

Állománynév: aramkorok_04fourier22.pdf

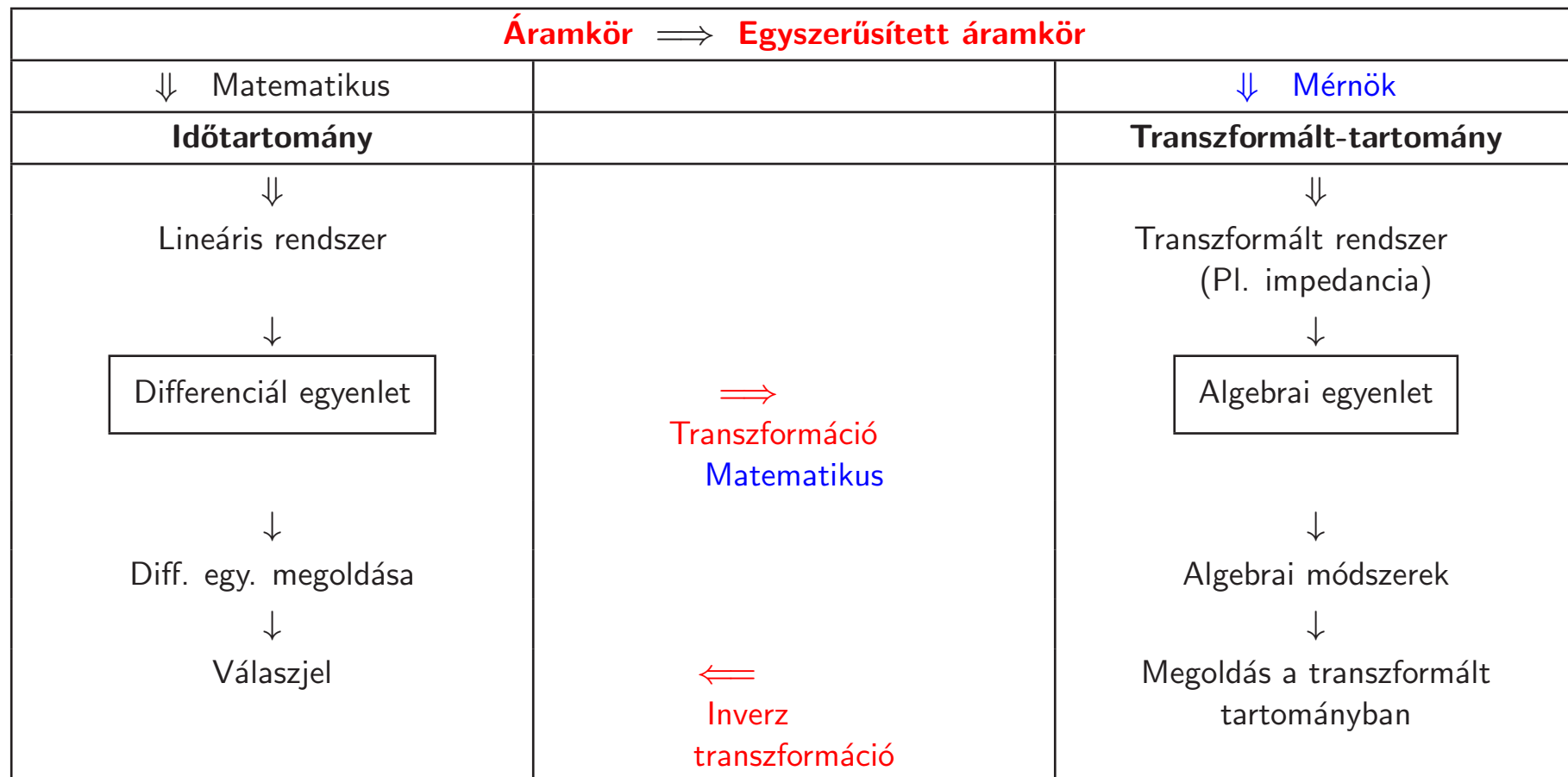
Irodalom: Előadó jegyzetei: <http://users.itk.ppke.hu/~kolumban/aramkorok/>

Fodor Gy., „Hálózatok és rendszerek,” Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2004, pp. 210-216, 235-248.

