Hasonlóság, Diagonalizálás
(további feladatok)

1. A megadott B,C,D,E mátrixok közül melyek hasonlóak az A mátrixhoz?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. A megadott mátrixok közül melyek hasonlóak?

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. A diagonalizálás segítségével adja meg az alábbi mátrixok megfelelő hatványait:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}^3 = ?$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}^6$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^5$

<u>Útmutató:</u>
Ha A~D, akkor : $D = S^{-1}AS \rightarrow A = SDS^{-1} \rightarrow A^n = SD^nS^{-1}$

4. Diagonalizálja *ortonormált* bázis segítségével az alábbi mátrixokat. Írja fel az áttérési mátrixot (S) és a diagonális mátrixot (D) is, valamint ellenőrizze mátrix szorzással a fennálló összefüggést ($D = S^{-1}AS$).

a) $\begin{bmatrix} -9 & -3 & -6 \\ -3 & -9 & 6 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

c) $$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -6 & 3 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

a) A sajátértékek: $\lambda_{1,2} = -12,\ \lambda_3 = 6$

és a hozzá tartozó sajátvektorok alterei rendre:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2x_3 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ x_2, x_3 \in R,\ x_2 \neq 0\ vagy\ x_3 \neq 0.$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix},\ x_2 \in R,\ x_2 \neq 0.$$

Így egy sajátvektorokból álló bázis például:

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak. Így csak $\underline{s}_1$ *és* $\underline{s}_2$ vektorokat kell ortogonálissá tennünk. Például bontsuk $\underline{s}_1 - et$ $\underline{s}_2 - vel$ párhuzamos és merőleges összetevőkre:

$$\underline{s}_1 = \underline{p} + \underline{m},\ ahol\ \underline{p} = \left(\underline{s}_1 \cdot \frac{\underline{s}_2}{|\underline{s}_2|}\right) \cdot \frac{\underline{s}_2}{|\underline{s}_2|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ez most azt jelenti, hogy $\underline{s}_2$ *pont* $\underline{s}_1$ merőleges vetülete volt).

Ebből:

$$\underline{m} = s_1 - \underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tehát egy ortogonális sajátvektorokból álló bázis:

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ezt már csak normálnunk kell, azaz minden vektort osztani a saját hosszával.

Ezekből meg is kapjuk az áttérési mátrixot:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

A hozzá tartozó diagonális mátrix: $D = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$