Kombinatorika

1. Három tanuló reggel az iskola bejáratánál hányféle sorrendben lépheti át a küszöböt?

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

2. Hány különböző négyjegyű számot írhatunk föl 2 db 1-es, 1 db 2-es és 1 db 3-as számjegyből?

$P_4^{1,1,2} = \frac{4!}{1! \cdot 1! \cdot 2!} = 12$.

3. a, Hány ötös lottószelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan nyerjünk?

$C_{90}^5 = \binom{90}{5} = 43949268.$

b, Ha kitöltjük az összest, hány háromtalálatosunk lesz?

$C_5^3 \cdot C_{85}^2 = \binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$

4. Egy pénzdarabot 10-szer feldobunk. Hány sorozat adódhat, ha a dobások sorrendjét is figyelembe vesszük?

2 elem 10-edosztályú ismétléses variációjával:

$V_2^{10,i} = 2^{10} = 1024$.

5. Egy négytagú család telefonja 2-szer szólalt meg egy estén. Hányféle változatban vehették fel a kagylót, ha ugyanaz a személy 2-szer is felvehette de a sorrendet nem vesszük figyelembe?

Ismétléses kombináció: $C_4^{2,i} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$

6. Egy dobozban 16 golyó van, 10 fehér, 4 piros és 2 kék. Egymás után visszatevés nélkül kihúzzuk mind a 16-ot. Hányféle sorrend keletkezhet, ha az egyszínűeket nem különböztetjük meg egymástól?

Ismétléses permutációval: $P_{16}^{10,4,2} = \frac{16!}{10! \cdot 4! \cdot 2!} = 120120$.

7. Hogyan módosul az előző feladat eredménye, ha minden golyót visszateszünk a kihúzás után, és így húzunk ki 16 golyót?

Csak az számít, hogy mennyi eltérő színű golyó van, az egyes színeken belüli darabszámok az összes lehetséges sorrendet nem, csak ezek előfordulási valószínűségét befolyásolják. Háromféle szín van, tehát 3 elem 16-odosztályú ismétléses variációjának meghatározása a feladat: $V_3^{16,i} = 3^{16} = 43046721$

8. Egy 8 tagú család 4 színházjegyet kap.

a) Hányféleképpen oszthatók ki a jegyek, ha az is számít, ki hova ül?

Az adott 4 helyre először 8, majd 7, aztán 6 végül 5 családtag közül válogathatunk, vagyis:

$V_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ **.**

b) Mi a helyzet akkor, ha csak az számít, hogy egyáltalán ki megy el a színházba?

8 elem 4-edosztályú kombinációja: $C_8^4 = \binom{8}{4} = 70$.

9. Adott egy 10-szer 12-es „sakktábla” (10 sor és 12 oszlop). A bal felső sarkából a jobb alsóba szeretnék eljutni úgy, hogy mindig csak jobbra vagy lefelé léphetünk. Hányféle útvonal létezik?

Az egyes útvonalakat „kódolhatjuk” úgy, hogy a jobbra lépésnek J-t, a lefelé lépésnek L-et feleltetünk meg, így minden útvonal egy ebből a két betűből álló sorozatnak felel meg, amelyben mindig 11 db J és 9 db L szerepel. Az összes sorozatok száma így: $P_{20}^{9,11} = \frac{20!}{9! \cdot 11!} = 167960$.

10.a) Egy társaságban 5 fiú és 5 lány van. Hányféleképpen alakulhatnak belőlük egyszerre táncoló párok?
Sorba rendezzük az 5 lányt, és melléjük kisorsoljuk az 5 fiút: 5!=120.
10.b) Egy társaságban 7 fiú és 5 lány van. Hányféleképpen alakulhat belőlük 5 egyszerre táncoló pár (csak ellentétes neműek alkothatnak párt:-)?
Az 5 lány mindenképpen táncol. Állítsuk őket sorba, s sorsoljuk melléjük a fiúkat valamilyen sorrendben. A válasz ebből láthatóan: $V_7^5 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520$.

11. 4 egyforma kockát feldobunk. Hányféle végeredmény jöhet ki? (Nem a pontok összege, hanem az egyes számú pontok előfordulása a lényeg.)
Mindegyik kocka mind a hat oldalát mutathatja egymástól függetlenül, azaz 6 elem 4-edosztályú ismétléses kombinációi adják a végeredményt: $C_6^{4,i} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = 126.$

12. A 0,1,2,3,4 számjegyekből hány **valódi** ötjegyű szám képezhető, amelyben legalább az egyik számjegy ismétlődik?
Nullával nem kezdődhet szám. A „legalább egy számjegy ismétlődik”azt jelenti, hogy akár mind az öt számjegy egyforma is lehet, ezért egyszerűbb az összes valódi ötjegyű számból kivonni az ismétlést nem tartalmazókat. Összes: $4\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 2500$, a mind különböző számjegyet tartalmazók száma $4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 96$, a kettőt kivonva egymásból a válasz 2404.

