Jusztin Márton
2014.04.24.

Elsőrendű logika:

Prenex- , Skolem – normálforma

PRENEX - normálforma:

Hozzuk Prenex – normálformára a következő kifejezést:

$\exists x\, [\exists y\, (B(x,y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall y\, \exists z\, G(x,y,z)]$

<u>1.lépés:</u> implikációk átírása $A(x) \rightarrow B(y) = \neg A(x) \vee B(y)$

$\exists x\, [\underline{\neg}\exists y\, (B(x,y) \wedge P(y))\, \underline{\vee}\, \forall y\, \exists z\, G(x,y,z)]$

<u>2.lépés:</u> de Morgan azonosságok $\neg \exists x\, A(x) = \forall x\, \neg A(x)$

$\neg \forall x\, A(x) = \exists x\, \neg A(x)$

$\exists x\, [\underline{\forall y\, \neg}\, (B(x,y) \wedge P(y)) \vee \forall y\, \exists z\, G(x,y,z)]$

$\exists x\, [\forall y\, \underline{(\neg B(x,y) \vee \neg P(y))} \vee \forall y\, \exists z\, G(x,y,z)]$

<u>3.lépés:</u> kvantor kiemelés (Ez után Prenex forma)

- $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) = \forall x\, \forall y\, (A(x) \vee B(y))$
  (NEM $= \forall x\, (A(x) \vee B(x))$)
- $\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) = \forall x\, (A(x) \wedge B(x))$
- $\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) = \exists x\, (A(x) \vee B(x))$
- $\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x) = \exists x\, \exists y\, (A(x) \wedge B(y))$
  (NEM $= \exists x\, (A(x) \wedge B(x))$)

$\exists x\, \forall y1\, \forall y2\, \exists z\, [\neg B(x,y1) \vee \neg P(y1) \vee G(x,y2,z)]$

<u>4.lépés:</u> disztributív szabályok alkalmazása a konjunktív normálformára való hozáshoz

(Ez után Prenex normálforma)

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Jelen feladatban nem kell használni mivel már konjunktív normálformát kaptunk.

Jusztin Márton
2014.04.24.

5.lépés: SKOLEM – normálforma:

„∃” kvantorok változóinak kiértékelése

$x \rightarrow c$

$z \rightarrow f(y1, y2)$ - a változó függ az összes előtte álló „∀” kvantor változójától (más „∃” kvantorétól nem)

$\forall y1 \forall y2 [\neg B(c, y1) \vee \neg P(y1) \vee G(c, y2, f(y1, y2))]$

1.) Hozzuk Skolem – normálformára:

$\exists x K(x) \vee \neg \forall x [((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \neg \forall y (\neg Q(y) \rightarrow P(x,y)]$

1.implikációk

$\exists x K(x) \vee \neg \forall x [\neg (\neg (R(x) \wedge T(x)) \vee Q(x)) \vee \neg \forall y (Q(y) \vee P(x,y)]$

2. de Morgan

$\exists x K(x) \vee \exists x [(\neg (R(x) \wedge T(x)) \vee Q(x)) \wedge \forall y (Q(y) \vee P(x,y)]$

$\exists x K(x) \vee \exists x [(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y (Q(y) \vee P(x,y)]$

3.kvantor kiemelés

$\exists x \forall y \{K(x) \vee [(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(y) \vee P(x,y)]\}$

4.disztributív szabályok (itt most $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$)

$\exists x \forall y \{[K(x) \vee \neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)] \wedge [K(x) \vee Q(y) \vee P(x,y)]\}$

5.Skolemizálás

$x \rightarrow c$

$\forall y \{[K(c) \vee \neg R(c) \vee \neg T(c) \vee Q(c)] \wedge [K(c) \vee Q(y) \vee P(c,y)]\}$

2.) Hozzuk Skolem – normálformára:

$\forall x[\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg(Q(y) \rightarrow P(x,a))] \rightarrow \neg \forall x \exists y[P(y,x) \rightarrow R(x,y)]$

1. implikációk

$\neg (\forall x[\forall y P(x,y) \wedge \exists y (Q(y) \wedge \neg P(x,a))]) \vee \neg \forall x \exists y[\neg P(y,x) \vee R(x,y)]$

2. de Morgan

$\exists x[\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y (\neg Q(y) \vee P(x,a))] \vee \exists x \forall y[P(y,x) \wedge \neg R(x,y)]$

3.kvantor kiemelés

$\exists x[\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y (\neg Q(y) \vee P(x,a)) \vee \forall y(P(y,x) \wedge \neg R(x,y))]$

$\exists x[\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y1 (\neg Q(y1) \vee P(x,a)) \vee \forall y2 (P(y2,x) \wedge \neg R(x,y2))]$

$\exists x \exists y \forall y1 \forall y2 [\neg P(x,y) \vee (\neg Q(y1) \vee P(x,a)) \vee (P(y2,x) \wedge \neg R(x,y2))]$

4.disztributív szabályok

$\exists x \exists y \forall y1 \forall y2 [\{ \neg P(x,y) \vee \neg Q(y1) \vee P(x,a) \vee (P(y2,x)\} \wedge$

$\wedge \{\neg P(x,y) \vee \neg Q(y1) \vee P(x,a) \vee \neg R(x,y2)\}]$

5.Skolemizálás

$x \rightarrow s1$

$y \rightarrow s2$

$\forall y1 \forall y2 [\{ \neg P(s1,s2) \vee \neg Q(y1) \vee P(s1,a) \vee (P(y2,s1)\} \wedge$

$\wedge \{\neg P(s1,s2) \vee \neg Q(y1) \vee P(s1,a) \vee \neg R(s1,y2)\}]$

3.) Kis segítség skolemizáláshoz

$\exists x1 \exists x2$

$x1 \rightarrow c$

$x2 \rightarrow d$

$\forall y \exists x$

$x \rightarrow f(y)$

$\exists x1 \forall x2 \exists x3 \exists x4 \forall x5 \exists x6$

$x1 \rightarrow c$

$x3 \rightarrow f(x2)$

$x4 \rightarrow g(x2)$

$x6 \rightarrow h(x2,x5)$

Források:

2. feladat: http://www.inf.unideb.hu/~varteres/mi2folia/foliafo.pdf