Név: ........................................................ Neptun: ..............

PPKE ITK ● 2013/14/1. tanulmányi időszak

# DISZKRÉT MATEMATIKA I.

## ÍRÁSBELI ÉS SZÓBELI VIZSGA

### 2014. január 17.

## PÁZMÁNY PÉTER KATOLIKUS EGYETEM

### INFORMÁCIÓS TECHNOLÓGIAI ÉS BIONIKAI KAR

# Fontos tudnivalók

Tisztelt Vizsgázó!

Jelen füzet a 2013/14/1. tanulmányi időszak, vizsgaidőszakának Diszkrét matematika I. írásbeli és szóbeli vizsgájához lett kiadva. A füzet tartalmazza az intézmény által nyilvánosságra hozott vizsgainformációkat, valamint a tárgy témaköreinek kidolgozott formáját is.

A füzetben mindemellett megtalálható a Diszkrét matematika I. vizsga menetének leírása, a pontszámítás módja, és egyéb fontos tudnivalók.

A kiadványban bárhol, de különösen a kidolgozott témakörökben előfordulhatnak hiányosságok, bővebb magyarázatra szoruló részek. Az ezek kiegészítése illetve jegyzetelés, feladatmegoldás céljából a kidolgozott tételeket a füzetben jegyzetoldalak követik.

*Eredményes felkészülést kívánunk!*

A kiadványt összeállította:
Naszlady Márton Bese – 2013

# Tartalomjegyzék

**Témakörök** .......... **4**
Kombinatorika .......... 4
Permutáció .......... 4
Variáció .......... 5
Kombináció .......... 5
A kombinatorika alkalmazásai .......... 6
Ítéletkalkulus (nulladrendű logika) .......... 8
A formalizált nyelv felépítése .......... 8
Műveletek .......... 8
Logikai következmény .......... 10
Helyes következtetési sémák .......... 11
Rezolúció .......... 11
Halmazalgebra .......... 13
Műveletek halmazok között .......... 13
Relációk .......... 14
Ekvivalencia reláció .......... 14
Rendezési reláció .......... 14
Háló .......... 15
Gráfelmélet alapjai .......... 16
Gráfok felírása mátrixokkal .......... 17
Fák .......... 17
Feszítőfák .......... 18
Adott csúcsból a legrövidebb út keresése a többi csúcsba .......... 19
Gráfbejárások .......... 19
**Vizsgainformációk** .......... **20**
Vizsga menete, jegy számítása .......... 20
Írásbelivel kapcsolatos tudnivalók .......... 20
A szóbelivel kapcsolatos tudnivalók .......... 21
**Jegyzetek** .......... **22**

# Témakörök

## Kombinatorika

### Permutáció

**Ismétlés nélküli permutáció**

**Definíció** Adott $n$ elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott $n$ elem egy *ismétlés nélküli permutációjának* nevezzük.
Jele: $P_n$

**Tétel** *Az $n$ különböző elem permutációinak száma $P_n = n!$, ahol $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ és $0! = 1$.*

**Bizonyítás** Az első helyen az $1, 2, \ldots, n$ elem bármelyike állhat, utána a maradék $(n-1)$ elem összes lehetséges sorrendje következik. És így tovább, az utolsó elemig. Az összefüggéseket visszafelé fölírva adódik az állítás.

$$\begin{gathered} P_n = n \cdot P_{n-1} \\ P_{n-1} = (n-1)P_{n-2} \\ \vdots \\ P_1 = 1 \\ \Downarrow \\ P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n! \end{gathered}$$

■

**Ismétléses permutáció**

**Definíció** Adott $n$ elem, melyek között $k_1$ darab egyenlő, másik $k_2$ darab is egyenlő, … $k_s$ darab is egyenlő, ahol $k_v \geq 2$, ha $v = 1, 2, \ldots s$, és $k_1 + k_2 + \cdots + k_s \leq n$. Az adott $n$ elem egy meghatározott sorrendjét ezen elemek egy *ismétléses permutációjának* nevezzük.
Jele: $P_n^{(k_1, k_2, \ldots, k_s)}$

**Tétel** *Adott $n$, $s$ és $k_1, k_2, \ldots k_s$ esetén az ismétléses permutációk száma*

$$P_n^{(k_1, k_2, \ldots k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

**Bizonyítás** Tekintsük az $n$ elem egy tetszőleges permutációját. Ekkor
$k_1$ azonos elemhez $k_1!$ különböző indexet rendelhetünk;
$k_2$ azonos elemhez $k_2!$ különböző indexet rendelhetünk;
$\vdots$
$k_s$ azonos elemhez $k_s!$ különböző indexet rendelhetünk.
Ekkor fennáll az alábbi összefüggés:

$$k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s! \cdot P_n^{(k_1, k_2, \ldots, k_s)} = P_n = n!$$

■

## Variáció

### Ismétlés nélküli variáció

**Definíció** Adott $n$ különböző elem. Ha $n$ elem közül $k$ elemet $(0 < k \leq n)$ úgy választunk ki, hogy mindegyik elem csak egyszer szerepel, és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az $n$ elem $k$-ad osztályú *ismétlés nélküli variációját* kapjuk. Jele: $V_n^k$

**Tétel** *Az $n$ különböző elem $k$-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma*

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

**Bizonyítás** Rögzített $n$ mellett, $k$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.
$k = 1$ esetén az állítás igaz, mert $n$ elemből 1-et pontosan $n$ féleképpen lehet kiválasztani.
Tételezzük fel, hogy $k$-ra teljesedik, és igazoljuk $(k+1)$-re. Bármelyik $(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ $k$-ad osztályú variációhoz $(n-k)$ elem közül választhatunk egy $h_{k+1}$-ediket, hogy egy $(h_1, h_2, \ldots h_k, h_{k+1})$ $(k+1)$-ed osztályú variációt kapjunk. Azaz igaz a következő összefüggés: $V_n^k \cdot (n-1) = V_n^{k+1}$. ■

### Ismétléses variáció

**Definíció** Adott $n$ különböző elem. Ha $n$ elem közül $k$ elemet úgy választunk ki, hogy egy elemet többször is választhatunk és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor $n$ elem $k$-ad osztályú *ismétléses variációját* kapjuk.
Jele: $V_n^{k,i}$.