13. 9 ember csónakázik, 3 csónak van: egy 4, egy 3 és egy 2 üléses. Hányféleképpen foglalhatják el a csónakokat, ha egy csónakon belül az ülésrend nem számít?
Először kisorsoljuk, kik ülnek a 4 személyes csónakba, majd a 3 és 2 személyesekbe. A sorsolás eredményei egymástól függetlenek, azaz a lehetséges kimenetelek száma összeszorzódik, az egyes sorsolások eredményeit pedig ismétlés nélküli kombinációk adják. Vagyis a végeredmény: $\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2} = 1260.$

14. Egy páncélszekrény 6 egymás mögötti tárcsa megfelelő beállításával nyitható ki. A tárcsák 9 számjegyet tartalmaznak, amelyek közül egyet kell beállítani minden tárcsán. Ha valaki nem ismeri a kódot, mennyi időt vehet igénybe legrosszabb esetben a szekrény kinyitása, ha folyamatosan próbálkozik és egy kombináció beállítása 5 másodpercig tart?
Legrosszabb esetben a legutolsó próbálkozásra nyílik ki a szekrény, vagyis az összes esetet meg kell vizsgálni, amely $V_9^{6,i} = 9^6 = 531441$. Ennyiszer 5 másodperc éppen 2657205 másodperc, ami 30 nap 18 óra 6 perc 45 másodperc. Kicsit sokáig tart. (És közben még csak nem is eszik az illető.)

15. 20 láda áruból 15 láda első osztályú, a többi másodosztályú árut tartalmaz. Hányféleképpen választható ki ezek közül 5 láda úgy, hogy legfeljebb 2 másodosztályú legyen közöttük?
Azokat az eseteket kell összeadni, amikor pontosan nulla, egy vagy két db másodosztályú láda van a kiválasztottak között: $\binom{15}{5} + \binom{15}{4}\cdot\binom{5}{1} + \binom{15}{3}\cdot\binom{5}{2} = 3003 + 6825 + 4550 = 14378.$

17. Egy 52 lapos francia kártyacsomagban 4 ász és 4 király van. Négyfelé osztjuk a lapokat. Hányféle olyan szétosztás lehetséges, amelynek során mindegyik játékosnak 1-1 ász és király jut?
Ültessük le a játékosokat egy adott tetszőleges sorrendbe. Először osszuk ki a 4 ászt és a 4 királyt, ezek lehetséges összes előfordulása $4!\cdot 4!$. A maradék 44 lapot 4 db 11-es csoportba osztjuk, az egyes csoportokon belül persze nem számít a lapok sorrendje. Először 44 lapból választunk ki 11-et, majd 33-ból 11-et, végül a maradék 22-ből 11 kiválasztása megadja az utolsó 11-es pakli összetételét is. Ezek egymástól független sorsolások (lásd csónakos feladat), ezért a végeredmén $4!\cdot 4!\cdot\binom{44}{11}\cdot\binom{33}{11}\cdot\binom{22}{11}\cdot\binom{11}{11} \approx 6\cdot 10^{26}.$

18. Hányféleképpen lehet egy 32 lapos magyar kártyacsomagot 4 egyenlő részre osztani, hogy mind a 4 ász ugyanabba a részbe kerüljön?

Különítsük el a 4 ászt, és sorsoljuk mellé a maradék 4 lapot a 28-ból. Ezt $\binom{28}{4}$-féleképpen tehetjük meg. A többi csomagot ugyanígy sorsoljuk ki, de mivel a sorrendjük most nem lényeges, a kapott eredményt még 3!-al osztanunk kell, vagyis a megoldás $\binom{28}{4}\cdot\frac{\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}}{3!}=\frac{28!}{3!\cdot 4!\cdot (8!)^3}\approx 3.23\cdot 10^{13}$.

19. Egy vívóedzésen 15 vívóból 6 pár vív egyidejűleg. Hányféleképpen választhatók ki a párok?

Először válasszuk ki azt a 12 vívót, aki vív: $\binom{15}{12}$. Ezután a fennmaradó vívókból mindig kiválasztunk kettőt, majd, mivel a párok sorrendje nem lényeges (mindegy, hogy melyik pár melyik páston vív), a részeredményt elosztjuk 6!-sal. Tehát: $\binom{15}{12}\cdot\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{6!}=\frac{15!}{3!\cdot (2!)^6\cdot 6!}=4729725$.

20. Braille-írással hányféle különböző jel készíthető? 3x2 helyre helyezhetünk el pontokat, a pontok száma 1-6-ig terjedhet. Pl:

● ●
○ ●
● ○

(N betű). M.o.: $V_2^{6,i}-1=2^6-1$, mert 0 pont nem lehetséges.

21. Hatféle színből hány különböző háromsávos zászló készíthető, ha

a) Egy szín csak egyszer szerepelhet?
b) Egy szín maximum kétszer szerepelhet, de nem egymás melletti sávban?
c) Egy szín akár háromszor is szerepelhet?

