



Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Szekvenciális adatszerkezetek

4. előadás



Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Tömb



Tömbök – ADT

- Definíció
 - Az E alaptípusú k ($k \geq 1$) dimenziós T tömbtípus
 - Legyen $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$ egy indexhalmaz, ahol $\forall j \in [1, k]: I_j = [1, n_j]$ - a kezdőérték lehetne m_j is.
 - Az $A \in T$ tömbnek $N = n_1 * n_2 * \dots * n_k$ eleme van $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$
 - Mindig van egy $f: I \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ egy-egy értelmű leképezés
 - Jelölés
 - $A[i_1, i_2, \dots, i_k]$ a tömbnek az i_1, i_2, \dots, i_k indexek által azonosított eleme



Tömbök – ADT

- Invariáns is adható – speciális megszorítás
 - Példa: szimmetrikus, alsó Δ , ritka, stb.
- Műveletek
 - Indexelés: az i_1, i_2, \dots, i_k indexhez tartozó $A[i_1, i_2, \dots, i_k]$ elem kiválasztása
 - Elemmódosítás – értékkadás: $A[i_1, i_2, \dots, i_k] := a$
 - Értékkadás $A := B$
- Elnevezés
 - Vektor: $k = 1$
 - Mátrix: $k = 2$

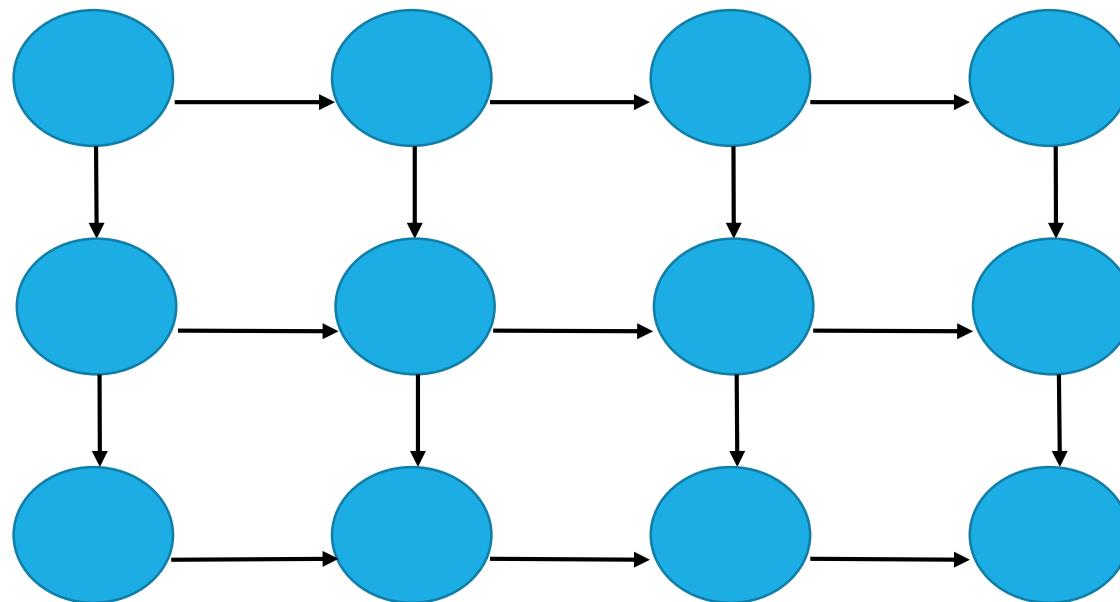


Tömbök – ADS

- Nem kötelező szerkezetet (rákövetkezést) definiálni az elemek között
- Elfogadott a köv_j reláció bevezetése: $\forall j \in [1, k]$ -ra
 - $\text{köv}_j(A[i_1, \dots, i_j, \dots, i_k]) = A[i_1, \dots, i_{j+1}, \dots, i_k],$
ha $i_j < n_j$, egyébként köv_j nem definiált.
 - Egy belső elemnek minden dimenzióban van rákövetkezője

Tömbök – ADS

- A legalább 2 dimenziós tömböt ortogonális adatszerkezetnek nevezik.
- $k = 2$ -re a gráf:



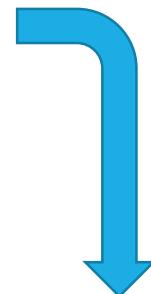
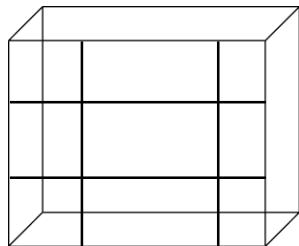


Reprezentáció

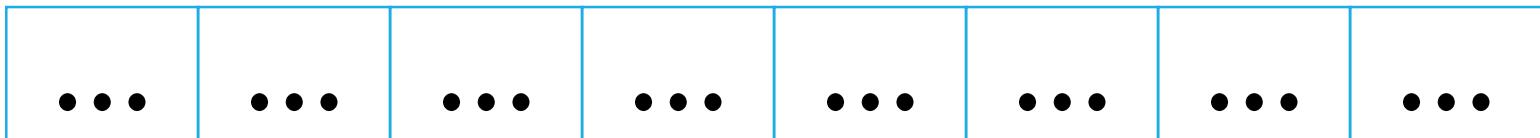
- Tömbök aritmetikai ábrázolása:
- Egy k dimenziós tömböt szeretnénk elhelyezni egy alkalmas méretű egydimenziós tömbben (vektorban), és megadjuk a leképezés címfüggvényét.
- Az elhelyezés – általában
 - sorfolytonos (SF)
 - oszlopfolytonos (OF)

Reprezentáció

- Aritmetikai ábrázolás
 - Tömb

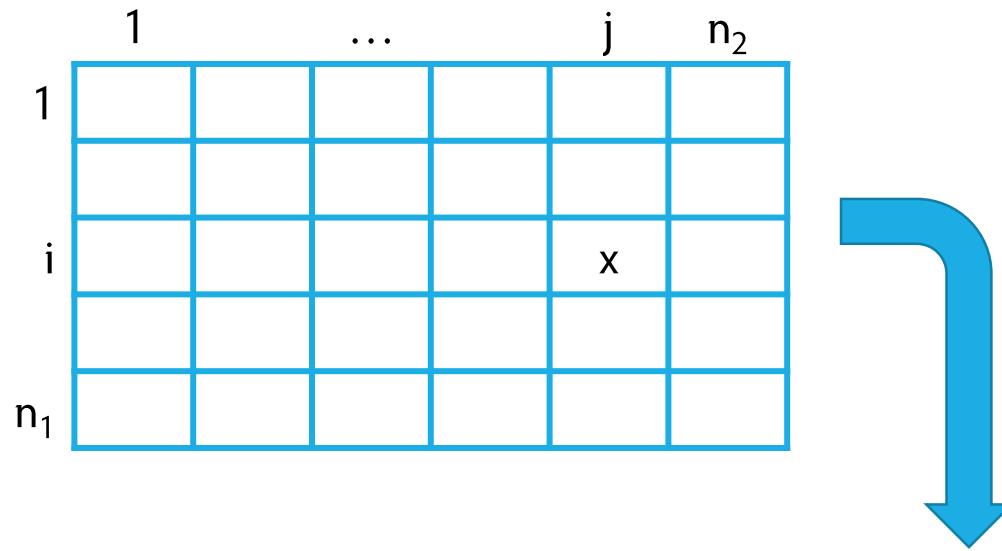


- Leképezés



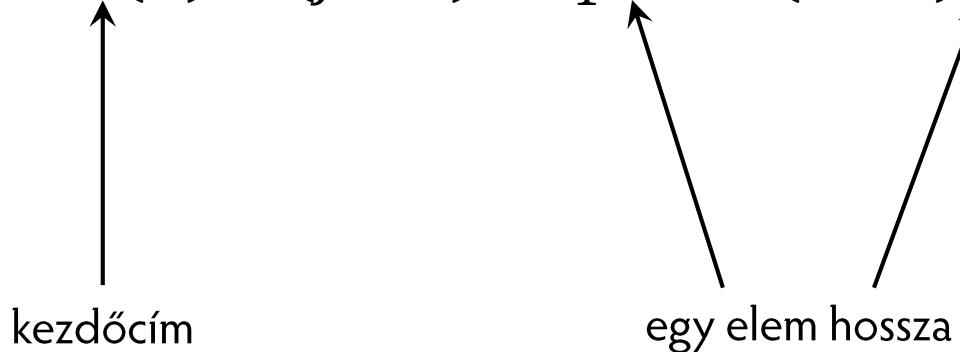
Reprezentáció

- Mátrix elhelyezése vektorban



Reprezentáció

- Indexfüggvény: $\forall i \in [1, n_1], \forall j \in [1, n_2]$
 - SF: $\text{ind}(A[i, j]) = (i - 1) * n_2 + j$
 - OF: $\text{ind}(A[i, j]) = (j - 1) * n_1 + i$
- Címfüggvény: $\forall i \in [1, n_1], \forall j \in [1, n_2]$
 - SF: $\text{cím}(A[i, j]) = \text{cím}(A) + (i - 1) * n_2 * h + (j - 1) * h$
 - OF: $\text{cím}(A[i, j]) = \text{cím}(A) + (j - 1) * n_1 * h + (i - 1) * h$



Reprezentáció

Szokták úgy is tekinteni, hogy a mátrixnak m sora és n oszlopa van

- **Indexfüggvény:** $\forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n]$
 - SF: $\text{ind}(A[i, j]) = (i - 1) * n + j$
 - OF: $\text{ind}(A[i, j]) = (j - 1) * m + i$
- **Címfüggvény:** $\forall i \in [1, m], \forall j \in [1, n]$
 - SF: $\text{cím}(A[i, j]) = \text{cím}(A) + (i - 1) * n * h + (j - 1) * h$
 - OF: $\text{cím}(A[i, j]) = \text{cím}(A) + (j - 1) * m * h + (i - 1) * h$





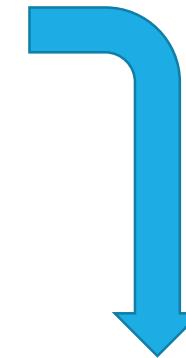
Reprezentáció

- Az R invariáns leggyakrabban a tömb alakját módosítja
 - Például megadja a 0 elemek helyét, és a nem-nulla elemek határozzák meg a tömb speciális alakját.
- Konvenció
 - a gyakran szereplő elemeket (ez általában a 0) is tároljuk egy példányban az egy dimenziós tömbben, és az erre vonatkozó hivatkozást beépítjük a címfüggvénybe

Reprezentáció

- Tridiagonális mátrix

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	0	0	0	0			
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	0	0	0			
0	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	0	0			
0	0	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	0			
0	0	0	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$a_{5,6}$...		
				...				

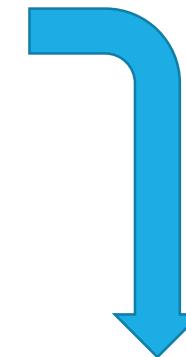


$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$a_{5,6}$...			

Reprezentáció

- Tridiagonális mátrix – „0” elem tárolásával

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	0	0	0	0				
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	0	0	0				
0	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	0	0				
0	0	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	0				
0	0	0	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$a_{5,6}$...			
				...					



0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$a_{5,6}$...	
---	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----	--



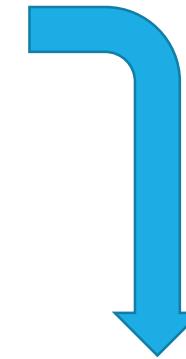
Reprezentáció

- Ha $|i - j| \leq 1$, akkor:
 - $\text{ind}(A[i, j]) = (i - 1) * 3 - 1 + \begin{cases} 1, & \text{ha } i > j \\ 2, & \text{ha } i = j \\ 3, & \text{ha } i < j \end{cases}$
- Ha a „0” elemet is tároljuk, a vektor elején
 - $\text{ind}(A[i, j]) = \begin{cases} (i - 1) * 3 + 1, & \text{ha } i = j + 1 \\ (i - 1) * 2 + 1, & \text{ha } i = j \\ i * 3, & \text{ha } i + 1 = j \\ 1, & \text{különben} \end{cases}$

Reprezentáció

- Alsó háromszög mátrix

$a_{1,1}$	0	0	0	0				
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	0	0	0				
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	0	0				
$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	0				
$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$...			
			...					



$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$...	0
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----	---



Reprezentáció

- Elemeinek száma $m = n * \frac{(n+1)}{2} + 1$
- $\text{ind}(A[i, j]) = \begin{cases} i * \frac{(i-1)}{2} + j, & \text{ha } i \geq j \\ n * \frac{(n+1)}{2} + 1, & \text{ha } i < j \end{cases}$

Hézagosan kitöltött mátrixok

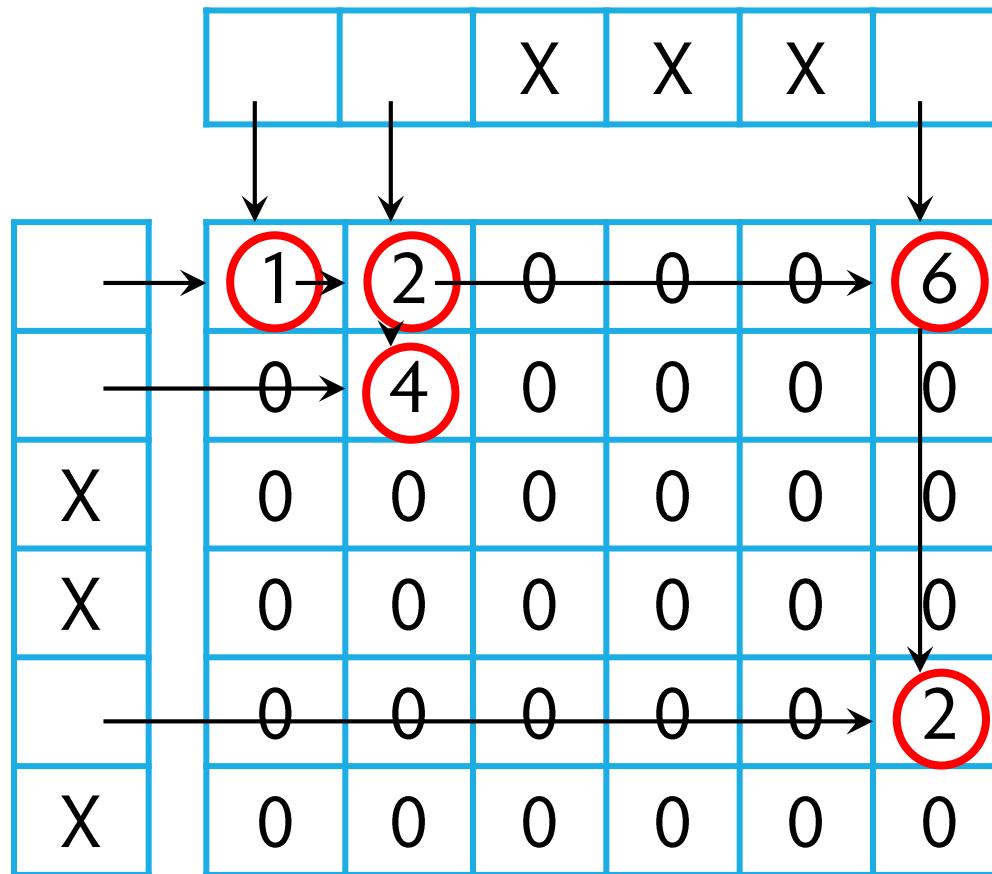
1	2	0	0	0	6
0	4	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0

háromsoros reprezentáció

↓

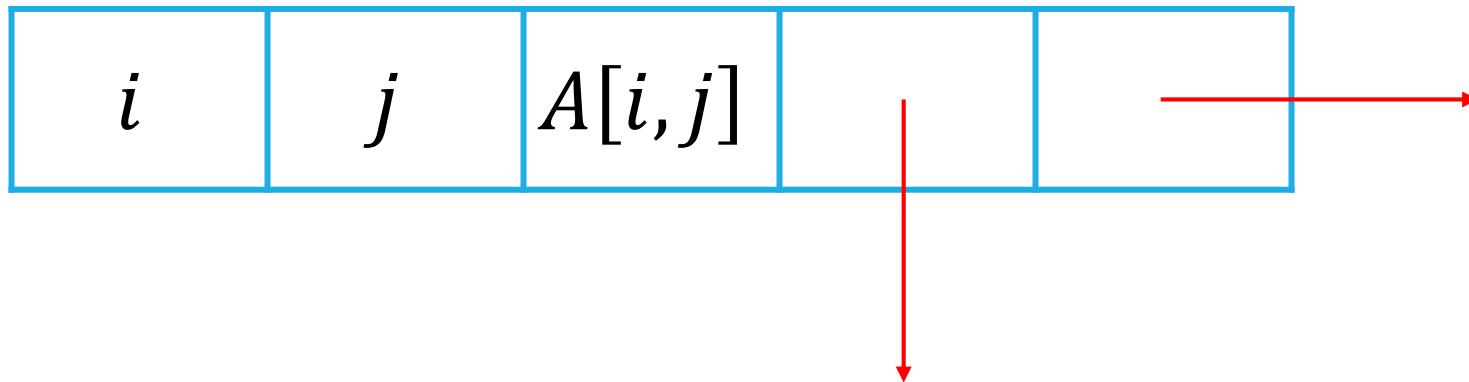
sorindex	1	1	1	2	5
oszlopindex	1	2	6	2	6
érték	1	2	6	4	2

Láncolt, illetve vegyes ábrázolás

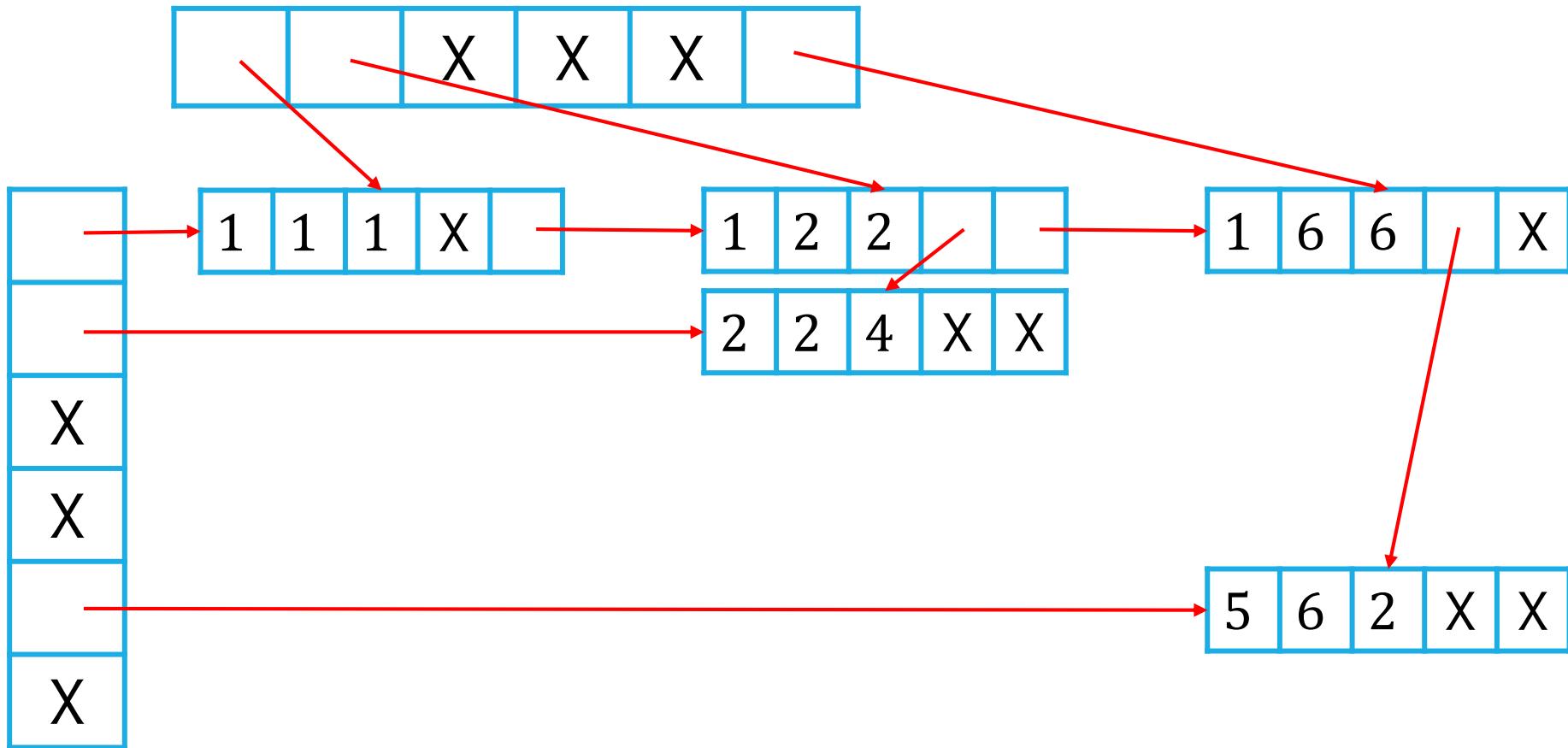


Láncolt, illetve vegyes ábrázolás

- Egy elem ábrázolása:



Láncolt, illetve vegyes ábrázolás





Láncolt, ill. vegyes ábrázolás:

- Mikor előnyös?
 - a mátrix legyen $m * n$ -es
 - a nem nulla elemek száma k
 - legyen egy érték helyfoglalása h byte
 - egy mutató helyfoglalása p byte
 - egy index helyfoglalása i byte
- A számítás
 - $(h + (2 * i) + (2 * p)) * k + (m + n) * p \ll m * n * h$



Feladatok

- Gyakorlásnak – gondolkodásra
 - Írjuk meg azt az eljárást (függvényt), ami visszaadja $A[i, j]$ értékét
 - Írjuk meg azt az eljárást, ami módosítja $A[i, j]$ értékét! (nulláról nem nullára, nem nulláról nullára)
 - Adjunk össze két ritka mátrixot!
 - Adjuk meg a szimmetrikus mátrix aritmetikai ábrázolását!



Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Szekvenciális adatszerkezetek



Szekvenciális adatszerkezetek

- Definíció: A szekvenciális adatszerkezet olyan $\langle A, R \rangle$ rendezett pár amelynél az $R \subseteq (A \times A)$ reláció tranzitív lezártja teljes rendezési reláció
- Az $R \subseteq (A \times A)$ reláció tranzitív lezártja az a reláció, mely tranzitív, tartalmazza R -et, és a lehető legkevesebb elemet tartalmazza
- Megadása:
 1. $R' = R \cup (R \circ R)$
 2. Ha $R \neq R'$, akkor folyt. 1.-nél, különben $R' = R_T$, a tranzitív lezárt



Szekvenciális adatszerkezetek

- Szekvenciális adatszerkezetben az egyes adataelemek egymás után helyezkednek el
 - Van egy logikai sorrendük
- Az adatok között egy-egy jellegű a kapcsolat
 - minden adatalem csak egy helyről érhető el és az adott elemtől csak egy másik látható
- Két kitüntetett elem: az első és az utolsó

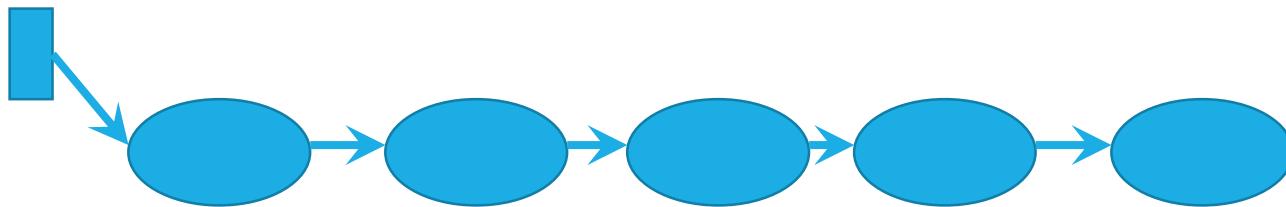


Szekvenciális adatszerkezetek

- Ez egy homogén adatszerkezet, azaz azonos típusú véges adatelemek sorozata
 - Jelölése : $L = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
 - Ha $n = 0$, akkor $L = ()$ az üres lista.
- A láncolt lista olyan adatszerkezet, amelynek minden eleme tartalmaz egy (vagy több) mutatót (hivatkozást) egy másik, ugyanolyan típusú adatelemre - ez a „következő” elem logikailag
- A lánc első elemének a címét a lista feje tartalmazza
A listafej nem tartalmaz információs részt
- A lánc végét az jelzi, hogy az utolsó elemben a rákövetkező elem mutatója üres

Az adatszerkezetek osztályozása

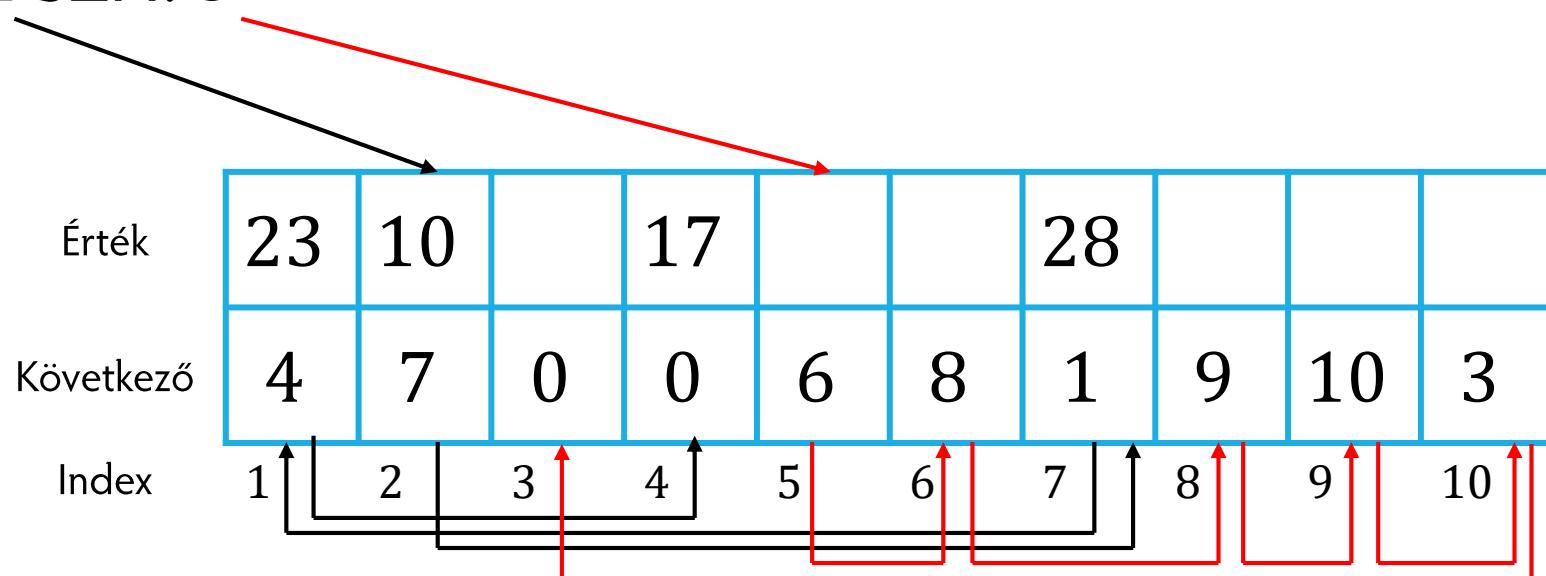
- Intuitív ADT és ADS szint



Végigmehetünk az elemeken egymás után.
Lehetőség van a módosítás, törlés, beszúrás műveletekre

Reprezentációs szint

- Statikus ábrázolás:
tömbben, a logikai sorrendet indexek mutatják, a szabad helyek is listában:
- L: 2 SZH: 5



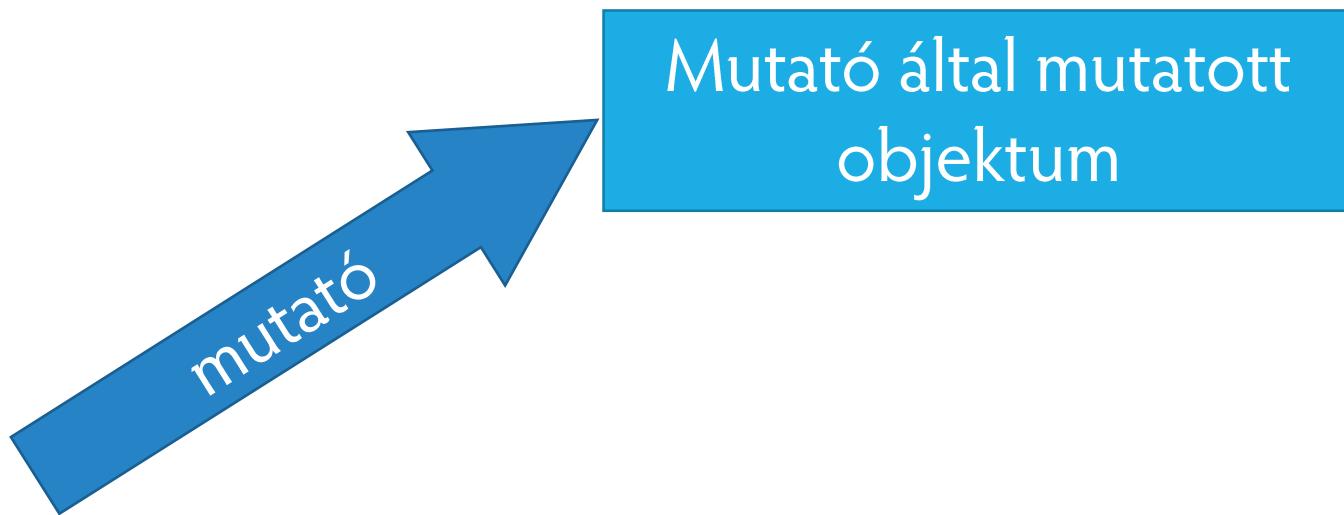


Dinamikus láncolt ábrázolás

- Az adatok száma nem ismert előre.
- Nem tudunk, vagy nem akarunk feleslegesen helyet foglalni az adatoknak.
- A feladat dinamikusan változik.

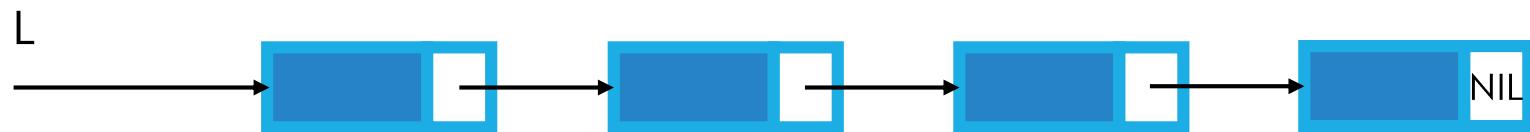


Dinamikus láncolt ábrázolás

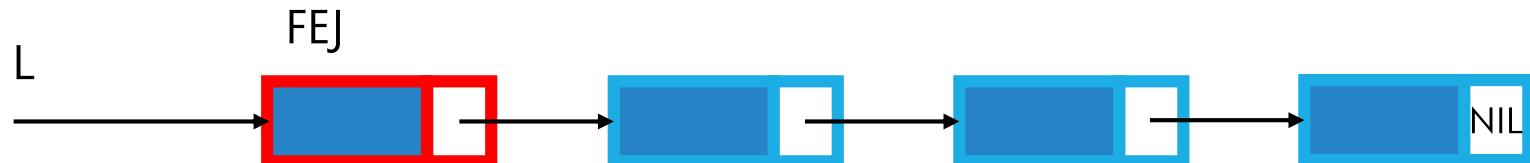


Láncolt ábrázolás

- Egyirányú láncolt lista
 - Fejelem nélkül



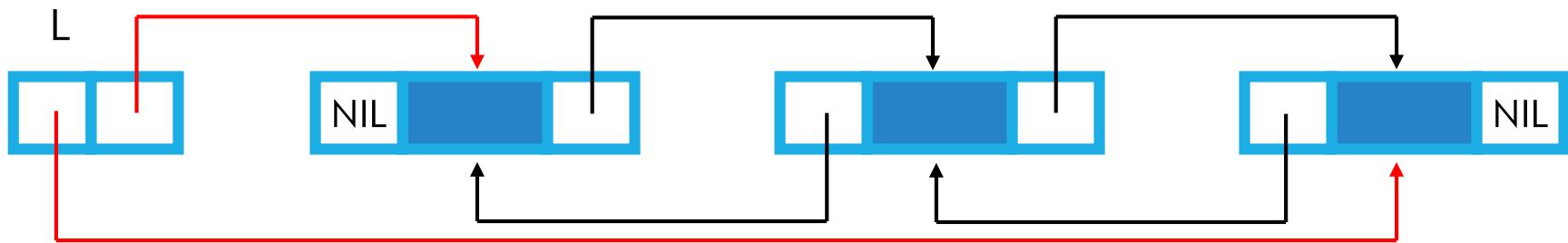
- Fejelemmel: fejelem mindenkor létezik, ha üres a lista, akkor is



- Mindig van egy aktuális elemre mutató is, ez része a megvalósításnak

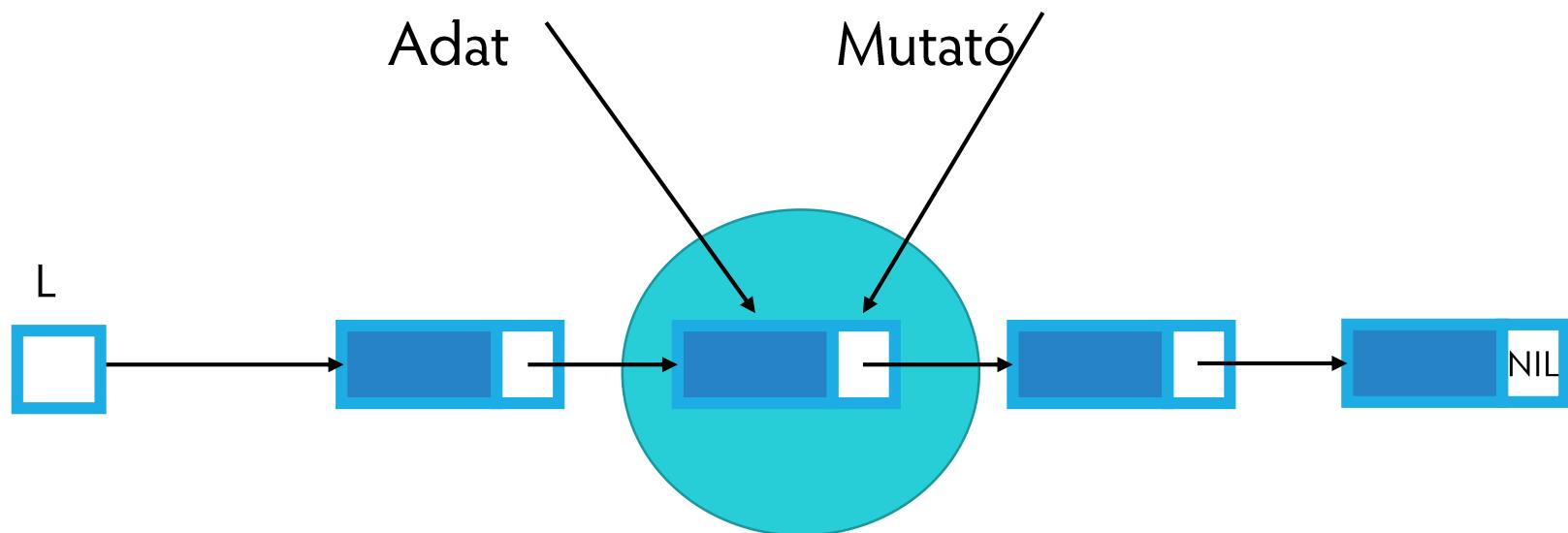
Láncolt ábrázolás

- Kétirányú láncolt lista



Láncolt ábrázolás

- A lista eleme





Egyszerű lista – műveletek

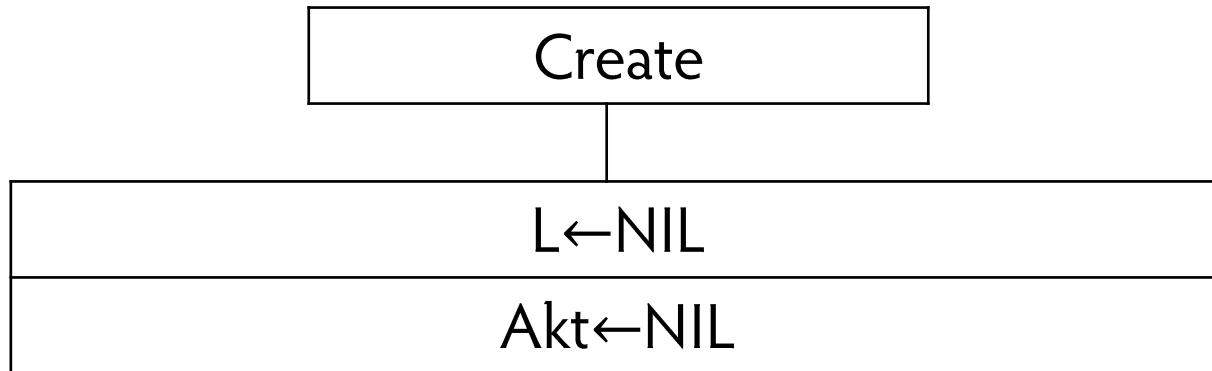
- A Lista típus komponensei:

- L
 - A lista első elemének mutatója,
- Akt
 - A lista aktuális elemének mutatója



