Funkcijų interpoliavimas

Ermito daugianariai ir splainai

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115/Skaitiniai inzinerijos metodai su MATLAB (KP RG RB)2009

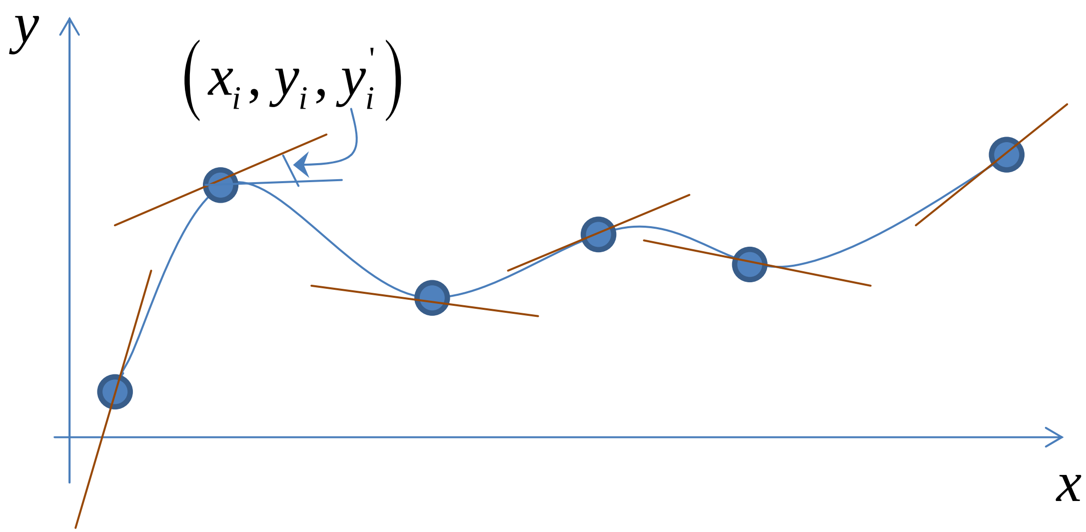
F9.pdf

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115 /Skaitiniai inzinerijos metodai(RB) 2006

I.3.pdf

Interpoliavimas, kai mazguose duotos ne tik *funkcijos, bet ir jos išvestinės* reikšmės:

$$\left(x_i, y_i, y_i^{'}\right), \qquad y_i = f\left(x_i\right),\ y_i^{'} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i},\ i = 1:n$$



Interpoliavimas daugianariais *vienanarių bazėje*

Duoti interpoliavimo mazgai: $\left(x_i, y_i, y_i^{'}\right),\ i = 1:n$

Daugianario pavidalo interpoliacinė funkcija

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-1}x^{2n-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & \ldots & x^{2n-2} & x^{\mathbf{2n\text{-}1}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \\ a_{\mathbf{2n\text{-}1}} \end{Bmatrix}$$

Bazinės funkcijos

Bazinių funkcijų išvestinės:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & (2n-2)x^{2n-3} & (2n-1)x^{2n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \\ a_{2n-1} \end{Bmatrix}$$

!!!
Interpoliuojant per n mazgų, reikia tenkinti 2n lygčių

Interpoliavimas daugianariais. Interpoliavimo koeficientų vienanarių *bazėje* apskaičiavimas

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^{2n-2} & x^{2n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & (2n-2)\,x^{2n-3} & (2n-1)\,x^{2n-2} \end{bmatrix}$$

$$\left(x_i, y_i, y_i^{'}\right), \quad i = 1:n$$

$$\begin{bmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2n-2} & x_1^{2n-1} \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{2n-2} & x_2^{2n-1} \\
 & & & \vdots & & \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{2n-2} & x_n^{2n-1} \\
0 & 1 & 2x_1 & \cdots & (2n-2)\,x_1^{2n-3} & (2n-1)\,x_1^{2n-2} \\
0 & 1 & 2x_2 & \cdots & (2n-2)\,x_2^{2n-3} & (2n-1)\,x_2^{2n-2} \\
 & & & \vdots & & \\
0 & 1 & 2x_n & \cdots & (2n-2)\,x_n^{2n-3} & (2n-1)\,x_n^{2n-2}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \\ a_{2n-1} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_1^{'} \\ y_2^{'} \\ \vdots \\ y_n^{'} \end{Bmatrix}$$

$$a_0, \ a_1, \ \dots, \ a_{2n-1}$$

Ermito interpoliacinė išraiška

$$\left(x_i, y_i, y_i^{'}\right),\; i = 1:n$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(U_j(x) y_j + V_j(x) y_j^{'}\right)} \Rightarrow U_j(x_i) = \delta_{ij}; V_j(x_i) = 0;$$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(U_j^{'}(x) y_j + V_j^{'}(x) y_j^{'}\right) \Rightarrow U_j^{'}(x_i) = 0;\; V_j^{'}(x_i) = \delta_{ij}$$

