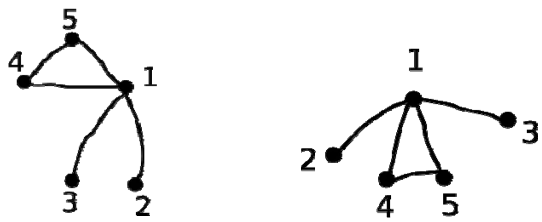
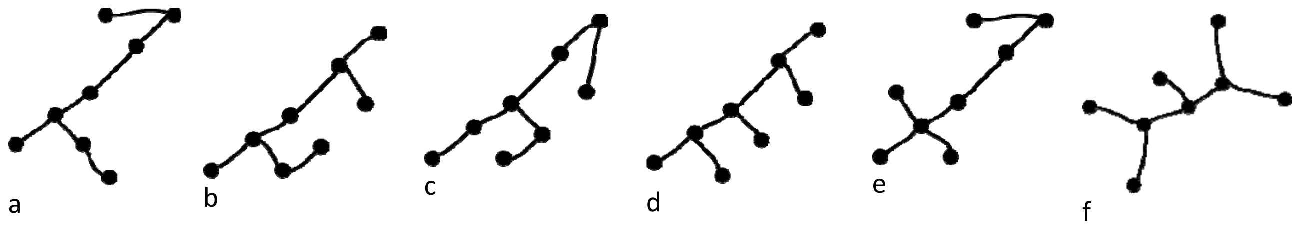
Gráfok

Gráf definíciója:
G=(E, V) – E: edges, élek halmaza; V: verticles, csúcsok halmaza
és minden $e \in E$ élhez egyértelműen hozzárendelünk egy $\{v_{1,} v_2\} \in V$ (rendezetlen) párost, azt a két csúcsot, amire az e él illeszkedik.
Egyszerű gráf: nincsen benne hurok- és többszörös él
Séta: $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 \ldots e_n, v_n$ sorozat, amelyben v_i -k csúcsokat, e_j -k közöttük vezető éleket jelentenek.
Vonal: Olyan séta, amelyben az élek különbözőek.
Út: Olyan séta, melyben az élek és a csúcsok is különbözőek.
Összefüggő gráf: bűrmely két csúcs között létezik út.
Kör: olyan élsorozat, melyben a kezdő és végpont ugyanaz a csúcs, ezt leszámítva viszont a csúcsok és élek különböznek.
Fa: Körmentes összefüggő egyszerű gráf (Éleinek száma: n-1)
Fokszám: csúcs fokszámán a rá illeszkedő élek számát értjük
Reguláris gráf: ha minden csúcsnak ugyanannyi a fokszáma
Teljes gráf: minden csúcs minden másik csúccsal össze van kötve. Az n csúcsú teljes gráf jele: K(n). Éleinek száma: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$
Két gráf izomorf (“egyenlő”), ha létezik kölcsönösen egyértelmű, éltartó leképezés a csúcsok között, azaz létezik egy éltartó bijekció.

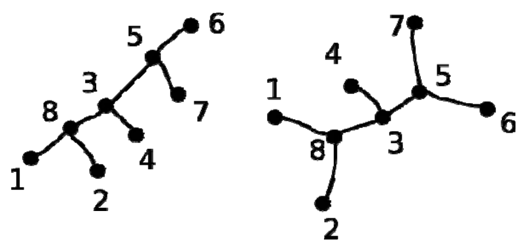
Izomorfiára példa:



1. Keressünk izomorf gráfokat az alábbiak között:

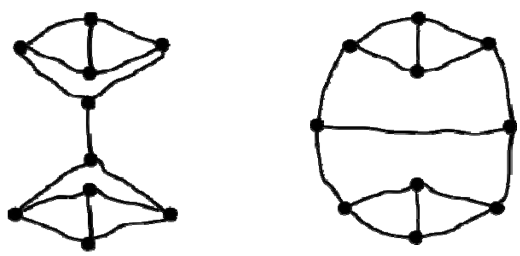


Megoldás: d és f izomorfak:



2. Izomorfak-e az alábbi gráfok?

M: Nem, könnyen látható, hogy az 1. gráfból (“középről”) egy élet kitörölve, két nem összefüggő részgráfra esik szét, míg a második gráfban bárhogyan kitörölhetünk egy élet, mégis összefüggő marad.



