2. FEJEZET

Fourier-sorok

2.01.$^{\circ}$ Irjuk fel az alábbi függvény Fourier-sorát:

$$f(x) = \begin{cases} \pi; & \text{ha } -\pi < x \le 0 \\ \pi - x, & \text{ha } \ 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x = (2k+1)\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ f(x+2k\pi) & \end{cases}$$

A felírt sor segítségével számítsuk ki az

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

számsor összegét!

2.02.$^{\circ}$ Határozzuk meg a következő függvény Fourier-sorát:

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{ha } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ -1, & \text{ha } \ \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{ha } x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \qquad (k=0, \pm 1 \pm 2, \dots) \end{cases}$$

Számítsuk ki az

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$

sor összegét!

2.03.$^{\circ}$ Határozzuk meg a következő függvény Fourier-sorát:

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{2}, & \text{a } -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \text{ számközben} \\ \dfrac{3\pi}{2} - x, & \text{a } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \text{ számközben} \end{cases}$$

egyébként a függvény 2π szerint periódikus, vagyis

$$f(x) = f(x + k2\pi) \qquad (k=0, \pm 1 \pm 2, \dots).$$

Határozzuk meg a következő példákban adott függvények Fourier-sorát!

2.4.° $f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}x$, a $-\Pi \le x \le \Pi$ számközben és

$f(x) = f(x + k2\Pi)$.

2.05.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Pi}{2} - x, & \text{a } 0 < x \le \frac{\Pi}{2} \text{ számközben} \\ x - \frac{\Pi}{2}, & \text{a } \frac{\Pi}{2} \le x < \Pi \quad \text{"} \\ x - \frac{3\Pi}{2}, & \text{a } \Pi < x \le \frac{3\Pi}{2} \quad \text{"} \\ \frac{3\Pi}{2} - x, & \text{a } \frac{3\Pi}{2} \le x < 2\Pi \quad \text{"} \\ 0, & \text{az } x = k\Pi \text{ helyeken } (k=0\ \pm 1;\ \pm 2, \ldots) \end{cases}$$

$f(x) = f(x + k2\Pi)$

2.06.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\frac{\Pi}{3} \le x \le \frac{\Pi}{3} \\ \frac{\Pi}{3}, & \text{ha } \frac{\Pi}{3} \le x \le \frac{2\Pi}{3} \\ \Pi - x, & \text{ha } \frac{2\Pi}{3} \le x \le \frac{4\Pi}{3} \\ -\frac{\Pi}{3}, & \text{ha } \frac{4\Pi}{3} \le x \le \frac{5\Pi}{3} \end{cases}$$

$f(x) = f(x + 2k\Pi)$

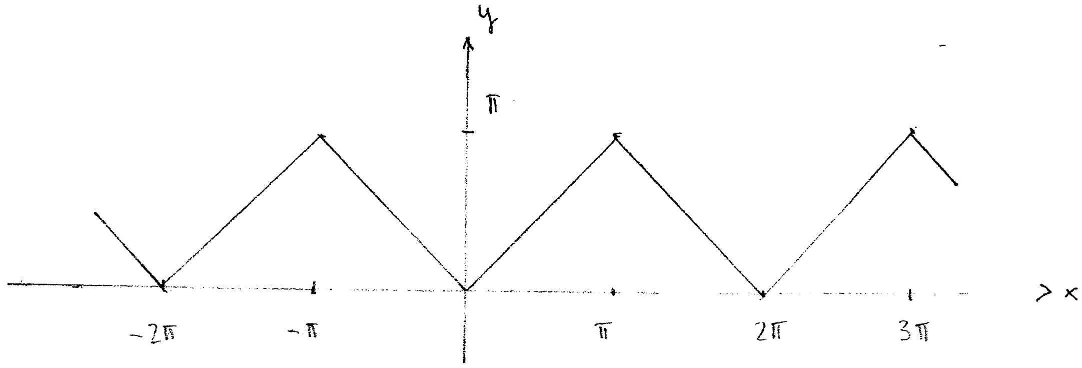
2.07.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{\Pi}{2} \\ \frac{\Pi}{2}, & \text{ha } \frac{\Pi}{2} \le x \le \frac{3\Pi}{2} \\ 2\Pi - x, & \text{ha } \frac{3\Pi}{2} \le x \le 2\Pi \end{cases}$$

$f(x) = f(x + 2k\Pi)$

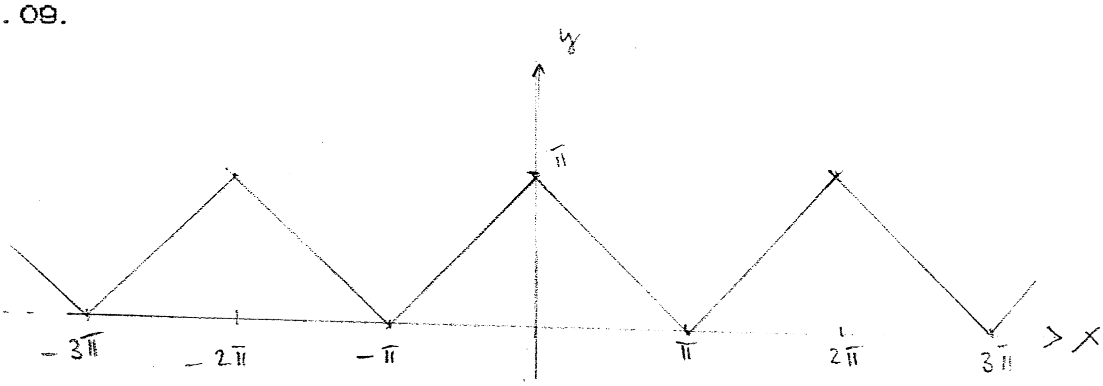
Határozzuk meg a következő példákban görbéikkel adott függvények Fourier-sorát!

2.08.



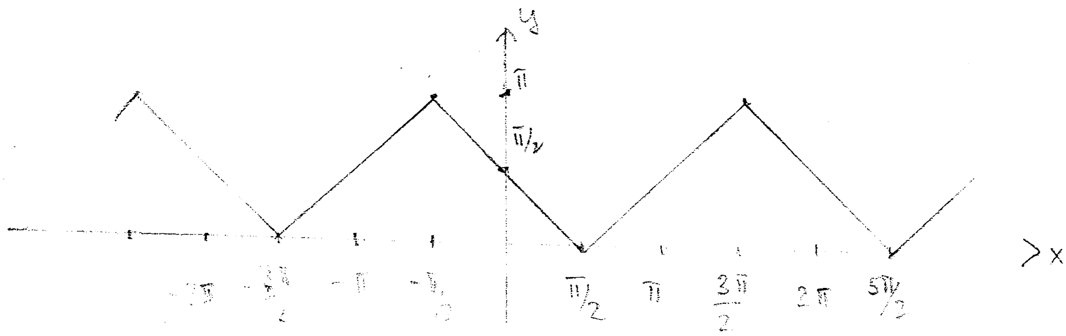
2.1. ábra

2.09.



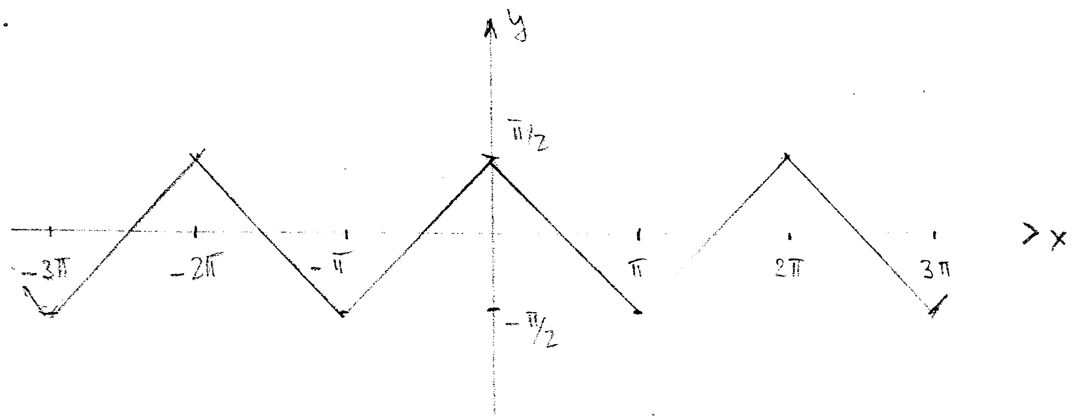
2.2. ábra

2.10.



