Paprasčiausi skaitiniai algoritmai: lygties su vienu nežinomuoju sprendimas

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/P170B115/Skaitiniai inzinerijos metodai su MATLAB (KP RG RB)2009

F6.pdf

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/P170B115 /Skaitiniai inzinerijos metodai(RB) 2006

I.1.1.pdf

Lygtis su vienu nežinomuoju

$$f(x) = 0$$

$$x?$$

Matematinės lygtys

Viena lygtis

Tiesinės algebrinės lygtys
(vienas sprendinys)

$$ax + b = 0;$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Netiesinės algebrinės ir transcendentinės lygtys
(keli sprendiniai)

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f(x) = ax^6 + \sin^2 x + \ln\left(x + 2\right) = 0;$$

$$x = ???$$

Lygčių sistema

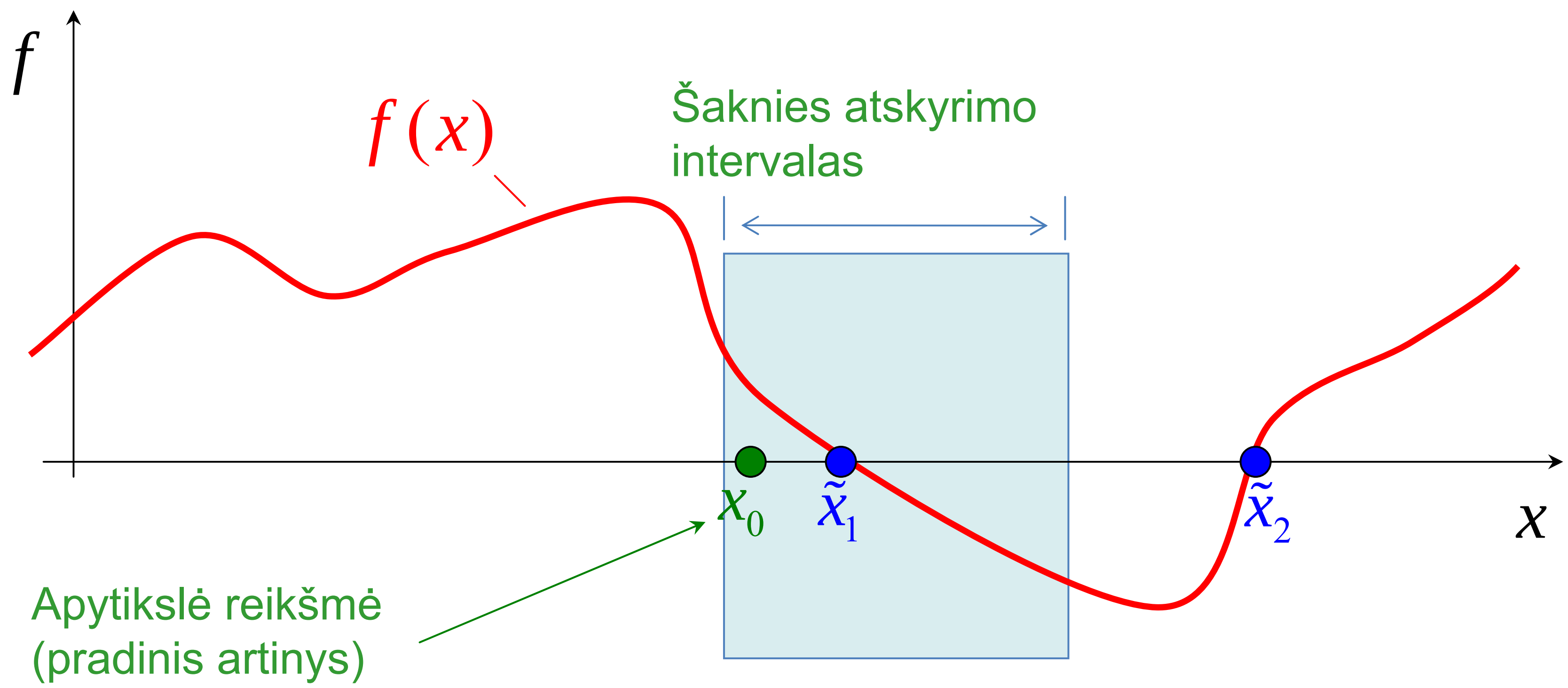
Tiesinių algebrinių lygčių sistemos
(vienas sprendinys(?))

Netiesinių algebrinių ir transcendentinių lygčių sistemos (keli sprendiniai)

Lygties sprendimo etapai:

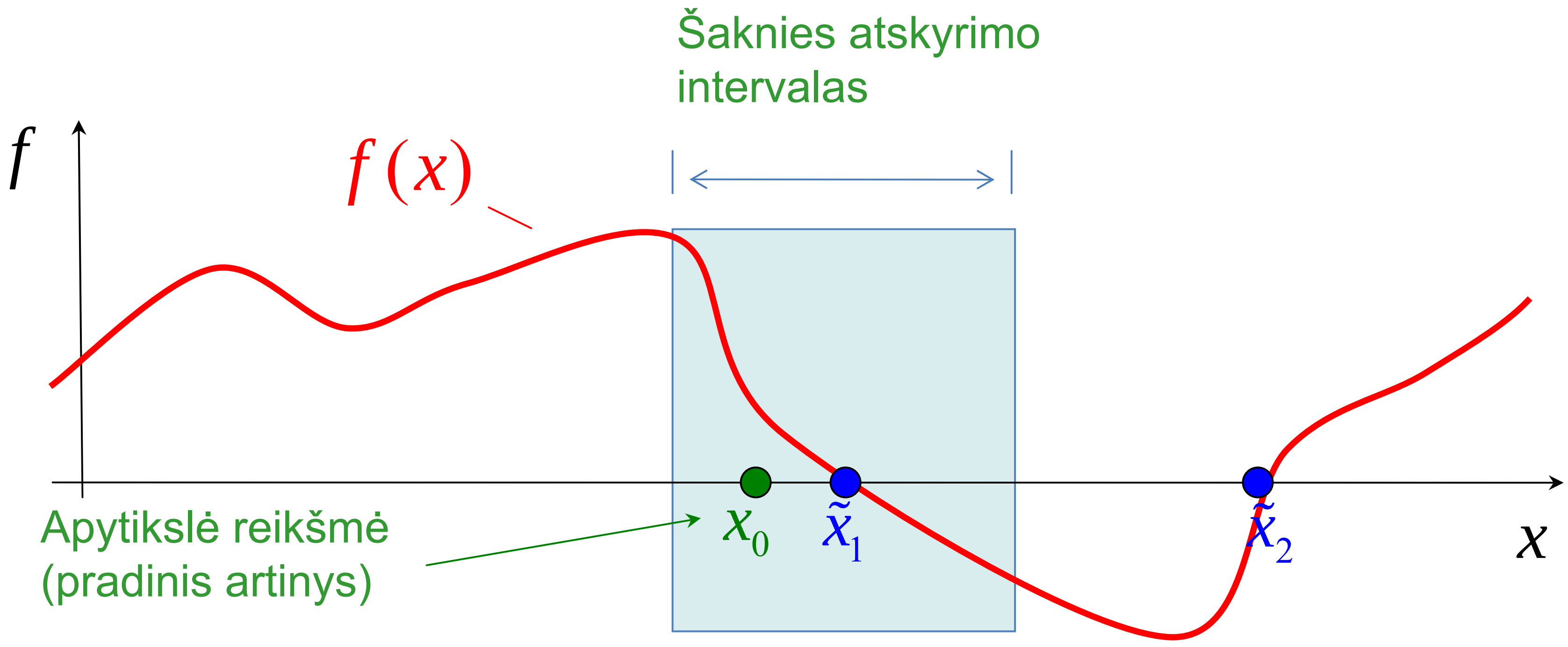
$$f(x) = 0$$

- ***Šaknų atskyrimas*** **arba** ***pradinio artinio parinkimas***
- **Šaknies reikšmės patikslinimas**



Šaknų atskyrimas:

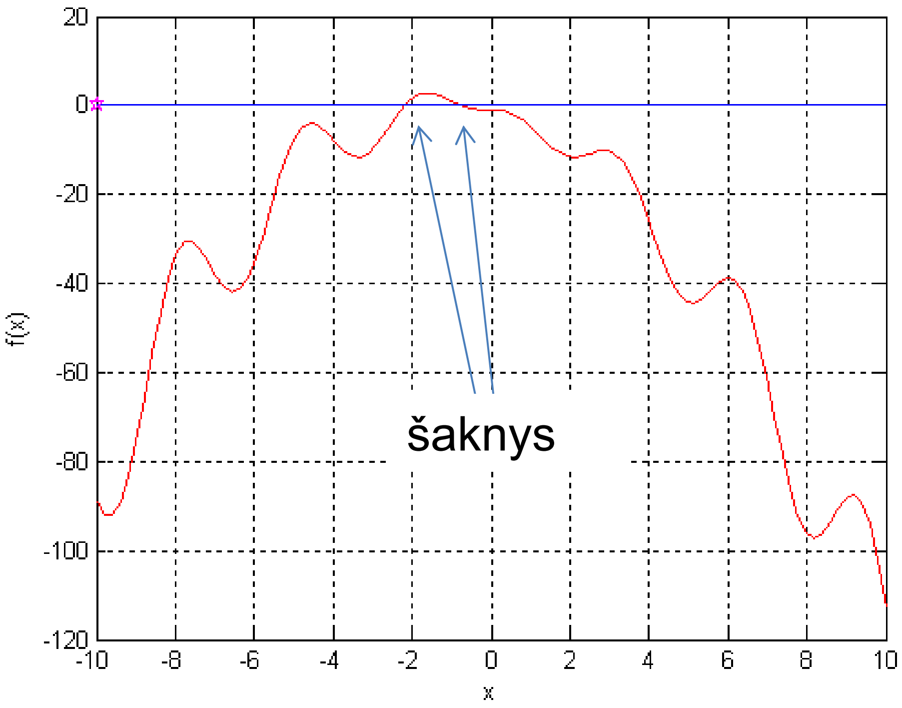
- **Pateikti algoritmus šaknų atskyrimui pavyksta tik *lygtims su vienu nežinomuoju* (pvz. grafiniu būdu, atliekant tikėtino šaknų intervalo skenavimą ir pan.);**
- ***Lygčių sistemoms su daugeliu nežinomųjų* universalių metodų šaknų atskyrimui nėra;**



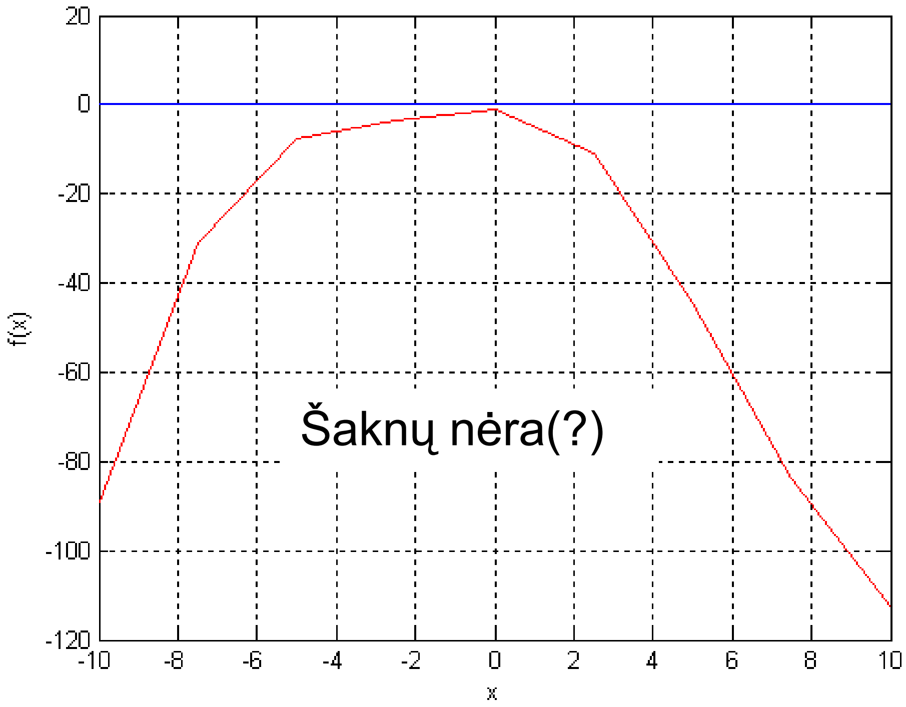
Šaknų atskyrimas: ***grafinis šaknų radimo būdas***

