Elsőrendű logika

Minden veréb madár. feltétel ①
Minden madár gerinces feltétel ②
Minden veréb gerinces következmény

Érezzük, hogy helyes, de a nulladrendű logika eszközeivel nem lehet formalizálni → predikátumok és kvantorok bevezetése

$\forall x [V(x) \rightarrow M(x)]$ feltétel ①
$\forall x [M(x) \rightarrow G(x)]$ feltétel ②
$\forall x [V(x) \rightarrow G(x)]$ következmény

A feltételek és a következmény is elsőrendű formulák. V, M, G predikátumok, „$\forall$" univerzális kvantor, „x" változószimbólum

Formulák értelmezéséhez adott interpretáció kell
- Megmondjuk, mi a jelentése a predikátumszimbólumoknak
- Változók milyen értéket vehetnek fel → alaphalmaz megadása (univerzum)
- Igazságérték eldöntéséhez interpretálni kell a formulát
  - változóknak értéket kell adni, ennek függvényében lehet kiértékelni a formulát

Kiértékelési szabályok a nulladrendű logikán alapulnak
- negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció értelmezése azonos
- Konkrét igazságérték:
  1, Minden szereplő változója kvantált
  2, Minden változó helyén konstans szerepel

Az univerzum nemüres halmaz, a változók (x, y) ennek elemein futnak végig.
Ezek az úgynevezett individuumváltozók, másfajta változó nincs.

A predikátumok az univerzum elemei közötti kapcsolatot, relációt fejezik ki
P(x,y) jelsorozat önmagában csak azt jelenti, hogy az univerzum elemei között egy kétargumentumos reláció van értelmezve
Sokféleképp lehet jelölni, mi a prefix jelölést használjuk: $P(x,y)$; Pxy; $<x,y$

Formula igazságértékének eldöntése
Igaz-e, hogy $\forall x \exists y\, P(x,y)$?
Meg kell adni az interpretációt: milyen értéket vehetnek fel az x, y individuum-változó, mi a jelentése a P predikátumnak.

Kvantorok
- Univerzális kvantor: $\forall$
  - $\forall x\, P(x)$: Minden x-re P(x) / Bármely x-re P(x) / Tetszőleges x-re P(x)
    Tehát bármely, az univerzumból kivett változóra igaz a P-vel jelölt tulajdonság
- Egzisztenciális kvantor: $\exists$
  - $\exists x\, P(x)$: Van olyan x, amelyre P(x) / Létezik olyan x, amelyre P(x)
    Tehát van legalább egy x az univerzumban, amelyre igaz a P-vel jelölt tulajdonság. Több ilyen individuum-változó is lehet

I. interpretáció
univerzum := $\mathbb{N}$
P(x,y) jelentése := $x<y$
Ekkor: $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N},\ x<y$.
Igaz a formula

II. interpretáció
univerzum := $\mathbb{N}$
P(x,y) jelentése := $y<x$
Ekkor: $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N},\ y<x$
Nem igaz, x=1-hez nincs ilyen y. ⇒ Hamis

III. interpretáció
Univerzum := $\mathbb{Q}$
P minden interpretációjára a P reláció igaz.

IV. interpretáció
Univerzum := emberek halmaza
P(x,y) jelentése := x-nek y az édesanyja
Igaz a formula.

Elsőrendű nyelvek

Elsőrendű logika: interpretáció és nyelv (formula)

univerzum (individuumokból áll) — műveletek ⟷ függvények

{igaz, hamis} ⟵ predikátumok (atomi formulák)

Relációk: individuumok közti kapcsolatok, vagy tulajdonságaik

Meg kell adni, milyen jelkészletet használunk, és a jeleket milyen szabályok szerint írhatjuk egymás után. Az így keletkező jelsorozat a formula; ez alkotja az elsőrendű nyelv szintaxisát.

Szintaxis:

változószimbólumok: $x, y, z \ldots$

konstansszimbólumok: $a, b, c \ldots$

predikátumszimbólumok: $P, Q, S \ldots$

függvényszimbólumok: f, g, h

logikai összekötő (műveleti) jelek: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$

kvantorok: $\forall, \exists$

zárójelek: $(,), [,], \{, \}, \ldots$

Formulaképzés szabályai (Szemantika)

Atomi formulák:

Ha a P „n" argumentumú predikátumszimbólum, és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomi formula.

A nulla argumentumos predikátumszimbólumot az ítéletváltozóknak feleltetjük meg. Így módon az elsőrendű logika a nulladrendű kiterjesztése.

Kifejezések (Term-ek):

Minden individuumváltozó és konstans kifejezés

Ha $t_1, t_2, \ldots, t_n$ kifejezés, és f „n" változós függvényszimbólum, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is kifejezés.

