Elméleti anyag az 1. zh óta

Komplex számok

Algebrai alak: $z = a+bi$

A komplex szám abszolútértéke geometriailag értelmezhető: az abszolútérték a nullától való távolság. $z=a+bi$ abszolútértéke: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Összeadás: $a+bi + c+di = a+c+(b+d)i$

Szorzás: $(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$

Osztás: $z = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ $\quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Konjugált: $\overline{z} = \overline{a+bi} = a-bi$

i képzetes egységgel való forgatás geometriai jelentése: pozitív $90°$-os forgatás

i hatványai

$i^0 = 1 \quad i^2 = -1 \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1$

$i^1 = i \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$

Trigonometrikus alak: $z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$, ahol $r = |z|$ és $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(b/a)$

Két trigonometrikus alak akkor és csak akkor egyenlő, ha $r_1 = r_2$ és $\alpha_1 = \alpha_2 (+k \cdot 2\pi)$

Átváltás algebrai alakra: $z = [\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$ beszorzással, trigonometrikus függvényekbe helyettesítéssel

Algebrai alakból váltás trigonometrikusra: $z = a+bi \quad r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(b/a)$

Szög számításánál 1. és 3., illetve 2. és 4. síknegyed komplex számai esetén ugyanaz az argumentum tangense.

Addíciós tételek

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha) \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Szorzás: $z_1 z_2 = r_1[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)] \cdot r_2[\cos(\beta) + i\sin(\beta)] = r_1 r_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]$

Szorzat abszolútértéke a tényezők abszolútértékeinek szorzata, argumentuma a tényezők argumentumainak összege

Moivre-formula: $z^k = r^k[\cos(k\alpha) + i\sin(k\alpha)]$

Osztás: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]}{r_2[\cos(\beta) + i\sin(\beta)]} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]$

Hányados abszolútértéke az osztandó és az osztó abszolútértékeinek a hányadosa, argumentuma az osztandó és az osztó argumentumainak különbsége

Gyökvonás: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha+k\cdot 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+k\cdot 2\pi}{n}\right)\right]$, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$

A z komplex számot a $z^* \neq 0$ komplex szám n-edik gyökének nevezzük, ha

$z^n = z^*$: $\sqrt[n]{z^*} = z \iff z^n = z^*$

Exponenciális alak: $r \cdot e^{i\varphi}$

Hatványsorok

$$\cos(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + i(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = e^{i\varphi}$$

$$\sin(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Mivel $\cos(\varphi)$ és $\sin(\varphi)$ sorok abszolút konvergensek, ezért átrendezhetők.

Szorzás: $z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i\alpha})(r_2 \cdot e^{i\beta}) = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}$

Hatványozás: $z^n = (re^{i\alpha})^n = r^n \cdot e^{in\alpha}$

Gyökvonás: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\alpha}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha+k2\pi}{n}\right)}$, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$

Osztás: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\alpha}}{r_2 e^{i\beta}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)}$

Szög és radián átváltása

fok → radián: $\text{szög} \cdot \frac{\pi}{180}$

radián → fok: $\text{radián} \cdot \frac{180}{\pi}$

$e^{i\alpha}$ megadja az egységnyi hosszú komplex számokat

Az algebra alaptétele

Tétel: Az n-ed fokú, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok körében.

Multiplicitással számolva a gyököket, pontosan n db komplex gyök van.

Másodfokú egyenletek megoldása a komplex számok körében

Megoldóképlet komplex számokra is érvényes.

$D>0$, két különböző valós gyök
$D=0$, egy valós (kétszeres) gyök
$D<0$, két komplex konjugált gyök

Tétel: Ha a z komplex szám gyöke a polinomnak, akkor a konjugáltja is gyöke.

Magasabb fokú polinomok megoldásához a gyöktényezős alakból érdemes kiindulni.
Ha a polinomnak van egész gyöke, az a konstans tag osztói között lesz ki, majd polinomosztással alacsonyabb fokú polinomot kapunk.

