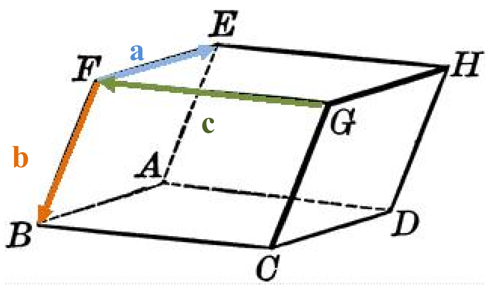
Vektoralgebra gyakorló feladatok

Alap műveletek

1. Legyen **a**(1;-5), **b**(2;7), **c**(0;-4). Írja fel a következő lineáris kombinációk eredményét:

a., **a**+**b**+**c** b., **a**-**b**-**c** c., 2**a**-**b**-**c** d., **a**-3**c** e., 3(2**a**-**b**)

2. Fejezd ki a megadott vektorokat **a**, **b** és **c** vektorok segítségével!

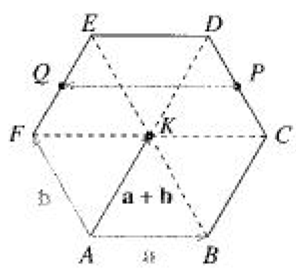


$\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{AC}$

Megoldás:
b-a; -a-b; -b-c; a-c-b; b+c; -a-c

3. Az ABCDEF szabályos hatszögben legyen **a**=$\overrightarrow{AB}$ és **b**=$\overrightarrow{AF}$. Jelölje a CD és EF szakaszok felezőpontját rendre P és Q. Határozza meg az **a** és **b** vektorok ismeretében az $\overrightarrow{AD}$, az $\overrightarrow{AC}$ és a $\overrightarrow{PQ}$ vektorokat!

Megoldás: A szabályos hatszög felbontható 6 darab szabályos háromszögre, ez segítségünkre lehet.



$\overrightarrow{AD}$=2$\overrightarrow{AK}$=2(**a**+**b**)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}$ =**a**+(**a**+**b**)=2**a**+**b**

A $\overrightarrow{PQ}$ vektor párhuzamos az **a** vektorral, de vele ellentétes irányú és hosszának 1,5-szerese. Vagyis -1,5**a.**

4. Bontsa fel a **d**(-5, 25, 3) vektort **a**(2 , -2, 6), **b**(1, 5, 15) és **c**(0, 7, 3) irányú összetevőkre.

Megoldás:
A feladat feltétele szerint **d**=x**a**+y**b**+z**c,** ahol x, y, z valós számok. A vektoregyenletet a vektorok koordinátáival felírva a

$$2x + y = -5$$
$$-2x + 5y + 7z = 25$$
$$6x + 15y + 3z = 3$$

alakú lineáris egyenletrendszert kapjuk.
Ennek megoldása (pl Gauss eliminációval) x=1, y= -3, z=2.

5. A ***p*** paraméter mely értékei esetén írható fel a **d**(9, 1, -17) vektor egyértelműen az **a**(1 , -2, 1), **b**(1, 1, ***p***) és **c**(-1, 1, 1) vektorok lineáris kombinációjaként?

Megoldás: paraméteres lineáris egyenletrendszerre vezet a feladat. (p= -3)

6. Az ABC háromszög A pontját tükrözze a B-re. A tükörkép legyen az A'. Bontsa fel a $\overrightarrow{CA'}$ vektort C-ből induló oldalvektorokkal párhuzamos összetevőkre!

7. Jelölje az ABCD négyszög AD és BC oldalainak felezőpontjait rendre E és F. Határozza meg az $\overrightarrow{EF}$ vektrort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ vektorok segítségével!

Skaláris szorzat

8. Számítsa ki az alábbi vekrotok hajlásszögét!

a) **a**(1 , -2, 1), **b**(0, 4, 8) (Mo: 90°)
b) **a**(0 , 3, 8), **b**(7, 0, 9) (Mo: 42,35°)
c) **a**(4 , 10, -1), **b**(2, 3, -5) (Mo: 49,84°)

9. Adjuk meg úgy b vektor z koordinátáját, hogy b merőleges legyen a-ra!
a(2,4; -3,2; 5,6); **b**(-1,2; 5,6; z)

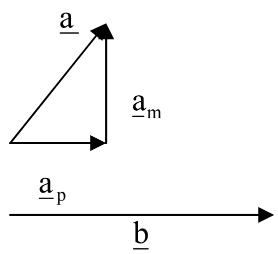
Megoldás: Skaláris szorzatuk nulla kell, hoyg legyen. z=3, 71

10. Hogyan kell megválasztani ***p*** értékét úgy, hogy az **a**+***p*b** vektor merőleges legyen a **b** vektorra?

Megoldás: Skaláris szorzatuk nulla kell, hogy legyen….innen: ha **b** nem nullvektor, akkor ***p***= $(-\underline{a}\,\underline{b}) / \underline{b}^2$, ha **b** nullvektor, akkor ***p*** tetszőleges valós szám.

