Analízis I. jegyzet

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Valós számok

1.1. Teljes indukció

Adottak az $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ állítások. A bizonyítási elv:

1. Belátjuk, hogy A_1 teljesül.
2. Belátjuk, hogy ha A_n teljesül valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor A_{n+1} is.

Ezzel bebizonyítottuk az A_n állításokat.

1.2. Cantor-féle közöspont tétel

Adottak az $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots . \subset \mathbb{R}$ egymásba skatulyázott, zárt intervallumok, melyekre

$$I_{n+1} \subset I_n.$$

Ha $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, akkor $\exists! x \in \mathbb{R}$ amire $x \in I_n \forall n$ esetén.

Bizonyítás
Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel ugyanis, hogy két ilyen szám van, azaz legyen $x, y \in I_n\ \forall n$ esetén. Legyen $x - y = \delta$. Mivel $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$ ezért $|I_n| < \delta$ tud teljesülni. Ez viszont ellentmond azzal, hogy $x, y \in I_n\ \forall n$ esetén.

1.3. Dedekind axióma

Legyen

$$\mathbb{Q} = A \cup B$$

ahol $A \cap B = \emptyset$. Legyen továbbá $\forall a \in A$ és $\forall b \in B$ esetén $a < b$. Ekkor $\exists x \in \mathbb{R}$, hogy $\forall a \in A$-ra és $\forall b \in B$-re

$$a \leq x$$

és

$$x \leq b$$

teljesül.

1.4. Alulról korlátos halmaz

Adott $H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos, ha $\exists k \in \mathbb{R}$, melyre

$$k \leq x \quad \forall x \in H.$$

1.5. Felülről korlátos halmaz

Adott H halmaz felülről korlátos, ha $\exists K$, melyre

$$K \geq x \quad \forall x \in H.$$

1.6. Korlátos halmaz

Adott H halmaz korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz $\exists K \in \mathbb{R}$, amire

$$K \geq |x| \quad \forall x \in H.$$

1.7. Infimum

Adott H alulról korlátos halmaz. Ekkor a legnagyobb alsó korlát a halmaz infimuma, $\inf(H)$.

1.7.1. Tétel

Adott H alulról korlátos halmaznak létezik infimuma.

Bizonyítás

Legyen a_1 az alsó korlát. Ha $a_1 \in H$ akkor kész vagyunk. Tehát legyen $a_1 \notin H$, és legyen $b_1 \in H$ egy tetszőleges elem, ahol $b_1 > a_1$. Legyen $I_1 = [a_1, b_1]$ és definiáljuk a $c_1 := \frac{a_1+b_1}{2}$ számot.
Ha c_1 alsó korlát, akkor legyen $a_2 := c_1$ és $b_2 := b_1$. Ha c_1 nem alsó korlát, akkor legyen $a_2 := a_1$ és $b_2 := c_1$. Legyen továbbá $I_2 = [a_2, b_2]$.
Ezt a lépést a végtelenségig ismételve egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumrendszert kapunk, melyre $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, hiszen minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Tehát a Cantor-féle közöspont tétel miatt létezik egy darab közös pont. Ez a közös pont kisebb vagy egyenlő, mint a b_k számok, tehát biztosan alsó korlát. Továbbá nagyobb vagy egyenlő az összes a_k számnál, így nincs nála nagyobb alsó korlát. Tehát valóban létezik infimum.

1.8. Szuprémum

Adott H felülről korlátos halmaz. Ekkor a legkisebb felső korlát a halmaz szuprémuma, $\sup(H)$.

1.8.1. Tétel

Adott H felülről korlátos halmaznak létezik szuprémuma.

Bizonyítás

Az infimum analógiájára.

1.9. Belső pont

Adott H halmaz belső pontja $x_0 \in \mathbb{R}$, ha $\exists \varepsilon > 0$ amire

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset H.$$

A belső pontok halmaza $int(H)$.

1.10. Külső pont

Adott H halmaz külső pontja x_0, ha $\exists \varepsilon > 0$ amire

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H = \emptyset.$$

A külső pontok halmaza $ext(H)$.

1.11. Határpont

Adott H halmaz határpontja x_0, ha $\forall \varepsilon > 0$

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H \neq \emptyset$$

és

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H^C \neq \emptyset$$

ahol H^C a H halmaz komplementere. A határpontok halmaza ∂H.

1.12. Nyílt halmaz

Adott H halmaz nyílt, ha $\forall x_0 \in H$-ra $x_0 \in int(H)$.

1.13. Zárt halmaz

Adott H halmaz zárt, ha $\partial H \subset H$.

1.14. Lezárási pont

Adott H halmaz lezárási pontja $x_0 \in H$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H \neq \emptyset.$$

1.15. Torlódási pont

Adott H halmaz torlódási pontja $x_0 \in H$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H \backslash \{x_0\} \neq \emptyset$$

azaz $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H$ tartalmaz legalább egy x_0-tól különböző H-beli elemet.

1.16. Halmaz lezártja

Adott H halmaz lezártja tartalmazza H összes lezárási pontját, azaz a legkisebb olyan halmaz, mely tartalmazza H-t, és H összes torlódási pontját. Fennáll továbbá, hogy

$$\overline{H} = H \cup \partial H$$

ahol $\overline{H}$ a H halmaz lezártja.

1.17. Háromszög egyenlőtlenség

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Egyenlőség, ha $\forall i, j \quad a_i = a_j$.

Bizonyítás

Teljes indukcióval könnyen látható. Ugyanis $n = 2$-re triviális, hiszen

$$\pm a_1 \leq |a_1| \qquad \pm\, a_2 \leq |a_2|$$

így ezeket összegezve

$$\pm(a_1 + a_2) \leq |a_1| + |a_2|$$

amiből $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.

Tegyük fel, hogy valamilyen n-re teljesül az állítás! Kéne, hogy $n + 1$-re is teljesüljön.

$$\sum_{k=1}^{n+1} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| \geq \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| + |a_{n+1}| \geq \left| \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right|$$

Ezzel beláttuk az állítást.

1.18. Bernoulli-egyenlőtlenség

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $h \in \mathbb{R}$, ekkor

$$(1 + h)^n \geq 1 + hn.$$

Egyenlőség, ha $h = 0$, $n = 0$ vagy $n = 1$.

Bizonyítás

Látható, hogyha $h = 0$ vagy $n = 0$, akkor teljesül az egyenlőség. Legyen tehát $h \neq 0$, és alkalmazzunk teljes indukciót! $n = 1$-re triviális az egyenlőség. Tegyük fel, hogy teljesül valamilyen n-re az állítás! Kéne, hogy $n + 1$-re is teljesüljön.

$$(1 + h)^{n+1} = (1 + h)^n \cdot (1 + h) \geq (1 + nh)(1 + h) = 1 + (n + 1)h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h$$

Ezzel beláttuk az állítást.

1.19. Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0 \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

Egyenlőség, ha $\forall i, j \quad a_i = a_j$.

Bizonyítás

Először egy gyengébb állítást fogunk bebizonyítani.
Legyen $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, és legyenek az $x_k \geq 0 \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyek között van legalább kettő különböző és

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = 1.$$

Ekkor

$$\prod_{k=1}^{n} x_k < 1.$$

Alkalmazzunk teljes indukciót! $n = 2$ esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy valamilyen n-re teljesül az állítás! Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.
Tekintsük az x_k számokat, ahol $k = 1, 2, \ldots, n+1$ és legyen $x_k := 1 + t_k$. Legyen továbbá az x_k számok számtani közepe 1. Ez azt jelenti, hogy $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 0$, azaz van köztük pozitív és negatív is, hiszen nem mind egyforma. Az általánosság sérülése nélkül feltehetjük, hogy $t_n < 0 < t_{n+1}$. Legyen ekkor $x_n^* = 1 + t_n + t_{n+1} > 1 + t_n + t_{n+1} + t_n t_{n+1} = x_n \cdot x_{n+1}$.
Ekkor azt látjuk, hogy

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n^* = \sum_{k=1}^{n-1} (1 + t_i) + 1 + t_n + t_{n+1} = n + \sum_{k=1}^{n+1} t_k = n$$

azaz az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^*$ számtani átlaga 1 és nem mind egyforma. Ekkor az indukciós feltevés miatt a szorzatuk valóban kisebb, mint 1.
Könnyen látható, hogyha az összes x_k szám egyenlő, akkor $x_k = 1$, így a szorzatuk is 1. Tehát megfogalmazhatjuk, hogy tetszőleges $x_k \geq 0$ számokra ahol $k = 1, 2, \ldots, n$, és

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = 1$$

teljesül, akkor

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leq 1.$$

Legyenek adottak az a_k számok, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$. Legyen továbbá

$$A = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

és legyenek $x_k = \frac{a_k}{A}$. Ekkor az x_k számok számtani közepe 1, így

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{A^n} \leq 1$$

azaz

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \leq A^n = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \right)^n$$

amiből kapjuk is a bizonyítandót.

2. Sorozatok, végtelen sorok

2.1. Sorozat

Számsorozat egy olyan $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ hozzárendelés, mely $\forall n \in \mathbb{N}$-hez hozzárendel egy $a_n \in \mathbb{R}$ számot. Ekkor a sorozatot (a_n)-el jelöljük.

2.2. Korlátos sorozat

Az (a_n) sorozat korlátos, hogyha $H = \{a_n\}$ korlátos.

2.3. Monoton sorozat

Az (a_n) sorozat monoton nő (csökken), ha $n < m$ esetén $a_n \leq a_m$ $(a_n \geq a_m)$.

