

Analízis II. vizsgatételek

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Tétel	6
1.1. Függvénysorozat	6
1.2. Pontonként konvergens függvénysorozat	6
1.3. Egyenletesen konvergens függvénysorozat	6
1.4. Pontonként konvergens függvény	6
1.5. Egyenletesen konvergens függvény	7
1.6. Weierstrass kritérium	7
1.7. Összegfüggvény folytonossága	7
1.8. Összegfüggvény integrálhatósága	8
1.9. Összegfüggvény deriválhatósága	8
2. Tétel	9
2.1. Fourier sor	9
2.2. Deriváltfüggvény Fourier sora	9
2.3. Fourier sorok konvergenciája	10
2.4. Bessel-egyenlőtlenség	10
2.5. Parseval egyenlőség Fourier soroka	11
3. Tétel	12
3.1. Kétváltozós függvény értelmezése, ábrázolása	12
3.2. Folytonosság pontban	12
3.3. Sorozatfolytonosság pontban	12
3.4. Bolzano tétel	12
3.5. Weierstrass tétel	12
3.6. Egyenletes folytonosság	12
4. Tétel	13
4.1. Függvény határértéke	13
4.2. Parciális derivált	13
4.2.1. Geometriai jelentés	13
4.3. Parciális deriváltak és folytonosság	13
4.4. Magasabb rendű parciális deriváltak	14
4.4.1. Másodrendű parciális deriváltak	14
4.4.2. n -edrendű parciális deriváltak	14
4.5. Parciális deriváltak sorrendje, felcserélhetősége	14
5. Tétel	15
5.1. Teljes differenciálhatóság	15
5.2. Kapcsolat a parciális deriváltakkal	15
5.3. Gradiens	15
5.4. Folytonosság és differenciálhatóság	16
5.4.1. Tétel	16
5.4.2. Tétel	16
5.5. Érintősík egyenlete, normálvektor	17

6. Tétel	18
6.1. Iránymenti derivált	18
6.1.1. Tétel	18
6.2. Láncszabály	18
6.3. Második derivált	19
6.4. Hesse mátrix	19
6.5. Lagrange-féle középértéktétel	19
7. Tétel	21
7.1. Implicitfüggvény-tétel, implicit deriválás	21
7.2. Másodrendű Taylor formula	21
7.3. Szélsőérték	22
7.4. Szükséges feltétel szélsőérték létezéséhez	22
7.5. Stacionárius pont	22
7.6. Nyeregpon	22
8. Tétel	23
8.1. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez I.	23
8.2. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez II.	23
8.3. Lokális szélsőérték jellemzése n -változós függvényekre	23
8.4. Feltételes szélsőérték feladat megfogalmazása	23
8.4.1. Szemléletes jelentés	24
8.5. Lagrange-féle multiplikátor szabály	24
9. Tétel	26
9.1. Függvényrendszer, koordinátatranszformáció	26
9.2. Jacobi mátrix, Jacobi determináns	26
9.3. Homogén lineáris transzformáció, Jacobi mátrixa	26
9.4. Invertálhatóság	26
9.5. Inverz rendszer Jacobi mátrixa	26
9.5.1. Tétel	27
10. Tétel	28
10.1. Riemann integrál két dimenzióban	28
10.2. Integrálás téralap alakú tartományon	28
10.3. Normáltartomány	29
10.4. Integrálás síkbeli normáltartományon	29
10.5. Áttérés polárkoordinátákra kettős integrálban	29
11. Tétel	31
11.1. Polárkoordináták a síkon	31
11.1.1. Jacobi mátrixa	31
11.2. Általános helyettesítés kettős integrálban	31
11.3. Riemann integrál három dimenzióban, szemléletes jelentés	32
11.4. Hármass integrál kiszámítása intervallumon	32
11.5. Hármass integrál kiszámítása normáltartományon	32

12. Tétel	33
12.1. Hengerkoordináták, Jacobi determináns	33
12.2. Gömbi polárkoordináták, Jacobi determináns	33
12.3. Általános helyettesítés hármas integrálban	33
12.4. Improprius kettős integrál kiszámítása nem korlátos tartományon	34
12.4.1. Tétel	34
12.4.2. Haranggörbe integrálja az egész síkon	34
12.4.3. Következmény	35
13. Tétel	36
13.1. Improprius integrál kiszámítása nem korlátos függvényre	36
13.2. Hatványfüggvény integrálja az egységkörben	36
13.3. Integrálhatóság feltétele nem korlátos függvényre	36
13.4. Komplex függvény értelmezése, ábrázolás	37
14. Tétel	38
14.1. Vonal definíciója	38
14.1.1. \mathbb{R}^2	38
14.1.2. \mathbb{R}^3	38
14.2. Kétváltozós valós függvény integrálja vonal mentén	38
14.2.1. Szemléletes jelentés	39
14.3. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén	39
14.3.1. Szemléletes jelentés	39
14.4. Potenciálos vektormező	39
14.4.1. Tétel	40
14.5. Potenciálkeresés	40
14.5.1. Potenciál létezésének szükséges és elégséges feltétele	40
15. Tétel	41
15.1. Fourier sor komplex alakja, együtthatók meghatározása	41
15.2. Fourier transzformáció	41
15.3. Fourier transzformáció tulajdonságai	42
15.4. Inverz Fourier transzformáció	43
16. Tétel	44
16.1. Parseval egyenlet Fourier transzformációra	44
16.2. Konvolúció	44
16.3. Konvolúció és FT kapcsolata	44
16.4. Dirac delta	45
17. Tétel	46
17.1. n -edrendű lineáris differenciálegyenlet	46
17.2. Függvények függetlensége	46
17.3. Wronski determináns	46
17.4. Tétel	46
17.5. Megoldások terének jellemzése	47

18. Tétel	48
18.1. Homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet	48
18.1.1. Első eset	48
18.1.2. Második eset	48
18.1.3. Harmadik eset	49
18.1.4. Negyedik eset	49
18.2. IDE megoldások struktúrája	49
18.3. Állandók variálása	49
18.4. Kezdetiérték feladat	51
18.5. Peremérték feladat	51
19. Tétel	52
19.1. Komplex függvény kanonikus alakja	52
19.2. Függvény határértéke	52
19.3. Folytonos függvény	52
19.4. Differenciálhatóság	52
19.5. Analitikus függvény	52
19.6. Cauchy-Riemann egyenletek	52
19.7. Harmonikus függvény	53
19.8. Harmonikus függvények kapcsolata az analitikus függvénnyel	53
19.9. Harmonikus társ	54
20. Tétel	55
20.1. Elemi függvények	55
20.1.1. Exponenciális függvény	55
20.1.2. Logaritmus függvény	56
20.1.3. Hatványfüggvény	56
20.2. Komplex vonalintegrál	56
20.3. Vonalintegrál tulajdonságai	57
20.4. Vonalintegrál kiszámítása	57
20.4.1. Newton-Leibniz formula	57
20.5. Cauchy féle alaptétel	57
20.6. Cauchy féle integrálformula	58
20.7. Taylor sorfejtés	58
20.8. Laurent sorfejtés	58

1. Tétel

1.1. Függvénysorozat

Függvénysorozat egy olyan hozzárendelés, mely $\forall n \in \mathbb{N}$ -hez hozzárendel egy

$$f_n(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor a sorozatot (f_n) -el jelöljük.

1.2. Pontonként konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall x \in [a, b]$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ekkor $\lim f_n = f$.

1.3. Egyenletesen konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

1.4. Pontonként konvergens függvényssor

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvényssor pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$, azaz $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f.$$

1.5. Egyenletesen konvergens függvénysor

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

1.6. Weierstrass kritérium

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy az f_n függvények korlátosak, és $|f_n(x)| < a_n$. Ekkor ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

egyenletesen konvergens.