Lagranžo daugianario išvestinė, apskaičiuota mazge xj

Lagranžo daugianaris, apskaičiuotas visuose taškuose x

$$U_j(x) = (1 - 2L_j^{'}(x_j)(x - x_j))L_j^2(x);$$

$$V_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x), \qquad j = 1:n$$

Lagranžo daugianario išvestinės apskaičiavimas

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3}}^{4}(x-x_i)$$

$$\left((x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\right)'=(x-x_1)'(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)'(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)'=$$

$$=(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_4)+(x-x_1)(x-x_2)=$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq 3}}^{4}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 3\\ i\neq k}}^{4}(x-x_i)\right)$$

$$L_j(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L_j(x)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)=\frac{\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\left(\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq k}}^{n}(x-x_i)\right)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)}$$

Lagranžo daugianario išvestinės apskaičiavimas

$$\left.\frac{\partial L_j(x)}{\partial x}\right|_{x_j} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j\\i\neq k}}^{n}\left(x_{\mathbf{j}} - x_i\right)\right)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\left(x_{\mathbf{j}} - x_i\right)} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{x_{\mathbf{j}} - x_k}\right)$$

$$U_j(x) = (1 - 2L_j^{'}(x_j)(x - x_j))L_j^2(x);$$

$$V_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x),$$

$$j = 1:n$$

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Lagranžo daugianario išvestinės apskaičiavimas

```
function DL=D_Lagrange(X,n,j,x)  % Lagranzo daugianario isvestine

       DL=0;              %DL israskos skaitiklis
       for k=1:n          % ciklas per atmetamus narius
           if k==j, continue, end
           Lds=1;
           for i=1:n
               if i ~= j && i ~= k , Lds=Lds.*(x-X(i)); end
           end
           DL=DL+Lds;
       end

       Ldv=1;             %DL israskos vardiklis
       for i=1:n
                          if i ~= j, Ldv=Ldv.*(X(j)-X(i)); end
       end

       DL=DL/Ldv;

return
end
```

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq j\\i\neq k}}^{n}(x-x_i)\right)$$

$$\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)$$

Ermito daugianarių apskaičiavimas

```
function [U,V]=Hermite(X,n,j,x)   %Ermito daugianariai

      L=Lagrange(X,n,j,x);        %Lagranzo daugianaris
      DL=D_Lagrange(X,n,j,X(j)); %Lagranzo daugianario isvestine
      U=(1-2*DL.*(x-X(j))).*L.^2;
      V=(x-X(j)).*L.^2;

return
end
```