4. ANALÍZIS A FREKVENCIATARTOMÁNYBAN: A FOURIER SOR ÉS A FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ

Érvényesség és alkalmazás:

- Lineáris (szuperpozíció érvényes), időinvariáns, koncentrált paraméterű áramkörök, rendszerek és hálózatok esetén alkalmazható
- Mivel a kezdeti feltételek nem vehetők figyelembe, csak állandósult állapotú hálózatok és rendszerek vizsgálatára alkalmas
- A gerjesztéseket szinuszos jelek lineáris kombinációjaként/integráljaként állítjuk elő
- Frekvenciatartománybeli vizsgálatra alkalmas, leginkább a híradástechnikában és jelfeldolgozásban alkalmazzuk



Mit tettünk az egyszerű megoldhatóság (algebrai egyenletek) érdekében?

- **Korlátoztuk** a gerjesztéseket az következő függvényosztályokra:
 1. DC gerjesztések
 2. AC gerjesztések

Vedd észre, a komplex exponenciálisok a lineáris, állandó együtthatós, közösleges differenciál egyenletek (LTI rendszerek) sajátfüggvényei

$$Ae^{st} \quad \frac{d}{dt} (Ae^{st}) = sAe^{st} \quad \frac{d^n}{dt^n} (Ae^{st}) = s^n Ae^{st}$$

A Kirchhoff egyenletek alapján felírt rendszerjellemező differenciál egyenlet:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_0 x$$

ahol $x(t)$ a gerjesztés és $y(t)$ a válaszjel

Ha a gerjesztést korlátozzuk a komplex exponenciálisok függvényosztályára, akkor (i) mind a tranziens, (ii) mind az állandósult állapot felírható komplex exponenciálisokkal, amelyek a differenciál egyenletek sajátfüggvényei

A szinuszos gerjesztések szuperpozícióval állíthatók elő:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2} [e^{j\omega t} + (e^{j\omega t})^*]$$

Analóg rendszerek analízisének mérnöki módszere

ÁRAMKÖRI OLDAL

1. Matematikai modell: **Differenciál egyenlet**
2. **Impedancia** módszer bevezetése
 - Diff. egy. helyett **algebrai egyenlet**
 - **Átviteli függvények**
3. Impedancia módszer csak akkor használható, ha **korlátozzuk a gerjesztéseket** a komplex exponenciálisok osztályára

GERJESZTÉSEK OLDALA

1. **Tetszőleges gerjesztés**
2. Lineáris rendszer \Rightarrow **szuperpozíció**
3. **Szinuszos bázis** függvények:
 - Fourier sor
 - Fourier transzformáció

Szinuszos gerjesztés esete (Rövid ismételés):

Állandósult állapotú, LTI hálózatok AC analízise (a követendő eljárás pontokba szedve):

1. Különböző frekvenciás gerjesztések esetén szuperpozíció az időtartományban
(Egyszerre csak egy gerjesztő frekvenciához tartozó generátorok hatását vizsgáljuk)
2. Az azonos frekvenciájú gerjesztésekhez hozzárendeljük valamennyi jel komplex amplitúdóját
3. A kapcsolási rajz alapján felírjuk a valamennyi frekvenciára érvényes, és a ki- és bemenetek közti kapcsolatot megadó impedanciát, admittanciát vagy frekvenciaválasz függvényt
4. Komplex mennyiségek szorzataként előállítjuk a válasz komplex amplitúdóját
5. Inverz transzformációval visszatérünk az időtartományba, és ha kell a választ az egyes gerjesztő frekvenciák lineáris kombinációjaként állítjuk elő

Állandósult állapotú AC analízis feltételei:

- Lineáris hálózat
- Gerjesztőfüggvényeket a végtelen hosszú szinuszos függvényekre korlátozzuk
- Állandósult állapotú \implies **tranzienst nem vizsgál!!!**

A módszer alkalmazható minden olyan jelre, amely előállítható végtelen hosszú szinuszos jelek lineáris kombinációjaként