2.4. Konvergens sorozat

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

egyértelmű.

2.5. Divergens sorozat

Ha (a_n) nem konvergens, akkor divergens.

2.6. Végtelenbe divergálás

Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

ha $\forall K \in \mathbb{R}$-hez ($\forall k \in \mathbb{R}$-hez) $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén $a_n > K$ $(a_n < k)$.

2.7. Általános határérték

Általánosan mondhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

ha A tetszőleges U környezetéhez $\exists n_0$, melyre $\forall n > n_0$ esetén $a_n \in U$.

2.7.1. Tétel

Konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás
Rögzítsünk egy ε-t, és a hozzátartozó n_0 küszöbindexet. Legyen továbbá $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor az (a_n) sorozatnak az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül véges sok eleme van, így ennek a véges sok elemnek létezik minimuma és maximuma, tehát létezik

$$m := \min\{a_n \big| n < n_0\} \qquad M := \max\{a_n \big| n < n_0\}.$$

Ekkor felső korlátnak jó lesz $\max(M, A + \varepsilon)$, alsó korlátnak pedig $\min(m, A - \varepsilon)$.

2.7.2. Tétel

Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Bizonyítás
Legyen $H = \{a_n\}$ felülről (alulról) korlátos halmaz. Ekkor létezik $\sup(H) = A$ ($\inf(H) = A$). A monotonitás miatt ez azt jelenti, hogy $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén

$$A - \varepsilon < a_n \leq A < A + \varepsilon$$

$$\left(A - \varepsilon < A \leq a_n < A + \varepsilon\right)$$

teljesül. Ekkor a határérték definíciójából $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

2.8. Határértékek tulajdonságai

1. Linearitás
$$\lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

3. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

4. Monotonitás
Legyen $a_n < b_n$ valamilyen küszöbindex után. Ekkor (ha léteznek a határértékek)
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

5. Rendőr-elv
Legyen $a_n < b_n < c_n$ valamilyen küszöbindex után. Legyen továbbá
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$
Ekkor (ha léteznek a határértékek)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Bizonyítás
Legyen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

1. Legyen $\alpha \neq 0$ és $\beta \neq 0$. Legyen továbbá az (a_n) sorozatnál az $\frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1, a (b_n) sorozatnál az $\frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ számhoz tartozó küszöbindex pedig n_2. Ekkor $n_0 := \max(n_1, n_2)$ mellett
$$\left|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha A + \beta B)\right| \leq \left|\alpha a_n - \alpha A\right| + \left|\beta b_n + \beta B\right| =$$
$$= |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.$$

2. Legyen $A \neq 0$. Mivel a (b_n) sorozat konvergens, korlátos is, azaz $\exists K > 0$, melyre $|b_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá az (a_n) sorozatnál az $\frac{\varepsilon}{2K}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1, a (b_n) sorozatnál az $\frac{\varepsilon}{2|A|}$ számhoz tartozó küszöbindex pedig n_2. Ekkor $n_0 := \max(n_1, n_2)$ mellett
$$\left|a_n b_n - (AB)\right| = \left|(a_n - A)b_n + (b_n - B)A\right| = |a_n - A||b_n| + |b_n - B||B| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + \frac{\varepsilon}{2|A|} \cdot |A| = \varepsilon.$$
3. Azt fogjuk belátni, hogy $\lim_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$ mellett
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}.$$
Legyen ugyanis a (b_n) sorozatnál az $\frac{|B|}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1, az $\frac{\varepsilon|B|^2}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex pedig n_2. Ekkor $n_0 := \max(n_1, n_2)$ mellett
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{b_n B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n B|} < \frac{|b_n - B|}{\frac{|B|^2}{2}} < \frac{\frac{\varepsilon|B|^2}{2}}{\frac{|B|^2}{2}} = \varepsilon.$$
4. Triviális.
5. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = B$. Ekkor a határérték definíciójából valamilyen küszöbindex után
$$B - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < B + \varepsilon.$$

2.9. Részsorozat

Adott az (a_n) sorozat, és az (n_k) végtelen index-sorozat, ahol $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén $n_k \in \mathbb{N}$ teljesül, és $\forall k < j$ esetén $n_k < n_j$. Ekkor az (a_{n_k}) az (a_n) részsorozata.

2.9.1. Tétel

Ha (a_n) monoton, korlátos, vagy konverges, akkor (a_{n_k}) is monoton, korlátos, vagy konvergens.

Bizonyítás
Triviális.

2.10. Csúcselem

Adott (a_n) sorozatban a_m csúcselem, ha $\forall n > m$ esetén $a_n \leq a_m$.

2.11. Tétel

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás
Legyen először az (a_n) sorozatnak végtelen sok csúcseleme. Ekkor legyen e csúcselemek indexe n_k ahol $n_i < n_j$ ha $i < j$. Ekkor az (a_{n_k}) sorozat monoton fogyó.
Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak csak véges sok csúcseleme van. Legyen ekkor az utolsó csúcs indexe n, és legyen $n_1 := n + 1$. Mivel a_{n_1} már nem lehet csúcs, ezért létezik nála nagyobb elem, legyen ez a_{n_2}. Mivel a_{n_2} sem csúcs, ennél is létezik nagyobb elem. Ezt a végtelenségig folytatva tudunk konstruálni egy (a_{n_k}) monoton növő sorozatot.

2.12. Bolzano-Weierstrass tétel

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás
Beláttuk, hogy korlátos sorozatnak létezik monoton részsorozata. Mivel ez a részsorozat korlátos és monoton, konvergens is.

2.13. Nullsorozat

Az (a_n) sorozat nullsorozat, ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

2.14. Tétel

1. Látható, hogy (a_n) nullsorozat akkor és csak akkor, hogyha $(|a_n|)$ nullsorozat.
2. Azt mondjuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$
ha az $(a_n - A)$ sorozat nullsorozat.
3. Legyen (a_n) nullsorozat, és (b_n) korlátos sorozat. Ekkor $(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat.
4. Legyen (a_n) és (b_n) nullsorozat, ekkor $(a_n \pm b_n)$ is nullsorozat. Legyen továbbá $c \in \mathbb{R}$, ekkor $(c \cdot a_n)$ is nullsorozat.
5. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és
$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{a_n}, & \text{ha} \quad a_n > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad a_n \leq 0. \end{cases}$$
Ekkor $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, azaz (b_n) nullsorozat.
6. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és (b_n) alulról korlátos sorozat. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty.$$
Hasonlóan, ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és (b_n) felülről korlátos sorozat, akkor
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty.$$
7. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ lehet 0, konstans, vagy $\pm\infty$.

2.15. Összehasonlító kritériumok

1. Legyen (a_n) nullsorozat és (b_n) egy olyan sorozat, melyre $|b_n| \leq |a_n|$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ (adott küszöbindex után). Ekkor (b_n) is nullsorozat.
2. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és (b_n) egy olyan sorozat, melyre $b_n \geq a_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ (adott küszöbindex után). Ekkor $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

2.16. Nagyságrendek

Belátható, hogy az alábbi sorrend áll fenn:

$$n^n \gg n! \gg k^n \gg n^k \big(\gg \log n \big).$$

Ez azt jelenti, hogy például

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k^n} = \infty$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{k^n} = 0.$$

2.17. Cauchy kritérium

Azt mondjuk, hogy az (a_n) Cauchy sorozat, vagy teljesíti a Cauchy kritériumot, hogyha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n, m > n_0$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

teljesül.

2.17.1. Tétel

Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, hogyha teljesíti a Cauchy kritériumot.

Bizonyítás

Legyen (a_n) konvergens. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor Cauchy sorozat.
Tudjuk, hogy valamilyen küszbindex után

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \varepsilon.$$

Legyen (a_n) Cauchy sorozat. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor konvergens.
Először lássuk be, hogy egy Cauchy sorozat korlátos!
Tudjuk, hogy valamilyen n_0 küszöbindex után $|a_n - a_m| < \varepsilon$, azaz $a_n \in (a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon$. Ekkor ezen az invertvallumon kívül csak véges sok eleme van a sorozatnak, azaz

$$K := \max\left\{(|a_m| + \varepsilon) \cup \{|a_k| \big| k < n_0\}\right\}$$

jó korlát. Tehát az (a_n) Cauchy sorozat korlátos, emiatt van konvergens részsorozata.
Legyen a részsorozat (a_{n_k}) ahol $\lim_{\to\infty} a_{n_k} = A$.
Tudjuk, hogy valamilyen küszöbindex után

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Ekkor

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| = |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

2.18. Torlódási pont

Az adott (a_n) sorozatban $t \in \mathbb{R}$ torlódási pont, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra a $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ intervallum végtelen sok elemét tartalmazza az (a_n) sorozatnak.

2.19. Limesz inferior

Az (a_n) sorozat torlódási pontjainak infimuma a $\liminf_{n\to\infty} a_n$, vagy $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

2.20. Limesz szuperior

Az (a_n) sorozat torlódási pontjainak szuprémuma a $\limsup_{n\to\infty} a_n$, vagy $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

2.21. Tétel

Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor az (a_n) sorozatnak A az egyetlen torlódási pontja.

2.22. Tétel

Ha az (a_n) sorozatnak kettő, vagy több torlódási pontja van, akkor a sorozat divergens.

2.23. Számtani átlag sorozat

Adott (a_n) sorozat számtani átlag sorozata az

$$A_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

2.23.1. Tétel

Ha (a_n) nullsorozat, akkor (A_n) is nullsorozat.