3. Van-e olyan egyszerű gráf, amelynek a fokszámai: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

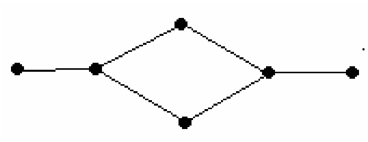
M: Nincs. Összesen 10 csúcs van, és mivel egy adott csúcs önmagával, illetve más csúccsal kétszeresen nem lehet összekötve, ezért a 9-es fokszámú csúcsból minden más csúcshoz kéne vezetnie élnek, viszont a 0-ás csúcsba nem mehet él, ez ellentmondást eredményez.

4. Van-e olyan egyszerű gráf, amelynek a fokszámai: 1, 1, 1, 2, 3, 3 ?

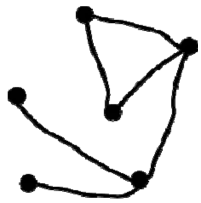
M: Nincs. Fokszámok összege: 1+1+1+2+3+3=11, ami páratlan, viszont a “kézfogás-elv” miatt a fokszámok összege az élek számának kétszeresével kell megegyeznie.

5. Van-e olyan egyszerű gráf, amelynek a fokszámai: 1, 1, 2, 2, 3, 3 ?

M: Igen, például:



vagy



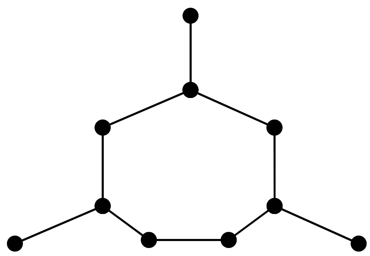
6. Az alábbi számsorok közül melyik lehet, egy egyszerű gráf fokszámsorozata? Válaszát indokolja! Végül rajzolja fel egyet a megengedett fokszámsorozathoz tartozó gráfok közül!

a, 1,1,1,2,2,2,3,4,5,6

b, 1,1,1,2,2,2,2,3,3,3

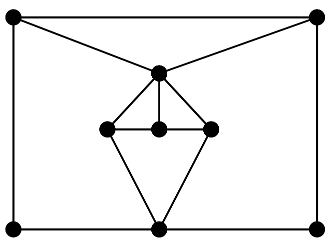
c, 0,1,2,3,4,5,6,7,8

M.o.: b,

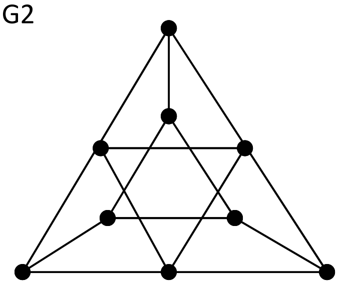


3. a, Az alábbi gráfok közül melyik kettő izomorf egymással? Adja meg az izomorfiát meghatározó hozzárendelést!