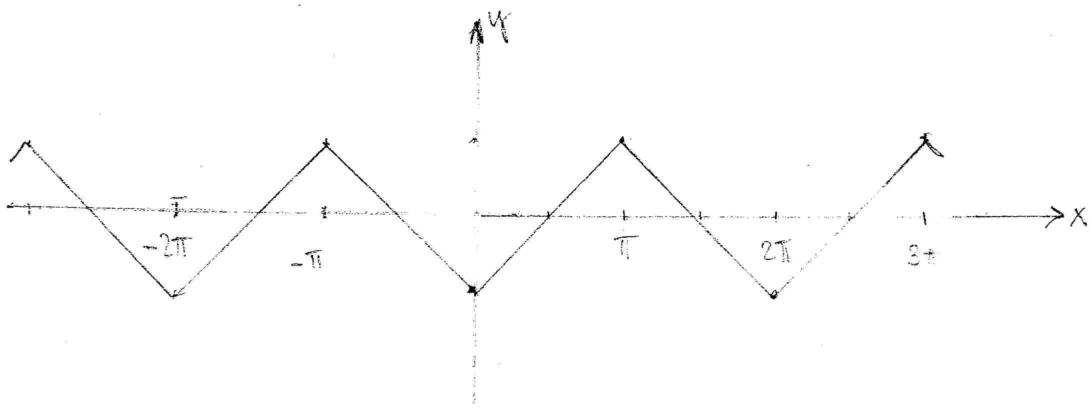
2.3. ábra

2.11.



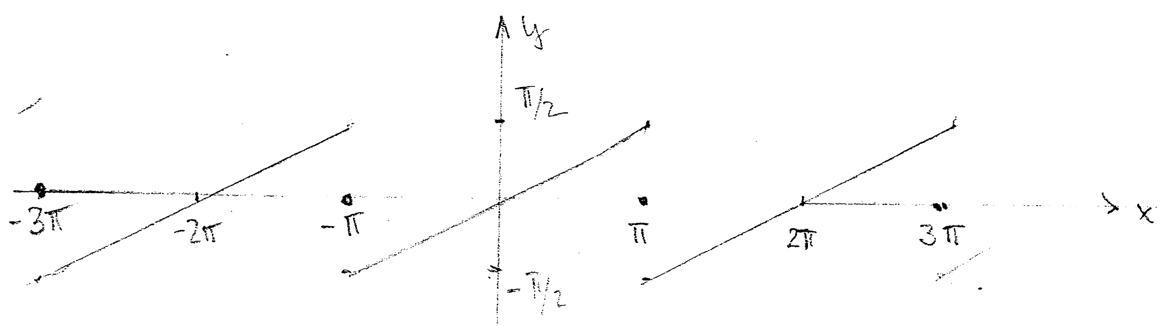
2.4. ábra

2.12.



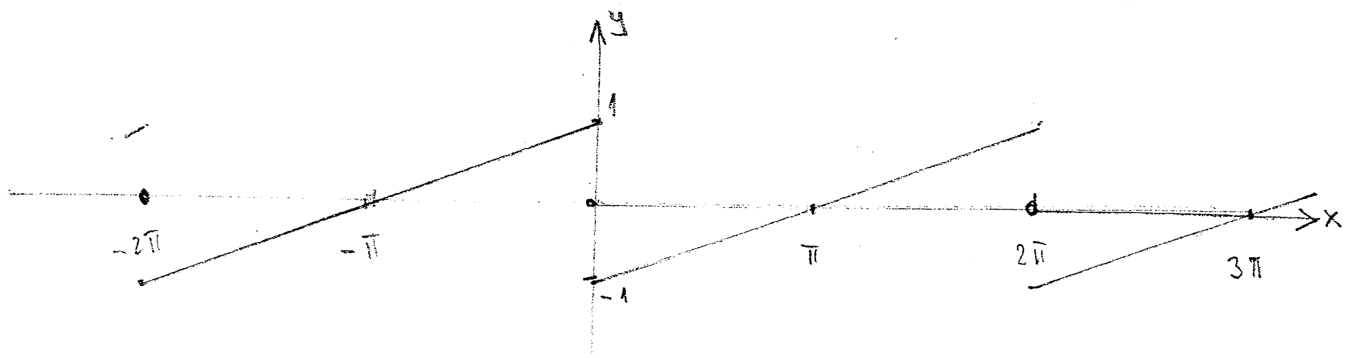
2.5. ábra

2.13.



2.6. ábra

2.14.



2.7. ábra

Határozzuk meg a következő példákban adott függvények Fourier-sorát.

2.15.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi)$$

2.16.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{3\pi}{4}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi).$$

2.17.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\pi < x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ -x, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 0, \; x = (2k+1)\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi).$$

2.18.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\Pi}{2}, & \text{ha} \quad -\Pi < x \leq -\frac{\Pi}{2} \\ x, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} \leq x \leq \frac{\Pi}{2} \\ \frac{\Pi}{2}, & \text{ha} \quad \frac{\Pi}{2} \leq x < \Pi \\ 0, & \text{ha} \quad x = (2k+1)\pi \ ; \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\Pi)$$

2.19.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\Pi}{2}, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{\Pi}{2} - 2x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \frac{\Pi}{2} \\ -\frac{\Pi}{2}, & \text{ha} \quad \frac{\Pi}{2} \leq x \leq \frac{3\Pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\Pi).$$

2.20.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\Pi}{2} - 2x, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} \leq x \leq 0 \\ 2x - \frac{\Pi}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \frac{\Pi}{2} \\ \frac{\Pi}{2}, & \text{ha} \quad \frac{\Pi}{2} \leq x \leq \frac{3\Pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\Pi).$$

2.21.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad -\Pi \leq x \leq 0 \\ -x, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq \Pi \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\Pi)$$

2.22

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\Pi}{2}, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} \leq x \leq \frac{\Pi}{2} \\ \frac{\Pi}{2} - x, & \text{ha} \quad \frac{\Pi}{2} \leq x \leq \frac{3\Pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\Pi).$$

2.23.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad -\Pi \le x \le \Pi \\ f(x + 2k\Pi). \end{cases}$$

$f(x)$ Fourier-sorából számitsuk ki

a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$ számsor összegét!

2.24.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\Pi} x - 1, & \text{ha} \quad -\Pi \le x \le -\frac{\Pi}{2} \\ \cos x, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} \le x \le \frac{\Pi}{2} \\ \frac{2}{\Pi} x - 1, & \text{ha} \quad \frac{\Pi}{2} \le x \le \Pi \end{cases}$$

2.25. $f(x) = \sin^2 x.$

2.26. $f(x) = \cos^2 x.$

2.27.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{9} & -\Pi \le x \le \Pi \\ f(x + 2k\Pi) \end{cases}$$

2.28. $f(x) = |\sin x|$

2.29. $f(x) = |\cos x|$

2.30.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2} & 0 \le x \le 2\Pi \\ f(x + 2k\Pi). \end{cases}$$

2.31.° Fourier-sorba fejtendő a következő függvény:

$f(x) = x^2 \qquad -1 \le x \le 1$

$f(x) = f(x + 2k)$

2.32.° Felírandó a következő függvény Fourier-sora.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -2 < x \le -1 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad x = 4k + 2 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 4k)$$

Határozzuk meg a következő példákban adott függvények Fourier-sorát.

2.33.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha} \quad 0 < x < 4 \\ 1, & \text{ha} \quad x = 4k \\ f(x + 4k) & \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

2.34.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ha} \quad -1 \le x \le 1 \\ f(x + 2k) \end{cases}$$

2.35.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} - 1}{2}, & \text{ha} \quad -3 \le x \le 0 \\ \dfrac{e^{x} - 1}{2}, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 6k).$$

2.36.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad x = (2k + 1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + k\pi).$$

2.37.