11. Bontsa fel **a**(2, 10, 7) vektort **b**(8, -3, 4) vektorral párhuzamos és merőleges összetevőkre!

Megoldás:



$$\underline{a}_p = (\underline{a}\cdot\underline{e}_b)\cdot\underline{e}_b = (\underline{a}\cdot\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|})\cdot\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = \begin{pmatrix}\frac{112}{89}\\ \frac{-42}{89}\\ \frac{56}{89}\end{pmatrix}$$

$$\underline{a} = \underline{a}_p + \underline{a}_m$$

$$\underline{a}_m = \begin{pmatrix}\frac{66}{89}\\ \frac{932}{89}\\ \frac{567}{89}\end{pmatrix}$$

12. Csúcsaival adott egy háromszög. Számítsuk ki kerületét és a bezárt szögeket!

A(21;16;8)
B(21;27;9)
C(3;8;13)

//(K=57,83; α=116,97°; ß=47,64°; γ=23,88°)

13. Csúcsaival adott az alábbi háromszög. Számítsuk ki a kerületét és a legnagyobb szögét!
A=(2,5; 3,8; 6,2); B=(6,4; 3,2; 4,4); C=(5,2; 2,4; 6,8)

(Vegyük figyelembe, hogy egy háromszögben a legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemközt található!)

14. Adjuk meg az $\underline{a}$ vektor $\underline{b}$ vektorra eső merőleges vetületének a **hosszát**!
a (2,5; 6,3; 7,8); **b**(3,3; 4,4, 2,1)

Megoldás:x=8,89

15. Adjuk meg az a vektor b vektorra eső merőleges vetületi **vektorát**!
a(-2;3;4) **b**(5;-6;8)

Megoldás: **x**(0,16;-0,192;0,256)

16. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: A(-3,4,0), B(-9, 11, 42), C(1,2,4). Adjuk meg a B és A csúcsokhoz tartozó magasság vektorokat (amik a csúcsokba mutatnak)!

Vektoriális szorzat

17. Az ABCD paralelogramma csúcsai: A(2,3,5), B(5,3,5), C(6,6,5) és D(3,6,5). Számítsuk ki a paralelogramma területét!

Megoldás: T=9.

18. Számítsa ki az alábbi pontok által meghatározott háromszög területét**:**
A(2; 5; 7); B(3; 6; 8); C(0; 1; 9)!

Megoldás: T=3,741

19. Számítsd ki a háromszög területét, melynek 2 oldalvektora (1;2;3) és (4;0;8)!

Megoldás: T=9,16

20. Egy sík három pontja A(2; 4; 8); B(0; 3; 6) C(3;7;10). Adjuk meg a sík egyenletét!

Megoldás: A sík egyenletéhez szükségünk van egy pontra és egy normálvektorra. A megadott pontokból készítünk két vektort, majd ezek vektoriális szorzatából megkapjuk a sík egy normálvektorát.
S: -4x-2y+5z=24

21. Egy sík három pontja A(4; 6; -3); B(2; 4; -7); C(-1; 3; 4). Adjuk meg a sík egyenletét!

Megoldás: S:-26x+34y-4z=112

22. Add meg az ABC pontok által határolt sík egyenletét? D pont rajta van a síkon?

Megoldás: S:3x-4y+7z=25. Ide behelyettesítve D pont koordinátáit, nem elégíti ki az egyenletet, tehát nincs a síkon.

Vegyes szorzat

23. Számítsd ki az alábbi, egy csúcsba futó élvektoraival adott parallelepipedon térfogatát!
a.) **a**(12; 16; 20); **b**(8; 10; 12); **c**(9; 18;27) (Mo: V=8)
b) **a**(3; 5; 12); **b**(9; 15; 7); **c**(1; 8; 2) (Mo: V=551)

24. Számítsd ki az alábbi, egy csúcsba futó élvektoraival adott tetraéder térfogatát!

. **a**(3; 5; 12); **b**(9; 15; 7); **c**(1; 8; 2) (Mo: V=551/6)

Összetett feladatok