Létrehozás

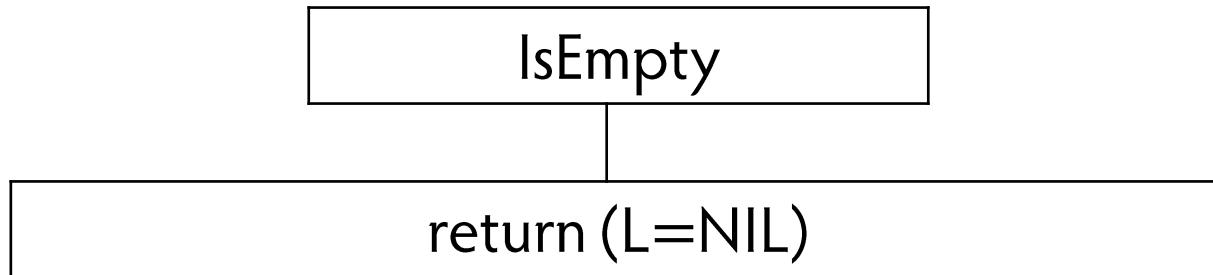
- Üres listát ad vissza



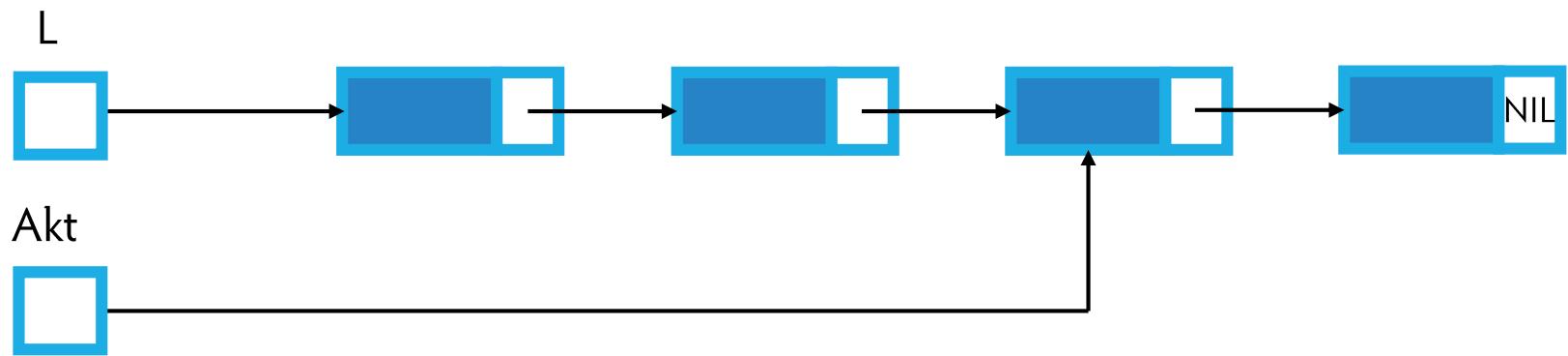


Üres lista lekérdezése

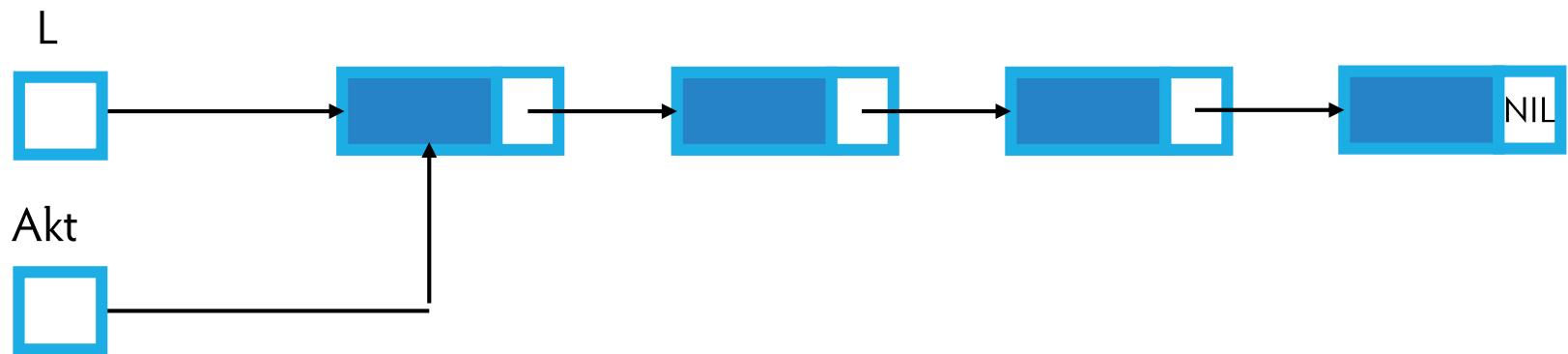
- Logikai értéket ad vissza



Első elemre áll

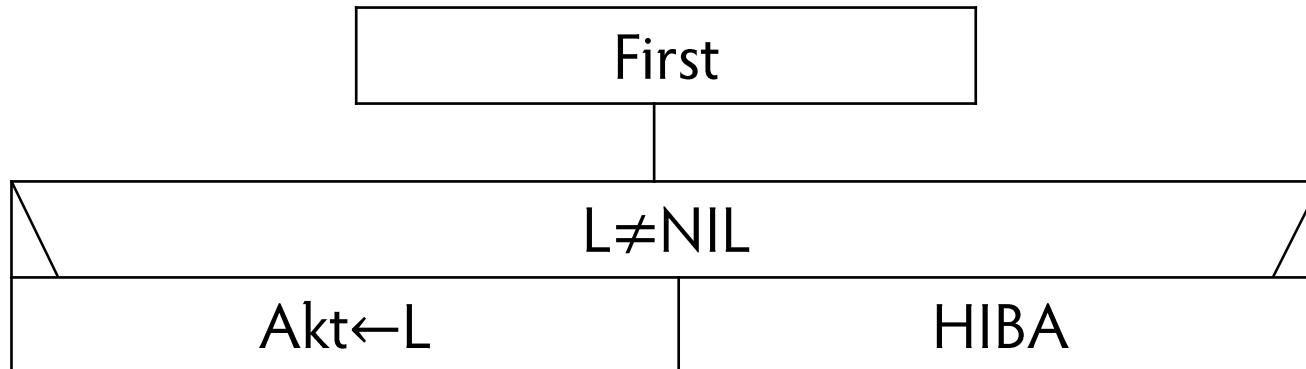


Első elemre áll

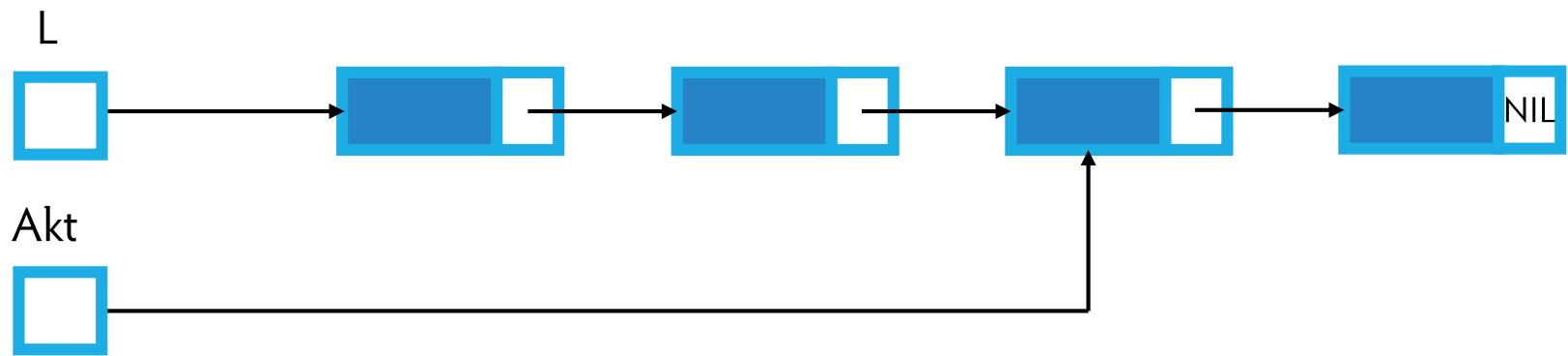


Üres lista lekérdezése

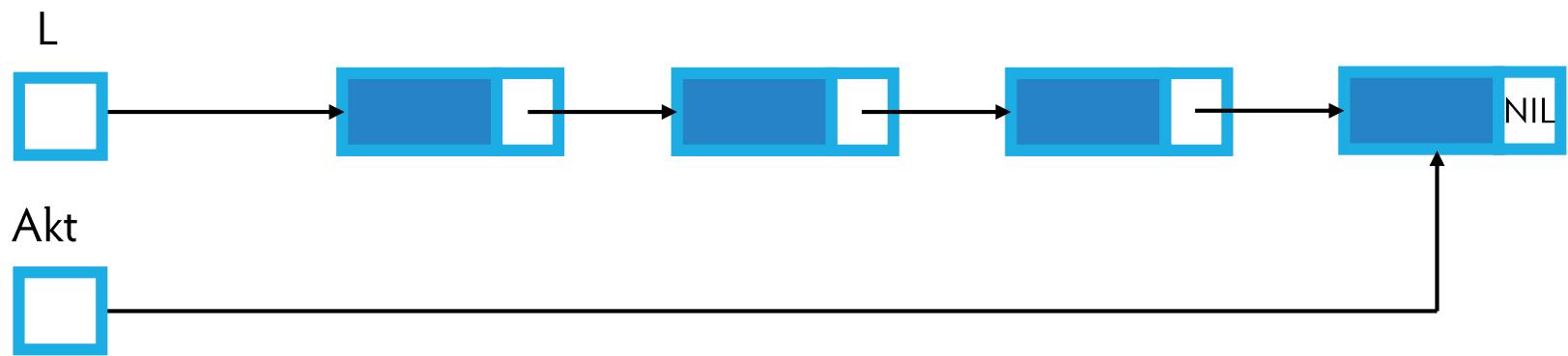
- Üres lista esetén hiba



Következő elemre áll

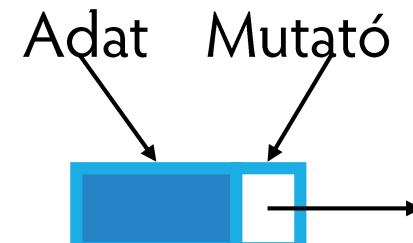
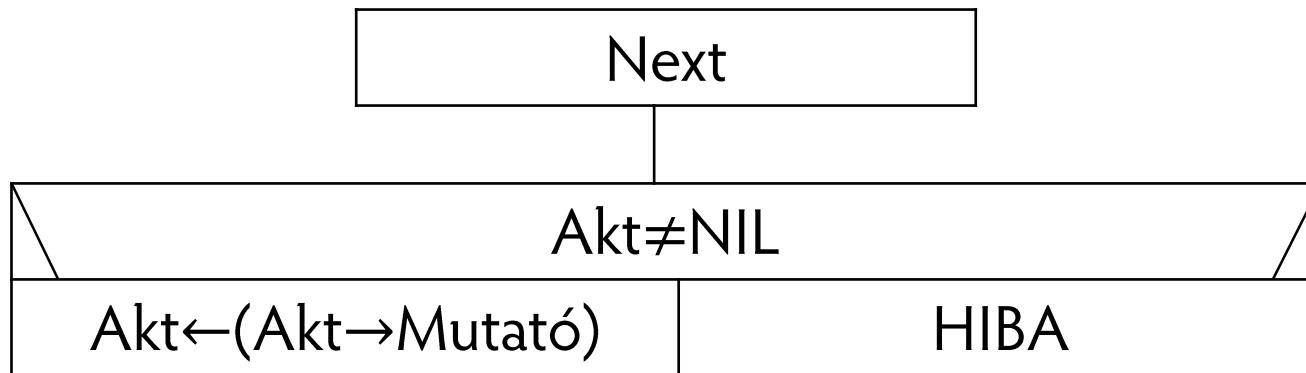


Következő elemre áll



Következő elemre áll

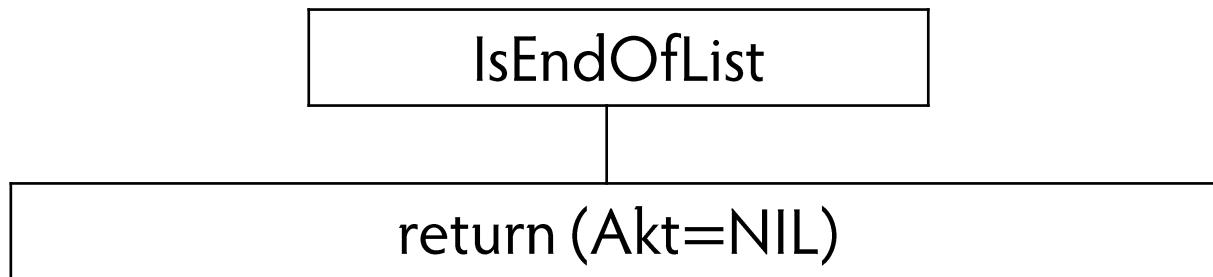
- A lista utolsó elemére kiadott Next hatása $\text{Akt}=\text{NIL}$ lesz





Lista végének lekérdezése

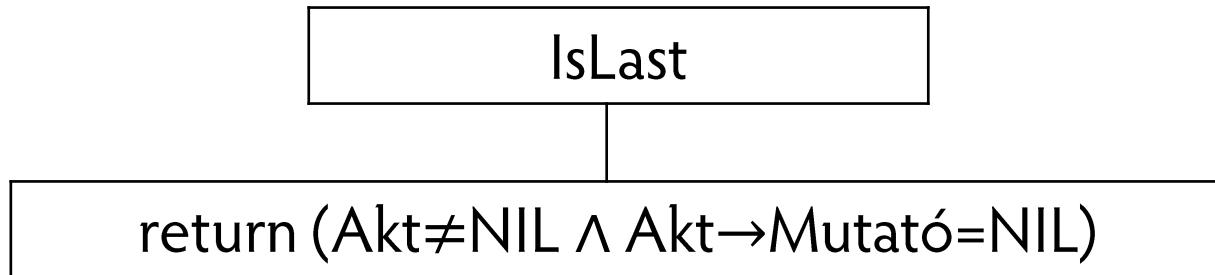
- Logikai értéket ad vissza





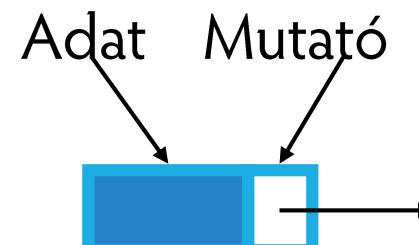
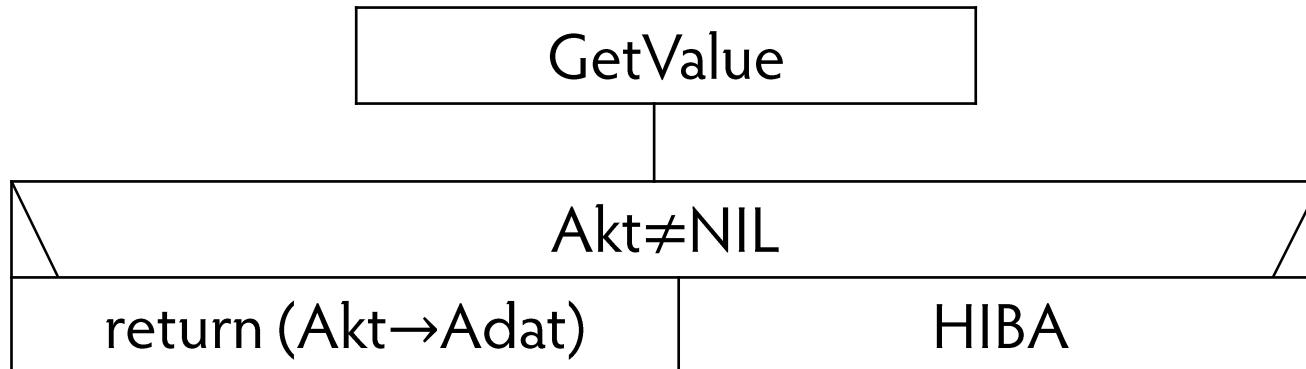
Az aktuális az utolsó elem-e

- Logikai értéket ad vissza



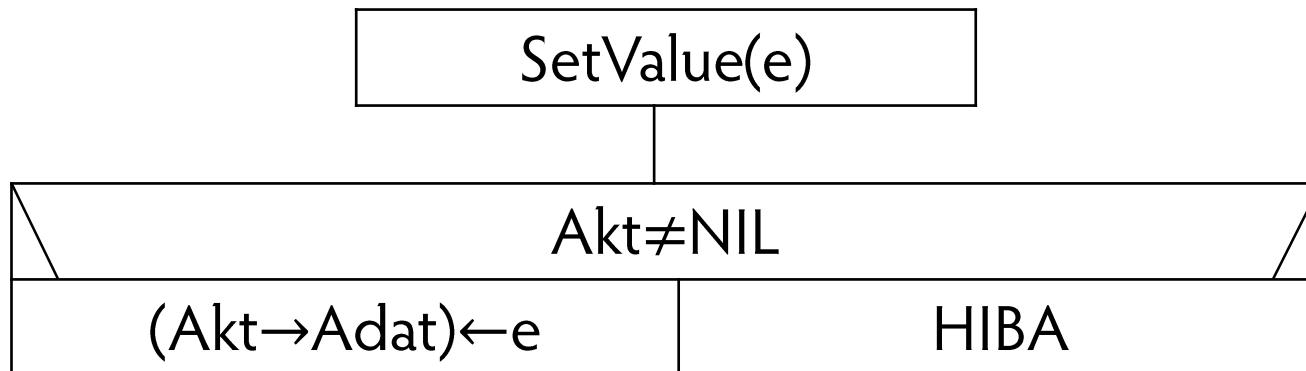
Aktuális elem értéke

- Az aktuális elem értékével tér vissza



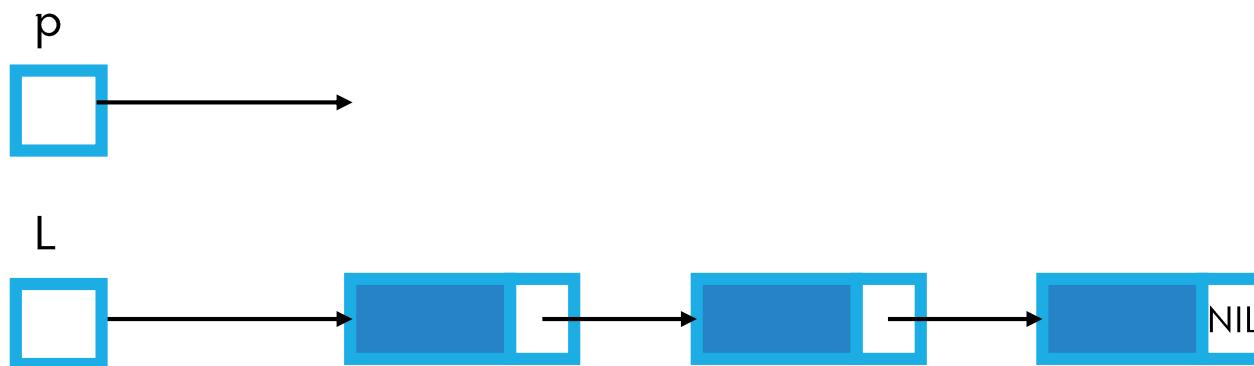
Aktuális elem módosítása

- Az aktuális elem megváltoztatása e -re



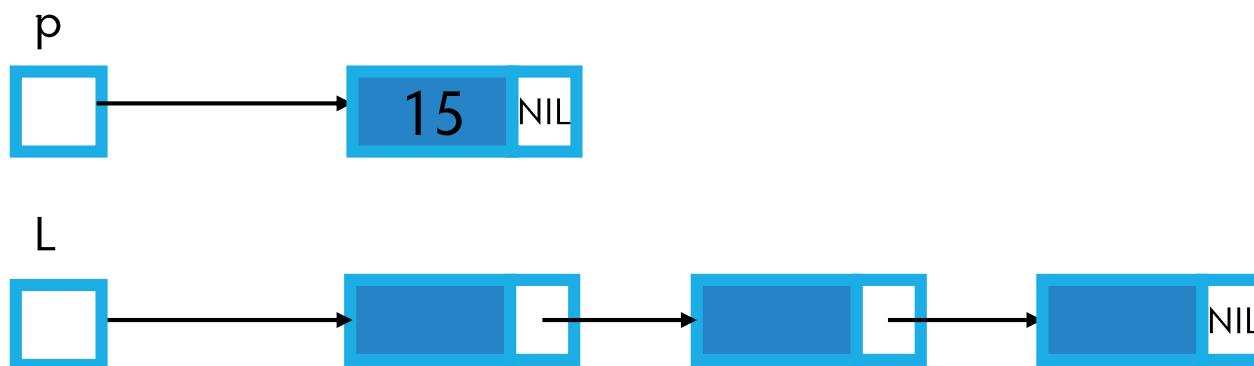
Listaelem beszúrása

- Új listaelem létrehozás és beállítása
 - Deklarálás – p változó, Node típussal



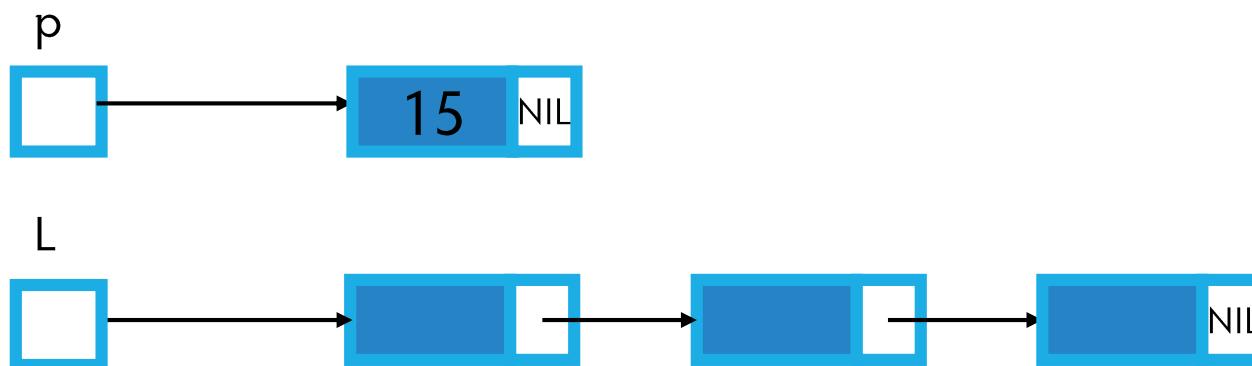
Listaelem beszúrása

- Új listaelem létrehozás és beállítása
 - Deklarálás – p változó, Node típussal
 - Létrehozás – new(p)
 - Értékének megadása



Listaelem beszúrása

- Új listaelem létrehozás és beállítása
 - Deklarálás – p változó, Node típussal
 - Létrehozás – new(p)
 - Értékének megadása



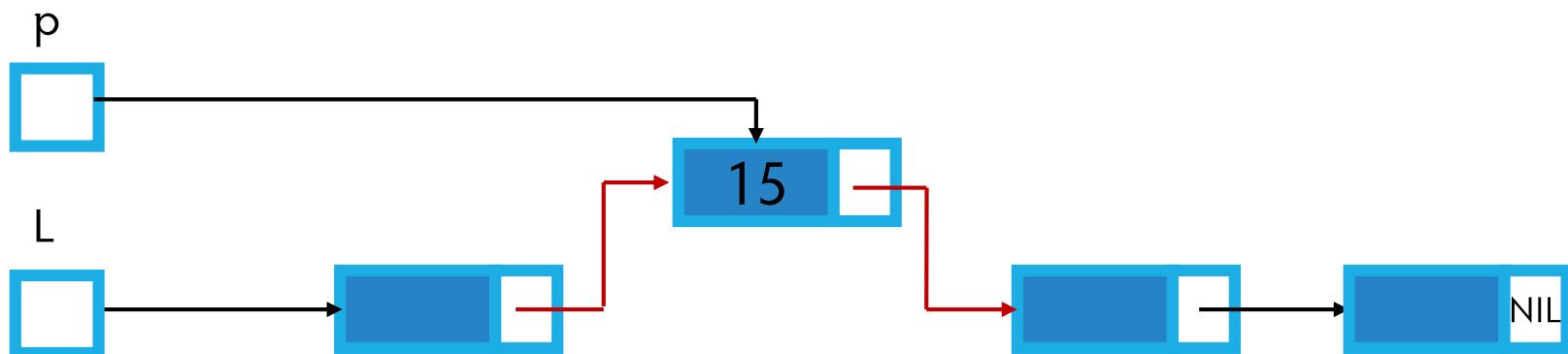
Listaelem beszúrása

- Új listaelem létrehozás és beállítása
 - Deklarálás – p változó, Node típussal
 - Létrehozás – new(p)
 - Értékének megadása
 - Új elem befűzése a láncolatba



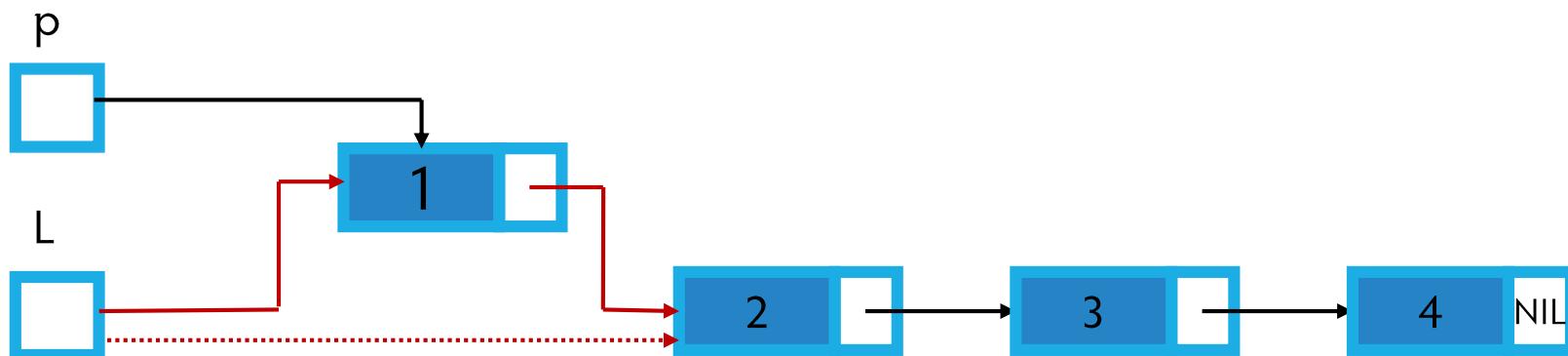
Listaelem beszúrása

- Új listaelem létrehozás és beállítása
 - Deklarálás – p változó, Node típussal
 - Létrehozás – new(p)
 - Értékének megadása
 - Új elem befűzése a láncolatba



Listaelem beszúrása

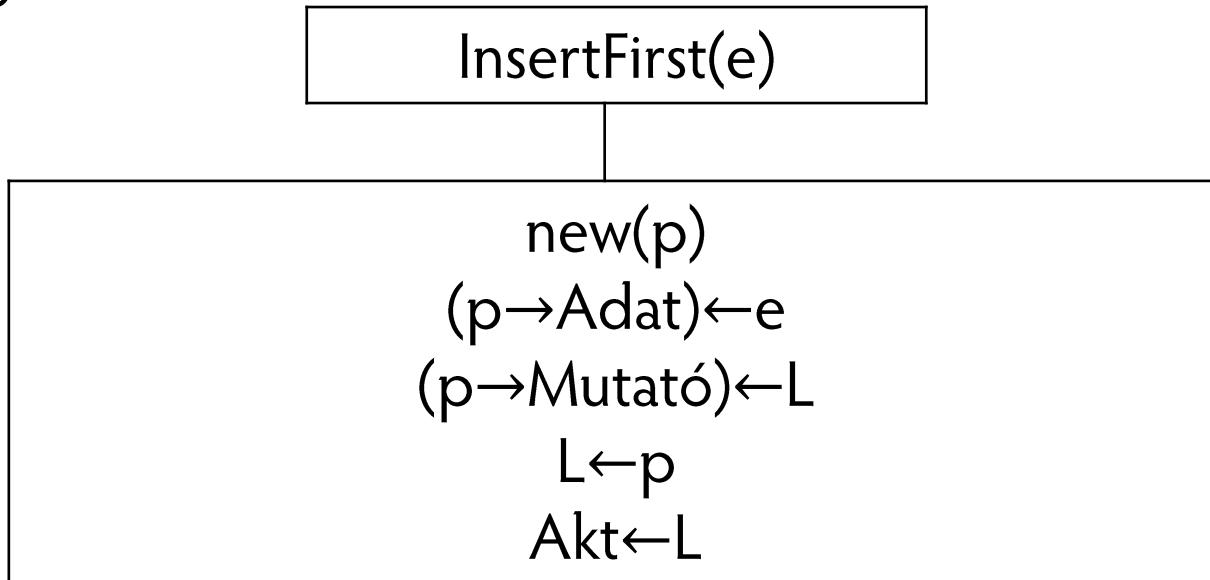
- Beszúrás első elemként
 - Üres és nem üres listára is működik
 - Az Akt mutatót (aktuális elem) az újonnan beszúrtra állítja, ami az első