Pvz_SMA_1_1_Funkciju_grafinis_pavaizdavimas.m

$$f(x) = 2x\cos(x) - (x+1)\,\hat{}\,2 = 0; \quad x?$$



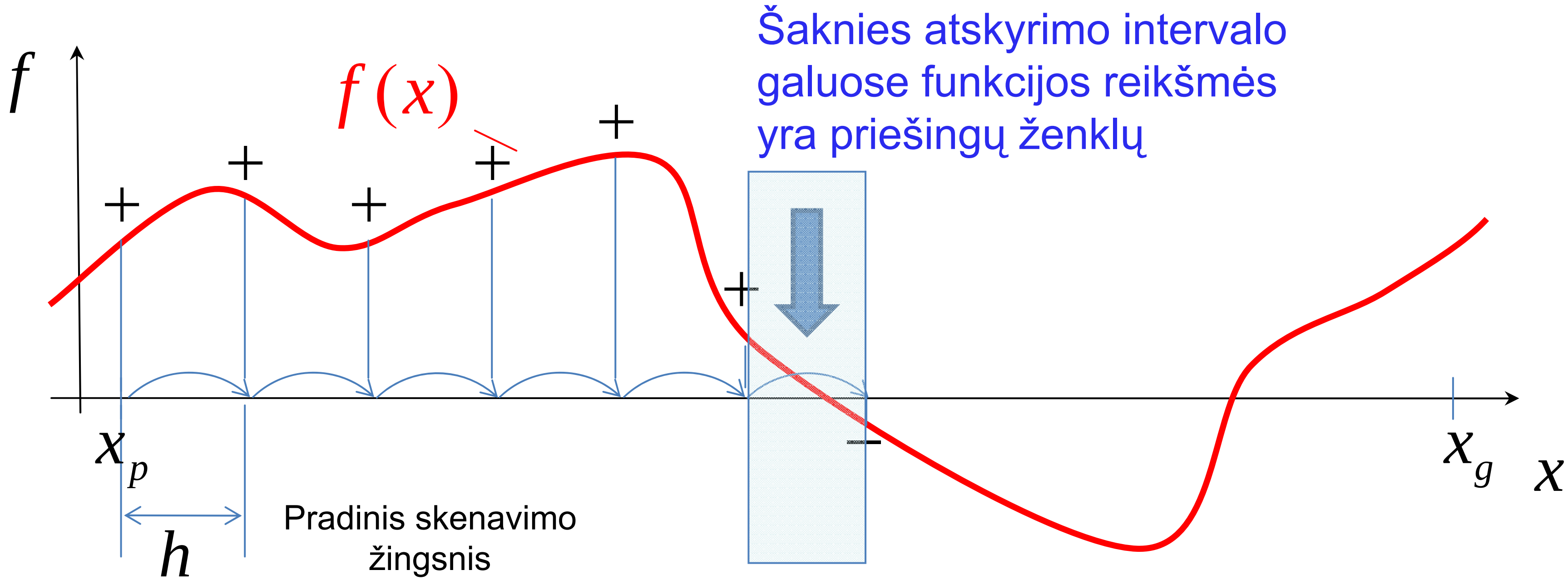
Taškų skaičius 100



Taškų skaičius 9

pavojus neaptikti šaknies

Šaknų atskyrimas: *intervalo skenavimas*



pavojus parinkti per didelį pradinį skenavimo žingsnį ir "peršokti" kelias šaknis

Šaknų atskyrimas: *matematikos teorinių rezultatų panaudojimas 1*

Kai funkcija yra daugianaris

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots \ + \ a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n > 0$$

"Grubus" įvertis
(galioja tiek realioms šaknims, tiek ir kompleksinių šaknų moduliams):

$$|x| < 1 + \frac{\max\limits_{0 \le i \le n-1} |a_i|}{a_n} = R$$

Šaknų atskyrimas: *matematikos teorinių rezultatų panaudojimas 2*

"Tikslesnis" įvertis (galioja tik realioms šaknims)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \dots \ + \ a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n > 0$$

Teigiamoms šaknims

$$x \le R_{teig}, \ R_{teig} = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}}, \quad k = n - \max_{0 \le i \le n-1} (i, a_i < 0), \quad B = \max_{0 \le i \le n-1} (|a_i|, a_i < 0)$$

Neigiamoms šaknims vietoje daugianario *f(x)* imti *f(-x)* , kai *n* lyginis ir *–f(-x),* kai *n* nelyginis.
Apskaičiuoti R_{neig}

Galutinis įvertis:

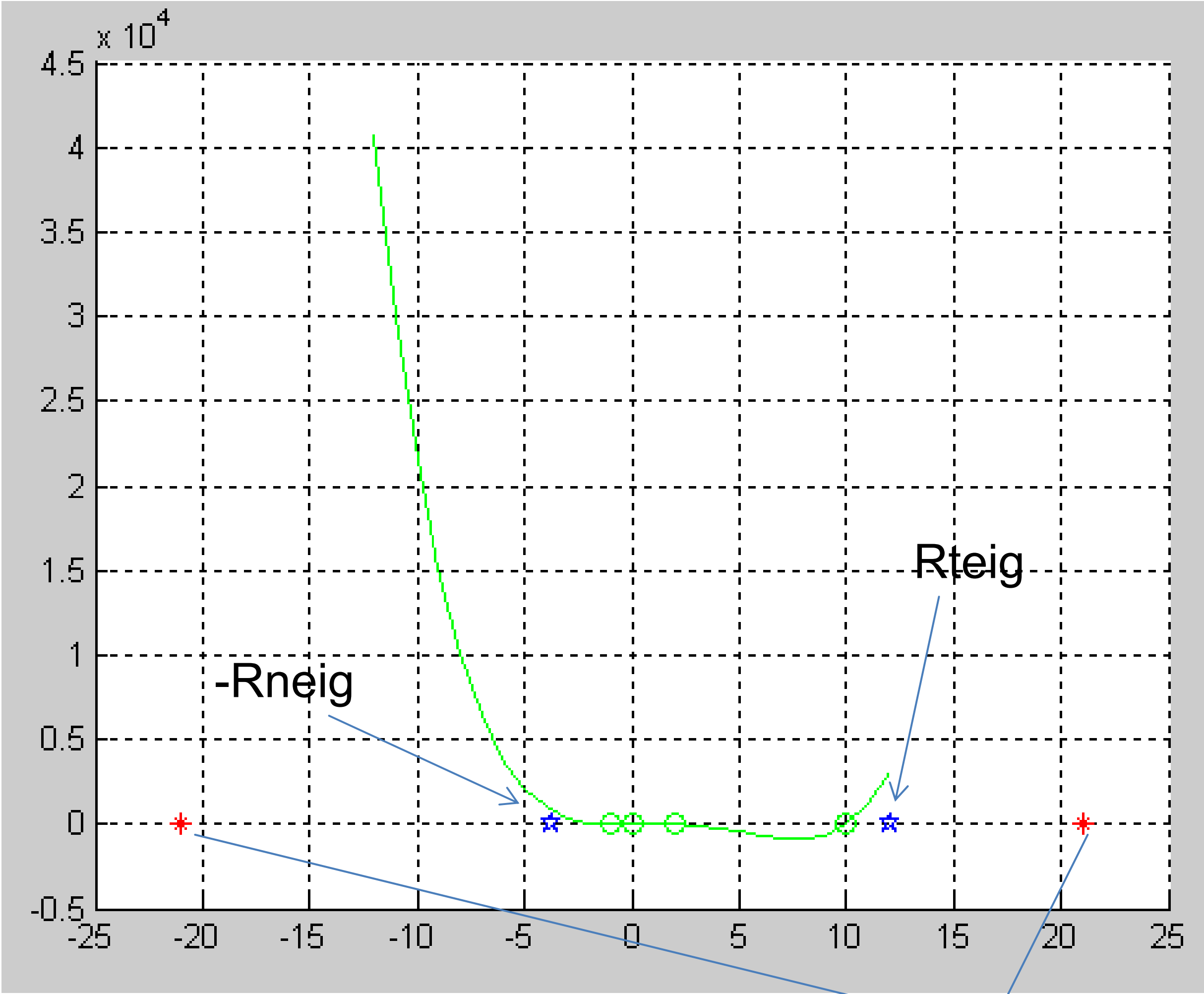
$$-\min\left(R, R_{neig}\right) \le x \le \min\left(R, R_{teig}\right)$$

Būna atvejų, kai "tikslesnis" įvertis nurodo platesnį intervalą, nei "grubus". Taip būna, kai k > 1 , o B/an < 1

Šaknų atskyrimas: *matematikos teorinių rezultatų panaudojimas*

Pvz_SMA_1_2_ Daugianario_saknu_reziu_iverciai.m

f(x)=x^4 - 11*x^3 + 8*x^2 + 20*x+0



f(x)=x*(x + 1)*(x - 2)*(x - 10)

Grubus įvertis

Šaknų atskyrimas: ***intervalų parinkimas “iš patirties”, suvokiant matematiniu modeliu aprašyto realaus objekto esmę ir galimą prasmingą šaknies reikšmę***

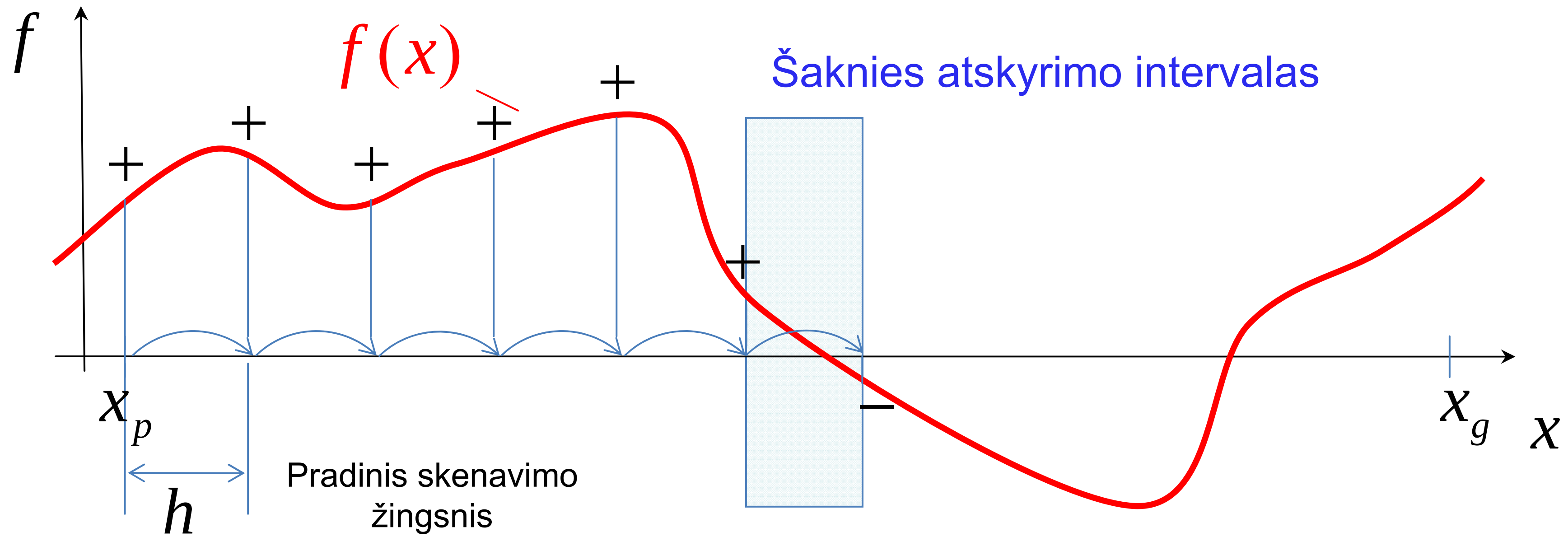
Daugeliu atvejų nebūtina, kad pradinis artinys būtų iš tikrųjų skaitiškai artimas tikrajam sprendiniui. Pakanka, kad jo reikšmė būtų prasminga tiriamame matematiniame modelyje.