Bizonyítás

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|A_n| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Legyen az (a_n) sorozatnál az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1. Legyen továbbá a $n_2 = \frac{2n_1K}{\varepsilon}$ ahol $|a_n| \leq K$. Világos, hogy létezik ilyen K, hiszen a sorozat konvergens. Ekkor

$$|A_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} |a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n} |a_k| \leq \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-n_1}{n} < \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Világos, hogy $n \geq \max(n_1, n_2) = \max\left(n_1, \frac{2n_1K}{\varepsilon}\right)$ esetén

$$|A_n| < \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.23.2. Tétel

Ha (a_n) konvergens, akkor (A_n) is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Bizonyítás

Felhasználva az előző tételt egyből kapjuk a bizonyítandót.

2.24. Végtelen sor

Adott egy (a_n) sorozat, ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

egy végtelen sor.

2.25. N-edik részletösszeg

Egy végtelen sor n-edik részletösszege

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ahol

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ekkor a $\left(\sum a_n\right)$ sorozat konvergens, ha $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = S$. Azt mondjuk, hogy S a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor összege. Ha (s_n) divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor divergens.

2.26. Tétel

Ha $\left(\sum a_n\right)$ konvergens, akkor (a_n) nullsorozat.

Bizonyítás
Legyen $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$ és $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - s_n = 0.$$

2.27. Divergencia-teszt

Ha (a_n) nem nullsorozat, akkor $\left(\sum a_n\right)$ divergens.

Bizonyítás
Mivel $\left(\sum a_n\right)$ konvergenciájának szükséges feltétele az, hogy (a_n) nullsorozat legyen, kapjuk is a bizonyítandót.

2.28. Mértani sor

Legyen $a_n = aq^{n-1}$, ekkor $\left(\sum a_n\right)$ egy mértani sor.

2.28.1. Mértani sor összege

Adott $a_n = aq^{n-1}$ mértani sor. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Bizonyítás
Tudjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{n-1} = \frac{a\big(1-q^n\big)}{1-q}.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} aq^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\big(1-q^n\big)}{1-q} = \frac{a\Big(1-\lim_{n\to\infty} q^n\Big)}{1-q}.$$

Ebből azonnal következik az állítás.

2.29. Cauchy kritérium végtelen sorokra

Azt mondjuk, hogy a $\left(\sum a_n\right)$ végtelen sor teljesíti a Cauchy kritériumot, hogyha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > m \geq n_0$ esetén

$$\big|s_n - s_m\big| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

2.29.1. Tétel

$\left(\sum a_n\right)$ akkor és csak akkor konvergens, hogyha teljesíti a Cauchy feltételt.

2.30. Összehasonlító kritériumok végtelen sorokra

1. Majoráns kritérium
   Adott két sor, melyekre $0 \leq b_n \leq a_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy $\left(\sum a_n\right)$ konvergens. Ekkor $\left(\sum b_n\right)$ is konvergens.
2. Minoráns kritérium
   Adott két sor melyekre $a_n \leq b_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy
   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$
   Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

2.31. Abszolút konvergencia

Azt mondjuk, hogy a $\left(\sum a_n\right)$ sor abszolút konvergens, ha $\left(\sum |a_n|\right)$ konvergens.

2.32. Tétel

Ha a $\left(\sum a_n\right)$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Bizonyítás

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|.$$

Mivel $\left(\sum a_n\right)$ abszolút konvergens,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=m}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$$

azaz

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

tehát $\left(\sum a_n\right)$ konvergens.

2.33. Feltételes konvergencia

Azt mondjuk, hogy a $\left(\sum a_n\right)$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

2.34. Hányadoskritérium (d'Alembert féle)

1. Tegyük fel, hogy $\exists q < 1$, amire
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$$
   teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a sor abszolút konvergens.
2. Tegyük fel, hogy
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$$
   teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a sor divergens.

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy
$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \leq q \quad \left|\frac{a_3}{a_2}\right| \leq q \quad \dots \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q.$$
Ezeket összeszorozva kapjuk, hogy
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right| \leq q^n \implies |a_{n+1}| \leq q^n|a_1|.$$
Ez azt jelenti, hogy a sort majorálhatjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.
2. A divergencia-teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

2.35. Gyenge hányadoskritérium

Tegyük fel, hogy létezik a
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$$
határérték. Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a sor abszolút konvergens
2. ha $A > 1$, akkor a sor divergens
3. ha $A = 1$, akkor a sor lehet konvergens és divergens is.

Bizonyítás

1. Legyen az $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozatnál az $\frac{1-A}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_0. Ekkor
$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - A\right| < \frac{1-A}{2} \implies \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < A + \frac{1-A}{2} = \frac{1+A}{2} < 1$$
így a hányados-kritérium miatt a sor abszolút konvergens.
2. Triviális.
3. Jó példa a $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ és a $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ sorozatok.

2.36. Gyökkritérium (Cauchy féle)

1. Tegyük fel, hogy $\exists 0 < q < 1 \in \mathbb{R}$, melyre $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor abszolút konvergens.
2. Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor divergens.

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy
$$|a_n| \leq q^n < 1$$
azaz a sort majorálhatjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.
2. A divergencia-teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

2.37. Gyenge gyökkritérium

Tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$$

határérték. Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor abszolút konvergens
2. ha $A > 1$, akkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor divergens
3. ha $A = 1$, akkor a sor lehet konvergens és divergens is.

Bizonyítás

1. Legyen az $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ sorozatnál az $\frac{1-A}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_0. Ekkor

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|} - A\right| < \frac{1-A}{2} \implies \sqrt[n]{|a_n|} < A + \frac{1-A}{2} < 1$$

így a gyökkritérium miatt a sor abszolút konvergens.

2. Triviális.
3. Jó példa a $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ és a $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ sorozatok.

2.38. Leibniz-típusú sor

Azt mondjuk, hogy $\left(\sum a_n\right)$ Leibniz-típusú sor, ha az (a_n) sorozat

1. oszcilláló sorozat, azaz $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén
2. $(|a_n|)$ monoton fogyó
3. (a_n) nullsorozat.

2.38.1. Tétel

A Leibniz-típusú sorok konvergensek.

Bizonyítás

Legyen $a_1 > 0$. Ekkor a páratlan indexű tagok pozitívak, a páros indexú tagok pedig negatívak. Legyen továbbá

$$\alpha_k := \sum_{k=1}^{2k} a_k$$

$$\beta_k := \sum_{k=1}^{2k-1} a_k$$

$$I_k := [\alpha_k, \beta_k].$$

Ekkor az I_k intervallumsorozat teljesíti a Cantor-féle közöspont tétel feltételeit, így létezik egy közös pont, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2.39. Tétel

Ha a $\left(\sum a_n\right)$ abszolút konvergens, akkor a sor összege független a sorrendtől.

2.40. Riemann tétel

Ha a $\left(\sum a_n\right)$ feltételesen konvergens, akkor $\forall c \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan átrendezés, amikor a sor összege c-vel egyenlő.

3. Valós függvények

3.1. Függvény

Adott az $f : X \mapsto Y$ leképezés, mely során $\forall x \in X$ elemhez hozzárendelünk egy $y \in Y$ elemet. Ekkor ezt a leképezést függvénynek nevezzük.

3.1.1. Értelmezési tartomány

Egy függvény értelmezési tartományát D_f-el jelöljük, azon X-beli elemeket tartalmazza, melyekhez hozzárendel a függvény.

3.1.2. Értékkészlet

Egy függvény értékkészletét R_f-el jelöljük, azon Y-beli elemeket tartalmazza, melyek előállnak képként.

3.1.3. Injektív függvény

Adott f függvény injektív, ha $\forall x_1 \neq x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ teljesül.

3.1.4. Szürjektív függvény

Adott f függvény szürjektív, ha $\forall y \in R_f$-hez $\exists x \in X$, amire $f(x) = y$.

3.1.5. Bijektív függvény

Adott f függvény bijektív, ha injektív és szürjektív.

3.1.6. Páros függvény

Adott f függvény páros, ha $\forall x \in D_f$ esetén $f(-x) = f(x)$ teljesül.

3.1.7. Páratlan függvény

Adott f függvény páratlan, ha $\forall x \in D_f$ esetén $f(-x) = -f(x)$ teljesül.

3.1.8. Monoton növő függvény

Adott f függvény monoton növő függvény, ha $\forall x_1 \leq x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ teljesül.

3.1.9. Monoton csökkenő függvény

Adott f függvény monoton csökkenő függvény, ha $\forall x_1 \leq x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$ teljesül.

3.1.10. Periodikus függvény

Adott f függvény periodikus p prediódussal, ha $\forall x, x + p \in D_f$ esetén $f(x) = f(x + p)$ teljesül.

3.2. Inverz függvény

Adott egy $f : X \mapsto Y$ bijekció. Ekkor az f függvény inverze egy olyan $f^{-1} : Y \mapsto X$ bijekció, melyre $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

3.2.1. Tétel

f invertálható akkor és csak akkor, ha szigorúan monoton.

3.3. Függvénykompozíció

Adott $f : X \mapsto Y$ és $g : Y \mapsto Z$. Ekkor a két függvény kompozíciója

$$h = g \circ f = g(f) : X \mapsto Z.$$

3.4. Folytonosság pontban

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

Megjegyzés: Egy másik megfogalmazás, hogy adott f függvény folytonos az x_0 pontban, ha $f(x_0)$ $\forall U_{f(x_0)} \subset \mathbb{R}$ környezetére $\exists U_{x_0} \subset \mathbb{R}$ környezet, melyre $\forall x_1 \in U_{x_0}$ esetén

$$f(x_1) \in U_{f(x_0)}.$$

3.5. Sorozatfolytonosság pontban

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall (x_n) \subset X$ sorozatra, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

teljesül.