Vannak ilyen jelek? Igen, a PERIÓDIKUS JELEK

4.1. Periódikus jelek Fourier sora

4.1(a) A PERIÓDIKUS JEL DEFINÍCIÓJA

Az $x(t)$ analóg jelet periódikusnak nevezzük, ha létezik $T > 0$ amelyre

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t - \text{re}$$

A T_0 alapperiódus az a legkisebb pozitív T , amelyre a fenti egyenlet teljesül

Az alapfrekvencia definíciója

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

4.1(b) PERIÓDIKUS JELEK FOURIER SOROS REPRESENTÁCIÓJA

- Valamennyi periódikus jel reprezentálható egy végtelen tagszámú Fourier sorral
- A kellően kis teljesítményű tagokat elhanyagoljuk és véges hosszúságú Fourier sorokkal számolunk
- A Fourier soros analízis során mindig az alábbi periódikus jelet vizsgáljuk:

$$x(t + T_0) = x(t)$$

A Fourier sor trigonometrikus alakja

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad \text{ahol} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

A Fourier együtthatók értéke

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad \text{és} \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Fourier sor mérnöki (harmonic form) alakja

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$$

A Fourier együtthatók értéke a

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad \text{és} \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

kifejezésekből, az alábbi összefüggésekkel számítható

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{és} \quad \theta_k = \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k}$$

- Vedd észre:**
- C_k és θ_k a k -ik harmonikus komponens amplitúdóját és fázisát adja meg
 - Komplex amplitúdó: $V = V_{eff} \exp(j\theta) \implies V_k = \frac{C_k}{\sqrt{2}} \exp(j\theta_k)$
 - A mérnöki alak közvetlenül **kombinálható az állandósult állapotú AC hálózatok analízisére** kidolgozott megoldással

Periódikus gerjesztésekre adott válasz meghatározása a mérnöki alak alapján:

1. A periódikus meghajtó jelet mérnöki alakban adott Fourier sorral reprezentáljuk az időtartományban

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$$

2. A kapcsolási rajz alapján felírjuk a valamennyi frekvenciára érvényes, a ki- és bemenetek közti kapcsolatot megadó impedanciát, admittanciát vagy frekvenciaválasz függvényt
3. Az egyes harmónikus frekvenciákon meghatározzuk a hálózat átvitelének abszolút értékét és fázisát

$$H(jk\omega_0) = |H(jk\omega_0)| \angle H(jk\omega_0)$$

4. Felírjuk a válaszjelet az időtartományban

$$y(t) = H(0) C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{|H(jk\omega_0)| C_k}_{\text{amplitúdó}} \cos \left[k\omega_0 t - \underbrace{\theta_k + \angle H(jk\omega_0)}_{\text{fázis}} \right]$$

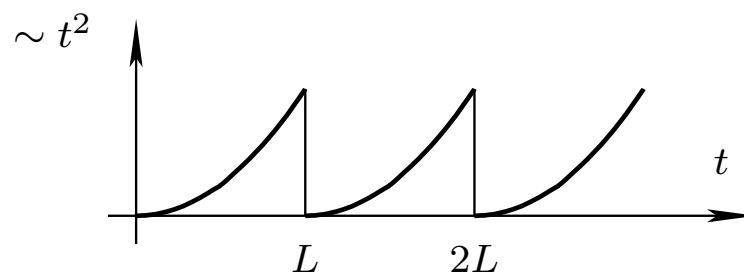
Vedd észre: Egyszerűsítés végett nem tüntettük fel a komplex amplitúdók használatát