$$(1-2L_j^{'}(x_j)(x-x_j))L_j^2(x)$$

$$V_j(x)=(x-x_j)L_j^2(x)$$

!!! Apskaičiuojama tik taške j, o ne visuose vaizdavimo taškuose

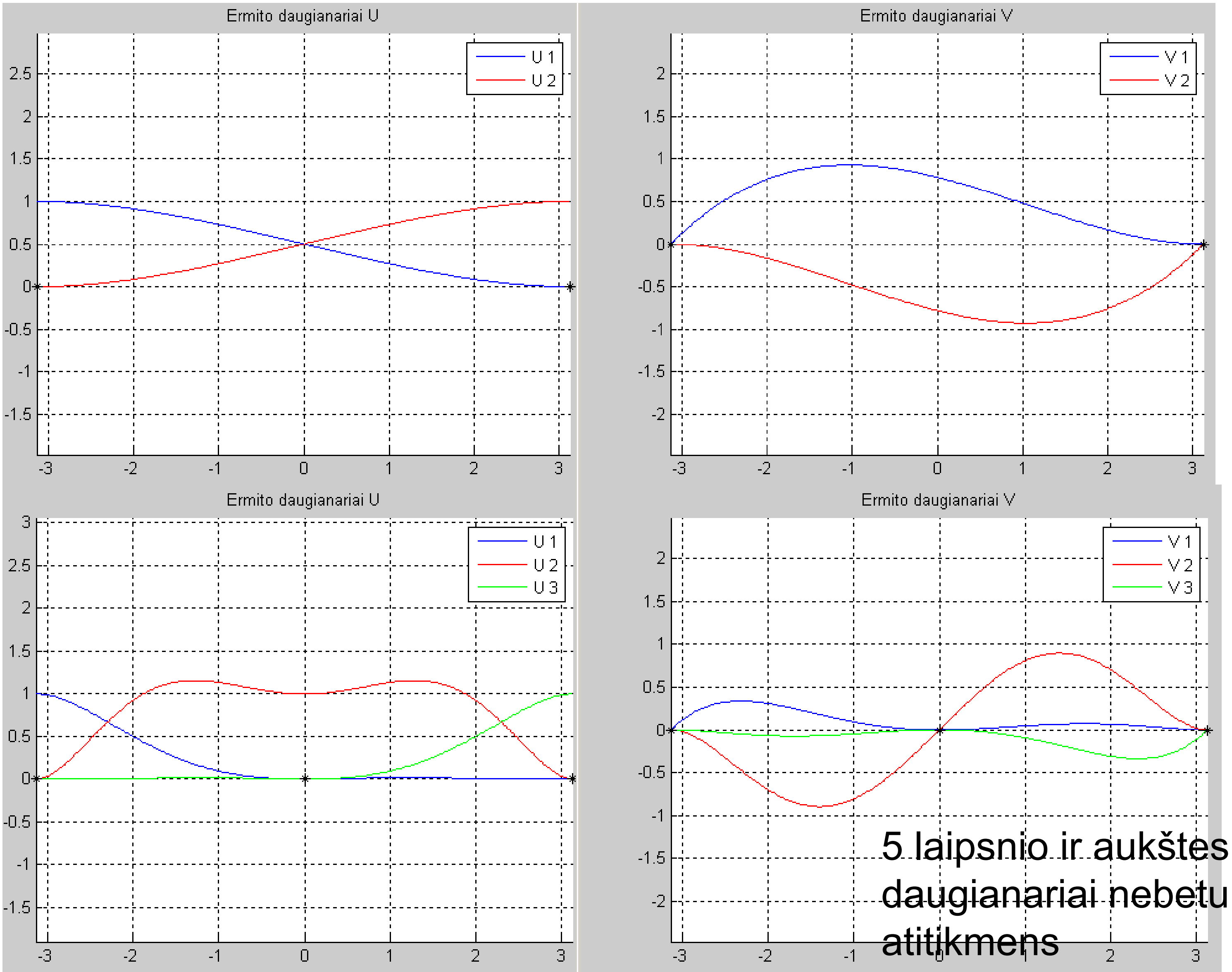
```
function L=Lagrange(X,n,j,x) % Lagranzo daugianaris

      L=1;
      for i=1:n
        if i ~= j, L=L.*(x-X(i))/(X(j)-X(i)); end
      end

return
end
```

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

Ermito daugianarių grafinis vaizdas

$$U_j(x) = (1 - 2L_j'(x_j)(x - x_j))L_j^2(x);$$

$$V_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x), \quad j = 1:n$$



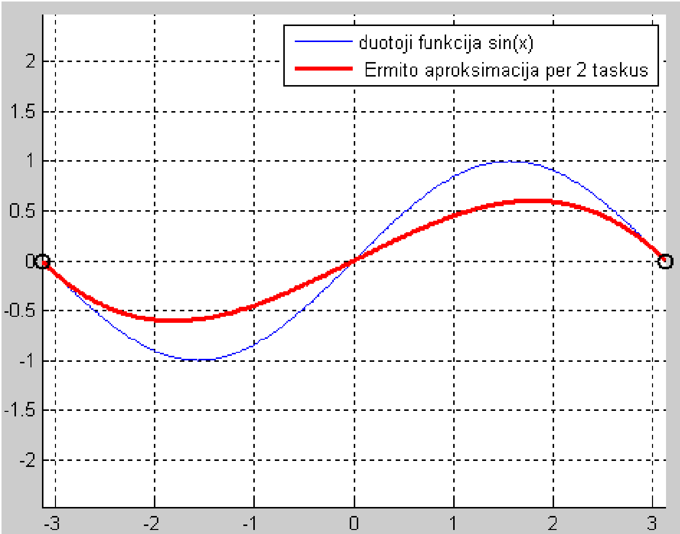
3 laipsnio (n=2)