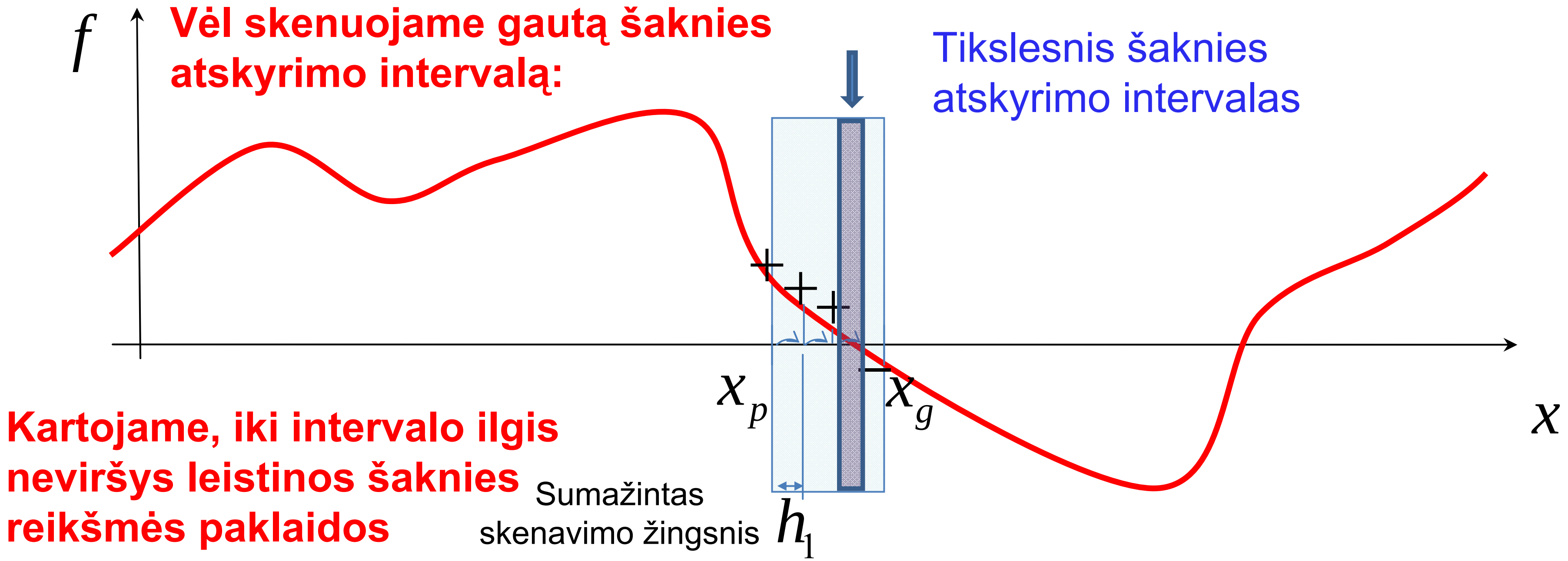
Šaknies reikšmės tikslinimas:

$$f(x) = 0$$

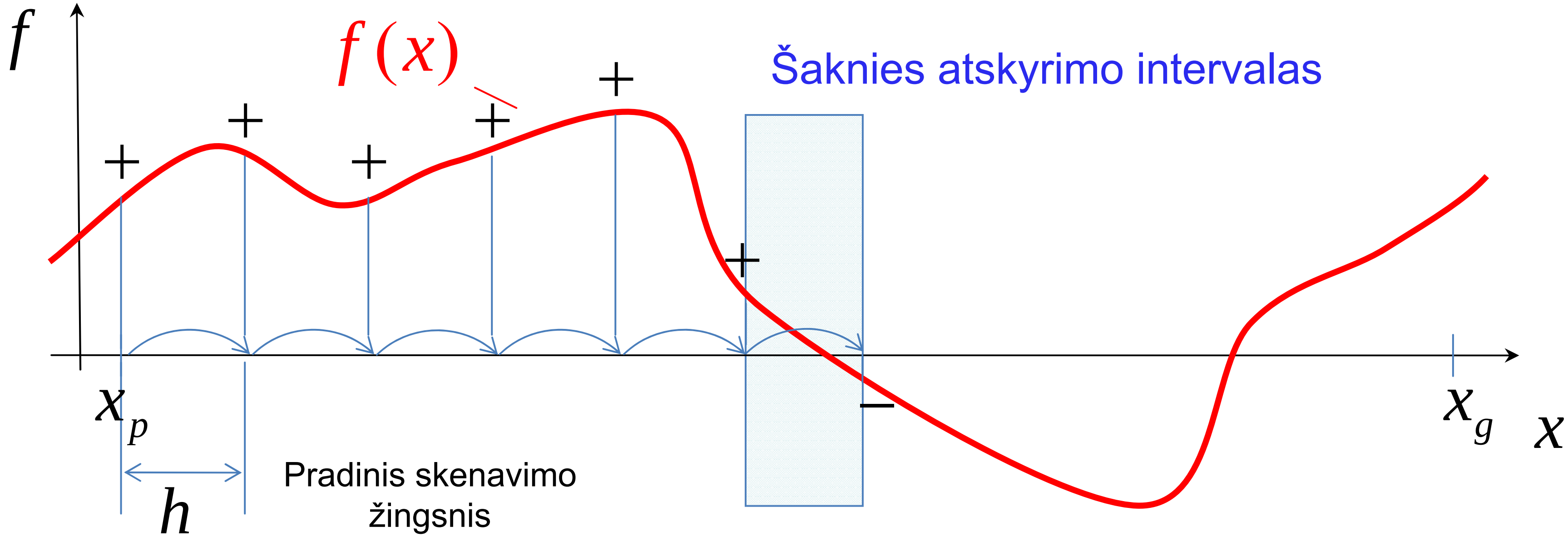
- Kalbėdami apie bendruosius netiesinių alg.lygčių sprendimo metodus, dažniausiai turime galvoje ***šaknies reikšmės patikslinimo*** algoritmus;
- Laikome, kad **pradinis artinys** arba **šaknies atskyrimo intervalas** jau yra žinomi;
- Iš nemažo skaičiaus šaknies tikslinimo metodų, tinkamų vieno kintamojo lygties sprendimui, tik keletas tinka daugelio kintamųjų lygčių sistemoms (pvz. ***paprastųjų iteracijų metodas***, ***Niutono metodas***, ***baudos funkcijos optimizavimo metodai***)

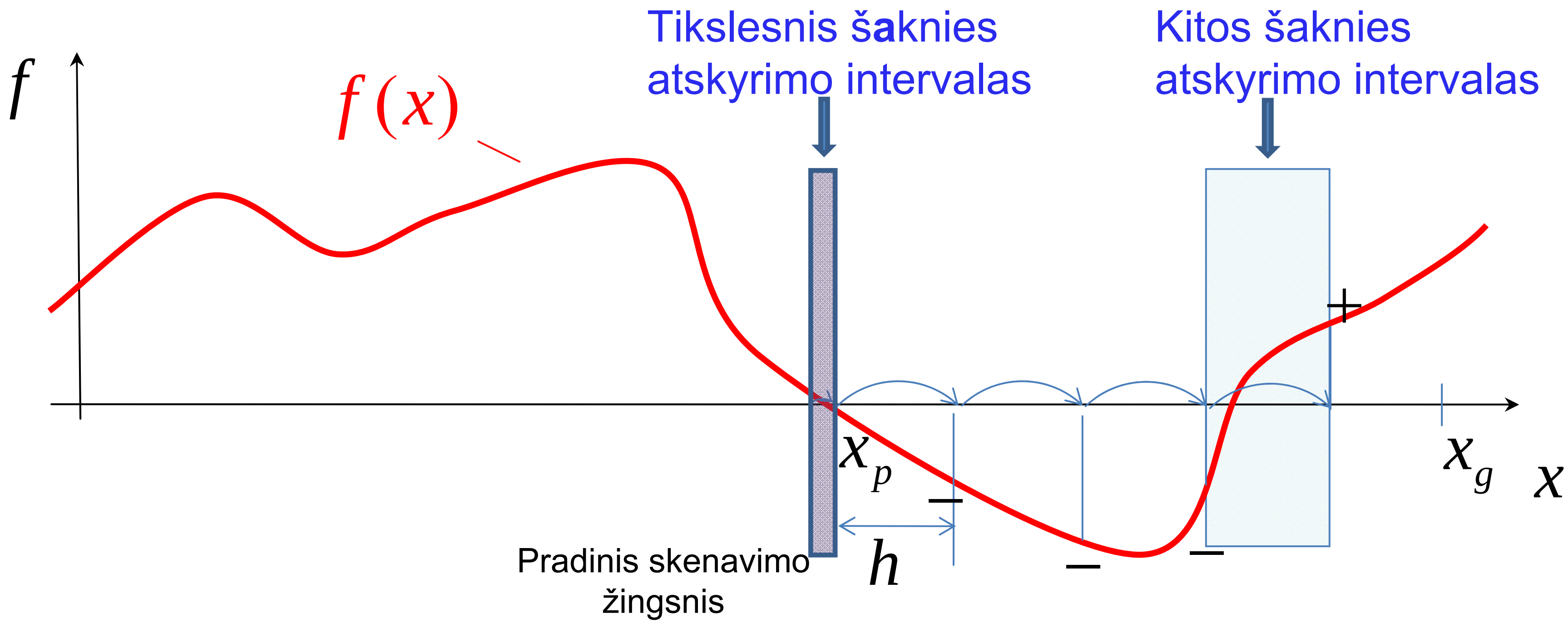
Šaknies reikšmės tikslinimas *siaurinant skenuojamą intervalą*





Nuosekliai vykdant ***šaknies atskyrimo intervalo skenavimu*** **ir** ***skenuojamo intervalo siaurinimo*** **algoritmus, galima rasti ir kitas šaknis:**



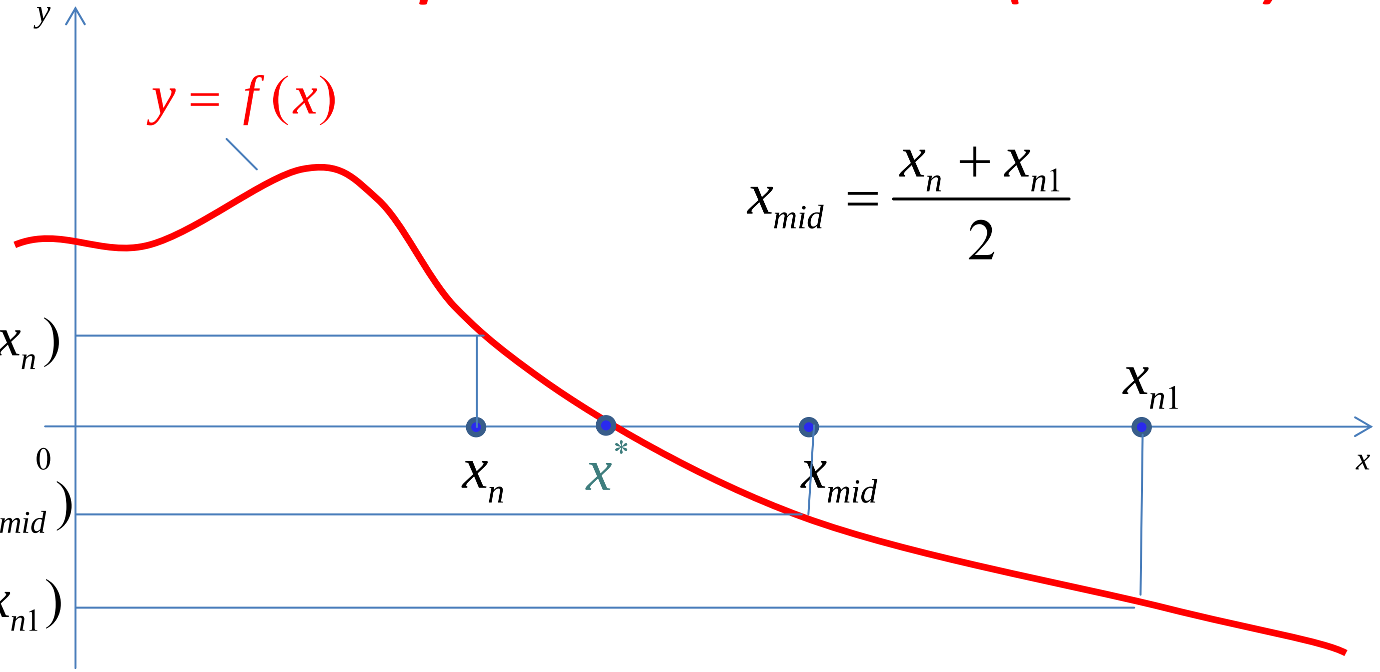


- Taikant *skenuojamo intervalo siaurinimo* algoritmą, funkcijos reikšmę gali tekti apskaičiuoti labai daug kartų. Jis *nėra ekonomiškas skaičiavimų požiūriu;*

