Hasonlóság, Diagonalizálás

Definíció: Az $\boldsymbol{A}$ mátrix hasonló a $\boldsymbol{D}$ mátrixhoz, ha létezik egy olyan $\boldsymbol{P}$ mátrix, amelyre: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

Definíció: Az $\boldsymbol{A}$ kvadratikus mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel: Hasonló mátrixok sajátértékei megegyeznek.

Tétel: Ha valamely $\boldsymbol{A}$ kvadratikus mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.

Összefoglalva az (n x n)-es $\boldsymbol{A}$ mátrix diagonalizálása:

1. A sajátértékek kiszámításához meg kell oldanunk a karakterisztikus egyenletet:

$$p(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right).$$

2. Ennek gyöktényezős alakját tekintve:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

A $\boldsymbol{\lambda_i}$ sajátértékek (lehetnek komplexek is!) algebrai multiplicitása n_i

3. Mindegyik sajátértékhez megkeressük a hozzá tartozó sajátvektor, vagyis megoldjuk a következő egyenletet:

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{\lambda}_k\boldsymbol{I})\underline{\mathbf{x}}_k\mathbf{=0}$$

Legyen $\boldsymbol{n_k}$ a λ_k sajétértékhez tartozó altér **dimenziója, másképpen a sajátérték *geometriai multiplicitása***. Ha minden sajátérték esetén az algebrai és geometriai multiplicitás azonos, akkor megadható sajátvektorokból álló bázis, és ekkor a mátrix diagonalizálható.

4. Ha a mátrix diagonalizálható, akkor a hozzáshasonló D diagonális mátrix az alábbi képlettel számolható definíció szerint: D = $\boldsymbol{S^{-1}AS}$,

ahol S a sajátvektorokból, mint oszlopvektorokból álló mátrix. Az D diagonális mátrix diagonálisában a sajátértékek állnak, olyan sorrendben, ahogyan a hozzájuk tartozó sajátvektorokat a mátrixba beírtuk, tehát az i. oszlopban a fődiagonálisban az S mátrix i. oszlopvektorában álló sajátvektort meghatározó sajátérték áll.

Példa diagonalizálásra

$A=\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, ennek sajátértékei: 5, 4 az ezekhez tartozó sajátvektortok rendre: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Behelyettesítve a fenti képletbe: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S^{-1}AS}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tehát, a $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix hasonló az $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixhoz.

Példa a diagonalizálás egy felhasználására. Számítsa ki az alábbi mátrix 10. hatványát!

A=$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$**,** ennek sajátértékei: -1, 1 az ezekhez tartozó sajátvektortok rendre: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A diagonális alak: D = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, és a diagonális alak 10. hatványa: $D^{10} = \begin{bmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 1^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Az áttérési mátrixok: S = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Teljesülnek a következő egyenletek: $D = S^{-1}AS$ → $A = S\,D\,S^{-1}$ → $A^n = S\,D^n\,S^{-1}$

Az A 10 hatványa: $A^{10} = S\,D^{10}\,S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Példa: Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Ha igen, adja meg a hozzá hasonló diagonális mátrixot!

A=$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$**, det(*A*-λ*I*)=(2-λ)^2(1-λ),** a sajértékek: **λ=2** kétszeres algebrai multiplicitással**, λ=1,** egyszeres algebrai multiplicitással.

det(*A*-λ*I*)<u>x</u>=0 egyenletbe, kapjuk a sajátvektorokat: **λ=1**-re: $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **λ=2**-re: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, és $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Eszerint a **λ=2** -höz tartozó sajátaltér dimenziója 2 (geometriai multiplicitás = 2), ez egyezik az algebrai multiplicitással, így a mátrix diagonalizálható. A diagonális alak: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1.a, Az alábbi négy mátrix közül melyek lehetnek hasonlóak:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

b, Ellenőrizze, hogy az 1.a, feladatban valóban hasonlóak a kiválasztott mátrixok. A hasonlóságot meghatározó harmadik T mátrix az alábbi:

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix segítségével adjon meg egy olyan mátrixot, ami hasonló a $\underline{\underline{B}}$ mátrixhoz!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Diagonalizálható-e a következő mátrix?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Igen, a diagonális alak a sajátértékekkel és sajátvektorokkal (a sajátvektorok sorrendje megegyezik a hozzájuk tartozó sajátértékek mátrixbeli sorrendjével):

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} r \\ 2r \end{bmatrix}, r, t \in R - \{0\}$$

Ellenőrzés: legyen mondjuk $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, stimmel. A sajátértékek algebrai multiplicitása 1, a megfelelő sajátalterek dimenziói (geometriai multiplicitás) szintén 1, ezért volt diagonalizálható a mátrix.

4. Diagonalizálható-e a következő mátrix?

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Igen:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} -2r \\ r \\ r \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in R - \{0\}$$

HF: ellenőrizzük is le a $S^{-1}AS$ szorzat kiszámításával!
Az algebrai és geometriai multiplicitások itt is megegyeztek (1-1-1). Mit tudunk mondani a sajátvektorokról? (Lin. függetlenek ugyan, de nem ortogonálisak.)

5. Diagonalizálható-e az alábbi mátrix?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Nem. Sajátértékek: 3 (2-es alg. multiplicitás) és -5 (1-es alg. multiplicitás), de a sajátvektorok rendre:

$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 4r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} \quad r, s \in R - \{0\}$, azaz a 3-as sajátértékhez csak egy 1D sajátaltér tartozik (geom. multiplicitás csak 1). Ezért nem diagonalizálható.

6.Diagonalizálható-e az alábbi mátrix?

$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ Megoldás: igen, SÉ:3,3,-6, SV: $\underline{s}_{1,2} = \begin{bmatrix} -r-s \\ r \\ s \end{bmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in R - \{0\}$.

3. a, A megadott B,C,D,E mátrixok közül melyek hasonlóak az A mátrixhoz?

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

b, Az A-hoz hasonló mátrix(ok) esetén adja meg a hasonlóságot meghatározó harmadik (áttérési) mátrixot is, és ellenőrizze , hogy tényleg hasonlóak!

4. Diagonalizálhatóak-e az alábbi mátrixok, ha igen akkor mi a diagonális alakjuk?

a, $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

b, $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -5 & 4\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$

5. a, Döntse el, hogy diagonalizálható-e a következő mátrix? Válaszát indokolja, és ha diagonalizálható, akkor adja meg azt a diagonális mátrixot melyhez hasonló!

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

b, Lehet-e hasonló az $\underline{\underline{A}}$ mátrix az alább megadott $\underline{\underline{B}}$ mátrixhoz? $\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

6. A diagonalizálás segítségével adja meg az alábbi mátrixok megfelelő hatványait:

a, $\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}^3 = ?$

b, $\begin{bmatrix}6 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}^4 = ?$

c, $\begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^5$

d, $\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}^{10}$