M.o.: a) $6\cdot 5\cdot 4$ b) $6\cdot 5\cdot 5$ c) $6\cdot 6\cdot 6$

22. Egy 28-as létszámú osztályban 4 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha
a. a jutalmak egyenlők, és egy tanuló legfeljebb egy jutalmat kaphat;
b. a jutalmak egyenlők, és egy tanuló több jutalmat is kaphat;
c. a jutalmak különbözők, és egy tanuló legfeljebb egy jutalmat kaphat;
d. a jutalmak különbözők, és egy tanuló többet is kaphat?

M.o.: a. $C_{28}^{4}=\binom{28}{4}$ b. $C_{28}^{4,i}=\binom{28+4-1}{4}$ c. $V_{28}^{4}=28\cdot 27\cdot 26\cdot 25$ d. $V_{28}^{4,i}=28^4$

23. Hány különböző rendszám adható ki, amely három betűből és azt követő három számból áll?Arendszám első 3 karaktere (az angol ABC 26 betűből áll) $\mathrm{V}_{26}^{3,i}=26^3$- féleképp tölthető fel, a második 3 karakter pedig a 10 számjegy segítségével $V_{10}^{3,i}=10^3$-féleképp. Így összesen $26^3\cdot 10^3$ rendszám készíthető.

24. a.Hányféleképpen állítható sorba *n* (különböző) gyerek?
b. Hányféleképpen ültethetők a fenti gyerekek kör alakú asztal köré?
c. Válaszoljuk meg az előző kérdéseket akkor is, ha Jancsi és Juliska egymás mellé kell hogy kerüljenek.

a.n!

b. Az n!-féleképp sorba állított gyerekeket, ültessük le a kerek asztalhoz. Az ültetés után nem tudjuk megmondani, hol volt a sor vége: ha az ültetés alapján akarjuk sorba állítani a gyerekeket, akkor pontosan n-féleképpen jelölhetjük ki a sor kezdetét. A lehetőségek száma ezért az előző feladat eredményének *n*-edrésze, azaz $(n-1)!$

c.A közös alapötlet, hogy az egymás mellé teendő párokat egyként kezeljük és itt a párok egymás közötti sorrendje is számít. Így az a.esetben $(n-1)!\cdot 2!$-t, b. esetben $(n-2)!\cdot 2!$-t kapunk.

25. A 0,1,2,3,4 számjegyekből hány **valódi** ötjegyű szám képezhető, amelyben legalább az egyik számjegy ismétlődik?
Nullával nem kezdődhet szám. A „legalább egy számjegy ismétlődik”azt jelenti, hogy akár mind az öt számjegy egyforma is lehet, ezért egyszerűbb az összes valódi ötjegyű számból kivonni az ismétlést nem tartalmazókat.
Összes: $4\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=2500$, a mind különböző számjegyet tartalmazók száma $4\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=96$, a kettőt kivonva egymásból a válasz 2404.

26. Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a (3; 4; 5) pontba, úgy, hogy csak egységnyi hosszú, a koordinátatengelyek pozitív irányába történő lépések lehetségesek?
A kérdéses pontba 12 lépésből juthatunk el, méghozzá pontosan 3-at kell az x, 4-et az y, és 5-öt a z tengely pozitív irányába lépnünk. A 12 lépésből kiválasztjuk azokat, melyeket az első irányba lépünk:
ez $\binom{12}{3}$-féleképp lehetséges, majd a második irányba történőket $\binom{9}{4}$ és végül a harmadik irányba történőket: $\binom{5}{5}$.
Így $\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5}$.

Másik megoldás: Az egyes útvonalakat „kódolhatjuk” úgy, hogy az x-tengely pozitív irányába történő lépésnek X-et, az y tengely pozitív irányába történő lépésnek Y-t, a z tengely pozitív irányába történő lépésnek Z-t feleltetünk meg, így minden útvonal egy ebből a három betűből álló sorozatnak felel meg, amelyben mindig 3 db X, 4 db Y és 5 db Z szerepel. Az összes sorozatok száma így: $P_{12}^{3,4,5}=\frac{12!}{3!\cdot4\cdot5!}$.

27. Magyar kártyából hányféleképp húzható ki 6 lap úgy, hogy
a. ne legyen köztük ász,
b. pontosan két ász legyen köztük,
c. legfeljebb két ász legyen köztük?

M.o.: a. $\binom{28}{6}$ b. $\binom{28}{4}\cdot\binom{4}{2}$ c. $\binom{28}{6}+\binom{28}{5}\cdot\binom{4}{1}+\binom{28}{4}\cdot\binom{4}{2}$.

28. A sakk-olimpián *n* ország versenyzői vesznek részt, minden országot négytagú csapat képvisel. Hányféleképp állíthatjuk fel az összes versenyzőt egy sorba úgy, hogy mindenkinek legyen vele azonos nemzetiségű szomszédja?
Minden ország versenyzőiből 2-2 rendezett pár $\binom{4}{2}\cdot2\cdot2=4!=24$-féleképp képezhető. *n* ország esetén a párok tehát $(24)^n$ -féleképpalkothatóak meg. A 2n darab pár 2n!-féleképpen állítható sorba. Így összesen $(24)^n\cdot 2n!$ sorbaállítás lehetséges.