

Halmazelmélet

Alapfogalmak

Unió: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ vagy } x \in B\}$; **metset:** $A \cap B = \{x | x \in A \text{ és } x \in B\}$;

különbség: $A \setminus B = A - B = \{x | x \in A \text{ és } x \notin B\}$; **komplement:** $\bar{A} = \{x | x \notin A \text{ és } x \in U\}$ (itt U egy univerzum halmaz).

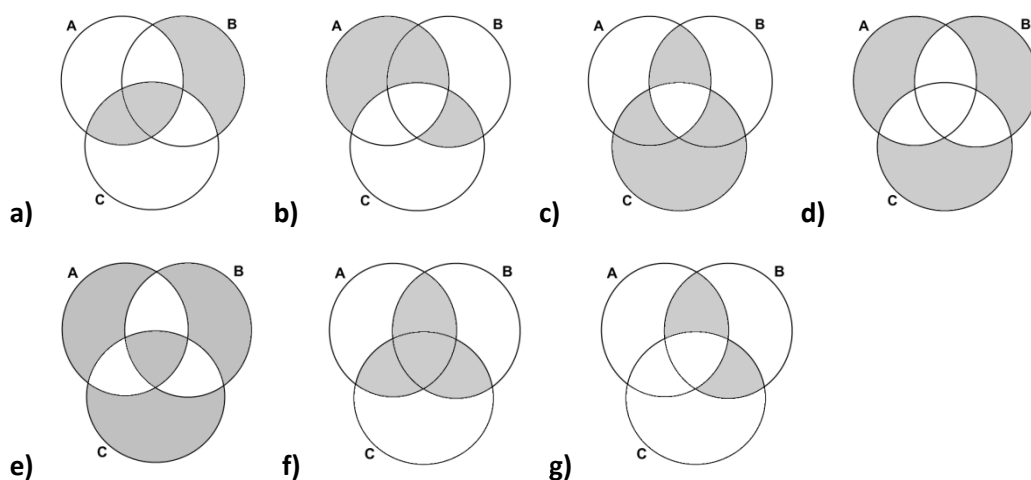
Egyenlőség: két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemeik. Ezzel ekvivalens, hogy $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

Tartalmazás: $A \subseteq B$ ha $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$; **valódi tartalmazás:** $A \subset B$ ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$.

1. Jelenítsük meg Venn-diagrammon az alábbi halmazokat:

- $A \cup B, A \cap B, A - B, \bar{A}$
- $A \cup (B \cap C), (A \cup B) \cap C, (A - B) \cap C, (A - B) \cup C$
- $(A \setminus B) \setminus C, (A \setminus B) \cup (B \setminus C), (A \cap B) \setminus C$

2. Milyen halmazokat határoznak meg az alábbi Venn-diagrammok?



Mo:

- $(A \cap C) \cup (B - (A \cup C))$
- $(A - C) \cup ((B \cap C) - A)$
- $(C - (A \cap B)) \cup ((A \cap B) - C)$
- $(A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$ vagy
 $(A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B))$
- $(A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ vagy pl. $((A \cup B) \cap C) \cup (A \cap B)$
- $((A \cap B) - C) \cup ((B \cap C) - A)$

3. Venn-diagrammok használata nélkül bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket!

- $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap C) \cup (A \cap B)$
- $A \cap C \subseteq (A - B) \cup C$
- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Mo:

- a) $x \in ((A \cup B) - C) \square x \in (A \cup B)$ és $x \notin C \square (x \in A$ vagy $x \in B)$ és $x \notin C \square (x \in A$ és $x \notin C)$ vagy $(x \in B$ és $x \notin C) \square x \in ((A - C) \cup (B - C))$
- b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup \left((A \cup (B \cap C)) \cap \underbrace{(C \cup (B \cap C))}_C \right) = (A \cap B) \cup ((A \cap C) \cup (B \cap C)) = (A \cap B) \cup ((A \cup B) \cap C)$
- c) $x \in (A \cap C) \square x \in A$ és $x \in C$ valamint $x \in ((A - B) \cup C) \square x \in (A - B)$ vagy $x \in C \square (x \in A$ és $x \notin C)$ vagy $\in C \square (x \in A$ vagy $x \in C)$ és $\underbrace{(x \notin C \text{ vagy } x \in C)}_{\text{IGAZ}} \square x \in A$ vagy $x \in C$
- És tudjuk, hogy $x \in A$ és $x \in C \rightarrow x \in A$ vagy $x \in C$ (megelőlegezve némi nulladrendű logikát).
- d) $x \in ((A - B) - C) \square x \in (A - B)$ és $x \notin C \square x \in A$ és $x \notin B$ és $x \notin C \square x \in A$ és $x \notin (B \cup C) \square x \in (A - (B \cup C))$