A fentiek szerint a függvény argumentumaiba írhatunk változókat, konstansokat, de használhatók más, vagy saját függvényértékek is. A kifejezések vagy predikátumszimbólumok argumentumaiban, vagy függvények argumentumaiban fordulnak elő, önállóan nem.

Formulák:

1, Minden atomi formula formula

Ha α és β formulák, akkor

2, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\neg \alpha$ is formulák

3, $\forall x\, \alpha(x)$, $\exists x\, \alpha(x)$ is formula

4, Minden formula az 1.-3. pontok véges számú ~~alkalmazásával~~ alkalmazásával kapható.

Kvantorok hatásköre

Megállapodunk abban, hogy egy kvantor hatásköre az utána álló változó utáni atomi formula, vagy zárójelben megadott formula. Az ezekben szereplő változó-előfordulásokat kötöttnek, egyéb előfordulásait szabadnak nevezzük.

$\exists x\, P(x, y) \vee Q(x)$

x „kötött" x „szabad" — y mindig szabad ebben a formulában

ZÁRÓJELEZÉS! $\exists x\, [P(x, y)] \vee Q(x)$

Azt a formulát, amelyben minden változó kötött, mondatnak nevezzük. A mondat igazságértéke csak az interpretációtól függ, a változók kiértékelésétől nem.

Nyelv megadása

$\mathcal{L}(P; F): \mathcal{L}_1(P_1, P_2, \ldots, P_k; f_1, f_2, \ldots, f_j)$

Típusa $(a_{P_1}, a_{P_2}, \ldots, a_{P_k}; a_{f_1}, a_{f_2}, \ldots, a_{f_j})$

P: predikátumok halmaza

F: függvények halmaza

$a_{P_i} = P_i$ argumentumainak száma

$a_{f_i} = f_i$ argumentumainak száma

Formula kiértékelése

Elsőrendű nyelvben is egy formula igazságértékét csak úgy tudjuk megmondani, ha interpretáljuk a formulát. Az interpretáció több részből áll:

1, Alaphalmaz - univerzum megadása
2, Atomi formulák igazságértéke
3, Függvények interpretálása, kiértékelése
4, Kvantorok jelentése, műveletek jelentése alapján kiértékelhető a formula

Példa

$P_1(f_1(f_1(f_0)), x) \vee \forall x(P_2(f(x)) \longrightarrow P_3(x, y))$

Tudjuk előre, hogy a formula igazságértéke a behelyettesítéstől is függ, hiszen nem minden változó-előfordulás van kvantálva.

$L_1(P_1, P_2, P_3; f_0, f_1)$ — Interpretáció: univerzum megadása, majd atomi formulák igazságértékeinek „kiosztása"

Típusa: $(2, 1, 2; 0, 1)$

Interpretáció

Univerzum: $\{0, 1\}$

P_1 értelmezése: valamilyen relációval azonosítjuk; az igazságértékeket rögzíteni kell minden argumentumra

$P_1(0,1) = H$ $\quad P_1(0,0) = I$ $\quad P(1,1) = I$ $\quad P(1,0) = H$

P_2 értelmezése: $P_2(0) = H$ $\quad P_2(1) = I$

P_3 értelmezése: $P_3(0,1) = I$ $\quad P_3(0,0) = H$ $\quad P_3(1,1) = H$ $\quad P_3(1,0) = H$

Függvények értelmezése:

$f_0 \longleftrightarrow 1$

$f(0) \longleftrightarrow 1$

$f(1) \longleftrightarrow 0$

Kiértékelése:

$P_1[f(f(1)), x]$ $\qquad \forall x[P_2(f(x)) \longrightarrow P_3(x, y)]$

$x=1$	$x=0$	$x=1$	$x=0$
$P(1,1) = I$	$P(1,0) = H$	$P_2(f(1)) = H$	$P_2((f0)) = I$
		az implikáció $x=1$ esetén igaz	

$x=0$ esetén az előtag igaz, ezért a végleges kiértékelés függ y-tól

$P_3(x,y)$ ha $y=0$ és $x=0$, akkor H — Ezekben az esetekben tehát az
$P_3(x,y)$ ha $y=1$ és $x=0$, akkor H — implikáció is hamis.

Tehát $x=1$ esetén a formula igaz, $x=0$ esetén a formula hamis, hiszen mindkét diszjunkciós tag hamis, y bármely értékére.