**Tétel** *Az $n$ különböző elem $k$-ad osztályú ismétléses variációinak száma $V_n^{k,i} = n^k$.*

**Bizonyítás** Írjuk föl a kiválasztott elemeket, sorrendben. Az első helyre az adott $n$ elem bármelyikét választhatjuk, így $V_n^{1,i} = n$. A másodosztályú ismétléses variációkat az első osztályúból úgy nyerjük, hogy azok mindegyikéhez hozzáírjuk az $n$ elem bármelyikét, hiszen az elemeknek nem kell feltétlenül különbözniük egymástól. Így minden első osztályú ismétléses variációból újabb $n$ darab másodosztályú ismétléses variációt kapuk. Ezek száma tehát $V_n^{2,i} = n^2$. Hasonlóan tovább:

$$V_n^{k,i} = n^k$$

■

## Kombináció

### Ismétlés nélküli kombináció

**Definíció** Adott $n$ különböző elem. Ha $n$ elem közül $k : 0 < k \leq n$ elemet úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer szerepelhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az $n$ elem $k$-ad osztályú *ismétlés nélküli kombinációját* kapjuk. Jele: $C_n^k$

**Tétel** *Az $n$ különböző elem $k$-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

**Bizonyítás** Az $n$ elem $k$-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma megegyezik a $k$ darab kiválasztott és az $(n-k)$ ki nem választott elem ismétléses permutációinak számával.

$$C_n^k = P_n^{(k,(n-k))} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

■

**Definíció** Az $\binom{n}{k}$ kifejezést *binomiális együtthatónak* nevezzük. Megállapodás szerint:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{0}{0} = 1$$

A binomiális együttható fogalma általánosítható tetszőleges valós számra:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

**Ismétléses kombináció**

**Definíció** Adott $n$ különböző elem. Ha $n$ elem közül $k$ elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az $n$ elem $k$-ad osztályú *ismétléses kombinációját* kapjuk.
Jele: $C_n^{k,i}$

**Tétel** *Az $n$ különböző elem $k$-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma*

$$C_n^{k,i} = C_{n-k+1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

**Bizonyítás** Az $n$ elem $k$-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma megegyezik $n+k-1$ elemből $k$ kiválasztott elem és $n-1$ ki nem választott elem ismétléses permutációinak számával.

$$C_n^{k,i} = P_{n+k-1}^{(k,n-1)} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

■

## A kombinatorika alkalmazásai

**Binomiális tétel**

**Tétel** *Kéttagú kifejezés (binom) bármely nemnegatív egész kitevőjű hatványa polinommá alakítható a következőképp:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

*ahol $n \in \mathbb{Z}$ és $a, b \in \mathbb{R}$.*

**Bizonyítás** Tudjuk, hogy bármely kommutatív gyűrűben a több tag szorzását több taggal oly módon végezhetjük el, hogy minden tagot szorzunk minden taggal. Írjuk fel az $n$ tényezős $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$ szorzatot. Ha mindegyik tényezőből az $a$-kat szorozzuk össze, $a^n$-t kapjuk. Ha $(n-1)$ tényezőből az $a$-kat és egy tényezőből a $b$-t választjuk, ezt $n$ féleképp tehetjük meg, így $na^{n-1}b$-t kapunk. Ha $(n-2)$ tényezőből az $a$-kat és 2 tényezőből a $b$-ket választjuk, amit $\binom{n}{2}$ féleképp tehetünk meg, akkor $\binom{n}{2} a^{n-2} b^2$ lesz az eredmény. Így folytatva, az összes eset előáll. ■

**Pascal háromszög**

Írjuk fel a binomiális együtthatókat az alábbi formában:

| | | |
|---|---|---|
| $n=0$ | $\binom{0}{0}$ | 1 |
| $n=1$ | $\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ | 1 1 |
| $n=2$ | $\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$ | 1 2 1 |
| $n=3$ | $\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$ | 1 3 3 1 |
| $n=4$ | $\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$ | 1 4 6 4 1 |
| $n=5$ | $\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$ | 1 5 10 10 5 1 |

**Tétel** *Legyen $n$ nemnegatív egész szám és legyen $k : 0 \le k \le n$ szintén egész. Ekkor fennállnak a következő összefüggések:*

*1.) szimmetria tulajdonság*

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

*2.) összegzés*

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

*3.) kettőhatvány*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

*4.)*

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=\begin{cases}0, ha\ n>0\\ 1, ha\ n=0\end{cases}$$

**Bizonyítás** 1.)

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(n-n+k)!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{n-k}$$

2.)

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{(k+1)n!}{(k+1)k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k+1)!}\frac{n-k}{n-k}=$$

$$=\frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

3.) Helyettesítsünk a binomiális tételbe $a=1$ és $b=1$-et!

4.) Helyettesítsünk a binomiális tételbe $a=1$ és $b=-1$-et!

# Ítéletkalkulus (nulladrendű logika)

## A formalizált nyelv felépítése

### Szintaxis

*Jelkészlet*

1.) $\boxed{\text{betűk}}$
2.) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ $\boxed{\text{atomok}}$
3.) $\boxed{I, H}$
4.) zárójelek

*Formula*

Minden atom formula.
Ha $\alpha$ és $\beta$ formulák, akkor $\neg\alpha,\ \alpha \wedge \beta,\ \alpha \vee \beta,\ \alpha \rightarrow \beta$ is formulák.

A fenti két szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat. Az atomi formulákat latin, az összetett formulákat görög betűvel jelöljük.

### Szemantika

A jelkészlet elemeit értelmezzük.

A betűk az ún. **ítéletváltozók.** Kijelentéseknek felelnek meg. A klasszikus logikában csak olyan kijelentésekre gondolunk, amelyek *igaz* vagy *hamis* volta egyértelműen eldönthető. Ezáltal egyfajta ítéletet képviselnek e mondatok. Változók pedig azért, mert az eredeti kijelentés tartalmától függetlenül, csakis annak igazságértékeit vehetik fel: az *igaz,* vagy a *hamis* értékek valamelyikét.

Az **igazságértékek** az ítéletváltozók lehetséges értékei, jelöljük ezek a halmazát $I$-vel. $I$ csak a klasszikus logikában kételemű halmaz.

Azt a függvényt, amely a betűkkel jelölt változókhoz hozzárendeli a lehetséges igazságértékek valamelyikét, **interpretációnak** hívjuk. (Az interpretációk az igazságtábla atomokat tartalmazó oszlopaiban találhatók, ezen oszlopok minden egyes sora egy interpretáció.)

Praktikus, ha az $I$ és $H$ betűt kiemeljük a betűk közül, és rögzítjük igazságértéküket – ezáltal e betűk nem ítéletváltozók, hanem **ítéletkonstansok** lesznek. Az $I$ betű igazságértéke minden interpretációban legyen *igaz,* a $H$ betű igazságértéke minden interpretációban legyen *hamis*. A többi ítéletváltozó esetében az igazságérték az interpretációtól függ.

A **zárójelek** értelmezése és használata a matematikában szokásos módon történik: lényegében a műveletek kiértékelési sorrendjét tudjuk általuk meghatározni.

A $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ jelek az igazságértékeken értelmezett **műveleteknek** felelnek meg. E műveletek közül csak az egy-, és kétváltozós műveleteknek, és azok közül is csak néhánynak van gyakorlati jelentősége. A műveletek definícióját szokás kiértékelésnek, kiértékelési szabálynak is nevezni. A kiértékelés az igazságtábla eredménynek megfelelő oszlopában van.

