

Halmazelméleti gyakorló

Alapfogalmak

Unió: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ vagy } x \in B\}$; metszet: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ és } x \in B\}$;

különbség: $A \setminus B = A - B = \{x | x \in A \text{ és } x \notin B\}$; komplementer: $\bar{A} = \{x | x \notin A \text{ és } x \in U\}$ (itt U egy univerzum halmaz).

Egyenlőség: két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemeik. Ezzel ekvivalens, hogy $A \subseteq B \text{ és } B \subseteq A$.

Tartalmazás: $A \subseteq B$ ha $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$; valódi tartalmazás:

$A \subset B$ ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$.

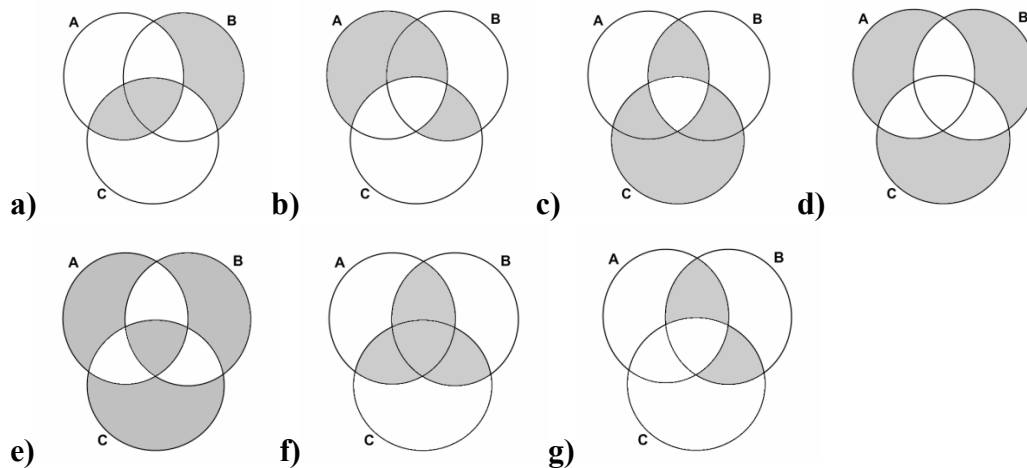
1. Ábrázoljuk Venn-diagrammon az alábbi halmazokat (Az $A - B = A \setminus B$):

- $(A \cup B) \cap C$
- $(A - B) \cap C$
- $(A - B) \cup C$
- $(A - B) - C$
- $(A \cap B) - C$

2. Jelenítsük meg Venn-diagrammon az alábbi halmazokat:

- $A \cup B, A \cap B, A - B, \bar{A}$
- $A \cup (B \cap C), (A \cup B) \cap C, (A - B) \cap C, (A - B) \cup C$
- $(A \setminus B) \setminus C, (A \setminus B) \cup (B \setminus C), (A \cap B) \setminus C$

3. Milyen halmazokat határoznak meg az alábbi Venn-diagrammok?



Mo:

- $(A \cap C) \cup (B - (A \cup C))$
- $(A - C) \cup ((B \cap C) - A)$
- $(C - (A \cap B)) \cup ((A \cap B) - C)$
- $(A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$ vagy $(A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B))$
- $(A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$

f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ vagy pl. $((A \cup B) \cap C) \cup (A \cap B)$
 g) $((A \cap B) - C) \cup ((B \cap C) - A)$

4. Venn-diagrammal és kétoldali tartalmazással is bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket.

a) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

b) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap C) \cup (A \cap B)$

d) $A \cap C((A - B) \cup C)$

5. Adjuk meg a következő halmazok hatványhalmazát:

a) $\{a, n, x\}$

b) $\{\pi, \{2\}, \text{számóca}, 4\}$

6. A De Morgan - azonosságok és az $A - B = A \cap \bar{B}$ azonosság felhasználásával határozzuk meg az alábbi halmazok komplementerét!

a) $(A \cup B) - C$

b) $(A - B) - C$

c) $(A \cup (\bar{B} \cap C)) - D$

d) $\overline{(\bar{A} \cup B) \cup (B \cap \bar{C})}$

7. Szita-formula.

a) Egy nyári sporttáborban kosárlabda, foci és tollaslabda foglalkozásokat tartanak gyerekeknek. Minden gyerek részt vesz legalább egy típusú foglalkozáson. 34-en kosaraznak, 49-en fociznak és 26-an tollasoznak. Akik fociznak és kosaraznak is, azok 13-an vannak, és van 8 gyerek, aki focizik és tollasozik, valamint 9, aki kosarazik és tollasozik. Ezen kívül van Kriszti és Jocó, akik annyira szorgalmasak, hogy mindhárom sportot űzik. Hány gyereknek kell ebédet főzni minden nap?