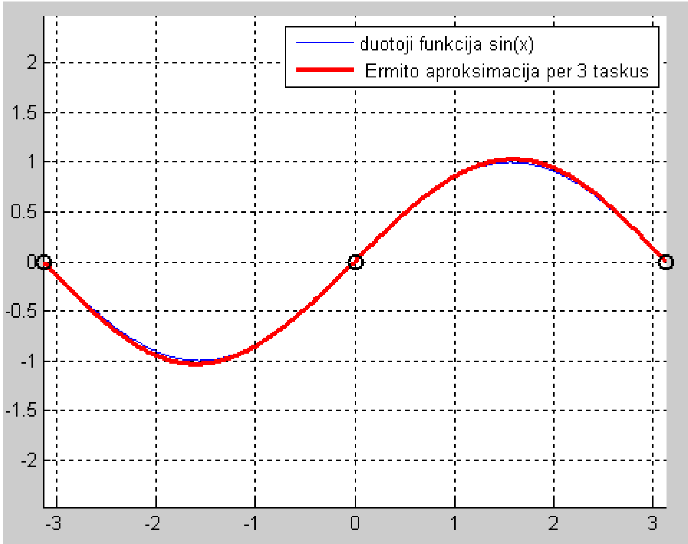
5 laipsnio (n=3)

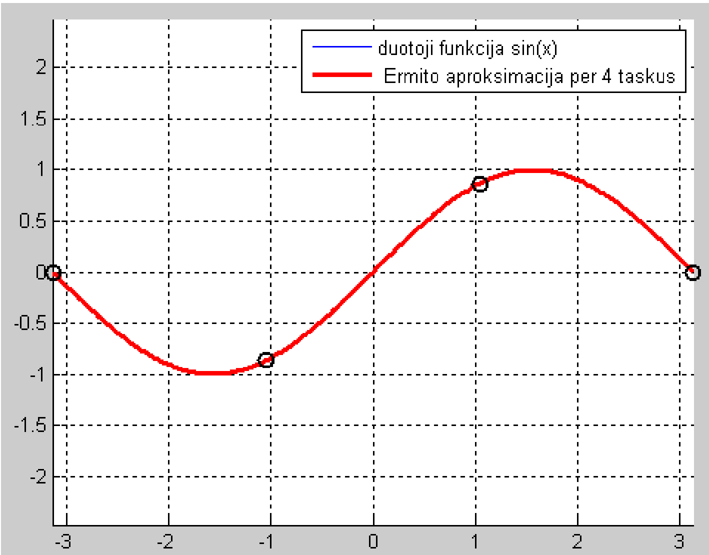
5 laipsnio ir aukštesnių laipsnių daugianariai nebeturi fizikinio atitikmens

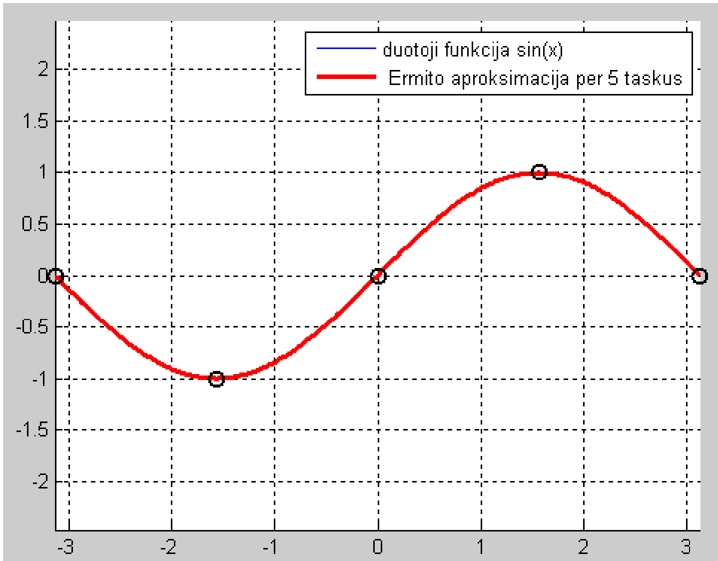
Skirtingų eilių interpoliacija Ermito daugianariais

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(U_j(x) y_j + V_j(x) y_j' \right)$$