Az elsőrendű nyelv [illegible] használata

Matematikai struktúrák leírására jött létre

lehet, hogy adott formulákra keresünk modellt

lehet, hogy meglévő elméletek vagy matematikai struktúrát kellene formalizálni

Az elsőrendű és a nulladrendű nyelv kapcsolata

Az elsőrendű nyelvben a nulla argumentumos predikátumok alkotják a nulladrendű nyelv ítéletváltozóival

Elsőrendű formula szemantikája: Interpretáció és kiértékelés

Interpretáció

univerzum megadása

műveletek megadása - megfelel a függvényeknek, a függvényértékek ennek alapján adhatók meg

relációk konkrét értelmezése - megfelel a predikátumoknak, ennek alapján megadjuk az atomi formulák igazságértékeit

Igazságérték megadása csak a változók értékadása után lehetséges, ezért az értékadás is hozzátartozik az interpretációhoz

Kiértékelés

Ugyanazok a szabályok, mint a nulladrendű logikában, ehhez hozzávesszük a $\forall x\, \alpha(x)$ kiértékelését: x-be az univerzum minden elemét behelyettesítve ha $\alpha(x)$ mindig igaz, akkor a formula igaz (ez hasonlóan igaz az egzisztenciális kvantorra is)

Jelölések:
$\models \varphi[x \leftarrow 1]$
$I_1 \models \varphi[x \leftarrow 1]$
$\models_{I_1} \varphi[5]$
I_2-ben φ hamis
Értékadás (konkretizáció): A termek változóinak helyére a lehetséges univerzumbeli elemeket helyettesítjük.
A φ formula érvényes (tautológia) az „I" interpretációban, ha minden értékadással az értéke igaz.
A φ formula kontradikció „I"-ben, ha nincs olyan értékadás, amiben igaz.
Érvényes formula: minden interpretáció minden értékadásával igaz
Azonosan hamis formula: minden interpretáció minden értékadásával hamis
Mondat: Zárt formula, benne minden változó kvantált
igazságértéke csak az interpretációtól függ, a változók feltett értékeitől nem
Részletesebben a szemantikáról
Minden atom formula.
Jelentése: $P(x,y) \to$ x és y változóhoz konstansokkal helyettesítjük az univerzumból.
Ezáltal nulladrendű jelentést kapunk
Ha α és β formulák, akkor $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$, $\neg \alpha$ is formulák
Jelentése: Nulladrendben megadott szemantika szerint
$\forall x\, \alpha(x)$, $\exists x\, \alpha(x)$ is formula
Jelentése:
$\forall x\, \alpha(x)$: Minden x-re $\alpha(x)$
Igaz, ha az x értékeit gondolatban végigfuttatjuk az univerzum elemein, mindegyik elem rendelkezik a megadással
Hamis, ha az x értékeit gondolatban végigfuttatjuk az univerzum elemein, akkor találunk legalább egy olyan értéket, amely nem rendelkezik a megadással
$\exists x\, \alpha(x)$: Létezik x, amelyre $\alpha(x)$
Igaz, ha x értékeit gondolatban végigfuttatjuk az univerzum elemein, találunk legalább egy olyan értéket, amely rendelkezik a megadással
Hamis, ha x értékeit gondolatban végigfuttatjuk az univerzum elemein, akkor nem találunk egyetlen olyan elemet sem, amely rendelkezne a megadással
Ekvivalens formulák: Minden interpretációban az igazságértékük azonos
De Morgan:
$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$
$\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$
$\neg \exists x\, \neg P(x) \equiv \forall x\, P(x)$
$\neg \forall x\, \neg P(x) \equiv \exists x\, P(x)$
$\exists x_i\, \exists x_j \ldots A(x_i, x_j, \ldots) \equiv \exists x_j\, \exists x_i (A\, x_i, x_j, \ldots)$
$\exists x\, [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \to$ ÉSRE ($\wedge$) nem igaz
$\exists x\, \exists y\, [A(x) \vee B(y)] \equiv \exists x\, A(x) \vee \exists y\, B(y)$
Különböző változóra vonatkozó kvantor akkor emelhető ki, ha a másikban nem szerepel
$\forall x_i\, \forall x_j \ldots (A\, x_i, x_j \ldots) \equiv \forall x_j\, \forall x_i\, A(x_i, x_j \ldots)$
$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \longrightarrow$ VAGYRA ($\vee$) nem igaz
$\forall x\, \forall y\, (A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall y\, B(y)$
Általánosítás: Q_1 és Q_2 a $\forall$ vagy $\exists$ kvantorok valamelyike
$Q_1 x\, A(x) \wedge Q_2 y\, B(y) \equiv Q_1 x\, Q_2 y\, [A(x) \wedge B(y)]$
$Q_1 x\, A(x) \vee Q_2 y\, B(y) \equiv Q_1 x\, Q_2 y\, [A(x) \vee B(y)]$

Konjunktív normálforma alakítás

Prenex formába való átírás algoritmusa

1. A logikai összekötőjelek átírása $\neg, \wedge, \vee$-ra
2. De Morgan szabályok alkalmazása addig, amíg a $\neg$ hatásköre atomi formula nem lesz
3. A változók standardizálása (kvantorjelenti átnevezése)
   pl. $\forall x[P(x) \vee \exists x\, Q(x)]$ formulából $\forall x[P(x) \vee \exists y\, Q(y)]$
   Kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig, amíg minden kvantor a formula elejére nem kerül
   A kvantorok és az általuk kötött változók sorrendjét meg kell tartani
4. A formula konjunktív normálformára hozása disztributív törvények alkalmazásával