4.1(b) PERIÓDIKUS JELEK FOURIER SOROS ELŐÁLLÍTÁSA

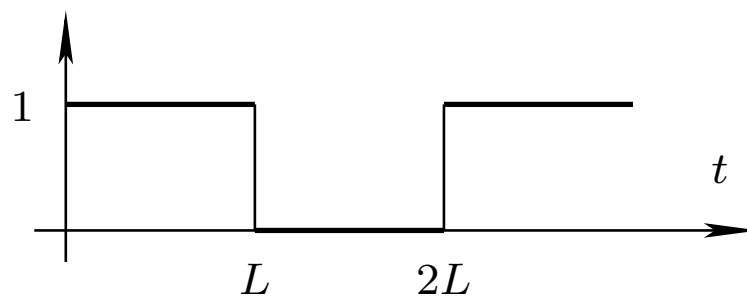
Fourier soros reprezentációk animációja

<http://www.physics.miami.edu/~nearing/mathmethods/animations.html>

L periódusú, t^2 típusú jel



$2L$ periódusú, négyszöghullám

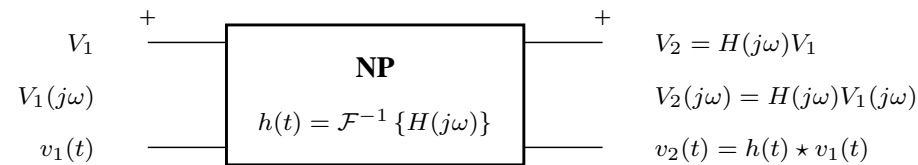


4.2. Tetszőleges jelek: A Fourier transzformáció

Impedancia koncepció lényege: válasz kompl. ampl. = **frekvenciaválasz fgv.** \times gerjesztés kompl. ampl.

- **Kérdés:** Kiterjeszthető a Fourier sorra alapozott vizsgálat a tetszőleges jelekre is?
- **Válasz:** Igen, a Fourier transzformációval az analízis a **frekvencia tartományba** tehető át

Tetszőleges LTI hálózat kimenete



- ahol:
- $h(t)$ az LTI hálózat $\delta(t)$ Dirac-impulzusra adott válaszjele, amit súlyfüggvénynek vagy impulzusválasz-függvénynek nevezünk
 - **$h(t)$ hálózatjellemző** függvény, azaz ha $h(t)$ ismert, akkor a válaszjel **konvolúcióval** tetszőleges gerjesztés mellett meghatározható
 - $V_1(j\omega) = V_1(\omega)$, $V_2(j\omega) = V_2(\omega)$ és $H(j\omega) = H(\omega)$ a be-, kimenő jelek és az impulzusválasz-függvény **Fourier transzformáltjai**

A Fourier transzformáció legfőbb előnye:

Két valós időfüggvény konvolúcióját komplex függvények szorzásába viszi át

4.2(a) A Fourier transzformáció definíciója

Az $x(t)$ időfüggvény (akár gerjesztés vagy impulzusválasz-függvény) **Fourier transzformáltja**, azaz áttérés a frekvenciatartományba

$$X(j\omega) = X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \left[\frac{\text{amplitudó}}{\text{Hz}} \text{ vagy } \frac{1}{\text{Hz}} \right]$$

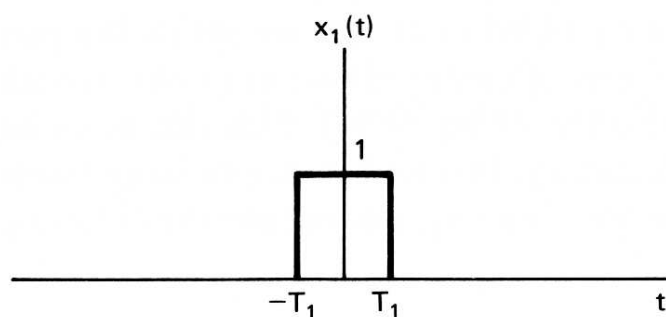
Az **inverz Fourier transzformáció**, azaz visszatérés az időtartományba

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad [\text{amplitudó vagy } -]$$

- ahol
- j -t csak az áramköranalízissel foglalkozó kollégák tüntetik fel
 - Dimenziókat az esetek döntő többségében nem tüntetjük fel
 - $X(j\omega)$ a spektrum
 - $|X(j\omega)|$ az amplitúdó spektrum
 - $\angle X(j\omega)$ a fázis spektrum