Šaknies reikšmės tikslinimas: *pusiaukirtos metodas (bisection)*

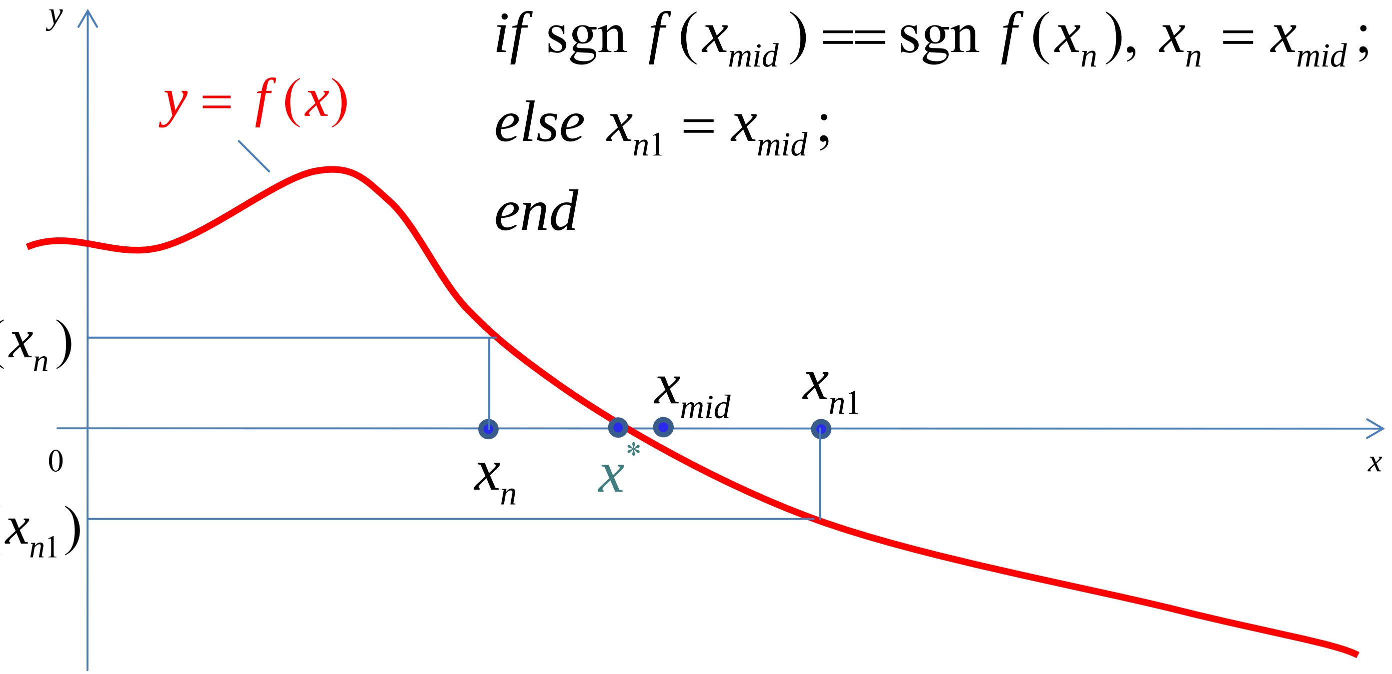
$f(x^*) = 0; \;\; x^*\,?$

$n)$



$$x_{mid} = \frac{x_n + x_{n1}}{2}$$

$n+1)$



if $\operatorname{sgn} f(x_{mid}) == \operatorname{sgn} f(x_n),\; x_n = x_{mid};$

else $x_{n1} = x_{mid};$

end

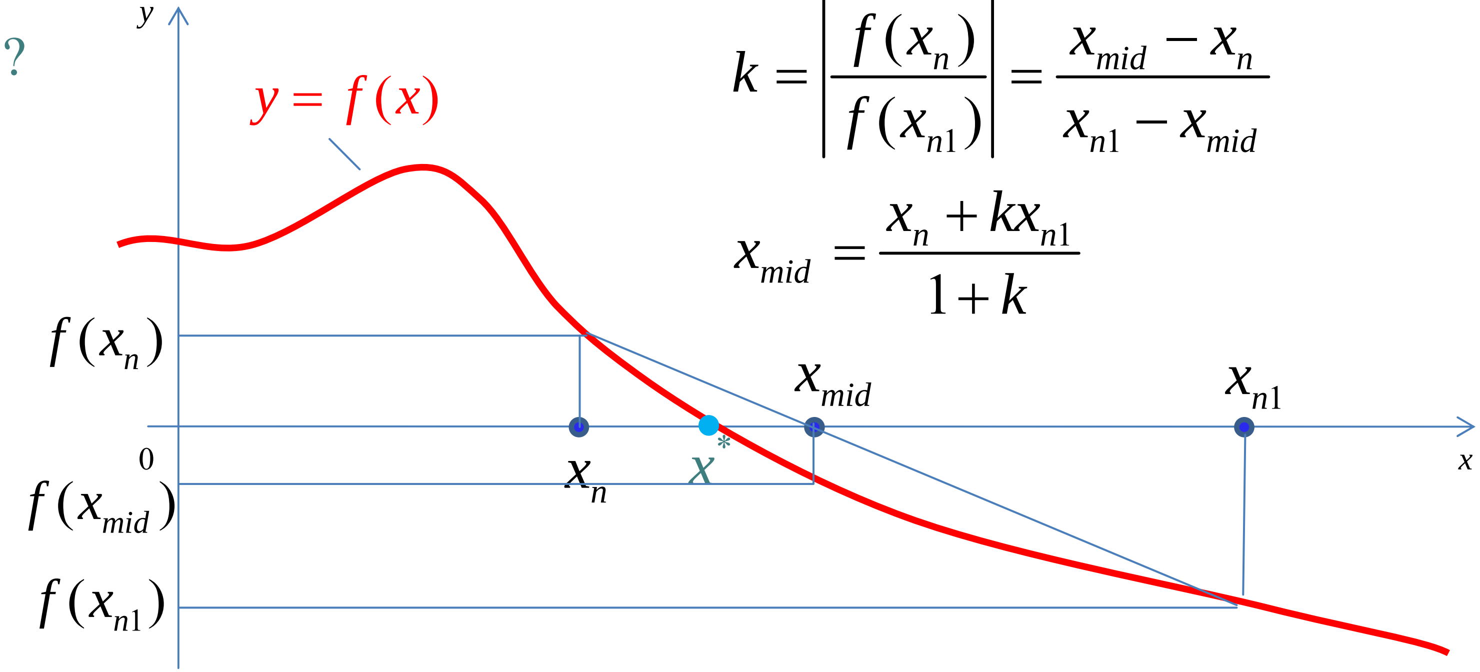
Šaknies reikšmės tikslinimas: stygų metodas (chords)

$f(x^*) = 0; \quad x^* \ ?$

$$k = \left| \frac{f(x_n)}{f(x_{n1})} \right| = \frac{x_{mid} - x_n}{x_{n1} - x_{mid}}$$

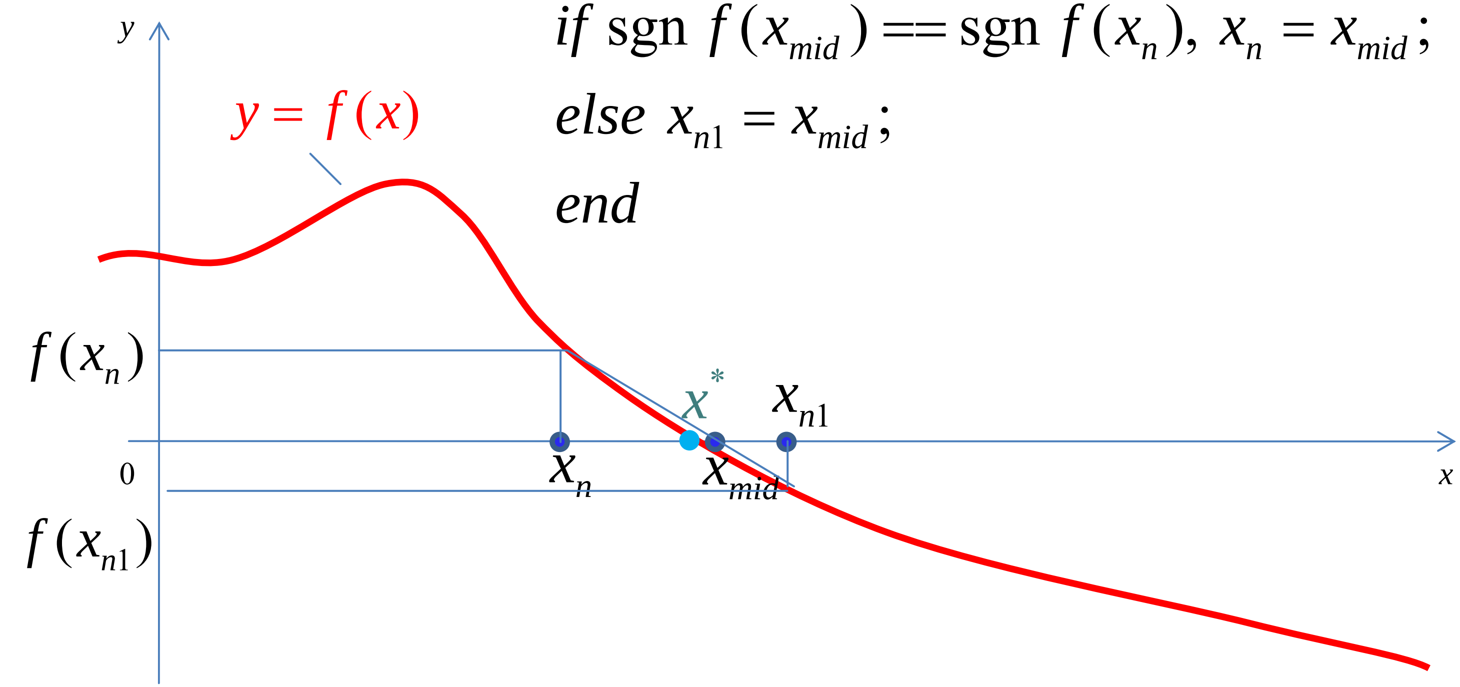
$$x_{mid} = \frac{x_n + k x_{n1}}{1 + k}$$

$n)$

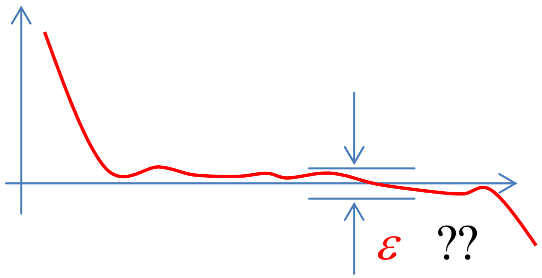


$$\textit{if} \ \operatorname{sgn} f(x_{mid}) == \operatorname{sgn} f(x_n), \ x_n = x_{mid};$$
$$\textit{else} \ x_{n1} = x_{mid};$$
$$\textit{end}$$

$n+1)$

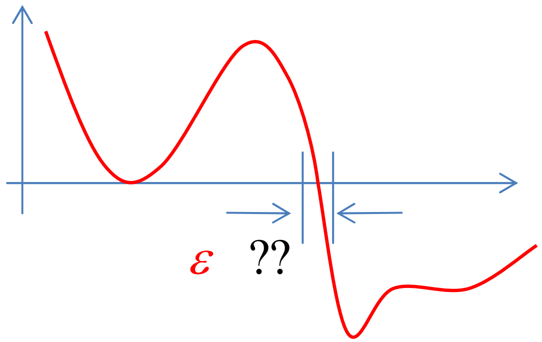


Skaičiavimo pabaigos sąlygos

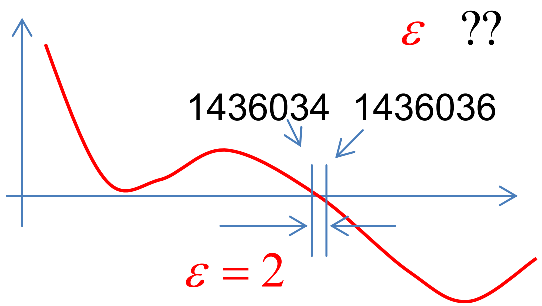


$$\left| f(x_{mid}) \right| < \varepsilon$$

Ne visuomet lengva parinkti eps reikšmę



$$\left| x_n - x_{n1} \right| < \varepsilon$$



“2” - ar tai didelė, ar maža reikšmė?

Patikimesnės pabaigos sąlygos

$$\left| f(x_{mid}) \right| < \varepsilon_1 \quad \& \quad \left| \left(x_n - x_{n1} \right) < \varepsilon_2 \right|$$

$$\left| f(x_{mid}) \cdot \left(x_n - x_{n1} \right) \right| < \varepsilon$$

$$\frac{\left| x_n - x_{n1} \right|}{\left| x_n \right| + \left| x_{n1} \right|} < \varepsilon, \quad kai \quad x^* \neq 0$$