Bizonyítás

A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy kritérium miatt tudjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N$, melyre

$$\sum_{k=m}^n a_k < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^n a_k < \varepsilon.$$

1.7. Összegfüggvény folytonossága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények folytonosak, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ is folytonos.

Bizonyítás

Legyen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = F_n(x) + R_n(x).$$

Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\exists N$ küszöbindex, melyre $n > N$ esetén

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ebből kapjuk, hogy $|R_n(x) - R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x, x_0 \in [a, b]$.

Mivel $F_n(x)$ véges sok folytonos függvény összege, ezért önmaga is folytonos, tehát $\exists \delta > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta$ esetén $|F_n(x) - F_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Azt kaptuk tehát, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |F_n(x) - F_n(x_0)| + |R_n(x) - R_n(x_0)| < \varepsilon$$

tehát a függvény folytonos.

1.8. Összefüggvény integrálhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre $f_n \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, ahol $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx.$$

1.9. Összefüggvény deriválhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak, továbbá az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$$

egyenletesen konvergensek. Ekkor $g(x) = f'(x)$, azaz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

2. Tétel

2.1. Fourier sor

Az $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ $[-\pi, \pi]$ -n integrálható függvény Fourier sora

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

ahol a Fourier együtthatók

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

A sort közelíthetjük az n -edik Fourier polinommal

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$

2.2. Deriváltfüggvény Fourier sora

Adott $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π periódusú, differenciálható függvény. Ekkor f' Fourier sora tagonkénti deriválással kiszámítható, azaz

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx) \right).$$

Bizonyítás

Vizsgáljuk meg f' Fourier együtthatóit!

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left(f(x) \cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) = \\ &= \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = k b_k. \end{aligned}$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$\beta_k = -k a_k.$$

2.3. Fourier sorok konvergenciája

Adott $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π periódusú függvény. Tegyük fel, hogy a $[-\pi, \pi]$ intervallumon f megfelel a Dirichlet feltételnek, azaz szakaszonként folytonos, legfeljebb véges sok szakadási hellyel, amelyek elsőfajú szakadások. Legyen továbbá az x_0 szakadási pontokban

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Ekkor f -t előállítja a Fourier sora.

2.4. Bessel-egyenlőtlenség

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$

Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx + b_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx \right\} - \right. \\ &\quad \left. - a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} a_j a_k \cos(jx) \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_j b_k \sin(jx) \sin(kx) dx \right\} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} a_j b_k \cos(jx) \sin(kx) dx \right\} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right\} + \right. \\ &\quad \left. + a_0 \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx \right\} \right). \end{aligned}$$

Ekkor a trigonometrikus függvényrendszer ortogonalitása miatt azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) - \frac{a_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx + \frac{b_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) = \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) - a_0^2 - 2 \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).
\end{aligned}$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

2.5. Parseval egyenlőség Fourier soroka

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$

Ekkor

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

3. Tétel

3.1. Kétváltozós függvény értelmezése, ábrázolása

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$f : S \mapsto \mathbb{R}$$

kétváltozós függvény, ahol S pontjaihoz $(x, y) \mapsto u$. Ekkor x, y független változók, u függő változó.

Kétváltozós függvényeket három dimenzióban könnyen tudunk ábrázolni, az xy sík legyen az értelmezési tartomány, és az $(x, y, 0)$ ponthoz rendeljük hozzá az $(x, y, f(x, y))$ pontot. Ábrázolhatjuk még két dimenzióban a felület szintvonalait, ilyenkor az $f(x, y) = k$ görbét ábrázoljuk.

3.2. Folytonosság pontban

Adott f kétváltozós függvény és $(x_0, y_0) \in D_f$. Ekkor f folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall (x, y) \in D_f$, $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

3.3. Sorozatfolytonosság pontban

Adott f függvény sorozatfolytonos a $P_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall (P_n) \subset D_f$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = f(P_0)$.

3.4. Bolzano tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol S összefüggő. Legyen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$, melyekre $a = f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2) = b$. Ekkor $\forall c \in (a, b)$ számhoz $\exists (x_0, y_0) \in S$, melyre $f(x_0, y_0) = c$.

Bizonyítás

Mivel S folytonos, létezik az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontokat összekötő folytonos görbe, azaz létezik $\gamma : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ függvény, melyre $\gamma(\alpha) = (x_1, y_1)$ illetve $\gamma(\beta) = (x_2, y_2)$. Ekkor az $F(t) = f(x(t), y(t))$ függvényre az egydimenziós Bolzano tétel miatt $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$, melyre $F(\xi) = c$. Ekkor $(x_0, y_0) := \gamma(\xi)$ -re valóban $f(x_0, y_0) = c$.

3.5. Weierstrass tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol S korlátos és zárt. Ekkor R_f korlátos és zárt.

3.6. Egyenletes folytonosság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos S -ben ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall P, P' \in S$, $\|P - P'\| < \delta$ esetén $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$. Ekkor $\delta = \delta(\varepsilon)$ az ε -hoz tartozó folytonossági modulus.

4. Tétel

4.1. Függvény határértéke

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ függvény, és legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ torlódási pont D_f -ben. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $(x, y) \in S$, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

4.2. Parciális derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in \text{int}S$. Ekkor a függvény x szerinti parciális deriváltja az (x_0, y_0) pontban

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan a függvény y szerinti parciális deriváltja az (x_0, y_0) pontban

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

4.2.1. Geometriai jelentés

Rögzített y_0 mellett definiáljuk az $f_1(x) = f(x, y_0)$ függvényt. Ekkor $f'_1(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$, tehát a definiált metszefüggvény meredekségét kapjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a parciális deriváltak a felület érintősíkjának x és y irányú meredekségét adják meg.

4.3. Parciális deriváltak és folytonosság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ ahol $S \subset \mathbb{R}^2$, és legyen $(x_0, y_0) \in \text{int}D_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete (x_0, y_0) -nak, amiben $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ és $\exists K \in \mathbb{R}$, amire

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq K \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$$

teljesül $\forall (x, y) \in U$ esetén. Ekkor f folytonos (x_0, y_0) -ban.

Bizonyítás

Vizsgáljuk meg az $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$ kifejezést, ahol $(x, y) \in U$.

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= |f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \leq \\ &\leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)|. \end{aligned}$$

Ekkor a Lagrange-féle középértéktételből

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y)(x - x_0)$$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y - y_0)$$

alkalmas ξ_x, ξ_y esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y)(x - x_0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y - y_0) \right| \leq \\ &\leq K|x - x_0| + K|y - y_0|. \end{aligned}$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f valóban folytonos.

4.4. Magasabb rendű parciális deriváltak

4.4.1. Másodrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy f kétváltozós függvény kétszer differenciálható az értelmezési tartomány (x, y) belső pontjában. Ekkor a másodrendű parciális deriváltak a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltjai az (x, y) pontban. A másodrendű parciális deriváltak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

4.4.2. n -edrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy f kétváltozós függvény n -szer differenciálható az értelmezési tartomány (x, y) belső pontjában. Az n -edrendű parciális deriváltak

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^k \partial x^m} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^m}$$

alakúak, ahol $k + m = n$.

4.5. Parciális deriválások sorrendje, felcserélhetősége

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, és legyen $(x_0, y_0) \in \text{int} D_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete (x_0, y_0) -nak, amiben $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ és folytonosak az (x_0, y_0) pontban. Ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

teljesül $\forall (x, y) \in U$ esetén.

5. Tétel

5.1. Teljes differenciálhatóság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in \text{int}D_f$. Azt mondjuk, hogy a függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, melyekre

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

teljesül elegendően kicsi $\Delta x, \Delta y$ esetén, ahol A, B, C függetlenek Δx -től és Δy -től.