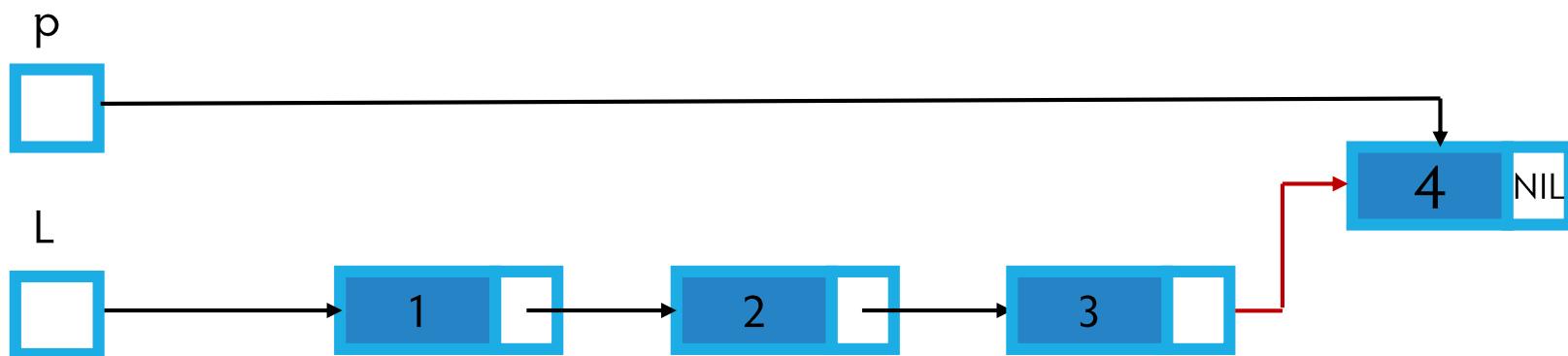
Listaelem beszúrása

- „e” adatelem beszúrása első elemként
 - Üres és nem üres listára is működik
 - Az Akt mutatót (aktuális elem) az újonnan beszúrtra állítja, ami az első



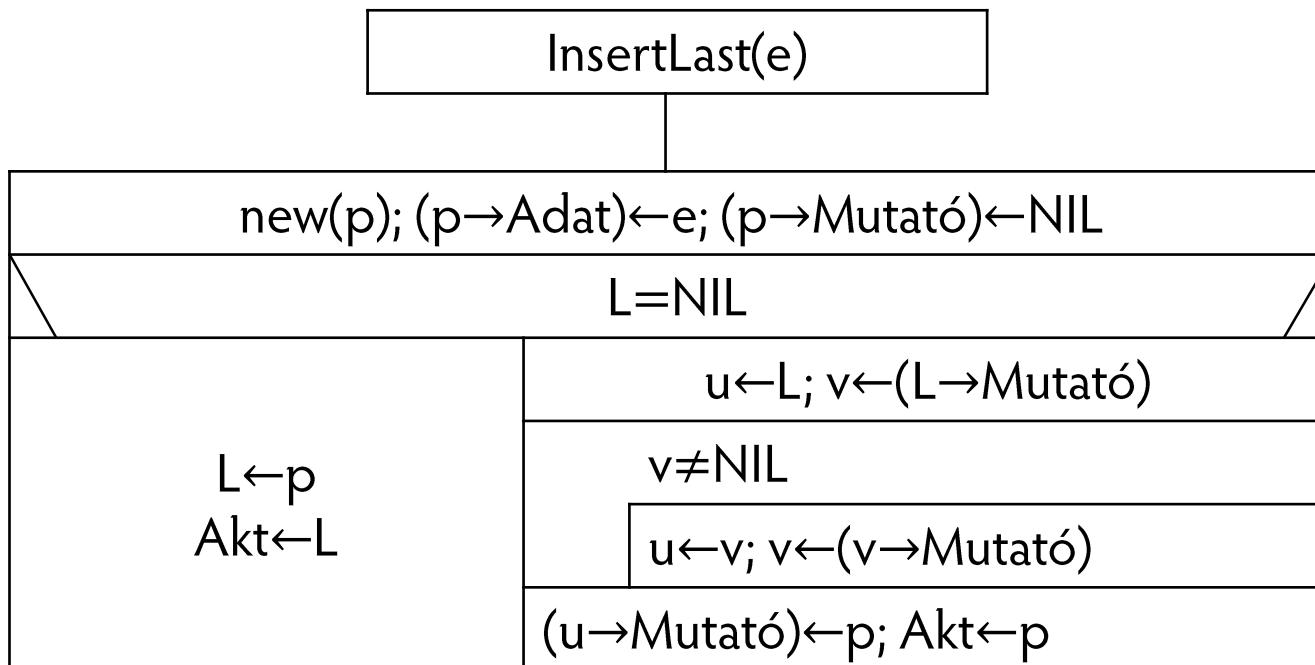
Listaelem beszúrása

- Beszúrás utolsó elemként
 - Üres és nem üres listára is működik
 - Az Akt mutatót (aktuális elem) az újonnan beszúrtra állítja, ami az utolsó



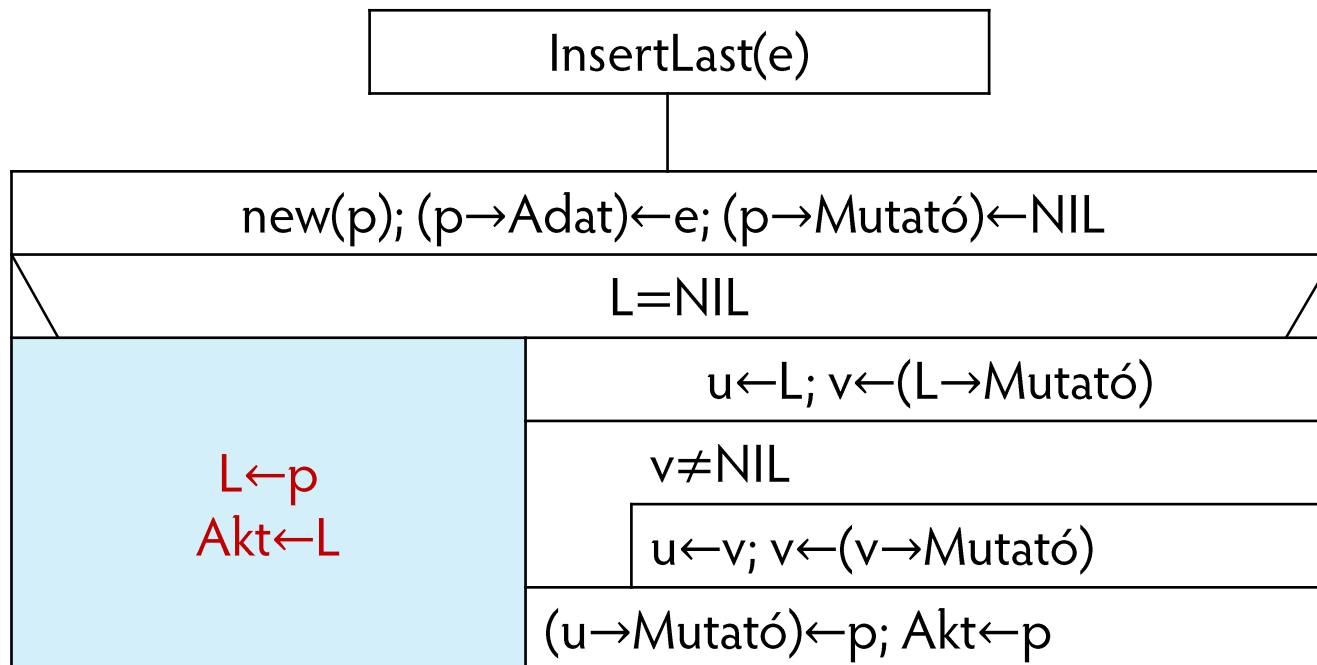
Listaelem beszúrása

- „e” adatelem beszúrása utolsó elemként
 - Üres és nem üres listára is működik
 - Az Akt mutatót (aktuális elem) az újonnan beszúrtra állítja, ami az utolsó



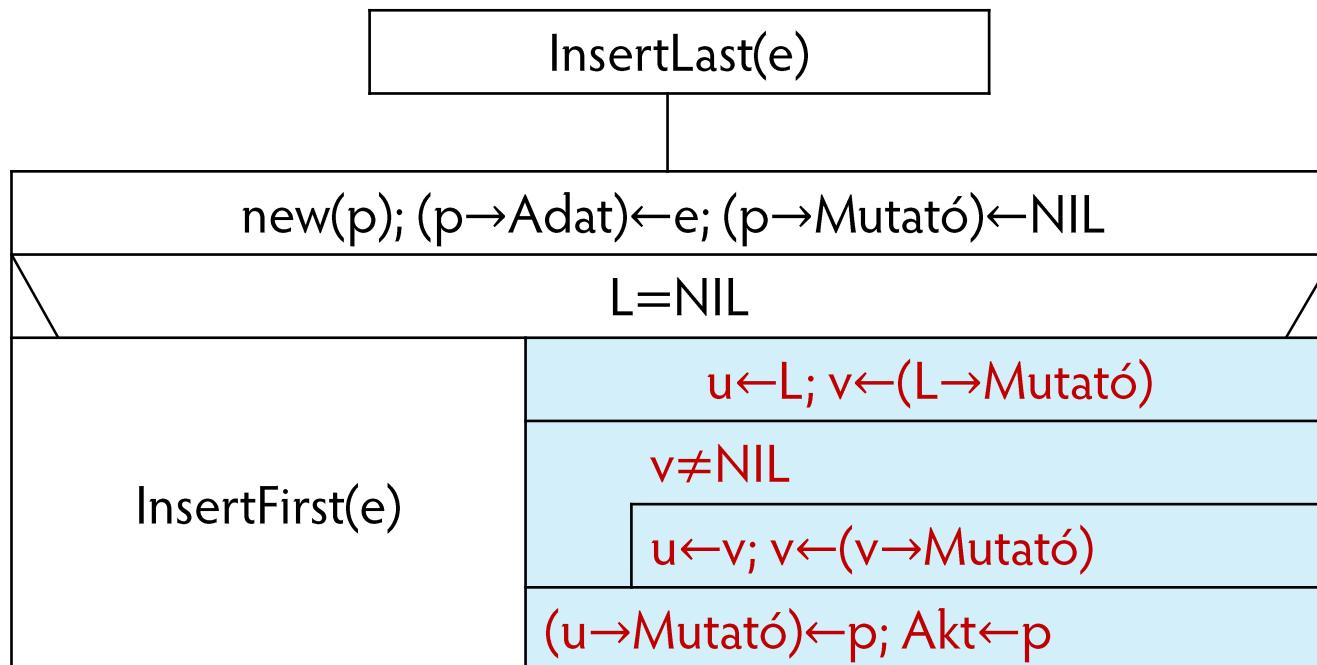
Listaelem beszúrása

- Ha a lista üres
 - Ami egyezik az InsertFirst(e) algoritmusával
 - Azonban itt nem lehet behelyettesíteni, mert az új csomópont már létrejött előbb



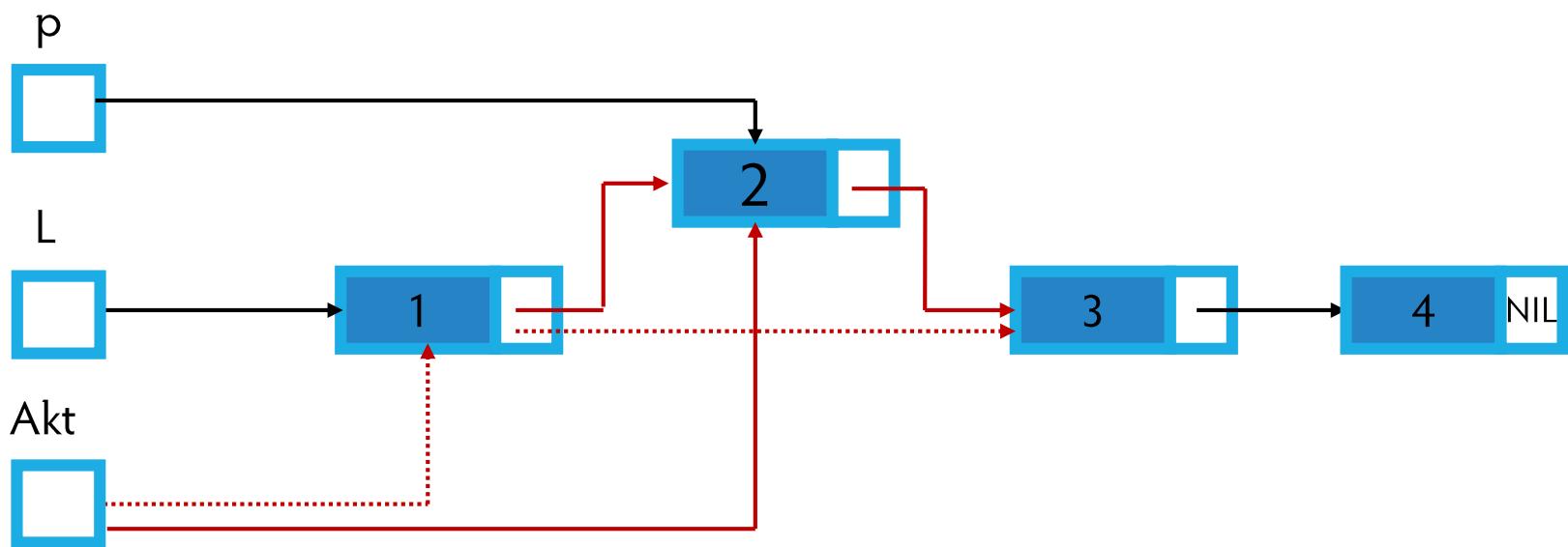
Listaelem beszúrása

- Ha a lista nem üres
 - Meg kell keresni az eredeti lista utolsó elemét
 - Amögé kell beszúrni az új elemet



Listaelem beszúrása

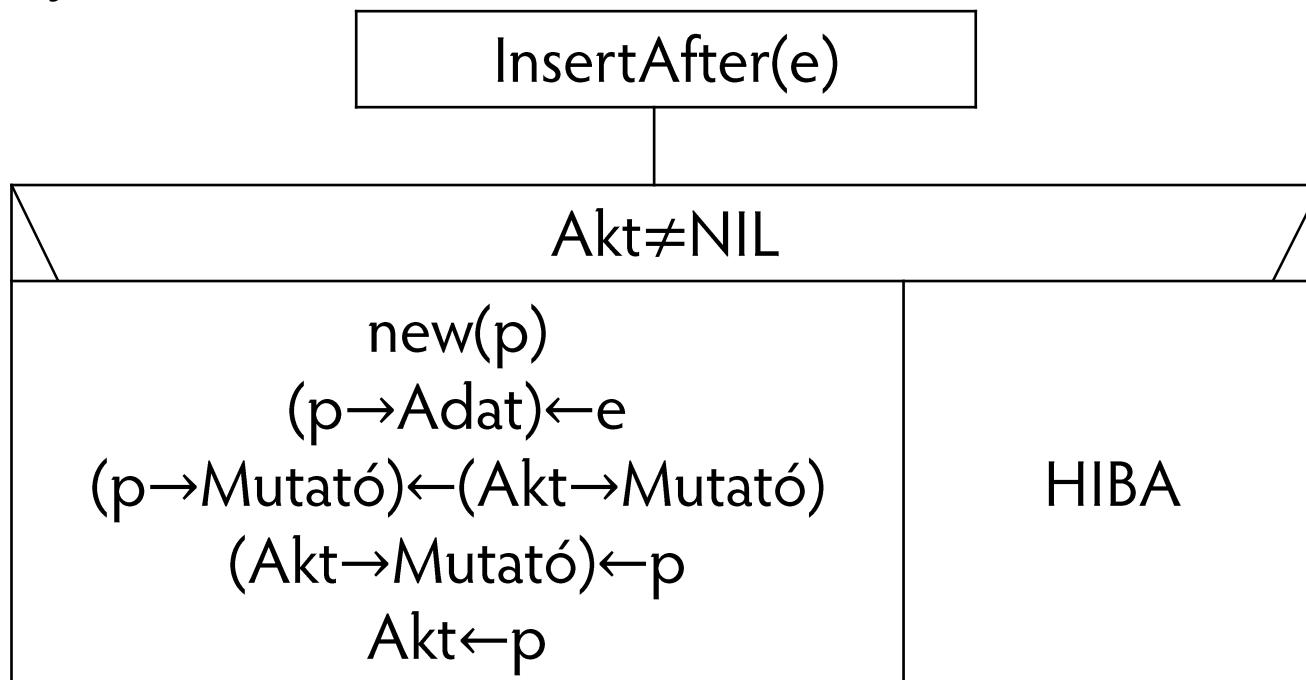
- Beszúrás az aktuális elem után





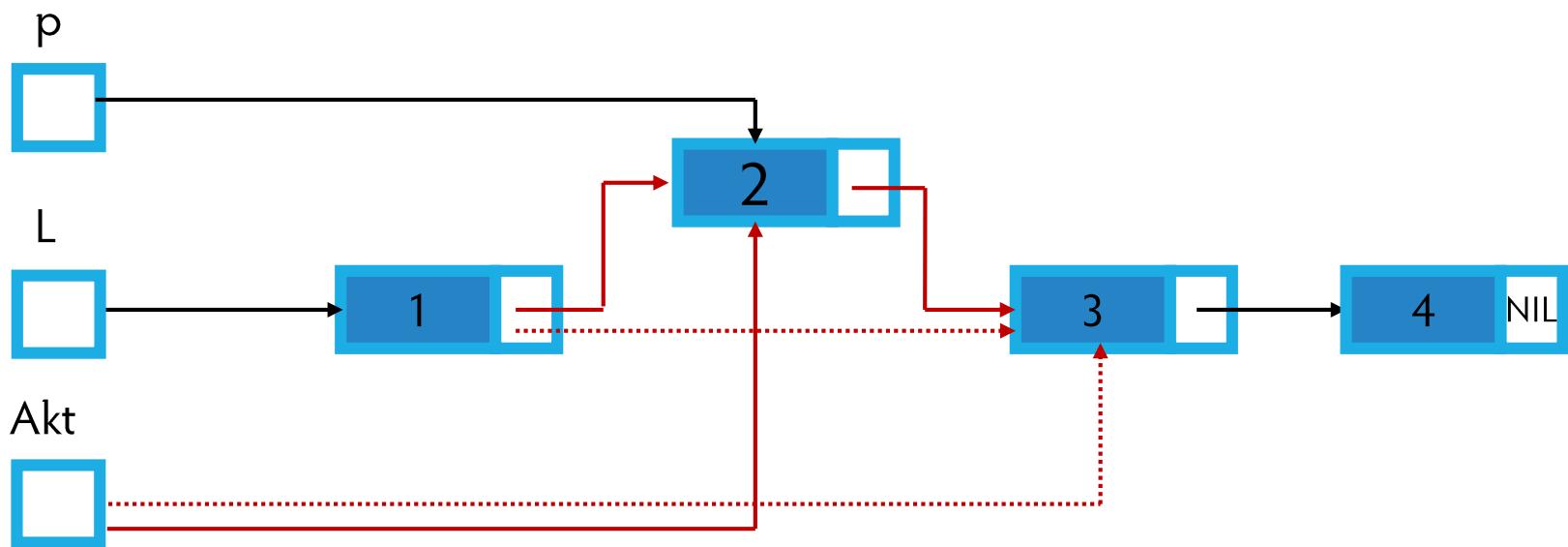
Listaelem beszúrása

- Beszúrás az aktuális elem után
 - Ha nincsen aktuális elem, az hiba
 - Az újonnan beszúrt lesz az aktuális elem