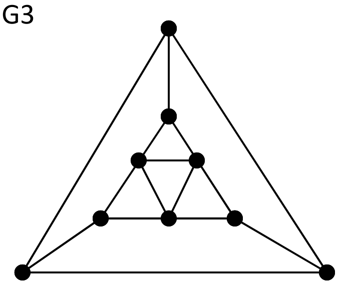
G1



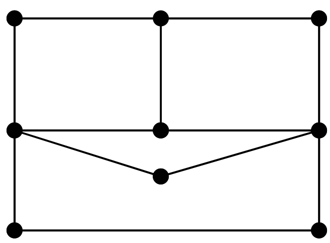
G2



G3



G4

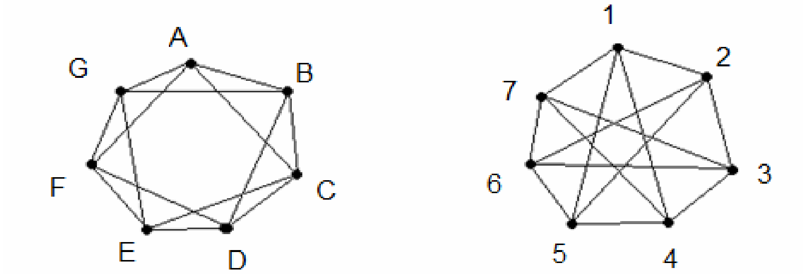


M: G2 és G3

4. Hány olyan egyszerű gráf adható meg, amelynek a fokszámsorozata 2, 3, 3, 4, 6, 6, 6?
Megoldás: Nincs ilyen gráf, mert a hatfokú csúcsok minden más ponttal össze vannak kötve. Mivel 3 ilyen van, minden fokszám legalább 3, de kellene lennie egy 2 fokú csúcsnak is.

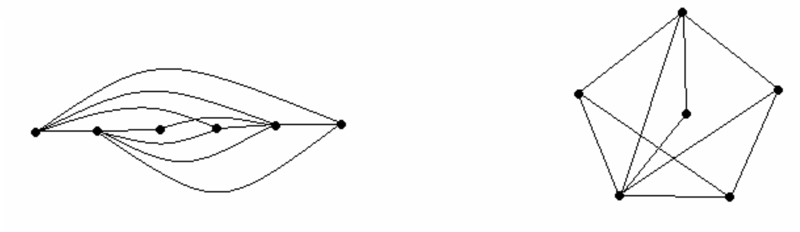
5.Izomorfak az alábbi gráfok?

Megoldás:
Igen, egy megfeleltetés:
G-1, B-2, D-3, F-4, A-5, C-6, E-7



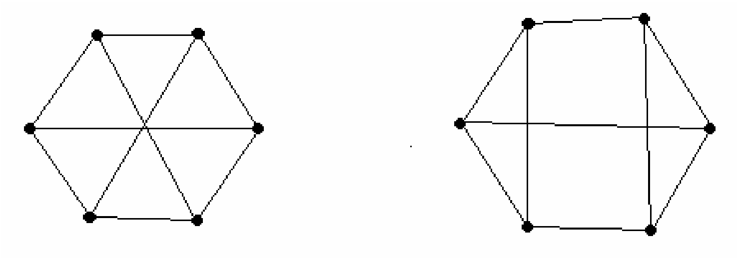
6. Izomorfak az alábbi gráfok?

Megoldás: Nem izomorfak,
mivel az első gráfban két ötödfokú
csúcs is van, balról a 2. és az 5.
A másikban viszont csak egy van,
a bal alsó.



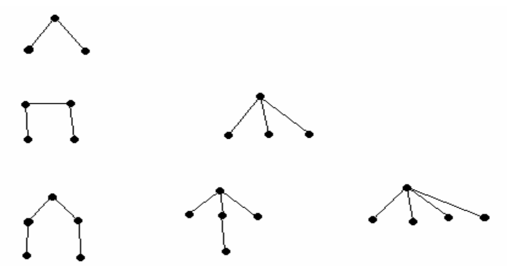
7. Izomorfak az alábbi gráfok?

Megoldás: Nem izomorfak,
az első páros gráf, míg a második nem az,
van benne 3 hosszú kör.