5.2. Kapcsolat a parciális deriváltakkal

Ha f differenciálható az $(x_0, y_0) \in \text{int}D_f$ pontban, akkor

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad C = f(x_0, y_0).$$

Bizonyítás

1. Legyen $\Delta x = \Delta y = 0$. Ekkor valóban

$$f(x_0, y_0) = C.$$

2. Legyen $\Delta y = 0$. Ekkor

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) = A\Delta x + f(x_0, y_0) + o(|\Delta x|).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

amiből nyilván

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \right) = A.$$

3. Az előzőhöz analóg módon kapjuk, hogy

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

5.3. Gradiens

Ha az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor ebben a pontban a derivált egy kétdimenziós vektor, a gradiens

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Ha egy függvény egy S tartomány minden pontjában differenciálható, akkor a deriváltfüggvény

$$\nabla f : S \mapsto \mathbb{R}^2$$

típusú lesz.

5.4. Folytonosság és differenciálhatóság

5.4.1. Tétel

Ha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor itt folytonos.

Bizonyítás

Tudjuk, hogyha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + f(x_0, y_0) + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|).$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

5.4.2. Tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in \text{int} D_f$. Tegyük fel $\exists U$ környezete (x_0, y_0) -nak, ahol $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ és folytonosak. Ekkor f differenciálható (x_0, y_0) -ban.

Bizonyítás

Vizsgáljuk meg az

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

kifejezés értékét!

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ekkor a Lagrange-féle középértéktételből

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y$$

alkalmas $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ esetén. Ekkor a parciális deriváltak folytonossága miatt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta y).$$

Ekkor

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(\Delta x, \Delta y) \Delta x + o(\Delta y) \Delta y$$

azaz f valóban differenciálható.

5.5. Érintő sík egyenlete, normálvektor

Ha az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor az ehhez a ponthoz tartozó érintő sík egyenlete

$$S : \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Ekkor a sík normálvektora

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

6. Tétel

6.1. Iránymenti derivált

Adott f kétváltozós függvény és $\alpha \in [0, 2\pi)$. Ekkor az α irányú iránymenti derivált (ha létezik a határérték)

$$D_\alpha f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

Adott $v(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ irány esetén, ahol $\|v\| = 1$, az iránymenti derivált

$$D_v f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varrho v_1, y_0 + \varrho v_2) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

6.1.1. Tétel

Ha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor itt létezik az iránymenti derivált tetszőleges $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén, és

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) v.$$

Bizonyítás

A differenciálhatóság miatt

$$f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0) = \varrho \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varrho \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(|\varrho|).$$

Ekkor

$$\frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{o(|\varrho|)}{\varrho}$$

így nyilván

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

6.2. Láncszabály

1. Kétváltozós belső függvény, egyváltozós külső függvény.

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és

$$F(x, y) = f(\varphi(x, y)).$$

Tegyük fel, hogy φ differenciálható (x, y) -ban, illetve f differenciálható $\varphi(x, y)$ -ban. Ekkor F is differenciálható, és

$$\nabla F(x, y) = \left(f'(\varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), f'(\varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right) = f'(\varphi(x, y)) \nabla \varphi(x, y).$$

2. Két darab egyváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, és

$$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Tegyük fel, hogy φ, ψ differenciálhatók t -ben, illetve f differenciálható $(\varphi(t), \psi(t))$ -ben. Ekkor F is differenciálható, és

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t).$$

3. Két darab kétváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.

Legyen $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és

$$F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

Tegyük fel, hogy φ, ψ differenciálhatók (x, y) -ban, illetve f differenciálható $(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ -ban. Ekkor F is differenciálható, és

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

azaz

$$\nabla F(x, y) = \nabla f(u, v) \begin{pmatrix} \nabla \varphi(x, y) \\ \nabla \psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

6.3. Második derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és $(x_0, y_0) \in S$. Azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható a pontban, ha a függvény differenciálható a pont egy környezetében, és a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és a $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltak differenciálhatók a pontban.

6.4. Hesse mátrix

Ha az f függvény kétszer differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor értelmezhetők a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ és a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ parciális deriváltak. Ekkor a ponthoz tartozó Hesse mátrix

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

6.5. Lagrange-féle középértéktétel

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in \text{int}D$, és U egy olyan környezete, ahol f differenciálható és $U \subset D$. Ekkor $\forall (x, y) \in U$ -hoz $\exists \theta \in (0, 1)$, melyre

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, illetve $\Delta y = y - y_0$.

Bizonyítás

Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

ahol $F : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor $F(0) = f(x_0, y_0)$ és $F(1) = f(x, y)$. A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists \theta \in (0, 1)$, melyre

$$F'(\theta) = F(1) - F(0).$$

Továbbá a láncszabály miatt

$$F'(t) = \nabla f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy θ -ra

$$F'(\theta) = F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

7. Tétel

7.1. Implicitfüggvény-tétel, implicit deriválás

Tegyük fel, hogy F kétváltozós függvény differenciálható az (x_0, y_0) pont környezetében és $F(x_0, y_0) = 0$ illetve $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Ekkor $\exists I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ intervallum, melyre $\forall x \in I_1$ esetén az $F(x, y) = 0$ egyenletnek pontosan egy $y = f(x) \in I_2$ megoldása van. Tehát egyértelműen létezik $f : I_1 \mapsto I_2$ függvény, melyre

1. $f(x_0) = y_0$
2. $\forall x \in I_1$ esetén $f(x) \in I_2$
3. $\forall x \in I_1$ esetén $F(x, f(x)) = 0$
4. $\forall x \in I_1$ esetén $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$.

Továbbá f differenciálható I_1 -ben és

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

7.2. Másodrendű Taylor formula

Tegyük fel, hogy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható $(x_0, y_0) \in \text{int}D$ -ben. Ekkor

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + L_2$$

ahol L_2 a Lagrange-féle maradéktag.

Bizonyítás

Legyen $F : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ függvény és

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \\ F''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2. \end{aligned}$$

Felírva F -re a másodrendű Taylor formulát

$$F(1) - F(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + L_2$$

azonban $F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Ezzel kapjuk is a bizonyítandót.

7.3. Szélsőérték

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Ekkor $(x_0, y_0) \in S$ lokális minimum (maximum), ha $\exists U$ környezete, ahol $\forall (x, y) \in U$ esetén

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \left(f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \right).$$

Ha $U = D_f$, akkor (x_0, y_0) globális szélsőérték.

7.4. Szükséges feltétel szélsőérték létezéséhez

Tegyük fel, hogy f differenciálható. Ekkor ha (x, y) szélsőérték, akkor

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

Bizonyítás

Legyen $f_1(x) = f(x, y_0)$ a kétváltozós függvény egyik metszetfüggvénye. Ekkor ha x_0 szélsőérték, akkor $f'_1(x_0) = 0$ kell, azonban $f'_1(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ szükséges.

7.5. Stacionárius pont

Azt mondjuk, hogy (x, y) stacionárius pontja f -nek, ha

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

7.6. Nyeregpont

Azt mondjuk, hogy (x, y) nyeregpont, ha stacionárius pont, de nem szélsőérték.

8. Tétel

8.1. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez I.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható (x_0, y_0) -ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $\det H > 0$ esetén (x_0, y_0) -ban lokális szélsőérték van, ami

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ esetén maximum

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ esetén minimum

2. $\det H = 0$ esetén további vizsgálat szükséges

3. $\det H < 0$ esetén (x_0, y_0) nyeregpont.

8.2. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez II.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható (x_0, y_0) -ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $H > 0$ esetén (x_0, y_0) lokális minimumhely

2. $H < 0$ esetén (x_0, y_0) lokális maximumhely

3. ha H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.

4. ha H indefinit, akkor (x_0, y_0) nyeregpont.