## Műveletek

### Egyváltozós műveletek

*Negáció (tagadás)*

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| $I$ | $H$ |
| $H$ | $I$ |

**Kétváltozós műveletek**

*Konjunkció (és)*

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $H$ | $H$ |
| $H$ | $I$ | $H$ |
| $H$ | $H$ | $H$ |

*Diszjunkció (vagy)*

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $H$ | $I$ |
| $H$ | $I$ | $I$ |
| $H$ | $H$ | $H$ |

*Implikáció (következtetés)*

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ |
|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $H$ | $H$ |
| $H$ | $I$ | $I$ |
| $H$ | $H$ | $I$ |

*Ekvivalencia*

**Definíció** $\alpha \leftrightarrow \beta \coloneqq (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \rightarrow \beta$ | $\beta \rightarrow \alpha$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $H$ | $H$ | $I$ | $H$ |
| $H$ | $I$ | $I$ | $H$ | $H$ |
| $H$ | $H$ | $I$ | $I$ | $I$ |

**Definíciók**

**Definíció** Az a formula, amely minden interpretációban *igaz, tautológia.*

**Definíció** Az a formula, amely minden interpretációban *hamis, kontradikció.*

**Definíció** Azt az interpretációt, amelyben a formula *igaz, modellnek* nevezzük.

**Definíció** Adott két formula $\alpha, \beta$. A két formula *ekvivalens*, ha minden interpretációban ugyan az az igazságértékük. Jelölése: $\alpha \equiv \beta$

**Fontos ekvivalens formulák**

1.) $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ | $\neg\alpha \vee \beta$ |
|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $H$ | $H$ | $H$ |
| $H$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $H$ | $H$ | $I$ | $I$ |

2.) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (De Morgan azonosság 1.)

| $A$ | $B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $H$ | $H$ |
| $I$ | $H$ | $H$ | $H$ |
| $H$ | $I$ | $H$ | $H$ |
| $H$ | $H$ | $I$ | $I$ |

3.) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (De Morgan azonosság 2.)

| $A$ | $B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ |
|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $H$ | $H$ |
| $I$ | $H$ | $I$ | $I$ |
| $H$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $H$ | $H$ | $I$ | $I$ |

**A konjunkció és diszjunkció tulajdonságai**

1.a) $A \vee B \equiv B \vee A$
2.a) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
3.a) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
4.a) $I \vee A \equiv I$
5.a) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6.a) $A \vee \neg A \equiv I$

1.b) $A \wedge B \equiv B \wedge A$
2.b) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
3.b) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
4.b) $H \wedge A \equiv H$
5.b) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6.b) $A \wedge \neg A \equiv H$

**Lemma** *$\alpha$ és $\beta$ akkor és csak akkor ekvivalens, ha $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautológia.*

**Bizonyítás** 1.) Igazoljuk, hogy ha $\alpha \equiv \beta$, akkor $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautológia. Ha $\alpha$ és $\beta$ igazságértéke megegyezik, akkor az ekvivalencia definíciója miatt csak *igaz* lehet, vagyis tautológia.

2.) Igazoljuk, hogy ha $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautológia, akkor $\alpha \equiv \beta$. Ez pontosan akkor lehet, ha $\alpha$ és $\beta$ igazságértéke minden interpretációban azonos, vagyis ekvivalensek. ■

**Tétel** *Ha $\alpha$ tautológia, akkor az ítéletváltozók helyébe formulákat írva tautológiát kapunk.*

**Tétel** *Ha $\alpha$ tautológia, akkor bármely részformula helyett azzal ekvivalens formulát írva tautológiát kapunk.*

**Tétel** *Az ekvivalens nulladrendű formulák az összes formulák partícióit adják.*

$$\leftrightarrow \textit{ha } \alpha \equiv \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha \equiv \beta \\ \alpha \equiv \beta \text{ és } \beta \equiv \alpha \\ \alpha \equiv \beta \text{ és } \beta \equiv \gamma \Rightarrow \alpha \equiv \gamma \end{cases} \quad \textit{vagyis ekvivalencia reláció.}$$

## Logikai következmény

**Definíció** Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz következménye $\beta$, ha minden olyan interpretációban, amelyben az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ formulák igazak, $\beta$ is igaz.

Más szavakkal: az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ formulahalmaz következménye $\beta$, ha $\beta$ legalább akkor igaz, amikor az $\alpha_i$-k igazak.

Jelölése: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \vDash_0 \beta$

## Helyes következtetési sémák

**Definíció** Azokat a következtetési sémákat tekintjük *helyes következtetési sémának,* amelyekben a következmény valóban a feltételek (szemantikai) következménye.

**Modus ponens (leválasztási szabály)**

Azt kell vizsgálnunk, hogy ahol $\alpha$ és $\alpha \to \beta$ igazak, ott a $\beta$ igaz-e. Ha igen, akkor helyes, ha nem, akkor helytelen a következtetési séma. Csak az első interpretációban teljesül, hogy $\alpha$ és $\alpha \to \beta$ igaz. Ebben az interpretációban $\beta$ is igaz, tehát valóban $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vDash_0 \beta$.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \to \beta$ |
|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ |
| $I$ | $H$ | $H$ |
| $H$ | $I$ | $I$ |
| $H$ | $H$ | $I$ |

**Tétel** $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash_0 \beta$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vDash_0 \beta$

**Bizonyítás** Az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ együttesen akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ igaz. ■

A fenti tétel miatt a $\vDash_0$ jel bal oldalát a továbbiakban egyszerű $\alpha$-val jelöljük, ahol $\alpha$-n mindig az $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ formulát értjük.

**Tétel** $\alpha \vDash_0 \beta$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha \to \beta$ *tautológia.*

**Bizonyítás** 1.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \vDash_0 \beta$, akkor $\alpha \to \beta$ tautológia:
Írjuk föl az igazságtáblázatot. A jelölt sort ez esetben nem lehet figyelembe venni, ugyanis akkor $\alpha \vDash_0 \beta$ nem teljesülne. A maradék sorokra pedig valóban az $I$ az igazságérték.

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \to \beta$ |
|---|---|---|---|
| | $I$ | $I$ | $I$ |
| $\to$ | $I$ | $H$ | $H$ |
| | $H$ | $I$ | $I$ |
| | $H$ | $H$ | $I$ |

2.) Lássuk be, hogy ha $\alpha \to \beta$ tautológia, akkor $\alpha \vDash_0 \beta$:
Ha $\alpha \to \beta$ tautológia, akkor a fenti igazságtáblában a jelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen, $I$ sorok. Ezekben a sorokban viszont valóban a $\beta$ legalább ott igaz, ahol $\alpha$ igaz. ■

**Tétel** $\alpha \vDash_0 \beta$ *akkor és csak akkor, ha* $\alpha \wedge \neg\beta$ *kontradikció.*

**Bizonyítás** Az $\alpha \vDash_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \to \beta$ tautológia, vagyis $\neg(\alpha \to \beta)$ kontradikció. Ezt kifejtve: $\neg(\alpha \to \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta$ ■

## Rezolúció

**Konjunktív normálforma**

**Definíció** Atomot vagy annak tagadását *literálnak* nevezzük.

**Definíció** Literálok diszjunkcióját *klóznak* nevezzük.

**Definíció** Klózok konjunkcióját *konjunktív normálformának (KNF)* nevezzük.

**Tétel** *Minden formulához létezik vele ekvivalens konjunktív normálforma.*

**Bizonyítás** 1.) Az implikáció fölbontható: $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

2.) De Morgan azonosságok

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$$
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$$

3.) „disztributivitás”

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$
$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

