



Digitális Rendszerek (BSc)

2. előadás: Logikai egyenletek leírása II:
Függvény-egyszerűsítési eljárások

Előadó: Vörösházi Zsolt
voroshazi@vision.vein.hu

Jegyzetek, segédanyagok:

■ Könyvfejezetek:

□ <http://www.knt.vein.hu>

-> Oktatás -> Tantárgyak -> Digitális Rendszerek (BSC).

(01_chapter.pdf)

■ Fóliák, óravázlatok .ppt (.pdf)

■ Feltöltésük folyamatosan

2

Függvényminimalizálás

■ Általánosan:

- Függvényminimalizálást a szomszédos mintermek megkeresésével tehetjük meg.
- A szomszédosság megállapítása után egyszerűsítünk.
- Minterm → implikáns (egyszerűsíthető) → príimplikáns (tovább nem egyszerűsíthető)

3

Függvényegyszerűsítési eljárások

- 1.) Algebrai módszer (Boole algebrai azonosságokkal)
- 2.) Kifejtési módszer
- 3.) Grafikus módszer: (Karnough tábla, igazság tábla)
- 4.) Normálformák:
 - DNF: Diszjunktív Normál Forma
 - KNF: Konjunktív Normál Forma
- 5.) Számjegyes minimalizálás: **Quine-McCluskey**

4

1.) Algebrai módszer

- A Boole-algebra azonosságait használjuk fel az egyszerűsítéshez:

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C = \\ &= \bar{A} \cdot C \cdot (\bar{B} + B) + A \cdot C \cdot (\bar{B} + B) = \bar{A} \cdot C + A \cdot C = \\ &= C \cdot (\bar{A} + A) = C \end{aligned}$$

5

2.) Kifejtési módszer:

- Komplexebb függvények esetén egy adott változó értékét először ponálnak, majd negálnak definiáljuk, végül pedig az így kiszámított két logikai kifejezést összeadjuk. Ezáltal leegyszerűsödik a függvényminimalizálási feladat.

6

Példa: kifejtési módszer

- Legyen F_1 függvény a következő:

$$F_1(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C}$$

- Ha $A:=1$

$$\begin{aligned} F_1(1, B, C) &= \cancel{0 \cdot B \cdot \bar{C}} + \cancel{0 \cdot B \cdot C} + 1 \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + 1 \cdot B \cdot \bar{C} \\ &= \bar{B} \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot (B + \bar{B}) = \bar{C} \end{aligned}$$

- Ha $A:=0$

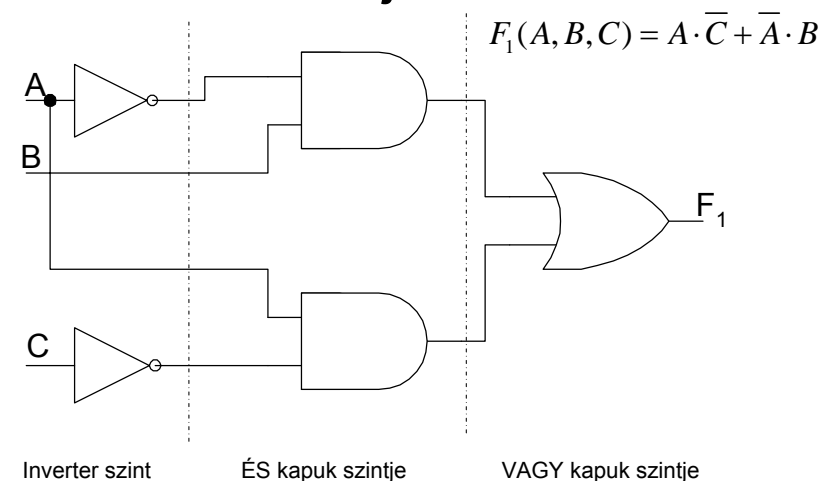
$$\begin{aligned} F_1(0, B, C) &= 1 \cdot B \cdot \bar{C} + 1 \cdot B \cdot C + \cancel{0 \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}} + \cancel{0 \cdot B \cdot \bar{C}} \\ &= B \cdot \bar{C} + B \cdot C = B \cdot (\bar{C} + C) = B \end{aligned}$$