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1, & \text{ha} \quad 2 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + k\pi).$$

MEGOLDÁS

2.01. Ismeretes, hogy a 2Π szerint periódikus

$y = f(x)$ függvény

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

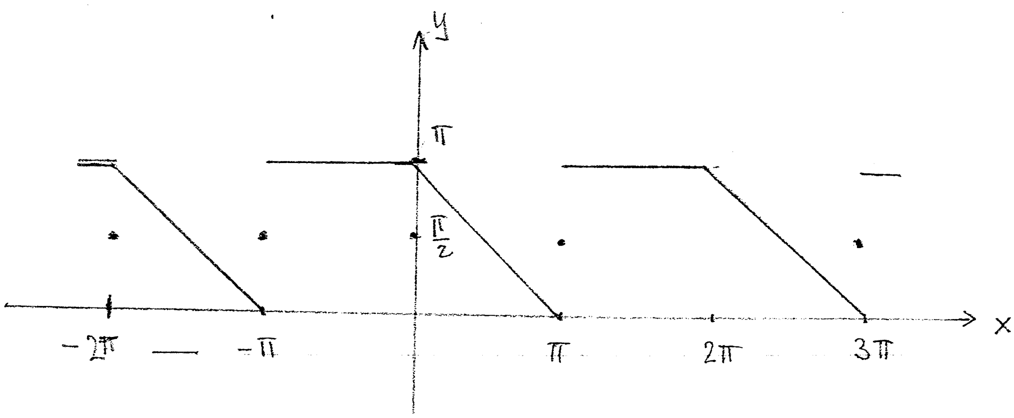
Fourier-sorában szereplő együtthatókat az

$$a_o = \frac{1}{\Pi}\int_a^{a+2\Pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\Pi}\int_a^{a+2\Pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\Pi}\int_a^{a+2\Pi} f(x)\sin kx\,dx$$

képletek segítségével számíthatjuk ki.



2.8. ábra

Feladatunkban adott függvényt a 2.8 ábra szemlélteti. A függvény egy teljes periódusa pl. a $(-\Pi, \Pi)$ számközben

$$f(x) = \begin{cases} \Pi, & \text{ha } -\Pi < x \le 0 \\ \Pi - x, & \text{ha } 0 \le x < \Pi \end{cases}$$

Az együtthatókat két integrál összegeként kapjuk.

$$a_0 = \frac{1}{\Pi}\left\{\int_{-\Pi}^{0}\Pi dx + \int_{0}^{\Pi}(\Pi - x)dx\right\} = \frac{1}{\Pi}\left\{\Big[\Pi x\Big]_{-\Pi}^{0} + \left[\Pi x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\Pi}\right\} = \frac{3}{2}\Pi .$$

$$a_k = \frac{1}{\Pi}\left\{\int_{-\Pi}^{0}\Pi \cos kx \, dx + \int_{0}^{\Pi}(\Pi - x)\cos kx \, dx\right\}$$

A második integrálban a parciális integrálás szabályát alkalmazzuk:

$$a_k = \frac{1}{\Pi}\left\{\left[\Pi \frac{\sin kx}{k}\right]_{-\Pi}^{0} + \left[(\Pi - x)\frac{\sin kx}{k}\right]_{0}^{\Pi} + \int_{0}^{\Pi}\frac{\sin kx}{k}dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Pi}\left[-\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{0}^{\Pi} = -\frac{\cos k\Pi - 1}{\Pi k^2}$$

Mivel $\cos k\Pi = (-1)^k$

$$a_k = \frac{1-(-1)^k}{k^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\Pi k^2}, & \text{ha } k = 2n+1 \\ 0, & \text{ha } k = 2n \end{cases}$$

Hasonló módon:

$$b_k = \frac{1}{\Pi}\left\{\int_{-\Pi}^{0}\Pi \sin kx \, dx + \int_{0}^{\Pi}(\Pi - x)\sin kx \, dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Pi}\left\{\left[-\Pi \frac{\cos kx}{k}\right]_{-\Pi}^{0} + \left[-(\Pi - x)\frac{\cos kx}{k}\right]_{0}^{\Pi} + \int_{0}^{\Pi}\frac{\cos kx}{k}dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Pi}\left\{-\frac{\Pi}{k} - \frac{\Pi}{k}\cos k\Pi + \frac{\Pi}{k} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{0}^{\Pi}\right\} = -\frac{1}{k}(-1)^k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

A függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \frac{3}{4}\Pi + \frac{2}{\Pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{\Pi 3^2}\cos 3x +$$

$$+ \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{\Pi 5^2}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

Rendezzük át a sort:

$$f(x) = \frac{3}{4}\Pi + \frac{2}{\Pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right) +$$

$$+ \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + - \ldots\right)$$

A Fourier-sor az $f(x)$ folytonossági helyein előállitja a függvényt. Helyettesithetünk tehát a sorba $x = 0$-t.

A függvény a zérus helyen Π értékű, $\cos(0) = 1$; $\sin(0) = 0$, tehát

$$\Pi = \frac{3}{4}\Pi + \frac{2}{\Pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right), \qquad \text{azaz}$$

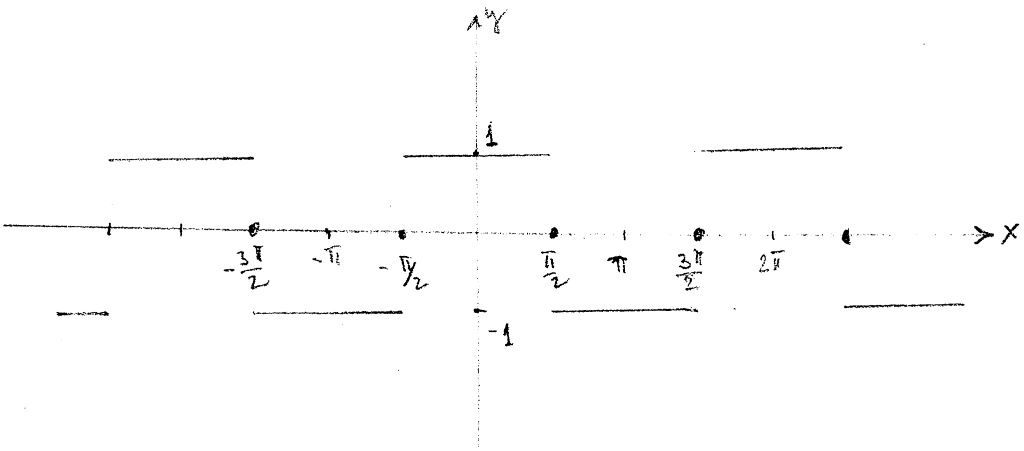
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\Pi^2}{8}.$$

Fourier sorfejtés célszerű alkalmazásával számos számsor összegét meg lehet határozni.

2.02. Ábrázolva az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} < x < \frac{\Pi}{2} \\ -1, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} < x < \frac{3\Pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad x = (2k+1)\frac{\Pi}{2} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots) \\ f(x+2k\Pi) & \end{cases}$$

függvényt, látható, hogy a "görbe" az y tengelyre szimmetrikus, azaz a függvény páros. Ekkor a Fourier sor is csak páros függvényekből tevődik össze, azaz $b_k = 0$.



2.9. ábra

A koszinuszos tagok együtthatói, valamint a konstans kiszámításánál elegendő a félperiódusra integrálni, s az eredmény kétszeresét venni. Igy

$$a_0 = \frac{2}{\Pi} \int_0^{\Pi} f(x)\, dx, \qquad a_k = \frac{2}{\Pi} \int_0^{\Pi} f(x) \cos kx\, dx.$$

$$a_0 = \frac{2}{\Pi} \left\{ \int_0^{\frac{\Pi}{2}} dx - \int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} dx \right\} = 0$$

$$a_k = \frac{2}{\Pi} \left\{ \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos kx\, dx - \int_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} \cos kx\, dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{\Pi} \left\{ \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\Pi}{2}} - \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{\frac{\Pi}{2}}^{\Pi} \right\} = \frac{4}{k\Pi} \sin\frac{k\Pi}{2}\ .$$

Figyelembevéve a szinuszfüggvény értékeit:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k = 2n \\ \frac{4}{k\Pi}, & \text{ha} \quad k = 4n+1 \\ -\frac{4}{k\Pi}, & \text{ha} \quad k = 4n+3\ . \end{cases}$$

A keresett Fourier sor:

$$f(x) = \frac{4}{\Pi}\left[\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \dots\right]$$

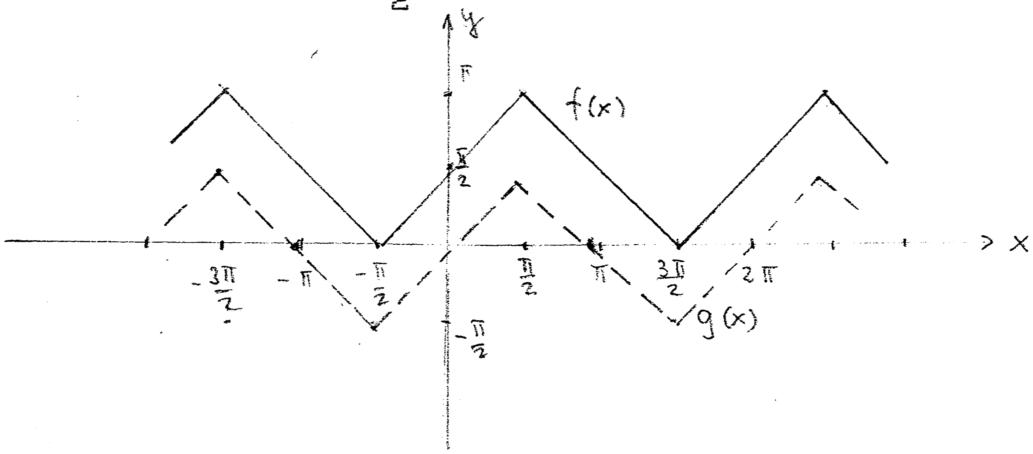
A sorba x = 0-t behelyettesítve

$$1 = \frac{4}{\Pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots\right]$$

A keresett sorösszeg: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots = \frac{\Pi}{4}$.

