Félcsoport, Csoport

Félcsoport: asszociatív művelettel ellátott halmaz
Csoport: asszociatív művelettel ellátott halmaz, ahol létezik egységelem, és minden elemnek létezik inverze
Abel csoport: kommutatív csoport

1, Milyen struktúrát határoznak meg az alábbi halmazok a megadott műveletekkel? (1 műveletes struktúrák)
a, Páros számok halmaza a szorzás művelettel

Megoldás:

Félcsoport: zárt, mert két páros szám szorzata páros
a szorzás asszociatív
nincs egységelem, mert az egységelem az 1 lenne, de az 1 nem páros szám.
Ha nincs egység nincs értelme inverzről beszélni)

b, R\{0} alaphalmaz az osztás művelettel

Megoldás:

Egyik sem mert nem asszociatív: $(a/b)/c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \neq \frac{ac}{b} = \frac{a}{\frac{b}{c}} = a/(b/c)$

c, R\{0} a következő művelettel: $a * b = 2ab$

Megoldás:

Abel csoport: zárt, mert a és b valós akkor $a * b = 2ab$ is valós
asszociatív, mert $(a * b) * c = 2(2ab)c = 4abc = 2a(2bc) = a * (b * c)$
létezik egységelem, mert $a * e = a \quad \rightarrow \quad 2ae = a \quad \rightarrow \quad e = \frac{1}{2}$
létezik inverz, mert $a * a^{-1} = e \quad \rightarrow \quad 2aa^{-1} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad a^{-1} = \frac{1}{4a}$
kommutatív, mert $a * b = 2ab = 2ba = b * a$

2, Az alábbi egyműveletes struktúrák közül melyek alkotnak félcsoportot, melyek csoportot?
(Az adott halmazokon szokásos összeadás és szorzás műveletek vannak megadva)

a, (R,+)	b, (R,*)	c, (R\{0},*)	d, (Z,+)
e, (Z,*)	f, (N,+)	g, (Páros egészek, +)	h, (Páratlan egészek, *)
i, (2^H, metszet)	j, (2^H, unió)	k, (R^n, +)	l, (R^n,vektoriálisszorzat)
m, (P_n,+)	n, ($R^{n\times m}$,+)	o, ($R^{n\times n}$,*)	p, (R^n,skalárszorzat)
q, (P_n,*)	r, (Nem nulla determinánsú n×n-es mátrixok, *)		

s, Négyzet szimmetriái a kompozíció művelettel t, Síkon origó körüli forgatások a kompozícióval

Megoldás: Ábel csop.: a, c, d, g, k, m, n, s, t, Csoport: r,

Félcsoport:
- o, Egységelemes félcsoport
- b, e, h, i, j, Kommutatív egységelemes félcsoport
- f Kommutatív félcsoport

Egyik sem mert nem asszociatív a művelet: l,
Nem zárt a halmaz a műveletre: q, Nem művelet: p,

3, Korábbi zh példa

Lali elsőéves a PPKE ITK-n ☺, és szeptember végén végre hazautazik.
Szülei, míg távol volt, elkezdték kipakolni a padlást, úgyhogy Lalit is sok, a gyerekkorából származó doboz fogadja a szobájában. Az egyik dolog, amit megtalál egy régi játék, még öccsével hajtogatták kartonpapírból: két ugyanolyan négyoldalú (tetraéder alakú) dobókocka. A négy-négy oldalra 1,2, 3 és * van felrajzolva. Alatta ott hever egy azóta megsárgult lapon a használati utasítás - mindkét kockával kell dobni, az eredményt pedig így kell „számítani” (&-jellel jelöljük, hogy ezt a két számot dobtuk a kockával):
- Két különböző szám dobása esetén a harmadik szám az eredmény (pl. 1&3 = 2, 1&2 = 3)
- Egy szám és a csillag dobása esetén a szám (pl. 2&* = 2)

- Két azonos szám esetén a csillag (pl. 3&3 = *)
A szabályok olvasása közben Lali elmosolyodik és gyorsan átsiet öccséhez elújságolni, hogy szerinte egy Abel-csoportot sikerült megcsinálniuk 8 évesen. Az öcskös – lévén még csak 11. osztályos – értetlenül néz. Mit mondjon Lali, hogy megismertesse (egyébként felettébb értelmes) öccsét a csoport fogalmával és bizonyítsa állítását?

