

1. ANALÓG RENDSZER

2. Kirchhoff egyenletek:

Matematikai modell közvetlen felírása a kapcsolási rajzból

3. Matematikai modell: A DIFFERENCIÁL EGYENLET

$$a_n \frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_m \frac{d^m i}{dt^m} + \cdots + b_0 i$$

n-edrendű, állandó együtthatós, lineáris, inhomogén differenciál egyenlet

4. KÉRDÉS:

Hogyan oldjuk meg a diff. egyenletet egyszerűen?

IMPEDANCIA KONCEPCIÓ

1. A megoldást formálisan az Ohm törvény

$$R = \frac{V}{I}$$

alakjában keressük

2. Alkalmazott módszer:

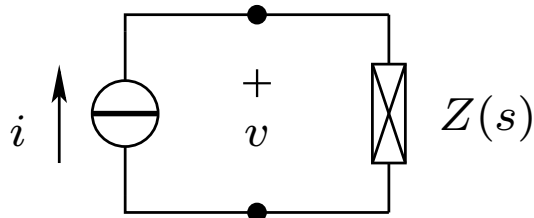
Korlátozzuk a gerjesztések osztályát

Az impedancia általános alakja

I. A gerjesztés és válaszjel kapcsolatát megadó differenciál egyenlet

$$a_n \frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_m \frac{d^m i}{dt^m} + \cdots + b_0 i$$

II. A gerjesztések korlátozása a (komplex) exponenciális függvények osztályára



Megengedett gerjesztések:

$$i(t) = A_i \exp(st) \implies \frac{d^n i}{dt^n} = s^n i$$

$$a_n s^n v + a_{n-1} s^{n-1} v + \cdots + a_1 s v + a_0 v = \left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \right) v$$

$$= b_m s^m i + \cdots + b_0 i = (b_m s^m + \cdots + b_0) i$$

III. Formálisan az impedanciát az ohm törvény formájában írjuk fel

$$a_n s^n v + a_{n-1} s^{n-1} v + \dots + a_1 s v + a_0 v = \left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right) v$$

$$= b_m s^m i + \dots + b_0 i = (b_m s^m + \dots + b_0) i$$

Ohm törvény formátumának megfelelően átrendezve kapjuk

$$Z(s) = \frac{v}{i} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{\underbrace{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}_{\text{karakterisztikus egyenlet}}} = \frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$$

Vigyázz, kapcsolás függvénye, hogy a karakterisztikus egyenletet a számláló vagy a nevező hordozza!

Vedd észre: Mivel LTI hálózatról van szó

- a tesztölges gerjesztést (komplex) exponenciálisok lineáris kombinációjaként állítjuk elő, majd
- a szuperpozíció tételét alkalmazzuk

3.5. Az **IMPEDANCIA** koncepció

- A gerjesztés és válaszjel kapcsolatát megadó differenciál egyenlet

$$a_n \frac{d^n v}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v = b_m \frac{d^m i}{dt^m} + \cdots + b_0 i$$

- Vedd észre, az exponenciális függvények speciális tulajdonságát

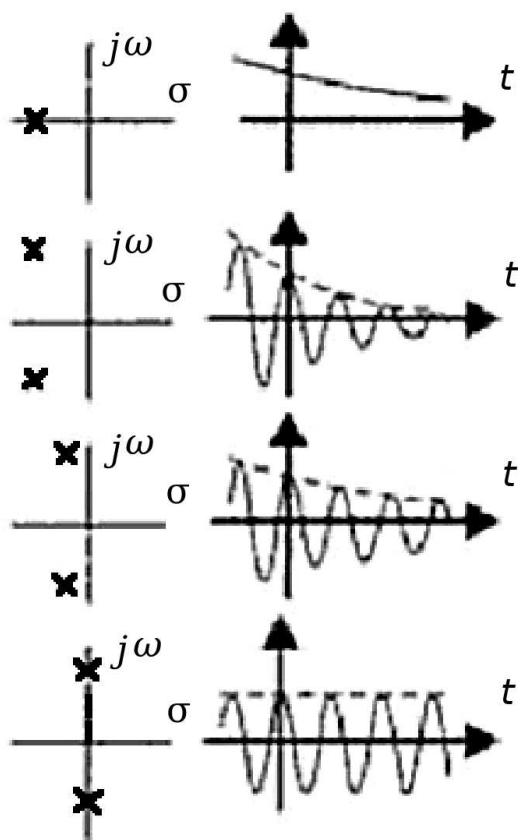
$$f_{exp}(t) = A \exp(st) \quad \implies \quad \frac{d^n f_{exp}(t)}{dt^n} = \frac{d^n A \exp(st)}{dt^n} = s^n f_{exp}(t)$$