Komplex vektortér

$(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ $\quad \mathbb{C}^n := \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, z_i \in \mathbb{C}, i \in \mathbb{N} \right\}$

Vektortér axiómái

1, $\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \to \underline{z}_1 + \underline{z}_2 := \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, ahol $\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ és $\underline{z}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$

2, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n \to \lambda \underline{z} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $\quad \underline{z} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, ahol $a_i \in \mathbb{C}$

Összeadás kommutatív csoport

a, asszociatív
$\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3 \in \mathbb{C}^n \to (\underline{z}_1 + \underline{z}_2) + \underline{z}_3 = \underline{z}_1 + (\underline{z}_2 + \underline{z}_3)$

b, kommutatív
$\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = \underline{z}_2 + \underline{z}_1$

c, van nullelem (egység)
$\exists \underline{0} \in \mathbb{C}^n, \forall \underline{z} \in \mathbb{C} \Rightarrow \underline{0} + \underline{z} = \underline{z}$

d, van ellentettje (inverz)
$\forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n \; \exists -\underline{z} \in \mathbb{C}^n \Rightarrow -\underline{z} + \underline{z} = \underline{0}$ $\quad -\underline{z} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Skalárral való szorzás

a, $\forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n \quad 1 \cdot \underline{z} = \underline{z}, \; 1 \in \mathbb{C}$

b, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n \Rightarrow (\lambda\mu)\underline{z} = \lambda(\mu \underline{z})$

c, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \lambda(\underline{z}_1 + \underline{z}_2) = \lambda \underline{z}_1 + \lambda \underline{z}_2$

d, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n \Rightarrow (\lambda + \mu)\underline{z} = \lambda \underline{z} + \mu \underline{z}$

Bázis

$b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}^n$ bázis, ha $\forall \underline{z} \in \mathbb{C}^n$ vektor előáll a $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ és $\sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\mu_i)^2 = 0$

Komplex mátrix

$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\underline{A}} \mathbb{C}^n \qquad \underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$

$\underline{A}$ elemei komplex számok, $a_{ij} \in \mathbb{C}$

Definíció: $\underline{z} \in \mathbb{C}, \underline{z} \neq 0$ vektor sajátvektora az $\underline{A}$ mátrixnak, ha $\exists$ olyan $\lambda \in \mathbb{C}$, melyre
$\underline{A}\,\underline{z} = \lambda \underline{z}$.

Valós euklideszi terek

Az euklideszi terek skaláris szorzattal „felruházott" vektorterek
skalárszorzat függvény: $D_f = V \times V$, $R_f = \mathbb{R}$ $\quad V \times V \to \mathbb{R}$, jelölése $\langle a, b \rangle$

Definíció: Az $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek függvényértékét $s(\underline{x}, \underline{y}) = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$-nal jelöljük, skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1, $\forall \underline{x} \in V$ esetén $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$, és $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$ pozitív definit
2, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ szimmetrikus
3, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $\langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$ $(\underline{z} \in V)$ linearitás
4, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ homogenitás

Tétel: Minden véges dimenziós vektortérben megadható skalárszorzat.

Bizonyítás: Konstruktív

Legyen $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Belátjuk a skalárszorzat tulajdonságait

1, $\forall \underline{x} \in V$ esetén $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$, és $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0$
$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ pozitív definit

2, $\forall \underline{x},\underline{y} \in V$ esetén $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \langle \underline{y},\underline{x}\rangle$

$\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i = \langle \underline{y},\underline{x}\rangle$ szimmetrikus

3, $\forall \underline{x},\underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda\underline{x},\underline{y}\rangle = \lambda\langle \underline{x},\underline{y}\rangle$

$\langle \lambda\underline{x},\underline{y}\rangle = \lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2+\dots+\lambda x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_iy_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \lambda\langle \underline{x},\underline{y}\rangle$ homogén

4, $\forall \underline{x},\underline{y},\underline{z} \in V$ esetén $\langle \underline{x}+\underline{y},\underline{z}\rangle = \langle \underline{x},\underline{z}\rangle + \langle \underline{y},\underline{z}\rangle$

$\langle \underline{x}+\underline{y},\underline{z}\rangle = (x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2+\dots+(x_n+y_n)z_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n} x_iz_i + y_iz_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_iz_i + \sum_{i=1}^{n} y_iz_i = \langle \underline{x},\underline{z}\rangle + \langle \underline{y},\underline{z}\rangle$