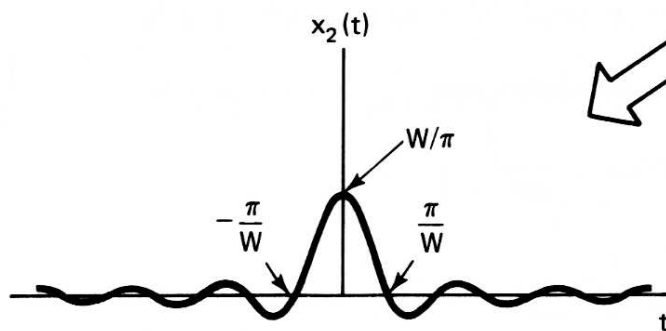
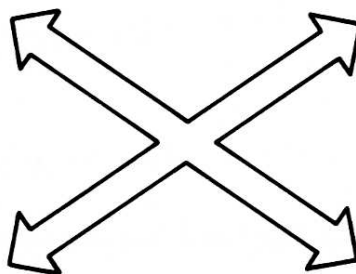
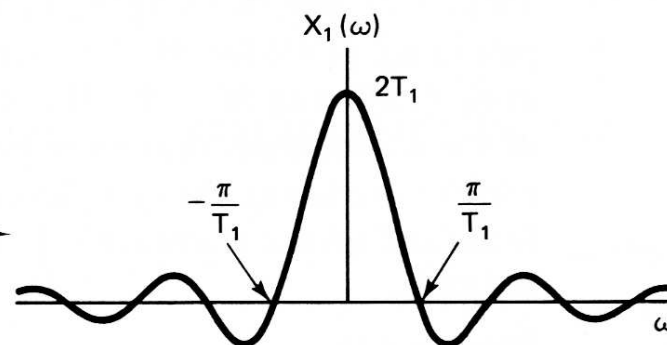
4.2(b) A dualitás tétele ill. példa a Fourier transzformáltakra

Időtartomány

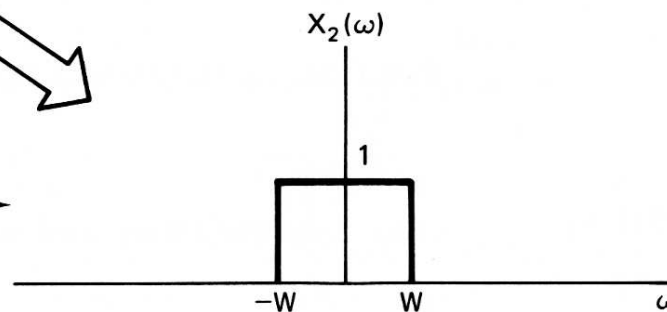


\mathcal{F}

Frekvenciatartomány

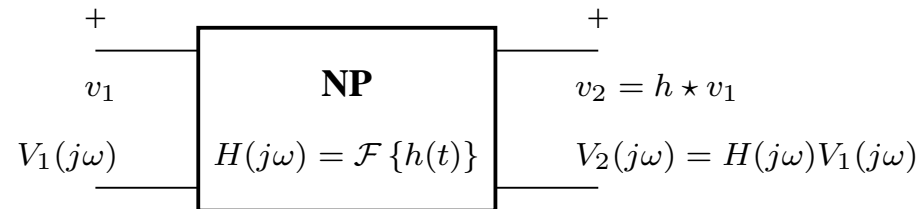


\mathcal{F}



4.2(c) A frekvenciaválasz- és impulzusválasz-függvények kapcsolata

- **Emlékezz:** Az AC impedanciákkal a kapcsolási rajzból közvetlenül felírtuk a $H(j\omega)$ **frekvenciaválasz-függvényt**



Egy NP $h(t)$ impulzusválasz-függvénye

- nem más, mint a $\delta(t)$ Dirac-impulzusra adott $h(t)$ válasza
- alapján **konvolúcióval** kiszámíthatjuk egy tetszőleges $x(t)$ meghajtásra adott válaszjelet