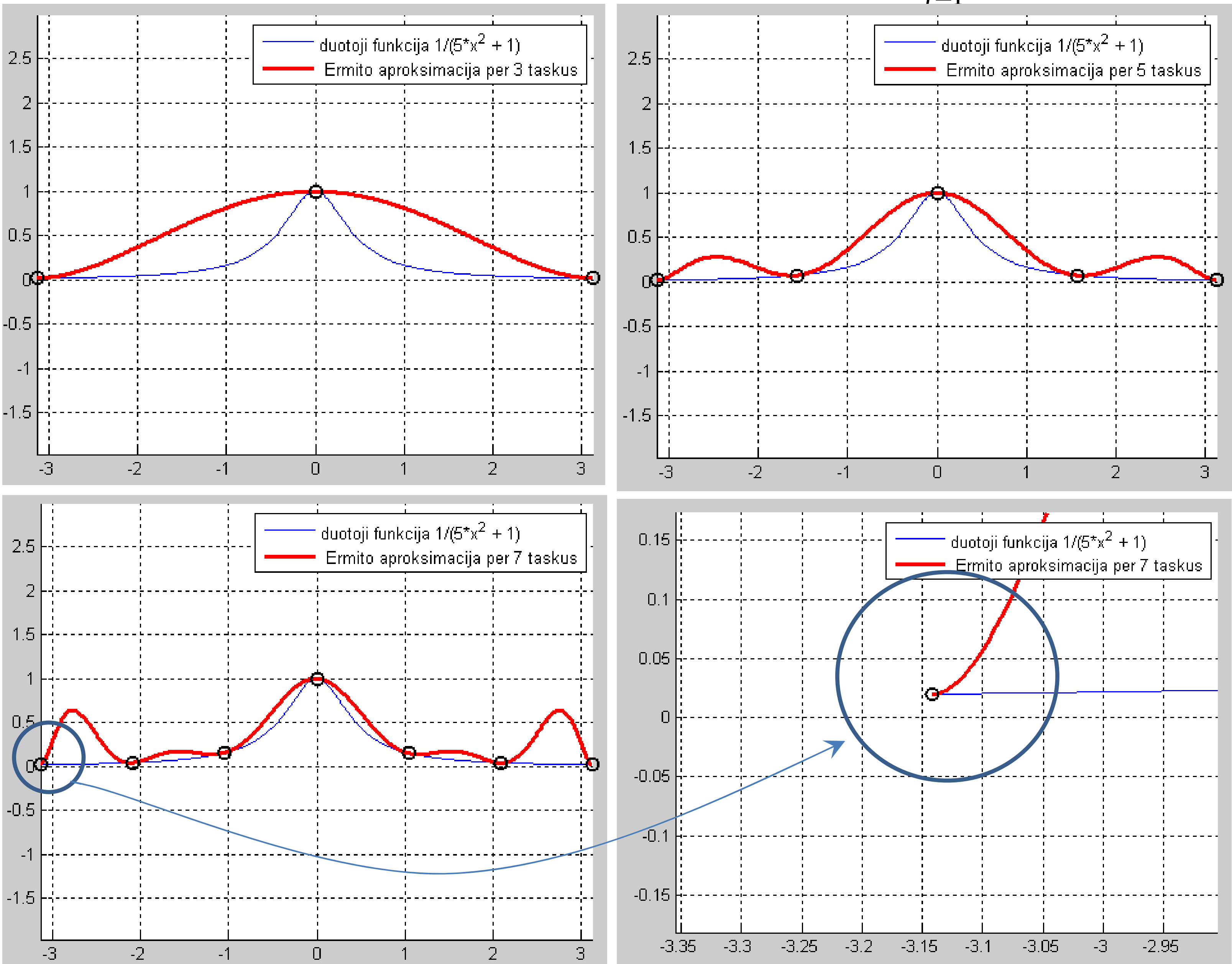






Skirtingų eilių interpoliacija Ermito daugianariais

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\left(U_j(x)y_j+V_j(x)y_j'\right)$$