2.03. A függvény se nem páros, se nem páratlan, ennek ellenére egyszerű lesz az együtthatók kiszámítása, ha észrevesszük, hogy f(x)-szet az y tengely mentén $\frac{\Pi}{2}$ - vel negatív irányba eltolva páratlan függvényt kapunk.
Jelöljük ezt az új függvényt g(x)-el. A kettő között a kapcsolat

$$f(x) = g(x) + \frac{\Pi}{2} \qquad \text{(ld. 2.10. ábra)}$$



2.10. ábra

Ha az f(x) függvénynél a_o-t kiszámítjuk, az előbbiek alapján $\frac{\Pi}{2}$-t kell kapni eredményül. Ez könnyen ellenőrizhető. Számítsuk ki tehát először $g(x)$ Fourier-sorát.

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = g(x + 2k\pi).$$

$g(x)$ páratlan függvény, tehát $a_0 = a_k = 0$, és a b_k együtthatókat a

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

összefüggés alapján számolhatjuk.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos kx}{k} \, dx + \left[-(\pi - x) \frac{\cos kx}{k} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos kx}{k} \, dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{2k} \cos k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2k} \cos k\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin kx}{k^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\} =$$

$$= \frac{2}{k^2 \pi} 2 \sin k\frac{\pi}{2} = \frac{4}{k^2 \pi} \sin k\frac{\pi}{2} \quad .$$

Mivel $\quad \sin k\frac{\Pi}{2} = \begin{cases} 0\,; & \text{ha} \quad k = 2n \\ (-1)^k\,; & \text{ha} \quad k = 2n+1 \end{cases}$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{\Pi(2n+1)^2}(-1)^n$$

A g(x) függvény Fourier-sora tehát a következő:

$$g(x) = \frac{4}{\Pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x =$$

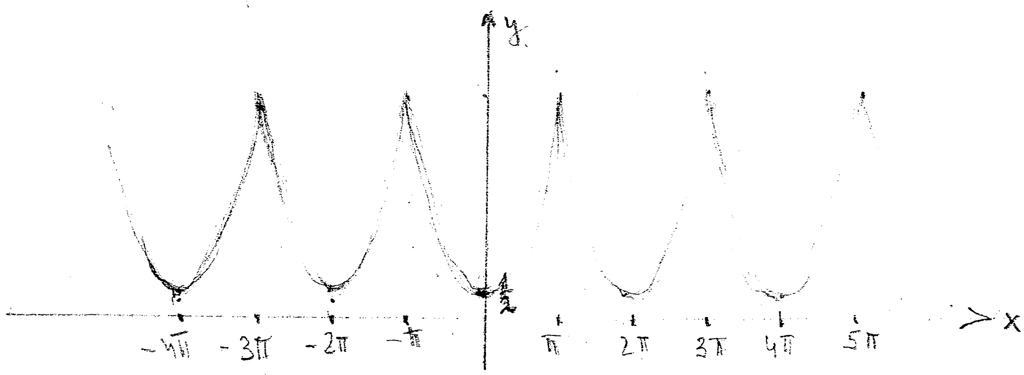
$$= \frac{4}{\Pi}\left[\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \ldots\right]$$

Végül az f(x) Fourier-sora:

$$f(x) = \frac{\Pi}{2} + \frac{4}{\Pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x =$$

$$= \frac{\Pi}{2} + \frac{4}{\Pi}\left[\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - + \ldots\right].$$

2.04. Mint a 2.11. ábrából látható a függvény páros.



2.11. ábra

Ezért $\quad b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\Pi}\int_0^{\Pi} \operatorname{ch}x\,dx = \frac{2}{\Pi}\Big[\operatorname{sh}x\Big]_0^{\Pi} = \frac{2}{\Pi}\operatorname{sh}\Pi.$$

$$a_k = \frac{2}{\Pi}\int_0^{\Pi} \operatorname{ch}x \cos kx\,dx$$

Az integrálást a parciális integrálás módszerével végeztük: kétszer számítjuk ki az integrál értékét: ellenkező "szereposztásban".

$$\int \underbrace{\mathrm{ch}x}_{u}\ \underbrace{\cos kx}_{v'}\,dx = \mathrm{ch}x\,\frac{\sin kx}{k} - \frac{1}{k}\int \mathrm{sh}x\,\sin kx\,dx$$

$$\int \underbrace{\mathrm{ch}x}_{v'}\ \underbrace{\cos kx}_{u}\,dx = \mathrm{sh}x\,\cos kx + k\int \mathrm{sh}x\,\sin kx\,dx$$

Az első egyenletet k^2-tel szorozva és a másodikat hozzáadva a jobboldalon lévő integrálok összege zérus lesz, tehát

$$(k^2+1)\int \mathrm{ch}x\,\cos kx\,dx = k\,\mathrm{ch}x\,\sin kx + \mathrm{sh}x\,\cos kx$$

A keresett határozott integrál így:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{k^2+1}\left[k\,\mathrm{ch}x\,\sin kx + \mathrm{sh}x\,\cos kx\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{k^2+1}\,\mathrm{sh}\pi\,\cos k\pi$$

Mivel $\cos k\pi = (-1)^k$

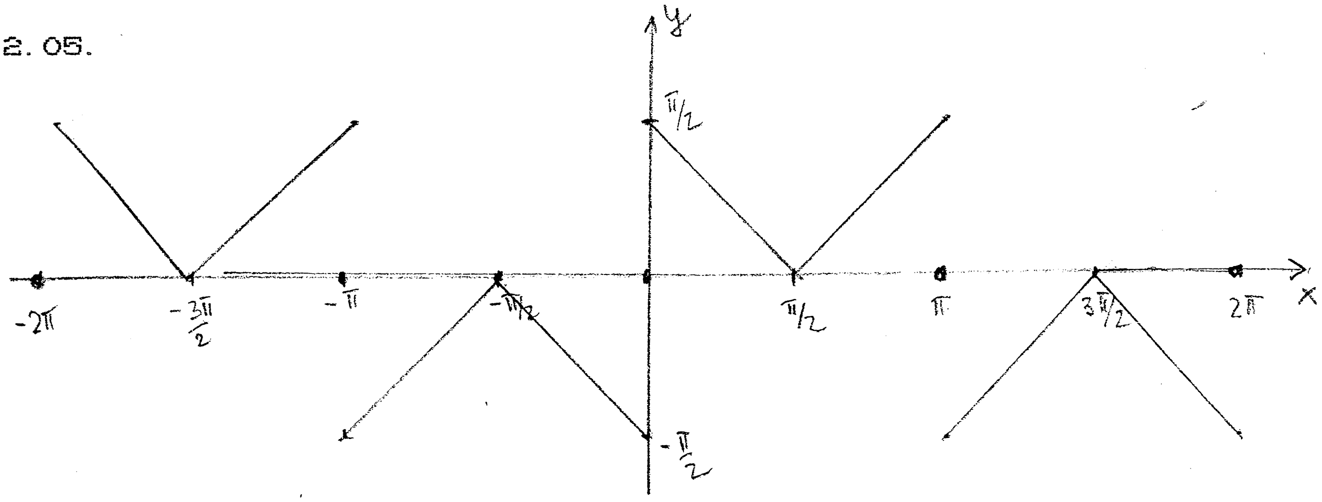
$$a_k = \frac{2\,\mathrm{sh}\pi}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

A keresett Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}\cos kx\right) =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sh}\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\cos 3x + \frac{\cos 4x}{17} - + \ldots\right).$$

2.05.