Tétel: Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz tétel (egyenlőtlenség)

$|\langle \underline{a},\underline{b}\rangle|^2 \le \langle \underline{a},\underline{a}\rangle \cdot \langle \underline{b},\underline{b}\rangle$

Bizonyítása: Tekintsük az $\langle \underline{a}+\lambda\underline{b}, \underline{a}+\lambda\underline{b}\rangle$ skalárszorzatot

$0 \le \langle \underline{a}+\lambda\underline{b}, \underline{a}+\lambda\underline{b}\rangle$ mivel pozitív definit

$0 \le \langle \underline{a}+\lambda\underline{b}, \underline{a}+\lambda\underline{b}\rangle = \langle \underline{a},\underline{a}\rangle + \langle \underline{a},\lambda\underline{b}\rangle + \langle \lambda\underline{b},\underline{a}\rangle + \langle \lambda\underline{b},\lambda\underline{b}\rangle = \langle \underline{a},\underline{a}\rangle + 2\langle \underline{a},\lambda\underline{b}\rangle +$
$+ \langle \lambda\underline{b},\lambda\underline{b}\rangle = \lambda^2\langle \underline{b},\underline{b}\rangle + 2\langle \underline{a},\underline{b}\rangle\lambda + \langle \underline{a},\underline{a}\rangle$ (a λ-t a homogenitás miatt emeltem ki)

Ez λ-ra nézve egyismeretlenes másodfokú egyenlőtlenség

$\lambda^2\underbrace{\langle \underline{b},\underline{b}\rangle}_{A} + \lambda\underbrace{(2\cdot\langle \underline{a},\underline{b}\rangle)}_{B} + \underbrace{\langle \underline{a},\underline{a}\rangle}_{C} = \lambda^2A+\lambda B+C \ge 0$

A függvénynek legfeljebb 1 zérushelye lehet (ugyanis ≥ 0), ezért a diszkrimináns ≤ 0

$D = B^2-4AC \le 0$ megfelelő értékeket behelyettesítve:

$4\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 - 4\langle \underline{b},\underline{b}\rangle\langle \underline{a},\underline{a}\rangle \le 0$ amiből

$\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 \le \langle \underline{a},\underline{a}\rangle \cdot \langle \underline{b},\underline{b}\rangle$

Normált tér valós test felett

Definíció: A V vektorteret normáltnak nevezzük, ha van olyan $n: V \to \mathbb{R}_0^+$ függvény, az úgynevezett norma, amelyre a következők teljesülnek:

1, $\forall \underline{x} \in V$ esetén $n(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$ pozitív definit

2, $\forall \underline{x} \in V$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $n(\alpha\underline{x}) = |\alpha|\, n(\underline{x})$ homogenitás

3, $\forall \underline{x},\underline{y} \in V$ esetén $n(\underline{x}+\underline{y}) \le n(\underline{x})+n(\underline{y})$ háromszög egyenlőtlenség

Jelölése lehet még $\|\cdot\|$, ezzel a jelöléssel a megfogalmazás:

1, $\forall \underline{x} \in V$ esetén $\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$ pozitív definit

2, $\forall \underline{x} \in V$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|\alpha\underline{x}\| = |\alpha|\,\|\underline{x}\|$ homogenitás

3, $\forall \underline{x},\underline{y} \in V$ esetén $\|\underline{x}+\underline{y}\| \le \|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|$

A norma az abszolút érték függvény általánosítása.

Tétel: Minden skalárszorzatos tér normált tér.

Bizonyítása: Konstruktív; megadunk egy normát: $n(\underline{x}) = \|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle}$

Norma első és második megfogalmazása (pozitív definit és homogenitás) a skalárszorzat pozitív definit és homogenitás megfogalmazásaiból teljesül

Csak a háromszög-egyenlőtlenséget kell bizonyítani: $\|\underline{x}+\underline{y}\| \le \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$

$\sqrt{\langle \underline{x}+\underline{y},\underline{x}+\underline{y}\rangle} \le \sqrt{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle} + \sqrt{\langle \underline{y},\underline{y}\rangle} \quad /()^2$

$\langle \underline{x}+\underline{y},\underline{x}+\underline{y}\rangle \le \langle \underline{x},\underline{x}\rangle + \langle \underline{y},\underline{y}\rangle + 2\cdot\sqrt{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle}\cdot\sqrt{\langle \underline{y},\underline{y}\rangle}$

$\cancel{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle} + \langle \underline{x},\underline{y}\rangle + \langle \underline{y},\underline{x}\rangle + \cancel{\langle \underline{y},\underline{y}\rangle} \le \cancel{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle} + \cancel{\langle \underline{y},\underline{y}\rangle} + 2\cdot\sqrt{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle\langle \underline{y},\underline{y}\rangle}$ (skalárszorzat lin. me.)

