Relációk

Elmélet:

Def.: Az R lineáris reláció, ha R⊆AXB={(a, b) a∈A,b∈B}

Bináris relációk lehetséges tulajdonságai:

1.Reflexív, ha (a, a)∈R

2.(a) Szimmetrikus, ha *(a, b)* ∈ *R => (b, a)* ∈ *R*

2.(b) Antiszimmetrikus, ha (a, b) $\in R$ és $(b, a) \in R <=> a = b$

3. Tranzitív, ha $(a, b) \in R$ és $(b, c) \in R => (a, c) \in R$

Bináris Relációk

Ekvivalencia Reláció

Reflexív

Szimmetrikus

Tranzitív

Rendezési Reláció

Reflexív

Antiszimmetrikus

Tranzitív

Részben rendezett egy H halmaz, ha rendezési reláció van megadva H elemein. Nem biztos, hogy minden elem minden elemmel összehasonlítható.

Teljesen rendezett, ha ≤ reláció van megadva H-n, és a≤b és b≤a közül legalább az egyik teljesül. Bármely 2 elem összehasonlítható.

Partíció: A H halmaz egy olyan részhalamaz-rendszere, amelyre $H_i \cap H_j = \emptyset$ és $\cup_{i=1}^{n} H_i = H$

Tétel: Ha R⊆ HXH ekvivalencia reláció, akkor a H azon részhalmazai, amelyek az egymással relációban álló elemeket tartalmazzák, azok a H halmaz egy partícióját adják.

Hasse-diagram: $a \leq b$, akkor b-t feljebb rajzolva összekötjük a-val, de nem kötjük össze a tranzitivitás miatt fenálló párokat.

Legnagyobb elem *Ln*, ha minden $h \in H$-ra teljesül, hogy h≤Ln (Ln különbözik h-tól). A legnagyobb elem minden elemmel összehasonlítható.

Maximális elem M, ha nincs olyan $h \in H$, hogy M≤h teljesülne. (Nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható!)

Legkisebb elem lk, ha minden $h \in H$-ra lk≤h (és lk különbözik h-tól). Minden elemmel összehasonlítható.

Minimális elem m, ha nincs olyan h∈H, hogy h≤m teljesülne. Nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható!

A részben rendezett H halmaz valamely H_i részhalmazának a K∈H **felső korálátja**, (az adott rendezés és H szerint), ha minden $h_j \in H_i$-re $h_j \leq K$ teljesül.

A részben rendezett H halmaz valamely valamely H_i részhalmazának a k∈H **alsó korálátja**,

, (az adott rendezés és H szerint), ha minden $h_j \in H_i$-re $k \leq h_j$ teljesül.

A legnagyobb alsó korlátot (ha létezik) **infimumnak,** a legkisebb felső korlátot pedig (ha létezik) **supremumnak** nevezzük.

Háló:

Definíció (részbenrendezett halmazokkal)
Ha egy részbenrendezett halmaz bármely kételemű részhalmazának van szuprémuma és infimuma, akkor a halmazt **háló**nak nevezzük.

Feladatok:

Döntse el, hogy az alábbi relációk ekvivalencia relációk-e!

1. Legyen R reláció, az angol „abc" betűiből képzett szavakon olyan, hogy (a,b)∈ R ⇔ L(a)=L(b), ahol L a szavak hosszát jelöli. (L(x)= a szöveg hossza)   (a,b∈H)

Ekvivalencia reláció

alma=alma

1.reflexív: (a,a)∈R

2.tranzitív: a:=alma, b:=Béla, c:=Gabi

$(a,b)\in R$ és $(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$

3.szimmetrikus: $L(a)=L(b) \Leftrightarrow L(b)=L(a)$

2. $H=\langle x|x$ egyenes a síkban$\rangle$

$(a,b)\in R \subseteq HxH$, ha $a||b$

Reflexívitás: $a||a$

Tranz.: $a||b$ és $a||c \Rightarrow b||c$

Szim.: $a||b \Rightarrow b||a$

3. H=R

$(a,b)\in R$ ha $a-b \in Z$-nek

Reflex.: $a-a=0 \in Z$

Szim.: $a-b \in Z \Rightarrow b-a \in Z$

Tranz.: $a-b\in Z$ és $b-c \in Z \Rightarrow a-c\in Z$

Másképp:

$$\begin{array}{l} a-b\in Z \\ \underline{+b-c\in Z} \\ a-c\in Z \end{array}$$ tehát igaz.

4.Van 3 jó barát Aladár(A), Béla(B), Cili(B). Nekik az agyuk egy rugóra jár. Ez ekvivalencia reláció?

Igen. Mert:

$A \Rightarrow A$ Aladárnak egy rugóra jár az aga önmagával (Reflexív.)

$A \Rightarrow B$ ebből következik, hogy $B \Rightarrow A$ (Szimmetrikus)

$A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow C$ akkor $A \Rightarrow C$ tehát mindanyiuk agya egy rugóra jár. (Tranz.)

Döntsük el a következő relációkról, hogy rendezési relációk-e és ha igen akkor részben vagy rendezett-e a halmaz.