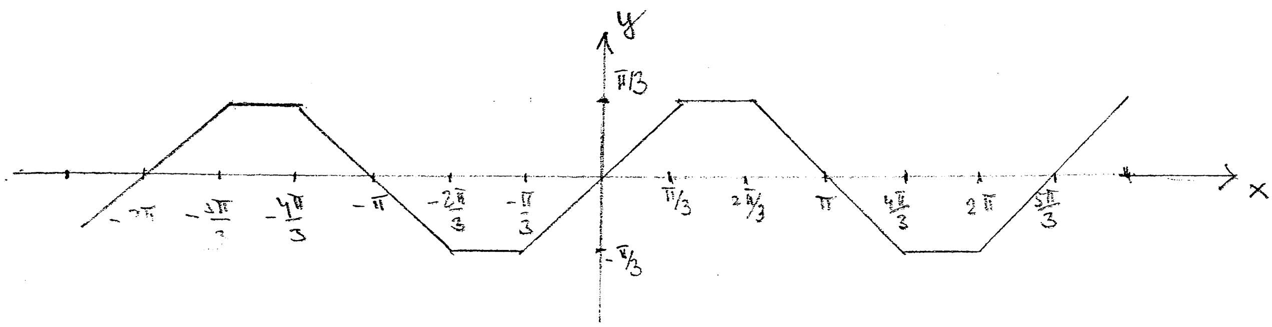


2.12. ábra

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2k+1}+(-1)^{k+1}\frac{4}{\Pi\,(2k+1)^{2}}\right)\sin(2k+1)x=$$

$$=2\left[\left(1-\frac{2}{\Pi}\right)\sin x+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9\Pi}\right)\sin 3x+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{25\Pi}\right)\sin 5x+\ldots\right].$$

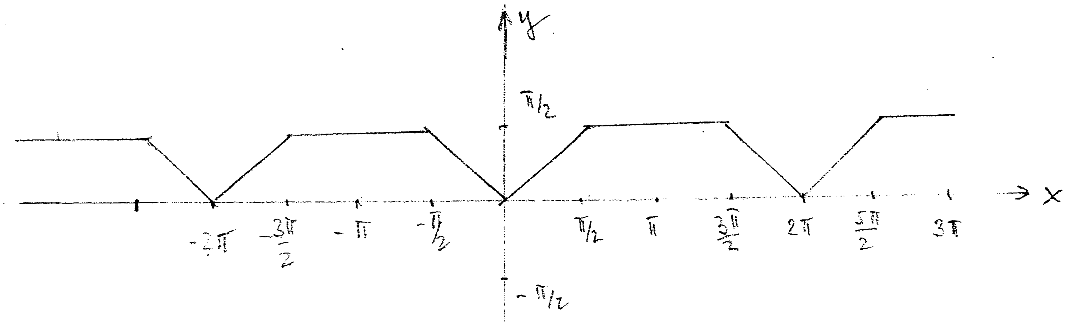
2.06.



2.13. ábra

$$f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{\Pi}\left(\sin x-\frac{\sin 5x}{5^{2}}+\frac{\sin 7x}{7^{2}}-\frac{\sin 11x}{11^{2}}+\frac{\sin 13x}{13^{2}}-+\ldots\right).$$

3.07.



2.14. ábra

$$f(x) = \frac{3\Pi}{8} - \frac{2}{\Pi}\left(\cos x + \frac{2\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\cos 6x}{6^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right).$$

2.08.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0 \le x < \Pi \\ 2\Pi - x, & \text{ha} \quad \Pi \le x < 2\Pi \\ f(x+2k\Pi) & \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\Pi}{2} - \frac{4}{\Pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right).$$

2.09.

$$f(x) = \begin{cases} \Pi + x, & \text{ha} \quad -\Pi \le x < 0 \\ \Pi - x, & \text{ha} \quad 0 \le x < \Pi \\ f(x+2k\Pi) & \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\Pi}{2} + \frac{4}{\Pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right).$$

2.10.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Pi}{2} - x, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} < x \le \frac{\Pi}{2} \\ x - \frac{\Pi}{2}, & \text{ha} \quad \frac{\Pi}{2} < x \le 3\frac{\Pi}{2} \\ f(x+2k\Pi) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\Pi}{2} - \frac{4}{\Pi}\left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right].$$

2.11.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Pi}{2} + x, & \text{ha} \quad -\Pi < x \le 0 \\ \frac{\Pi}{2} - x, & \text{ha} \quad 0 < x \le \Pi \\ f(x+2k\Pi) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\Pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right].$$

2.12.

$$f(x) = \begin{cases} -\left(x + \frac{\Pi}{2}\right), & \text{ha} \quad -\Pi < x \le 0 \\ -\left(\frac{\Pi}{2} - x\right), & \text{ha} \quad 0 < x \le \Pi \\ f(x+2k\Pi) \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{4}{\Pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots\right].$$

2.13.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha} \quad -\Pi < x < \Pi \\ 0, & \text{ha} \quad x = (2k+1)\Pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ f(x+2k\Pi) \end{cases}$$

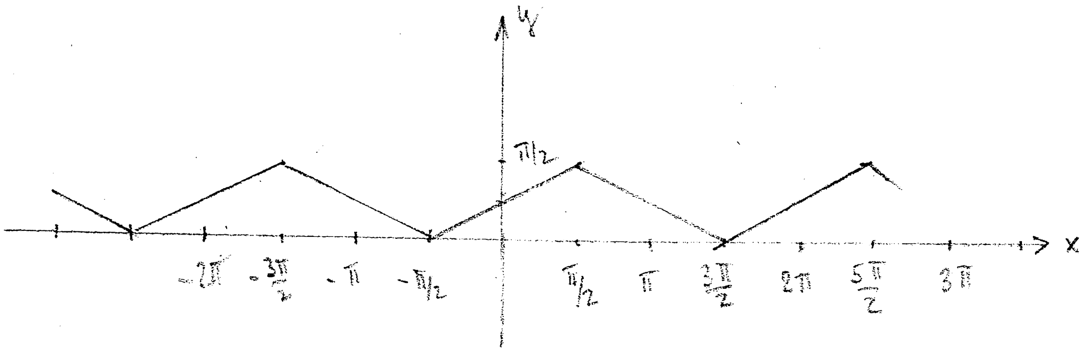
$$f(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

2.14.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\Pi} - 1, & \text{ha} \quad 0 < x < 2\Pi \\ 0, & \text{ha} \quad x = 2k\Pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ f(x + 2k\Pi) \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{2}{\Pi}\left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \dots\right]$$

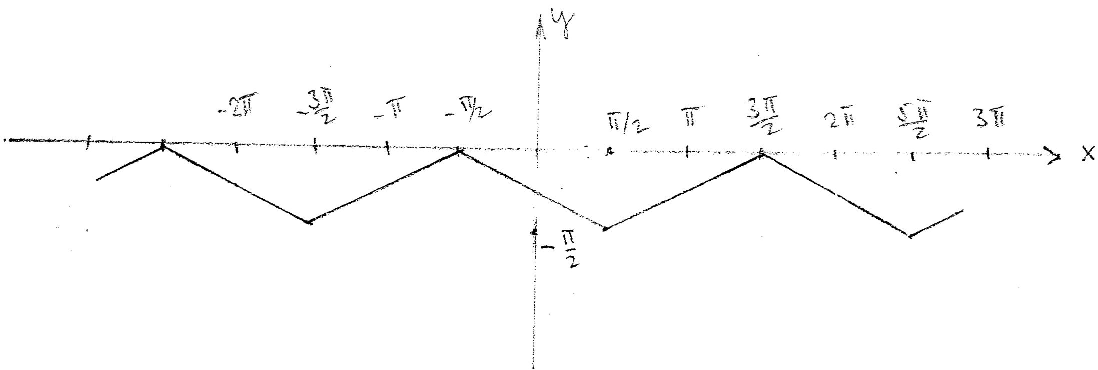
2.15.



2.15. ábra

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right).$$

2.16.