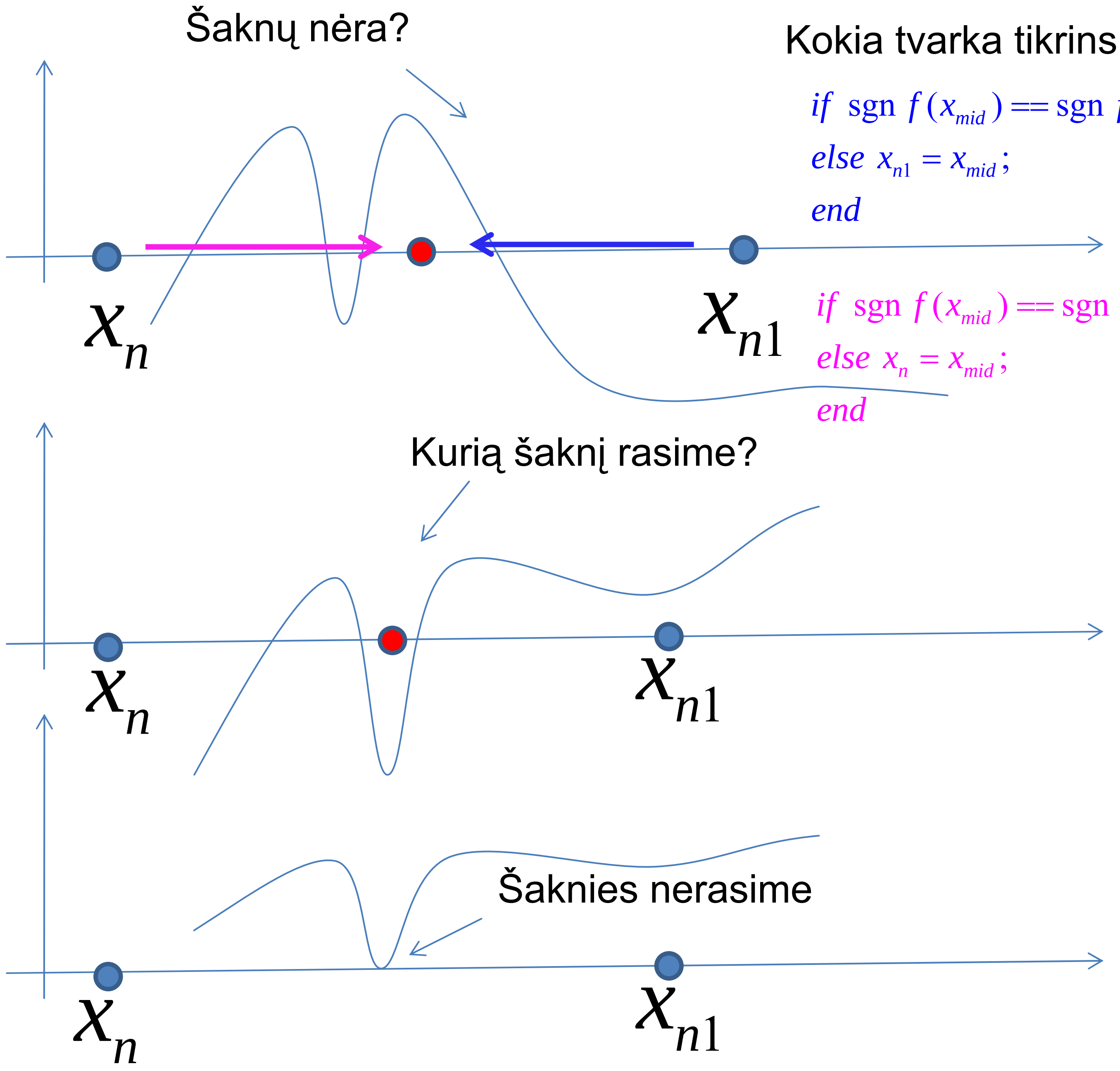
Šaknies reikšmės tikslinimas:
stygų ir pusiaukirtos metodų taikymo pavyzdžiai

Pvz_SMA_1_3_Viena_lygtis_bisection_chords.m

- **Vieno kintamojo funkcijoms aukščiau aptarti metodai (grafinis, skenavimo, pusiaukirtos, stygų*) turi "šaknies apskliaudimo" savybę*. Jeigu šaknies intervalas aptiktas, jame garantuotai randama bent viena šaknis;**

- **Deja, nei vienas iš šiuose metoduose naudojamų principų *netinka daugelio kintamųjų funkcijoms ir lygčių sistemoms***

Pasitaiko sunkumų nustatant šaknų atskyrimo intervalą:



Kokia tvarka tikrinsime sąlygą?

$$\begin{aligned}&\mathit{if}\ \ \operatorname{sgn} f(x_{mid}) == \operatorname{sgn} f(x_n),\ x_n = x_{mid};\\ &\mathit{else}\ \ x_{n1} = x_{mid};\\ &\mathit{end}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathit{if}\ \ \operatorname{sgn} f(x_{mid}) == \operatorname{sgn} f(x_{n1}),\ x_{n1} = x_{mid};\\ &\mathit{else}\ \ x_n = x_{mid};\\ &\mathit{end}\end{aligned}$$

Šaknies reikšmės tikslinimas: ***paprastųjų iteracijų metodas (simple iteration)***

Daugiklis, kurio reikšmė yra parenkama

$$f(x) = 0;$$

$$f(x) + \alpha x = \alpha x;$$

$$x = x + \frac{1}{\alpha} f(x);$$

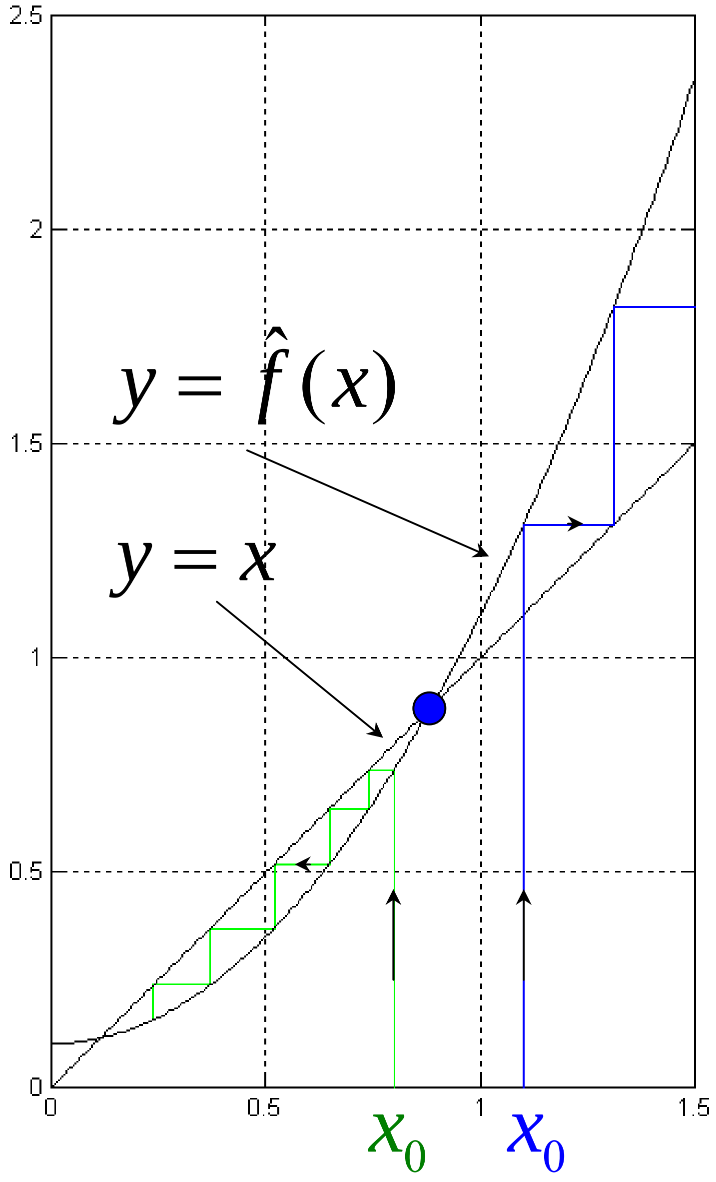
$$x = \hat{f}(x)$$

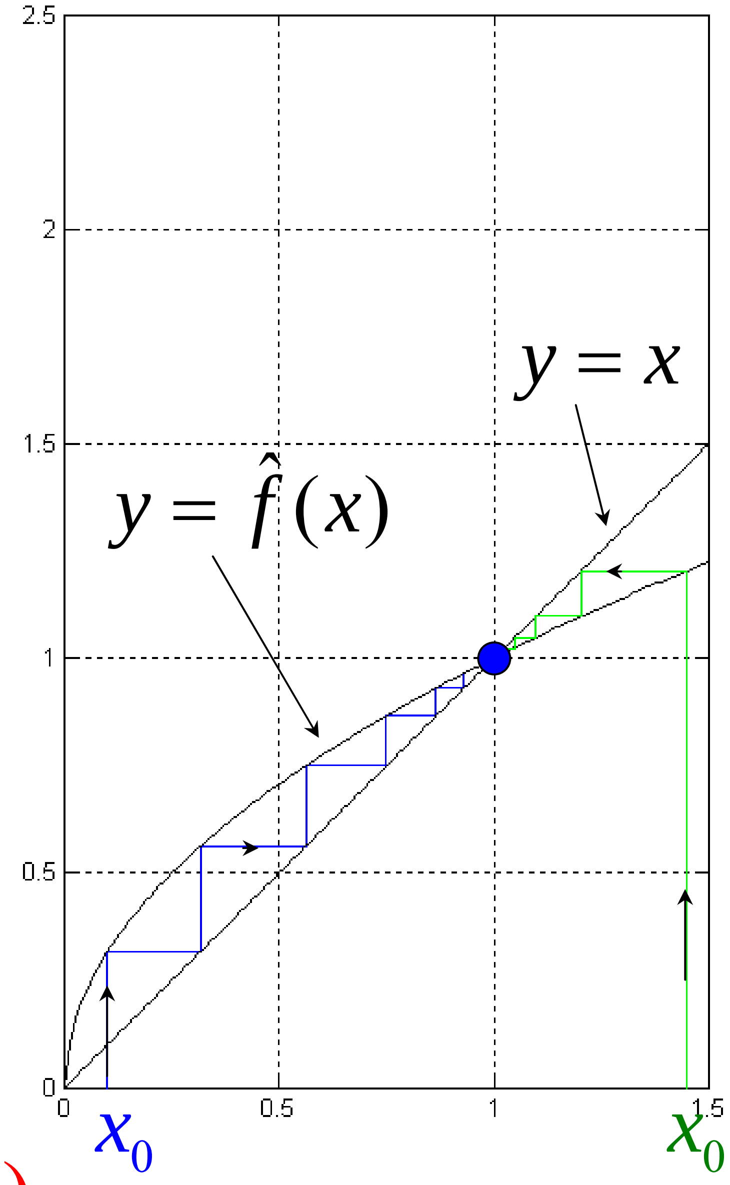
x^0 - pradinis artinys

$$\boxed{x^{i+1} = \hat{f}(x^i) \;,\;\; i = 0,1,2,3,\ldots}$$

matematinės operacijos pakartotinis panaudojimas vadinamas ***iteracija***

Paprastųjų iteracijų metodo grafinė iliustracija





$$x = \hat{f}(x)$$

$$x^{i+1} = \hat{f}(x^i)$$

Paprastųjų iteracijų metodas **gali** **<u>diverguoti netgi esant labai geriems pradiniams artiniams;</u>**

•Jeigu pradinis artinys geras, metodas konverguoja, kai $\left|\frac{d\hat{f}(x)}{dx}\right|_{x^*} < 1$

$$\hat{f}(x) = x + \frac{1}{\alpha} f(x);$$

$$\left|\frac{d\hat{f}(x)}{dx}\right| = \left|1 + \frac{1}{\alpha}\frac{df(x)}{dx}\right| < 1$$

$$\boxed{-2 < \left(\frac{1}{\alpha}\frac{df(x)}{dx}\right)_{x^*} < 0}$$

•Visuomet įmanoma parinkti teigiamą arba neigiamą α reikšmę, kad nelygybė būtų tenkinama

•Deja, sprendinio taškas iš anksto nežinomas ☹ Tenka eksperimentuoti skaičiuojant

Paprastųjų iteracijų metodas konverguoja, parinkus tinkamą daugiklio reikšmę: ***Pvz_SMA_1_4_Viena_lygtis_simple_iteration.m***