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

A Fourier transzformáció a **konvolúciót szorzásba** viszi át, azaz

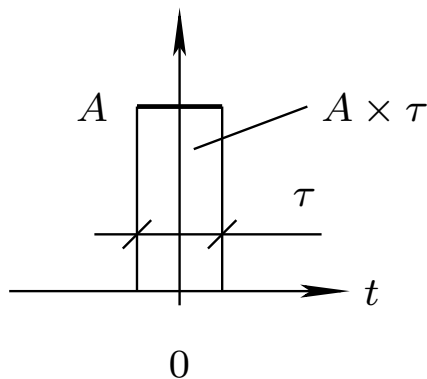
$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau\right\} = H(j\omega) \times X(j\omega)$$

ahol $H(j\omega)$ az AC analízisből ismert **frekvenciaválasz-függvény**

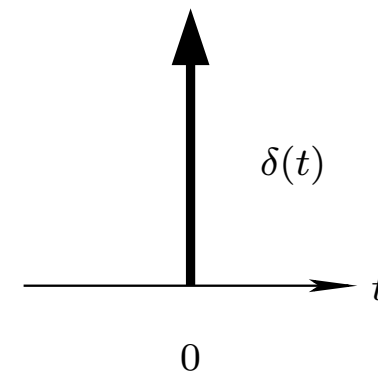
A frekvenciaválasz-, impulzusválasz-függvények és a Dirac-impulzus tulajdonságai

- A $h(t)$ impulzusválasz- és a $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ frekvenciaválaszfüggvények hálózatjellemző függvények
- Ismeretükben az LTI rendszer tetszőleges bemenetre adott válasza meghatározható
- A $h(t)$ impulzusválaszfüggvény (másik neve súlyfüggvény) nem más, mint a $\delta(t)$ Dirac-impulzusra adott válasz
- Ahol a $\delta(t)$ függvény matematikailag egy szinguláris disztribúció