8.3. Lokális szélsőérték jellemzése n -változós függvényekre

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor $x_0 \in S$ lokális minimum (maximum), ha $\exists U$ környezete, ahol $\forall x \in U$ esetén

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \left(f(x) \leq f(x_0) \right).$$

Ha $U = D_f$, akkor x_0 globális szélsőérték.

Szükséges feltétele a szélsőérték létezésének, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

Bizonyítás

Legyen $f_1(x) = f(x, x_2, \dots, x_n)$ az n -változós függvény egyik metszetfüggvénye. Ekkor ha y_0 szélsőérték, akkor $f'_1(y_0) = 0$ kell, azonban $f'_1(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_0)$. Hasonlóan belátható, hogy $\forall \frac{\partial f}{\partial x_k}(y_0) = 0$ szükséges.

8.4. Feltételes szélsőérték feladat megfogalmazása

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós differenciálható függvény és $\varphi(x, y) = 0$ feltétel. A feladat, hogy megkeressük a

$$\min_{\varphi(x,y)=0} f(x, y) \quad \max_{\varphi(x,y)=0} f(x, y)$$

szélsőértékhelyeket és szélsőértékeket.

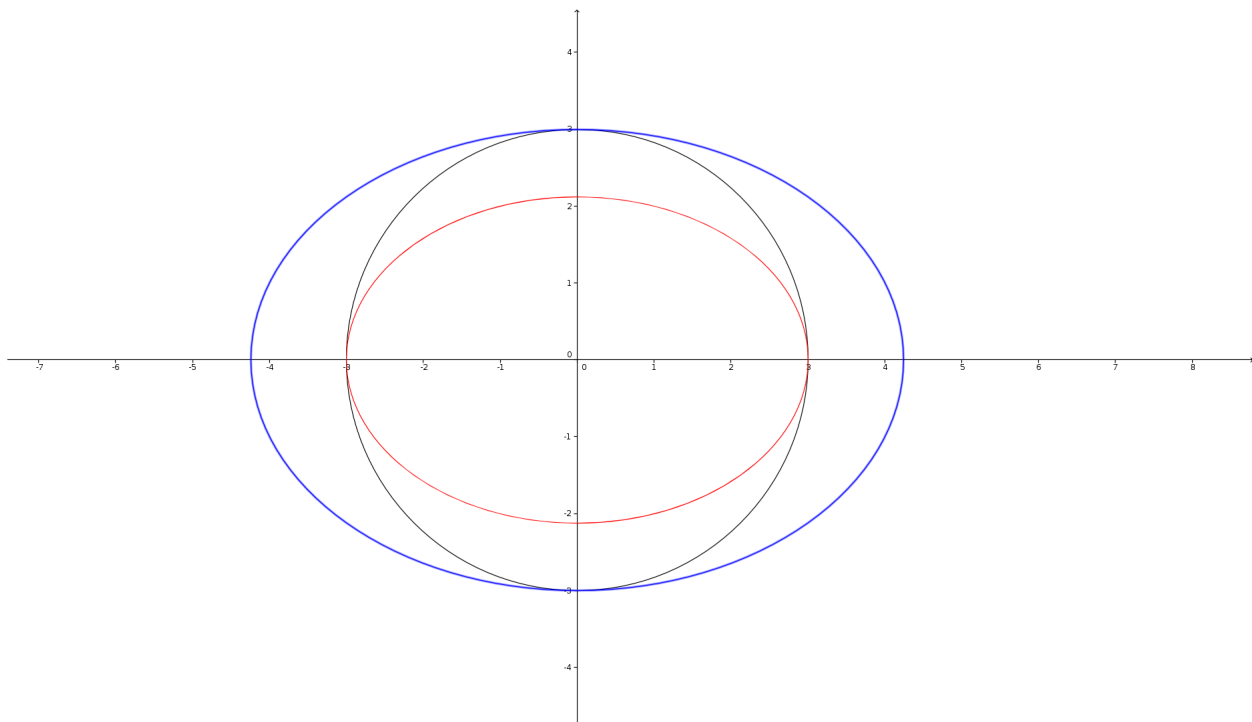
8.4.1. Szemléletes jelentés

Tekintsük a kétdimenzióban a $\varphi(x, y) = 0$ függvényt és az $f(x, y) = c$ szinvonalakat. Mivel f differenciálható, ezért ezek a szinvonalak monoton, folytonos módon változnak. Ekkor azokat a szinvonalakat keressük, amik "először" (minimum esetén) vagy "utoljára" (maximum esetén) metszik a $\varphi(x, y) = 0$ görbét. Ezek a szinvonalak érinteni fogják a görbét, mondjuk az (x, y) pontban. Az érintés miatt

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)} = \lambda.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\nabla f(x, y) - \lambda \nabla \varphi(x, y) = 0.$$



A képen a $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ feltételt láthatjuk (fekete kör), illetve az $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ szinvonalait $c = 9$ (piros ellipszis) és $c = 18$ (kék ellipszis) esetben. A szinvonalak közül a piros az, ami "először" metszi a $\varphi(x, y) = 0$ görbét, így ezen a szinvonalon helyezkednek el a feltételes minimumhelyek. Hasonlóan a kék metszi "utoljára" a görbét, így ezen a szinvonalon helyezkednek el a feltételes maximumhelyek.

8.5. Lagrange-féle multiplikátor szabály

Adott f kétváltozós, differenciálható függvény, melynek tekintsük a megszorítását az $\{(x, y) | \varphi(x, y) = 0\}$ halmazon. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi(x, y).$$

Ekkor ha (x_0, y_0) -ban feltételes szélsőértéke van f -nek a $\varphi(x, y) = 0$ feltétel mellett, akkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

9. Tétel

9.1. Függvényrendszer, koordinátatranszformáció

Adottak $\Phi, \Psi : D \mapsto \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $\Phi(x, y) = \xi$ és $\Psi(x, y) = \eta$. Ekkor $F : D \mapsto \mathbb{R}^2$ egy függvényrendszer vagy vektormező, melyre

$$F(x, y) = (\Phi(x, y), \Psi(x, y)) = (\xi, \eta).$$

Az ilyen függvényrendszereket koordinátatranszformációként is felfoghatjuk $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ hozzárendeléseként.

9.2. Jacobi mátrix, Jacobi determináns

Ha a Φ, Ψ függvények differenciálhatóak, akkor F is differenciálható, és a derivált a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \Phi(x, y) \\ \nabla \Psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

Ekkor $D(x, y) = \det \mathcal{J}(x, y) = \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)}$ a Jacobi determináns.

9.3. Homogén lineáris transzformáció, Jacobi mátrixa

A transzformációt így értelmezzük

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy, \end{aligned}$$

A rendszer Jacobi mátrixa

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Jacobi determinánsa $D(x, y) = ad - bc$.