$$1.5x^2 - 1 = 0$$

$$1.5x^2 - 1 + 10x = 10x$$

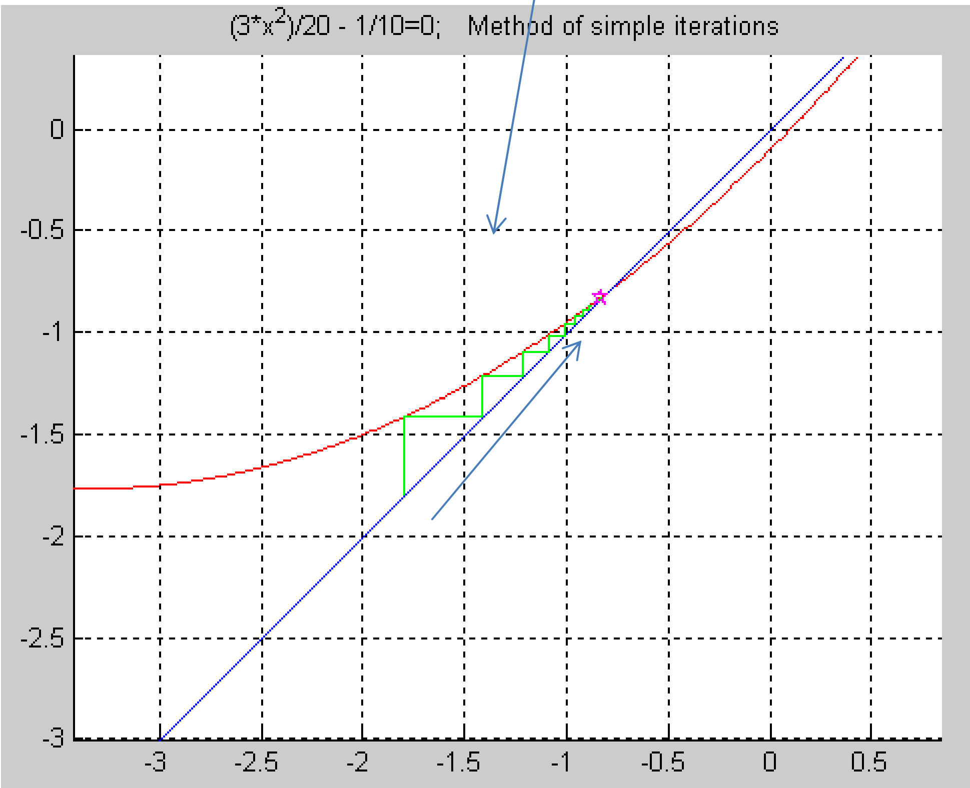
$$x_{i+1} = 0.15x_i^{\ 2} + x_i - 0.1$$

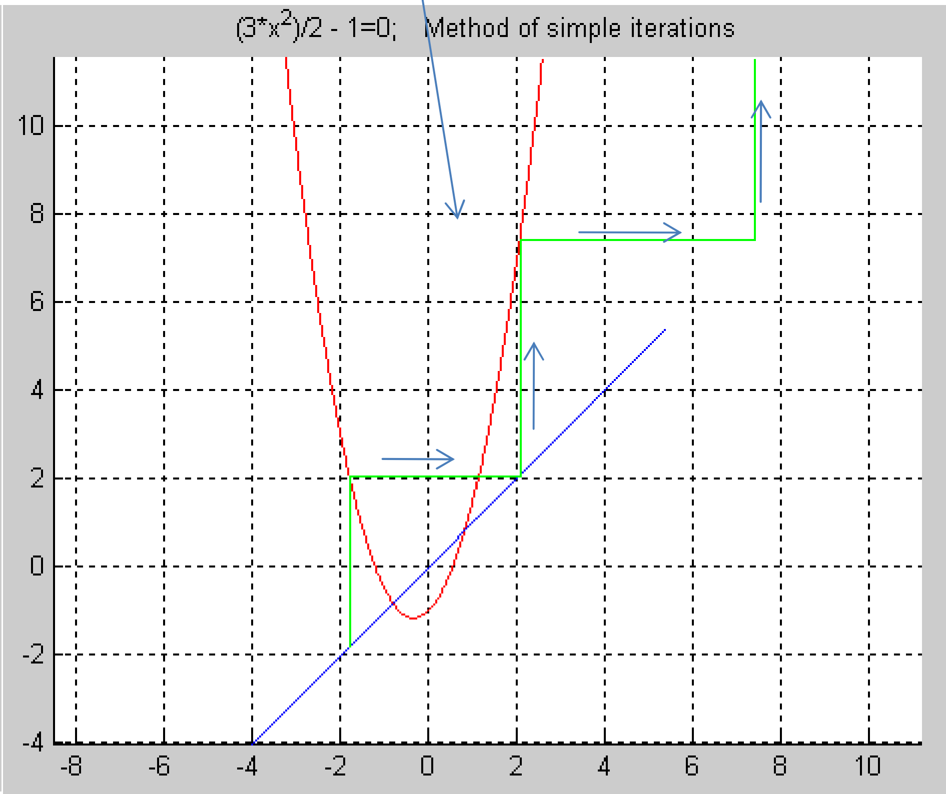
$$1.5x^2 - 1 = 0$$

$$1.5x^2 - 1 + x = x$$

$$x_{i+1} = 1.5x_i^{\ 2} + x_i - 1$$

Tokia pati lygtis, tačiau skirtingos iteracijų formulės (!)



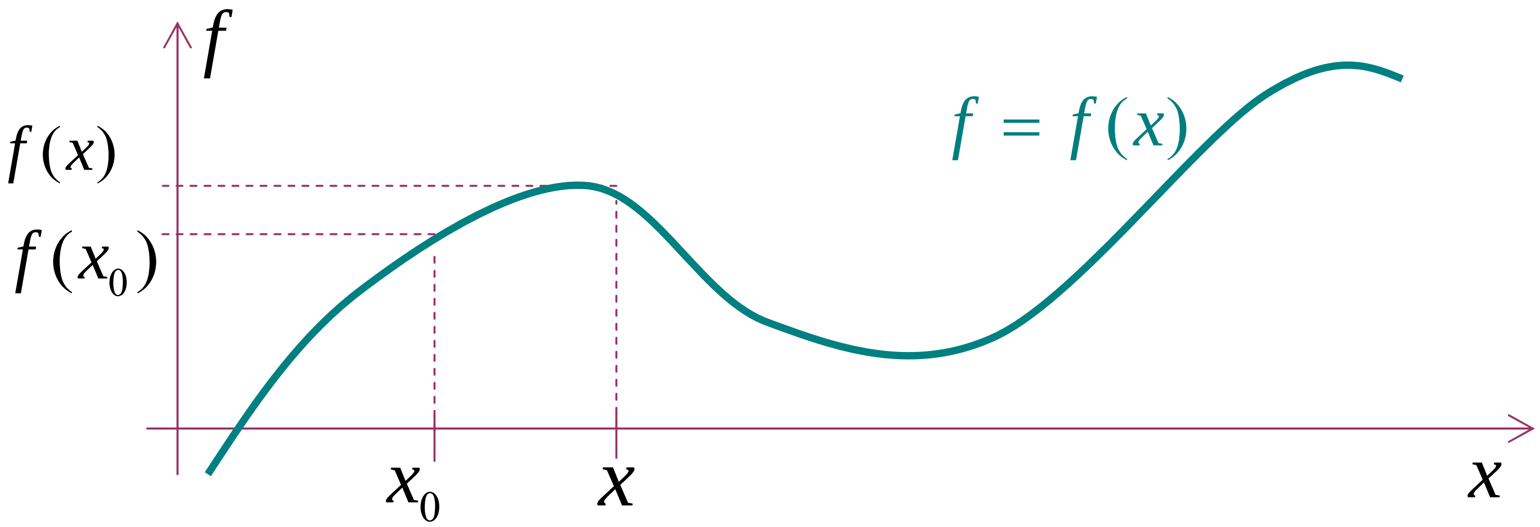


Šaknies reikšmės tikslinimas:

Niutono (liestinių) metodas (Newton, tangent).

- ***Niutono metodas*** **paremtas** ***Teiloro teorema*** **(Teiloro eilute);**
- ***Teiloro teorema*** **nagrinėjama Matematikos kurse;**
- **Sekančios 2 skaidrės primena** ***Teiloro teoremos*** **esmę ir panaudojimo būdą. Tai** ***pagalbinė medžiaga***

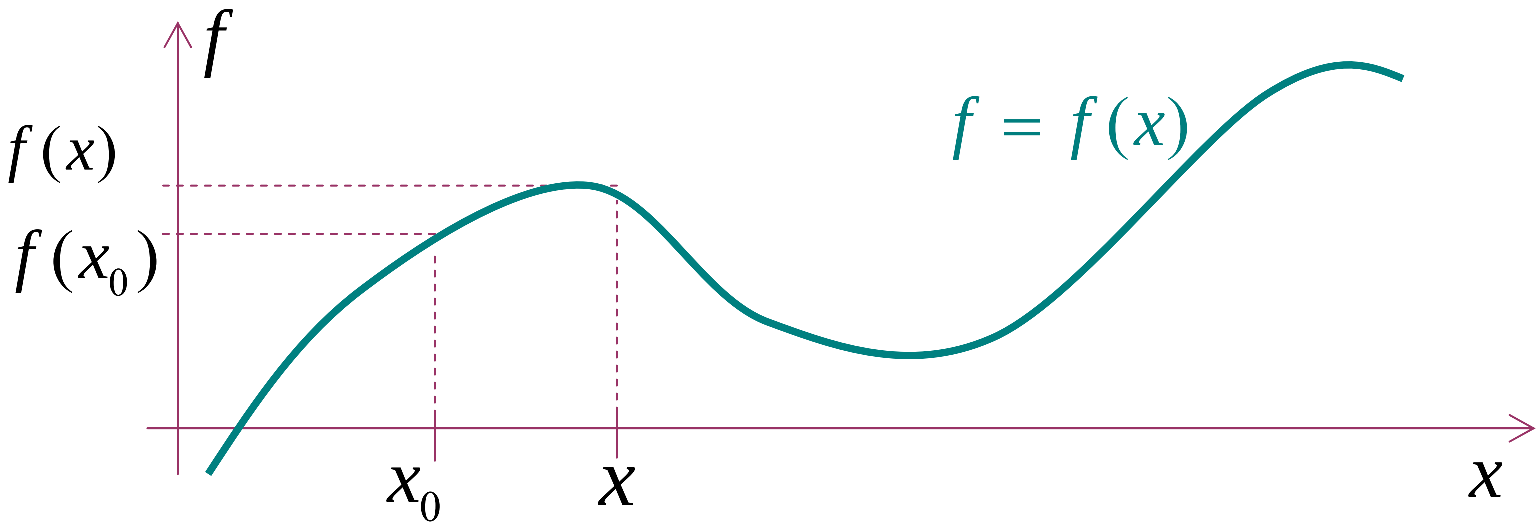
Pagalbinė medžiaga: Teiloro teorema (Teiloro eilutė) 1



$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^3}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0} + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} + \cdots$$

- Teiloro eilutė išreiškia funkcijos reikšmes taške *x* per tos funkcijos ir jos išvestinių reikšmes, apskaičiuotas taške *x0* ;

Pagalbinė medžiaga: Teiloro teorema (Teiloro eilutė) 2



$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^3}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0} + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} + \cdots$$

Argumentas (kintamasis)

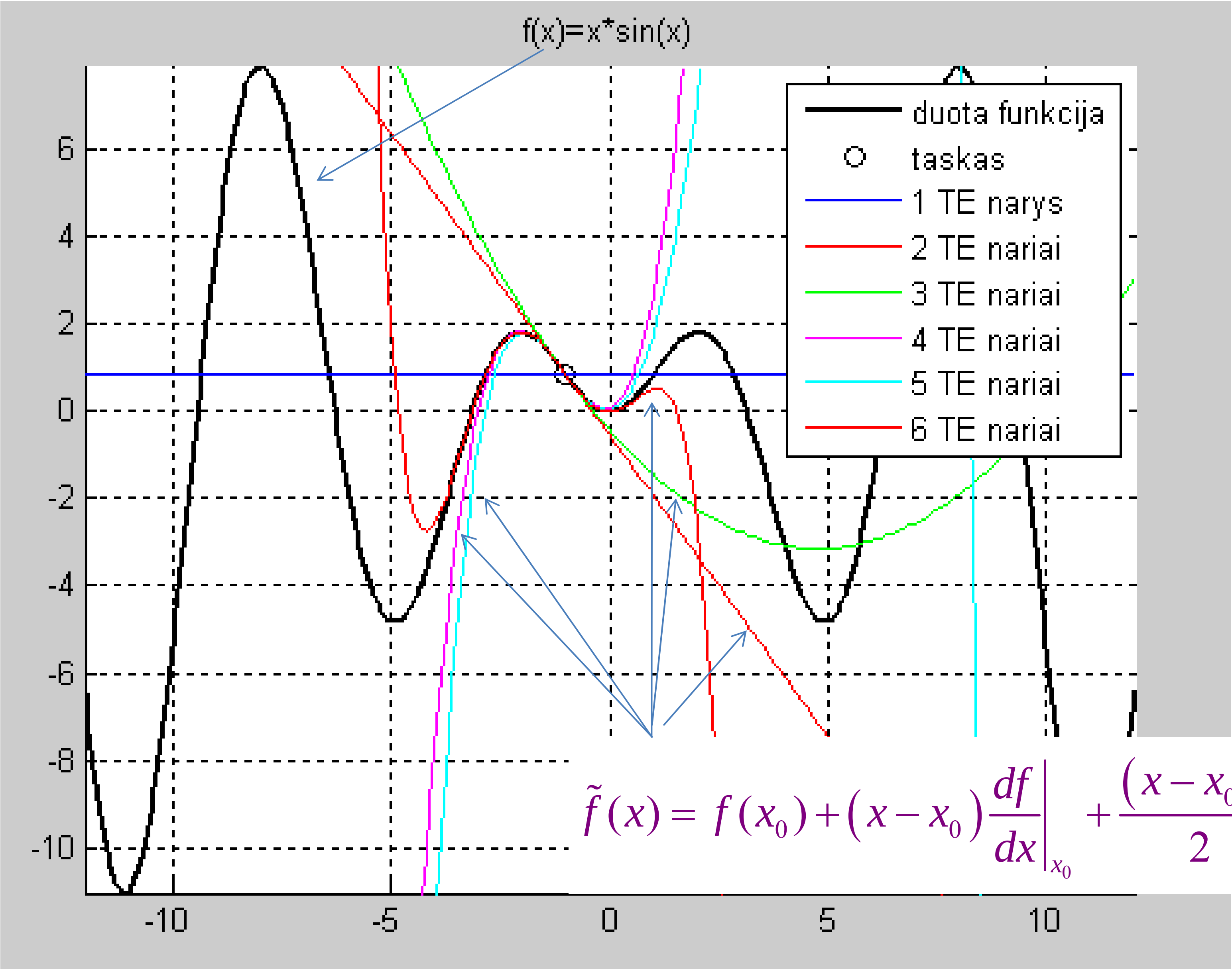
Apskaičiuotos skaitinės reikšmės

•Kita interpretacija : **Teiloro eilutė išreiškia bet kokią be galo daug kartų diferencijuojamą funkciją begalinės eilės daugianariu (t.y.algebrine funkcija)**

