TAS SAS számítások

Miski Marcell

2014.12.kvázi.idusa

Nevezetes szögek függvényértékei

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

1 Feladat

Legyen az $A : R^2 \to R^2$ leképezés az origó körüli 30-os forgatás (óramutató járásával ellentétesen).

a) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy az i,j a bázis mindkét térben!

b) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kindulási térben a bázis: $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, a képtérbeli bázis:$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$,

1.1 Megoldás

1.1.1 a

Origó körüli pozitív forgatás mátrixa: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} cos(30°) & -sin(30°) \\ sin(30°) & cos(30°) \end{bmatrix}$

1.1.2 b

A kiindulási térben való áttérés mátrixa: $\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ A képtérben való áttérés mátrixa: $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

Ergo a leképezés mátrixa:

$$\underline{\underline{A'}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} cos(30°) & -sin(30°) \\ sin(30°) & cos(30°) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 4\cdot \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$4\cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 4\cdot \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -32 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}$$

2 Feladat

Legyen az $A : R^3 \rightarrow R^3$ leképezésné a bázisvektorok képei rendre:

$\underline{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{j} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bézis i,j,k a képtérbeli bázis pedig:$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kindulási térben és a képtérben is a bázis az: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorokból áll.

c) Fogalmazd meg, a három dimenziós tér, mely geometriai transzformációjának felel meg ezen leképezés.

2.1 Megoldás

2.1.1 a

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Tehát:

$$\underline{\underline{A'}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 & -2 \\ 4 & -6 & -1 \\ -3/2 & 5/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -7 & -2 \\ -6 & -4 & -1 \\ 5/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2.1.2 b

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}}$$

$$\underline{\underline{A'}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{AS}} = \begin{bmatrix} -10 & -7 & -2 \\ -6 & -4 & -1 \\ 5/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -3 & -62 \\ -8 & -1 & -36 \\ 3 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

2.1.3 c

z-tengely körüli 90°-os forgatás. Óramutató járásával megegyező irányba.

3 Feladat

Legyen az $A : R^2 \to R^2$ leképezés az origó körüli 60-os forgatás (óramutató járásával ellentétesen).

a) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy az $\underline{i}$,$\underline{j}$ a bázis mindkét térben!,

b) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kindulási térben a bázis: $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, a képtérbeli bázis:$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$,

3.1 Megoldás

3.1.1 a

Origó körüli pozitív forgatás mátrixa: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} cos(60°) & -sin(60°) \\ sin(60°) & cos(60°) \end{bmatrix}$

3.1.2 b

A kiindulási térben való áttérés mátrixa: $\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ A képtérben való áttérés mátrixa: $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Ergo a leképezés mátrixa:

$$\underline{\underline{A'}} = \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}} =$$

$$\underline{\underline{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} cos(60°) & -sin(60°) \\ sin(60°) & cos(60°) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & -16 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}$$

4 Feladat

Legyen az $A : R^3 \to R^3$ leképezésné a bázisvektorok képei rendre:

$\underline{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{j} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis i,j,k a képtérbeli bázis pedig:$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kindulási térben és a képtérben is a bázis az: $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorokból áll.

(c) Fogalmazd meg, a három dimenziós tér, mely geometriai transzformációjának felel meg ezen leképezés.

4.1 Megoldás

4.1.1 a

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -7 & 13 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Tehát:

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -7 & 13 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -7/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -1 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4.1.2 b

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{S}}$$

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{AS}} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -1 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -7 & 13 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 482 & -88 \\ -11 & -51/2 & 97/2 \\ -1 & -5/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

4.1.3 c

z-tengely körüli 90°-os forgatás. Óramutató járásával megegyező irányba.

5 Feladat

Legyen az $A : R^3 \to R^2$ leképezés mátrixa a kanonikus bázis pár esetén
$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Add meg a leképezés mátrixát úgy, hogy a kiindulási térben a bázis: $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$
a képtérbeli bázis: $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$,

5.1 Megoldás a

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{\underline{AS}}} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -11 & -17 \\ -3/2 & 3 & 9/2 \end{bmatrix}$$

6 Feladat

Legyen adott a tér egy bázisa (mindkét térben áttérünk ilyenkor):

$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egy leképezés mátrixa ezen bázisban:

$$\underline{\underline{A}}_{[S]} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Addja meg a leképezés mátrixát a kanonikus bázisban (i,j,k)!

6.1 Megoldás

Ebből azt tudjuk, hogy:

$$\underline{\underline{A}}_{[S]} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{\underline{AS}}}$$

Ergo:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\underline{SA}}}_{[S]}\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = 1/7 \cdot \begin{bmatrix} 16 & -1 & -4 \\ 59 & -5 & -111 \\ -5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$