Példa:

$$\forall x\{\forall y\, P(x,y) \wedge \exists y\, \neg[Q(y) \to P(x,a)]\} \to \neg \forall x \exists y\, [P(x,y) \to R(x,y)]$$

1. lépés

$$\neg \forall x\, [\forall y\, P(x,y) \wedge \exists y\, \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))] \vee \neg \forall x \exists y\, [\neg P(x,y) \vee R(x,y)]$$

2. lépés

$$\exists x\, \neg\{\forall y\, P(x,y) \wedge \exists y\, \neg[\neg Q(y) \vee P(x,a)]\} \vee \exists x\, \neg \exists y\, [\neg P(x,y) \vee R(x,y)]$$

$$\exists x\{\neg \forall y\, P(x,y) \vee \neg \exists y\, \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))\} \vee \exists x\, \forall y\, \neg[\neg P(x,y) \vee R(x,y)]$$

$$\exists x\{\exists y\, \neg P(x,y) \vee \forall y\, \neg\neg[\neg Q(y) \vee P(x,a)]\} \vee \exists x \forall y\, [P(x,y) \wedge \neg R(x,y)]$$

$$\exists x\{\exists y\, \neg P(x,y) \vee \forall y[\neg Q(y) \vee P(x,a)]\} \vee \exists x\, \forall y\, [P(x,y) \wedge \neg R(x,y)]$$

3. lépés

$$\exists x\{\exists y\, \neg P(x,y) \vee \forall y[\neg Q(y) \vee P(x,a)] \vee \forall y\, [P(x,y) \wedge \neg R(x,y)]\}$$

Meghagyjuk a $\exists y$-t, és $\forall y$ helyébe y_1-et, ill. y_2-t írunk

$$\exists x\{\exists y\, \neg P(x,y) \vee \forall y_1[\neg Q(y_1) \vee P(x,a)] \vee \forall y_2\, [P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2)]\}$$

$$\exists x\, \exists y\{\neg P(x,y) \vee \forall y_1[\neg Q(y_1) \vee P(x,a)] \vee \forall y_2\, [P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2)]\}$$

Végül a formula elejére mozgatjuk a kvantorokat

$$\exists x\, \exists y\, \forall y_1\, \forall y_2\{\neg P(x,y) \vee [\neg Q(y_1) \vee P(x,a)] \vee [P(x,y_2) \wedge \neg R(x,y_2)]\}$$

Megkaptuk a prenex formulát

4. lépés

KNF-re hozás a kvantoron belül

Ha a prenex formula magja KNF-ben, vagy DNF-ben van, akkor a formula prenex konjunktív / prenex diszjunktív formula.

Skolem normálforma

A másik speciális (normál) formula egy elsőrendű formula Skolem formája.
A $\forall x_1, \forall x_2, \dots, \forall x_n (A)$ formulát, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok vannak, Skolem formulának nevezzük.

Tétel: Minden elsőrendű formulához található olyan Skolem normálformában levő formula, amely az eredeti formula logikai következménye.

A' Hozzuk a formulát prenex formába, az előzőekben már ismertetett módon. Az egzisztenciális kvantorokat Skolem-konstansok, illetve Skolem-függvények segítségével kiküszöböljük.
Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prefixumban, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz, akkor az előtte álló, univerzálisan kvantált $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j változónak, amelyre a formula értéke igaz. Ezt a tényt a következő függvénnyel fejezzük ki: $f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}) = x_j$. Ha az első kvantor éppen egzisztenciális, akkor ez a függvény nulla változós, tehát konstans.
Ezt a formális függvényképzést végrehajtjuk a sorban következő egzisztenciális kvantorra is. Addig folytatjuk, amíg minden egzisztenciális kvantort nem eliminálunk.

$\exists y \forall x \; A(x,y) \longleftrightarrow \forall x \, A(x,c)$, ahol c állandó
$\forall x \exists y \; B(x,y) \longleftrightarrow \forall x \, B(x, f(x))$

Az így kapott formulák az eredeti formula logikai következményei. Az átalakítás nem ekvivalens, mert visszafelé haladva nem jutunk el az eredeti formulához.

Példák:
$\forall x \forall y \exists z \, A(x,y,z) \longleftrightarrow \forall x \forall y \, A(x,y,f(x,y))$
$\forall x \exists y \forall z \, A(x,z,y) \longleftrightarrow \forall x \forall z \, A(x,z,f(x))$

Definíciók:
A φ elsőrendű mondat kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben igaz. Ezt az interpretációt a formula modelljének nevezzük.
A φ elsőrendű mondat érvényes, ha minden interpretációban igaz.
A φ elsőrendű mondat kielégíthetetlen, ha minden interpretációban hamis.