b) Egy év múlva is megrendezik a tábor. A tavalyi siker után az idei gyerekek még elevenebbek, és most Krisztin és Jocón kívül még Kata, Tímea, Peti és Tomi is lelkesedik mindhárom sportágért, és valahogy úgy alakult, hogy éppen 19-en fociznak és tollasoznak, és szintén 19-en vannak azok, akik fociznak és kosaraznak. Tudjuk, hogy 88 gyerek lakik a táborban. Hányan űzik a kosárlabdát és a tollaslabdát egyszerre, ha az ő számuk hetedakkora, mint ahányan a focizók, a kosarazók és a tollasozók számának összege (amelybe egy embert akár többször is beleszámolunk, ha több sportágat is űz)?

c) Egy nyelviskolában angolul háromszor annyian tanulnak, mint franciául, és franciául feleannyian, mint németül. Az angolul és németül tanulók száma feleannyi, mint a franciául tanulóké, az angolul és franciául tanulóké pedig negyedannyi, mint a németül tanulóké. Akik németül és franciául is tanulnak, azok épp hatodannyian vannak, mint akik angolul tanulnak. Mindhárom nyelvet egyszerre senki sem tanulja. Hányan tanulják az egyes nyelveket, ha 171-en járnak a nyelviskolába?

Mo:

a) $|K| = 34, |F| = 49, |T| = 26, |F \cap K| = 13, |F \cap T| = 8, |K \cap T| = 9, |F \cap K \cap T| = 2$, ez alapján: $|F \cup K \cup T| = |F| + |K| + |T| - |F \cap K| - |F \cap T| - |K \cap T| + |F \cap K \cap T| = 81$, tehát ennyi gyerek van a táborban.

b)

$$x = |K \cap T| = |F| + |K| + |T| - |F \cap K| - |F \cap T| + |F \cap K \cap T| - |F \cup K \cup T| = 7x - 19 - 19 + 6 - 88 \rightarrow 6x = 120 \rightarrow x = 20$$

c) $|A|:|N|:|F| = 3:2:1 \rightarrow |F| = x$ A szöveg alapján:

$$|A \cup N \cup F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F| = 171$$

$$171 = 3x + 2x + x - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 0 \rightarrow 171 = \frac{9}{2}x \rightarrow x = 38 = |F| \rightarrow |N| = 76, \quad |A| = 114$$

5. A Karácsony közeledtével nagy a sürgés –forgás a Mikulás otthonában. A manók, akik a készülődést segítik, három csoportban dolgoznak. Vannak, akik összesítik a gyerekektől kapott leveleket, és megvizsgálják ki volt rossz, és ki volt jó az idén. Mások a kész ajándékokat csomagolják és csoportosítják a szállítási cím szerint, míg a harmadik csoport manói készítik a sok szép ajándékot. A csomagolók kétszer annyian vannak, mint az adatfeldolgozók, míg a játékkészítők háromszor annyian, mint a csomagolók. Vannak olyanok, akik több csoport munkájában is részt vesznek, sőt a lelelkesebb manók Szebi, Adi, Márk és Noel mindhárom csoportba besegítenek. Azok, akik az adatfeldolgozóknak és a csomagolóknak is segítenek, tizenketted annyian vannak, mint a játékkészítők. Akik az adatfeldolgozóknak és a készítőknak is dolgoznak, pedig negyed annyian vannak, mint a csomagolók. A csomagolásban és készítésben is részt vevő manók száma megegyezik az adatfeldolgozó manók számával, és végül a játékkészítők 36-szor többen vannak, mint azok, akik mindhárom területen dolgoznak. Hány manó segíti a Mikulás munkáját?

6. Bergengócia különböző városaiban összesen háromféle nyelvet beszélnek, a zulut, a terrát és a hottentottát. 16 városban használják a zulut, 23 városban a terrát és 27 városban a hottentottát. Van 8 város, ahol a zulut és a terrát is beszélik, 13 ahol a terrát és a hottentottát, illetve 7 város ahol a zulut és hottentottát is. Mindössze 3 olyan város van, ahol mindhárom nyelvet beszélik. Hány városa van összesen Bergengóciának.

7. Egy társaság nagyon kedveli a külföldi utazásokat, tagjai a világ számos különböző táján jártak már. Tudjuk, hogy a tagok közül 15-en jártak már Afrikában, 12-en Ausztráliában és 16-an Dél-Amerikában. Ismert továbbá hogy az Ausztráliában járt társaság negyede és az Afrikában járt csoport harmada járt Dél-Amerikában is. Az Afrikában járt társaság $\frac{2}{5}$ része járt Ausztráliában, továbbá a társaságot alapító házaspár mindkét tagja járt már mindhárom említett kontinensen. Összesen hány tagja van a társaságnak?