■

**Definíció** A konjunkciók diszjunkcióját *diszjunktív normálformának (DNF)* nevezzük.

**Rezolúció**

**Tétel** *(a rezolúció alapelve)* $\{\alpha \vee \beta, \gamma \vee \neg\beta\} \vDash_0 \alpha \vee \gamma$

**Bizonyítás** (igazságtáblával)

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\neg\beta$ | $\alpha \vee \beta$ | $\wedge$ | $\gamma \vee \neg\beta$ | $\alpha \vee \gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *I* | *I* | *I* | *H* | *I* | ***I*** | *I* | *I* |
| → | *I* | *I* | *H* | *H* | *I* | ***H*** | *H* | *I* |
| | *I* | *H* | *I* | *I* | *I* | ***I*** | *I* | *I* |
| | *I* | *H* | *H* | *I* | *I* | ***I*** | *I* | *I* |
| | *H* | *I* | *I* | *H* | *I* | ***I*** | *I* | *I* |
| → | *H* | *I* | *H* | *H* | *I* | ***H*** | *H* | *H* |
| → | *H* | *H* | *I* | *I* | *H* | ***H*** | *I* | *I* |
| → | *H* | *H* | *H* | *I* | *H* | ***H*** | *I* | *H* |

A jelölt sorokban a feltétel nem teljesül, így a következmény teljesülését nem vizsgáljuk. A jelöletlen sorokban viszony a következmény legalább ott igaz, ahol a feltétel igaz, tehát ez egy helyes következtetési séma. ■

**Tétel** *(helyesség) Legyen $S$ tetszőleges klózhalmaz. Ha $S$-ből levezethető az üres klóz, akkor $S$ kielégíthetetlen.*

**Lemma** *Legyen $S$ tetszőleges klózhalmaz és a $k_1, k_2, \ldots k_m$ klózsorozat rezolúciós levezetés $S$-ből. Ekkor $k_j$ minden $j = 1,2, \ldots m$-re tautológikus következménye az $S$ halmaznak, azaz $S \vDash_0 k_j$.*

**Bizonyítás** Teljes indukcióval.

1.) A levezetés első klóza, $k_1$ biztosan eleme $S$-nek, tehát $S \vDash_0 k_1$.

2.) Tegyük fel, hogy minden $j \leq n$-re igazoltuk már, hogy $S \vDash_0 k_j$.

3.) Belátjuk, hogy $k_{n+1}$-re is igaz az állítás. Ha $k_{n+1} \in S$, akkor $S \vDash_0 k_{n+1}$. Ha $k_{n+1}$ valamely $k_s, k_t$ klózok rezolvense, akkor $\{k_s, k_t\} \vDash_0 k_{n+1}$. Az indukciós feltevés miatt $S \vDash_0 k_s$ és $S \vDash_0 k_t$. Ebből $S \vDash_0 k_{n+1}$. ■

**Bizonyítás** Tegyük fel, hogy van olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, ami kielégíti $S$-et. A lemma szerint $S$-ből való rezolúciós levezetésbeli bármely $k_j$ klózra $S \vDash k_j$, tehát $\mathcal{I}$ kielégíti a rezolúciós levezetés minden klózát is. De az üres klóz kielégíthetetlen, tehát nem lehet eleme a levezetésnek. Így tehát ha $S$-ből levezethető az üres klóz, akkor $S$ kielégíthetetlen. ■

**Tétel** *(teljesség) Ha az $S$ véges klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor $S$-ből levezethető az üres klóz.*

# Halmazalgebra

**Definíció** Az $A$ és $B$ halmazok *egyenlők,* ha ugyanazok az elemeik. Jelölés: $A = B$

**Definíció** Azt a halmazt, amely egy elemet sem tartalmaz, *üres halmaznak* nevezzük. Jele: $\emptyset$

**Definíció** Az $A$ halmaz *részhalmaza* a $B$ halmaznak, ha $A$ minden eleme $B$-nek is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$. Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor azt mondjuk, hogy $A$ valódi részhalmaza $B$-nek. Ennek jelölése: $A \subset B$

$A \subseteq B$ tulajdonságai

- $A \subseteq A$ (reflexív)
- $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$ (tranzitív)
- $A \subseteq B \nRightarrow B \subseteq A$ (nem kommutatív)
- $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$ (antiszimmetrikus)

rendezési reláció

**Definíció** Az $A$ halmaz $P(A)$ *hatványhalmazán* az $A$ részhalmazainak halmazát értjük.

**Definíció** A halmaz *számosságán* a halmaz elemeinek számát értjük. Jelölés: $|A|$ Ha a halmaz számossága véges, akkor az $A$ halmazt végesnek nevezzük; ellenkező esetben az $A$ halmaz végtelen.

## Műveletek halmazok között

**Definíció** Az $A$ és $B$ halmazok *egyesítése* (uniója, összege) az az $A \cup B$-vel jelölt halmaz, amelynek elemei $A$-nak vagy $B$-nek elemei.

$A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$

**Definíció** Az $A$ és $B$ halmazok *közös része* (metszete, szorzata) az az $A \cap B$-vel jelölt halmaz, amelynek elemei $A$-nak és $B$-nek elemei.

$A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$

**Definíció** Az $A$ és $B$ halmazok *különbsége*, vagy a $B$ halmaz $A$ halmazra vonatkozó *komplementere* $A$ azon elemeinek halmaza, amelyek nincsenek $B$-ben.

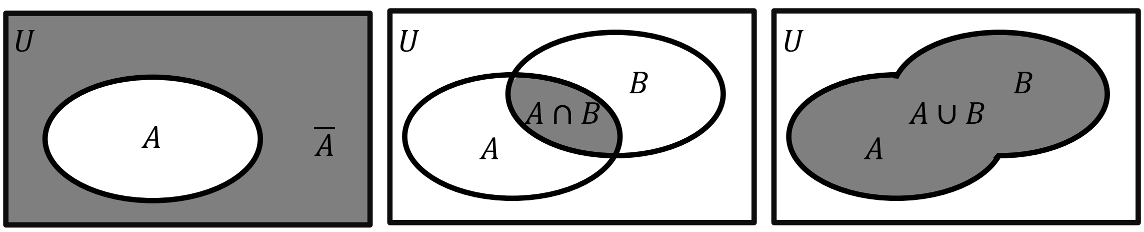
$A \setminus B = \overline{B_A} \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$

**Definíció** Legyenek $D_1, D_2, \dots D_n$ adott halmazok. E halmazok *Descartes (direkt) szorzata* $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \coloneqq \{(d_1, d_2, \dots, d_n) \mid d_k \in D_k : 1 \leq k \leq n\}$

**Műveleti azonosságok**

| | |
|---|---|
| 1.a) $A \cup B = B \cup A$ | 1.b) $A \cap B = B \cap A$ |
| 2.a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | 2.b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| 3.a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | 3.b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 4.a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | 4.b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |

**Venn diagramm**



# Relációk

**Definíció** A $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ direkt szorzat bármely részhalmazát *relációnak* nevezzük.