Példák:
Az alábbi formula érvényes: $\forall x \, P(x) \vee \exists y \, \neg P(y)$
Az alábbi formula kielégíthetetlen: $\forall x \, P(x) \wedge \exists y \, \neg P(y)$

Következményfogalom elsőrendű nyelven

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$, ha minden interpretációban minden α_i igaz, akkor β is igaz. Másképp: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$, ha $\models_I \alpha_i$, akkor $\models_I \beta$ minden I interpretációban.

Modell: Az az I interpretáció, amelyre $\models_I \alpha_i$ (α modellje I)

Következmény: $Mod(\alpha) \subseteq Mod(\beta)$, ha $\alpha \models \beta$: β legalább ott igaz, ahol α

Tétel:
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta \iff \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \models \beta$
$\alpha \models \beta \iff \alpha \to \beta$ tautológia
$\alpha \models \beta \iff \alpha \vee \neg\beta$ kontradikció

Rezolúció elsőrendben

A formulát és a következmény tagadását Skolem normálformára alakítjuk. Praktikus, ha az univerzális kvantorokat elhagyjuk, és a konjunkció jeleket is, és csak a klózhalmazt írjuk le.
Nevezzük át a változókat úgy, hogy a változónevek különbözőek legyenek a klózokban – ez megkönnyíti a helyettesítést.
A rezolúció csak akkor alkalmazható, ha az egyesítés elvégezhető.

Példa

A1: Van olyan páciens, aki minden doktorban megbízik.
A2: A kuruzslókban egyetlen páciens sem bízik meg.
B: Egyetlen doktor sem kuruzsló.

$F_1: \exists x \{P(x) \wedge \forall y [D(y) \rightarrow M(x,y)]\}$
$F_2: \forall x \{P(x) \rightarrow \forall y [K(y) \rightarrow \neg M(x,y)]\}$
$F_3: \forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$
F_3 negáltja: $\neg \forall x [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

Klóz forma:

$K_1: P(a)$
$K_2: \neg D(y) \vee M(a,y)$
$K_3: \neg P(x) \neg \vee K(z) \vee \neg M(x,z)$
$K_4: D(b)$
$K_5: K(b)$

$\neg K(u) \vee \neg M(a,u)$ x helyébe a
$M(a,b)$ y helyébe b
$\neg K(b)$ u helyébe b
$\square$

Gráfelmélet

Definíció: Gráf

Egy $G=[V,E,f]$ gráf pontok/csúcsok egy V halmazából, élek egy E halmazából, és egy f függvényből áll, amely minden egyes élhez egy rendezetlen pontpárt feleltet meg, ahol a pontokat az él végpontjainak nevezzük.

Röviden: Egy gráf pontokból és azokat összekötő élekből áll.

Definíció: Izolált pont, többszörös él, hurokél

Azokat a pontokat, amelyekhez nem illeszkedik él, izolált pontnak nevezzük.

Ha egy gráfban két pontot több él is összeköt, akkor azt mondjuk, hogy a gráf többszörös éleket tartalmaz.

Hurokélnek nevezzük, ha egy pontot önmagával kötünk össze.

Definíció: Teljes gráf, összefüggő gráf, egyszerű gráf

A teljes gráfban minden pont össze van kötve minden ponttal. [összes él!]

Az összefüggő gráfban ~~[illegible]~~ bármely két pont között van út. [Ez azt jelenti, hogy bármely pontból eljuthatok bármely pontba, nem pedig azt, hogy az összes él be van húzva!]

Az egyszerű gráfban nincs hurokél, és nincs többszörös él.

Definíció: Irányítottság/irányítatlanság

Ha az élnek egy rendezett pár felel meg, akkor az élt irányított élnek, míg különben (ha rendezetlen a pár) irányítatlannak nevezzük.

Ha a gráf minden éle irányított, akkor irányított gráfnak, ha minden éle irányítatlan, akkor irányítatlan gráfnak nevezzük.

Jelölések:

A pontokat kis körökkel jelöljük. A pont nevét vagy a kör mellé, vagy a kör belsejébe írjuk.

Az irányítatlan éleket olyan görbékkel jelöljük, amelyek az él két végpontja között haladnak.

Az irányított éleket nyíllal ellátott görbével jelöljük.

A továbbiakban gráfon mindig irányítatlan gráfot fogunk érteni; míg ha irányított gráfokról beszélünk, akkor azt külön hangsúlyozzuk.

Definíció: Izomorf gráfok, fokszám

Két gráf izomorf, ha mindkét pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másik pontjainak, illetve éleinek.

Általában izomorf gráfok közt nem teszünk különbséget.

A gráf v pontjához illeszkedő élvégek számát v fokszámának, röviden v fokának nevezzük. Ha v foka n, akkor azt is mondjuk, hogy v n-ed fokú.

Tétel: Kézfogási tétel

Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

Bizonyítása: Minden élt kétszer számolunk a fokszámok összeszámolásánál.