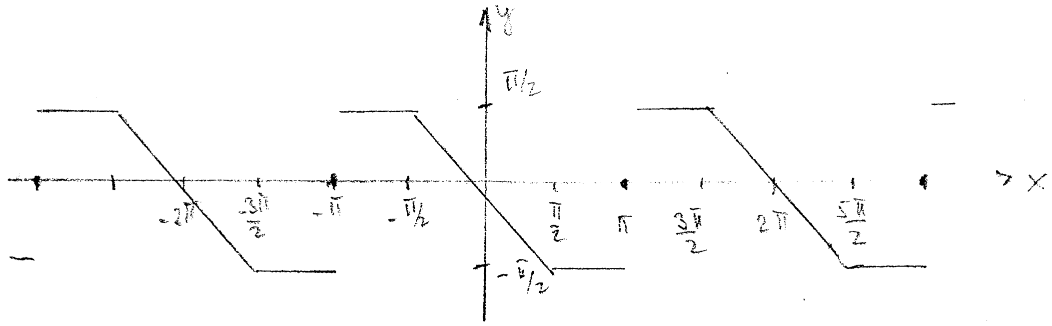


2.16. ábra

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots\right).$$

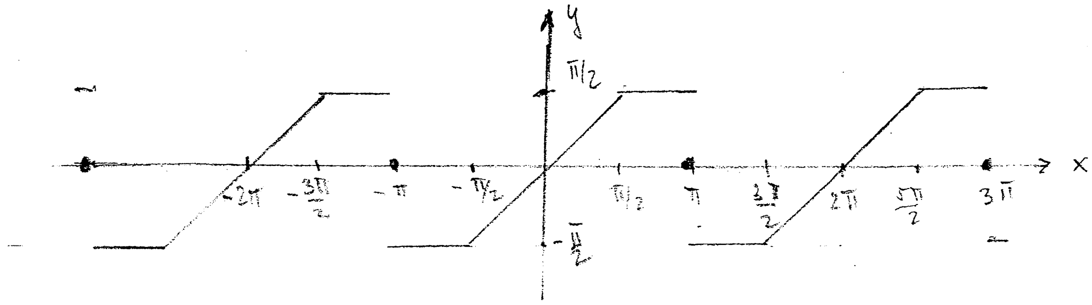
2.17.

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{3\pi-2}{3^2}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \dots\right].$$



2.17. ábra

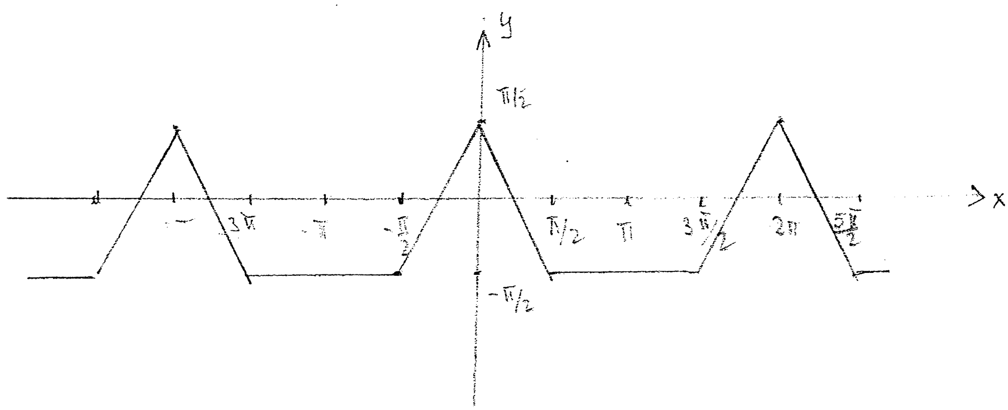
2.18.



2.18. ábra

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{3\pi-2}{3^2}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \ldots\right].$$

2.19.

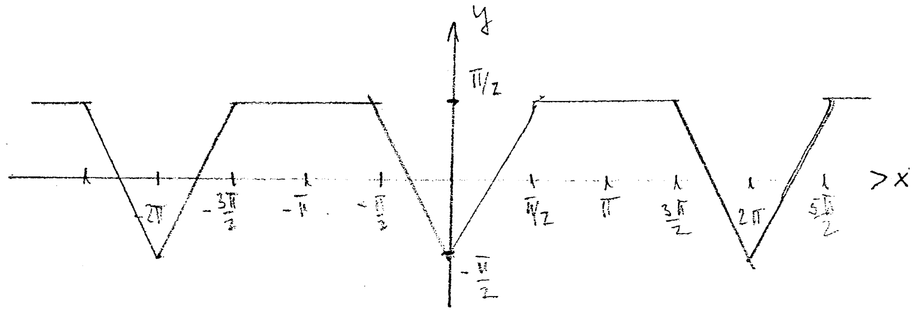


2.19. ábra

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{2}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{6^2}\cos 6x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \ldots\right).$$

2.20.



2.20. ábra

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{2}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{6^2}\cos 6x + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \ldots\right].$$

2.21.

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right].$$

2.22.

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots\right].$$

2.23.

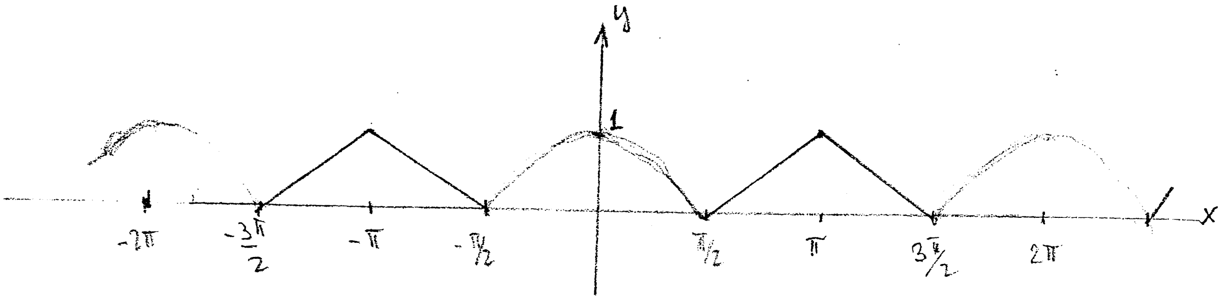
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \frac{1}{4^2}\cos 4x + - \ldots\right]$$

Az $x = 0$ helyen $\cos kx = 1$, így mivel $f(0) = 0$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \ldots\right].$$

Azaz $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

2.24.

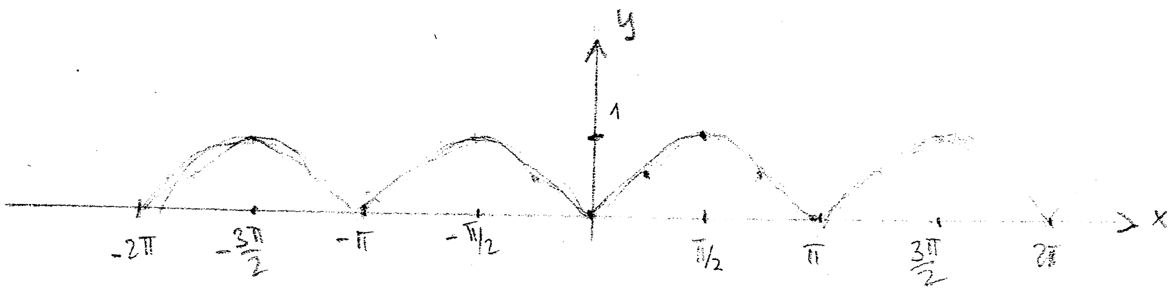


2.21 ábra

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4}{\pi}\cos x + \left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{8}{\pi 2^2}\right)\cos 2x - \frac{4}{\pi 3^2}\cos 3x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4^2-1}\cos 4x - \frac{4}{\pi 5^2}\cos 5x + \left(\frac{1}{6^2-1} + \frac{8}{\pi 6^2}\right)\cos 6x - \ldots\right].$$

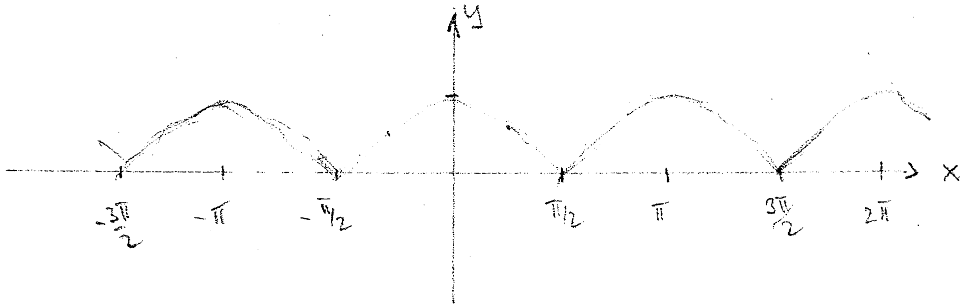
2.25.