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x) = f(x)$$

Pagalbinė medžiaga: Teiloro teorema (Teiloro eilutė) 3

Pvz_SMA_1_5_Teiloro eilutes paaiskinimas.m



$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + \cdots$$

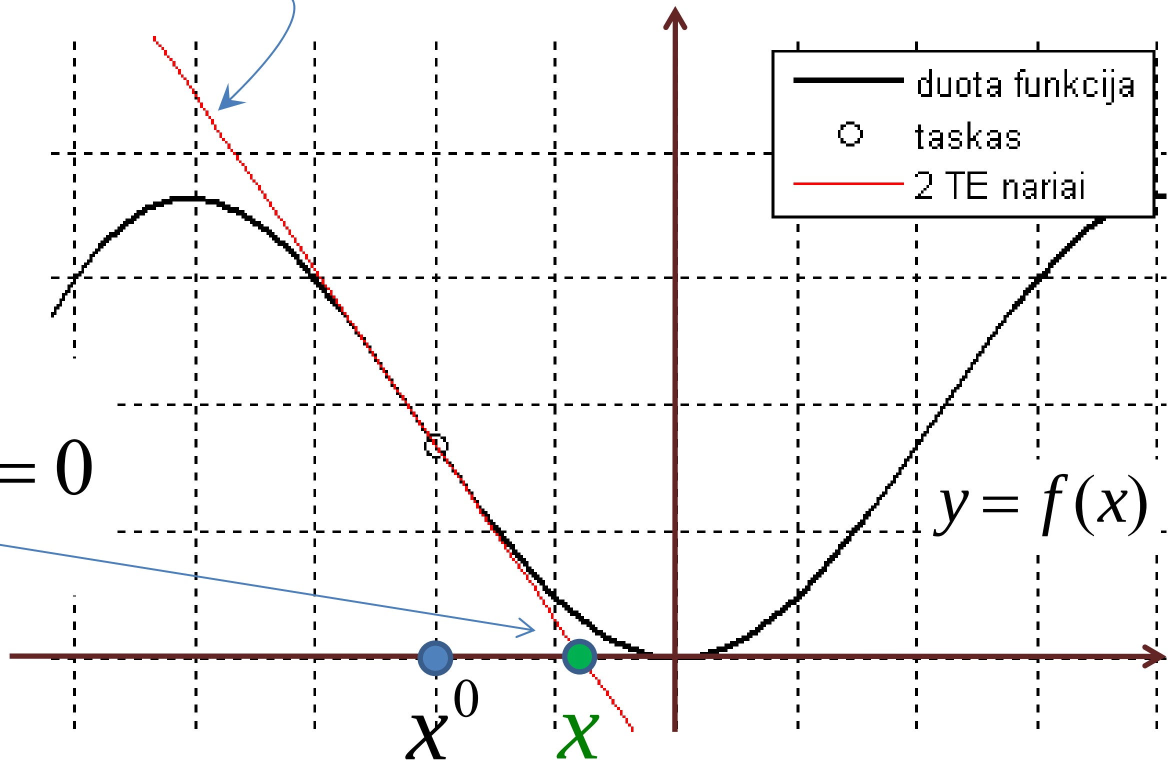
Šaknies reikšmės tikslinimas: *Niutono (liestinių) metodas*

$$f(x) = 0 \quad , \qquad x^0$$ - pradinis artinys

"Atkirsta" Teiloro eilutė

$$f(x) \approx f(x^0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x^0} \left(x - x^0\right)$$

$$f(x^0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x^0} \left(x - x^0\right) = 0$$



pradinis artinys

Šaknies reikšmės tikslinimas: *Niutono (liestinių) metodo formulė*

$$f(x) = 0 \quad , \qquad x^0 \quad \text{- pradinis artinys}$$

$$f(x^0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x^0} \left(x - x^0 \right) = 0$$

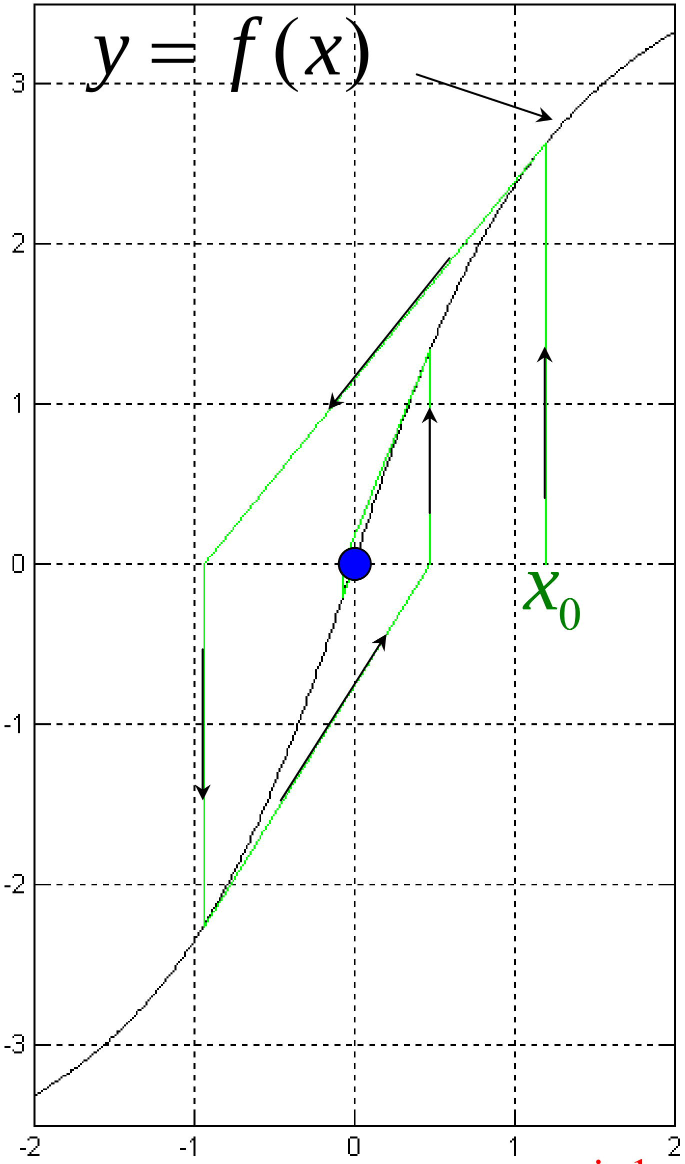
$$\Downarrow$$

$$f(x^i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x^i} \left(x^{i+1} - x^i \right) = 0$$

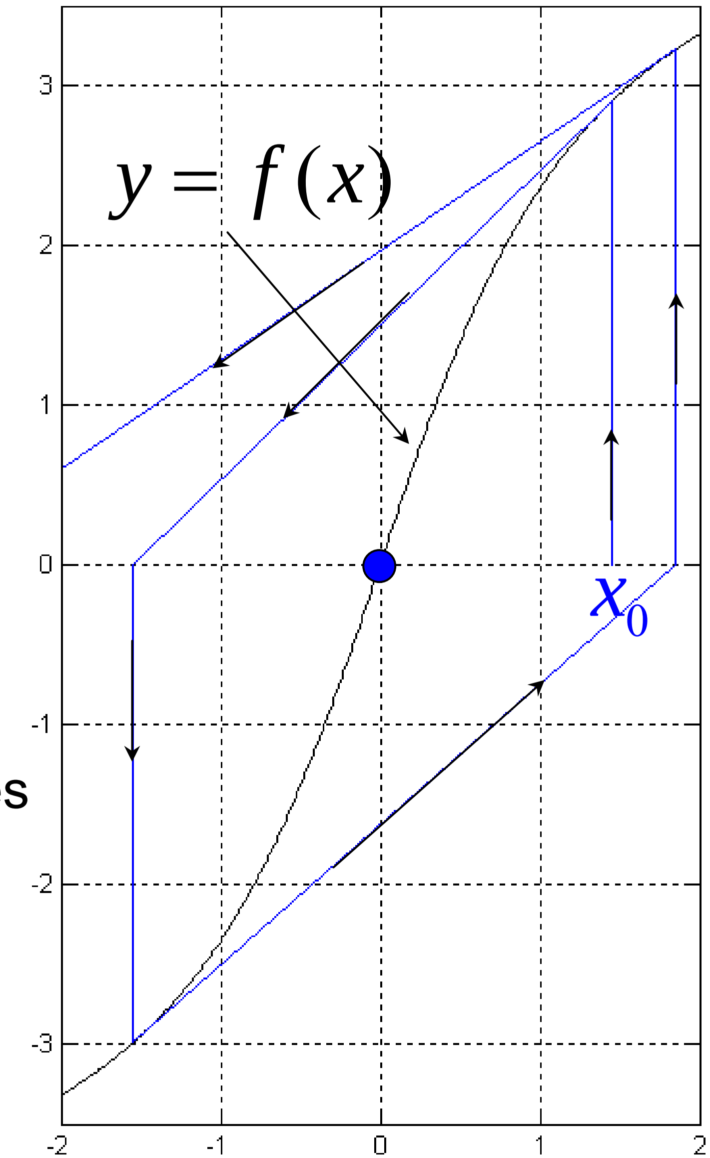
$$\Downarrow$$

$$x^{i+1} = x^i - \left.\left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}\right|_{x^i} f(x^i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Niutono metodo grafinė iliustracija



$$f(x) = 0$$



Liestinės krypties koeficientas

$$x^{i+1} = x^i - \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}\Bigg|_{x^i} f(x^i)$$

Šaknies reikšmės tikslinimas: *Niutono (liestinių) metodo modifikacija konvergavimui pasiekti*

$$f(x) = 0 \quad , \quad x^0 \quad \text{- pradinis artinys}$$

$$x^{i+1} = x^i - \left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}\Bigg|_{x^i} f(x^i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$x^{i+1} = x^i - \beta\left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}\Bigg|_{x^i} f(x^i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Parinkta daugiklio reikšme galima apriboti x prieaugį, tikintis pagerinti konvergavimą

Niutono metodas visuomet konverguoja, kai pradedama skaičiuoti nuo gero pradinio artinio;

Kiekvienos iteracijos metu būtina apskaičiuoti ne tik funkcijos, tačiau ir jos išvestinės reikšmę;

Niutono metodo taikymo pavyzdys

Pvz_SMA_1_6_Viena_lygtis_Simple_iteration_Newton_Secant.m

Galima būtų sudaryti panašų o Niutono algoritmą, panaudojant daugiau Teiloro eilutės narių:

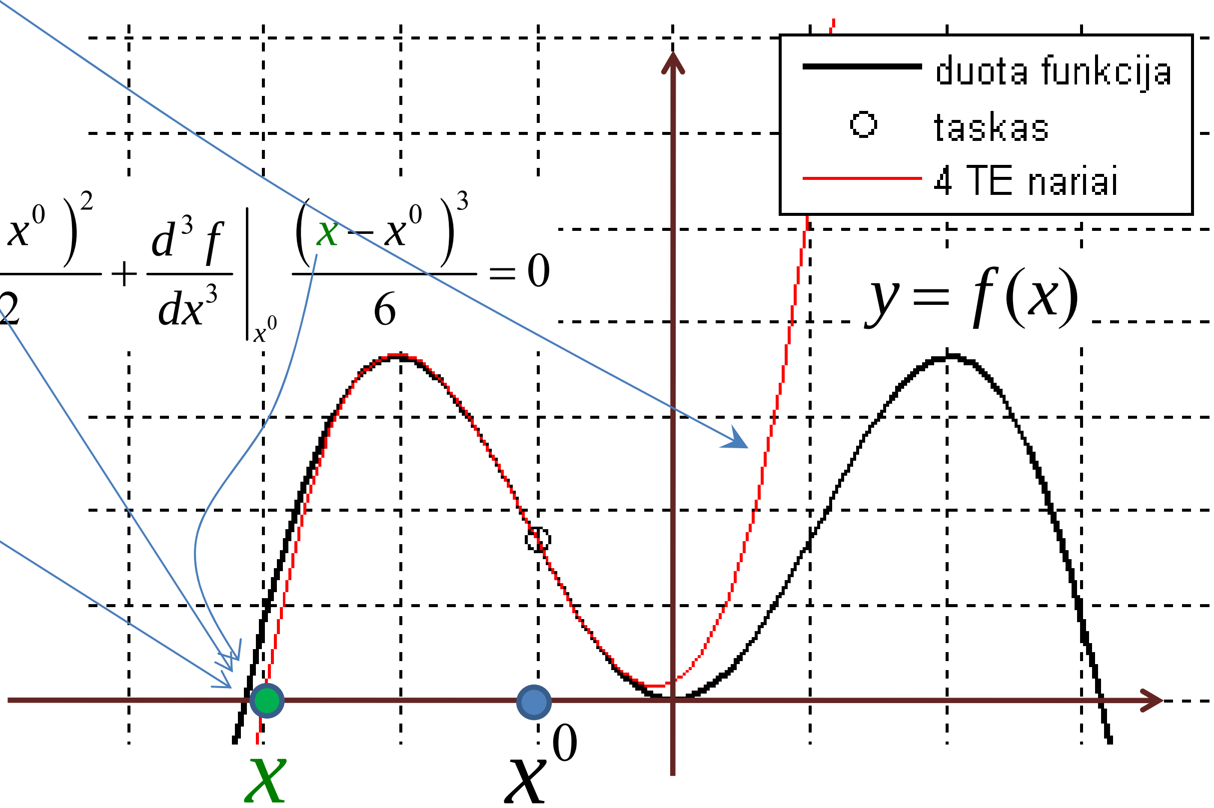
$$f(x)=0\ ,\quad x^0\ \text{- pradinis artinys}$$