3.6. Tétel

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban akkor és csak akkor, ha f sorozatfolytonos az $x_0 \in D_f$ pontban.

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban. Legyen továbbá $(x_n) \subset D_f$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

Mivel $x_n \to x_0$, valamilyen küszöbindex után

$$\big|x_n - x_0\big| < \delta \implies \big|f(x_n) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

Tehát valóban $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Most tegyük fel, hogy f sorozatfolytonos az x_0 pontban, azonban nem folytonos, tehát $\exists \varepsilon > 0$, melyre $\forall \delta > 0$-hoz $\exists x$, melyre $|x - x_0| < \delta$, de $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\delta = \frac{1}{n}$-hez is $\exists x_n$, melyre $|x_n - x_0| < \delta$, mégis $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ekkor erre az (x_n) sorozatra $x_n \to x_0$, de $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, ami ellentmondás, hiszen f sorozatfolytonos x_0-ban. Tehát f folytonos is x_0-ban.

3.7. Folytonosság intervallumon

Azt mondjuk, hogy az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ adott $Y \subset D_f$ intervallumon folytonos, ha $\forall x_0 \in Y$ pontban folytonos.
Ha $D_f = [a, b]$, akkor f folytonos D_f-en, ha $\forall x_0 \in (a, b)$ pontban folytonos, és

$$\lim_{x\to a+} = f(a) \qquad \lim_{x\to b-} = f(b).$$

3.8. Folytonosság tulajdonságai

1. Legyen $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, és legyen f és g folytonos az x_0 pontban, ahol $g(x_0) \neq 0$. Ekkor $f \pm g, f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ folytonos x_0-ban.

2. Legyen f folytonos x_0-ban, és g folytonos $f(x_0)$-ban. Ekkor $g \circ f$ folytonos x_0-ban.

3.9. Függvények határértéke

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy $\exists x_0$ olyan $U_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezete, amire

$$U_{x_0} \backslash \{x_0\} \subset D$$

teljesül. Ha $x_0 = \pm\infty$, akkor legyen $U_{x_0} = (a, \infty)$, illetve $U_{x_0} = (-\infty, a)$.

1. (a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén
$$\big|f(x) - \alpha\big| < \varepsilon$$
teljesül.

   (b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R}$-hez $\exists \delta > 0$, melyre $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$ esetén
$$f(x) > K$$
teljesül.

   (c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ha $\forall k \in \mathbb{R}$-hez $\exists \delta > 0$, melyre $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$ esetén
$$f(x) < k$$
teljesül.

2. (a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$ ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists L \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > L$ esetén
$$\big|f(x) - \alpha\big| < \varepsilon$$
teljesül.

   (b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R}$-hez $\exists L \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > L$ esetén
$$f(x) > K$$
teljesül.

   (c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ ha $\forall k \in \mathbb{R}$-hez $\exists L \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > L$ esetén
$$f(x) < k$$
teljesül.

3. (a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$ ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists l \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x < l$ esetén
$$\big|f(x) - \alpha\big| < \varepsilon$$
teljesül.

   (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R}$-hez $\exists l \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x < l$ esetén
$$f(x) > K$$
teljesül.

   (c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ha $\forall k \in \mathbb{R}$-hez $\exists l \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x < l$ esetén
$$f(x) < k$$
teljesül.

Megjegyzés: Mindegyik fenti definíciót ki lehet mondani környezetek segítségével is.

3.10. Átviteli elv függvények határértékére

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy $\exists x_0$ olyan $U_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezete, amire

$$U_{x_0} \setminus \{x_0\} \subset D$$

teljesül. Ha $x_0 = \pm\infty$, akkor legyen $U_{x_0} = (a, \infty)$, illetve $U_{x_0} = (-\infty, a)$.

1. (a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra, ahol $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$$
teljesül.

   (b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra, ahol $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$$
teljesül.

   (c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra, ahol $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$$
teljesül.

2. (a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$$
teljesül.

   (b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$$
teljesül.

   (c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$$
teljesül.

3. (a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$$
teljesül.

   (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$$
teljesül.

   (c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$ esetén
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$$
teljesül.

3.11. Egyoldali határérték

Adott az $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0} = (x_0 - r, x_0) \subset D$ ($\exists U_{x_0} = (x_0, x_0 + r) \subset D$). Ekkor f baloldali (jobboldali) határértéke az x_0 pontban α, azaz

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \alpha$$

$$\left(\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \alpha \right)$$

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ($\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$) esetén

$$\big| f(x) - \alpha \big| < \varepsilon$$

teljesül.

Megjegyzés: Egy másik jelölés az egyoldali határértékre

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0 - 0)$$

illetve

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0 + 0).$$

3.11.1. Tétel

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = \alpha.$$

3.12. Átviteli elv egyoldali határértékekre

$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \alpha$ ($\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \alpha$) akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra, ahol $x_n < x_0$ ($x_n > x_0$) és $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ esetén

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$$

teljesül.

3.13. Szakadások

1. Az f függvénynek elsőfajú szakadása van x_0-ban, ha léteznek a

   $$\lim_{x \to x_0 +} f(x) < \infty \qquad \lim_{x \to x_0 -} f(x) < \infty$$

   határértékek. Ha

   $$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x)$$

   akkor megszüntethető a szakadás.

2. Az f függvénynek másodfajú szakadása van x_0-ban, ha nem elsőfajú a szakadás.

3.14. Tétel

Ha f folytonos $x_0 \in int(D)$-ben, akkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.15. Határértékek tulajdonságai

1. Linearitás

$$\lim_{x\to x_0}\big(\alpha\cdot f(x)+\beta g(x)\big)=\alpha\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)+\beta\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

2.

$$\lim_{x\to x_0} f\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

3. Kompozíció határértéke
Legyen $\lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha$ és $\lim_{x\to\alpha} g(x)=\beta$. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x)=\beta.$$

4. Monotonitás
Legyen $f(x)<g(x)$ $\forall x\neq x_0$-ra. Ekkor (ha léteznek a határértékek)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leq\lim_{x\to x_0} g(x).$$

5. Rendőr-elv
Legyen $f:D_f\mapsto\mathbb{R}$, $g:D_g\mapsto\mathbb{R}$ és $h:D_h\mapsto\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0}$, amire $\forall x\neq x_0\in U_{x_0}$ esetén

$$f(x)<g(x)<h(x).$$

Ekkor ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)$$

akkor

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x).$$

6. Monoton függvények határértéke
Legyen $f:D\mapsto\mathbb{R}$ olyan függvény, amire tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0}$ környezet, ahol a függvény monoton nő (csökken), azaz $\forall x_1<x_2\in U_{x_0}$, ahol $x_1\neq x_0$ és $x_2\neq x_0$ esetén $f(x_1)\leq f(x_2)$ $(f(x_1)\geq f(x_2))$. Ekkor $\exists f(x_0-0), f(x_0+0)$, ahol

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\inf\big\{f(x)\big|x>x_0\big\}$$

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\sup\big\{f(x)\big|x<x_0\big\}$$

(illetve

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\sup\big\{f(x)\big|x>x_0\big\}$$

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\inf\big\{f(x)\big|x<x_0\big\}.\Big)$$

3.16. Darboux-tulajdonság

Egy f függvény Darboux-tulajdonságú, ha bármely két függvényértéke között minden értéket felvesz. Tehát az $f:D\mapsto\mathbb{R}$ függvény Darboux-tulajdonságú, ha $\forall a<b\in D$ és $f(a)<f(b)$ $\big(f(a)>f(b)\big)$ esetén $\forall c\in\big(f(a),f(b)\big)$-hez $\Big(\forall c\in\big(f(b),f(a)\big)\Big)$ $\exists\xi\in(a,b)$, melyre $f(\xi)=c$.

3.16.1. Tétel

Darboux-tulajdonságú szigorúan monoton függvény folytonos.

Bizonyítás
Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény, mely teljesíti a Darboux feltételt. Legyen $x_0 \in (a, b)$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Legyen továbbá

$$f(\xi_2) = \min\big(f(x_0) + \varepsilon, f(b)\big)$$

és

$$f(\xi_1) = \max\big(f(x_0) - \varepsilon, f(a)\big).$$

Ekkor

$$\delta = \min\big(x_0 - \xi_1, \xi_2 - x_0\big)$$

választással $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$$

teljesül.

3.17. Bolzano-tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $f(a) < f(b)$. Ekkor $\forall c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\exists \xi \in (a, b)$, amire $f(\xi) = c$.

Bizonyítás
Legyen $c_1 := \frac{a+b}{2}$. Legyen továbbá

$$a_2 := a_1 \qquad b_2 := c_1$$

ha $f(c_1) > c$, és

$$a_2 := c_1 \qquad b_2 := b_1$$

ha $f(c_1) < c$. Hasonlóan konstruáljuk az $I_k := [a_k, b_k]$ intervallumsorozatot. Nyilván az I_k invervallumsorozat teljesíti a Cantor-féle közöspont tétel feltételeit, így létezik egy közös pont, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi).$$

Tehát $f(\xi) \leq c \leq f(\xi)$. Emiatt nyilván $f(\xi) = c$.

3.18. Darboux-tétel

Ha f differenciálható, akkor f' Darboux-tulajdonságú.