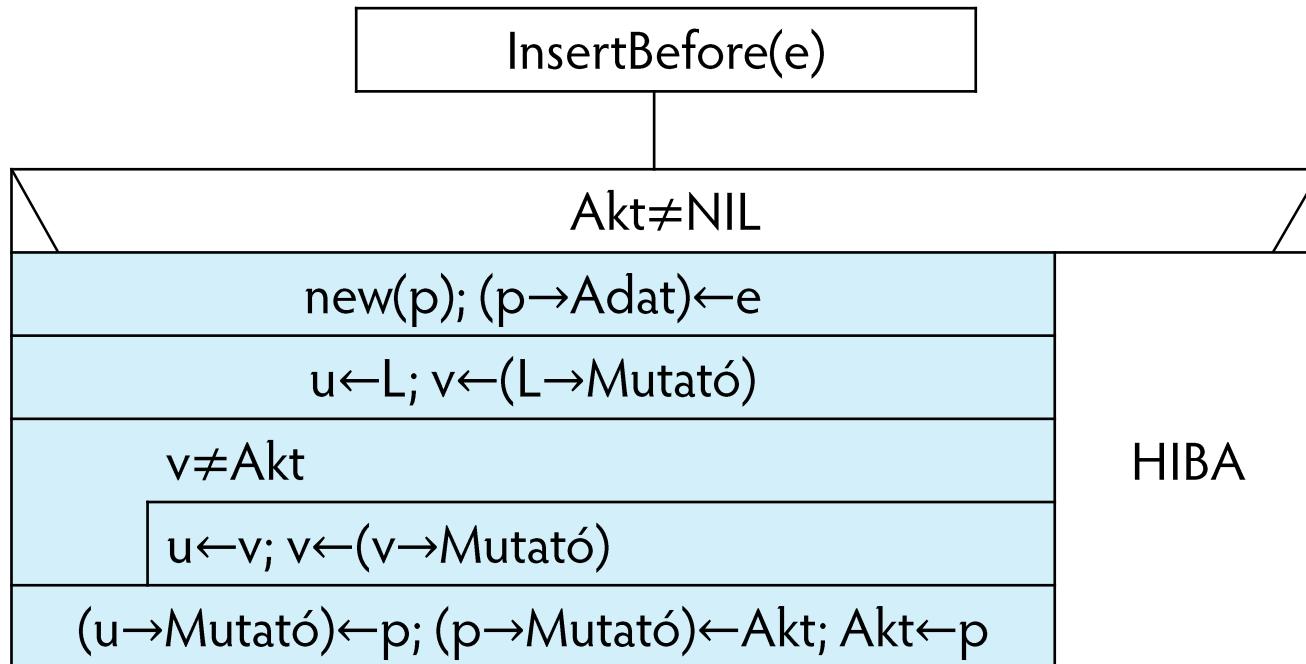
Listaelem beszúrása

- Beszúrás az aktuális elem elő



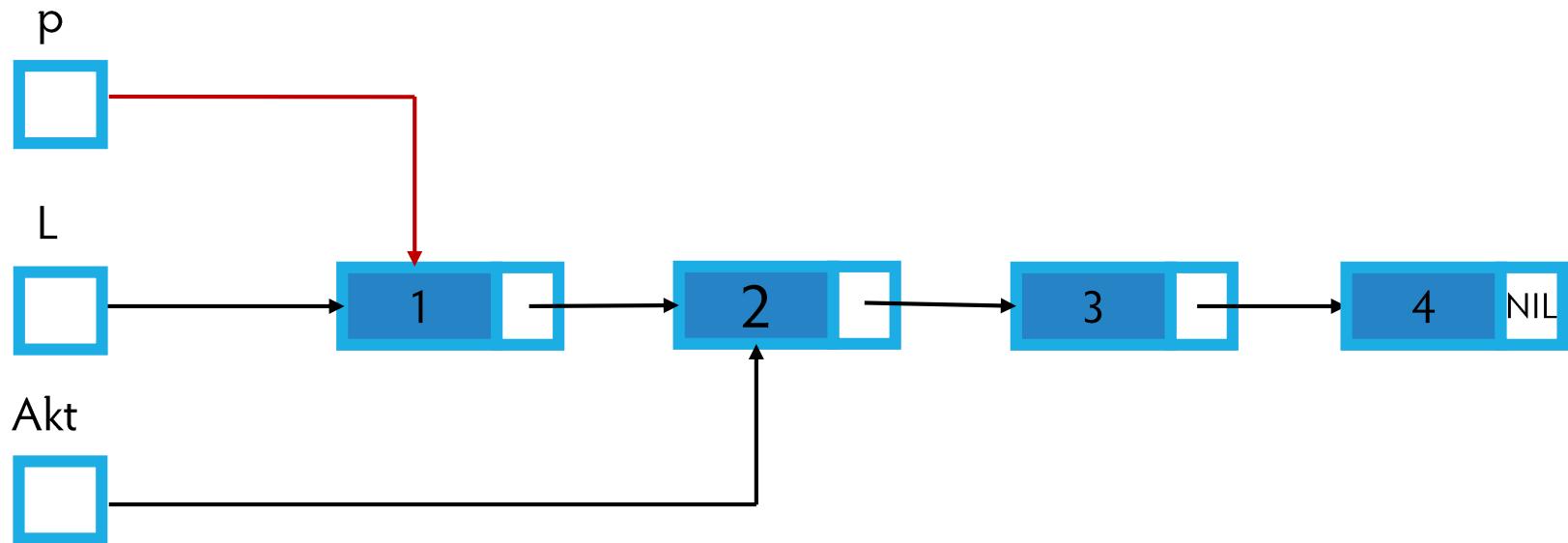
Listaelem beszúrása

- Beszúrás az aktuális elem előtt
 - Ha nincsen aktuális elem, az hiba
 - Az újonnan beszúrt lesz az aktuális elem



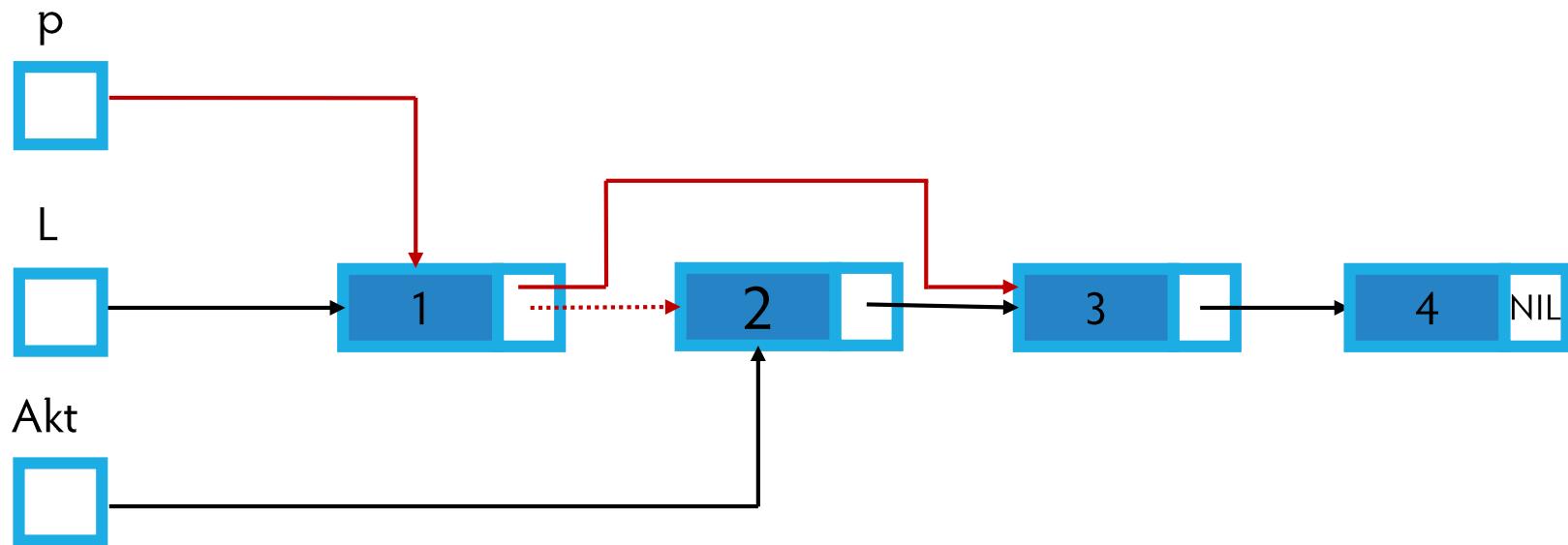
Listaelem törlése

- Aktuális elem törlése
 - Törlendő elem megelőzőjének megkeresése
 - Láncolás megváltoztatása (átláncolás)



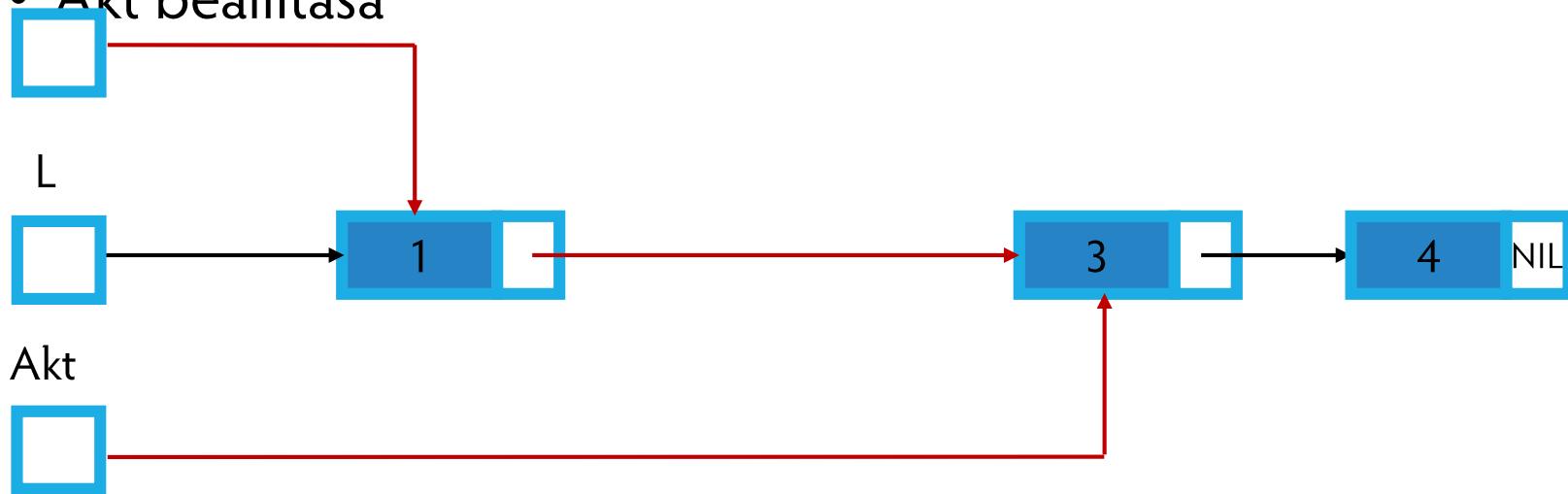
Listaelem törlése

- Aktuális elem törlése
 - Törlendő elem megelőzőjének megkeresése
 - Láncolás megváltoztatása (átláncolás)



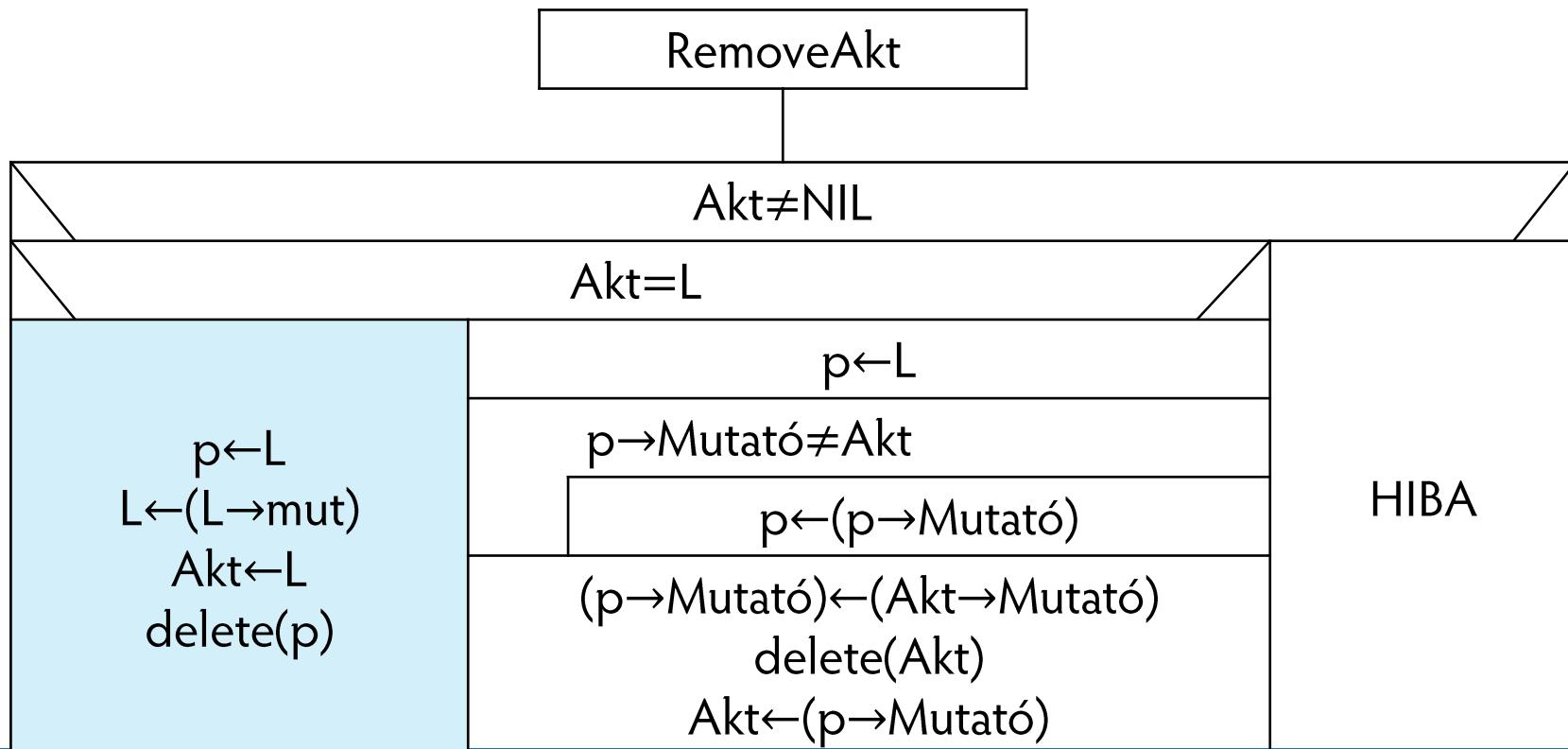
Listaelem törlése

- Aktuális elem törlése
 - Törlendő elem megelőzőjének megkeresése
 - Láncolás megváltoztatása (átláncolás)
 - Memóriából eltávolítás (törles)
 - Akt beállítása



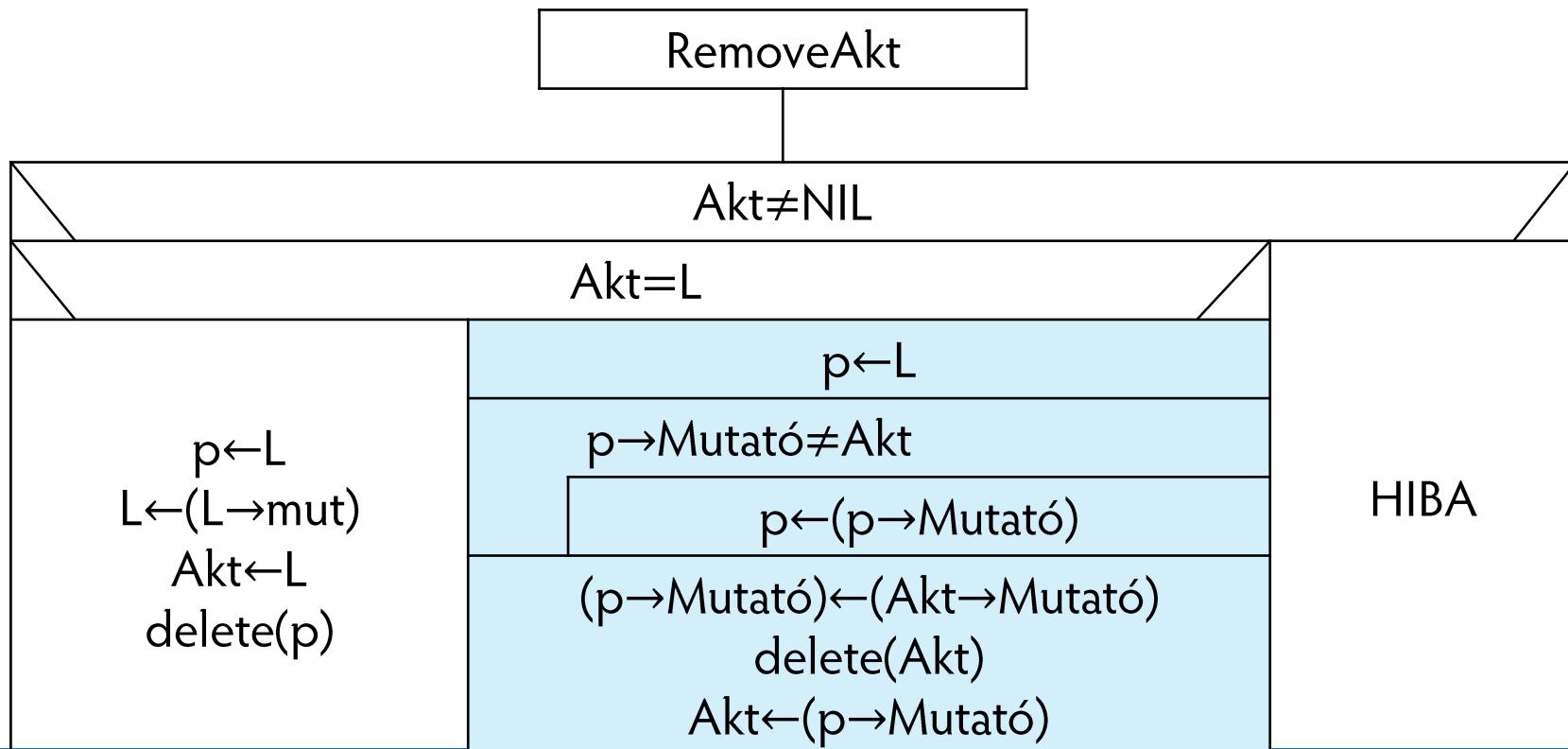
Listaelem törlése

- Aktuális elem törlése
 - Ha az aktuális az első



Listaelem törlése

- Aktuális elem törlése
 - Ha az aktuális nem az első





Egyszerű lista – Műveletek

- Megjegyzések – lehetőségek
 - Az Akt nem változik a módosítás során
 - További műveletekre példa
 - Teljes lista törlése
 - Listák összefűzése,
 - Elemszám lekérdezése
 - Ebben az implementációban nem hatékony a megvalósítás
 - Last, Remove, InsertBefore, InsertLast
 - Hatékonnyá tehető
 - Kétirányú láncolással



Példa

- Elemek sorbarendezése lista használatával
 - Adott az $A[1..n]$ egészket tartalmazó tömb
 - Helyezzük el a pozitív elemeit rendezett módon egy listába



Az algoritmus

Lista.Empty

For $i = 1$ To n

$A[i] > 0$

Lista.IsEmpty

Lista.First; $a \leftarrow$ Lista.GetValue()

\neg Lista.IsEmpty $\wedge A[i] > a$

Lista.Next

$a \leftarrow$ Lista.GetValue()

$A[i] \leq a$

Lista.InsertFirst($A[i]$)

Lista.InsertBefore($A[i]$)

Lista.InsertLast($A[i]$)

SKIP



Az algoritmus

Lista.Empty

For $i = 1$ To n

$A[i] > 0$

Lista.IsEmpty

Lista.First; $a \leftarrow$ Lista.GetValue()

\neg Lista.IsEmpty $\wedge A[i] > a$

Lista.Next

$a \leftarrow$ Lista.GetValue()

$A[i] \leq a$

Lista.InsertFirst($A[i]$)

Lista.InsertBefore($A[i]$)

Lista.InsertLast($A[i]$)

SKIP



Az algoritmus

Lista.Empty

For $i = 1$ To n

$A[i] > 0$

Lista.IsEmpty

Lista.First; $a \leftarrow$ Lista.GetValue()

\neg Lista.IsEmpty $\wedge A[i] > a$

Lista.Next

$a \leftarrow$ Lista.GetValue()

$A[i] \leq a$

Lista.InsertFirst($A[i]$)

Lista.InsertBefore($A[i]$)

Lista.InsertLast($A[i]$)

SKIP



Az algoritmus

Lista.Empty

For $i = 1$ To n

$A[i] > 0$

Lista.IsEmpty

Lista.First; $a \leftarrow$ Lista.GetValue()

\neg Lista.IsEmpty $\wedge A[i] > a$

Lista.Next

$a \leftarrow$ Lista.GetValue()

$A[i] \leq a$

Lista.InsertFirst($A[i]$)

Lista.InsertBefore($A[i]$)

Lista.InsertLast($A[i]$)

SKIP



Az algoritmus

Lista.Empty

For $i = 1$ To n

$A[i] > 0$

Lista.IsEmpty

Lista.First; $a \leftarrow$ Lista.GetValue()

\neg Lista.IsEmpty $\wedge A[i] > a$

Lista.Next

$a \leftarrow$ Lista.GetValue()

$A[i] \leq a$

Lista.InsertFirst($A[i]$)

Lista.InsertBefore($A[i]$)

Lista.InsertLast($A[i]$)

SKIP



Az algoritmus

Lista.Empty

For $i = 1$ To n

$A[i] > 0$

Lista.IsEmpty

Lista.First; $a \leftarrow$ Lista.GetValue()

\neg Lista.IsEmpty $\wedge A[i] > a$

Lista.Next

$a \leftarrow$ Lista.GetValue()

$A[i] \leq a$

Lista.InsertFirst($A[i]$)

Lista.InsertBefore($A[i]$)

Lista.InsertLast($A[i]$)

SKIP



Az algoritmus

Lista.Empty

For $i = 1$ To n

$A[i] > 0$

Lista.IsEmpty

Lista.First; $a \leftarrow$ Lista.GetValue()

\neg Lista.IsEmpty $\wedge A[i] > a$

Lista.Next

$a \leftarrow$ Lista.GetValue()

$A[i] \leq a$

Lista.InsertFirst($A[i]$)

Lista.InsertBefore($A[i]$)

Lista.InsertLast($A[i]$)

SKIP



Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Hiearchikus adatszerkezetek

Fák



Hierarchikus adatszerkezetek

- A hierarchikus adatszerkezet olyan $\langle A, R \rangle$ rendezett pár, amelynél van egy kitüntetett r elem, ez a **gyökérelem**, úgy, hogy:
 1. r nem lehet végpont
 $\forall a \in A$ esetén $\neg R(a, r)$
 2. $\forall a \in \{A \setminus \{r\}\}$ elem egyszer és csak egyszer lehet végpont, azaz $\forall a \in \{A \setminus \{r\}\}$ -hez $\exists! b \neq a, b \in A: R(b, a)$
 3. $\forall a \in \{A \setminus \{r\}\}$ elem r -ből elérhető, azaz
 $\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in A, a_n = a:$
 $R(r, a_1), R(a_1, a_2), \dots, R(a_{n-1}, a_n))$
- A hierarchikus adatszerkezetek bizonyos értelemben a lista általánosításai



Hierarchikus adatszerkezetek

- Egy elemnek akárhány rákövetkezője lehet, de minden elemnek csak egyetlen megelőző eleme van, azaz az adatelemek között **egy-sok** jellegű kapcsolat áll fenn
- minden adatelem csak egy helyről érhető el, de egy adott elemből tetszés szerinti számú adatelem látható
 - Például
 - Fa
 - összetett lista
 - B-fa



Fák

- A **fa** egy hierarchikus adatszerkezet, mely véges számú csomópontból áll, és igazak a következők:
 - Két csomópont között a kapcsolat egyirányú, az egyik a kezdőpont, a másik a végpont
 - Van a fának egy kitüntetett csomópontja, ami nem lehet végpont
 - Ez a fa gyökere
 - Az összes többi csomópont pontosan egyszer végpont



Fák

- A **fa** rekurzív definíciója:
 - A fa vagy üres, vagy
 - Van egy kitüntetett csomópontja, ez a gyökér.
 - A gyökérhez 0 vagy több diszjunkt fa kapcsolódik
 - Ezek a gyökérhez tartozó részfák
- A fával kapcsolatos algoritmusok gyakran rekurzívak