- Végül összeadjuk a kettőt (egyszerűsített alak):

$$\begin{aligned} F_1(A, B, C) &= A \cdot F_1(1, B, C) + \bar{A} \cdot F_1(0, B, C) = \\ &= A \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \end{aligned}$$

7

Az egyszerűsített függvény logikai áramköri realizációja

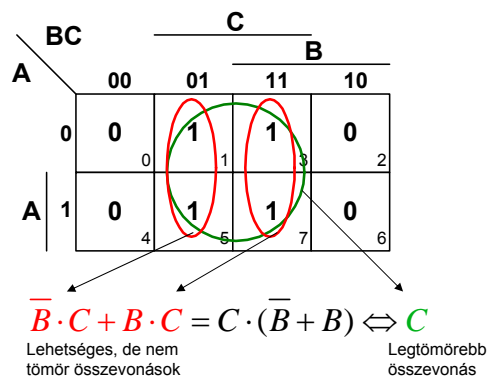


8

3.) Grafikus módszer

- Karnaugh (Veicht) diagramm
 - Tömbösítés szabályainak betartása!

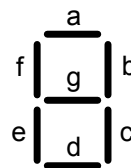
■ Példa:



9

Példa 1: 7-szegmenses dekóder áramkör tervezése

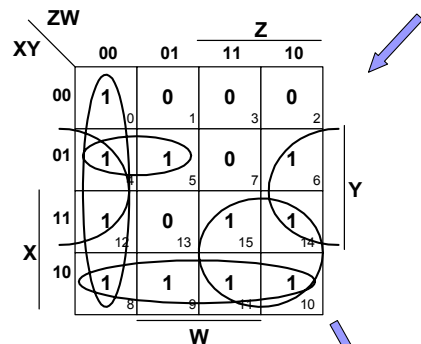
- **Számjegyek** (0-9) és spec. **hexadecimális karakterek** megjelenítésére ()
- nemzetközi elnevezései a szegmenseknek: (a, b, c, d, e, f, g)
- 16 érték (4 biten ábrázolható): $F(X,Y,Z,W)$



10

Példa: 7-szegmenses dekóder tervezése (folyt)

- Igazságtábla (f szegmensre)
- Karnaugh tábla:



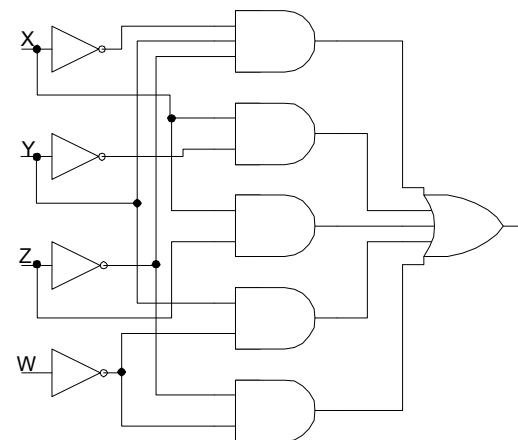
sor	X	Y	Z	W	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

- Kapott f kimeneti függvény:

$$f(X,Y,Z,W) = \bar{Z} \cdot \bar{W} + X \cdot \bar{Y} + Y \cdot \bar{W} + X \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z}$$

11

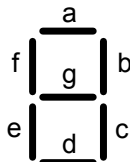
Példa 1: A 7-szegmenses dekóder logikai áramköri realizációja



$$f(X,Y,Z,W) = \bar{Z} \cdot \bar{W} + X \cdot \bar{Y} + Y \cdot \bar{W} + X \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z}$$