2.22. ábra

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

2.26.



2.23 ábra

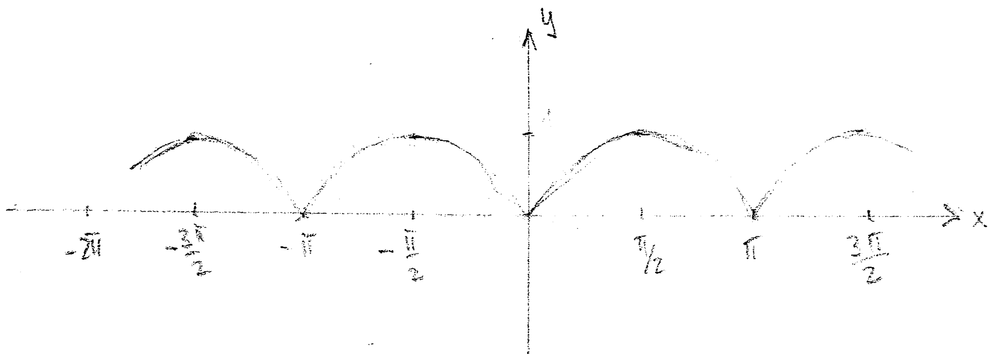
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

2.27.

$$f(x) = \frac{2}{9}\left[(\Pi^2-6)\sin x - \frac{2\Pi^2-6}{2^2}\sin 2x + \frac{3\Pi^2-6}{3^2}\sin 3x - \right.$$

$$\left. - \frac{4\Pi^2-6}{4^2}\sin 4x + - \ldots\right].$$

2.28.



2.24. ábra

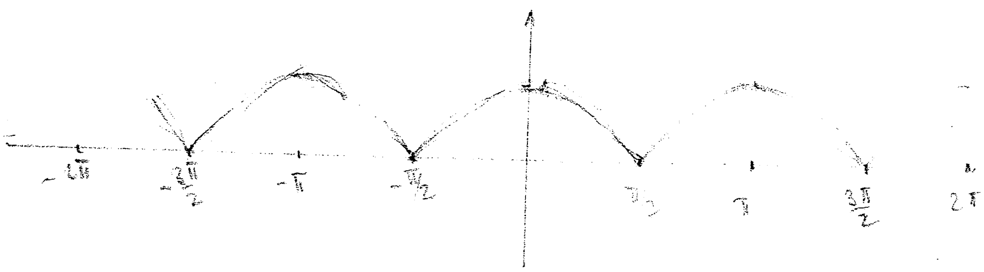
$$f(x) = \frac{2}{\Pi} - \frac{4}{\Pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \ldots \right)$$

Érdemes észrevenni, hogy ha $x = 0$, akkor

$$0 = \frac{2}{\Pi} - \frac{4}{\Pi}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots\right], \quad \text{azaz}$$

$$\frac{4}{\Pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{2}{\Pi}, \quad \text{vagyis} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

2.29.



2.25. ábra

$$f(x) = \frac{2}{\Pi} + \frac{4}{\Pi}\left[\frac{\cos 2x}{2^2-1} - \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} - + \ldots\right]$$

$x = 0$-nál $$1 = \frac{2}{\Pi} + \frac{4}{\Pi}\left[\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - + \ldots\right].$$

Vagyis $$\frac{\Pi-2}{\Pi}\,\frac{\Pi}{4} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - + \ldots,$$

azaz: $$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{1}{4k^2-1} = \frac{\Pi-2}{\Pi}.$$

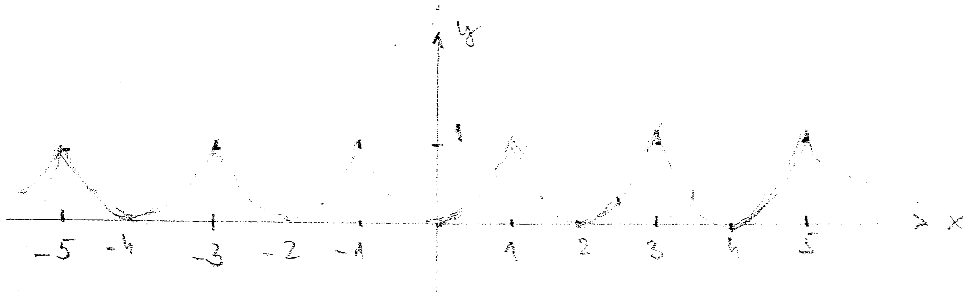
2.30.

$$f(x) = \frac{2}{\Pi} - \frac{4}{\Pi}\left[\frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{15} + \frac{\cos 3x}{35} + \ldots\right].$$

2.31° Az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad -1 \le x \le 1 \\ f(x+2k) & \end{cases}$$

függvény nem 2Π, hanem általános 2ℓ periódusú függvény.



2.26. ábra

A Fourier-sor ebben az esetben

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\frac{k\Pi}{\ell}x + b_k \sin\frac{k\Pi}{\ell}x \right]$$

alakú, ahol az együtthatókat az

$$a_o = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) \cos\frac{k\Pi}{\ell}x\, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) \sin\frac{k\Pi}{\ell}x\, dx$$

összefüggések segítségével számítjuk ki.

Feladatunkban az f(x) függvény páros, s így $b_k = 0$; és itt is alkalmazható a félintervallumra integrálás:

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^1 f(x)\,\cos\frac{k\Pi}{\ell}x\,dx \quad \text{ill.} \quad a_o = \frac{2}{\ell}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Tehát mivel $2\ell = 2$, s így $\ell = 1$

$$a_o = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

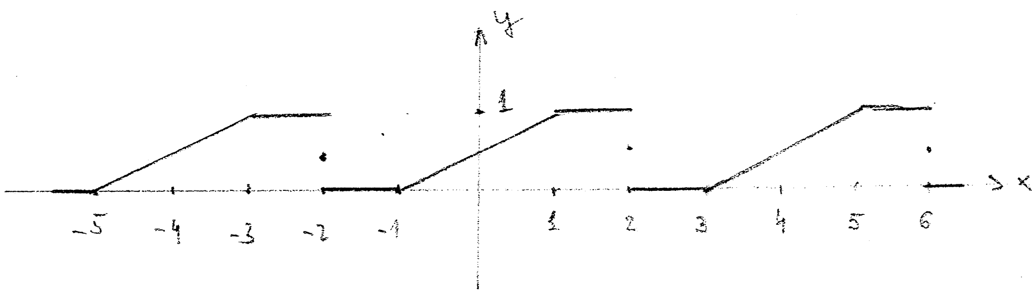
$$a_k = 2\int_0^1 x^2 \cos k\Pi x\,dx \quad \text{parciálisan integrálva:}$$

$$a_k = \frac{4}{k\Pi}\left\{\left[x\,\frac{\cos k\Pi x}{k\Pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos k\Pi x}{k\Pi}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{4}{k\Pi}\left\{\frac{\cos k\Pi}{k\Pi} - \left[\frac{\sin k\Pi x}{k^2\Pi^2}\right]_0^1\right\} = \frac{4}{k^2\Pi^2}\,(-1)^k.$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\Pi^2}\left\{-\cos\Pi x + \frac{1}{2^2}\cos 2\Pi x - \frac{1}{3^2}\cos 3\Pi x + - \dots\right\}.$$

2.32.