Bizonyítás
Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy $f'(a) < c < f'(b)$. Legyen továbbá

$$F(x) = f(x) - cx.$$

Ekkor nyilván

$$F'(x) = f'(x) - c$$

azaz

$$F'(a) < 0 \qquad F'(b) > 0.$$

Ekkor a Bolzano-tétel miatt $\exists \xi \in (a, b)$ amire $F'(\xi) = 0$, azaz $f'(\xi) = c$.

3.19. Weierstrass tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor R_f korlátos és zárt.

Megjegyzés: Szoktuk ezt külön is megfogalmazni, az első tétel azt mondja ki, hogy R_f korlátos, a másik pedig azt, hogy felveszi a szélsőértékeit.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n$-hez $\exists x_n \in [a, b]$, melyre $f(x_n) > n$. Ez az (x_n) sorozat korlátos, hiszen $a \leq x_n \leq b$, így a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata, melyre

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = \xi$$

ahol $\xi \in [a, b]$. Mivel a függvény folytonos, sorozatfolytonos is, tehát

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Azonban ez ellentmondás, hiszen $f(x_{n_k}) > n_k$. Tehát valóban korlátos.
Legyen $\beta = \sup \left\{ f(x) \middle| x \in [a, b] \right\}$. Ekkor nyilván $\forall n$-hez $\exists x_n \in [a, b]$, melyre

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta$$

azaz

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \beta.$$

Azonban a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat, amelyre

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = \xi$$

ahol $\xi \in [a, b]$. Azonban a sorozatfolytonosság miatt

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Tehát $\beta = f(\xi)$, azaz $\beta = \max \left\{ f(x) \middle| x \in [a, b] \right\}$.

3.20. Nevezetes határértékek

1. $$\lim_{x \to 0} x^x = 1$$

2. $$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

3. $$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

   Megjegyzés: A logaritmus alapja itt nem releváns.

4. $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

5. $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a$$

6. $$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

7.
$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

8.
$$\lim_{x\to \infty} x \sin\frac{1}{x} = 1$$

3.21. Egyenletes folytonosság

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos D-ben, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta$, ami ε-ra jellemző, melyre $\forall x_1, x_2 \in D$-re $|x_1 - x_2| < \delta$ esetén
$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| < \varepsilon$$
teljesül.

3.21.1. Tétel

Ha f egyenletesen folytonos, akkor folytonos is.

3.22. Heine-tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy f folytonos, de nem egyenletesen folytonos, azaz $\exists\varepsilon > 0$, melyre $\forall\delta > 0$-hoz $\exists x, y \in [a, b]$, melyekre $|x - y| < \delta$ esetén
$$\big|f(x) - f(y)\big| \geq \varepsilon$$
teljesül. Legyenek a $\delta = \frac{1}{n}$-hez tartozó számok x_n és y_n. Ezek a sorozatok nyilván korlátosak, tehát a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists(x_{n_k}), (y_{n_k})$ konvergens részsorozataik, amikre
$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$
és
$$\lim_{n_k\to\infty} y_{n_k} = y_0.$$
Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, nyilván $x_0 = y_0$. A sorozatfolytonosság miatt
$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} f(y_{n_k})$$
tehát
$$\big|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big| < \varepsilon$$
ami ellentmondás. Tehát valóban egyenletesen folytonos a függvény.

3.23. Lipschitz-folytonosság

Adott f Lipschitz-folytonos D_f-en, ha $\exists L > 0$, amire $\forall x_1, x_2 \in D_f$ esetén
$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$
teljesül.

3.23.1. Tétel

Ha f Lipschitz-folytonos, akkor folytonos is.

3.24. Differenciahányados

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in int(D)$. Ekkor az $x \in D_f$ ponthoz tartozó differenciahányados

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3.25. Differenciálhányados

Azt mondjuk f differenciálható x_0-ban, ha létezik

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

azaz létezik és véges a differenciálhányados.

3.26. Egyoldali derivált

Adott f jobboldali (baloldali) deriváltja az x_0 pontban

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\left(f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

3.26.1. Tétel

Adott f függvény differenciálható x_0-ban akkor és csak akkor, ha

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

3.27. Differenciálhatóság intervallumon

Azt mondjuk, hogy $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható, ha $\forall x_0 \in (a, b)$-ben differenciálható és

$$\exists \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

3.28. Tétel

Ha f differenciálható x_0-ban, akkor folytonos x_0-ban.

Bizonyítás
f differenciálhatósága azt jelenti, hogy

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$f'(x_0) - \varepsilon \le \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le f'(x_0) + \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \le K$$

ahol

$$K = \max\big(|f'(x_0) - \varepsilon|, |f'(x_0) + \varepsilon|\big).$$

Ekkor nyilván
$$\bigl|f(x)-f(x_0)\bigr| \le K|x-x_0|.$$
Ez azt jelenti, hogy $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ esetén
$$\bigl|f(x)-f(x_0)\bigr| \le K|x-x_0| < K\cdot\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$
tehát valóban folytonos.

3.29. Differenciálási szabályok

Legyenek f és g differenciálható függvények.

1. Linearitás
$$(\alpha f+\beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$
2. Szorzat deriváltja
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
3. Reciprok deriváltja
Legyen $g(x) \neq 0$.
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$
4. Hányados deriváltja
Legyen $g(x) \neq 0$.
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
5. Kompozíció deriváltja
Legyen f differenciálható $g(x)$-ben.
$$(f\circ g)'(x) = f'\bigl(g(x)\bigr)g'(x)$$
6. Inverz deriváltja
Legyen f szigorúan monoton, és legyen $f'(x) \neq 0$.
$$\Bigl(f^{-1}(x)\Bigr)' = \frac{1}{f'\bigl(f^{-1}(x)\bigr)}$$

Bizonyítás

1. A határérték tulajdonságaiból következik.
2. $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x)g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

3.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{(x-x_0)f(x)f(x_0)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)f(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}=-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

4. Az előző kettő tulajdonságból tiriviális.

5.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(x_0)\big)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(x_0)\big)}{x-x_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(x_0)\big)}{g(x)-g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0)$$

6.

$$\Big(f\big(f^{-1}(x)\big)\Big)'=f'\big(f^{-1}(x)\big)\big(f^{-1}(x)\big)'=1\implies\big(f^{-1}(x)\big)'=\frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

3.30. Lokális szélsőérték

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $x_0 \in int(D)$ lokális maximum (minimum), ha $\exists U_{x_0}$ amire $\forall x \in U_{x_0}$ esetén

$$f(x)\le f(x_0)$$
$$\Big(f(x)\ge f(x_0)\Big)$$

teljesül.

3.31. Globális szélsőérték

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $x_0 \in D$ globális maximum (minimum), ha $\forall x \in D$ esetén

$$f(x)\le f(x_0)$$
$$\Big(f(x)\ge f(x_0)\Big)$$

teljesül.

3.31.1. Tétel

Ha f-nek lokális szélsőértéke van $x_0 \in int(D_f)$-ben, akkor

$$f'(x_0)=0.$$

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy x_0-ban lokális minimuma van a függvénynek. Ez azt jelenti, hogy $\exists U_{x_0}$ környezet, melyre $f(x_0) \le f(x)$ teljesül $\forall x \in U_{x_0}$ esetén. Világos, hogy ekkor $x < x_0$ esetén

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0.$$

Azonban $x > x_0$ esetén

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0.$$

Ekkor $0 \le f'(x_0) \le 0$, amiből $f'(x_0) = 0$.

3.32. Középérték tételek

1. Rolle-tétel
   Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b)-n differenciálható függvény, ahol $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire
   $$f'(\xi) = 0.$$
2. Lagrange-féle középérték-tétel
   Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b)-n differenciálható függvény. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire
   $$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
3. Cauchy-féle középérték-tétel
   Legyen $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b)-n differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy $g(a) \neq g(b)$ és $g'(x) \neq 0$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire
   $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bizonyítás

1. A Weierstrass tételek miatt f-nek létezik szélsőértéke. Ha $f(a) = f(b)$ szélsőérték, akkor konstans a függvény, így $f'(\xi) \equiv 0$.
   Ha $f(a)$ és $f(b)$ nem szélsőérték, akkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire $f(\xi)$ szélsőérték, ami miatt azonban $f'(\xi) = 0$.
2. Legyen
   $$h(x) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a).$$
   Ekkor $h(a) = f(a)$ és $h(b) = f(b)$. Emiatt a
   $$g(x) := f(x) - h(x)$$
   függvényhez a Rolle-tétel miatt $\exists \xi \in (a, b)$, amire
   $$g'(\xi) = f'(\xi) - h'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = h'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
3. Legyen
   $$F(x) := f(x) + \lambda g(x)$$
   olyan függvény, melyre $F(a) = F(b)$. Ekkor
   $$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \implies \lambda = -\frac{f(b) - g(a)}{g(b) - g(a)}.$$
   Ekkor a Rolle-tétel miatt $\exists \xi \in (a, b)$, amire
   $$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0 \implies \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

3.33. Tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melyre $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$ esetén. Ekkor $f(x)$ konstans függvény.

Bizonyítás
Legyen $f : [x_1, x_2] \mapsto \mathbb{R}$ megszorítása f-nek. Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ amire
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \implies f(x_2) = f(x_1).$$

3.34. Integrálszámítás első alaptétele

Adottak $g, f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvények, melyekre $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a, b)$ esetén. Ekkor

$$f(x) = g(x) + c.$$

3.35. L'Hospital-szabály

Adott $g, f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálhatóak az $x_0 \in int(I)$ pont egy U_{x_0} környezetében. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad (\text{vagy } \pm\infty).$$

Ekkor ha létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás

Legyen $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

A Cauchy-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Így valóban

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.36. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor f monoton növő (csökkenő) $I \subset D$-ben akkor és csak akkor, ha $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in I$ esetén.