4. Szita-formula.

a) Egy nyári sporttáborban kosárlabda, foci és tollaslabda foglalkozásokat tartanak gyerekeknek. Minden gyerek részt vesz legalább egy típusú foglalkozáson. 34-en kosaraznak, 49-en fociznak és 26-an tollasoznak. Akik fociznak és kosaraznak is, azok 13-an vannak, és van 8 gyerek, aki focizik és tollasozik, valamint 9, aki kosarazik és tollasozik. Ezen kívül van Kriszti és Jocó, akik annyira szorgalmasak, hogy mindhárom sportot űzik. Hány gyereknek kell ebédet főzni minden nap?

b) Egy év múlva is megrendezik a tábor. A tavalyi siker után az idei gyerekek még elevenebbek, és most Krisztin és Jocón kívül még Kata, Tímea, Peti és Tomi is lelkesedik mindhárom sportágért, és valahogy úgy alakult, hogy éppen 19-en fociznak és tollasoznak, és szintén 19-en vannak azok, akik fociznak és kosaraznak. Tudjuk, hogy 88 gyerek lakik a táborban. Hányan űzik a kosárlabdát és a tollaslabdát egyszerre, ha az ő számuk hetedakkora, mint ahányan a focizók, a kosarazók és a tollasozók számának összege (amelybe egy embert akár többször is beleszámolunk, ha több sportágat is űz)?

c) Egy nyelviskolában angolul háromszor annyian tanulnak, mint franciául, és franciául feleannyian, mint németül. Az angolul és németül tanulók száma feleannyi, mint a franciául tanulóké, az angolul és franciául tanulóké pedig negyedannyi, mint a németül tanulóké. Akik németül és franciául is tanulnak, azok épp hatodannyian vannak, mint akik angolul tanulnak. Mindhárom nyelvet egyszerre senki sem tanulja. Hányan tanulják az egyes nyelveket, ha 171-en járnak a nyelviskolába?

Mo:

a) $|K| = 34, |F| = 49, |T| = 26, |F \cap K| = 13, |F \cap T| = 8, |K \cap T| = 9, |F \cap K \cap T| = 2$, ez alapján: $|F \cup K \cup T| = |F| + |K| + |T| - |F \cap K| - |F \cap T| - |K \cap T| + |F \cap K \cap T| = 81$, tehát ennyi gyerek van a táborban.

b) $x = |K \cap T| = |F| + |K| + |T| - |F \cap K| - |F \cap T| + |F \cap K \cap T| - |F \cup K \cup T| = 7x - 19 - 19 + 6 - 88 \rightarrow 6x = 120 \rightarrow x = 20$

c) $|A|:|N|:|F| = 3:2:1 \rightarrow |F| = x$ A szöveg alapján:

$$|A \cup N \cup F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F| = 171$$

$$171 = 3x + 2x + x - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 0 \rightarrow 171 = \frac{9}{2}x \rightarrow x = 38 = |F| \rightarrow |N| = 76, \\ |A| = 114$$

5. A Karácsony közeledtével nagy a sürgés –forgás a Mikulás otthonában. A manók, akik a készülődést segítik, három csoportban dolgoznak. Vannak, akik összesítik a gyerekektől kapott leveleket, és megvizsgálják ki volt rossz, és ki volt jó az idén. Mások a kész ajándékokat csomagolják és csoportosítják a szállítási cím szerint, míg a harmadik csoport manói készítik a sok szép ajándékot. A csomagolók kétszer annyian vannak, mint az adatfeldolgozók, míg a játékkészítők háromszor annyian, mint a csomagolók. Vannak olyanok, akik több csoport munkájában is részt vesznek, sőt a leglelkesebb manók Szebi, Adi, Márk és Noel mindhárom csoportba besegítenek. Azok, akik az adatfeldolgozóknak és a csomagolóknak is segítenek, tizenkettően vannak, mint a játékkészítők. Akik az adatfeldolgozóknak és a készítőknak is dolgoznak, pedig negyed annyian vannak, mint a csomagolók. A csomagolásban és készítésben is részt vevő manók száma megegyezik az adatfeldolgozó manók számával, és végül a játékkészítők 36-szor többen vannak, mint azok, akik mindhárom területen dolgoznak. Hány manó segíti a Mikulás munkáját?