**Definíció** Az $\mathcal{R}$ *bináris reláció* $H$ halmazon, ha $\mathcal{R} \subseteq H \times H = \{(a,b) \mid a \in H, b \in H\}$

**A bináris reláció tulajdonságai**

1.) reflexív, ha $(x,x) \in \mathcal{R}$
2.a) szimmetrikus, ha $(x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$
2.b) antiszimmetrikus, ha $(x,y) \in \mathcal{R}$ és $(y,x) \in \mathcal{R}$ csakis úgy lehet, ha $x = y$
3.) tranzitív, ha $(x,y) \in \mathcal{R}$ és $(y,z) \in \mathcal{R}$ esetén $(x,z) \in \mathcal{R}$

## Ekvivalencia reláció

**Definíció** Az $\mathcal{R}$ bináris reláció a $H$ halmazon *ekvivalencia reláció,* ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

**Definíció** A *partíció* a $H$ halmaz olyan részhalmaz rendszere, amelyre $H_i \cap H_j = \emptyset$ és

$$\bigcup_{k=1}^{n} H_k = H$$

**Tétel** *Ha az $\mathcal{R}$ bináris reláció a $H$ halmazon ekvivalencia reláció, akkor a $H$ azon részhalmazai, amelyek egymással relációban álló elemeket tartalmaznak, azok a $H$ halmaz egy partícióját adják.*

**Bizonyítás** Ha $i \neq j$, akkor $H_i \cap H_j = \emptyset$, ugyanis ha $H_i \cap H_j = \emptyset$ nem teljesülne, vagyis lenne olyan $a$, ahol $a \in H_i \cap H_j$, akkor minden $b_i \in H_i$-re igaz lenne, hogy mivel $a \in H_i$, ezért $(a,b_i) \in \mathcal{R}$, é minden $c_j \in H_j$-re igaz lenne, hogy mivel $a \in H_j$, ezért $(a,c_j) \in \mathcal{R}$, továbbá a szimmetria miatt $(b_i,a) \in \mathcal{R}$. Ekkor a tranzitivitás miatt $(b_i,c_j) \in \mathcal{R}$, amiből következik, hogy $(b_j,c_j) \in H_i$ és $(b_j,c_j) \in H_j$, minden $b_i, c_j$ esetén, vagyis $H_i = H_j$.
Az $\cup_{k=1}^{n} H_k = H$ miatt $H$ tetszőleges eleme benne van valamelyik $H_k$-ban, a reflexív tulajdonságok miatt pedig ezek a $H_k$ halmazok nem üresek, hiszen így $(a,a) \in \mathcal{R}$, tehát $\exists k$, hogy $a \in H_k$ ■

**Tétel** *(az előző megfordítása) Ha a $H_i$ halmazrendszer a $H$ halmaz egy partíciója, akkor ez a $H$-n ekvivalencia relációt határoz meg, ha $(a,b) \in \mathcal{R}$ akkor és csak akkor, ha $a \in H_i$ és $b \in H_j$.*

**Bizonyítás** Az ekvivalencia reláció három tulajdonságát kell belátni.
1.) Reflexív, mert $(a,a) \in \mathcal{R}$, ha $a \in H$ és $a \in H$, ez pedig teljesül.
2.) Szimmetrikus, mert ha $(a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$, hiszen $a \in H$ és $b \in H$
3.) Tranzitív, mert ha $(a,b) \in \mathcal{R}$ és $(b,c) \in \mathcal{R}$, akkor $(a,c) \in \mathcal{R}$, hiszen $(a,b) \in \mathcal{R}$ azt jelenti, hogy $a$ és $b$ egyazon halmazban vannak. Viszont mivel $(b,c) \in \mathcal{R}$, ezért $b$ és $c$ is egyazon halmazban vannak. Ez csak úgy lehetséges, ha mindhárman ugyan abban a mondjuk $H_i$ halmazban vannak, ekkor viszont relációban is állnak egymással, azaz $(a,c) \in \mathcal{R}$. ■

## Rendezési reláció

**Definíció** Az $\mathcal{R}$ bináris reláció $H$ halmazon *parciális (részben) rendezési reláció,* ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. A $H$ halmazt ekkor *részben rendezettnek* nevezzük.

**Definíció** A $H$ halmaz *részben rendezett,* ha rendezési reláció van megadva $H$ elemein. Ezt a relációt szokás a $\leq$ jellel jelölni.

**Definíció** Az $\mathcal{R}$ parciális rendezési reláció $H$ halmazon *teljes,* ha az $x, y \in H$ esetén a $(x, y) \in \mathcal{R}$ és az $(y, x) \in \mathcal{R}$ relációk közül legalább az egyik teljesül.

**Definíció** A $H$ halmazon adott parciális rendezés szerinti *legnagyobb elem* $N$, ha minden $h \in H$-ra $h \leq N$.
A $H$ halmazon adott parciális rendezés szerinti *legkisebb elem* $k$, ha minden $h \in H$-ra $k \leq h$.

**Definíció** A $H$ halmazon adott parciális rendezés szerinti *maximális elem* $M$, ha nincsen olyan $h \in H$, melyre $M \leq h$.
A $H$ halmazon adott parciális rendezés szerinti *minimális elem* $m$, ha nincsen olyan $h \in H$, melyre $h \leq m$.

**Tétel** *Ha van legnagyobb (vagy legkisebb) elem, akkor az egyértelmű.*

**Bizonyítás** Indirekt módon tegyük fel, hogy két legnagyobb elem létezik, legyenek ezek $M_1$ és $M_2$. Ekkor a definíció szerint $M_1 \leq M_2$ és $M_2 \leq M_1$. Mivel a rendezési reláció antiszimmetrikus, ezért $M_1 = M_2$. ∎

**Definíció** A részben rendezett $H$ halmaz valamely $H_1$ részhalmazának *felső korlátja* (az adott rendezés és $H$ szerint) $K \in H$, ha minden $h_1 \in H_1$-re $h_1 \leq K$.
A részben rendezett $H$ halmaz valamely $H_1$ részhalmazának *alsó korlátja* (az adott rendezés és $H$ szerint) $k \in H$, ha minden $h_1 \in H_1$-re $k \leq h_1$.

**Definíció** A részben rendezett $H$ halmaz valamely $H_1$ részhalmaza *korlátos,* ha létezik alsó és felső korlátja. Ha létezik a felső korlátok közül legkisebb, akkor azt supremumnak, ha létezik az alsó korlátok közül legnagyobb, azt infimumnak nevezzük.

## Háló

**Definíció** A $H$ részben rendezett halmaz *háló,* ha bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma. A $H$ háló *teljes,* ha bármely részhalmazának van infimuma és supremuma.

**Definíció** Valamely $H$ rendezett halmazon értelmezett $f : H \to H$ függvény *monoton* (rendezéstartó), ha minden $H$ halmazbeli $h_1 \leq h_2$-re $f(h_1) \leq f(h_2)$. A $h \in H$ fixpontja $f$-nek, ha $f(h) = h$.