9.4. Invertálhatóság

Tegyük fel, hogy a Φ, Ψ függvények injektívek. Ekkor az F leképezés invertálható, és az inverz rendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= g(\xi, \eta) \\ y &= h(\xi, \eta). \end{aligned}$$

9.5. Inverz rendszer Jacobi mátrixa

Tegyük fel, hogy az inverz rendszer függvényei differenciálhatóak. Ekkor a Jacobi mátrix

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial h}{\partial \eta}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g(\xi, \eta) \\ \nabla h(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

9.5.1. Tétel

Tegyük fel, hogy egy vektormező Jacobi mátrixa invertálható egy $(x, y) \in \text{int}D$ pontban. Ekkor a vektormező invertálható és

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \left(\mathcal{J}(x, y) \right)^{-1}.$$

Továbbá

$$D(\xi, \eta) = \frac{1}{D(x, y)}.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$\xi = \Phi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))$$

$$\eta = \Psi(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)).$$

Ekkor a láncszabály miatt

$$\nabla \xi(\xi, \eta) = (1 \ 0) = \nabla \Phi(x, y) \begin{pmatrix} \nabla g(\xi, \eta) \\ \nabla h(\xi, \eta) \end{pmatrix}$$

$$\nabla \eta(\xi, \eta) = (0 \ 1) = \nabla \Psi(x, y) \begin{pmatrix} \nabla g(\xi, \eta) \\ \nabla h(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{D(x, y)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{D(x, y)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{D(x, y)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{D(x, y)}.$$

Ezek alapján

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \frac{1}{D(x, y)} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial y} & -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(\mathcal{J}(x, y) \right)^{-1}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

10. Tétel

10.1. Riemann integrál két dimenzióban

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt mérhető halmaz, és rajta egy $f : R \mapsto \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Legyen

$$R = \bigcup_{k=1}^n R_k$$

felosztás, ahol $\forall R_k$ mérhető és $\forall R_k \cap R_j = \emptyset$. Legyen továbbá

$$m_k = \inf \left\{ f(x, y) \mid x, y \in R_k \right\}$$

$$M_k = \sup \left\{ f(x, y) \mid x, y \in R_k \right\}$$

és

$$s_n = \sum_{k=1}^n A(R_k) m_k \leq V(S) \leq \sum_{k=1}^n A(R_k) M_k = S_n$$

ahol

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in R, z \in [0, f(x, y)] \right\}.$$

Ekkor f folytonossága miatt a Heine-tétel által f egyenletesen folytonos. Emiatt $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta_0 > 0$, amelyre $\delta < \delta_0$ esetén $M_k - m_k < \varepsilon$. Ekkor

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^n A(R_k) (M_k - m_k) < \sum_{k=1}^n A(R_k) \varepsilon = \varepsilon A(R).$$

Tehát

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\inf S_n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sup s_n)$$

azaz az integrál értelmezhető. Ekkor a keresett térfogat

$$V(S) = \iint_R f(x, y) dR = \iint_R f(x, y) d(x, y).$$

10.2. Integrálás téglalap alakú tartományon

Legyen $R = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Bizonyítás

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részre, a $[c, d]$ intervallumot pedig m egyenlő részre. Legyen továbbá az így létrehozott R_{ij} téglalapokra $(\xi_i, \eta_j) \in R_{ij}$. Ekkor az integrál közelítő összege

$$V_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y.$$

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} V_{nm} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_c^d f(\xi_i, y) dy \Delta x = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Hasonlóan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{nm} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \int_a^b f(x, \eta_j) dx \Delta y = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} V_{nm} = \iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

10.3. Normáltartomány

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ x szerinti normáltartomány, ha $\exists [a, b]$, továbbá $\exists \Phi_1 \leq \Phi_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [\Phi_1(x), \Phi_2(x)] \right\}.$$

Hasonlóan $R \subset \mathbb{R}^2$ y szerinti normáltartomány, ha $\exists [c, d]$, továbbá $\exists \Psi_1 \leq \Psi_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], x \in [\Psi_1(y), \Psi_2(y)] \right\}.$$

10.4. Integrálás síkbeli normáltartományon

Legyen R egy x szerinti normáltartomány. Ekkor

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Hasonlóan, ha R egy y szerinti normáltartomány, akkor

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

10.5. Áttérés polárkoordinátákra kettős integrálban

Az áttérés során az (x, y) koordinátákról térünk át az (r, φ) koordinátákra, ahol r az origótól vett távolság, φ pedig az x -tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

így a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

amiből a Jacobi determináns $D(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$.

Legyen adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és T az integrálás tartománya. Legyen továbbá a koordinátatranszformáció után az integrálási tartomány T' . Az integrál

$$\iint_T f(x, y) d(x, y) = \iint_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

11. Tétel

11.1. Polárkoordináták a síkon

Adott $P(x, y)$ pont a síkon. Ennek a pontnak a polárkoordinátái (r, φ) , ahol r az origótól vett távolság, φ pedig az x -tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

illetve

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi.$$

11.1.1. Jacobi mátrixa

Az áttérés során az (x, y) koordinátákról térünk át az (r, φ) koordinátákra, ahol r az origótól vett távolság, φ pedig az x -tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

így a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

amiből a Jacobi determináns $D(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$.

11.2. Általános helyettesítés kettős integrálban

Legyen $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen

$$x = \Phi(u, v)$$

$$y = \Psi(u, v)$$

invertálható és differenciálható függvényrendszer. Legyen továbbá

$$R' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (\Phi(u, v), \Psi(u, v)) \in R \right\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \iint_{R'} f(\Phi(u, v), \Psi(u, v)) D(u, v) d(u, v)$$

ahol $D(u, v)$ a Jacobi determináns.

11.3. Riemann integrál három dimenzióban, szemléletes jelentés

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ háromváltozós függvény. Az

$$\iiint_T f(x, y, z) d(x, y, z)$$

integrált a kétváltozós esettel analóg módon közelítésekkel értelmezzük, először egy mértéket definiálunk, kockás közelítéssel (kétdimenzióban négyzetes). Ezután a közelítőösszeget definiáljuk az eddigiekkel analóg módon.

Tegyük fel, hogy adott T tartomány, melyen az f háromváltozós függvény nemnegatív értékeket vesz fel. Ekkor legyen az f függvény sűrűségfüggvény, tehát $f(x, y, z)$ az (x, y, z) pont sűrűségét jelenti. Így az

$$\iiint_T f(x, y, z) d(x, y, z)$$

integrál a T tartomány (háromdimenziós test) tömegét fogja jelenteni.

11.4. Hármass integrál kiszámítása intervallumon

Adott f háromváltozós függvény és $T = [a, b] \times [c, d] \times [e, g] \subset \mathbb{R}^3$ intervallum. Az integrál értéke

$$\iiint_T f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) dz dy dx$$

illetve a kettős integrálhoz hasonlóan, az integrálok tetszőleges permutációja megfelelő.

11.5. Hármass integrál kiszámítása normáltartományon

Adott f háromváltozós függvény és

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2, z \in [F_1(x, y), F_2(x, y)] \right\}$$

(x, y) szerinti normáltartomány. Az ingetrál értéke

$$\iiint_T f(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_S \int_{F_1(x, y)}^{F_2(x, y)} f(x, y, z) dz d(x, y).$$

Ha S intervallum, vagy normáltartomány, akkor tovább egyszerűsödik a képlet.

12. Tétel

12.1. Hengerkoordináták, Jacobi determináns

Egy (x, y, z) pont hengerkoordinátái (r, θ, z) ahol (r, θ) a pont vetületének polárkoordinátái és

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z.\end{aligned}$$

A Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi determinánsa (harmadik sor szerint kifejtve)

$$D(r, \theta, z) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

12.2. Gömbi polárkoordináták, Jacobi determináns

Egy (x, y, z) pont gömbi polárkoordinátái (r, θ, φ) , ahol r az origótól vett távolság, θ a pontba mutató vektor vetületének az x -tengellyel bezárt szöge, φ pedig a pontba mutató vektor z -tengellyel bezárt szöge.

$$\begin{aligned}x &= r \sin \varphi \cos \theta \\y &= r \sin \varphi \sin \theta \\z &= r \cos \varphi\end{aligned}$$

A Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

A Jacobi determinánsa (utolsó sor szerint kifejtve)

$$\begin{aligned}D(r, \theta, \varphi) &= \cos \varphi (r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta) + \\ &+ r \sin \varphi (r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) = r^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + r^2 \sin^3 \varphi = r^2 \sin \varphi.\end{aligned}$$

12.3. Általános helyettesítés hármas integrálban

Legyen $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen

$$\begin{aligned}x &= \Phi(u, v, w) \\y &= \Psi(u, v, w) \\z &= \Xi(u, v, w)\end{aligned}$$

invertálható és differenciálható függvényrendszer. Legyen továbbá

$$R' = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid (\Phi(u, v, w), \Psi(u, v, w), \Xi(u, v, w)) \in R \right\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_{R'} f(\Phi(u, v, w), \Psi(u, v, w), \Xi(u, v, w)) D(u, v, w) d(u, v, w)$$

ahol $D(u, v, w)$ a Jacobi determináns.

