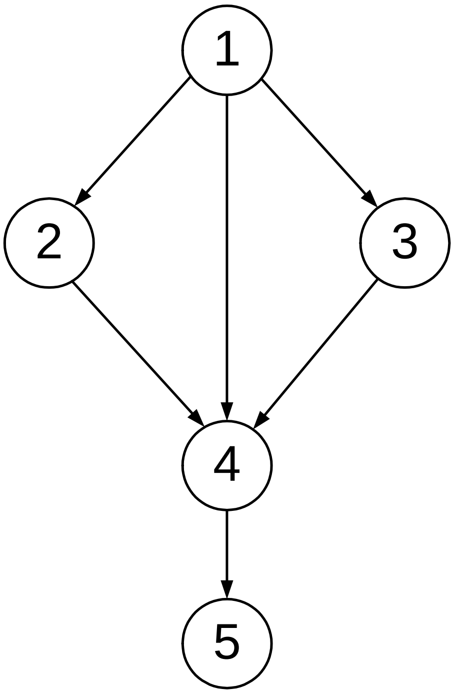
$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \middle| \ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) \to 0$$

5 Eloszlásban való konvergencia.
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ val vált sorozat Ω-n, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált. A $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ val vált sorozat eloszlásban tart ξ-hez, ha

$$P(\xi_n < x) \to P(\xi < x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ melyre } x \to P(\xi < x) (= F_\xi(x)) \text{ folytonos fv}$$

röviden: $F_{\xi_n(x) \to} F_\xi(x)$

Állítás 12.4.



Bizonyítás 1 $\Rightarrow$ 3
Tudjuk hogy $||f_n - f||_\infty \to 0$, kell hogy $||f_n - f||_p \to 0$, ami ekvivalens azzal hogy

$$\left(\int_\Omega |f_n - f|^p \, dP\right)^{1/p} \to 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |f_n - f|^p \, dP \to 0 \text{ (mivel p>1)}$$

$$\Leftrightarrow ||f_n - f||_p^p \to 0$$

tudjuk hogy

$$|f_n - f|^p \leq \left(\sup_{\omega\in\Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)|\right)^p = ||f_n(\omega) - f(\omega)||_\infty^p$$

ezért

$$||f_n - f||_p^p \leq \int_\Omega ||f_n - f||_\infty^p dP = \underbrace{||f_n - f||_\infty^p}_{\to 0} \underbrace{\int_\omega 1dP}_{=1} \to 0$$

Bizonyítás 2 $\Rightarrow$ 4
Azaz azt szeretnénk belátni hogy az 1 vallal-konvergenciából következik a sztochasztikus.
Tudjuk hogy

$$P(\underbrace{\{\omega \in \Omega | \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}}_{\stackrel{\circ}{=} K}) = 1$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és

$$a_n \stackrel{\circ}{=} P(\underbrace{\{\omega \in \Omega \big| |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}}_{\stackrel{\circ}{=} A_n}) \qquad \rightsquigarrow a_n = P(A_n)$$

kell: $a_n \to 0$ (ekkor teljesül 4)
Legyen $\omega \in K$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_o \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \quad \omega \notin A_n \ \Rightarrow \ \omega \in (\Omega \setminus A_n)$$

Tegyük fel hogy $\exists \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \nrightarrow 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \quad a_n = P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \geq \delta > 0 \quad \infty \text{ sok n-re (mert } \nrightarrow 0)$$

Azaz $\exists (\hat{\xi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ részsorozat, hogy

$$P(\{|\hat{\xi}_n - \xi| > \varepsilon\}) \geq \delta$$

igaz $\forall n \in \mathbb{N}$-re. De $\hat{\xi}_n \to \xi$ 1-vallal:

$$\Big\{\omega \in \Omega \big| |\hat{\xi}_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\Big\} \subseteq \Big\{\omega \in \Omega \big| \hat{\xi}_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\Big\}$$

A jobb oldali halmaz mértéke 0, viszont $\delta > 0$. $\lightning$

Bizonyítás 3 $\Rightarrow$ 4
$\xi_n \to \xi$ L^p-ben, azaz $E(|\xi_n - \xi|^p) \to 0$
Kell: $\forall \varepsilon > 0 : \quad P\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) \to 0$

$$P\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) = P\left(|\xi_n - \xi|^p > \varepsilon^p\right) \leq \frac{E(|\xi_n - \xi|^p)}{\varepsilon^p} \to 0$$

Ahol a becslésnél a Markov-egyenlőtlenséget használtuk.

