Mátrix inverze

1. Példa 2x2-es mátrix inverzére: A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Megoldás1: Gauss algoritmus segítségével:

$$[A|E]=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right] = [E|A^{-1}]$$

Megoldás2: Az $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ képlet alapján, ahol $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Példa 3x3-as mátrixok inverzére: A=$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 4 & -3 & 18 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Megoldás:

$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 18 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 5 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 5 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5/3 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5/3 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8/3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/9 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right] = [E|A^{-1}]$$

3. Milyen p paraméter esetén invertálható az alábbi mátrix? P=$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & p & 0 \\ 3 & -5 & p-2 \end{bmatrix}$

Megoldás: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & p & 0 \\ 3 & -5 & p-2 \end{vmatrix} = p(p-2)-(-2)(3(p-2)+5)+3(-p) = p^2-p-2$

3x3-as mátrix invertálható pontosan akkor, ha a determinánsa nem 0, vagyis ha $p \neq 2, p \neq -1$

4. Milyen p paraméter esetén invertálhatóak? Q=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ p & 1 & 3 \end{bmatrix}$, R=$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -p \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

5. Adja meg az alábbi mátrixok inverzét, és mátrixszorzás segítségével ellenőrizze is, hogy jó eredményt kapott!

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 15 \\ 4 & -3 & 18 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

c)

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 10 \\ 5 & -2 & 8 & -12 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$