12.4. Improprius kettős integrál kiszámítása nem korlátos tartományon

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol R nem korlátos. Tegyük fel, hogy $\exists R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R$ mérhető tartománysorozat, melyre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R.$$

Ha

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y) < \infty$$

és független az (R_n) sorozat megválasztásától, akkor f improprius értelemben integrálható

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y).$$

12.4.1. Tétel

Tegyük fel, hogy $\exists (R_n)$ mérhető tartománysorozat, melyre az integrálok egyenletesen korlátosak, azaz $\exists M$, melyre $\forall n$ esetén

$$\iint_{R_n} |f(x, y)| d(x, y) \leq M$$

teljesül. Ekkor f improprius értelemben integrálható és minden más megfelelő (S_n) mérhető tartománysorozatra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y) = \iint_R f(x, y) d(x, y).$$

12.4.2. Haranggörbe integrálja az egész síkon

Adott $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Legyen

$$R_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in [0, n^2] \right\}$$

illetve polárkoordinátákra áttérve

$$R'_n = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, n], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Ekkor R_n nyilván mérhető, az integrál

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \iint_{R'_n} r e^{-r^2} d(r, \varphi) = \pi \int_0^n 2r e^{-r^2} dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^n = \pi - \pi e^{-n^2}.$$

Látható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y) = \pi$$

tehát a függvény improprius értelemben integrálható és

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \pi.$$

12.4.3. Következmény

Mivel minden más tartománysorozatra ugyanezt az eredményt kapjuk, ezért

$$S_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \in [0, n] \right\}$$

esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

13. Tétel

13.1. Improprius integrál kiszámítása nem korlátos függvényre

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ nem korlátos függvény, azaz legyen f folytonos függvény néhány pont kivételével, ahol nincs véges határértéke. Tegyük fel, hogy $\exists R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R$ tartománysorozat, ahol f folytonos $\forall R_n$ tartományon és $\lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = A(R)$. Ha

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y) < \infty$$

és független az (R_n) sorozat megválasztásától, akkor f improprius értelemben integrálható.

13.2. Hatványfüggvény integrálja az egységkörben

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^\alpha}.$$

ahol $\alpha > 0$ és az integrálási tartomány

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in [0, 1] \right\}.$$

Legyen

$$R_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right] \right\}$$

illetve áttérve polárkoordinátákra

$$R' = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Ekkor

$$\iint_{R_n} f(x, y) d(x, y) = \iint_{R'_n} \frac{1}{r^\alpha} r d(r, \varphi) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha-1}} d\varphi dr = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr.$$

Tudjuk, hogy ez az integrál akkor és csak akkor véges, hogyha $\alpha - 1 < 1$, azaz $\alpha < 2$. Azt kaptuk tehát, hogy a hatványfüggvény $0 < \alpha < 2$ esetében integrálható az egységkörön.

13.3. Integrálhatóság feltétele nem korlátos függvényre

Tegyük fel, hogy az $f : R \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény nem korlátos az R mérhető tartomány egy pontjának környezetében, legyen ez (az egyszerűség kedvéért) az origó. Tegyük fel, hogy $\exists 0 < \alpha < 2, M > 0$ melyekre

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^\alpha}$$

teljesül R -en. Ekkor f improprius értelemben integrálható.

13.4. Komplex függvény értelmezése, ábrázolás

Adott $S \subset \mathbb{C}$. Ekkor $f : S \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény, ahol S pontjaihoz $z = x + iy \mapsto w = u + iv$. Ekkor z független változó, w függő változó.

Komplex függvényeket két komplex sík segítségével tudunk ábrázolni. Ebben az esetben az első számsíkra az értelmezési tartományt, a másikkra az értékkészletet rajzoljuk. Ilyenkor célszerű egyszerű alakzatok képét megvizsgálni (egyenesek, körök, téglalapok), illetve egyes pontok képét is ábrázolhatjuk.

14. Tétel

14.1. Vonal definíciója

14.1.1. \mathbb{R}^2

Adott $[a, b] \in \mathbb{R}$ véges intervallum és $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ függvény, ahol $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Ekkor legyen Γ görbe

$$\Gamma = \left\{ y(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a, b] \right\}.$$

A görbe folytonos, ha a koordináta-függvényei folytonosak, illetve sima, ha a koordináta-függvényei simák. Zárt görbe esetén $\gamma(a) = \gamma(b)$.

14.1.2. \mathbb{R}^3

Adott $[a, b] \in \mathbb{R}$ véges intervallum és $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ függvény, ahol $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Ekkor legyen Γ görbe

$$\Gamma = \left\{ y(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a, b] \right\}.$$

A görbe folytonos, ha a koordináta-függvényei folytonosak, illetve sima, ha a koordináta-függvényei simák. Zárt görbe esetén $\gamma(a) = \gamma(b)$.

14.2. Kétváltozós valós függvény integrálja vonal mentén

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós függvény és

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \right\} \in R$$

sima görbe, ahol $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Ekkor f Γ görbe menti vonalintegrálja

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Bizonyítás

Írjunk fel egy közelítő összeget! Legyen

$$\mathcal{F} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

felosztás. Közelítsük a vonalintegrált téglalapokkal, melynek a magassága $f(\gamma(t_i))$ az alapja pedig

$$\sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}.$$

Ekkor a közelítő összeg

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(t_i)) \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(t_i)) \sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2} (t_{i+1} - t_i).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists \xi_i, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$, melyekre

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = x'(\xi_i) \quad \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = y'(\eta_i).$$

Ekkor

$$I_n = f(\gamma(t_i)) \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \Delta t_i.$$

Vegyük észre, hogy ez egy Riemann összeg, azaz

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta(\mathcal{F}) \rightarrow 0}} I_n = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

14.2.1. Szemléletes jelentés

Állítsunk a görbe minden (x, y) pontjában az xy síkra merőleges $f(x, y)$ hosszú szakaszt. A vonalintegrál értéke megadja a keletkező felület nagyságát.

14.3. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén

Adott $F : R \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

vektormező és

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \right\} \in R$$

sima görbe. Ekkor a vektormező vonalintegrálja

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \dot{x}(t) + g(\gamma(t)) \dot{y}(t) \right) dt.$$

14.3.1. Szemléletes jelentés

Egy testet mozgatva a Γ görbe mentén, ha minden (x, y) pontban $F(x, y)$ erő hat a testre, akkor a vonalintegrál értéke megadja a végzett munkát.

14.4. Potenciális vektormező

Azt mondjuk, hogy F potenciális vektormező, ha $\exists f$ differenciálható függvény, melyre $F = \nabla f$.

14.4.1. Tétel

Adott F potenciális vektormező, aminek potenciálja f és adott

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \right\}$$

sima görbe. Ekkor

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Bizonyítás

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

14.5. Potenciálkeresés

Adott

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}$$

vektormező. Ahhoz, hogy F potenciális legyen

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

kell. Ekkor g -t integrálva x szerint, illetve h -t integrálva y szerint kapjuk a $G(x, y), H(x, y)$ függvényeket. Ezen függvények közös része lesz a keresett potenciál.