0. szint

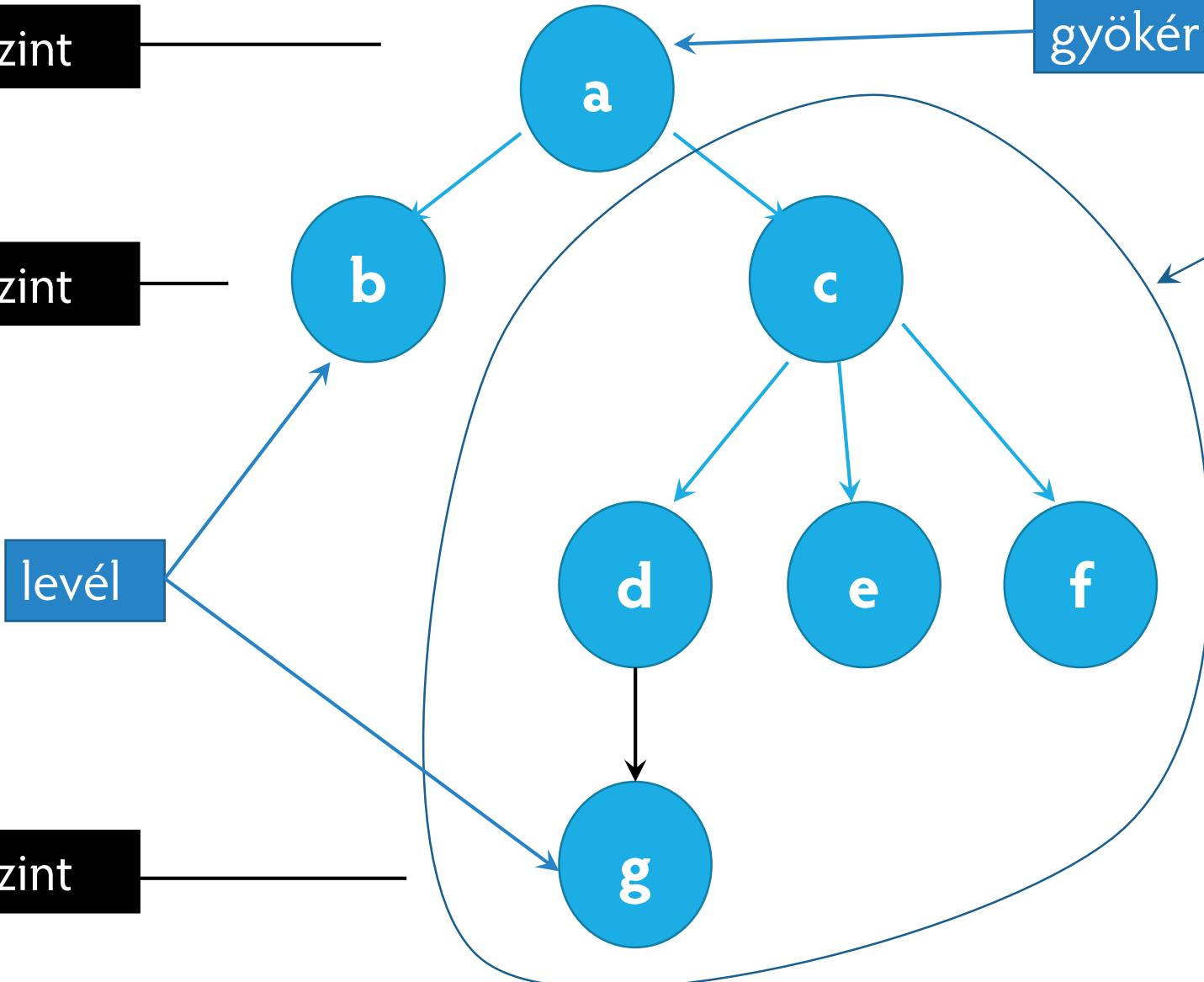
gyökér

1. szint

részfa

levél

3. szint





Fák

- Az adatszerkezetben
 - A fa **csúcsai** az adatelemeknek felelnek meg,
 - Az **élek** az adatelemek egymás utáni sorrendjét határozzák meg – egy csomópontból az azt követőbe húzott vonal egy él
 - A **gyökérelem** a fa első eleme, amelynek nincs megelőzője
 - **Levélelem** a fa azon eleme, amelynek nincs rákövetkezője
 - **Közbenső elem** az összes többi adatelem



Fák

- Az adatszerkezetben
 - minden közbenső elem egy részfa gyökereként tekinthető, így a fa részfákra bontható:
 - részfa: „t” részfája "a"-nak, ha
 - "a" a gyökere, azaz közvetlen megelőző eleme „t”-nek, vagy
 - „t” részfája "a" valamely részfájának
 - **elágazásszám:** közvetlen részfák száma
 - a fa **szintje** a gyökértől való távolságot mutatja.
 - A gyökérelem a 0. szinten van.
 - A gyökérelem rákövetkezői az 1. szinten. stb.
 - a fa szintjeinek száma a fa **magassága**



Fák

- További definíciók:

- **Csomópont foka**: a csomóponthoz kapcsolt részfák száma
- **Fa foka**: a fában található legnagyobb fokszám
- **Levél**: 0 fokú csomópont
- **Elágazás** (közbenső v. átmenő csomópont): > 0 fokú csomópont
- **Szülő** (ős): kapcsolat kezdőpontja
 - csak a levelek nem szülők
- **Gyerek** (leszármazott): kapcsolat végpontja
 - csak a gyökér nem gyerek
 - ugyanazon csomópont leszármazottai egymásnak testvérei



Fák

- További definíciók

- **Szintszám:** gyökértől mért távolság.
 - A gyökér szintszáma 0.
 - Ha egy csomópont szintszáma n , akkor a hozzá kapcsolódó csomópontok szintszáma $n + 1$.
- **Útvonal:** az egymást követő élek sorozata
 - minden levélelem a gyökértől pontosan egy úton érhető el.
- **Ág:** az az útvonal, amely levélben végződik
- **Üresfa** az a fa, amelyiknek egyetlen eleme sincs. (Ω)
- **Fa magassága:** a levelekhez vezető utak közül a leghosszabb
 - Mindig eggyel nagyobb, mint a legnagyobb szintszám



Fák

- További definíciók:

- **Minimális magasságú** az a fa, amelynek a magassága az adott elemszám esetén a lehető legkisebb.
 - Valójában ilyenkor minden szintre a maximális elemszámú elemet építjük be.
- Egy fát **kiegyensúlyozott**nak nevezünk, ha csomópontjai azonos fokúak, és minden szintjén az egyes részfák magassága nem ingadozik többet egy szintnél.
- **Rendezett fa**: ha az egy szülőhöz tartozó részfák sorrendje lényeges, azok rendezettek.



Feladat

- Maximum hány csomópont helyezhető el egy f fokú, m szintet tartalmazó fában?

$$1 + f + f^2 + f^3 + \dots$$

$$\frac{(f^{m+1} - 1)}{(f - 1)}$$



Fák műveletei

- Lekérdező
 - Üres_e – logikai értéket ad vissza
 - Gyökérelem – visszaadja a gyökér adatelemet
 - Keres(e) – adott e adatelemet keres, egy ilyen elem mutatóját adja vissza



Fák műveletei

- Módosító
 - Üres
 - Beszúr(e)
 - MódosítGyökér(e)
 - Töröl(e)
- TörölFa
 - létrehoz egy üres fát
 - adott e adatalemet beszúr
 - adott e adatalem lesz a gyökér
 - törli az e adatalemet
 - egy előfordulást
 - összes előfordulást
 - törli az összes elemet



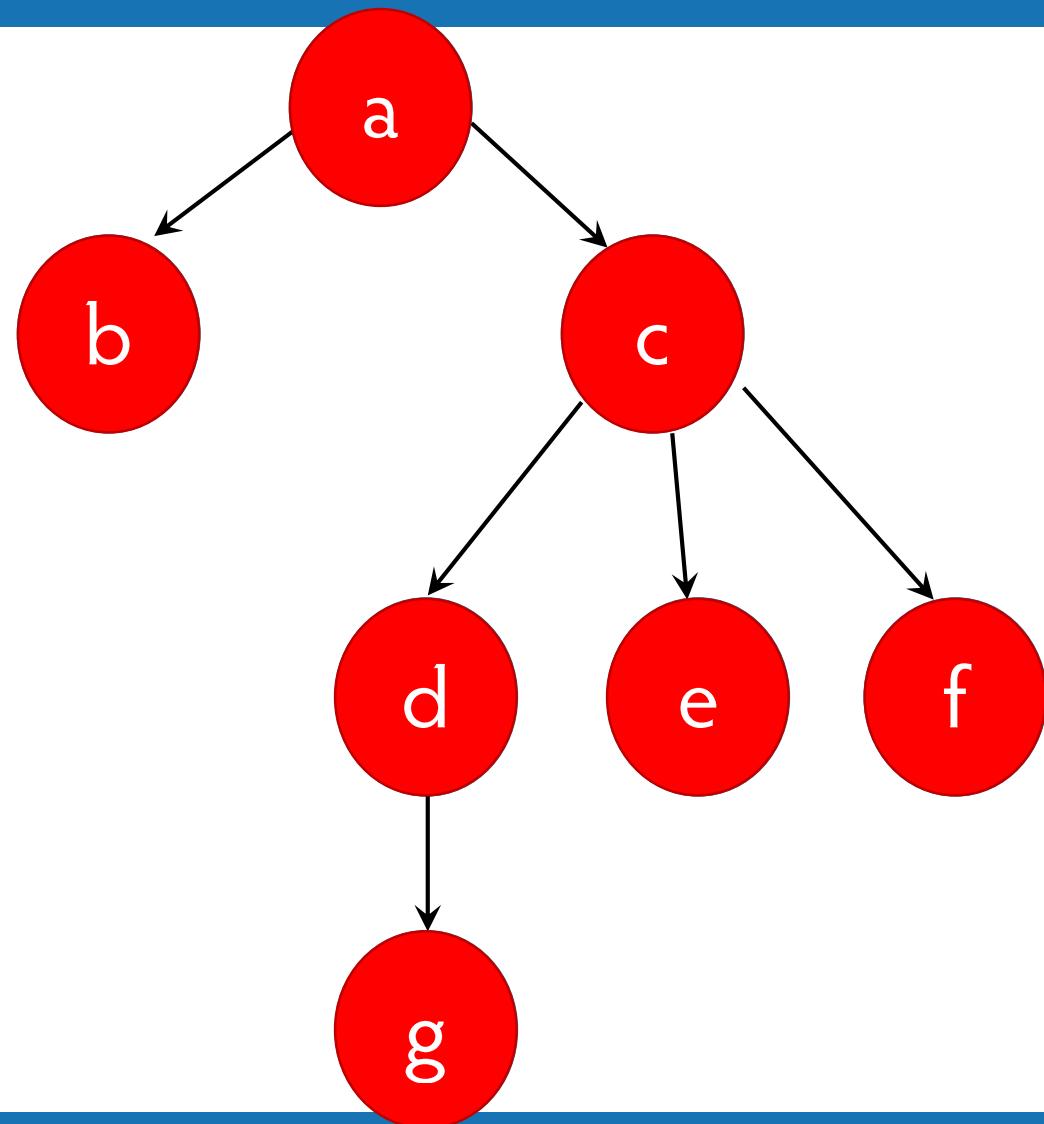
Fák műveletei

- Fák **bejárása**
 - A fa csomópontjaiban általában adatokat tárolunk. Ezeket valamilyen sorrendben szeretnénk egymás után elérni.
- Általános fa esetén a bejárási stratégiák
 - **Gyökérkezdő** (preorder)
 - gyökér, majd a részfák bejárása sorban
 - például balról jobbra
 - **Gyökérvégző** (postorder)
 - részfák bejárása sorban, majd a gyökér

Preorder bejárás

Gyökér, majd a részfák
bejárása sorban (balról
jobbra)

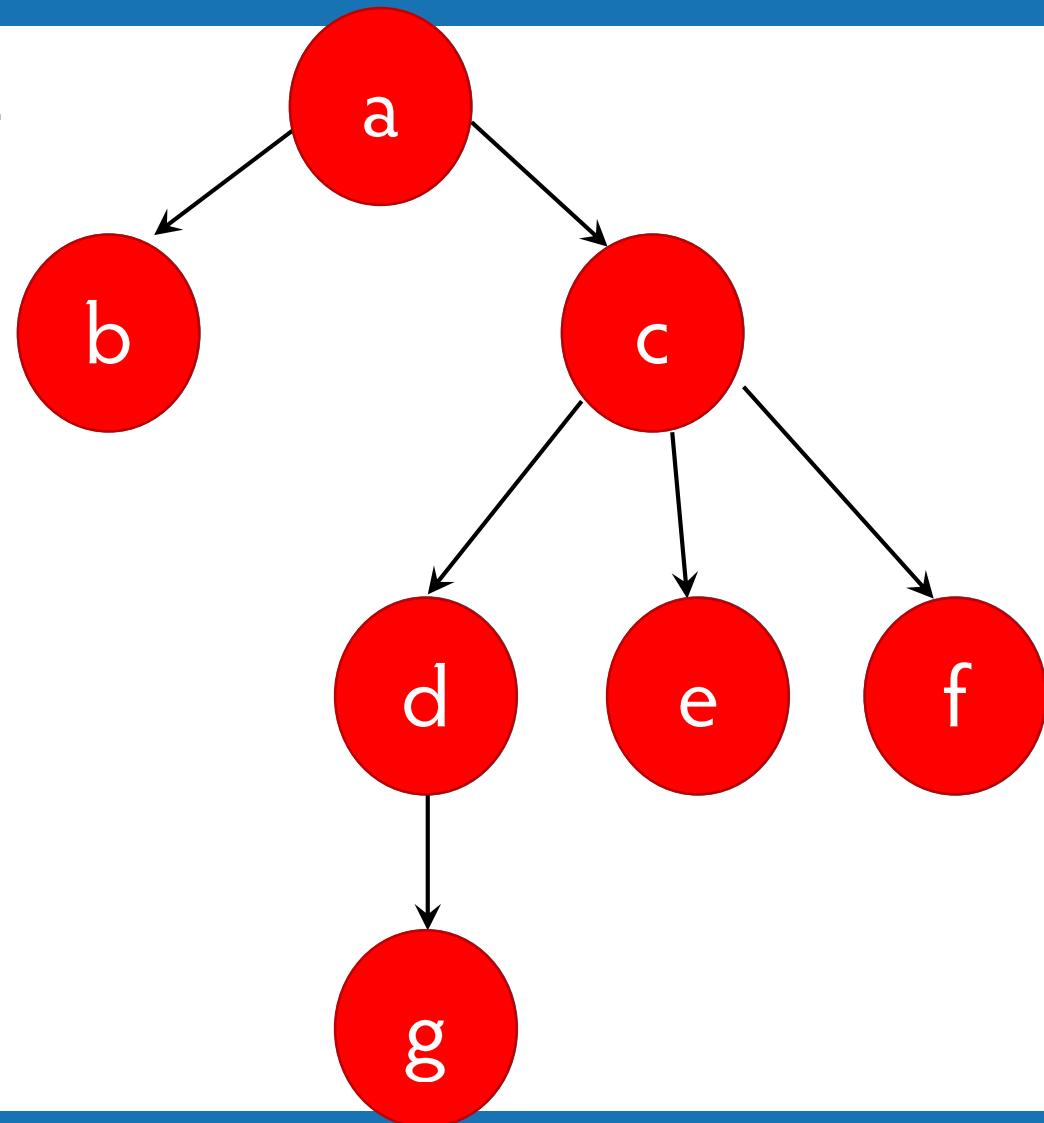
a b c d g e f



Postorder bejárás

Részfák bejárása
sorban, majd a gyökér

b g d e f c a

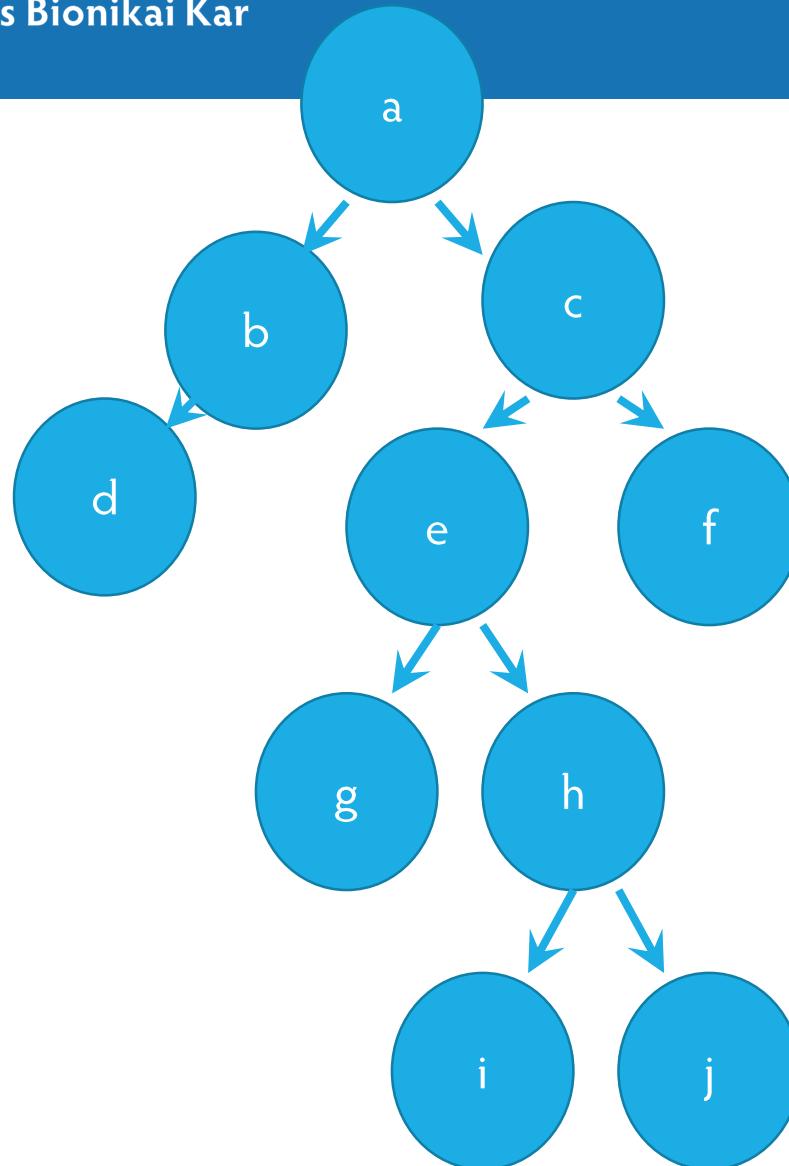




Bináris fák

- A bináris fa olyan fa, amelynek csúcspontjaiból **maximum 2 részfa nyílik**
 - Azaz fokszáma 2
- A szülő mindenkorban a gyerekek között helyezkedik el
 - Van értelme a „gyökérközepű” (inorder) bejárásnak

Bináris fa





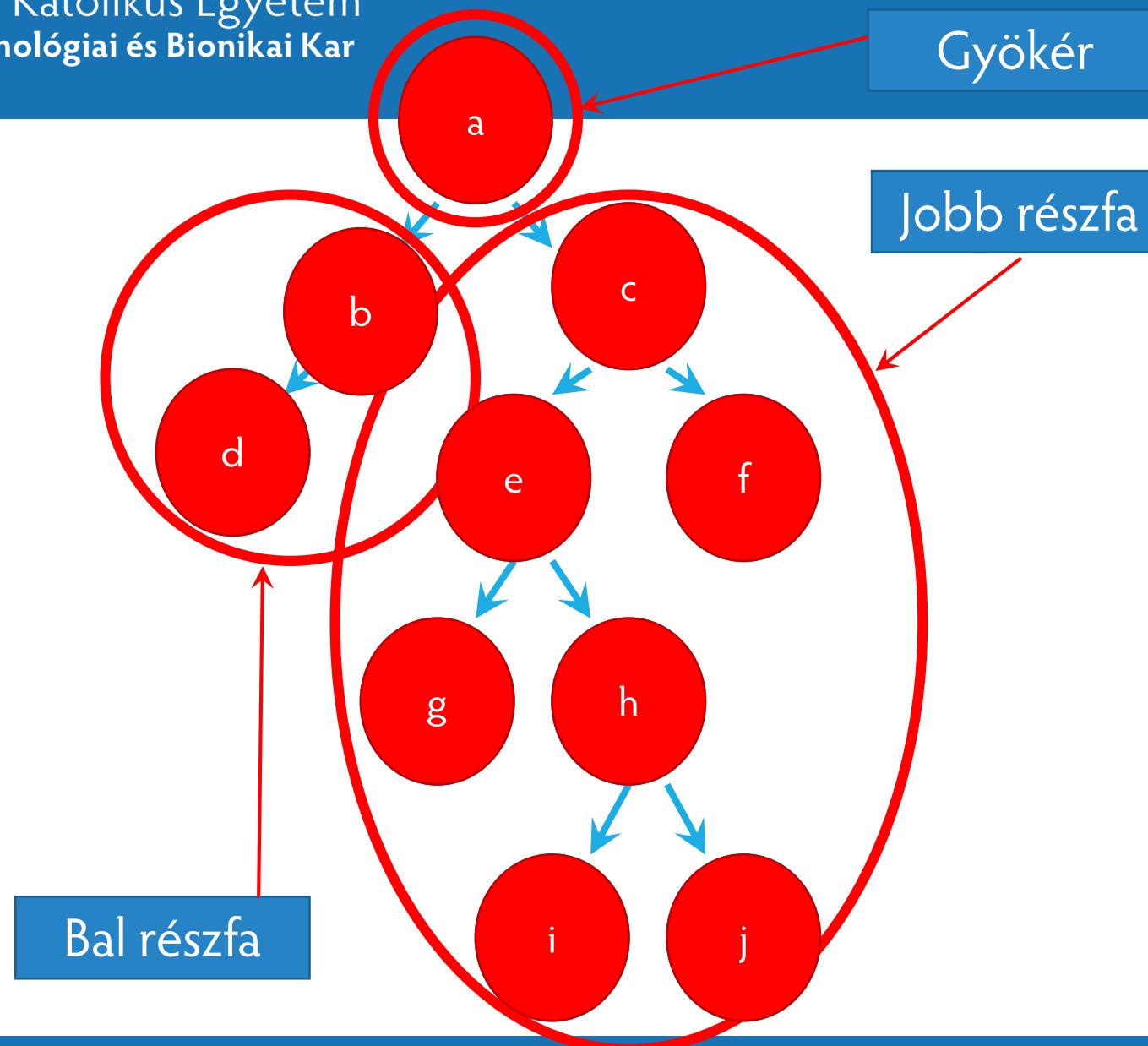
Bináris fák bejárása

- A bejárási stratégiák
 - Gyökérkezdő (preorder)
 - gyökér, bal részfa, jobb részfa
 - Gyökérközepű (inorder)
 - bal részfa, gyökér, jobb részfa
 - Gyökérvégző (postorder)
 - bal részfa, jobb részfa, gyökér