- Az exponenciális függvények a differenciál egyenletek sajátfüggvényei
- A tranziens válasz mindig a komplex exponenciálisok lineáris kombinációjaként adódik
- Korlátozzuk a gerjesztéseket az exponenciális függvények, ill. az azokból előállítható függvények osztályára

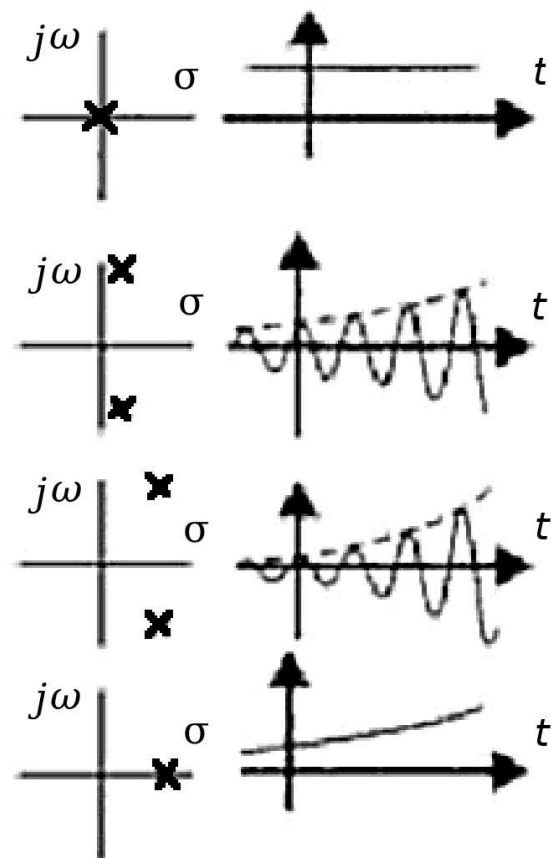
Jelek az $s = \sigma + j\omega$ komplex frekvencia és a t időtartományban

 s -tartomány

időtartomány

 s -tartomány

időtartomány



3.6(a) A komplex amplitúdó definíciója

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) = \Re \left\{ \underbrace{[V_{eff} \exp(j\theta)]}_{\text{komplex amplitúdó}} [\sqrt{2} \exp(j\omega t)] \right\}$$

ahol az effektív érték $V_{eff} = V_m / \sqrt{2}$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta) = \Re \left\{ \underbrace{[I_{eff} \exp(j\theta)]}_{\text{komplex amplitúdó}} [\sqrt{2} \exp(j\omega t)] \right\}$$

Az ok amiért a gerjesztő frekvencia(ák) a számítás során a komplex amplitúdóban nem jelennek meg:

- Egy lineáris hálózat konzervatív a gerjesztő frekvenciákra nézve, a gerjesztő frekvencia(ák) nem hordoz(nak) információt

3.6(b) Az AC impedancia

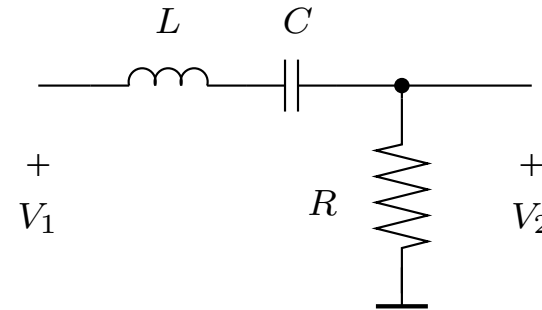
- Az egyes áramköri elemek impedanciája
 - Ellenállás: $Z_R = \frac{V_R}{I_R} = R \text{ } [\Omega]$
 - Induktivitás: $Z_L = \frac{V_L}{I_L} = j\omega L \text{ } [\Omega]$
 - Kapacitás: $Z_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C} \text{ } [\Omega]$
- Az impedancia a kapcsolási rajzból közvetlenül felírható
- Az impedanciákkal formálisan mint az ellenállásokkal egy DC hálózatban lehet és kell számolni
- Az AC impedancia az s tartományban felírt impedanciából formálisan az $s = j\omega$ behelyettesítéssel megkapható

$$Z(j\omega) = Z(s) \big|_{s=j\omega}$$

- Az impedanciafüggvény a hálózatot teljesen jellemzi, azt kiértékelni mindig az adott gerjesztő frekvencián kell

3.6(c) Frekvenciaválasz-függvény

Egy másodrendű sáváteresztő szűrő kapcsolási rajza



Frekvenciaválasz-függvénye

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega \frac{R}{L}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\omega \frac{R}{L}} = \frac{j\omega \frac{R}{L}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega \frac{R}{L}}$$

Ez egy ún. rezgőkör, amelynek paraméterei:

- Rezonanciafrekvencia: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Jósági tényező: $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$
- Sáv szélesség (félteljesítményű pontok között): $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$