Tegyük fel, hogy az e él az u és v pontokhoz illeszkedik, azaz u és v az e él két végpontja.

Ekkor, ha ez a két pont különböző, akkor az e élt u-nál és v-nél is beszámoljuk.

Ha pedig ez a két pont megegyezik, akkor az e él hurokél, és így ($u=v$) u-nál számoltuk kétszer.

Tehát a gráf összes pontjainak a fokszámát összeadva éppen az élek számának kétszeresét kapjuk.

Tétel: Minden gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Minden gráfban a fokszámok összege páros, amely a páros és a páratlan fokszámok összegéből tevődik össze. A páros fokszámok összege nyilván páros, hiszen páros számok összege páros. Így a páratlan fokszámok összegének is párosnak kell lennie. A páratlan fokszámok összege pedig csak úgy lehet páros, ha páros darabszámú páratlan fokszámot adtam össze.

Állítás: Skatulya-elv (Dirichlet-elv)

1, Ha van n doboz, és n+1 tárgy, akkor biztosan lesz legalább (!) egy doboz, amelyikben legalább (!) 2 tárgy lesz.

2, Ha m tárgyat osztunk szét k csoportba, és m>nk, ahol k egy természetes szám, akkor legalább k+1 tárgy fog kerülni az egyik csoportba.

Tétel: Minden egynél több csúcsú egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs.

Bizonyítása:
Ha a gráfnak n csúcsa van, akkor a lehetséges fokszámok: 0, 1, 2, ..., n-1. Azonban a 0 és az n-1 fokszám egy adott gráfban egyszerre nem fordulhat elő, ugyanis ha van 0 fokszámú pont, akkor az izolált. Tehát n-1 darab lehetséges fokszámot n csúcsra kell szétosztani, ezért biztosan lesz két csúcs, amelynek azonos a fokszáma.

Tétel: A teljes gráf éleinek száma n csúcs esetén:

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{2} = |T_n|}$$

Bizonyítása:
Az n csúcsú teljes gráfban bármely két pontot pontosan egy él köt össze, így minden egyes pont fokszáma n-1, tehát a fokszámok összege n(n-1). Tudjuk, hogy bármely gráf esetén a fokszámok összege az élek számának kétszerese, amelyből pedig az állítás adódik.

Definíció: Részgráf
Egy gráfot a G gráf részgráfjának nevezzük, ha csak G-beli pontokat és éleket tartalmaz. Ha ez a részgráf nem azonos G-vel, akkor a G gráf valódi részgráfjának nevezzük.

Utak és körök

Definíció: Élsorozat
Élsorozatnak az élek olyan rendezett halmazát nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1, A sorozat első és utolsó élétől eltekintve bármely él egyik végpontja az előző élhez, másik végpontja a következő élhez illeszkedik

2, Az első él egyik végpontja a következő élhez illeszkedik, másik végpontja az élsorozat kezdőpontja

3, Az utolsó él egyik végpontja az előző élhez illeszkedik, másik végpontja az élsorozat végpontja

4, Minden él pontosan egyszer fordul elő.

Definíció: Nyílt élsorozat, zárt élsorozat
Nyílt élsorozatról beszélünk, ha az élsorozat kezdő- és végpontja különböző. Ellenkező esetben zárt élsorozatról beszélünk.

Definíció: Út
Az u és v pontok közötti út olyan nyílt élsorozat éleinek halmaza, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1, u és v kezdő- illetve végpontok

2, ezek foka 1, míg a többi pont foka 2.

Definíció: Összefüggő gráf
Ha egy gráfban bármely két pont úttal elérhető, akkor a gráfot összefüggőnek nevezzük.

Definíció: Kör
Az olyan összefüggő gráfokat, melyekben minden pont foka 2, körnek nevezzük.

Körfeltétele: Zárt élsorozat élei kört alkotnak, ha minden pont foka 2.

Definíció: Út, illetve kör hossza a benne lévő élek számát értjük.

Tétel: n pontú összefüggő gráfnak legalább n-1 éle van.

Bizonyítása: Teljes indukcióval

1, n=1 esetén nyilvánvalóan igaz.

2, TFH valamely n>1 esetén minden n pontú összefüggő gráfnak van n-1 éle.

3, Belátjuk, hogy minden n+1 pontú összefüggő gráfnak n éle van.

Ha G-nek van elsőfokú pontja, akkor a hozzátartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Nyilván n pontú összefüggő gráfot kapunk, melyre érvényes az indukciós feltétel, azaz minimum n-1 éle van. A törölt élt hozzáadva adódik, hogy G-nek minimum n éle van.
Ha G-nek nincs elsőfokú pontja, akkor minden pont foka legalább 2, és így a fokszámok összege minimum $2(n+1) > n$.