Bizonyítás

Először tegyük fel, hogy $f(x)$ monoton nő. Ekkor nyilván

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

teljesül $\forall x_0 \in I$ esetén.

Most tegyük fel, hogy $f'(x) \geq 0$. Ekkor legyen $x_1 < x_2 \in I$. A Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ amire

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0$$

így nyilván $f(x_1) \leq f(x_2)$.

3.37. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, és legyen $f'(x_0) = 0$ valamilyen x_0-ra. Ekkor x_0 lokális szélsőérték, ha $f''(x_0) \neq 0$. Továbbá x_0 lokális maximum (minimum), ha $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).
Ha $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ előjelet vált x_0-ban, akkor x_0 lokális szélsőérték.

Bizonyítás

Legyen $f''(x_0) > 0$. Ekkor $\exists U_{x_0}$ környezet, amire $\forall x \in U_{x_0}$ esetén $f''(x) > 0$. Ez azt jelenti, hogy f' szigorúan monoton nő U_{x_0}-ban, ami miatt $x < x_0$ esetén $f(x)$ csökken, és $x_0 < x$ esetén $f(x)$ nő. Tehát x_0-ban valóban minimum van.

3.38. Konvexitás

Egy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény $(a, b) \subset D$-ben konvex (konkáv), ha $\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$ és $\forall t \in [0, 1]$ esetén

$$f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

teljesül. Egy f függvény konkáv, ha $-f$ konvex.

3.38.1. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható fügvény. Ekkor f konvex (konkáv) $I \subset D$-ben akkor és csak akkor, ha $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in D$ esetén.

3.39. Inflexiós pont

Az $x_0 \in D_f$ inflexiós pont, ha itt a függvény konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe vált.

3.39.1. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ háromszor differenciálható, és legyen $f''(x_0) = 0$ valamilyen x_0-ra. Ekkor x_0 inflexiós pont, ha $f'''(x_0) \neq 0$.
Ha $f''(x_0) = 0$ és $f''(x)$ előjelet vált x_0-ban, akkor x_0 inflexiós pont.

3.40. Elsőfokú Taylor-polinom

Legyen az f függvény az $x_0 \in D_f$-ben differenciálható. Ekkor

$$T_1^{x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

az f x_0-hoz tartozó elsőfokú Taylor-polinomja.

3.40.1. Tétel

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = 0$$

Bizonyítás

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \to x_0} \frac{T_1(x) - T_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x) - T_1'(x) = 0$$

3.41. Tétel

Legyen f kétszer differenciálható függvény egy $x_0 \in D_f$ pont U_{x_0} környezetében. Ekkor $\forall x \in U_{x_0}$-hoz $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

3.42. Taylor-polinom

Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban. Ekkor

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

az f függvény x_0-hoz tartozó n-edik Taylor-polinomja.

3.42.1. Tétel

Pontosan egy olyan $P_n(x)$ polinom létezik, amire

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

ha $k \leq n$ és

$$P_n^{(n+1)}(x_0) = 0$$

ez a polinom pedig $T_n(x)$.

Bizonyítás
Könnyen látható, hogy

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$

Az egyértelműség azonnal következik abból, hogyha két azonos fokszámú polinom minden deriváltja megegyezik, akkor az együtthatóik páronként megegyeznek, így a két polinom azonos.

3.43. Lagrange-féle maradéktag

Az $L_n(x) := f(x) - T_n(x)$ a Lagrange-féle maradéktag.

3.43.1. Tétel

Legyen f $(n+1)$-szer differenciálható x_0 egy U_{x_0} környezetében. Ekkor $\forall x \in U_{x_0}$-hoz $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$L_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

4. Integrálszámítás

4.1. Primitív függvény

Adott egy $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$. Ekkor az $F : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény az f primitív függvénye, ha $\forall x \in I$ esetén

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül.

4.1.1. Tétel

Ha F és G az f függvény primitív függvényei, akkor $\exists c \in \mathbb{R}$ konstans, amire

$$F(x) = G(x) + c$$

teljesül.

Bizonyítás
A tétel állítása alapján

$$(F - G)'(x) \equiv 0.$$

Ekkor a $(F - G)(x)$ konstans, azaz $F(x) = G(x) + c$.

4.2. Határozatlan integrál

Az $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmaza az f határozatlan integrálja,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \big\{F : I \mapsto \mathbb{R} \big| F'(x) = f(x)\big\}.$$

4.3. Határozatlan integrál tulajdonságai

1. $$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

2. $$\int f'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = f\big(\varphi(x)\big) + c$$

3. $$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t \Bigg|_{t=\varphi(x)}$$

4. $$\int f(x)^{\alpha} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c \qquad \alpha \neq -1$$

5. $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \left(= \begin{cases} \ln\big(f(x)\big) + c, & \text{ha} \quad f(x) > 0 \\ \ln\big(-f(x)\big) + c, & \text{ha} \quad f(x) < 0 \end{cases} \right)$$

6. $$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c$$

4.4. Felosztás

Adott $[a, b]$ intervallum egy felosztása az

$$\mathcal{F} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Az összes lehetséges felosztás halmaza $\mathbb{F}$.

4.4.1. Felosztás finomsága

Adott $[a, b]$ intervallum $\mathcal{F}$ felosztás finomsága

$$\delta(\mathcal{F}) = \max\{x_k - x_{k-1}\}.$$

4.5. Alsó közelítő összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, és legyen

$$m_k = \inf\left\{f(x)\middle|x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}.$$

Ekkor a felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg

$$s(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k.$$

4.6. Felső közelítő összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, és legyen

$$M_k = \sup\left\{f(x)\middle|x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}.$$

Ekkor a felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k.$$

4.7. Tétel

1. Tetszőleges $\mathcal{F}$ felosztás esetén
$$s(\mathcal{F}) \le S(\mathcal{F}).$$

2. Új osztópont felvételekor az alsó közelítő összeg nem csökken, a felső közelítő összeg pedig nem nő. Legyen tehát az $\mathcal{F}$ felosztásból egy osztópont felvételével képzett felosztás $\mathcal{F}'$. Ekkor
$$s(\mathcal{F}) \le s(\mathcal{F}') \le S(\mathcal{F}') \le S(\mathcal{F}).$$

3. Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ két felosztás. Ekkor
$$s(\mathcal{F}) \le S(\mathcal{F}').$$

Bizonyítás

1. Mivel minden
$$\inf\left\{f(x)\middle|x \in [x_{k-1}, x_k]\right\} \le \sup\left\{f(x)\middle|x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$
így egyből apjuk a bizonyítandót.

2. Tegyük fel, hogy az új osztópontra $x_{k-1} < x* < x_k$. Ekkor legyen
$$m_1 = \inf\left\{f(x)\middle|x \in [x_{k-1}, x^*]\right\}$$
és
$$m_2 = \inf\left\{f(x)\middle|x \in [x^*, x_k]\right\}.$$
Ekkor
$$s(\mathcal{F}') - s(\mathcal{F}) = m_1(x^* - x_{k-1} + m_2(x_k - x^*) - m_k(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= (m_1 - m_k)(x^* - x_{k-1}) + (m_2 - m_k)(x_k - x^*) \geq 0.$$
Tehát $s(\mathcal{F}') \geq s(\mathcal{F})$. Hasonlóan belátható a felső közelítő összegekre vonatkozó állítás.

3. Az első két állításból azonnal következik.

4.8. Riemann-integrál

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha
$$\sup\left\{s(\mathcal{F})\middle|\mathcal{F} \in \mathbb{F}\right\} = \inf\left\{S(\mathcal{F})\middle|\mathcal{F} \in \mathbb{F}\right\}.$$
Ekkor
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{s(\mathcal{F})\middle|\mathcal{F} \in \mathbb{F}\right\} = \inf\left\{S(\mathcal{F})\middle|\mathcal{F} \in \mathbb{F}\right\}.$$

4.9. Oszcillációs összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ egy $\mathcal{F}$ felosztása. Ekkor a felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg
$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k.$$

4.10. Riemann-összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ egy $\mathcal{F}$ felosztása. Ekkor a felosztáshoz tartozó egyik Riemann-összeg
$$\sigma(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$
ahol $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

4.11. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható akkor és csak akkor, ha $\forall(\mathcal{F}_n)$ felosztás sorozatra
$$\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{F}_n) = 0$$
esetén
$$\lim_{n\to\infty} o(\mathcal{F}_n) = 0 \qquad \left(\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{F}_n) = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{F}_n)\right)$$
teljesül.

4.12. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható akkor és csak akkor, ha $\forall(\mathcal{F}_n)$ felosztás sorozatra
$$\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{F}_n) = 0$$
esetén
$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
teljesül.

4.13. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos és monoton függvény integrálható.

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy f monoton növő. Ekkor $\forall\varepsilon > 0$ esetén

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\delta(\mathcal{F}) = \big(f(b) - f(a)\big)\delta(\mathcal{F}).$$

Ekkor $\delta(\mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ esetén $o(\mathcal{F}) < \varepsilon$.

4.14. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény integrálható.