14.5.1. Potenciál létezésének szükséges és elégséges feltétele

Adott F vektormező és Γ zárt, sima görbe. Ekkor F potenciális akkor és csak akkor, ha

$$\oint_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = 0.$$

Bizonyítás

(Csak szükségesség)

Tegyük fel, hogy F potenciális, potenciálja f . Ekkor

$$\oint_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r} = f(b) - f(a) = 0.$$

15. Tétel

15.1. Fourier sor komplex alakja, együtthatók meghatározása

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx} \end{aligned}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{a_n - ib_n \operatorname{sgn}(n)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

15.2. Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor a függvény Fourier transzformáltja $\hat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(f, s) = \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

15.3. Fourier transzformáció tulajdonságai

1. Ha f páros, akkor

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(st) dt.$$

2. Ha f páratlan, akkor

$$\hat{f}(s) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

3. \hat{f} folytonos

4. Linearitás

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g, s) = \alpha \mathcal{F}(f, s) + \beta \mathcal{F}(g, s)$$

5. Átskálázás

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right) \quad (a \neq 0)$$

6. Időeltolás

$$\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s} \mathcal{F}(f(x), s)$$

7. Frekvenciaeltolás

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k)$$

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

Ekkor ha f páros, akkor

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(st) dt.$$

2. Tudjuk, hogy

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

Ekkor ha f páratlan, akkor

$$\hat{f}(s) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

3. Az egyenletes konvergenciából következik.

4. Az integrálás linearitásából következik.

5.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(ax), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-isx} dx \stackrel{\substack{\frac{1}{a}y=x \\ \frac{1}{a}dy=dx}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\operatorname{sgn} a \infty}^{\operatorname{sgn} a \infty} f(y) e^{-i\frac{s}{a}y} \frac{1}{a} dy = \\ &= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{s}{a}y} dy = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(x - x_0), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-isx} dx \stackrel{y=x-x_0}{dy=dx}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-is(y+x_0)} dy = e^{-isx_0} \mathcal{F}(f(x), s)\end{aligned}$$

7.

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(s-k)x} dx = \mathcal{F}(f(x), s - k)$$

15.4. Inverz Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds.$$

16. Tétel

16.1. Parseval egyenlet Fourier transzformációra

Tegyük fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx < \infty.$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds.$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} ds dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \hat{f}(-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds \end{aligned}$$

16.2. Konvolúció

Adottak $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvények. Ekkor a két függvény konvolúciója

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy.$$

16.3. Konvolúció és FT kapcsolata

1.

$$\mathcal{F}(f * g, s) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f, s) \mathcal{F}(g, s)$$

2.

$$\mathcal{F}(fg, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s)$$

Bizonyítás

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-isy} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) e^{-is(x-y)} dx = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f, s) \mathcal{F}(g, s) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(fg, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r)e^{irx}dr g(x)e^{-isx}dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i(s-r)x}dx \right) dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r)\hat{g}(s-r)dr = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s)
\end{aligned}$$

16.4. Dirac delta

Adott $\varepsilon > 0$. Ekkor legyen

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{ha } |x| \geq \varepsilon \end{cases}.$$

A Dirac delta

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(x).$$

17. Tétel

17.1. n -edrendű lineáris differenciálegyenlet

Adott L lineáris operátor, melyre

$$L[y] = \sum_{k=0}^n a_{n-k} y^{(k)}.$$

Homogén differenciálegyenlet (HDE) esetén $L[y] = 0$ megoldásait keressük, inhomogén differenciálegyenlet (IDE) esetén $L[y] = f(x)$ megoldásait keressük.

17.2. Függvények függetlensége

Adottak az $y_1, y_2, \dots, y_n : D \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Azt mondjuk, hogy a függvények lineárisan függetlenek, ha

$$\sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \equiv 0$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall c_k = 0$.

17.3. Wronski determináns

Adottak y_1, y_2, \dots, y_n $(n-1)$ -szer differenciálható függvények. Ekkor a Wronski determináns

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

17.4. Tétel

Az y_1, y_2, \dots, y_n függvények lineárisan összefüggők akkor és csak akkor, ha

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy a függvények összefüggők. Ekkor van köztük egy y_k függvény, melyre

$$y_k = - \sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} y_j.$$

Hasonlóan

$$y_k' = - \sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} y_j'.$$

A gondolatmenetet követve láthatjuk, hogy a mátrix k -adik oszlopa előáll a többi lineáris kombinációjaként, ezért a determináns nulla.

Most tegyük fel, hogy a determináns nulla. Tudjuk, hogy ekkor az oszlopok összefüggő rendszert alkotnak, amiből az előző gondolatmenet mentén láthatjuk, hogy az y_k függvények összefüggő rendszert alkotnak.

17.5. Megoldások terének jellemzése

Az $L[y] = 0$ egyenletnek létezik n darab lineárisan független megoldása, melyekre az összes többi megoldás ezek lineáris kombinációja.

Bizonyítás

A tétel második részét látjuk be. Tudjuk, hogy $L[y] = L[y_k] = 0$, tehát

$$W[y, y_1, \dots, y_n] = 0.$$

Mivel

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$$

így

$$y = \sum_{k=1}^n a_k y_k.$$

18. Tétel

18.1. Homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet

Ebben az esetben

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

A HDE megoldásait $y = e^{\lambda x}$ alakban keresve

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} P(\lambda) = 0 \implies P(\lambda) = 0.$$

18.1.1. Első eset

Tegyük fel, hogy P n különböző gyöke mind valós, legyenek a gyökök $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ekkor az alapmegoldások

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

illetve az általános megoldás

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x} \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

18.1.2. Második eset

Tegyük fel, hogy P m darab gyöke k_m -szeres gyök, ahol nyilván $\sum_{j=1}^m k_j = n$. Ekkor az alapmegoldások

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$$

$$\vdots$$

$$y_{k_1}(x) = x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}$$

$$y_{k_1+1}(x) = e^{\lambda_2 x}$$

$$\vdots$$

$$y_{k_1+k_2}(x) = x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x}$$

$$\vdots$$

$$y_{k_1+k_2+\dots+1}(x) = e^{\lambda_m x}$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = x^{k_m-1} e^{\lambda_m x}$$

illetve az általános megoldás

$$y(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{k_j-1} c_{jl} x^l e^{\lambda_j x}.$$

18.1.3. Harmadik eset

Tegyük fel, hogy az egyenletnek gyöke a $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex szám. Ekkor tudjuk, hogy $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ is gyök. A két alapmegoldás

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{\lambda x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) \\ u_2(x) &= e^{\bar{\lambda} x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldás, ezért a fenti megoldásokból definiáljuk az új, valós alapmegoldásokat

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ y_2(x) &= \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x). \end{aligned}$$

18.1.4. Negyedik eset

Többszörös komplex gyököknél hasonlóan kell eljárni, mint többszörös valós gyököknél.

18.2. IDE megoldások struktúrája

Adott $L[y] = f(x)$ IDE. Ha y_1, y_2 megoldások, akkor $y = y_1 - y_2$ megoldása az $L[y] = 0$ HDE-nek. Ha y_1 megoldása az HDE-nek és y_2 megoldása a IDE-nek, akkor $y = y_1 + y_2$ megoldása az IDE-nek.

18.3. Állandók variálása

Adott

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x).$$

Legyenek az $L[y] = 0$ homogén differenciálegyenlet alapmegoldásai az y_1, y_2, \dots, y_n függvények. Ekkor a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) y_k(x)$$

ahol

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \int W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}^T dx \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$$

ahol W a Wronski mátrix. Ekkor az általános megoldás

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^n c_k y_k(x).$$

Bizonyítás

Állítsuk az γ_k, y_k függvényekre a következő feltételeket

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \gamma'_k y'_k &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k^{(n-1)} &= f \end{aligned}$$

azaz

$$W \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}.$$

Ekkor $y_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k$ esetén

$$y'_p = \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k + \sum_{k=1}^n \gamma_k y'_k = \sum_{k=1}^n \gamma_k y'_k.$$

Hasonlóan

$$y_p^{(m)} = \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k^{(m-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(m)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(m)}$$

illetve

$$y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Ebből

$$L[y_p] = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k L[y_k] = f.$$

Tehát $y_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k$ valóban megoldása az IDE-nek. Mivel $W \neq 0$, így a feltételekből azonnal következik, hogy

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \int W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}^T dx \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$$

18.4. Kezdetiérték feladat

Olyan megoldást keresünk, melyre $y^{(k)}(x_0) = \xi_{k+1}$ teljesül, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ekkor létezik egyértelmű megoldás.