2.27. ábra

A függvény a 2.2 . ábrán látható. Leolvasható, hogy ha a görbét $(-\frac{1}{2})$-del az új y tengely irányában eltoljuk, páratlan függvényt nyerünk. Legyen tehát

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -2 \le x \le -1 \\ \frac{x}{2}, & \text{ha} \quad -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad x = 4k+2; \ (k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \\ f(x+4k) & \end{cases}$$

A periódus $2\ell = 4$, vagyis $\ell = 2$.

$$a_0 = a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 \frac{x}{2}\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx\right\} =$$

$$= \left[\frac{x}{2}\,\frac{-\cos\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos\frac{k\pi}{2}x\,dx - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\frac{k\pi}{2}x}{\frac{k\pi}{2}}\right]_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{2}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi}{2}x\right]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\cos k\pi + \frac{1}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} =$$

$$= -\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} - \cos k\pi\right]$$

Mivel

$$\sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k = 2n \\ (-1)^k, & \text{ha} \quad k = 2n+1 \end{cases}$$

és

$$\cos k\pi = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad k = 2n \\ -1, & \text{ha} \quad k = 2n+1 \end{cases}$$

ezért

$$b_{2k} = \frac{-1}{2k\pi}$$

$$b_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)\pi}\left[(-1)^k\frac{2}{(2k+1)\pi} + 1\right].$$

A keresett Fourier-sor: $f(x) = \frac{1}{2} + g(x)$. Tehát:

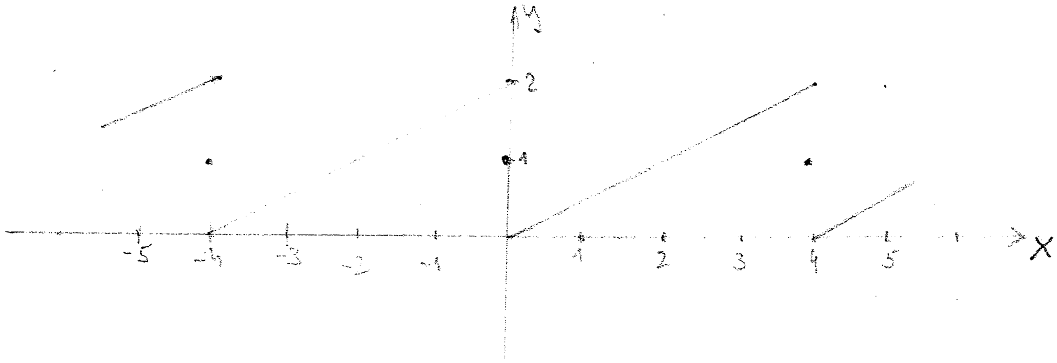
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Pi}\Big[\left(1 + \frac{2}{\Pi}\right)\frac{1}{\Pi}\sin\frac{\Pi}{2}x - \frac{1}{2\Pi}\sin\frac{2\Pi}{2}x +$$

$$+ \left(1 - \frac{2}{3\Pi}\right)\frac{1}{3\Pi}\sin\frac{3\Pi}{2}x - \frac{1}{4\Pi}\sin\frac{4\Pi}{2}x +$$

$$+ \left(1 + \frac{2}{5\Pi}\right)\frac{1}{5\Pi}\sin\frac{5\Pi}{2}x - \frac{1}{6\Pi}\sin\frac{6\Pi}{2}x + \dots \Big].$$

2.33.

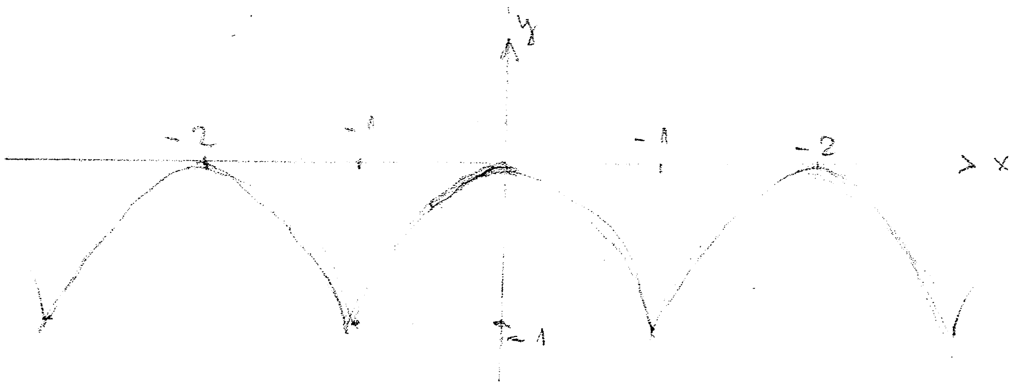
$$f(x) = 1 - \frac{2}{\Pi}\left(\sin\frac{\Pi}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2\frac{\Pi}{2}x + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\Pi}{2}x + \dots\right)$$



2.28. ábra

2.34.

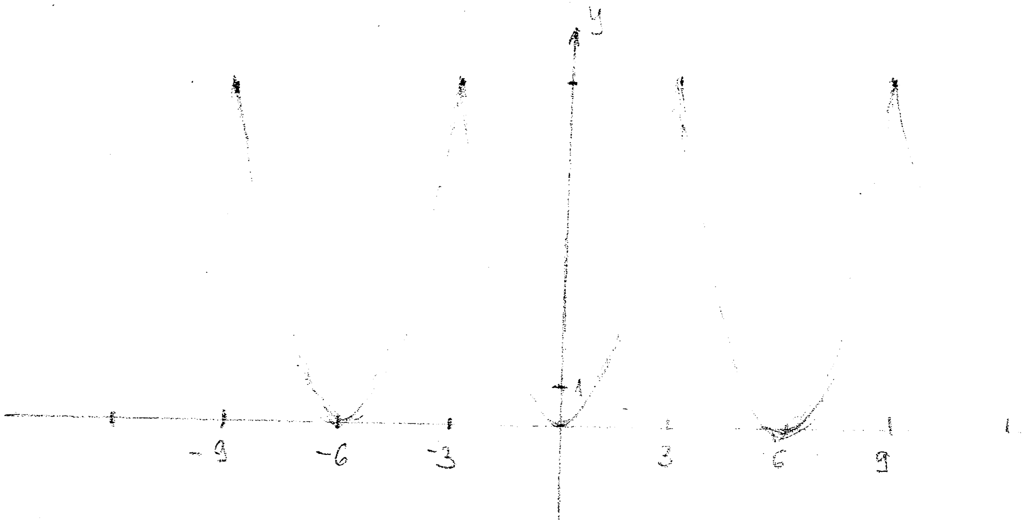
$$f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{\Pi^2}\left(\cos\Pi x - \frac{1}{2^2}\cos 2\Pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\Pi x - \dots\right).$$



2.29. ábra

2.35.

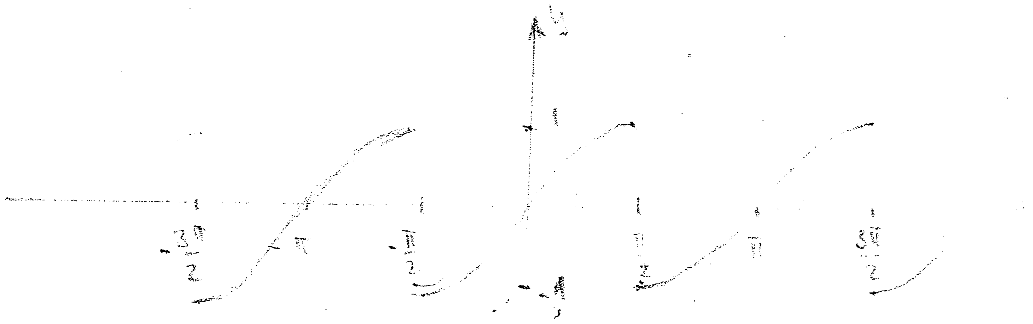
$$f(x) = \frac{e^3 - 4}{6} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^3(-1)^k - 1}{9 + k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi}{3}x .$$



2.30. ábra

2.36.

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3} - \frac{2\sin 4x}{3\cdot 5} + \frac{3\sin 6x}{5\cdot 7} - + \ldots\right) .$$

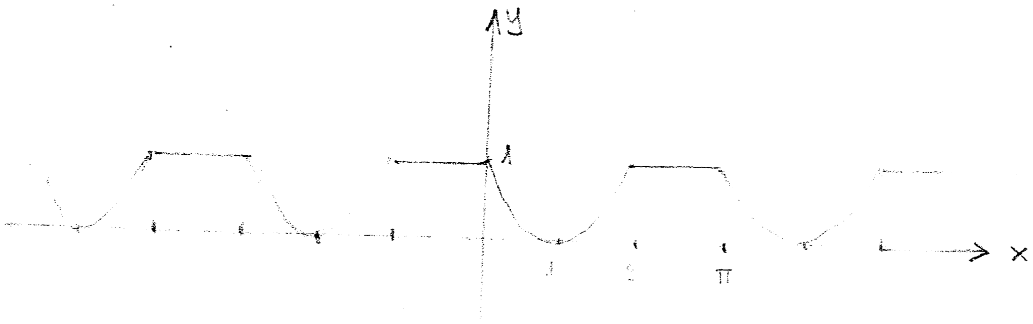


2.31. ábra

2.37.

$$f(x) = 1 - \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{ \left(\frac{1+\cos 4k}{k^2} - \frac{\sin 4k}{2k^3}\right)\cos 2kx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin 4k}{k^2} + \frac{\cos 4k - 1}{2k^3}\right)\sin 2kx \right\}.$$



2.32. ábra