A $\delta(t)$ Dirac-impulzus mérnöki realizációja

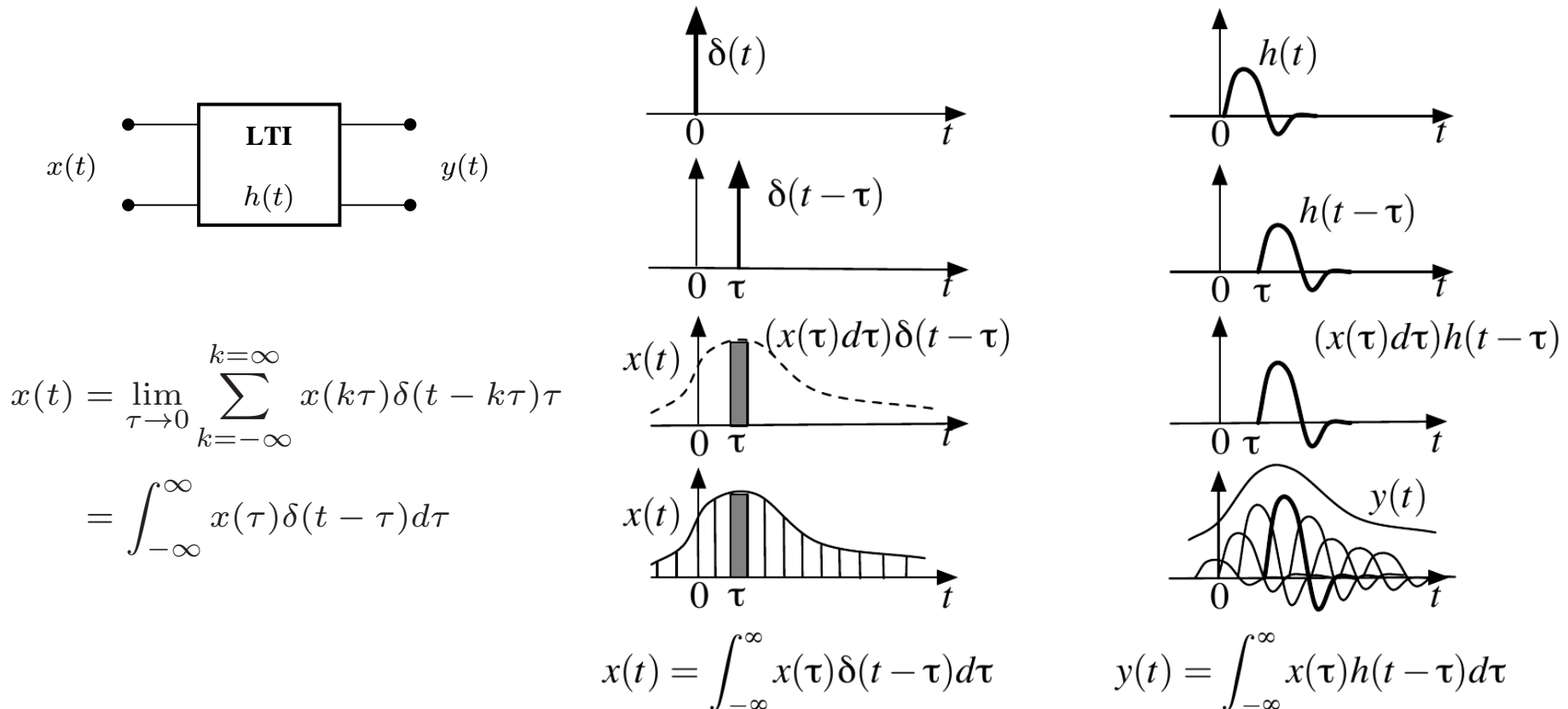


Ahol $\tau \rightarrow 0$
azonban $A \times \tau = 1$



LTI NP válaszelének meghatározása konvolúcióval

Szuperpozíció alkalmazása az időtartományban



4.2(d) A válaszjel meghatározása a Fourier transzformáció segítségével

Alapelv: A számításokat a **frekvenciatartományban**, azaz egy transzformált tartományban végezzük el azért, hogy ne kelljen differenciál egyenleteket és konvolúciót megoldani az **időtartományban**.

Fourier transzformáció a konvolúciót szorzásba viszi át!

A megoldás lépései:

1. Az időtartományban megadott $x(t)$ gerjesztéshez hozzárendeljük annak $X(j\omega)$ Fourier transzformáltját, azaz spektrumát
2. A kapcsolási rajz alapján az AC impedanciákkal felírjuk a NP $H(j\omega)$ frekvenciaválasz függvényét
3. $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ alakban előállítjuk a válaszjel Fourier transzformáltját, azaz spektrumát
4. A válaszjel $Y(j\omega)$ spektrumából inverz Fourier transzformációval előállítjuk a $y(t)$ válaszjelet az időtartományban

Vedd észre: A transzformáció célja ugyanaz mint korábban, a differenciál egyenletek megoldásának elkerülése

4.2(e) Legfontosabb időfüggvények Fourier transzformáltjai

Időtartomány

Frekvenciatartomány

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$t e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$e^{-a \omega }$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$2a \frac{\sin \omega a}{\omega a}$

Fontos tulajdonságok

- Szuperpozíciót kihasználtuk \Rightarrow csak lineáris rendszerekre alkalmazható
- Unicitás: Egyértelmű megfelelés az időfüggvény és annak Fourier transzformáltja közt
- Lineáris integrál transzformáció \Rightarrow Linearitás megőrződik

Egy példa:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \big|_{t=0} = 1$$

4.2(f) Fourier transzformációra vonatkozó tételek

Tulajdonság

Időtartomány

Frekvenciatartomány

Property	Signal	Fourier transform
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Linearity	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
Time shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Time scaling	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time reversal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Duality	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Time differentiation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Frequency differentiation	$(-jt)x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
Multiplication	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Real signal	$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$	$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ $X(-\omega) = X^*(\omega)$

Egy példa:

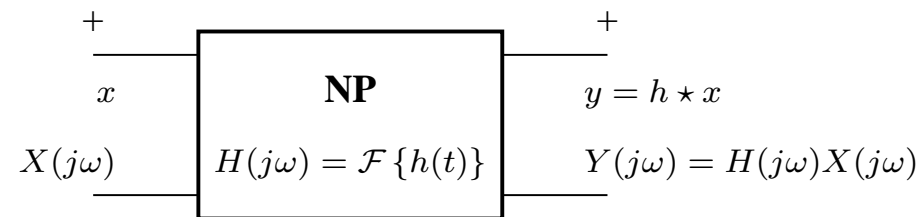
Derivált függvény Fourier transzformáltja:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \mathcal{F}^{-1} \{X(\omega)\} \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{j\omega X(\omega)} e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