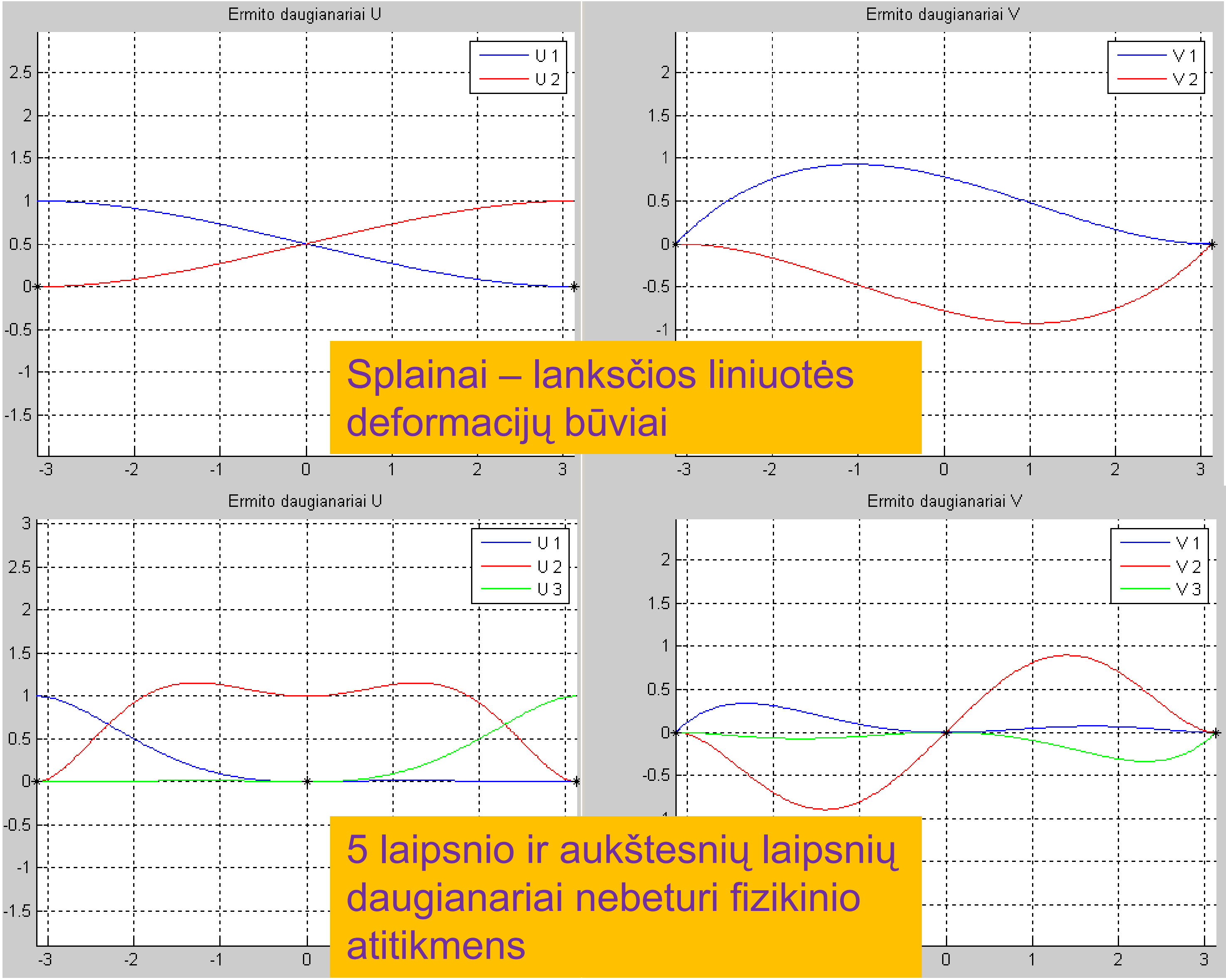
- **Aukštų eilių (t.y. per daugelį interpoliavimo taškų einantys) Ermito daugianariai taikomi retai;**
- **Dažniausiai taikomi 2-os eilės Ermito daugianariai(kubiniai, n=2), kurie interpoliuoja funkcijos reikšmes tarp dviejų gretimų taškų;**
- **Tokiu atveju kiekviename interpoliacijos taške susijungia du skirtingi daugianariai, nustatyti gretimuose intervaluose. Tačiau *sandūra yra glotni*, kadangi interpoliavimo taške daugianarių išvestinių reikšmės sutampa. Tokia interpoliacija dar vadinama *Ermito splainais* ;**

*Spline – lanksti liniuotė. Deformuojamų kūnų mechanikos moksle įrodoma, kad deformuotos liniuotės kreivė yra aprašoma 3 eilės daugianariu. Ermito splainai – tai “liniuotės” kiekviename intervale, kurių liestinės sandūrose sutapdintos. Tačiau tai nėra viena ir ta pati “ilga liniuotė”

