

# Valószínűesszámítás tételek és alapfogalmak

Csercsik Dávid

2017 ősz

**A** tételsor:

## 1. Eseménytér, $\sigma$ -algebra (eseményalgebra)

Ha adott az  $\Omega$  eseménytér, hogyan definiáljuk az eseményalgebrát? Miket nevezünk eseményeknek? Mik az eseményalgebra tulajdonságai? Mutasson példát azonos eseménytér feletti különböző eseményalgebrákra!

## 2. Diszkrét valószínűségi változó eloszlása, eloszlásfüggvény (skalár eset)

Adott  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező és  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó esetén hogyan definiáljuk  $\xi$  eloszlását? Hogyan definiáljuk  $\xi$  eloszlásfüggvényét? Mi az összefüggés  $\xi$  eloszlása és az eloszlásfüggvény közt? Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?

## 3. Függetlenség, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

Hogyan definiáljuk az  $A$  esemény  $B$  eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűségét? Mit nevezünk teljes eseményrendszernek? Mit mond ki a teljes valószínűség tétele? Mit mond ki a Bayes tétel?

## 4. Binomiális és Poisson eloszlás

Mikor mondjuk hogy egy valváltozó  $(n, p)$ -paraméterű binomiális eloszlású? Mondjon példát binomiális eloszlású vaváltozóra! Mi a binomiális eloszlás eloszlásfüggvénye? Mikor mondjuk hogy egy valváltozó  $\lambda$  paraméterű Poisson eloszlású? Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás közt?

## 5. Geometriai és hipergeometrikus eloszlás

Mikor mondjuk hogy egy valváltozó  $p$  paraméterű geometriai eloszlású? Mondjon példát geometriai eloszlású vaváltozóra! Mikor mondjuk hogy egy valváltozó hipergeometrikus eloszlású  $(N, n, k)$  paraméterekkel? Mondjon példát hipergeometrikus eloszlású valváltozóra! Mi a  $p$  paraméterű geometriai eloszlás várható értéke?

6. Diszkrét eloszlások várható értéke

Hogyan számoljuk ki egy diszkrét valváltozó várható értékét, ha ismert az eloszlása? Mi az  $(n, p)$  paraméterű binomiális eloszlás várható értéke? Mi a  $\lambda$  paraméterű Poisson eloszlás várható értéke?

7. Valószínűségi változó eloszlása, folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvény

Adott  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  valószínűségi mező és  $\xi$  valószínűségi változó esetén hogyan definiáljuk  $\xi$  eloszlását? (mihez rendel mit az eloszlás?) Mit nevezünk a folytonos eloszlású  $\xi$  valváltozó sűrűségfüggvényének? Hogyan számoljuk ki egy  $\xi$  folytonos valváltozó  $[a, b]$  intervallumba esésének valószínűségét sűrűségfüggvény, illetve eloszlásfüggvény segítségével? Mi a kapcsolat a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény közt? Milyen tulajdonságai vannak az  $f$  sűrűségfüggvénynek?

8. Várható érték folytonos valószínűségi változó esetén, exponenciális eloszlás és várható értéke

Hogyan számoljuk ki a  $\xi$  folytonos valváltozó várható értékét ha adott a sűrűségfüggvénye? Mikor mondjuk hogy egy  $\xi$  folytonos valváltozó  $\alpha$  paraméterű exponenciális eloszlású? Mutassa meg hogy exponenciális eloszlású valváltozó sűrűségfüggvénye valóban sűrűségfüggvény! Mi egy  $\alpha$  paraméterű exponenciális eloszlású  $\xi$  folytonos valváltozó várható értéke?

9. Normális eloszlás és standard normális eloszlás

Mikor mondjuk hogy egy  $\xi$  folytonos valváltozó  $(m, \sigma)$  paraméterű normális eloszlású? Mikor mondjuk hogy egy  $\xi$  folytonos valváltozó standard normális eloszlású? Mi a standard normális eloszlás jelentősége (mi az összefüggés normális eloszlású valváltozó eloszlásfüggvénye és a standard normális valváltozó eloszlásfüggvénye közt)?

10. Szórás és kiszámítása. Csebisev egyenlőtlenség.

Hogyan definiáljuk egy  $\xi$  valváltozó szórását? Hogyan számítjuk ki? Számítsa ki a szórást, ha adott egy  $k$  oldalú szabályos 'kocka' és a valváltozó a dobás eredménye! Mit mond ki a Csebisev-egyenlőtlenség?

## B tételsor:

1. Mérhető tér, mérhető függvények, mérték, valószínűségi mérték (valószínűség), valószínűségi mező, valószínűség tulajdonságai, valószínűségi változó

Mit nevezünk mérhető térnek? Mikor mérhető egy függvény? Mondjon példát nem mérhető függvényre! Mi a mérték (honnan hová képez, mik a tulajdonságai)? Mikor valószínűség (vagy valószínűségi mérték) egy mérték? Mondjon példát mértékre! Mit nevezünk valószínűségi mezőnek? Mit nevezünk valószínűségi változónak?

2. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke (integrál) és kiszámítása

Mit nevezünk a  $A$  halmaz karakterisztikus függvényének (vagy indikátorfüggvényének)? Mi a lépcsős függvény definíciója? Mi az  $f$  lépcsős függvény integrálja a  $P$  mérték szerint  $\Omega$ -n, ha  $f$  diszjunkt halmazok karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációja? Hogyan definiáljuk a  $\xi$  valváltozó várható értékét? Mit mond ki a Markov-egyenlőtlenség?

3. Lebesgue mérték, mértékek abszolút folytonossága és szingularitása, Radon-Nikodym tétel

Hogyan definiáljuk a Lebesgue külső-mértéket? Mikor mondjuk hogy a  $\mu_1$  mérték abszolút folytonos a  $\mu_2$  mértékre? Mikor mondjuk hogy a  $\mu_1$  mérték szinguláris a  $\mu_2$  mértékre?

4. Valószínűségi változók függetlensége, független valváltozók várható értéke és szórása

Mit nevezünk a  $\xi$  valváltozó által generált  $\sigma$ -algebrának? Mit tudunk  $E(\xi\eta)$ -ről ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek? Mit tudunk  $\sigma^2(\xi + \eta)$ -ről ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek? Együttes eloszlás független valváltozók esetén.

5. Vektorértékű valószínűségi változók, együttes eloszlás, együttes eloszlás- és sűrűségfüggvény. Hogyan definiáljuk egy  $(\xi, \eta)$  2 dimenziós valváltozó eloszlásfüggvényét?

Mik a többdimenziós valváltozók eloszlásfüggvényének tulajdonságai? Mit nevezünk együttes és peremeloszlásnak diszkrét 2 dimenziós valváltozók esetén? Ha  $(\xi, \eta)$  egy folytonos eloszlású 2 dim valváltozó, mik a peremsűrűségfüggvények és hogyan származtathatóak az együttes sűrűségfüggvényből? Mi az összefüggés a peremsűrűségfüggvények és az együttes sűrűségfüggvény között ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek? Hogyan számoljuk tartományba (téglalapba) esés valószínűségét 2 dim valváltozó esetén ha adott az együttes sűrűségfüggvény?

6. Kovariancia és korreláció

Hogyan definiáljuk  $\xi$  és  $\eta$  valváltozók kovarianciáját? Hogyan definiáljuk  $\xi$  valváltozó standardizáltját? Hogyan definiáljuk  $\xi$  és  $\eta$  valváltozók korrelációs együtthatóját?

Mi a kovariancia és a függetlenség kapcsolata? Hogyan számítjuk ki a kovarianciát diszkrét és folytonos esetben ha adott az eloszlás illetve az együttes sűrűségfüggvény?

7. Valószínűségi változók transzformáltjai

Ha adott egy  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó melynek lehetséges értékei  $x_1, x_2, \dots$ , ismerjük az eloszlását, és egy  $h$  függvény, hogyan számítjuk ki az  $\eta = h(\xi)$  valószínűségi változó eloszlását? Ha  $\xi$  egy folytonos eloszlású valószínűségi változó melynek a sűrűségfüggvénye  $f(x)$ , valamint  $h(x)$  szigorúan monoton és differenciálható, hogyan számítjuk ki az  $\eta = h(\xi)$  valószínűségi változó sűrűségfüggvényét? Mi lesz a transzformált valószínűségi változó sűrűségfüggvénye ha a transzformáció lineáris?

8. Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény, feltételes várható érték, regresszió.

Hogyan definiáljuk a  $\xi$  valószínűségi változó  $y_i < \eta < y_j$  feltétel melletti eloszlásfüggvényét ha  $(\xi, \eta)$  diszkrét valószínűségi vektorváltozó? Hogyan tudjuk meghatározni az értékét az együttes illetve a peremeloszlások segítségével? Folytonos esetben hogyan definiáljuk  $F^*(x|z)$ -t? Folytonos esetben hogyan definiáljuk  $\xi$ -nek az  $\eta = z$  feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényét?

9.  $L^p$  terek, konvergenciatípusok  $L^p$  terekben, határértéktételek

Mi az 1-vallal egyenletes konvergencia definíciója? Mi az 1-vallal azaz P-majdnem mindenütt konvergencia definíciója? Mi az  $L^p$ -ben való konvergencia definíciója? Mi a sztochasztikus illetve az eloszlásban való konvergencia definíciója? Mi a konvergencia-típusok közti összefüggés? Mit mond ki a centrális határeloszlás tétel? Mit mond ki a DeMoivre-Laplace tétel?

10. Statisztikai alapfogalmak, maximum likelihood elv

Milyen tulajdonságokkal jellemezhető egy becslés? Mi a maximum likelihood elv? Mi a konfidenciaintervallum?