4.2(g) A torzításmentes átvitel feltétele



Kimeneti jelalak egyezzen meg a bemenetivel, azonban egy $K > 0$ konstanssal való szorzás (alakhű erősítés) és egy $t_d \geq 0$ frekvenciafüggetlen késleltetés megengedett

$$y(t) = K x(t - t_d)$$

A frekvenciaválasz-függvény értéket a Fourier transzformációval kapjuk meg

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = K e^{-j\omega t_d} X(\omega) \equiv H(\omega) X(\omega)$$

Torzítás mentes átvitelt biztosító

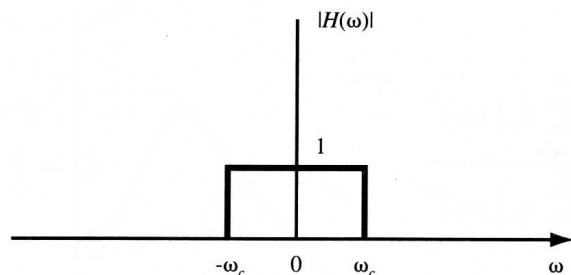
- **amplitúdó karakterisztika** $|H(\omega)| = K$ és
- **fázis karakterisztika** $\theta_H(\omega) = -\omega t_d$

4.2(h) Ideális szűrőkarakterisztikák definíciója

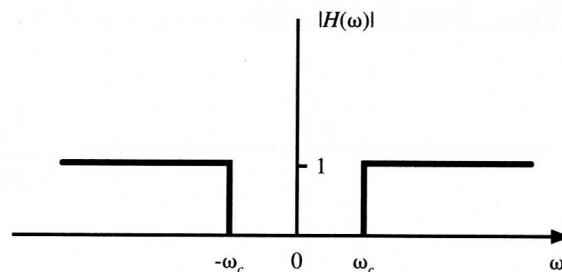
A (frekvenciaszelektív) szűrőknek mindössze **négy** típusa van

Az ideális szűrőkarakterisztikák amplitúdóválasz-függvénye:

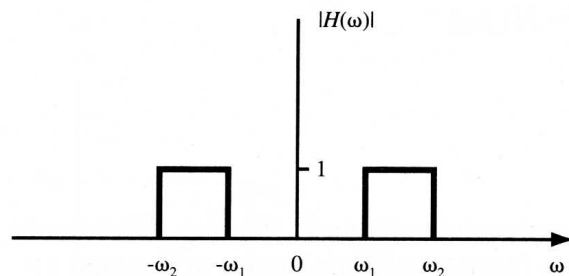
(a): ideális aluláteresztő szűrő, (b): ideális felüláteresztő szűrő, (c): ideális sáváteresztő szűrő (sávszűrő) és (d): ideális sávzáró szűrő (lyukszűrő)



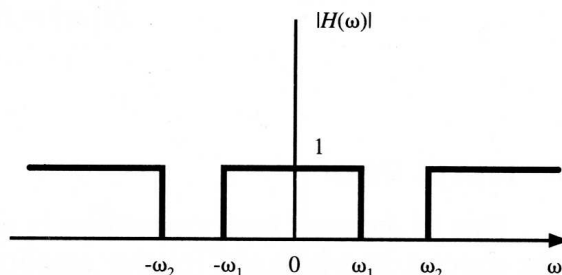
(a)



(b)



(c)



(d)

4.2(i) Sávkorlátozott jelek

Egy $x(t)$ jelet **sávkorlátozott** jelnek nevezünk, ha

$$|X(\omega)| = 0, \quad \text{ha} \quad |\omega - \omega_C| > B$$

FIGYELEM!!!

- Az $x(t)$ jel spektruma mindig **kétoldalas** (pozitív és negatív frekvenciás) komponensek, mert ez a feltétele annak, hogy az **időtartományban valós** jelet kapjunk
Az időtartománybeli valós jelekre mindig igaz, hogy

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

- A Fourier transzformáció csak állandósult állapotú rendszerekre alkalmazható
- Tranziens analízist a Laplace transzformációval kell elvégezni