Lineáris Algebra képletgyűjtemény - második nagyZH

Menyhért Márton, Sztrókay Balázs

2018. május 5.

I. rész

Gram-Schmidt ortogonalizáció

$$v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{< u_n, v_k >}{< v_k, v_k >} \cdot v_k \right)$$

Pl.:

$$v_1 = u_1$$
$$v_2 = u_2 - \frac{< u_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >} \cdot v_1$$
$$v_3 = u_3 - \frac{< u_3, v_1 >}{< v_1, v_1 >} \cdot v_1 - \frac{< u_3, v_2 >}{< v_2, v_2 >} \cdot v_2$$

II. rész

Mátrix rangja

A mátrix lineárisan független vektorainak száma.

III. rész

Valós Euklideszi terek

A valós Euklideszi terekben értelmezve van az alábbi három függvény.

1. Skalárszorzat

$$\langle x, y \rangle$$

1.1. Pozitív definit

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

1.2. Szimmetrikus

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

1.3. Homogén

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

1.4. Lineáris

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

2. Metrika

$$d(x, y)$$

2.1. Pozitív definit

$$d(x, y) \geq 0, d(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

2.2. Szimmetrikus

$$d(x, y) = d(y, x)$$

2.3. Háromszög egyenlőtlenség

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

3. Norma

$$\|x\|$$

3.1.

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3.2.

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

3.3.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

4. Egyéb

4.1. Vektorok által bezárt szög

$$\cos\phi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

4.2. Norma származtatása skalárszorzatból

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$$

4.3. Metrika származtatása normából

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

IV. rész
Komplex Euklideszi terek

A komplex Euklideszi terekben értelmezve van az alábbi függvény:

5. Komplex skalárszorzat

$$\langle x, y\rangle$$

Pl. a szokásos skalárszorzat

$$\langle x, y\rangle = \overline{y}^T \cdot x = \sum_{k=1}^{n} \overline{y_i} \cdot x_i$$

5.1.

$$\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

5.2.

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

5.3.

5.3.1.

Könyvben rosszul!

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$$

5.3.2.

Könyvben rosszul!

$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle x, y\rangle$$

5.4.

5.4.1.

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

5.4.2.

$$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

V. rész
Speciális transzformációk

Valós		**Komplex**		**sajátértékek**
Szimmetrikus:	$A = A^T$	Hermitikus:	$A = \overline{A}^T$	$\forall\lambda_i \in \mathbb{R}$
Antiszimmetrikus:	$A = -A^T$	Ferdén hermitikus:	$A = -\overline{A}^T$	$\forall\lambda_i = k \cdot i, k \in \mathbb{R}$
Ortogonális:	$A = A^{-1}$	Unitér:	$A^{-1} = \overline{A}^T$	$\forall\lvert\lambda_i\rvert = 1$