**Tétel** *(Tarski fixpont tétele) Teljes hálón értelmezett monoton (rendezéstartó) $f$ függvénynek van legkisebb és legnagyobb fixpontja.*

**Bizonyítás** Legyen $G$ azon elemek halmaza, melyekre $f(x) \leq x$. Ennek alsó határa, vagyis $g = \inf(G)$ lesz a legkisebb fixpont. Egyrészt $g \in G$, ugyanis $g \leq f(x) \leq x$. Ezért $f(g) \leq f(f(x)) \leq f(x) \leq x$, vagyis $f(g)$ is alsó korlát. Mivel $g$ a legnagyobb alsó korlát, ezért $f(g) \leq g$, tehát $g \in G$. Másrészt $g$ fixpont, vagyis $g = f(g)$. Mivel $f(g) \leq g$, ezért $f(f(g)) \leq f(g)$, vagyis $f(g) \in G$. De akkor $g$ alsó korlát volta miatt $g \leq f(g)$. A rendezési reláció antiszimmetrikus tulajdonága miatt $g = g(f)$. Harmadrészt $g$ legkisebb fixpont. Legyen $G^*$ a fixpontok halmaza, $g^* = \inf(G^*)$. Mivel $G^* \subseteq G$, ezért $g \leq g^*$; továbbá mivel $g^*$ infimuma $G^*$-nak, és $g$ is $G^*$-beli, ezért $g^* \leq g$. A két egyenlőtlenségből az antiszimmetrikus tulajdonság miatt $g^* = g$, vagyis $g$ valóban a legkisebb fixpont. ∎

# Gráfelmélet alapjai

**Definíció** Egy $G = \{V, E, \Theta\}$ *gráf*
- szögpontok (pontok, csúcsok) egy $V$ halmazából,
- élek egy $E$ halmazából, és
- egy $\Theta$ függvényből áll, amely minden egyes $a \in E$ élnek egy $(u, v) = (v, u)$ rendezett párt feleltet meg, ahol $u, v \in V$ szögpontok, melyeket az $a$ él *végpontjainak* nevezünk.

**Definíció** Ha az $a \in E$ élnek egy $(u, v)$ rendezett pár felel meg, akkor az élt *irányított élnek,* különben *irányítatlan élnek* nevezzük.

**Definíció** Ha egy gráf minden éle irányított, akkor a gráfot *irányított gráfnak,* különben ha minden éle irányítatlan, akkor *irányítatlan gráfnak* nevezzük.

**Definíció** Két gráf *izomorf,* ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másik pontjainak és éleinek.

**Definíció** A gráf $v$ pontjához illeszkedő élvégek számát $v$ *fokszámának (fokának)* nevezzük. Jelölése: $\varphi(v)$

**Definíció** Egy gráfot *egyszerű gráfnak* nevezünk, ha sem hurokélt, sem többszörös élt nem tartalmaz.

**Definíció** Ha egy gráfban bármely két csúcs úttal elérhető, akkor a gráfot *összefüggőnek* nevezzük.

**Tétel** *(Handshaking tétel) Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.*

**Bizonyítás** Tegyük fel, hogy az $e$ él az $u$ és $v$ csúcsokhoz illeszkedik, azaz $u$ és $v$ az $e$ él két végpontja. Ekkor, ha $u \neq v$, akkor az $e$ élt $\varphi(u)$-nál és $\varphi(v)$-nél is számoltuk. Ha pedig $u = v$, akkor az $e$ él hurokél, és így $\varphi(u)$-nál számoltuk kétszer. Tehát a gráf összes csúcsainak fokszámát összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk. ■

**Tétel** *Minden gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.*

**Bizonyítás** Minden gráfban a fokszámok összege páros, amely a páros és páratlan fokszámok összegéből tevődik össze. A páros fokszámok összege nyilván páros, hiszen páros számok összege páros. Így a páratlan fokszámok összegének is párosnak kell lenni, ami csak úgy valósulhat meg, hogy ha a páratlan fokszámú csúcsok száma páros. ■

**Tétel** *Az $n$ csúcsú összefüggő egyszerű gráf éleinek száma legalább $n - 1$.*

**Bizonyítás** Teljes indukcióval. Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$ esetén minden $n$ csúcsú gráfnak van $n - 1$ éle. Belátjuk, hogy akkor minden $n + 1$ csúcsú összefüggő gráfnak van $n$ éle. Legyen $G$ egy $n + 1$ csúcsú összefüggő gráf. Ha $G$-nek kevesebb éle van, mint $n + 1$, akkor van elsőfokú csúcsa. Ugyanis mivel $G$ összefüggő, így izolált csúcsa nincs. Vegyük ezt az elsőfokú csúcsot, és a hozzátartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Ekkor $n$ csúcsú összefüggő gráfot kapunk minimum $n - 1$ éllel, tehát teljesült az indukciós feltevés. A törölt élt újra hozzáadva következik, hogy $G$-nek nimimum $n$ éle van. Ha nem lenne elsőfokú csúcsa, akkor minden csúcsának fokszáma legalább 2 lenne, így a fokszámok összege legalább $2(n + 1)$, amiből következik, hogy az élek száma $n + 1$. ■

**Tétel** *Bármely egyszerű gráfban van két olyan pont, amelyek fokszáma egyenlő.*

**Bizonyítás** A lehetséges fokszámok $n = 0,1,2 \ldots n-1$, vagyis $n$ darab fokszám. Egyszerre azonban nem teljesülhet, hogy van $0$ és $n-1$ fokszámú csúcs, mivel az $n-1$ fokszámúból az összes csúcsba kell él vezessen, ami ellentmond annak, hogy van olyan csúcs, amibe nem vezet él. Ekkor már csak $n-1$ féle fokszám közül választhatunk, amit a skatulya-elv miatt csak úgy osztatunk szét, hogy ha van legalább kettő csúcs, aminek ugyan az a fokszám jut. ∎

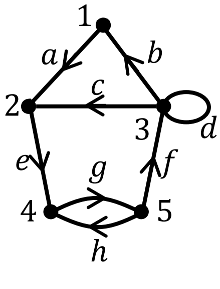
**Tétel** *Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma legalább* $2$*, akkor a gráfban van kör.*

**Bizonyítás** Alkalmazzuk a leghosszabb út módszerét. Legyen $1$ hosszúságú $L$ út a $G$ gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja $v$. Tekintsük most $G$-nek $v$-hez illeszkedő éleit. Ezek közül bármelyiknek a végpontja $L$-hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben $L$ hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy $L$ a leghosszabb út. Ha $G$ minden pontjának foka legalább $2$, akkor illeszkedik $v$-hez egy $e$ él is. Ha $e$ hurokél, akkor ez $G$ egy körét kijelöli. Ha $e$ nem hurokél, akkor $u$-ak $v$-től különböző $w$ végpontja $L$-ben van, tehát $L$-nek a $v$ és $w$ pontokat összekötő része $e$-vel együtt $G$ egy körét alkotja. ∎

**Tétel** *Ha egy* $n$ *csúcsú gráfnak legalább* $n$ *éle van, akkor van benne kör.*

**Bizonyítás** Teljes indukcióval. Az állatás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$-re minden $n$ csúcsú és legalább $n$ élű gráfban van kör. Legyen $G$ egy $n+1$ csúcsú gráf, amelynek legalább $n+1$ éle van. Visszatérve a bizonyításra, vegyük $G$ egy $L$ leghosszabb útját. Ha $L$ valamelyik végpontja $G$-nek nem elsőfokú csúcsai, akkor az előzőek szerint $G$-ben van kör. Ellenkező esetben töröljük $G$-nek egy elsőfokú csúcsát a hozzátartozó éllel együtt. Ekkor a kapott gráfnak $n$ éle és $n$ csúcsa van, tehát az indukciós feltevés miatt tartalmaz kört, amit $G$ is tartalmaz. ∎

