2. Feladatok

1. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát, elsőrendű parciális deriváltjait és azok értelmezési tartományát!

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (b) $f(x,y) = x^y$

   (c) $f(x,y) = y^2 \ln\sqrt{xy}$ (d) $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

   (e) $f(x,y) = \dfrac{x^3 e^y}{1+\sin x + y^2}$ (f)$f(x,y) = \dfrac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$

   (g) $f(x,y) = x\ \mathrm{tg}(x+y)$ (h) $f(x,y) = x\ln\left(x^2+y^2\right)$

   (i) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^7y^4}$ (j) $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$

   (k) $f(x,y) = \mathrm{tg}(3x-5y)$ (l) $f(x,y) = \sqrt{x^3 - 5x^2y + y^4}$

   (m) $f(x,y) = e^{x^2\sin x - y^2x^3}$

2. Határozza meg a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait! Ellenőrizze le, hogy valóban teljesül az $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ egyenlőség!

   (a) $f(x,y) = \ln\left(x+e^y\right)$ (b) $f(x,y) = x^y$ (c) $f(x,y) = x\ \mathrm{tg}(x+y)$

   (d) $f(x,y) = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$ (e) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x+y}$ (f) $f(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

   (g) $f(x,y) = y - xe^y + x$ (h) $f(x,y) = e^{xy}$ (i) $f(x,y) = x\sin(x+y) + y\sin(x+y)$

3. Írja fel az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

   (a) $f(x,y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6$ és $P_0(1,-1)$

   (b) $f(x,y) = (x^2-6x)(y^2-4y)$ és $P_0(1,2)$

   (c) $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ és $P_0(1,2)$

   (d) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(xy)$ és $P_0(2,1/2)$

   (e) $f(x,y) = x\ \mathrm{tg}y - y\ \mathrm{tg}x$ és $P_0(\pi/4, 0)$

   (f) $f(x,y) = 3y + e^{xy^2} + 2y\ \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$ és $P_0(0,1)$

   (g) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+2y^2}$ és $P_0(1,1)$

4. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2,-1,3)$ ponton és párhuzamos az $f(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)$ felület $x_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $y_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.

5. Az $f(x,y) = \ln(xy)$ felületnek mely pontjaiban párhuzamosak az érintősíkok az $x+y+z=0$ síkkal?

6. Az $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$ felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?

7. Határozza meg a következő függvények adott irány szerinti iránymenti deriváltját a megadott pontban!

   (a) $f(x,y) = x^3 - 5xy^2 - 2x + 1, \quad \alpha = 40^\circ, \quad P_0(1,0)$

   (b) $f(x,y) = (x-y)^2, \quad \alpha = \frac{pi}{3}, \quad P_0(2,3)$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \alpha = 135^\circ, \quad P_0(-5,5)$

   (d) $f(x,y) = \sin(xy), \quad \alpha = 150^\circ, \quad P_0(1,0)$

   (e) $f(x,y) = \dfrac{x^2 \ln y}{x^2+3y^2}, \quad \underline{v} = (-3,4), \quad P_0(-1,1)$

   (f) $f(x,y) = \dfrac{xy(1+y)}{x^2+y^2}, \quad \underline{v} = (-4,3), \quad P_0(3,1)$

   (g) $f(x,y) = x^4[2 - \ln(1+y^2)], \quad \underline{v} = (1,3), \quad P_0(1,0)$

   (h) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right), \quad \underline{v} = (1,3), \quad P_0(-3,-4)$

8. Határozza meg mely irány esetén lesz nulla az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y$ függvény $P_0(2,0)$ pontbeli iránymenti deriváltja! És mely irány esetén lesz maximális az iránymenti derivált?

9. Milyen irányban lesz az $f(x,y) = y^3 e^{-2x-1}$ függvény $(\frac{1}{2}, 1)$ pontbeli iránymenti deriváltja maximális, illetve minimális?

10. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 e^y$ függvgény $P_0(2,0)$ pontbeli, a $\underline{v} = (3,4)$ vektorra merőleges iránymenti deriváltját!