Bizonyítás
A Heine-tétel miatt a függvény egyenletesen is folytonos. Ekkor $\forall\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ esetén $\exists\delta$, melyre $\forall|x_k - x_{k-1}| < \delta$ esetén $|f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ekkor

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1} = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

4.15. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos, és véges sok szakadási helytől eltekintve folytonos függvény integrálható.

Bizonyítás
Legyen szakadási pont $x^* \in [a, b]$. Legyen továbbá

$$[a, b] = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [a, x^* - \delta] \cup (x^* - \delta, x^* + \delta) \cup [x^* + \delta, b].$$

Ekkor f folytonos az I_1 és I_3 intervallumokon, azaz $\exists\mathcal{F}_1$ felosztás, melyre $o(\mathcal{F}_1) < \frac{\varepsilon}{3}$, illetve $\exists\mathcal{F}_3$, melyre $o(\mathcal{F}_3) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor az I_2 intervallumon egy $\mathcal{F}_2$ felosztásra

$$o(\mathcal{F}_2) = (M - m)2\delta \leq 4K\delta$$

ahol $M := \sup\big\{f(x)\big|x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)\big\}$, $m := \inf\big\{f(x)\big|x \in (x^* - \delta, x^* + \delta\big\}$, és $|f(x)| \leq K$. Ekkor $\delta < \frac{\varepsilon}{12K}$ esetén $o(\mathcal{F}_2) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor

$$o(\mathcal{F}) = o(\mathcal{F}_1) + o(\mathcal{F}_2) + o(\mathcal{F}_3) < \varepsilon.$$

4.16. Newton-Leibniz-formula

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen f egy primitív függvénye F. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

Bizonyítás
Legyen $\mathcal{F}_n$ egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor f primitív függvényének megszorítása a részintervallumokon $F : [x_{k-1}, x_k] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, melyre

$$F'(\xi_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f(\xi_k).$$

Ekkor írjuk fel azt a Riemann-összeget, melyben ezeket a ξ_k számokat választjuk ki. Ekkor

$$\sigma(\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = F(b) - F(a).$$

Világos, hogy ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = F(b) - F(a).$$

4.17. Riemann-integrál tulajdonságai

1.
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.
$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

3.
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

4.
$$f(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le 0$$
$$f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b d(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$$

5.
$$f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

6.
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$$

4.18. Integrálközép

Adott $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény integrálközepe

$$\kappa = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mathrm{d}x} = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

4.18.1. Tétel

Adott $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ha $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$-re, akkor

$$m \le \kappa \le M.$$

Bizonyítás

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x = m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \implies m \le \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$
$$\int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a) \ge \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \implies M \ge \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

4.18.2. Integrál középérték tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható, folytonos függvény. Ekkor $\exists \xi \in [a, b]$, melyre

$$f(\xi) = \kappa = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

Bizonyítás

A Weierstrass-tétel miatt tudjuk, hogy $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, melyre

$$m = f(\xi_1) \quad M = f(\xi_2).$$

Ekkor a Bolzano-tétel miatt $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, melyre

$$f(\xi) = \kappa.$$

4.19. Integrálfüggvény

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor az f integrálfüggvénye $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

4.20. Integrálszámítás második alaptétele

Adott függvény integrálfüggvénye folytonos. Ha f folytonos x_0 egy környezetében, akkor F differenciálható, és

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy f korlátos, így legyen $|f(x)| \leq K$. Ekkor

$$\left|F(x) - F(x_0)\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq K|x - x_0|$$

tehát F Lipschitz-folytonos, így folytonos is.
Legyen továbbá x_0 rögzített. Ekkor

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ \xi\in(x,x_0)}} f(\xi) = f(x_0).$$

4.21. Parciális integrálás

Adottak $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ekkor

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.21.1. Parciális integrálás alapesetei

1.
$$\int \text{polinom} \cdot e^x \, \mathrm{d}x$$
Ekkor legyen $f'(x) = e^x$ és $g(x) = \text{polinom}$.

2.
$$\int \text{polinom} \cdot \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$$
Ekkor legyen $f'(x)$ a trigonometrikus függvény és $g(x)$ a polinom.

3.
$$\int e^x \cdot \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$$
Ekkor legyen $f'(x)$ és $g(x) = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}$.

4.22. Helyettesítéses integrál

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény, és $\phi : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható függvény, melyre
$$\phi(\alpha) = a \qquad \phi(\beta) = b.$$
Ekkor
$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t \Big|_{t=\varphi(x)}$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

4.23. Lokális integrálhatóság

Az $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény lokálisan integrálható, hogy $\forall [a, b] \subset I$ intervallumon f integrálható. Ekkor
$$f \in \mathcal{R}^{loc}(I).$$

4.24. Improprius integrál

Az $f \in \mathcal{R}^{loc}(I)$ függvény imprprius értelemben integrálható, ha
$$\lim_{\substack{a\to\alpha \\ b\to\beta}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$
határérték létezik, és véges.

4.24.1. Összehasonlító kritériumok improprius integrálokra

1. Minoráns kritérium
   Adottak $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvények, melyekre
   $$|g(x)| \le |f(x)|$$
   teljesül $\forall x \in I$ esetén. Ekkor ha
   $$\int_I g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$$
   akkor $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ végtelen.

2. Majoráns kritérium
   Adottak $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvények, melyekre
   $$0 \le |f(x)| \le g(x)$$
   teljesül $\forall x \in I$ esetén. Ekkor ha
   $$\int_I g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$
   akkor $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

4.24.2. Elégséges feltétel improprius integrál létezéséhez

Adott $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ ahol $a > 0$. Tegyük fel, hogy $\exists \alpha > 1, c \in \mathbb{R}$, melyre
$$\big|f(x)\big| \le cx^{-\alpha}$$
teljesül $\forall x \ge a$ esetén. Ekkor $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ létezik.

4.24.3. Improprius integrálra vonatkozó Cauchy-kritérium

Adott $f : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}$ függvény. Ekkor az $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ integrál akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists U_\alpha, U_\beta$ környezetek, melyekre $\forall \alpha_1 < \alpha_2 \in U_\alpha, \forall \beta_1, \beta_2 \in U_\beta$ esetén
$$\left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|, \left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$
teljesül.

4.24.4. Tétel

Tegyük fel, hogy $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists K > 0$, melyre
$$\left|\int_{-\infty}^{-K} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_K^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$
teljesül.

4.25. A Γ függvény

$$\Gamma(n) := \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

4.25.1. Tétel

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor
$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$
Definiálhatjuk nem egész szám faktoriálisát úgy, hogy
$$t! = \Gamma(t+1).$$

Bizonyítás
Vizsgáljuk meg $\Gamma(n)$ értékét parciális integrálással!
$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^{n-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = (n-1)\Gamma(n-1).$$

Továbbá

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Látható, hogy valóban

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

4.26. Ívhossz számítás

Adott $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény gráfjának hossza az $[a,b]$ intervallumon

$$\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Bizonyítás

Vegyünk egy $\mathcal{F}$ felosztást. Ekkor az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumokban becsülhetjük az ívhosszt , mint

$$s_k = \sqrt{\big(x_k - x_{k-1}\big)^2 + \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)^2}.$$

Továbbá a Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, melyre

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Ekkor

$$s_k = \Delta x_k \sqrt{1 + \big(f'(\xi_k)\big)^2}.$$

Ekkor az ívhossz

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \Delta x_k \sqrt{1 + \big(f'(\xi_k)\big)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

4.27. Forgástest térfogata

Adott $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^+$ differenciálható függvény x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

4.28. Forgástest felszíne

Adott $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^+$ differenciálható függvény x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest felszíne

$$2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

5. Differenciálegyenletek

5.1. Differenciálegyenletek

Azt mondjuk, hogy egy egyenlet differenciálegyenlet, ha az ismeretlen egy függvény, és az egyenletben szerepel ennek az ismeretlen függvénynek valamely deriváltja is.

5.2. Rend

Adott differenciálegyenlet rendje az ismeretlen függvény legmagasabb fokú deriváltjának fokszámát értjük.

5.3. Elsőrendű differenciálegyenlet

Az elsőrendű differenciálegyenlet általános alakja

$$y' = f(x, y)$$

ahol $f(x, y)$ egy kétváltozós függvény.

5.4. Cauchy feladat

Cauchy feladat, vagy kezdetiérték feladat során a differenciálegyenletnek azt a megoldását keressük, melyre

$$y(x_0) = y_0$$

ahol x_0 és y_0 adottak.

5.4.1. Tétel

Cauchy feladatnak egyetlen megoldása van.

5.5. Szeparábilis differenciálegyenlet

Egy differenciálegyenlet szeparábilis, ha a jobboldala

$$f(x, y) = h(x)g(y)$$

vagy

$$f(x, y) = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}$$

alakú, azaz

$$y' = h(x)g(y)$$

vagy

$$y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}.$$

5.6. Lineáris differenciálegyenlet

Lineáris differenciálegyenlet jobboldala

$$f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

alakú, azaz

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Ha $b(x) \equiv 0$ akkor homogén lineáris differenciálegyenletről beszélünk, egyébként inhomogén lineáris differenciálegyenletről.

5.7. Homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

Legyen

$$y' = a(x)y$$

és legyen

$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ekkor

$$y(x) = ce^{A(x)}$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal.

Cauchy feladat esetén legyen

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$$

ebből

$$A(x_0) = 0.$$

Így

$$y(x_0) = ce^{A(x_0)} = c \implies c = y_0.$$

Ekkor

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t}.$$

5.8. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

Legyen

$$y' = a(x)y + b(x)$$

és legyen

$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ekkor

$$y(x) = ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Cauchy feladat esetén

$$y(x) = ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

6. Függvénysorozatok és függvénysorok

6.1. Függvénysorozat

Függvénysorozat egy olyan hozzárendelés, mely $\forall n \in \mathbb{N}$-hez hozzárendel egy

$$f_n(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor a sorozatot (f_n)-el jelöljük.