## Gráfok felírása mátrixokkal




Szomszédsági mátrix

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Illeszkedési mátrix (nem irányított)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

## Fák

**Definíció** Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor azt *fagráfnak (fának)* nevezzük.

**Tétel** *Az* $n$ *csúcsú,* $n-1$ *élű összefüggő gráfok fák.*

**Bizonyítás** Tegyük fel, hogy a $G$ gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ha a kör egy élét töröljük, akkor $n$ csúcsú, $n-2$ élű összefüggő gráfot kapunk, ami ellentmond annak, hogy egy $n$ csúcsú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van. Be kell még látnunk, hogy ha egy összefüggő gráf valamely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk. Tegyük fel ehhez, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük a $G$ gráf $K$ körének $(u, v)$ élét. A $G$ gráfban az $u$-ból a $v$-be most is el tudunk jutni a $K$ kör megmaradt élein keresztül, azaz az $(u, v)$ törlése után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a kapott gráf is összefüggő. ∎

**Tétel** *Az $n$ csúcsú fagráf éleinek száma $n - 1$.*

**Bizonyítás** Tudjuk, hogy minden $n$ csúcsú gráfnak legalább $n - 1$ éle van. Mivel ha az $n$ csúcsú gráfban legalább $n$ él van, akkor van benne kör, ezért mivel a fa körmentes, összefüggő gráf, pontosan $n - 1$ éle kell legyen. ∎

Az előzőek alapján a fák négy tulajdonsága, hogy összefüggőek, csúcsaik száma $n$, éleik száma $n - 1$, nem tartalmaznak kört.

### Prüfer kód

A Prüfer kód fák tárolására alkalmas. A fa $n$ csúcsát $k = 1,2, \dots n$ számokkal tetszőlegesen címkézzük. A Prüfer kód alkalmazásához tudjuk, hogy minden legalább két csúcsú fában van legalább két csúcs, amelyek fokszáma 1.

**Algoritmus** (A Prüfer kód előállítása) Kiindulásként meg van adva egy fa (ábrával, mátrixszal stb.) Első lépésként sorszámozzuk a csúcsokat 1-től $n$-ig. A következő lépésben megkeressük a legkisebb sorszámú csúcsot a (maradék) fán. Hagyjuk el ezt a csúcsot a rá illeszkedő éllel együtt, és fűzzük a lista végéhez az él másik végén található csúcs sorszámát. Ezt a lépést addig ismételve, míg a fából csak egy csúcs marad, kapjuk a Prüfer kódot.

**Tétel** *Az $n - 2$ db számból álló $1,2, \dots, n$ számokból készített kódok és a fák között egy-egy értelmű megfeleltetés (bijekció) van. (Nem bizonyítjuk.)*

**Tétel** *(Caeley tétel) Feszítőfák száma n csúcsú teljes gráfban $n^{n-2}$.*

**Bizonyítás** Prüfer kód segítségével, $n - 2$ hosszú különböző sztringek száma $n$ számjegy ismételt felhasználása esetén $n^{n-2}$. ∎

## Feszítőfák

**Definíció** Egy gráf minden csúcsát tartalmazó fát a gráf *feszítőfájának* nevezzük.

**Tétel** *Minden (összefüggő) gráfnak van feszítőfája.*

**Bizonyítás** Legyen $G$ a gráf, melyben feszítőfát keresünk. Ha $G$ fa, akkor készen vagyunk. Ha $G$ nem fa, vagyis tartalmaz köröket, akkor minden körből egy élt elhagyva fához jutunk. ∎

### Minimális feszítőfa keresése

A probléma lényege, hogy egy élsúlyozott összefüggő egyszerű gráfban keressük a legkisebb élsúlyösszegű feszítőfát.

**Algoritmus** (Prim algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Az ebből kiinduló élek közül a legkisebb súlyú mentén választjuk a következő csúcsot. A legkisebb súlyú élhez fűzzük a rá illeszkedő legkisebb súlyú élet, ha az nem alkot kört az eddig vizsgált élekkel. Ha már van $n - 1$ él, akkor készen vagyunk.

**Algoritmus** (Kruskal algoritmus) Az éleket súlyuk szerint növekvő sorrendbe rendezzük. A legkisebbtől kezdve vesszük őket (nem feltétlenül illeszkedően) úgy, hogy ne képezzenek kört. Ha már van $n - 1$ él, akkor készen vagyunk.

## Adott csúcsból a legrövidebb út keresése a többi csúcsba

**Algoritmus** (Dijkstra algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Mindegyik csúcshoz rendeljük hozzá azt, hogy mekkora volt az élsúlyok összege, amik mentén a csúcsba eljutottunk. Kezdetben mindegyik végtelen. Válasszuk a kiindulási csúcsunkhoz illeszkedő éleket, és az élek másik végén lévő csúcsokhoz rendeljük hozzá az élsúlyok összegét, amin eljutunk a csúcsba. Ezt követően minden lépésben a legkisebb összegű csúcsból indulunk ki, és nézzük meg a többi csúcsba vezető élek súlyösszegét. Ha ez kevesebb, mint az adott csúcshoz hozzárendelt érték, akkor erre módosítjuk, ha nagyobb, akkor változatlanul hagyjuk. Végül, ha már nem találunk semelyik csúcshoz sem kisebb összeget, végeztünk.

## Gráfbejárások

Adott gráfban keresünk szisztematikusan adott tulajdonságú (pl. címkéjű) csúcsot. A szisztéma sokféle lehet, a két alap a szélességi és a mélységi keresés.

### Szélességi keresés (Breadth-First Search = BFD)

**Algoritmus** Meglátogatjuk az első csúcsot, majd ennek a csúcsnak az összes szomszédját. Aztán e szomszédok összes olyan szomszédját, ahol még nem jártunk, és így tovább. Berakjuk az épp meglátogatott csúcsot, hogy majd a megfelelő időben a szomszédjaira is sort keríthessünk.
Általános lépés: vesszük a sor elején levő $x$ csúcsot, töröljük a sorból, meglátogatjuk azokat az $y$ szomszédait, amelyeket eddig még nem láttunk, majd ezeket az $y$ csúcsokat a sor végére tesszük.

### Mélységi keresés (Depth-First Search = DFS)

**Algoritmus** Tetszés szerinti csúcstól elindulva egy úton addig megyünk „mélyre”, ameddig lehet: vagy nincsen további szomszédos csúcs, vagy már jártunk ott. Ha így megakadunk, akkor visszalépünk (backtrack) az előző csúcshoz, ha onnan tudunk továbbmenni, akkor megint elindulunk, és a lehető legmélyebbre együnk, ha nem, akkor visszalépünk.

### Fabejárás

Megkülönböztetünk egy csúcsot, ezt gyökérnek nevezzük. A gyökér őse (szülője) a szomszédos csúcsainak, és ezek a csúcsok az ősök (szülők) utódai (gyerekei). Az az utód, aki nem szülő, a fa levele. A fában egy út nevezhető „ág”-nak is.

**Definíció** Ha egy fában minden csúcsnak legfeljebb két gyereke van, akkor a fát *bináris fának* nevezzük.

### Preorder, inorder, postorder bejárások

**Algoritmus** Preorder bejárás: azaz a gyökér elem majd a bal oldali részfa preorder bejárása, végül a jobboldali részfa preorder bejárása.