Preorder

Gyökér,
Bal részfa,
Jobb részfa

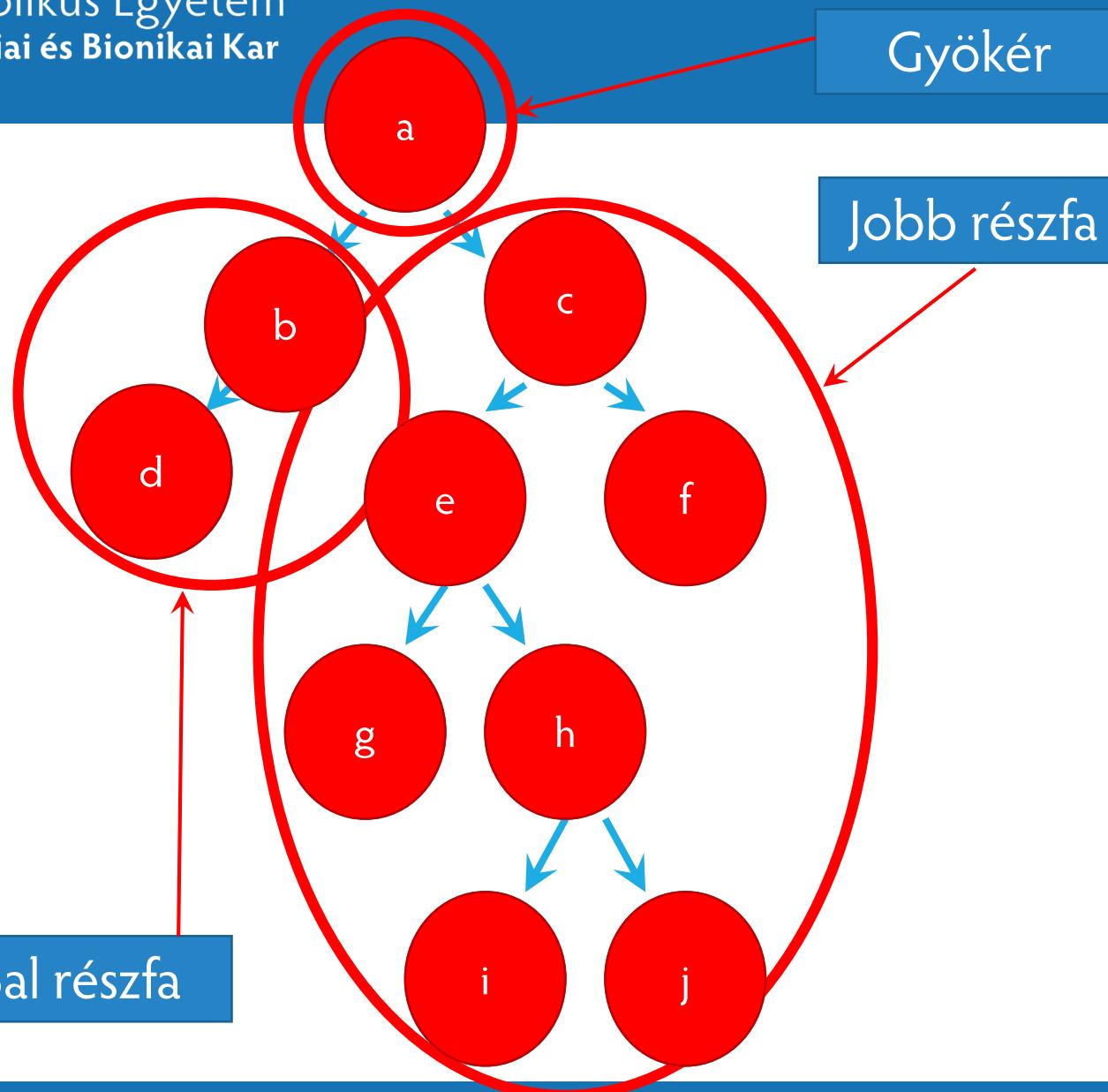
a b d c e g h i j f



Inorder

Bal részfa,
Gyökér,
Jobb részfa

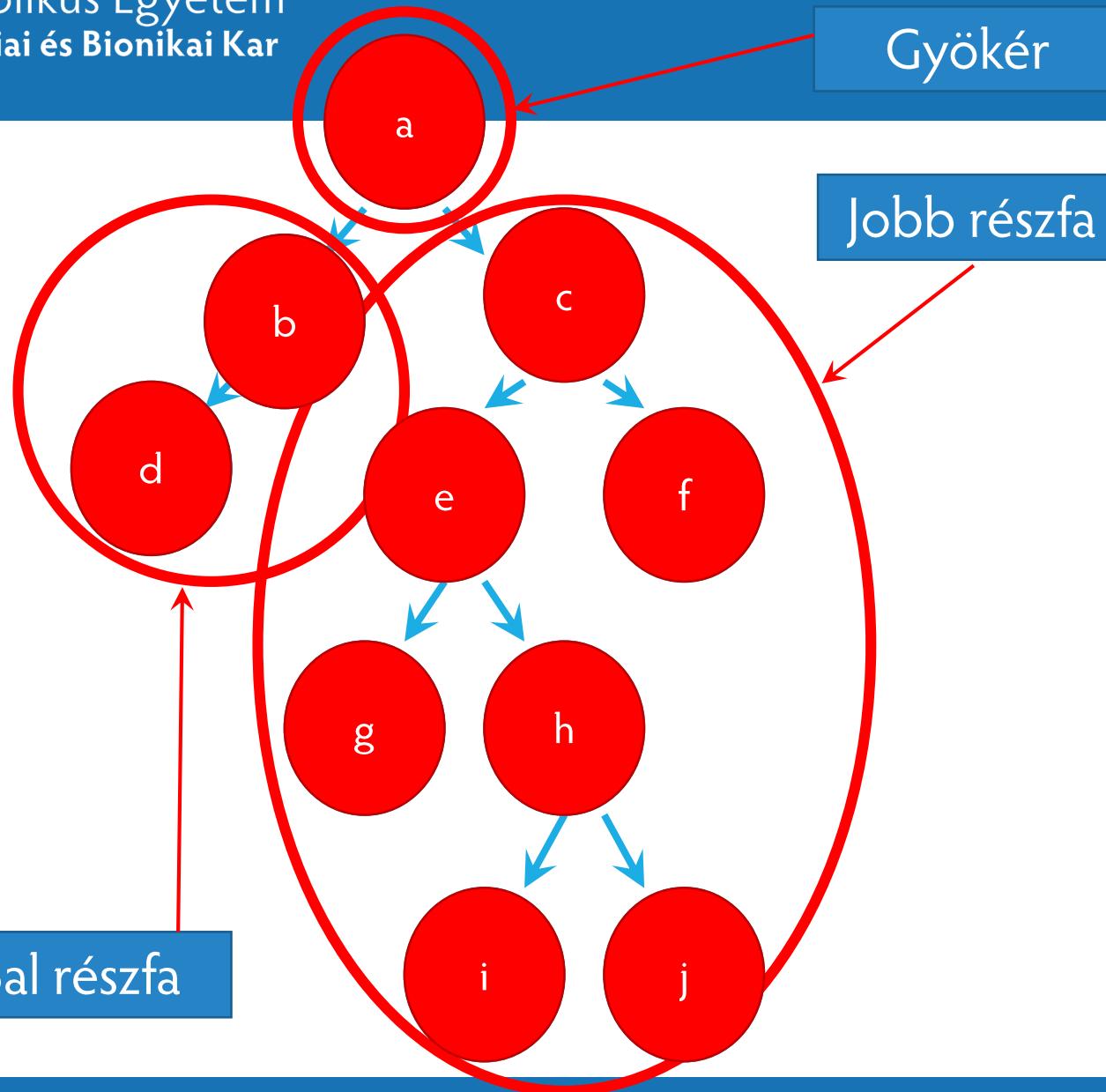
db a g e i h j c f



Postorder

Bal részfa,
Jobb részfa,
Gyökér

dbgijhеfca

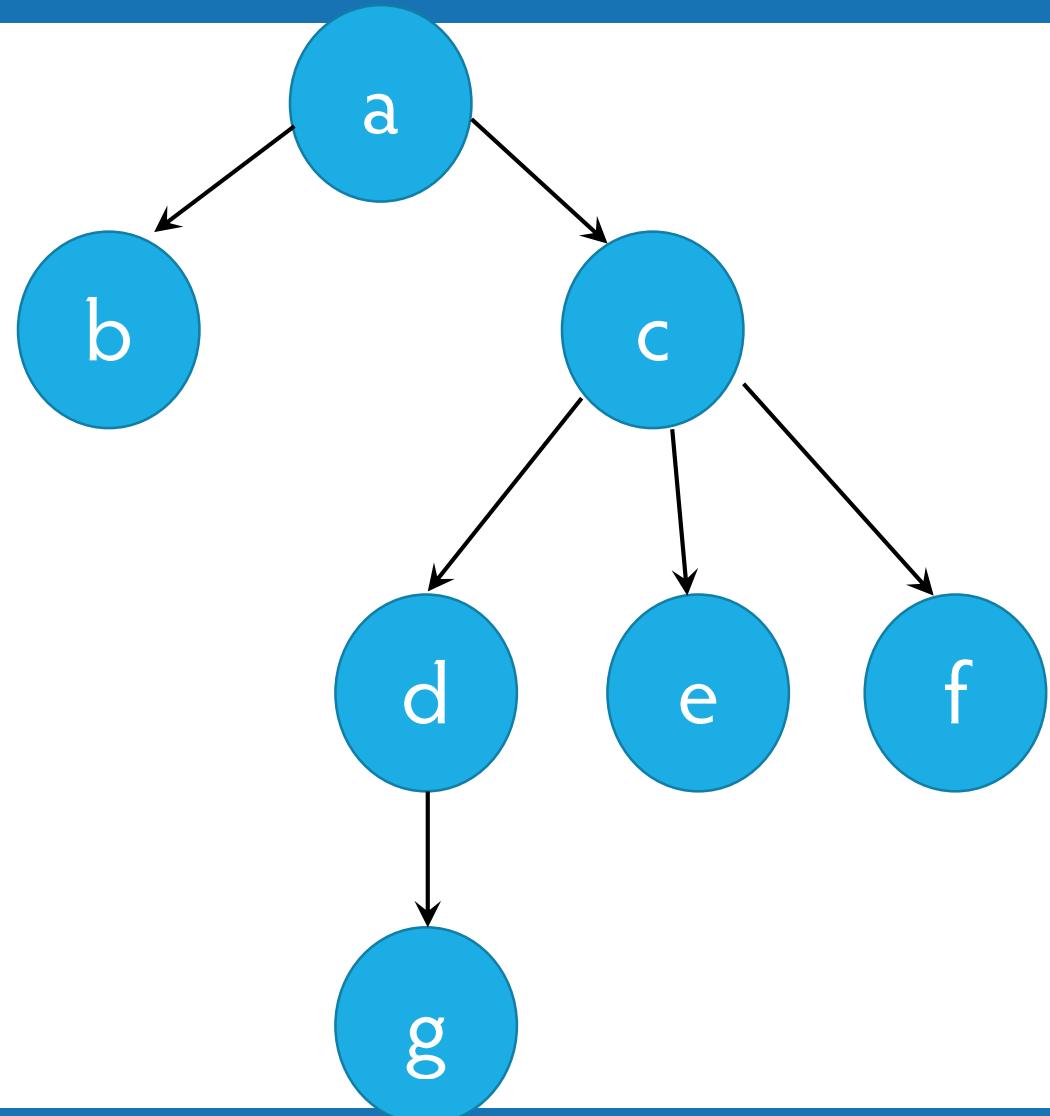




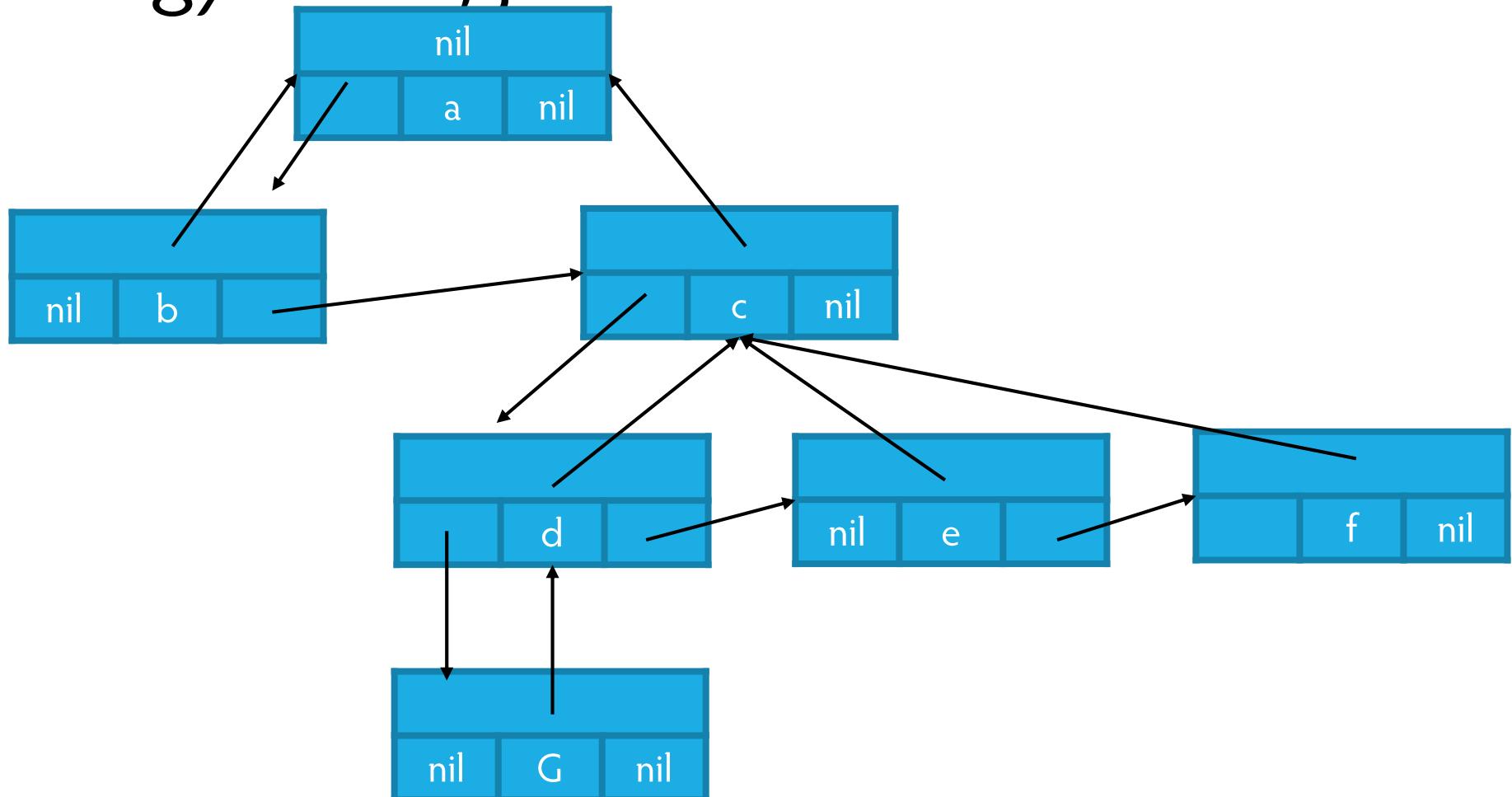
Reprezentáció

- Általános fa esetén
 - „**bal-gyermekek, jobb-testvér**”
 - minden csomóponthoz tartozik három mutató
 - **bal-gyermekek** – a csúcs gyermekei közül a bal szélsőre mutat
 - **jobb-testvér** – a csúcsnak arra a testvérére mutat, amelyik közvetlenül jobbra mellette található (azonos szinten ugyanahhoz az Őshöz tartozó következő szomszédos elemre)
 - **szülő**

Általános fa



Bal-gyermek, jobb-testvér

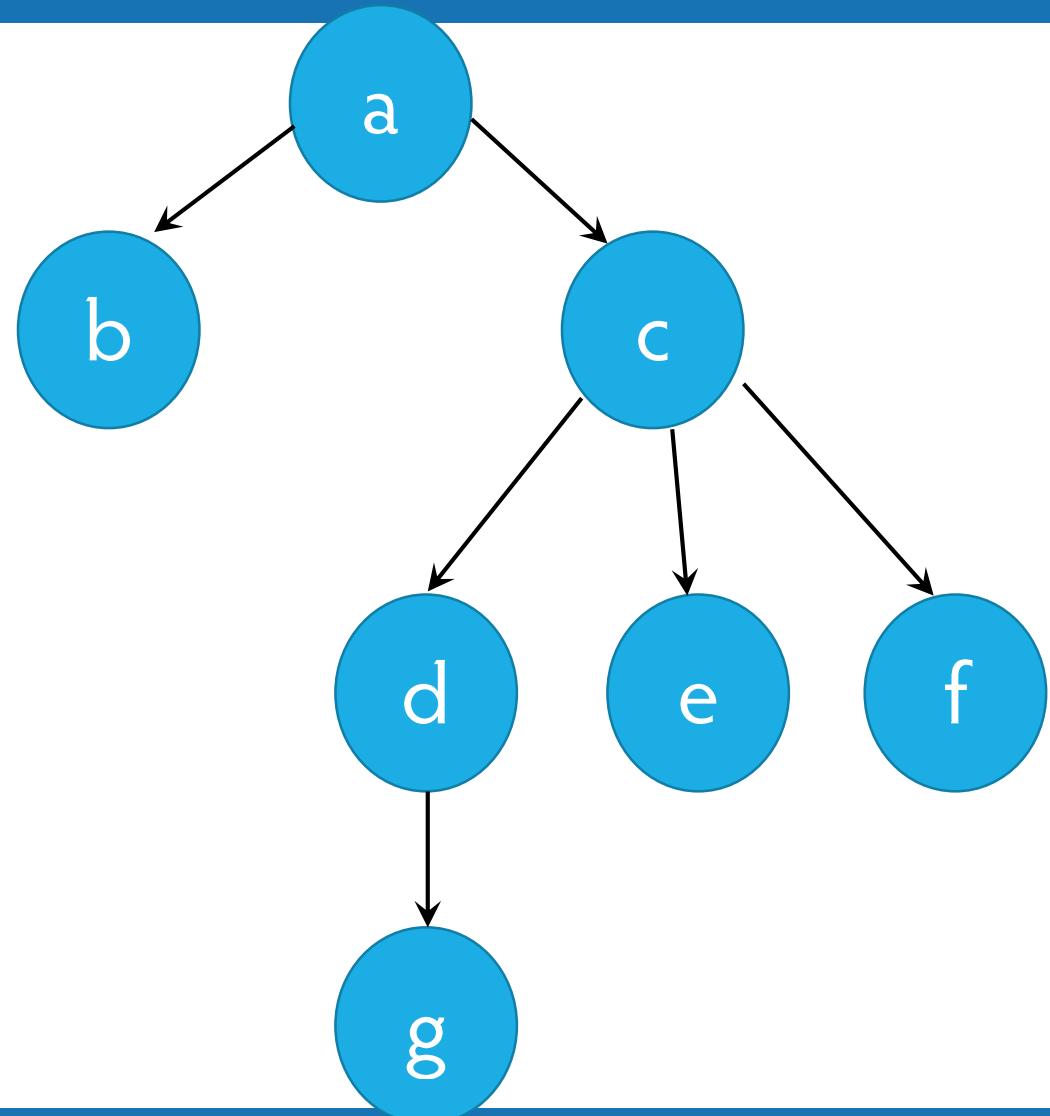




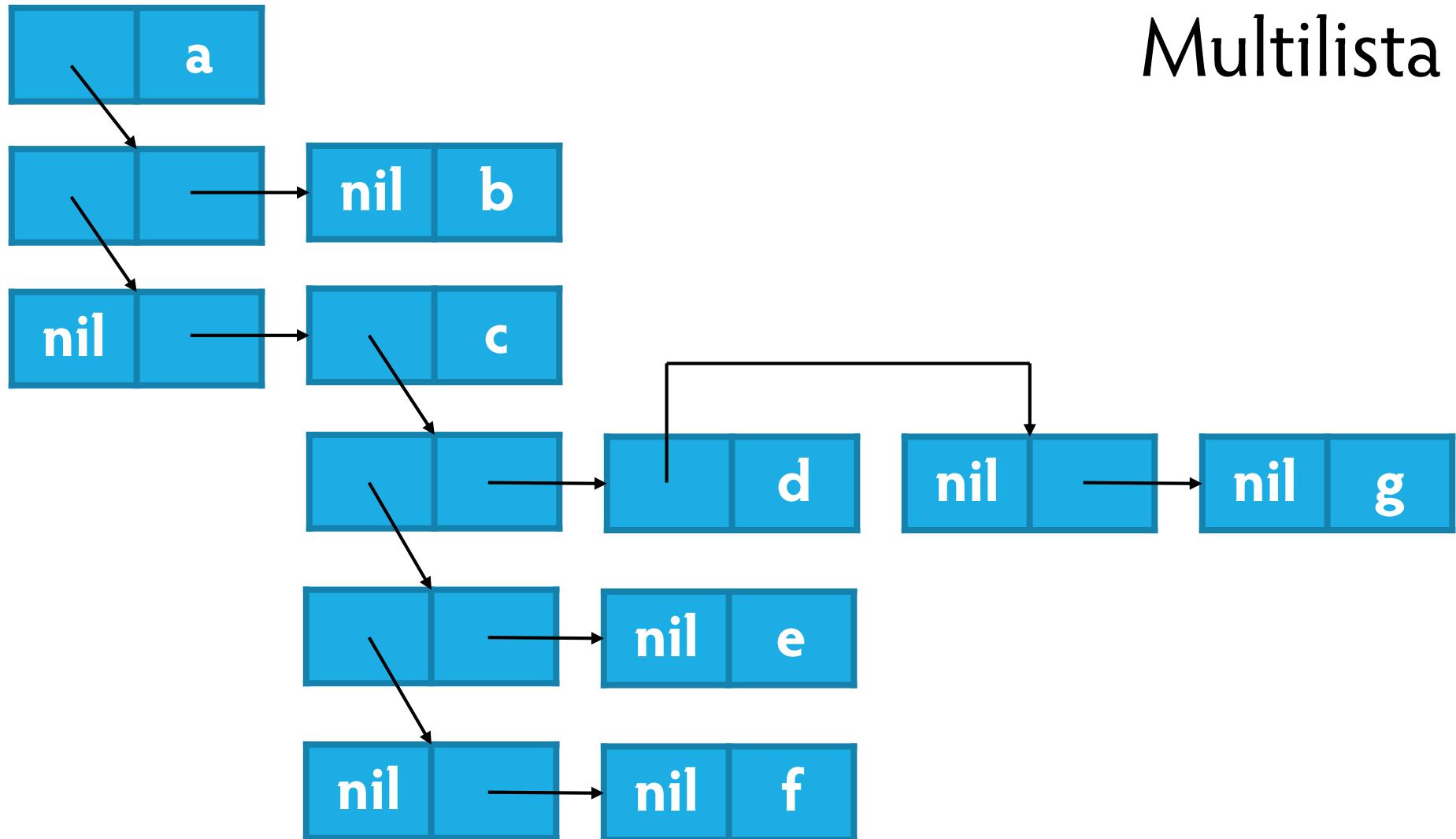
Reprezentáció

- Általános fa esetén például **multilista**:
 - minden csomóponthoz tartozik egy lineáris lista, amelynek első eleme az adat, a többi a kapcsolatok listája
 - Annyi kapcsolati elem, ahány fokú a csomópont.
 - A kapcsolatok újabb csomópontokra, illetve lineáris listákra mutatnak.