$2\langle \underline{x},\underline{y}\rangle \le 2\cdot\sqrt{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle\langle \underline{y},\underline{y}\rangle}$ (skalárszorzat szimmetrikus megfogalmazása) $\quad /()^2$

$4\langle \underline{x},\underline{y}\rangle^2 \le 4\cdot\langle \underline{x},\underline{x}\rangle\cdot\langle \underline{y},\underline{y}\rangle$

$\langle \underline{x},\underline{y}\rangle^2 \le \langle \underline{x},\underline{x}\rangle\langle \underline{y},\underline{y}\rangle$ Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz tétel miatt igaz az állítás.

Metrikus tér valós test felett

Definíció: A M halmazt metrikus térnek nevezzük, ha van olyan, metrikának nevezett $d: M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ függvény, amelyre a következők teljesülnek:

1, $\forall \underline{x},\underline{y} \in M$ esetén $d(\underline{x},\underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$ pozitív definit

2, $\forall \underline{x},\underline{y} \in M$ esetén $d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x})$ szimmetrikus

3, $\forall \underline{x},\underline{y},\underline{z} \in M$ esetén $d(\underline{x},\underline{y}) \le d(\underline{x},\underline{z}) + d(\underline{z},\underline{y})$ háromszög egyenlőtlenség

A metrika a 3 dimenziós tér távolság fogalmának egy általánosítása.

Diszkrét metrika: $d(\underline{x},\underline{y}) = 0$, ha $\underline{x} = \underline{y}$, és $d(\underline{x},\underline{y}) = 1$, ha $\underline{x} \ne \underline{y}$

Tétel: Minden normált tér metrikus tér.

Bizonyítása: Konstruktív, megadunk egy metrikát: $d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{y}-\underline{x}\|$

1, $d(\underline{x},\underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$ $\quad \|\underline{y}-\underline{x}\| = \langle \underline{y}-\underline{x}, \underline{y}-\underline{x}\rangle = 0 \iff \underline{y}-\underline{x} = \underline{0} \iff \underline{y} = \underline{x}$ poz. def.

2, $d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x})$ $\quad \|\underline{y}-\underline{x}\| = \|\underline{x}-\underline{y}\|$ $\quad \|\underline{y}-\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{y}-\underline{x}, \underline{y}-\underline{x}\rangle}$ $\quad \|\underline{x}-\underline{y}\| = \sqrt{\langle \underline{x}-\underline{y}, \underline{x}-\underline{y}\rangle}$

$\sqrt{\langle y-x, y-x\rangle} = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ $/ ()^2$

$\langle y-x, y-x\rangle = \langle x-y, x-y\rangle$ kifejtettem a skalárszorzat linearitása miatt

$\langle y,y\rangle + \langle y,-x\rangle + \langle -x,y\rangle + \langle -x,-x\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle -y,-y\rangle$

$\cancel{\langle y,y\rangle} - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle = \cancel{\langle x,x\rangle} - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \cancel{\langle y,y\rangle}$ kiemeltem a konstansokat a homogenitás miatt

$-2\langle x,y\rangle = -2\langle x,y\rangle$ szimmetria megjelensége miatt $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

$0 = 0$ valóban szimmetrikus

3, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

$\|y-x\| \leq \|z-x\| + \|z-y\|$

Ha $z = x \neq y$

$\|y-z\| \leq \|z-z\| + \|z-y\|$

$\|y-z\| \leq 0 + \|z-y\| \rightarrow \|y-z\| = \|z-y\|$, ugyanis

$\sqrt{\langle y-z, y-z\rangle} = \sqrt{\langle y,y\rangle + \langle y,-z\rangle + \langle -z,y\rangle + \langle -z,-z\rangle} = \sqrt{\langle y,y\rangle - 2\langle y,z\rangle + \langle z,z\rangle}$