**Algoritmus** Inorder bejárás: azaz először a bal részfa inorder bejárása, majd a gyökérelem, végül a jobboldali részfa inorder bejárása.

**Algoritmus** Postorder bejárás: azaz először a bal részfa posztorder bejárása, majd a jobboldali részfa posztorder bejárása, végül a gyökérelem feldolgozása.

# Vizsgainformációk

## Vizsga menete, jegy számítása

**A hallgató csak akkor vizsgáztatható, ha a NEPTUNBAN a vizsgát felvette, és az indexét elhozta**. Vizsgát csak akkor tehet a hallgató, (akkor is, ha esetleg a NEPTUN-ban sikerült felvennie a vizsgát), ha az évközi teljesítménye megfelel a tantárgyi követelményekben előírtaknak (aláírással rendelkezik), valamint, amennyiben Matematika alapjait felvette, abból SIKERES vizsgát tett.

A vizsga **kötelező írásbeli** és választható szóbeli részből áll. A kötelező írásbeli részt annak pontszáma alapján százalékosan értékeljük. **Az írásbelin is van egy alapszint (50%), amelyet ha nem teljesít a hallgató, elégtelen érdemjegyet kap. Csak legalább elégséges jegyet lehet a szóbelivel módosítani.**

**Jeleshez szóbeli vizsgát is kell tenni.**

Az év közben összegyűjtött (gyakorlati) pontszámból számolt százalék és a vizsga írásbeli rész százalékának matematikai átlaga alapján a hallgató megajánlott jegyet kap, melyet szóbeli vizsgán javíthat (vagy ronthat). Az összesített átlagos százalék alapján a megajánlott jegy:

**60%-tól elégséges, 70%-tól közepes, 80%-tól jó.**

A vizsga az elméleti tudást, és annak alkalmazási készségét méri. Akinek megvan az aláírása, jogot szerzett arra, hogy a vizsgán bizonyítsa tudását. A fentiek szerint a vizsgajegybe a félév során szerzett pontok is beszámítanak, ezért, akinek kevés pontja van, **legfeljebb jó jegyet szerezhet.** Ez a megszerzett jegy bekerül az indexbe, de ez a jegy is a **TVSZ szerint javítható, külön vizsgával**.

**Az elégtelen érdemjegyet szerző hallgató e jegyét a vizsga ismétlésével javítja, ekkor is a NEPTUN-ban újra jelentkezni kell. Egy tárgyból összesen két vizsgát lehet tenni.**

## Írásbelivel kapcsolatos tudnivalók

Az írásbeli vizsga körülbelül 40 perces: a gyakorlatokon megoldott feladatokhoz hasonló feladatokat, az előadáson elhangzott definíciók, tételek kimondását, utóbbiak bizonyítását, valamint az elmélethez szorosan kapcsolódó alapfeladatokat tartalmazza.

**Elégségest az kaphat, aki MINDEN kérdezett DEFINÍCIÓT, TÉTELT HIBÁTLANUL LEÍR, LEGALÁBB KÉT TÉTELT HIÁNYTALANUL BIZONYÍT, ÉS AZ ÍRÁSBELIN SZEREZHETŐ ÖSSZPONTSZÁMBÓL 50%-OT ELÉR.**

Az írásbelin szereplő feladatok lehetséges típusai:
- igaz-hamis választásos feladatok
- egyéb feleletválasztásos

**Várható eredményhirdetési időpontok:** kevés vizsgázó esetén a vizsga után 2-3 óra, sok vizsgázó esetén másnap reggel. Szintezés a nincsen, hiszen a tananyag nagy része a matematika fakultáción is szerepel a középiskolában. Egyetlen kivétel van: a logikai következmény rezolúcióval történő bizonyítása, ennek helyessége csak szóbelin szerepel.

**A rezolúció alaplépése, a rezolvens képzése két klózból, valamint a rezolúció alkalmazása feladatokban azonban elégséges szintű feladat.**

## A szóbelivel kapcsolatos tudnivalók

**A szóbelin főleg tételek kimondása és bizonyítása szerepel. Lehetséges egy-egy témakörről való beszélgetés is.**

**A szóbeli az írásbeli eredményének kihirdetése után lehetséges, általában az írásbeli vizsgát követő napon.** Határesetben az eredményhirdetéskor 1-1 rövid kérdés várható. Az írásbeli eredményétől függően a szóbeli nem mindenkinek kötelező, de elégtelentől különböző írásbelit írt hallgató jogosult szóbeli vizsgát tenni. Szóbeli esetén a szóbeli, az írásbeli és az évközi zárthelyik eredményei EGYÜTTESEN határozzák meg az indexbe bekerülő jegyet. **Szóbelin tehát nemcsak javítani lehet.** ☹

# Jegyzetek

### Évközi eredmény

| | | maximális pontszám | elért pontszám |
|---|---|---|---|
| **Nagy zárthelyi dolgozatok** | 1. nagy zárthelyi dolgozat | 50 | |
| | 2. nagy zárthelyi dolgozat | 50 | |
| | **Összesen** | **100** | |
| | **Elért pontszám** | | |

### Az évközi és a vizsgán nyújtott teljesítmény értékelése

| vizsga \ gyak. | 50% | 55% | 60% | 65% | 70% | 75% | 80% | 85% | 90% | 95% | 100% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **50%** | 50% | 53% | 55% | 58% | 60% | 63% | 65% | 68% | 70% | 73% | 75% |
| **55%** | 53% | 55% | 58% | 60% | 63% | 65% | 68% | 70% | 73% | 75% | 78% |
| **60%** | 55% | 58% | 60% | 63% | 65% | 68% | 70% | 73% | 75% | 78% | 80% |
| **65%** | 58% | 60% | 63% | 65% | 68% | 70% | 73% | 75% | 78% | 80% | 83% |
| **70%** | 60% | 63% | 65% | 68% | 70% | 73% | 75% | 78% | 80% | 83% | 85% |
| **75%** | 63% | 65% | 68% | 70% | 73% | 75% | 78% | 80% | 83% | 85% | 88% |
| **80%** | 65% | 68% | 70% | 73% | 75% | 78% | 80% | 83% | 85% | 88% | 90% |
| **85%** | 68% | 70% | 73% | 75% | 78% | 80% | 83% | 85% | 88% | 90% | 93% |
| **90%** | 70% | 73% | 75% | 78% | 80% | 83% | 85% | 88% | 90% | 93% | 95% |
| **95%** | 73% | 75% | 78% | 80% | 83% | 85% | 88% | 90% | 93% | 95% | 98% |
| **100%** | 75% | 78% | 80% | 83% | 85% | 88% | 90% | 93% | 95% | 98% | 100% |

### Érdemjegyek megállapítása

| Érdemjegy | % |
|---|---|
| **1 (elégtelen)** | 0 – 59 |
| **2 (elégséges)** | 60 – 69 |
| **3 (közepes)** | 70 – 79 |
| **4 (jó)** | 80 – 89 |
| **5 (jeles)** | 90 – 100 |

A jeleshez szóbeli vizsgát is kell tenni.