Ermito splainai ir Ermito daugianariai

$$U_j(x) = (1 - 2L_j'(x_j)(x - x_j))L_j^2(x);$$

$$V_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x), \quad j = 1:n$$



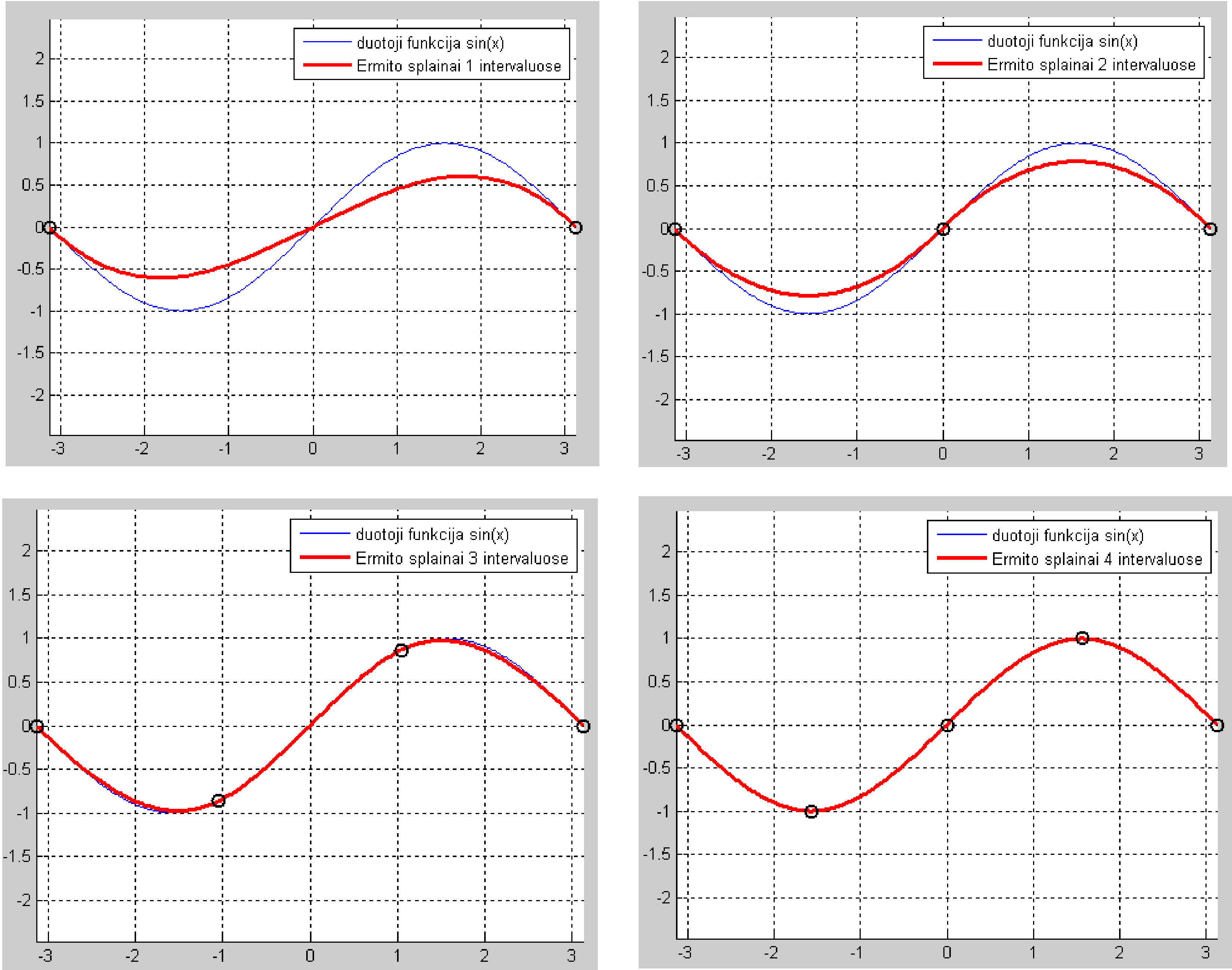
Splainai – lanksčios liniuotės deformacijų būviai

5 laipsnio ir aukštesnių laipsnių daugianariai nebeturi fizikinio atitikmens

3 laipsnio (n=2)