Általános fa



Multilista





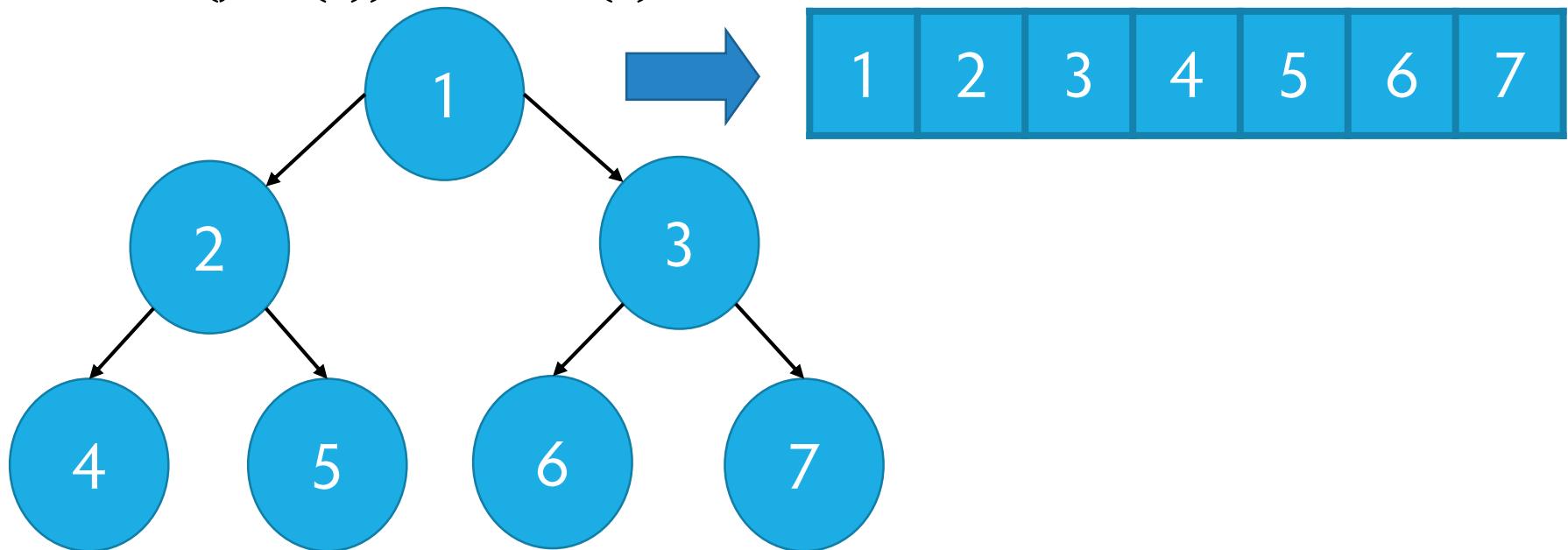
Reprezentáció

- Korlátos általános fa esetén további lehetőség
 - Aritmetikai ábrázolás
 - Láncolt, ahol minden csomópontnak van pontosan k db mutatója a maximum k gyerekre

Reprezentáció

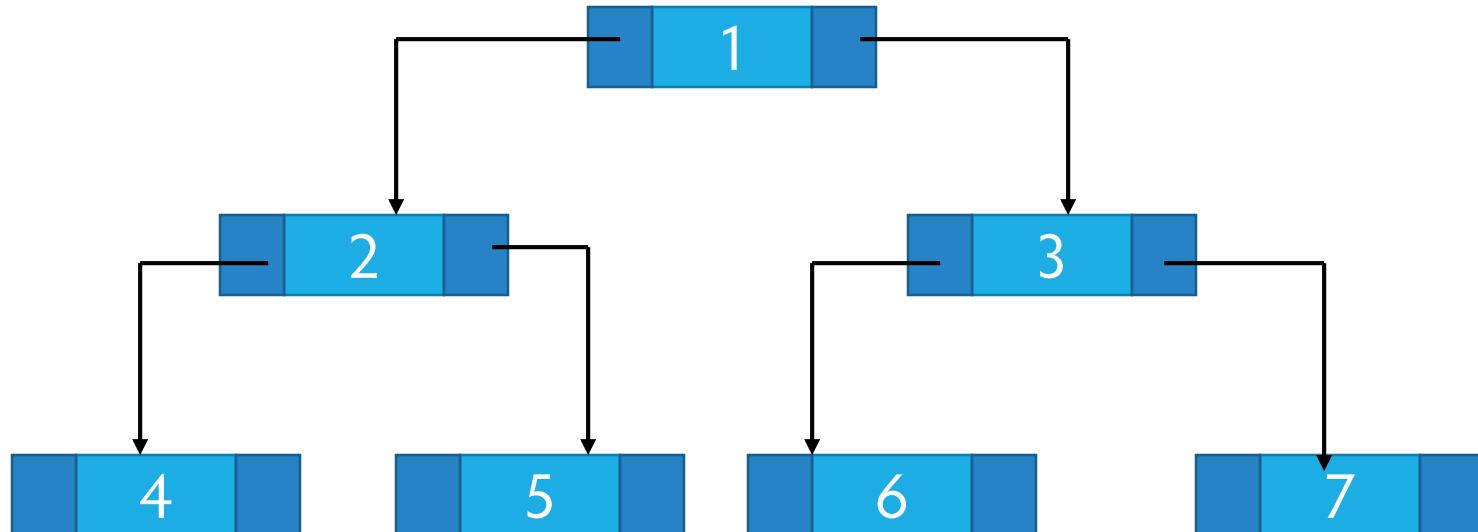
- Bináris fa

- Aritmetikai ábrázolás: szintfolytonosan egy tömbben
- $\text{ind}(\text{bal}(c)) = 2 * \text{ind}(c)$
- $\text{ind}(\text{jobb}(c)) = 2 * \text{ind}(c) + 1$



Reprezentáció

- Bináris fa
 - Láncolt – mutató a bal és a jobb gyerekre
 - esetenként a szülőre is





Bináris fák

- Definíciók

- Egy bináris fa akkor **tökéletesen kiegyensúlyozott**, ha minden elem bal-, illetve jobboldali részfájában az elemek száma legfeljebb eggyel tér el
- **Teljesnek** nevezünk egy bináris fát, ha minden közbenső elemének pontosan két leágazása van
- **Majdnem teljes**: ha csak a levelek szintjén van esetleg hiány



Bináris fák

- Lehetséges műveletek
 - üres fa inicializálása
 - az üres fa gyökérelemének definiálása
 - a gyökér és a két részfa csoportosítása (az egyik részfa lehet üres)
 - egy elem hozzáadása egy olyan elem bal (jobb) oldalához, amelynek nincs bal (jobb) oldali leágazása
 - jelezzük, ha a fa üres
 - jelezzük, ha nincs bal (jobb) oldali leágazása az aktuális elemnek



Bináris fák

- Lehetséges műveletek (folytatás)
 - a gyökérelem elérése
 - egy adott elem elérése, egy elem bal (jobb) oldali részfájának az elérése a gyökérből
 - egy fa kettéválasztása egy elemre (régi gyökér) és egy vagy két részfára
 - attól függően, hogy a gyökérnek egy vagy két leágazása volt
 - egy (rész-)fa törlése
 - a fa lehet egyetlen elem?
 - egy részfa helyettesítése egy másik részfával ...



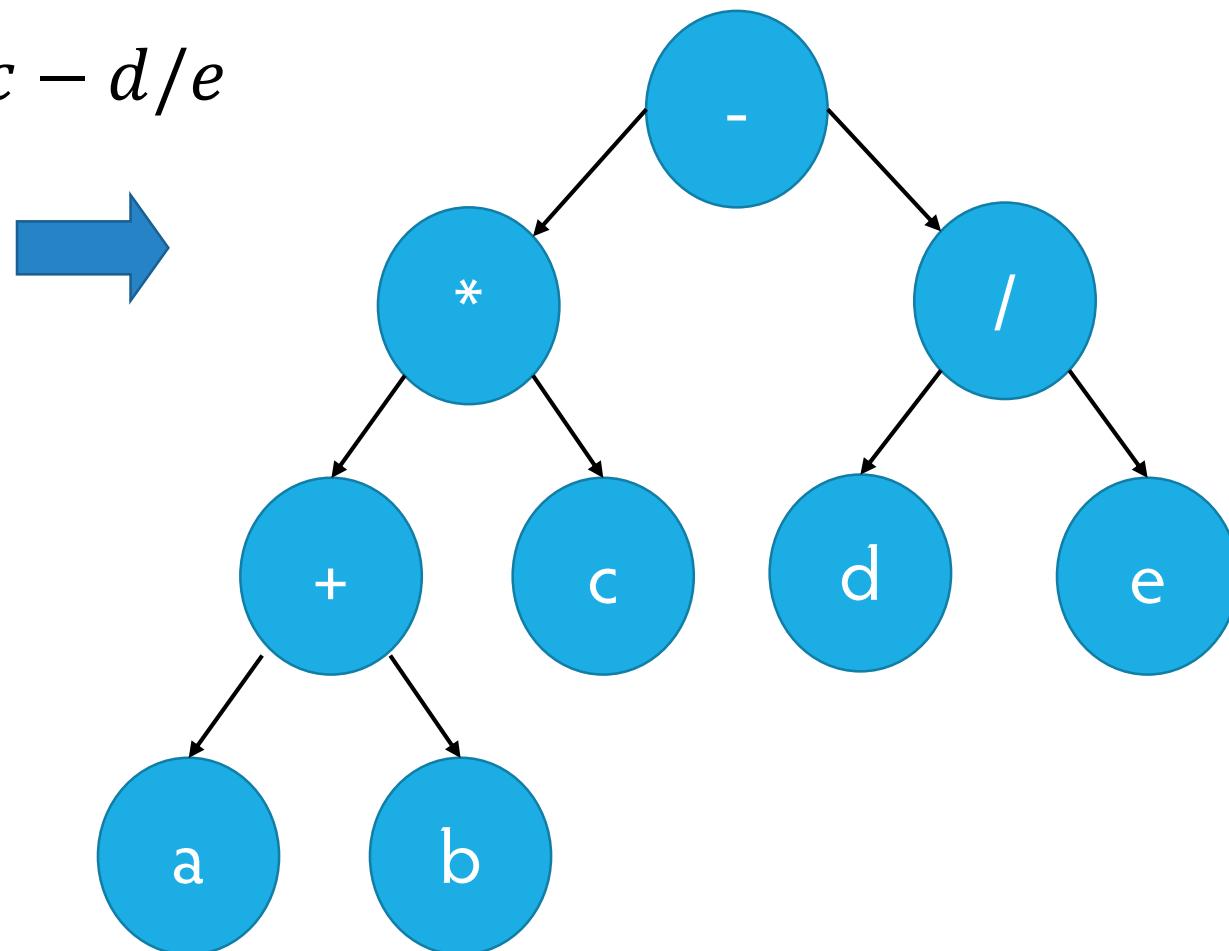
Bináris fák

- **Kiszámítási- vagy kifejezésfa**

- Az a struktúra, amely egy nyelv szimbólumai és különböző műveletei közötti precedenciát jeleníti meg.
- Aritmetikai kifejezések ábrázolására használják.
- minden elágazási pont valamilyen operátort,
- A levélelemek operandusokat tartalmaznak.
- A részfák közötti hierarchia fejezi ki az operátorok precedenciáját, illetve a zárójelezést.

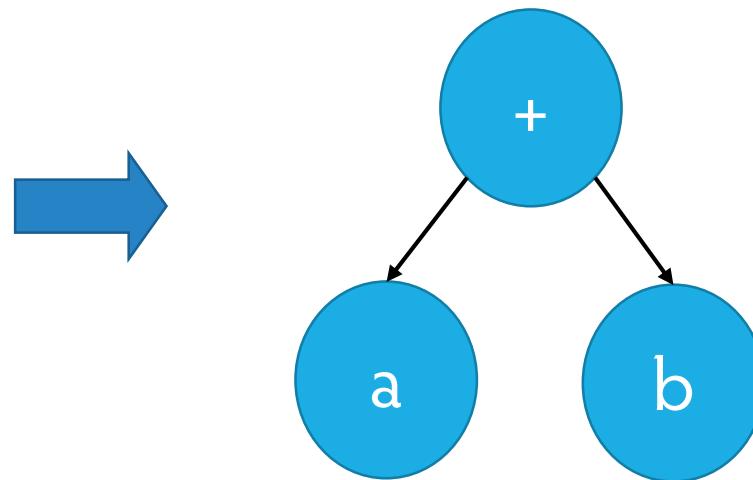
Kifejezés fák

- $(a + b) * c - d/e$



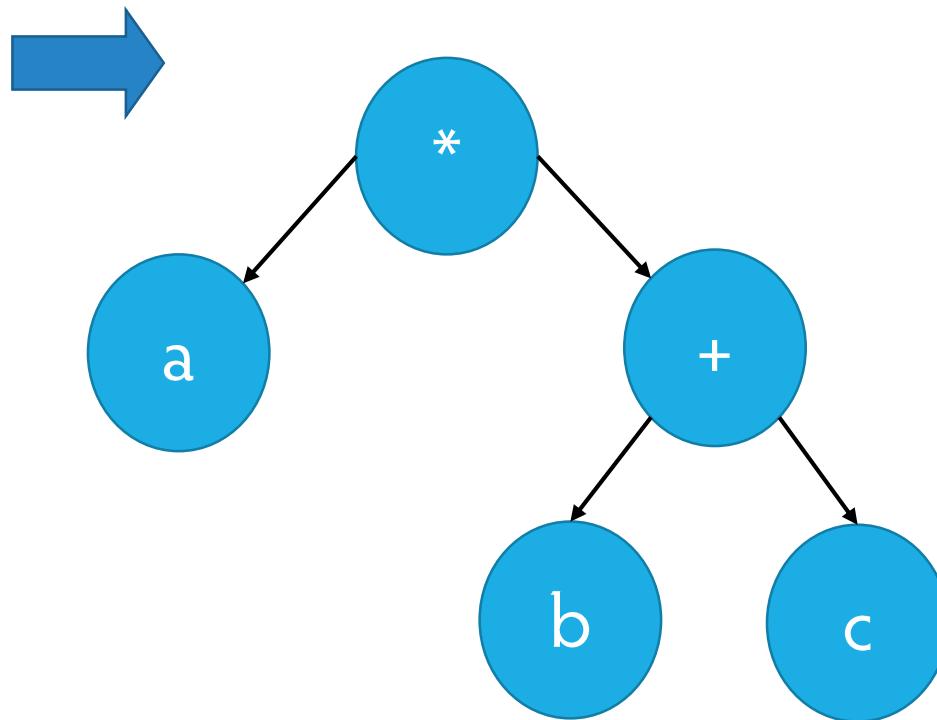
Példa

- Legyen adott egy kifejezés lengyel formája az If sorban, állítsuk elő az f kifejezésfát belőle!
- $a \ b \ +$



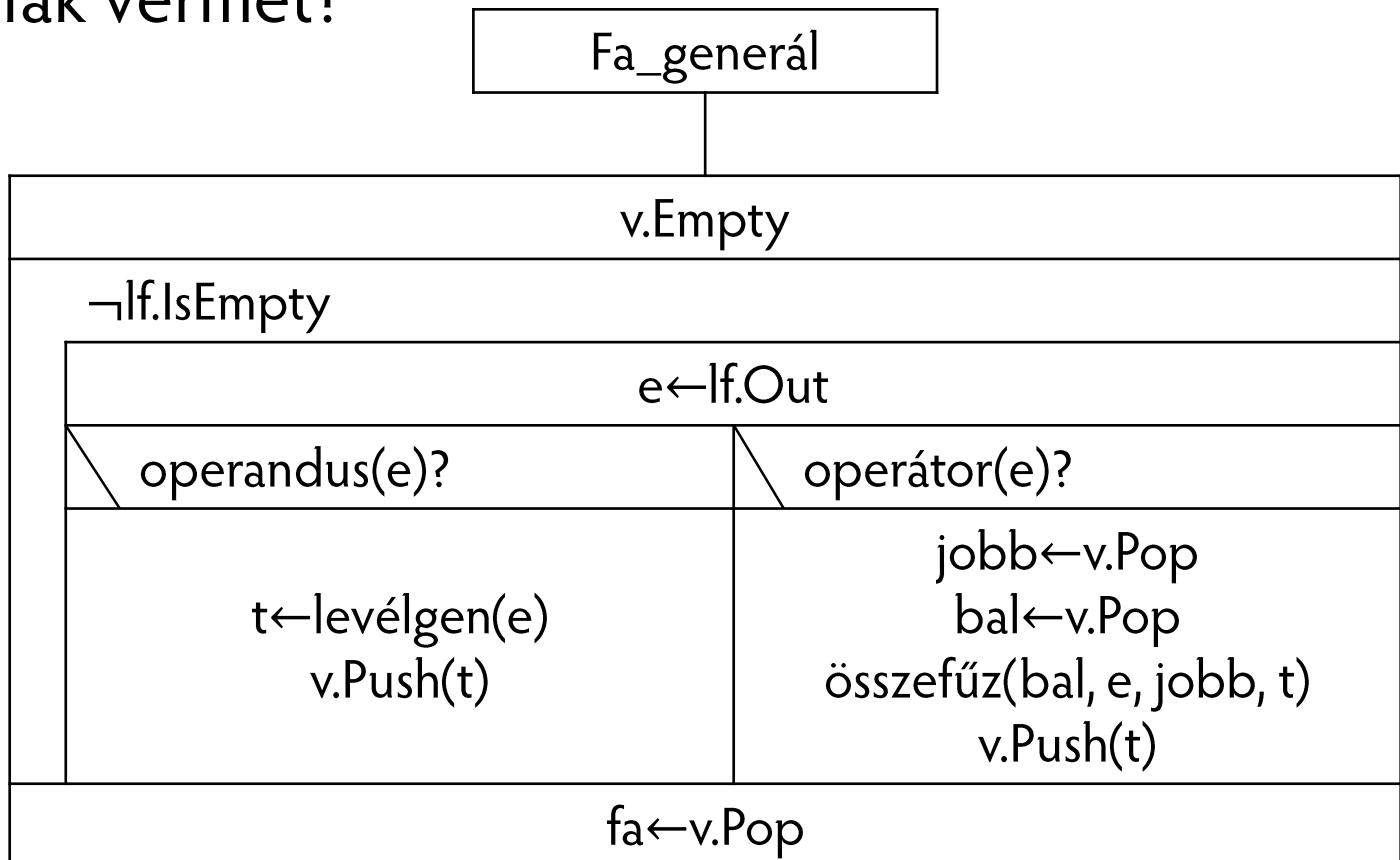
Példa

- $a \ b \ c \ + \ *$



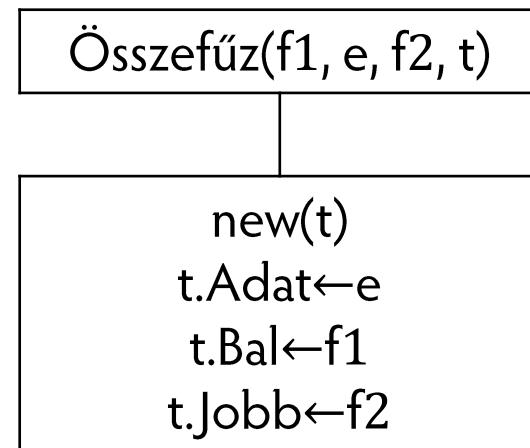
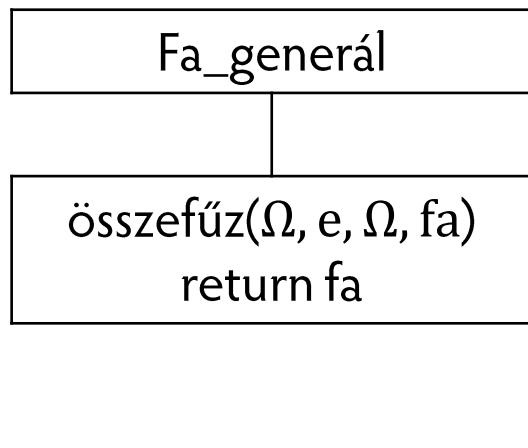
Algoritmus

- Használjuk a fák vermét!





Algoritmus folytatása





Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Bonáris fa, keresőfa

Következő alkalommal