Komplex számok

Elméleti összefoglaló

Komplex számok: rendezett számpárok halmaza, ahol a számokat a valós számok halmazából vesszük.
$(a,b) \in C; a,b \in R$
Ekvivalens jelölés: $(a,b) = a + bi$, ahol i a képzetes egység. $\left(i^2 = -1\right)$

A komplex számokat általában z-vel jelöljük.

A $\bar{z} = (a,-b) = a - bi$ számot a *z* komplex szám konjugáltjának nevezzük.

Műveletek komplex számokkal

Összeadás:

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, $(a+bi) + (c+di) = a + c + bi + di = (a+c) + i(b+d)$

Kivonás (összeadás ellentettje):

$(a,b) - (c,d) = (a-c, b-d)$, $(a+bi) - (c+di) = a - c + bi - di = (a-c) + i(b-d)$

Szorzás:

$(a+b)(c+d) = (ac-bd, ad+bc)$, $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

Szorzás inverze: $x \cdot \frac{1}{x} = (1{,}0)$

Reciprok ($\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}}$ *)*

$$\frac{1}{(a,b)} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Osztás (reciprokkal való szorzás):

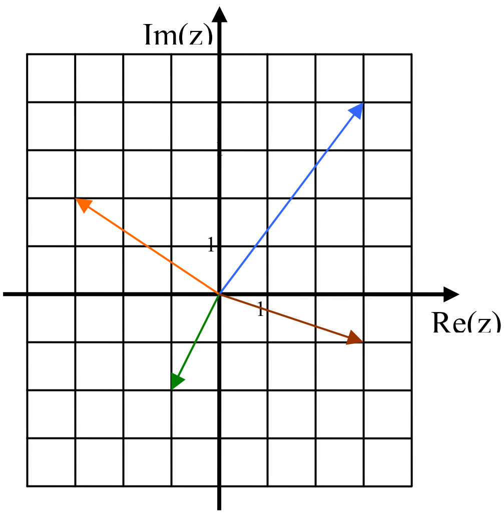
$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b)\frac{1}{(c,d)} = \frac{(a,b)}{(c,d)} \cdot \frac{(c,-d)}{(c,-d)} = (a,b)\left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2}\right) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

Belátható, hogy a komplex számokon értelmezett összeadásra, és szorzásra érvényesek a testaxiómák, így a komplex számok halmaza test.

Komplex szám ábrázolása

A komplex számokat a komplex számsíkon ábrázoljuk. Mivel a komplex számok halmaza izomorf a két dimenziós vektorok halmazával, ezért a komplex számokat két dimenziós vektorokkal szemléltetjük a számsíkon, ahol a vektor két koordinátája a komplex szám valós (Re(z)), és képzetes része (Im(z)).

Pl.:
3+4i, -3+2i, -1-2i, 3-i



Komplex számok alakjai

Algebrai alak:

a+bi

Pl.: 1+i,3-2i, i, 5

Trigonometrikus alak:

Polárkoordinátákkal (r, φ) való megadás.

Komplex szám abszolút értéke (0-tól mért távolság): $r = |(a,b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Komplex szám argumentuma (valós tengely pozitív felével bezárt szög): $\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$, ahol $\varphi \in [0°,180°]$. Ha a szám a harmadik vagy negyedik síknegyedbe esik, akkor az argumentuma $\varphi + 180°$.

Így

$a = r\cos(\varphi)$

$b = r\sin(\varphi)$

Ekkor a szám trigonometrikus alakja: $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Pl.: $5(\cos 45° + i\sin 45°), \sqrt{6}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

Exponenciális alak:

Euler formula szerint: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Tehát: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, ezt nevezzük a szám exponenciális alakjának.

	Algebrai alak	**Trigonometrikus alak**	**Exponenciális alak**
z	$a + bi$	$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	$re^{i\varphi}$

Szorzás osztás trigonometrikus és exponenciális alakban

$z_1 z_2 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot r_2(\cos\beta + i\sin\beta) = r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$

Hasonlóan:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta))$$

Hatványozás, Moivre-formula

A szorzás szabályait felhasználva egy komplex szám n. hatványa:

$$z^n = (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$

Gyökvonás:

$y = \sqrt[n]{z}$ az a komplex szám, amelyet n-edik hatványra emelve z-t kapunk : $y^n = z$

Ilyen számból mindig n db van ($y_0, y_1, ..., y_{n-1}$).

$$y_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\alpha + k\cdot 360°}{n}) + i\sin(\frac{\alpha + k\cdot 360°}{n})), \text{ ahol } k = 0,1,2,...,n-1$$

Egységgyök, primitív egységgyök:

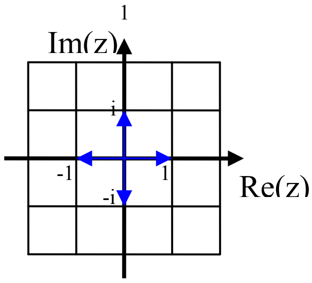
Egy komplex számot n-edik egységgyöknek nevezünk, ha n-edik hatványa éppen 1.

$$\sqrt[n]{1} = \cos(k\frac{360°}{n}) + i\sin(k\frac{360°}{n})$$

Primitív egységgyök:

- Amelynek hatványai az összes többi egységgyököt előállítják.
- Amelynek n. hatvány 1, és nincs n-nél kisebb hatványa, ami 1-et adna.
- Ahol n, és k relatív prímek.

'i' hatványai:



$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

...

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$