8. Rajzolja fel az összes nem izomorf 3 pontú, 4 pontú és 5 pontú fát!

Megoldás:

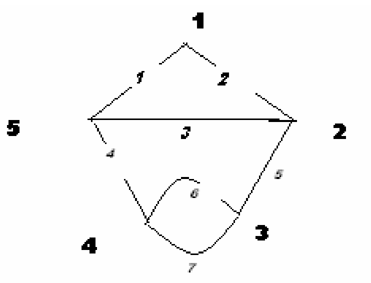


Szomszédsági mátrix:
$$a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{ha az i. és j. pont nem szomszédos}\\ k & \text{ha az i. és j. pont között k db párhuzamos él halad}\\ n & \text{ha i = j és i. ponthoz n db hurokél illeszkedik}\end{cases}$$

Illeszkedési mátrix: irányítatlan gráf esetén
$$b_{ij}=\begin{cases}0 & \text{ha a j. él nem illeszkedik az i. pontra}\\ 1 & \text{ha a j. él illeszkedik az i. pontra}\end{cases}$$

Illeszkedési mátrix: irányított gráf esetén
$$b_{ij}=\begin{cases}0 & \text{ha a j. él nem illeszkedik az i. pontra}\\ 1 & \text{ha a j. élnek az i. pont a kezdő}\\ -1 & \text{ha a j. élnek az i. pont a végpontja}\end{cases}$$

9. Adja meg az alábbi gráf szomszédsági és illeszkedési mátrixát:

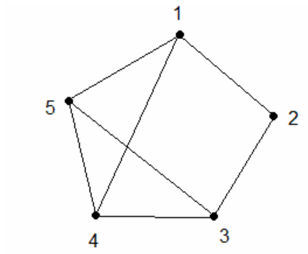


M: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. A G egyszerű gráfot az alábbi szomszédsági mátrixszal adtuk meg. Rajzolja meg a gráfot!

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

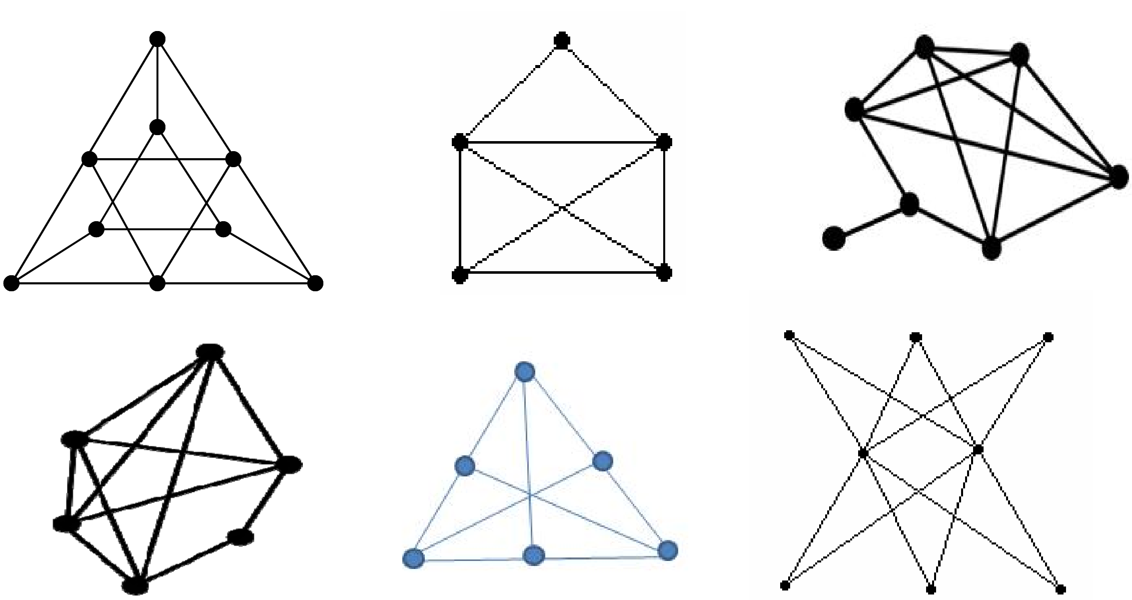
M:



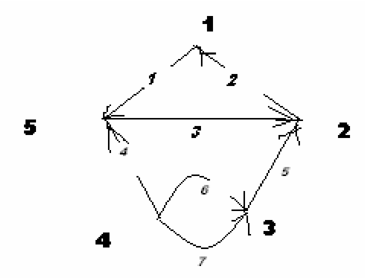
11. Egy irányított gráf pontjai legyenek az $a_1, a_{2,} \dots a_6$ pontok. Az a_i pontból annyi élt indítunk a_j -be, amennyi i-nek j-vel való maradékos osztásánál fellépő maradék. Határozza meg a gráf szomszédsági mátrixát.