12.3 Határértéktételek

12.3.1 Centrális határeloszlás tétel

Tétel 12.1. Centrális határeloszlás tétel (CHT)
$\xi_1,\ \xi_2,\ ,\xi_3, ...$ független, azonos eloszlású valváltozók, $\sigma^2(\xi_j) < \infty$. Ekkor

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} \quad \to \quad N(0,1) \quad \text{eloszlásban}$$

ahol $N(0,1)$ egy standard normális eloszlású valváltozó.

Megjegyzés. A tétel állításában ξ_1 helyett bármilyen ξ_j szerepelhetne, hiszen azonos eloszlásúak.

Következmény. Ha a CHT feltételei fennálnak,

$$P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} < x\right) \quad \to \quad P(N < x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

A következő tétel a CHT egy speciális esetének tekinthető

Tétel 12.2. DeMovire-Laplace tétel
$(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}^+}$ független, valváltozók, $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = -1) = \frac{1}{2}$ (Ekkor $E(\xi_j) = 0, \quad \sigma^2(\xi_j) = \sigma(\xi_j) = 1$),

$$S_n \overset{\circ}{=} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \quad n \in \mathbb{N}$$

Ekkor

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < b\right) \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Megjegyzés. Minden olyan esetet, amikor a CHT-ben szereplő valváltozók összesen két különböző értéket vesznek fel, szokás DeMoivre-Laplace-nak hívni - lehet pl 0 és 1 is, ekkor a megfelelő változtatásokkal alkalmazható a tétel.

12.3.2 Nagy számok gyenge törvénye

Tétel 12.3. Nagy számok gyenge törvénye
$\xi_1,\ \xi_2,\ ,\xi_3, ...$ független, azonos eloszlású valváltozók, $P(\xi_j = 1) = p$, $P(\xi_j = 0) = 1 - p$, $p \in]0,1[$. Ekkor

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}{n} \quad \to \quad p \quad \text{sztochasztikusan}$$

ahol p egy konstans p értékű függvény.

azaz

$$P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \quad \to \quad 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

A tételt véges szórásnégyzet esetén bizonyítjuk.

Állítás 12.5. *Ha* $\xi_1,\ \xi_2,\ ,\xi_3, \ldots$ *független, azonos eloszlású valváltozók,* $\sigma^2(\xi_j) < \infty$*, akkor*

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}{n} \quad \to \quad E(\xi_1) \qquad \textit{sztochasztikusan}$$

Bizonyítás Írjuk fel a Csebisev egyenlőtlenséget (42) $\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}{n}$-re:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sigma^2\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} n\sigma^2(\xi_1) = \frac{1}{\varepsilon^2 n}\sigma^2(\xi_1)$$

mivel a ξ_j-k azonos eloszlásúak, és függetlenek. A jobb oldali kifejezés pedig, mivel $\sigma^2(\xi_1)$ véges, és $n \to \infty$, tart 0-hoz. A baloldali kifejezést tekintve ez pedig pontosan a sztochaszikus konvergencia feltétele.

Megjegyzés. Ha ξ (n, p) paraméterű binomiális eloszlású változó, akkor $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, $P(\xi_j = 1) = p$, $P(\xi_j = 0) = 1 - p$. Ekkor $E\left(\frac{\xi}{n}\right) = p$, $\sigma^2\left(\frac{\xi}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$, valamint

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Ha p nem ismert, lehet közelíteni $\frac{1}{2}$-el:

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

13 Köszönet

Berezvai Orsolya, Farkas Domonkos László, Orosz Áron, Vághy Mihály András.

Hivatkozások

[1] Medvegyev Péter. *Valószínűségszámítás.* Aula, Budapest, 2007. http://medvegyev.uni-corvinus.hu/valszam.pdf.