18.5. Peremérték feladat

Olyan megoldást keresünk, melyre $y(x_k) = \xi_k$ teljesül, $k = 1, 2, \dots, n$. Ekkor létezik egyértelmű megoldás.

19. Tétel

19.1. Komplex függvény kanonikus alakja

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor a függvény kanonikus alakja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ahol $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

19.2. Függvény határértéke

Adott f függvény határértéke a z_0 pontban H , ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $0 < |z - z_0| < \delta$ esetén $|f(z) - H| < \varepsilon$ teljesül.

19.3. Folytonos függvény

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor f folytonos $z_0 \in D_f$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall z \in D_f$, $|z - z_0| < \delta$ esetén $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

19.4. Differenciálhatóság

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor f differenciálható a $z_0 \in \text{int}D_f$ pontban, ha

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} < \infty.$$

19.5. Analitikus függvény

Azt mondjuk, hogy az f komplex függvény analitikus, ha differenciálható $\forall z \in D_f$ -ben.

19.6. Cauchy-Riemann egyenletek

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. f differenciálható a $z_0 \in \text{int}D_f$ pontban akkor és csak akkor, ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f differenciálható a z_0 pontban. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) + iv(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0)}{r} + i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + r, y_0) - v(x_0, y_0)}{r} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) + iv(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{is} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0)}{is} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + s) - v(x_0, y_0)}{is} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ebből azonnal kapjuk az állítást.

Most tegyük fel, hogy a függvény kielégíti a Cauchy-Riemann egyenleteket. Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{r+is \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + r, y_0 + s) + iv(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r + is} = \\ &= \lim_{r+is \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}r + \frac{\partial u}{\partial y}s + i\frac{\partial v}{\partial x}r + i\frac{\partial v}{\partial y}s + o(|h|)}{r + is} = \lim_{r+is \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}r - \frac{\partial v}{\partial x}s + i\frac{\partial v}{\partial y}r + i\frac{\partial u}{\partial y}s + o(|h|)}{r + is} = \\ &= \lim_{r+is \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(r + is) + \frac{\partial v}{\partial x}(-s + ir) + o(|h|)}{r + is} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a határérték létezik, így a függvény differenciálható.

19.7. Harmonikus függvény

Adott $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, kétszer differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy u harmonikus, ha

$$\Delta u = 0$$

teljesül D_u -n.

19.8. Harmonikus függvények kapcsolata az analitikus függvénnyel

Ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenciálható, akkor u, v harmonikusak.

Bizonyítás

A Cauchy-Riemann egyenletekből

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Az első egyenletet x szerint, a másodikat y szerint deriválva

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Ebből

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Hasonlóan be lehet látni, hogy v harmonikus.

19.9. Harmonikus társ

Adott $u : D \mapsto \mathbb{R}$ harmonikus függvény, ahol D egyszeresen összefüggő tartomány. Ekkor $\exists v : D \mapsto \mathbb{R}$ harmonikus függvény, amelyre $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenciálható. Akkor v az u harmonikus társa és fordítva.

20. Tétel

20.1. Elemi függvények

20.1.1. Exponenciális függvény

Az exponenciális függvény

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

1. A függvény analitikus és $(e^z)' = e^z$.

2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

3. A függvény $2\pi i$ szerint periodikus.

Bizonyítás

1. A függvény kanonikus alakja

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Legyen $u(x, y) = e^x \cos y$ és $v(x, y) = e^x \sin y$ így $e^z = u(x, y) + iv(x, y)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Azt látjuk, hogy a függvény eleget tesz a Cauchy-Riemann egyenleteknek, tehát differenciálható.

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

2.

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) = \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)) = \\ &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2} \end{aligned}$$

3.

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^z.$$

20.1.2. Logaritmus függvény

A logaritmus függvény $z \neq 0$ esetén

$$\ln z = \ln |z| + i(\arcsin z + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A logaritmus főértéke $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arcsin z$.

1.

$$e^{\ln z} = z$$

2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén

$$\ln(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}$$

Bizonyítás

1.

$$e^{\ln z} = e^{\ln |z| + i(\arcsin z + 2k\pi)} = |z| e^{i \arcsin z} = |z| (\cos(\arcsin z) + i \sin(\arcsin z)) = z$$

2.

$$\begin{aligned} \ln(z_1 z_2) &= \ln |z_1 z_2| + i(\arcsin(z_1 z_2) + 2k\pi) = \ln |z_1| + \ln |z_2| + i(\arcsin z_1 + \arcsin z_2 + 2k\pi) = \\ &= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i \end{aligned}$$

3.

$$(e^{\operatorname{Ln} z})' = e^{\operatorname{Ln} z} \operatorname{Ln}' z = 1 \implies \operatorname{Ln}' z = \frac{1}{z}$$

20.1.3. Hatványfüggvény

A hatványfüggvény

$$z^\lambda = e^{\lambda \ln z}.$$

A függvény főértékét kapjuk meg, ha a logaritmus főértékét használjuk.

20.2. Komplex vonalintegrál

Legyen az L görbe egy felosztása $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, illetve legyen a k -adik ív tetszőleges pontja ξ_k . Ekkor

$$\int_L f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta_n \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (z(t_k) - z(t_{k-1}))$$

ahol δ_n a leghosszabb ív hossza. Ha a görbe zárt, akkor az \oint_L jelölést használjuk.

20.3. Vonalintegrál tulajdonságai

1. Linearitás

$$\int_L (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_L f dz + \beta \int_L g dz$$

2.

$$\int_{-L} f dz = - \int_L f dz$$

3. Ha $L = L_1 + L_2$, ahol $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, akkor

$$\int_L f dz = \int_{L_1} f dz + \int_{L_2} f dz.$$

4. Ha f folytonos, akkor létezik $\int_L f dz$.

5. Ha f korlátos és $|f(z)| \leq M \forall z \in L$ esetén, akkor

$$\left| \int_L f dz \right| \leq M s(L).$$

20.4. Vonalintegrál kiszámítása

Legyen az L görbe paraméteres megadása

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t) + iy(t)) (x'(t) + iy'(t)) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(r(t)e^{i\theta(t)}) (r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)e^{i\theta(t)}\theta'(t)) dt. \end{aligned}$$

20.4.1. Newton-Leibniz formula

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Tegyük fel, hogy létezik F analitikus komplex függvény, melyre $F' = f$. Ekkor

$$\int_L f(z) dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha))$$

ahol

$$L = \left\{ z(t) = x(t) + iy(t) \mid t \in [\alpha, \beta] \right\}.$$

20.5. Cauchy féle alaptétel

Tegyük fel, hogy $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $L \subset D$ egy sima, zárt görbe. Ekkor ha az $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény analitikus, akkor

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

20.6. Cauchy féle integrálformula

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitikus függvény. Adott $z_0 \in \text{int}D$ és $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0 -t. Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

20.7. Taylor sorfejtés

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény, amely differenciálható z_0 környezetében. Ekkor f z_0 -ban Taylor sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0 -t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

20.8. Laurent sorfejtés

Legyen f analitikus egy

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \in (r, R)\}$$

körgyűrűben. Ekkor ebben a körgyűrűben f Laurent sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0 -t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$