12

Példa 2: 7-szegmenses dekóder áramkör tervezése

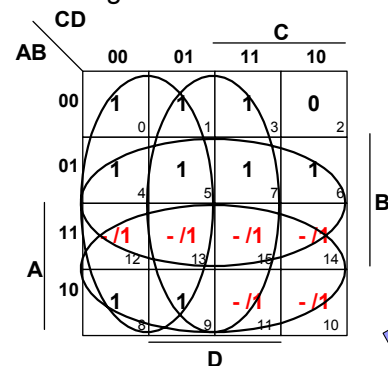


- Csak számjegyeket (0-9) megjelenítésére
 - BCD: Binárisan kódolt decimális számokra
- Nemzetközi elnevezései a szegmenseknek: (a, b, c, d, e, f, g)
 - 10 érték (4 biten ábrázolható): $F(A,B,C,D)$
- **NTSH**: használjunk Nem Teljesen Specifikált Hálózatot (igazságtábla kimeneti függvényértékeiben lehetnek don't care '-' definiált állapotok)
 - Feladat: $F = \sum_{i=0}^{n-1} (0,1,3,4,5,6,7,8,9) \quad x: 10,11,12,13,14,15$

13

Példa 2: 7-szegmenses dekóder tervezése (folyt)

- Igazságtábla (c szegmensre)
- Karnaugh tábla:



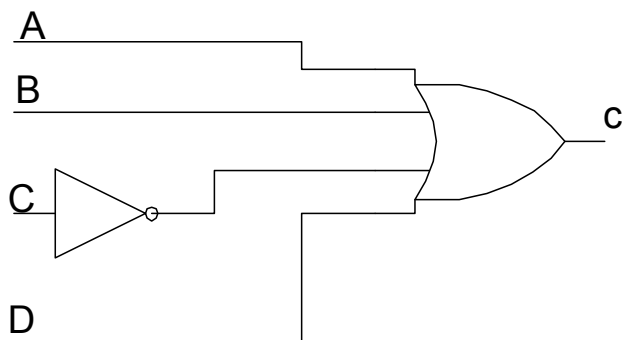
- Kapott c kimeneti függvény:

$$c(A, B, C, D) = A + B + \bar{C} + D$$

sor	A	B	C	D	c
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	-
11	1	0	1	1	-
12	1	1	0	0	-
13	1	1	0	1	-
14	1	1	1	0	-
15	1	1	1	1	-

14

Példa 2: 7-szegmenses dekóder logikai áramköri realizációja (BCD)



$$c(A, B, C, D) = A + B + \bar{C} + D$$

15

4.) Normálformák (NF)

- DNF: Diszjunktív Normál Forma
 - mintermek (szorzattermek) VAGY kapcsolata
- KNF: Konjunktív Normál Forma
 - Maxtermek (összegtermek) ÉS kapcsolata

16

Példa 1: Diszjunktív Normál Forma

■ Legyen: $F = \sum_{i=0}^{2^n-1} (0,1,3,7,11,12,14,15)$

■ Karnaugh tábla:

AB \ CD		C			
		00	01	11	10
A \ B	00	1 ₀	1 ₁	1 ₃	0 ₂
	01	0 ₄	0 ₅	1 ₇	0 ₆
	11	1 ₁₂	0 ₁₃	1 ₁₅	1 ₁₄
	10	0 ₈	0 ₉	1 ₁₁	0 ₁₀

■ Kapott F függvény:

$$F(A,B,C,D) = C \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{D}$$

17

Példa 2: Konjunktív Normál Forma

■ Legyen: $F = \prod_{i=0}^{2^n-1} (2,4,5,6,8,9,10,13)$

■ Karnaugh tábla:

AB \ CD		C			
		00	01	11	10
A \ B	00	1 ₀	1 ₁	1 ₃	0 ₂
	01	0 ₄	0 ₅	1 ₇	0 ₆
	11	1 ₁₂	0 ₁₃	1 ₁₅	1 ₁₄
	10	0 ₈	0 ₉	1 ₁₁	0 ₁₀

■ Kapott F függvény:

$$F(A,B,C,D) = (A + \bar{C} + D) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + C + \bar{D}) \cdot (\bar{A} + B + D)$$

18

5.) Számjegyes minimalizálás (Quine-McCluskey módszer)

■ Szomszédosság szükséges feltételei:

□ Decimális indexek különbsége 2^n kell legyen (szükséges, de nem elégséges feltétel!)

■ Pl: i: 6-2=4 (szomszédos), de i:10-6=4 (nem szomszédos)

□ Bináris súlyuk különbsége 1. (Hamming távolság)

■ Pl: 0111 (7) vagy 1001 (9)

0011 (3) 0111 (7)

jó 0x00 xxx0 rossz

(szükséges, de nem elégséges feltétel!)