$\sqrt{\langle z-y, z-y\rangle} = \sqrt{\langle z,z\rangle + \langle z,-y\rangle + \langle -y,z\rangle + \langle -y,-y\rangle} = \sqrt{\langle y,y\rangle - 2\langle y,z\rangle + \langle z,z\rangle}$

Ha $z \neq x = y$

$\|y-y\| \leq \|z-y\| + \|z-y\|$

$0 \leq \|z-y\| \cdot 2$ mivel $\|z-y\| > 0$, ezért $2 \cdot \|z-y\| > 0$

Ha $z = y \neq x$

$\|y-x\| \leq \|y-x\| + \|y-y\|$

$\|y-x\| \leq \|y-x\|$ ugyanis $\|y-x\| = \|y-x\|$

Ha $z = y = x$

$\|y-y\| \leq \|y-y\| + \|y-y\|$

$0 \leq 0 + 0$ Ezért valóban igaz a háromszög-egyenlőtlenség.

Tétel: Minden euklideszi tér metrikus tér.

Bizonyítása: Konstruktív, megadjuk a metrikát: $d(x,y) = \sqrt{\langle y-x, y-x\rangle}$

E függvényre a metrika előírt megjelenései teljesülnek.

(ugyanis $\sqrt{\langle y-x, y-x\rangle} = \|y-x\|$, amelyre az előbb beláttuk a megjelenéseket.)

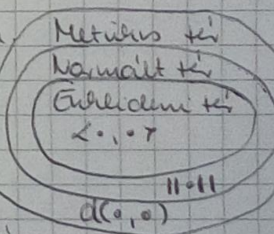
Valós euklideszi terek összefoglalva

Tétel: Minden véges dimenziós euklideszi térben bevezethető a ~~skalárszorzat~~ norma.

Bizonyítása: Konstruktív, $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$

Tétel: Minden véges dimenziós euklideszi térben bevezethető a metrika.

Bizonyítása: Konstruktív, $d(a,b) = \|b-a\| = \sqrt{\langle b-a, b-a\rangle}$



Definíció: Két vektor szöge

$\cos(\alpha) = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|}$ Legfontosabb eset: $a \perp b$, ha $\langle a, b\rangle = 0$

Tétel: Minden euklideszi térben van ortogonális bázis.

Mivel minden tér saját magának altere, az általánosság megszorítása nélkül a bizonyítást elegendő (és praktikus) altérre bemutatni.

Tétel: Minden altérben van ortogonális bázis.

Bizonyítása: Konstruktív; azt bizonyítjuk, hogy bármely független rendszerből kiindulva, így bázisból is tudunk ugyanolyan elemszámú ortogonális rendszert konstruálni. Az eljárás neve

Gram-Schmidt ortogonalizáció

Legyen $b_1, b_2, \dots, b_k$ a független rendszer. Ebből $c_1, c_2, \dots, c_k$ ortogonális rendszer a következőképpen kapható:

$c_1 := b_1$

$c_2 := b_2 + \alpha_{21} c_1$ Vegyük mindkét oldal skalárszorzatát c_1-gyel, ill. $\langle c_1, c_2\rangle = 0$

$\langle c_2, c_1\rangle = \langle b_2, c_1\rangle + \langle \alpha_{21} c_1, c_1\rangle$

$0 = \langle b_2, c_1\rangle + \alpha_{21}\langle c_1, c_1\rangle$

$\alpha_{21}\langle c_1, c_1\rangle = -\langle b_2, c_1\rangle$

$\alpha_{21} = -\frac{\langle b_2, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle}$ Ebből $c_2 = b_2 + \frac{-\langle b_2, c_1\rangle}{\langle c_1, c_1\rangle} c_1$

Ehhez hasonlóan általában a definiáló egyenletnek vesszük a skalárszorzatát a $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ vektorokkal, az együtthatókra a következőt kapjuk:

$c_k = b_k + \alpha_{k1} c_1 + \alpha_{k2} c_2 + \dots + \alpha_{k\,k-1} c_{k-1}$, ahol $\alpha_{kj} = -\frac{\langle b_k, c_j\rangle}{\langle c_j, c_j\rangle}$ $j = 1, 2, \dots, k-1$

A konstrukció miatt a kapott rendszer ortogonális.