Tétel: Ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítása: Leghosszabb út módszer.
Legyen az l hosszúságú L út a G gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja v. Tekintsük most G-nek v-hez illeszkedő éleit! Ezek közül bármelyiknek a végpontja L-hez tartozik, ugyanis ellenkező esetben L hossza l-nél nagyobb lenne, ami ellentmond annak, hogy L a leghosszabb út.
Ha G minden pontjának foka legalább 2, akkor illeszkedik v-hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy kört kijelöl. Ha e nem hurokél, akkor e-nek v-től különböző w végpontja L-ben van, tehát L-nek a v és w pontokat összekötő része e-vel együtt G egy körét alkotja.

Euler-gráf

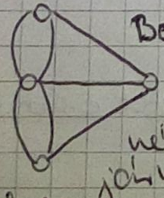
Definíció: Euler út/kör
G gráfban Euler-útnak nevezünk egy olyan élsorozatot, amely G összes élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha ez az élsorozat zárt, akkor Euler-körről beszélünk.
Ha egy gráfban van Euler-kör, akkor azt Euler-gráfnak nevezzük.

Megjegyzés: Az előző definíció alapján minden Euler-kör egyben Euler-út is.
Általában egy Euler-út vagy Euler-kör nem út vagy kör, hiszen egy csúcson többször is áthaladhat. Az elnevezés csak a hagyományt követi.

Tétel: Ha egy gráf Euler-gráf, akkor minden pontjának foka páros.
Ha egy (izolált pontot nem tartalmazó) gráfnak van nyílt Euler-vonala, akkor két pontjának foka páratlan, a többié pedig páros. [Euler-vonal=Euler-út]

Bizonyítása: TFH G gráf Euler-gráf. Ekkor létezik G-ben olyan élsorozat amelyben G valamennyi éle szerepel. Ha a gráf pontjait bejárjuk az Euler-vonal mentén akkor a kezdőpontba érkezünk vissza, és a bejárás során valahányszor egy pontba érünk, onnan ki is kell lépni, azaz két illeszkedő élvéget járunk be. Ha ezeket párosíthatónak tekintjük, és figyelembe vesszük, hogy a kezdőpontba érkeztünk vissza, akkor nyilván minden pont foka páros kell, hogy legyen.
Ha egy izolált pontot nem tartalmazó gráfnak van nyílt Euler-vonala, és bejárjuk a gráf éleit, akkor minden pont foka az előző szerint páros lesz, kivéve a kezdő- és a végpontot, hiszen az elsőnek és az utolsónak egy élvége pár nélkül marad. Így a gráf két pontjának foka páratlan a többié pedig páros.

A königsberg-i probléma



Bejárható-e a gráf oly módon, hogy az élein pontosan egyszer haladunk végig? Előző tétel szerint vagy minden pontjának foka páros, vagy két pontjának foka páratlan, a többié páros. Ezen gráfnak négy páratlan fokszámú pontja van, így a gráf ilyen módon nem járható be.

Tétel: Ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.

Bizonyítása: Teljes indukcióval
1, $n=1$-re igaz.
2, TFH valamely $n>1$-re minden n pontú és legalább n élű gráfban van kör.
3, Legyen G egy $n+1$ pontú gráf, amelynek legalább $n+1$ éle van.
↳ Ha van elsőfokú pontja, töröljük a vele illeszkedő ponttal együtt. A maradék gráfban az indukciós feltétel szerint van kör. Visszatéve az elsőfokú pontot és az élt, az előző kört tartalmazza a gráf.

→ Ha nincs elsőfokú pontja, akkor minden pont legalább másodfokú. Ekkor az előző tétel miatt van a gráfban kör.

Definíció: Fagráf

Ha egy gráf összefüggő és nem tartalmaz kört, akkor fagráfnak, vagy röviden fának nevezzük.

Tétel: Az n pontú fagráf éleinek száma n-1.

Bizonyítása:

Tudjuk, hogy minden n pontú összefüggő gráfnak legalább n-1 éle van. Az előző tétel miatt, ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráfban van kör. Emiatt minden n pontú, körmentes összefüggő gráfnak pontosan n-1 éle van, ami az állítást igazolja.

Tétel: Az n pontú és n-1 élű összefüggő gráfok fák.

Bizonyítása:

TFH G gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ha a kör egy élét töröljük, akkor n pontú, n-2 élű összefüggő gráfot kapunk, ami ellentmond annak, hogy egy n pontú, összefüggő gráfnak legalább n éle van.

Be kell még látnunk, hogyha egy összefüggő gráf valamely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk. TFH hogy a törölt él nem körél, hiszen körél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük a G gráf K körének (u,v) élét. A G gráfban az u-ból a v-be most is el tudunk jutni a K kör megmaradt élein keresztül, azaz az (u,v) törlése után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a kapott gráf is összefüggő.

Fa ekvivalens definíciói:

Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor fa, ha bármelyik két pontja között pontosan egy út van.