6. Bergengócia különböző városaiban összesen háromféle nyelvet beszélnek, a zulut, a terrát és a hottentottát. 16 városban használják a zulut, 23 városban a terrát és 27 városban a hottentottát. Van 8 város, ahol a zulut és a terrát is beszélik, 13 ahol a terrát és a hottentottát, illetve 7 város ahol a zulut és hottentottát is. Mindössze 3 olyan város van, ahol mindhárom nyelvet beszélik. Hány városa van összesen Bergengóciának.

7. Egy társaság nagyon kedveli a külföldi utazásokat, tagjai a világ számos különböző táján jártak már. Tudjuk, hogy a tagok közül 15-en jártak már Afrikában, 12-en Ausztráliában és 16-an Dél-Amerikában. Ismert továbbá hogy az Ausztráliában járt társaság negyede és az Afrikában járt csoport harmada járt Dél-Amerikában is. Az Afrikában járt társaság $\frac{2}{5}$ része járt Ausztráliában, továbbá a társaságot alapító házaspár mindkét tagja járt már mindhárom említett kontinensen. Összesen hány tagja van a társaságnak?

Relációk

1. A reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria és tranzitivitás közül mely tulajdonságok teljesülnek az alábbi relációkra?

a) $R = \{(m, n) \mid 2 \mid m + n; m, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $R = \{(m, n) \mid 3 \mid m + n; m, n \in \mathbb{Z}\}$

c) $R = \{(m, n) \mid 2 \mid m - n; m, n \in \mathbb{Z}\}$

d) $R = \{(m, n) \mid 3 \mid m - n; m, n \in \mathbb{Z}\}$

e) $R = \{(m, n) \mid 3 \mid m \cdot n; m, n \in \mathbb{Z}\}$

f) $R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2; x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ (valós)}\}$

Megoldás:

a) reflexív, szimmetrikus, tranzitív

b) nem reflexív, szimmetrikus, nem tranzitív

c) reflexív, szimmetrikus, tranzitív

- d) reflexív, szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, tranzitív
- e) nem reflexív, szimmetrikus, nem tranzitív
- f) reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív (rendezési reláció)

2.1 Rendezési relációk-e a következők?

- a) H a négyzetes, valós elemű mátrixok halmaza $R \subseteq H \times H$, $(\underline{A}, \underline{B}) \in R$, ha $\det \underline{A} \leq \det \underline{B}$.
MO: Nem. Reflexív, nem antiszimmetrikus, tranzitív.

- b) $H = \mathbf{R}^+$, $R \subseteq H \times H$, $(a, b) \in R$, ha $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$.

MO: Igen. Reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív.

- c) $H = \{ \text{az } \{1,2,3\} \text{ halmaz hatványhalmaza} \}$, $(A, B) \in R$, ha $A \subseteq B$
MO: Igen. Reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív.

- d) $H = \mathbf{Z}$, $R \subseteq H \times H$, $(a, b) \in R$, ha $a < b$.
MO: Nem. Nem reflexív.

2.2 A fenti rendezési relációk közül melyek teljes-, melyek részben rendezések?

Teljes: b) Részben: c)

3. Egy iskola tanulóinak halmazán adott a következő reláció:

„A tanuló” relációban áll „B tanuló”-val, ha „A tanuló” hajszíne megegyezik „B tanuló” hajszínével.

Döntse el, hogy a fenti reláció vajon rendezési reláció, ekvivalencia reláció, vagy egyik sem?

Mo: Ekvivalencia

4. Egy társasház lakóinak halmazán adott a következő reláció:

„X lakó” relációban áll „Y lakó”-val, ha „X lakó” otthona ugyanazon az emeleten található, mint „Y lakó”-é.

Döntse el, hogy a fenti reláció vajon rendezési reláció, ekvivalencia reláció, vagy egyik sem?

Mo: Ekvivalencia

5. Egy családban, ahol bármely két személynek különböző napra esik a születésnapja, tekintjük azt a relációt, mely szerint x személy relációban áll y személlyel, ha x nem idősebb y -nél. Milyen reláció ez? (Ha rendezés, akkor teljes rendezés-e ez a reláció?)

Mo: rendezés és teljes rendezés

Rendezési relációk, Hasse-diagram

Legnagyobb elem $LN \in H$, ha minden más $h \in H$ -ra $h \leq LN$ (Mindegyik elemmel összehasonlítható!)

Maximális elem M , ha nincsen olyan $h \in H$, hogy $M \leq h$ teljesülne. (Nem biztos, hogy mindegyik elemmel összehasonlítható)

Legkisebb elem $lk \in H$, ha minden más $h \in H$ -ra $lk \leq h$ (mindegyik elemmel összehasonlítható!)