Definíció: Ortonormált egy rendszer, ha a vektorok páronként ortogonálisak, és a normájuk 1.

Következmény: Minden euklideszi térnek van ortonormált bázisa.

Bizonyítása: Konstruktív, megmutatjuk, hogyan lehet ortonormált rendszert létrehozni.

A norma skalárszorzatból származtatott: $\|\underline{c}_i\| = \sqrt{\langle \underline{c}_i, \underline{c}_i \rangle}$

Tetszőleges bázisból kiindulva, a Gram-Schmidt eljárással kapott ortogonális rendszer minden elemét szorozzuk meg a normája reciprokával.

$$\underline{c}_i^* = \frac{\underline{c}_i}{\|\underline{c}_i\|}, \text{ ekkor valóban } \|\underline{c}_i^*\| = \left\langle \frac{\underline{c}_i}{\|\underline{c}_i\|}, \frac{\underline{c}_i}{\|\underline{c}_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\underline{c}_i\|^2} \langle \underline{c}_i, \underline{c}_i \rangle = \frac{1}{\|\underline{c}_i\|^2} \cdot \|\underline{c}_i\|^2 = 1$$

Komplex euklideszi tér

(komplex) skalárszorzatos vektortér $\mathbb{C}$ felett

Test $= \mathbb{C}$, összeadás és önmagában is kommutatív csoport, disztributív tulajdonságok, kötelező ehhez skalárszorzat $V \times V \to \mathbb{C}$ függvény

Definíció: A $V \times V \to \mathbb{C}$ függvényt skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1, $\forall \underline{z} \in V$ esetén $\langle \underline{z}, \underline{z} \rangle \geq 0$, $\langle \underline{z}, \underline{z} \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{z} = \underline{0}$ — pozitív definit

2, $\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in V$ esetén $\langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle = \overline{\langle \underline{z}_2, \underline{z}_1 \rangle}$

3, $\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in V$ esetén $\langle \underline{z}_1, \lambda \underline{z}_2 \rangle = \overline{\lambda} \langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$
$\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2 \in V$ esetén $\langle \lambda \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle = \overline{\lambda} \langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle$ $\lambda \in \mathbb{C}$ } elegendő 1 megtartása

4, $\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3 \in V$ esetén $\langle \underline{z}_1 + \underline{z}_2, \underline{z}_3 \rangle = \langle \underline{z}_1, \underline{z}_3 \rangle + \langle \underline{z}_2, \underline{z}_3 \rangle$
$\forall \underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3 \in V$ esetén $\langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 + \underline{z}_3 \rangle = \langle \underline{z}_1, \underline{z}_2 \rangle + \langle \underline{z}_1, \underline{z}_3 \rangle$ } elegendő 1 megtartása

Definíció: Norma $V \to \mathbb{R}_0^+$

$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$

Definíció: Metrika $V \times V \to \mathbb{R}_0^+$

$d(\underline{x}, \underline{a}) = \|\underline{a} - \underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{a} - \underline{x}, \underline{a} - \underline{x} \rangle}$

Definíció: Ortogonalitás

$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{C}^n$ ortogonális (merőleges) egymásra, ha $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 0$.

Speciális transzformációk, speciális komplex mátrixok

Leképezés: $V^n \to V^k$, $k \times n$ mátrix

Transzformáció: $V^n \to V^n$, $n \times n$ mátrix

Definíció valós mátrixokra: Egy homogén lineáris transzformáció szimmetrikus/antiszimmetrikus/ortogonális, ha létezik olyan bázis, amelyben a mátrixa szimmetrikus/antiszimmetrikus/ortogonális.