1. (x,y)∈R, ha x^2≥y^2 H∈R

Nem reláció mert nem antiszimmetrikus pl.: (-x,x)∈R és (x,-x)∈R

2.(x,y)∈R, ha 1/x≥1/y H=R\(0)

Teljesen rendezett a reláció mert:

Reflexív (x,x)∈R mert 1/x≥1/x

Antiszimetrikus: $(x, y) \in R$ és $(y, x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$

1/x≥1/y és 1/y≥1/x ⇒x=y

Tranzitív: $(x, y) \in R$ és $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

1/x≥1/y és 1/z≥1/y ⇒1/z≥1/x

És teljesen rendezett, mert minden halmazbeli elem összehasonlítható

3.(x,y)∈R ha x osztható y-nal H=N (a halmaz a természetes számok halmaza)

Reflexív: (x,x)∈R igaz, mert x/x=1

Antiszim.: $(x, y) \in R$ és $(y, x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$

x/y és y/x ⇒ x=y

Tranzitív: $(x, y) \in R$ és $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

x/y és y/z akkor x/y ez is igaz

és minden elem összehasonlítható, így teljesen rendezett a halmaz

4. Egy családban, ahol bármely két személynek különböző napra esik a születésnapja, tekintjük azt a relációt, mely szerint x személy relációban áll y személlyel, ha x nem idősebb y-nál. Milyen reláció ez? (Ha rendezés, akkor teljes rendezés-e ez a reláció?)

Hasse-diagramm:

5. Adott a háromelemű *G* halmaz, melynek hatványhalmaza (azaz összes részhalmazának halmaza) H. *A* és *B* *H*-beli elem akkor van relációban egymással, ha *A* részhalmaza *B*-nek. Vagyis:
$G = \{x, y, z\}$ hatványhalmaza: $H = 2^G$
$A, B \in H$ esetén a két halmaz relációban áll: $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$

a)Bizonyítsa be, hogy a megadott reláció rendezési reláció! (2 pont)
b) Rajzolja fel a reláció Hasse-diagrammját! (2 pont)
c) Mi a maximális/minimális, legnagyobb/legkisebb elem? (2 pont)
d) Mi a suprémuma, és mi az infimuma a {x} és {y,z} elemeket tartalmazó részhalmaznak? (1 pont)
e) Háló-e a fenti reláció a megadott H halmazon? (1 pont)

6. Adott a következő halmaz: H = {2,4,6,8,10,12,16,20,24,40,120}. És adott a halmazon értelmezett rendezési reláció: **a** relációban áll **b**-vel ha **a** osztója **b**-nek.

a, Rajzolja fel a rendezés Hasse-diagramját!
b, Adja meg a Maximális és minimális elemeket!
c, Adja meg a rendezés Legnagyobb és legkisebb elemét!
d, Adja meg a H' = {4,8,12} részhalmaz felső- és alsókorlátait, illetve suprémumát és infimumát!
e, A H halmaz a megadott rendezéssel hálót alkot-e?

8. Az alaphalmaz elemei a következő szavak:

$H = \{\mathrm{ABA, ABBA, AB, A, AZ, AZT, ABZ, BZ, AZTA, BÚZA, BLÚZ}\}$

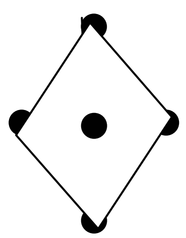
$(a,b) \in R \Leftrightarrow$ ha *b* szó tartalmazza *a* szót olyan módon, hogy *a*-hoz adva az abc valamelyik (akár nulla darab) betűjét megkapjuk a *b* szót úgy, hogy *b* szóban az *a* szó betűinek sorrendje nem változik..

Pl. $(\mathrm{AT, AUTÓ}) \in R; (\mathrm{CÉ, CSÉ}) \in R;$
$(\mathrm{BÉLA, ÁDÁM}) \notin R; (\mathrm{AZ, ZAB}) \notin R$

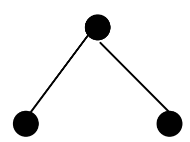
a) Rendezési reláció-e, ha igen, teljes-e?
b) Ábrázolja Hasse-diagrammon!
c) Keresse meg a legnagyobb, legkisebb, maximum, minimum elemeit (ha vannak)!
d) Keresse meg a $G = \{\mathrm{AB, ABZ, AZ}\}$ részhalmaz infimumát és supremumát!
e) Hálót alkot-e a rendszer? Válaszát indokolja!

9. Hálót alkotnak-e a következő, Hasse-diagrammal megadott rendezési relációk:

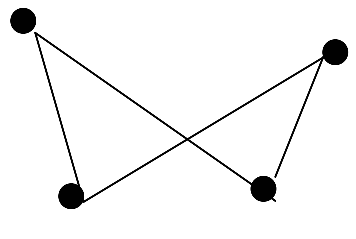
a)



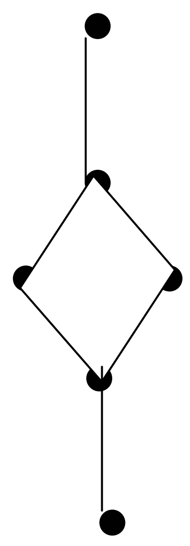
b)



c



d)



10. Hálót alkotnak-e a megadott halmazok a következő rendezési relációval $(a,b) \in R$, ha $a|b$

a) A={1, 2, 3, 4, 6, 12}

b) B={3, 5, 6, 9, 15, 30}

11. Írja föl a relációhoz tartozó Hasse-diagrammot.

H={1, 2, 4, 5, 7, 8, 16, 35},

R={(1,1) (2,2) (4,4) (5,5) (7,7) (8,8) (16,16) (35,35) (1,2) (1,4) (1,5) (1,7) (1,8) (1,16) (1,35) (2,4) (2,8) (2,16) (8,16) (4,16) (7,35) (5,35)}

a)Ez részben- vagy teljes rendezés?

MO: részben pl. 4 a 8-cal nem hasonlítható össze

b) A {2, 8, 16} halmaz részben- vagy teljesen rendezett halmaz a megadott rendezési relációval?
MO: teljesen.

c) Határozza meg a b) részben megadott halmaz alsó és felső korlátait valamint infimumát és szuprémumát!
MO:
alsó: 1, 2
felső: 16
inf: 2
sup: 16