Minimális elem m , ha nincsen olyan $h \in H$, hogy $h \leq m$ teljesülne. (Nem biztos, hogy mindegyik elemmel összehasonlítható)

A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmazának a $K \in H$ **felső korlátja** (az adott rendezés és H szerint) ha minden $h_1 \in H_1$ -re $h_1 \leq K$.

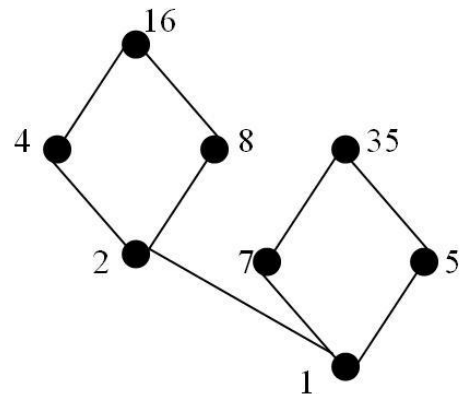
A részben rendezett H halmaz valamely H_1 részhalmazának a $k \in H$ **alsó korlátja** (az adott rendezés és H szerint!) ha minden $h_1 \in H_1$ -re $k \leq h_1$.

H_1 **korlátos**, ha van alsó és felső korlátja.

Ha van a korlátok között legkisebb felső korlát, akkor azt **felső határnak szuprémumnak** (jele: $\sup H$), ha van a korlátok között legnagyobb alsó korlát, akkor azt **alsó határnak infimumnak** (jele: $\inf H$) nevezzük.

Definíció: Ha egy részbenrendezett halmaz bármely kételemű részhalmazának van szuprémuma és infimuma, akkor a halmazt **hálónak** nevezzük.

1. Hasse-diagrammal adott a következő rendezési reláció:



a) Határozza meg a minimumot és a maximumot!

MO: min: 1, max: 16, 35

b) Határozza meg a legkisebb, legnagyobb elemet!

MO: lk: 1, LN: nincs

c) Ez részben- vagy teljes rendezés?

MO: részben pl. 4 a 8-cal nem hasonlítható össze

d) Határozza meg a $\{2, 8, 16\}$ halmaz alsó és felső korlátait valamint infimumát és szuprémumát!

MO: alsó: 1, 2 felső: 16 inf: 2 sup: 16

e) Hálót alkot-e?

MO: Nem mert például a $\{16, 35\}$ kételemű részhalmaznak nincs szuprémuma.

2. Adott a következő rendezési reláció: $H = \{U, V, W, X, Y, Z\}$

$R = \{(U, U), (V, V), (W, W), (X, X), (Y, Y), (Z, Z), (W, X), (W, Y), (W, V), (W, U), (X, V), (X, U), (Y, V), (Y, U), (V, U)\}$

Tehát például: W relációban áll X -el mert $(W, X) \in R$, stb...

a) Ábrázolja a relációt Hasse-diagramon!

b) Részben-, vagy teljes rendezésről van szó?

MO: részben pl. X és Y nem hasonlítható össze

c) Határozza meg a maximális, minimális, legnagyobb, legkisebb elemeket!

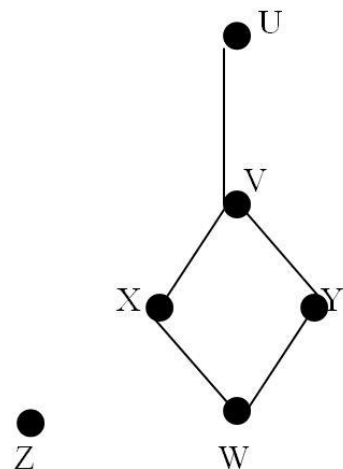
MO:

Maximális: Z, U

Minimális: Z, W

Legnagyobb: nincs

Legkisebb: nincs



- f) Határozza meg a következő részhalmazok alsó-, felső korlátait valamint infimumát és szuprémumát:

$$\begin{array}{ll} H_1 = \{W\} & H_2 = \{W, Y\} \\ H_3 = \{W, V\} & H_4 = \{W, Z\} \\ H_5 = \{X, Y\} & H_6 = \{W, X, Y\} \end{array}$$

MO:	inf		sup	
$H_1 = \{W\}$		W		W
$H_2 = \{W, Y\}$	W		Y	
$H_3 = \{W, V\}$	W		V	
$H_4 = \{W, Z\}$	\emptyset		\emptyset	
$H_5 = \{X, Y\}$	W		V	
$H_6 = \{W, X, Y\}$	W		V	

- g) Hálót alkot-e?