A fa összefüggő körmentes gráf.

Az n pontú, n-1 élű összefüggő gráf fa.

Prüfer-kód

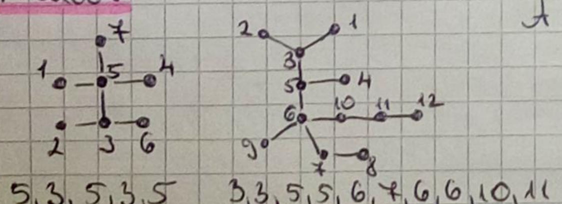
A prüfer-kódot fák tárolására használjuk.

A prüfer-kód előállítása:

1, A fa csúcsait számozzuk meg 1-től n-ig.
2, Keressük meg a legkisebb sorszámú levelet.
3, Ezt a levelet hagyjuk el a hozzá illeszkedő éllel együtt, az él másik csúcsát pedig a prüfer-kód végére írjuk.
4, Az előző lépések ismétlése, amíg 2 csúcs marad.

Az így kapott kód n-2 hosszú lesz n db csúcs esetén, valamint az eredeti fa leveleinek sorszáma nem lesz benne a kódban.

Példák:



A csúcs a kódban (fokszám-1)-szer szerepel

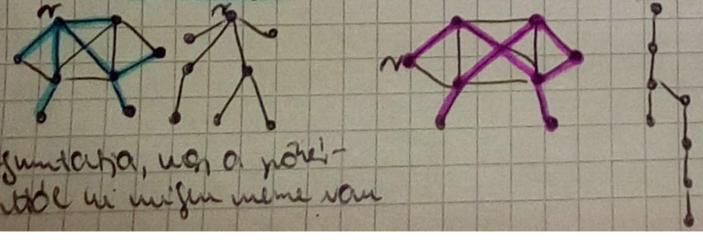
5,3,5,3,5   3,3,5,5,6,7,6,6,10,11

Feszítőfák

Definíció: Feszítőfa

Olyan fagráf, amely a gráf minden pontját tartalmazza.

Léteznek szélességi (BFS) és mélységi (DFS) feszítőfa.



Megmutatja, hogy a kezdőponttól mi milyen mélyen van

Kruskal-algoritmus

A Kruskal-algoritmus egy súlyozott gráfokat feldolgozó algoritmus. Ha a gráf összefüggő, akkor a minimális feszítőfa megalkotására alkalmas.

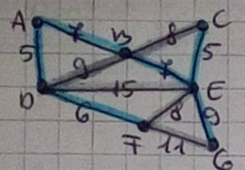
A Kruskal-algoritmus lépései:

1, Válasszuk ki a legkisebb súlyú élt

2, Amennyiben az élt hozzáadva a részgráfhoz az kört alkot, dobjuk el.

3, Ha van még nem vizsgált él, ismételjük a lépéseket.

Példa:



Kiválasztom a legkisebb élt: lehet az AD és CE; legyen AD.
Kiválasztom a következő legkisebb élt, legyen CE.
Következő DF.
Következő AB. Látható, hogy DB kizáródott az algoritmusból, mert azzal kört alkotnánk.
Következő él legyen BE. Kizártuk BC-t, DE-t, EF-t
A következő legkisebb él az EG. A kék élek megadják a feszítőfát.

Prim-algoritmus

A Prim-algoritmus egy összefüggő súlyozott gráf minimális feszítőfáját határozza meg.

Az algoritmus lépésenként építi fel a minimális feszítőfát, minden lépésben egy csúcsot hozzáadva.

A Prim-algoritmus lépései:

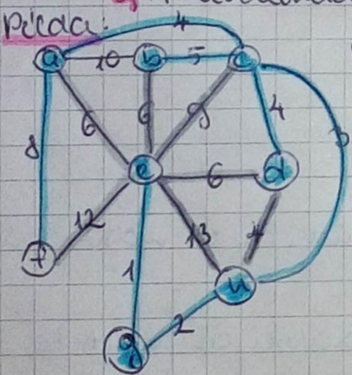
1, Válasszuk ki a gráf egy tetszőleges csúcsát, legyen ez egy egycsúcsú fa.

2, Amíg van a gráfnak olyan csúcsa, amely nincs benne a fában, végezzük el a következőket:

a, Válasszuk ki a fa csúcsai és a gráf többi csúcsa között futó élek közül a legkisebb súlyút.

b, A kiválasztott él nem fabeli csúcsát tegyük át a fába az éllel együtt.

Példa:



Kiválasztom az a csúcsot. A belőle kiinduló legkisebb él a c-be visz. A következő legkisebb él a c-ből a h-ba visz.
Köv legkisebb él a h-g él, majd a g-e él.
Ezek után a legkisebb a c-d él, és a c-b él. Kimaradt az f csúcs, az ehhez legkisebb él az a-f.