□ A nagyobb decimális indexűnek kell nagyobb bináris súllyal szerepelnie! (szükséges, de nem elégséges feltétel!)

	00	01	11	10
00	Y_0	Y_1	Y_3	Y_2
01	Y_4	Y_5	Y_7	Y_6
11	Y_{12}	Y_{13}	Y_{15}	Y_{14}
10	Y_8	Y_9	Y_{11}	Y_{10}

Példa: Számjegyes minimalizálásra (Quine-McCluskey módszer)

■ Oldjuk meg a következő feladatot a Quine-McCluskey módszerrel

■ Ha adott az F függvény DNF alakban:

$$F = \sum_{i=0}^{2^n-1} (0,1,3,7,11,12,14,15)$$

■ Karnaugh tábla:

AB \ CD		C			
		00	01	11	10
A \ B	00	1 ₀	1 ₁	1 ₃	0 ₂
	01	0 ₄	0 ₅	1 ₇	0 ₆
	11	1 ₁₂	0 ₁₃	1 ₁₅	1 ₁₄
	10	0 ₈	0 ₉	1 ₁₁	0 ₁₀

20

Számjegyes minimalizálás Quine-McCluskey módszer I.lépés

- Csoportosítás bináris súlyuk szerint:
 - ahol a kimeneti értékük '1-s' volt.

0	0000	[0 bináris súly]
1	0001	[1 bináris súly]
3	0011	[2 bináris súly]
12	1100	
7	0111	[3 bináris súly]
11	1011	
14	1110	
15	1111	[4 bináris súly]

bináris súly szerinti csoportképzések

21

Számjegyes minimalizálás Quine-McCluskey módszer II.lépés

- II. Összes létező szomszédos kételemű lefedő tömb összevonása (Karnough tábla alapján)

Minterm	Decimális különbség
0,1	(1)
1,3	(2)
3,7	(4)
3,11	(8)
12,14	(2)
7,15	(8)
11,15	(4)
14,15	(1)

		CD			
			C		
AB	00	01	11	10	
00	1	1	1	0	2
01	0	0	1	0	6
11	1	0	1	1	14
10	0	0	1	0	10
		D			

22

Számjegyes minimalizálás Quine-McCluskey módszer III.lépés

- III. Összes létező szomszédos kettesekből képzett **négyelemű** lefedő tömb összevonása (Karnough tábla alapján)

Minterm	Decimális különbség
0,1	(1)
1,3	(2)
3,7	(4)
3,11	(8)
12,14	(2)
7,15	(8)
11,15	(4)
14,15	(1)

		CD			
			C		
AB	00	01	11	10	
00	1	1	1	0	2
01	0	0	1	0	6
11	1	0	1	1	14
10	0	0	1	0	10
		D			

Négyes Összevonás
3,7,11,15 (4,8)

23

Számjegyes minimalizálás Quine-McCluskey módszer IV.lépés

- IV. Prímimplikáns tábla felírása a megmaradt összevonásokkal (III. lépés alapján)

sor		0	1	3	7	11	12	14	15
*	0,1 (1)	*	*						
	1,3 (2)		*	*					
*	12,14 (2)						*	*	
	14,15 (1)							*	*
*	3,7,11,15 (4,8)			*	*	*			*

* : ahol egy adott mintermhez tartozó oszlopban csak egy '*' van, az a sor jelöli a **lényeges prímimplikánst** (ahol az implikáns tovább már nem egyszerűsíthető!). Az a sor nem elhagyható!

24

Számjegyes minimalizálás

Quine-McCluskey módszer V.lépés

- V. Prímimplikánsokból képzett kimeneti függvény megadása (IV. lépés alapján):

□ (0,1):	0000 0001	} →	0000	
□ (12,14):	1100 1110	} →	1100	
□ (3,7,11,15):	0011 0111 1011 1111	} →	0011	A mintermen belüli egyszerre 0/1 tagok kiesnek!

- Tehát a kimeneti minimalizált F függvény a következő:

$$F = 0000 + 1100 + 0011 \Rightarrow F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{D} + C \cdot D$$

25

- Ajánlott: fejezetek végén a feladatok (Exercises) részek áttekintése.

26