Gyűrű, ferdetest, test

H alaphalmazon adott két művelet: +, *

Gyűrű: + művelettel Abel csoport, a * művelet asszociatív és teljesülnek a disztributív szabályok

Ferdetest: + művelettel Abel csoport, a * művelet asszociatív, létezik * egységeleme, és a * műveletre minden elemnek van inverze kivéve az + egységelemét (!!), és teljesülnek a disztributív szabályok.

Test: olyan ferdetest, ahol a * művelet is kommutatív

1. Az alábbi kétműveletes struktúrák közül melyek alkotnak gyűrűt, melyek ferdetestet, melyek testet?

a, 2^H hatványhalmazon adott két művelet: A+B $= A \cup B$ és A*B $= A \cap B$

Megoldás: (Egyik sem mert az unió műveletre nézve nem Abel csoport, mert:
létezik egységelem $A \cup E = A \;\rightarrow\; E = \phi$
de nem létezik inverz, mert ha $A \neq \phi$, akkor nem létezik A^{-1} melyre $A \cup A^{-1} = \phi$)

b, R alaphalmazon két művelet: a + b = $\sqrt[5]{a^5 + b^5}$ $\quad a * b = 2ab$

Megoldás: Test, mert + Abel csoport:

asszoc: $(a+b)+c = \sqrt[5]{\left(\sqrt[5]{a^5+b^5}\right)^5 + c^5} = \sqrt[5]{a^5+b^5+c^5} = \sqrt[5]{a^5 + \left(\sqrt[5]{b^5+c^5}\right)^5} = a + (b+c)$

kommutatív: $a + b = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = b + a$

egység: $a + e = \sqrt[5]{a^5 + e^5} = a \;\rightarrow\; e = 0$

inverz: $a + a^{-1} = \sqrt[5]{a^5 + \left(a^{-1}\right)^5} = e = 0 \;\rightarrow\; a^{-1} = -a$

A * műveletre nézve az R/{0} halmaz, tehát az alaphalmaz mínusz az + egységeleme, Abel csoport, ahogy azt az 1.c feladatban láttuk.
Teljesülnek a disztributív szabályok (elég az egyiket ellenőrizni, mert kommutatív * művelet):

$(a+b)*c = 2\cdot\left(\sqrt[5]{a^5+b^5}\right)\cdot c = \sqrt[5]{\left(a^5+b^5\right)\cdot(2c)^5} = \sqrt[5]{\left((2ac)^5 + (2bc)^5\right)} = a*c + b*c$

2. Az alábbi kétműveletes struktúrák közül melyek alkotnak gyűrűt, ferdetestet, testet?

a, (R,+,*) (Test) b, (R\{0},+,*) (Egyik sem, nincs + egységelem)
c, (Q,+,*) (Test) d, (Z,+,*) (Komm., egységelemes gyűrű)
e, ($R^{n\times n}$,+,*) (Egységelemes gyűrű)
f, (Nem nulla determinánsú n×n-es mátrixok,+,*) (Egyik sem, nem zárt az +-ra)

g, alaphalmaz: valós számok
$a+b=(a^3+b^3)^{1/3}$ $\quad$ a*b=a*b (Test)

h, alaphalmaz: pozitív valós számok
a+b=a*b $\quad$ $a*b=a^{\lg(b)}$ (Test)

i, alaphalmaz: H hatványhalmaza
A+B=(A\B) $\cup$ (B\A) $\quad$ A*B=A $\cap$ B (Komm., egységelemes gyűrű)