1. Valós Euklideszi terek

1. Jelölje V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok vektorterét. Ezen a vektortéren definiáljuk azt a függvényt, amely minden polinomhoz a fokszámát rendeli. Norma-e ez a leképezés?

M.o.:
1. Az igaz, hogy minden polinomhoz pozitív vagy nulla értéket rendel a leképezés, de az nem igaz, hogy csak a vektortér nulleleméhez, tehát a nullpolinomhoz rendeli a nulla értéket, mert bármely nem nulla konstans polinom fokszáma is nulla! → Nem Norma!

2. Legyen V = R^n a valós n dimenziós vektorok tere, és értelmezzük a következő leképezést:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Ez a leképezés metrika vagy sem?

M.o.:

1. $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$ Teljesül, hiszen pozitív számok összegeként értelmezzük.

Ha $\underline{x} = \underline{y}$ akkor minden i-re $x_i = y_i$, vagyis $|x_i - y_i| = 0$ és így $d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0$.

Ha $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ akkor minden i-re teljesül, hogy $|x_i - y_i| = 0$, vagyis $x_i = y_i$ és így $\underline{x} = \underline{y}$

2. Szimmetrikus, mert:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d(\underline{y}, \underline{x})$$

3. Teljesül a háromszög egyenlőtlenség:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| = d(\underline{x}, \underline{z})$$

mert valós számokra teljesül, hogy $|x_i - y_i| + |y_i - z_i| \geq |x_i - z_i|$ → Tehát Metrika!

3. Legyen V = R^n a valós n dimenziós vektorok tere, és értelmezzük a következő leképezést:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} (kx_k) \cdot (ky_k)$$

Skalárszorzatot határoz-e meg ez a leképezés?

M.o.:

1. Pozitív definit: $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_{k=1}^{n} (kx_k) \cdot (kx_k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x_k^2 \geq 0$

Ha $\underline{x} = \underline{0}$ akkor teljesül, hogy $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_{k=1}^{n} (kx_k) \cdot (kx_k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x_k^2 = 0$

Ha pedig $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \sum_{k=1}^{n} (kx_k) \cdot (kx_k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x_k^2 = 0$, abból következik, hogy minden $x_k = 0 \rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

2. Szimmetrikus: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} (kx_k) \cdot (ky_k) = \sum_{k=1}^{n} (ky_k) \cdot (kx_k) = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$

3. Homogén: $\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} (k\lambda x_k) \cdot (ky_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} (ky_k) \cdot (kx_k) = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

4. Lineáris:

$$\left\langle \underline{x}+\underline{z},\underline{y}\right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left(k\left(x_k + z_k\right)\right)\cdot\left(ky_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(kx_k\right)\left(ky_k\right)+\left(kz_k\right)\left(ky_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(kx_k\right)\left(ky_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(kz_k\right)\left(ky_k\right) = \left\langle \underline{x},\underline{y}\right\rangle + \left\langle \underline{z},\underline{y}\right\rangle$$

<u>Tehát Skalárszorzat!</u>

4. Ha az R^4 euklideszi téren <u>a skalárszorzatot a 2.3. feladatban meghatározott módon adjuk meg</u>, akkor mekkora az alábbi két vektor által bezárt szög?

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M.o.:

Szükség van a vektorok skalárszozatára:

$$\left\langle \underline{x},\underline{y}\right\rangle = \sum_{k=1}^{4}\left(kx_k\right)\cdot\left(ky_k\right) = (1\cdot 2)(1\cdot(-1)) + (2\cdot 0)(2\cdot 1) + (3\cdot 1)(3\cdot 1) + (4\cdot(-1))(4\cdot 0) = 7$$

A vektorok hosszára/normájára

$$\left\|\underline{x}\right\| = \sqrt{\left\langle \underline{x},\underline{x}\right\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{4}\left(kx_k\right)\cdot\left(kx_k\right)} = \sqrt{(1\cdot 2)(1\cdot 2)+(2\cdot 0)(2\cdot 0)+(3\cdot 1)(3\cdot 1)+(4\cdot(-1))(4\cdot(-1))} = \sqrt{29}$$

$$\left\|\underline{y}\right\| = \sqrt{\left\langle \underline{y},\underline{y}\right\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{4}\left(ky_k\right)\cdot\left(ky_k\right)} = \sqrt{(1\cdot(-1))(1\cdot(-1))+(2\cdot 1)(2\cdot 1)+(3\cdot 1)(3\cdot 1)+(4\cdot 0)(4\cdot 0)} = \sqrt{14}$$

A vektorok által bezárt szög:

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \underline{x},\underline{y}\right\rangle}{\left\|\underline{x}\right\|\cdot\left\|\underline{y}\right\|} = \frac{7}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}} \rightarrow \qquad \alpha = 69{,}7°$$

5. A szokásos 3 dimenziós Euklideszi térben, ahol $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a vektor koordinátái, normát alkot-e a következő képlettel definiált leképezés?

$$n(\underline{v}) = \min_{i=1}^{3}\left|v_i\right|$$

(Megoldás: Nem norma mert nem igaz a pozitív definit tulajdonság.)

6. A háromdimenziós valós vektorok terében bevezetjük az alábbi függvényt:

$s_a : (\underline{u},\underline{v}) \mapsto \sum_{i=1}^{3} u_i v_i a_i$, ahol $\underline{a}$ egy pozitív komponensű konstans vektor.

a) Bizonyítsuk be, hogy s_a skalárszorzatot definiál!

b) Adja meg az s_a skalárszorzat által meghatározott normát és metrikát!

c) Számítsa ki a $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és $\underline{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ vektorok skalárszorzatát, a vektorok hosszát és a két vektor távolságát, ha $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$!

7. Legyen P_2 a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere. Lássuk be, hogy az alábbi függvények skalárszorzatot definiálnak:

a, $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ b, $f(1)g(1) + f(1)'g(1)' + f(1)''g(1)''$

8. Az alábbi függvények közül melyik határoz meg egy normát az R^n vektortéren?

a, $\max_{j=1}^{n} x_j$ b, $\max_{j=1}^{n} |x_j|$ c, $\sum_{j=1}^{n} |x_j|$ d, $|x_1|$

e, $n(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \underline{x} = \underline{0} \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$

(Megoldás: Norma lesz b, és c,)

9. Az alábbi függvények közül melyik határoz meg egy metrikát az R^n vektortéren?

a, $|x_1 - y_1|$ b, $\max_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$ c, $\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$

d, m(x,y) = azon koordináták száma, amelyekben az x és y vektorok különböznek

e, $m(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} 1 & \underline{x} = \underline{y} \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$

(Megoldás: Metrika lesz b, c, és d, e,)

10. Adja meg az alábbi vektorok által bezárt szöget az R^4szokásoseuklideszi téren!

(Skalárszorzat a szokásos: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$, norma a szokásos: $\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$)

a, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(Megoldás: a, $\cos\alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 60^o$ b, $\cos\alpha = \frac{-2}{2 \cdot 2}$ c, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 2}$)