Megoldás: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Adja meg az alábbi gráfok szomszédsági és illeszkedési mátrixát!



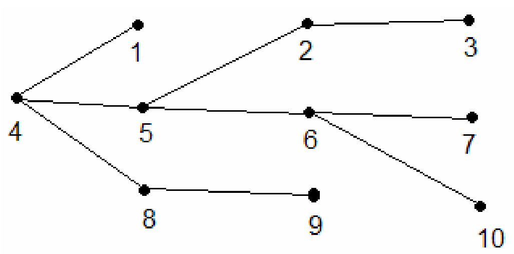
13. Adja meg az alábbi irányított gráf szomszédsági és illeszkedési mátrixát:

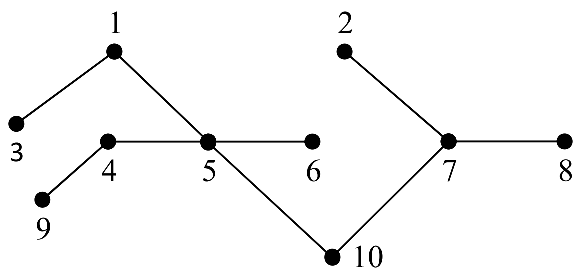


$$SZ:\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$ILL=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&0&0\\0&1&-1&0&-1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0&1&1\\-1&0&1&-1&0&0&0\end{bmatrix}$$

14. Írja fel az alábbi fák Prüfer-kódját:



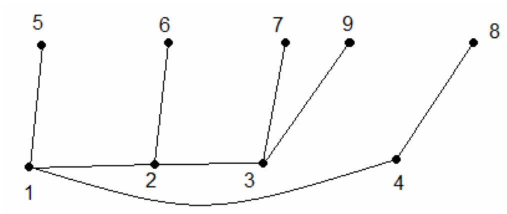


M.o.: 4,2,5,6,8,4,5,6 7,1,5,5,7,10,4,5

17. A fa Prüfer-kódjából rajzolja fel a gráfokat:

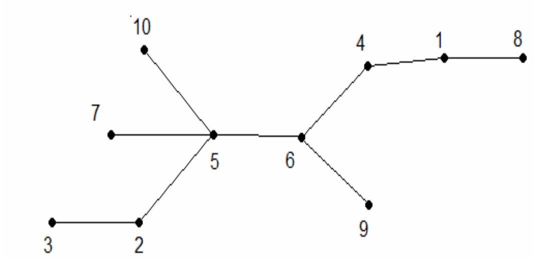
a, 1,3,2,4,1,2,3

kód	nincs a kódban
1,2,3,4,1,2,3	5,6,7,8,9
2,3,4,1,2,3	6,7,8,9
3,4,1,2,3	7,8,9
4,1,2,3	8,9
1,2,3	4,9
2,3	1,9
3	2,9



b, 2,5,5,1,4,6,6,5,

kód	nincs a kódban
2,5,5,1,4,6,6,5	3,7,8,9,10
5,5,1,4,6,6,5	2,7,8,9,10
5,1,4,6,6,5	7,8,9,10
1,4,6,6,5	8,9,10
4,6,6,5	1,9,10
6,6,5	4,9,10
6,5	9,10
5	6,10



18. Rajzolja fel az alábbi Prüfer-kódok által meghatározott fákat!

a, 2,2,5,2,1,1,8,8,10,10

b, 7,1,5,5,7,10,4,5

c, 1,3,2,4,1,2,3

d, 2,5,5,1,4,6,6,5

e, 4,5,7,5,6,7,6,9

f, 4,3,1,2,5,8,7,1,3

g, 5,2,5,2,1,3,1,4,5

h, 1,2,3,4,1,2,3,4

i, 3,1,2,5,7,2,4,1,2,4