6.2. Pontonként konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall x \in [a, b]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \varepsilon.$$

Ekkor $\lim f_n = f$.

6.3. Egyenletesen konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

6.3.1. Tétel

Ha az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens, akkor pontonként is konvergens.

Bizonyítás
A definícióból azonnal látható, hogy $N(\varepsilon)$ megfelelő küszöbindex $\forall x, \varepsilon$ esetén.

6.3.2. Tétel

Ha az (f_n) függvénysorozat tagjai folytonosak, és (f_n) egyenletesen konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

is folytonos.

Bizonyítás
A háromszög-egyenlőtlenség miatt tudjuk, hogy

$$\Big| f(x) - f(x_0) \Big| \leq \Big| f_n(x) - f(x) \Big| + \Big| f_n(x_0) - f(x_0) \Big| + \Big| f_n(x) - f_n(x_0) \Big|.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt $\exists N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

illetve

$$\Big| f_n(x_0) - f(x_0) \Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Továbbá tudjuk, hogy f_n folytonos, így $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz $\exists\delta$, melyre $\forall|x-x_0|<\delta$ esetén

$$\Big|f_n(x)-f_n(x_0)\Big|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Így $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists\delta$, melyre $\forall|x-x_0|<\delta$ esetén

$$\Big|f(x)-f(x_0)\Big|<\varepsilon$$

azaz f valóban folytonos.

6.3.3. Tétel

Ha az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez, és $f_n:[a,b]\mapsto\mathbb{R}\in\mathcal{R}[\alpha,\beta]$, ahol $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bizonyítás
Az egyenletes konvergencia miatt $f(x)$ folytonos, így valóban integrálható.

6.4. Pontonként konvergens függvénysor

Adottak az $f_n:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor pontonként konvergál az $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ függvényhez, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f(x)$$

teljesül $\forall x\in[a,b]$, azaz $\forall\varepsilon>0$ és $\forall x\in[a,b]$ esetén $\exists N(\varepsilon,x)$, melyre $\forall n\geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)-f(x)\right|<\varepsilon.$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n=f.$$

6.5. Egyenletesen konvergens függvénysor

Adottak az $f_n:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor egyenletesen konvergál az $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n\geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

teljesül $\forall x\in[a,b]$.

6.6. Cauchy kritérium függvénysorokra

A $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ eleget tesz a Cauchy kritériumnak, ha $\forall\varepsilon>0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n>m\geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=m}^{n}f_k(x)\right|<\varepsilon$$

teljesül $\forall x\in[a,b]$.

6.6.1. Tétel

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ akkor és csak akkor egyenletesen konvergens, ha eleget tesz a Cauchy kritériumnak.

6.7. Weierstrass kritérium

Adottak az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy az f_n függvények korlátosak, és $|f_n(x)| < a_n$. Ekkor ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

egyenletesen konvergens.

Bizonyítás

A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy kritérium miatt tudjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N$, melyre

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} \left| f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

6.8. Összegfüggvény folytonossága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények folytonosak, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ is folytonos.

6.9. Összefügggvény integrálhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre $f_n \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$, ahol $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesn konvergens. Ekkor

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

6.10. Összegfüggvény deriválhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak, továbbá az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

és
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$$
egyenletesen konvergensek. Ekkor $g(x) = f'(x)$, azaz
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

6.11. Hatványsor

Hatványsoron egy
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$
sort értünk, ahol x_0 rögzített valós szám.

6.12. Konvergenciahalmaz

Adott
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$
hatványsor. Ennek konvergenciahalmaza
$$\mathcal{H} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n < \infty \right\}.$$

6.12.1. Tétel

1. $x_0 \in \mathcal{H}$.
2. Ha $\xi \in \mathcal{H}$, akkor $\forall x$, melyre $|x - x_0| < |\xi|$, $x \in \mathcal{H}$ teljesül.
3. Ha $\eta \notin \mathcal{H}$, akkor $\forall x$, melyre $|x - x_0| > |\eta|$, $x \notin \mathcal{H}$ teljesül.

Bizonyítás

1. Triviális.
2. Tudjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi - x_0)^n < \infty$. Ekkor a számsorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel miatt $\left(c_n(\xi - x_0)^n\right)$ nullsorozat, azaz $\exists K$, melyre $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\left|c_n(x-x_0)^n\right| < K.$$
Tudjuk továbbá, hogy $|x - x_0| < |\xi - x_0|$, azaz
$$\left|\frac{x-x_0}{\xi - x_0}\right| < 0.$$
Ekkor
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi - x_0)^n \left(\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right)^n$$
így
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi - x_0)^n \left(\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right)^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n(\xi - x_0)^n\right| \left|\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right|^n < K \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right|^n.$$
Egy olyan végtelen mértani sort kaptunk, amelynek a kvóciensének abszolútértéke kisebb, mint 1. Emiatt a sor nyilván konvergens.
3. Tegyük fel, hogy $x \in \mathcal{H}$. Ekkor az előző tétel miatt $\eta \in \mathcal{H}$, azonban ez ellentmondás.

6.13. Konvergenciasugár

Adott hatványsor konvergenciasugara

$$\varrho := \sup\left\{|x - x_0| \middle| x \in \mathcal{H}\right\}.$$

Ha $\mathcal{H} = \{x_0\}$, akkor $\varrho := 0$.
Ha $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, akkor $\varrho := \infty$.

6.13.1. Konvergenciasugár meghatározása

Adott $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ hatványsor. Ekkor ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \gamma$$

vagy a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \gamma$$

határérték, akkor $\varrho = \frac{1}{\gamma}$.

Bizonyítás

1. A végtelen sorokra vonatkozó gyengített hányadoskritérium miatt ha

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x - x_0| = \gamma|x - x_0| < 1$$

   akkor a sor konvergens. Ekkor azonban

$$|x - x_0| < \frac{1}{\gamma} \implies x_0 - \frac{1}{\gamma} < x < x_0 + \frac{1}{\gamma}.$$

   Azt látjuk, hogy valóban $\varrho = \frac{1}{\gamma}$.

2. A végtelen sorokra vonatkozó gyengített gyökkritérium miatt ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c_n(x-x_0)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}|x - x_0| = \gamma|x - x_0| < 1$$

   akkor a sor konvergens. Ekkor azonban

$$|x - x_0| < \frac{1}{\gamma} \implies x_0 - \frac{1}{\gamma} < x < x_0 + \frac{1}{\gamma}.$$

   Azt látjuk, hogy valóban $\varrho = \frac{1}{\gamma}$.

6.14. Műveletek hatványsorokkal

Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$. Ekkor

1. $[x_0 - r, x_0 + r]$-ben a hatványsor egyenletesen konvergens, ahol $0 < r < \varrho$
2. $int\mathcal{H}$-ban f folytonos
3. $int\mathcal{H}$-ban f differenciálható, a k-adik derivált

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (x - x_0)^{n-k}$$

4. $int\mathcal{H}$-ban f integrálható,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int (x-x_0)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

Bizonyítás

1. Legyen $x_0 = 0$. Ekkor tudjuk, hogy $|x| < r$, azaz $\left|c_n x^n\right| < |c_n| r^n$. Tudjuk továbbá, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n < \infty$, így a Weierstrass kritérium miatt
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
egyenletesen konvergens.
2. Az egyenletes konvergenciából következik.
3. Az egyenletes konvergencia mellett kell, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^n$ egyenletesen konvergens legyen. A hányadoskritériumból
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \gamma.$$
Azt kapjuk tehát, hogy a deriváltakból álló sor konvergenciasugara megegyezik az eredeti sor konvergenciasugarával. Emiatt $f(x)$ valóban tagonként differenciálható.
4. Az egyenletes kovnergenciából következik.

6.15. Analitikus függvény

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvény felírható

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

alakban x_0 valamilyen örnyezetében. Ekkor a függvény analitikus.

6.16. Függvény előállítása hatványsorként

1. Tegyük fel, hogy f egy hatványsor összegeként reprezentálható. Ekkor az előállítás egyértelmű.
2. Ha
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$
akkor
$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Bizonyítás

1. Tegyük fel, hogy
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n.$$
Ekkor legyen
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(d_n-c_n)(x-x_0)^n.$$

Látható, hogy $\forall k$ esetén

$$F^{(k)}(x) = 0$$

így $c_k = d_k$.

2. Legyen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Ekkor $\forall k$ esetén $f^{(k)}(x_0) = k! c_k$ azaz

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

6.17. Taylor sor

Legyen adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvény, mely egy $x_0 \in (a, b)$ pontban végtelen sokszor differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli Taylor sora

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

6.17.1. Tétel

Tegyük fel, hogy az $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \mapsto \mathbb{R}$ függvény végtelen sokszor differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy $\exists K$, melyre $\forall k$ és $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esetén

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leq K$$

teljesül. Ekkor

$$f(x) = T(x)$$

teljesül $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esetén.

Bizonyítás
Legyen

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Ekkor a Lagrange-féle maradéktagot használva

$$f(x) - T(x) = \lim_{n \to \infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

ahol ξ x és x_0 között van. Ekkor azonban

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq K \lim_{n \to \infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $T(x)$ egyenletesen konvergál $f(x)$-hez.