"Atkirsta" Teiloro eilutė

$$f(x)\approx f(x^0)+\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^0}(x-x^0)+\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x^0}\frac{(x-x^0)^2}{2}+\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x^0}\frac{(x-x^0)^3}{6}$$

$$f(x^0)+\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^0}(x-x^0)+\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x^0}\frac{(x-x^0)^2}{2}+\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x^0}\frac{(x-x^0)^3}{6}=0$$

Deja, gautą lygtį išspręsti bendruoju atveju *įmanoma tik skaitiškai*. Todėl toks būdas nėra populiarus, jis įdomus tik teoriškai.



pradinis artinys

Geriau yra suprastinti Niutono metodo skaičiavimus taip, kad nereiktų analitiškai diferencijuoti;

Išvestinės reikšmes galima įvertinti skaitiškai, nenaudojant analitinių diferencijavimo formulių(kvazi-Niutono metodai)

kvazi-Niutono metodai: *kirstinių metodas (secant)*

$$x^{i+1} = x^{i} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{x^{i}} f(x^{i})$$

$$\Downarrow \approx$$

Apytikslis skaitinis išvestinės įvertis. (*h* yra laisvai parinktas mažas argumento prieaugis)

$$x^{i+1} = x^{i} - \left(\frac{f(x^{i}) - f(x^{i} - h)}{h} \right)^{-1} f(x^{i})$$

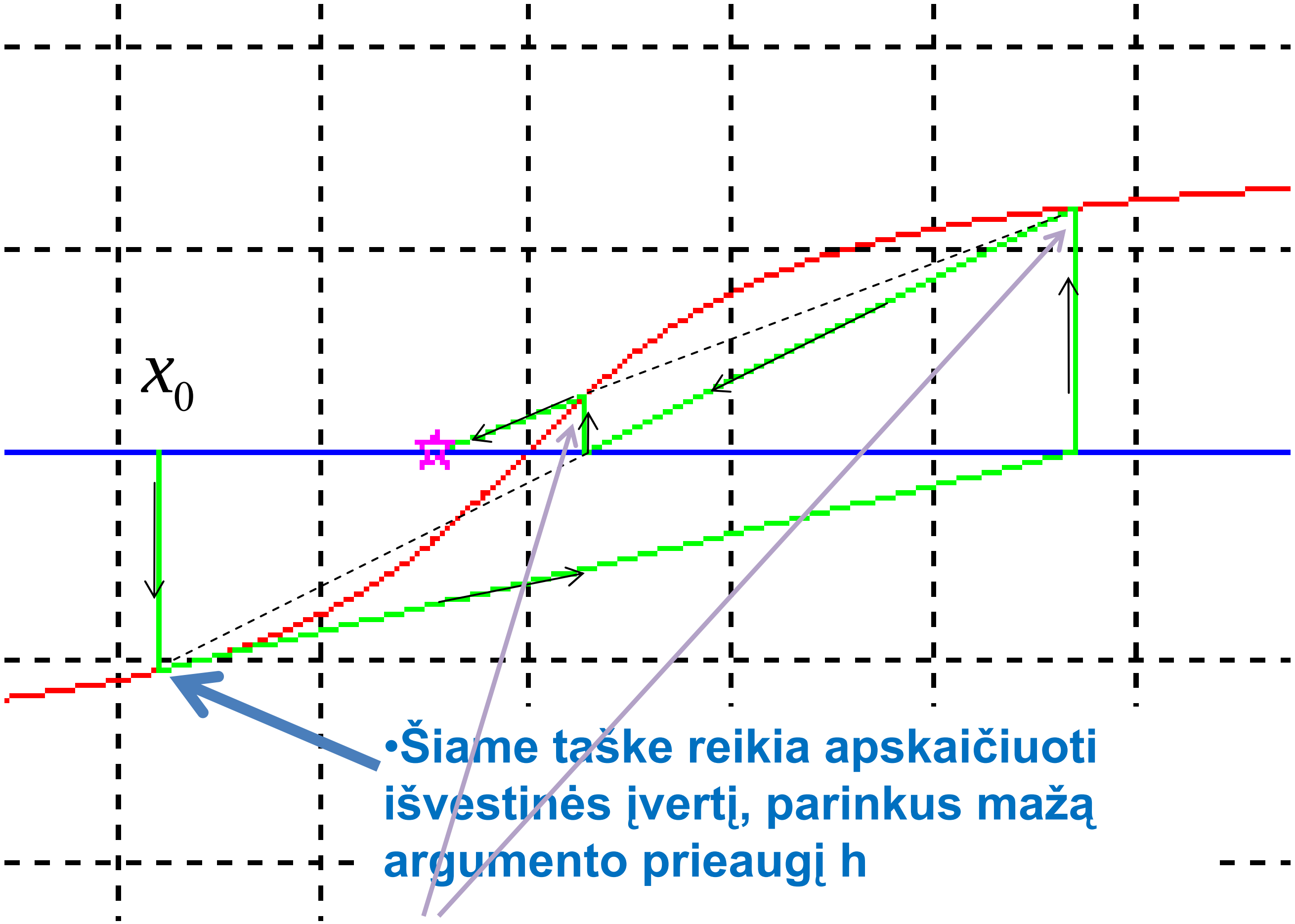
Kirstinių metodas: $h = x^{i} - x^{i-1}$

$$x^{i+1} = x^{i} - \left(\frac{f(x^{i}) - f(x^{i-1})}{x^{i} - x^{i-1}} \right)^{-1} f(x^{i})$$

Kirstinių metodu pradedama skaičiuoti, parinkus ***pradinį artinį ir skaitiškai apskaičiavus išvestinės reikšmę tame taške***

Kirstinių metodo grafinė iliustracija

Pvz_SMA_1_6_Viena_lygtis_Simple_iteration_Newton_Secant.m

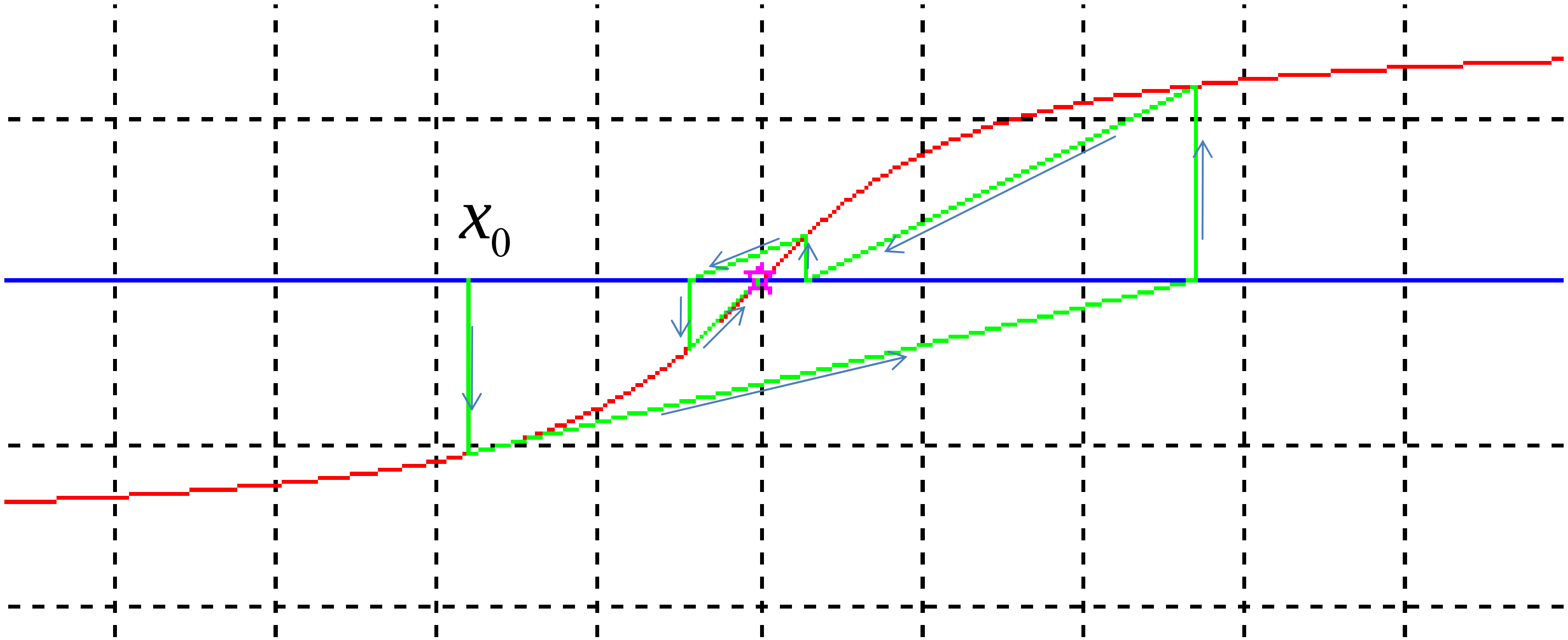


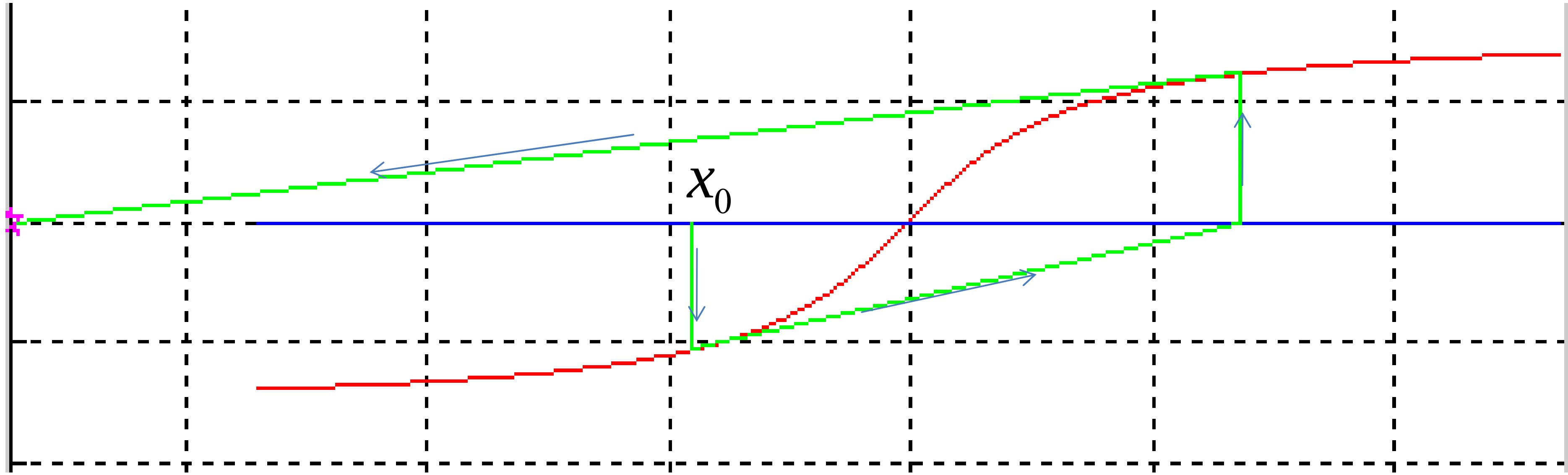
- Šiame taške reikia apskaičiuoti išvestinės įvertį, parinkus mažą argumento prieaugį h

- Kitose iteracijose išvestinės įvertis nebeskaičiuojamas. Vietoje jo naudojamos kirstinių kryptys

Kirstinių metodas prieš *Niutono metodą* : **grafinė iliustracija**

Pvz_SMA_1_6_Viena_lygtis_Simple_iteration_Newton_Secant.m





Iteracijų pabaigos sąlygos:

$$\left| f(x_{i+1}) \right| < \varepsilon$$

Ne visuomet lengva parinkti eps reikšmę

$$\left| x_{i+1} - x_i \right| < \varepsilon$$

$$\left| f(x_{i+1}) \cdot \left(x_{i+1} - x_i \right) \right| < \varepsilon$$

Geresni iteracijų pabaigos įverčiai

$$\frac{\left| x_{i+1} - x_i \right|}{\left| x_{i+1} \right| + \left| x_i \right|} < \varepsilon, \quad kai \quad x^* \neq 0$$

- Jeigu funkcija nėra gerai ištirta, skaičiuojant iteracijų metodais ***visuomet*** išlieka algoritmo divergavimo pavojus

MATLAB funkcijos netiesinių lygčių sprendimui

fzero(fun,x0) - apskaičiuoja vienos netiesinės lygties sprendinį;

fsolve(fun,x0) - apskaičiuoja netiesinės lygties arba lygčių sistemos sprendinį;

roots(c) - apskaičiuoja daugianario šaknis