Speciális mátrixok

Valós	Komplex	Sajátérték
Szimmetrikus: $\underline{A} = \underline{A}^T$	Hermitikus: $\underline{A} = \overline{\underline{A}}^T$	valós
Anti/Ferdén szimmetrikus: $\underline{A} = -\underline{A}^T$	Ferdén Hermitikus: $\underline{A} = -\overline{\underline{A}}^T$	képzetes, van 0
Ortogonális: $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$	Unitér: $\underline{A}^{-1} = \overline{\underline{A}}^T$	$\lvert$sajátérték$\rvert = 1$

Ha a Hermitikus mátrix elemei valósak, akkor a mátrix szimmetrikus.

Ha a ferdén Hermitikus mátrix elemei valósak, akkor a mátrix antiszimmetrikus.

Ha az unitér mátrix elemei valósak, akkor a mátrix ortogonális.

Tétel: Hermitikus mátrix sajátértékei valósak.

Bizonyítása: $\underline{A}\underline{x} = \lambda \underline{x}$

$\underline{A}\underline{x} = \lambda \underline{x}$ / balról $\overline{\underline{x}}^T$

$\overline{\underline{x}}^T \cdot \underline{A}\underline{x} = \overline{\underline{x}}^T \cdot \lambda \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \overline{\underline{x}}^T \cdot \underline{x} = \lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \to$ valós, mivel $i^2 = -1$

$\lambda = \dfrac{\overline{\underline{x}}^T \underline{A}\underline{x}}{\overline{\underline{x}}^T \underline{x}}$ Már csak azt kell belátni, hogy $\overline{\underline{x}}^T \underline{A}\underline{x}$ valós

Komplex szám valós $\Leftrightarrow$ komplex szám egyenlő a konjugáltjával

A számláló is egy szám, ami megegyezik a transzponáltjával

$$\overline{\underline{x}}^T (\underline{A}\underline{x}) = [\overline{\underline{x}}^T (\underline{A}\underline{x})]^T = (\underline{A}\underline{x})^T [\overline{\underline{x}}^T]^T = \underline{x}^T \underline{A}^T \overline{\underline{x}} = \underline{x}^T \overline{\underline{A}\underline{x}} = \overline{\overline{\underline{x}}^T (\underline{A}\underline{x})} \qquad \underline{A}^T = \overline{\underline{A}}$$

$\Rightarrow \lambda$ valós

Tétel: A ferdén hermitikus és ferdén szimmetrikus mátrix sajátértékei vagy nullák, vagy (tisztán) képzetesek.

Bizonyítás: A bizonyítás lényege, hogy a komplex szám akkor és csak akkor képzetes, ha megegyezik a konjugáltjának (-1)-szeresével.

$$\lambda = \frac{\overline{\underline{x}}^T \underline{A}\underline{x}}{\overline{\underline{x}}^T \underline{x}} \qquad \overline{\underline{x}}^T (\underline{A}\underline{x}) = [\overline{\underline{x}}^T (\underline{A}\underline{x})]^T = (\underline{A}\underline{x})^T (\overline{\underline{x}}^T)^T = \underline{x}^T \underline{A}^T \overline{\underline{x}} = \underline{x}^T (-\overline{\underline{A}}) \overline{\underline{x}} = -\overline{\overline{\underline{x}}^T (\underline{A}\underline{x})}$$

Tehát valóban 0, vagy képzetes szám lehet a sajátérték.

Tétel: Unitér (ortogonális) mátrix sajátértékeinek abszolútértéke 1.

Bizonyítás:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{A}}\,\underline{x} &= \lambda \underline{x} \\ \overline{(\underline{\underline{A}}\,\underline{x})}^T &= \overline{\lambda \underline{x}}^T \end{aligned}\right\} \text{ összeszorozva} \quad \overline{(\underline{\underline{A}}\,\underline{x})}^T (\underline{\underline{A}}\,\underline{x}) = \bar{\lambda}\, \underline{\bar{x}}^T \lambda \underline{x} = \lambda \bar{\lambda}\, \underline{\bar{x}}^T \underline{x}$$

$$\underline{\bar{x}}^T \underline{\underline{\bar{A}}}^T (\underline{\underline{A}}\,\underline{x}) = \underline{\bar{x}}^T (\underline{\underline{\bar{A}}}^T \underline{\underline{A}})\, \underline{x} = \underline{\bar{x}}^T \underline{x} = \lambda^2\, \underline{\bar{x}}^T \underline{x} \Rightarrow \lambda^2 = 1$$