MO: Nem mert például a $\{W, Z\}$ részhalmaznak nincs se infimuma se szuprémuma.

3. Adott a háromelemű G halmaz, melynek hatványhalmaza (azaz összes részhalmazának halmaza)

H . A és B H -beli elem akkor van relációban egymással, ha A részhalmaza B -nek. Vagyis:

$$G = \{x, y, z\} \text{ hatványhalmaza: } H = 2^G$$

$A, B \in H$ esetén a két halmaz relációban áll: $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$

a) Bizonyítsa be, hogy a megadott reláció rendezési reláció!

b) Rajzolja fel a reláció Hasse-diagrammját!

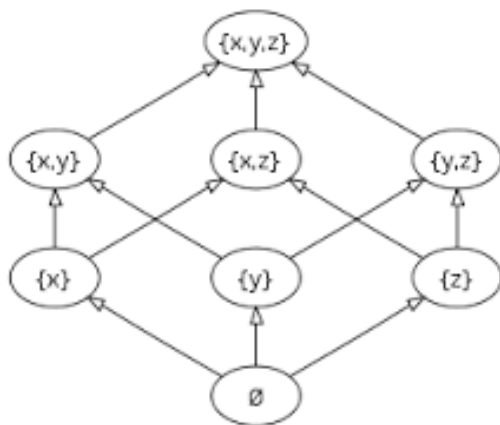
c) Mi a maximális/minimális, legnagyobb/legkisebb elem?

d) Mi a suprémuma, és mi az infimuma a $\{x\}$ és $\{y, z\}$ elemeket tartalmazó részhalmaznak?

e) Háló-e a fenti reláció a megadott H halmazon?

Mo:

b,



c, $M = \{ \{x, y, z\} \}$ $m = \{ \emptyset \}$ (Van egy darab minimális elem, az üres-halmaz!)

$$LN = \{x, y, z\} \quad lk = \emptyset$$

d, $\sup\{ \{x\}, \{y, z\} \} = \{x, y, z\} \quad \inf\{ \{x\}, \{y, z\} \} = \emptyset$

e, igen

4. Adott a következő halmaz: $H = \{2,4,6,8,10,12,16,20,24,40,120\}$. És adott a halmazon értelmezett rendezési reláció: **a** relációban áll **b**-vel ha **a** osztója **b**-nek.

- a, Rajzolja fel a rendezés Hasse-diagramját!
- b, Adja meg a Maximális és minimális elemeket!
- c, Adja meg a rendezés Legnagyobb és legkisebb elemét!
- d, Adja meg a $H' = \{4,8,12\}$ részhalmaz felső- és alsókorlátait, illetve supremumát és infimumát!
- e, A H halmaz a megadott rendezéssel hálót alkot-e?

5. Adott a következő halmaz: $H = \{3,6,9,12,15,18,24,30,36,60,180\}$. És adott a halmazon értelmezett rendezési reláció: **a** relációban áll **b**-vel ha **a** osztója **b**-nek.

- a, Rajzolja fel a rendezés Hasse-diagramját!
- b, Adja meg a Maximális és minimális elemeket!
- c, Adja meg a rendezés Legnagyobb és legkisebb elemét!
- d, Adja meg a $H' = \{6,12,30\}$ részhalmaz felső- és alsókorlátait, illetve supremumát és infimumát!
- e, A H halmaz a megadott rendezéssel hálót alkot-e?

6. Az alaphalmaz elemei a következő szavak:

$$H = \{ABA, ABBA, AB, A, AZ, AZT, ABZ, BZ, AZTA, BÚZA, BLÚZ\}$$

$(a, b) \in R \Leftrightarrow$ ha b szó tartalmazza a szót olyan módon, hogy a -hoz adva az abc valamelyik (akár nulla darab) betűjét megkapjuk a b szót úgy, hogy b szóban az a szó betűinek sorrendje nem változik..

$$\text{Pl. } (AT, AUTÓ) \in R; (CÉ, CSÉ) \in R; \\ (BÉLA, ÁDÁM) \notin R; (AZ, ZAB) \notin R$$

- a) Rendezési reláció-e, ha igen, teljes-e?
- b) Ábrázolja Hasse-diagrammon!
- c) Keresse meg a legnagyobb, legkisebb, maximum, minimum elemeit (ha vannak)!
- d) Keresse meg a $G = \{AB, ABZ, AZ\}$ részhalmaz infimumát és supremumát!
- e) Hálót alkot-e a rendszer? Válaszát indokolja!