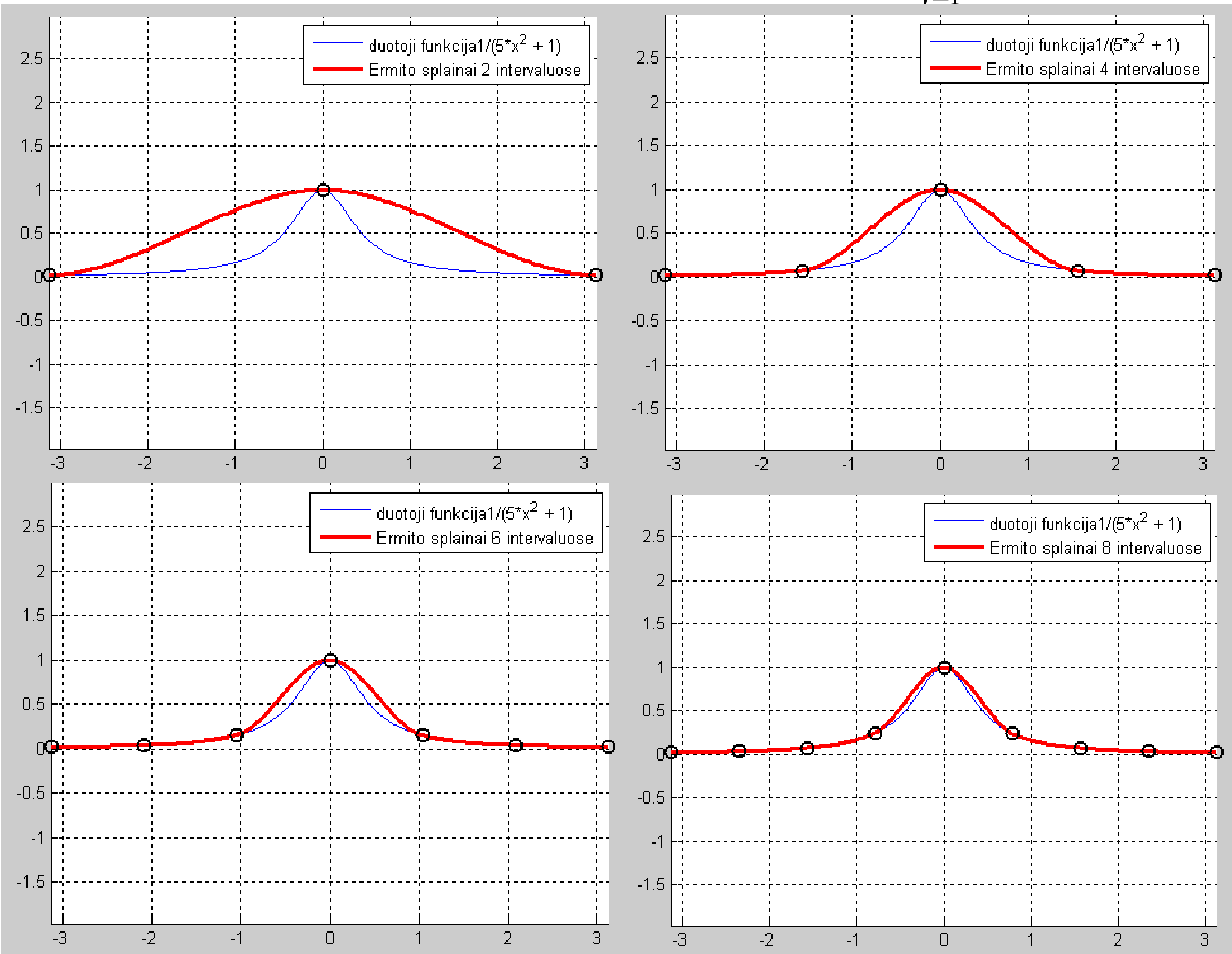
5 laipsnio (n=3)

Interpoliavimas Ermito splainais



Interpoliavimas Ermito splainais

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(U_j(x) y_j + V_j(x) y_j' \right)$$



Funkcijos, interpoliuotos Ermito daugianariais, išvestinė

$$U_j(x) = (1 - 2L_j^{'}(x_j)(x - x_j))L_j^2(x);$$

$$V_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x), \quad j = \overline{1, n}$$

$$\Downarrow$$

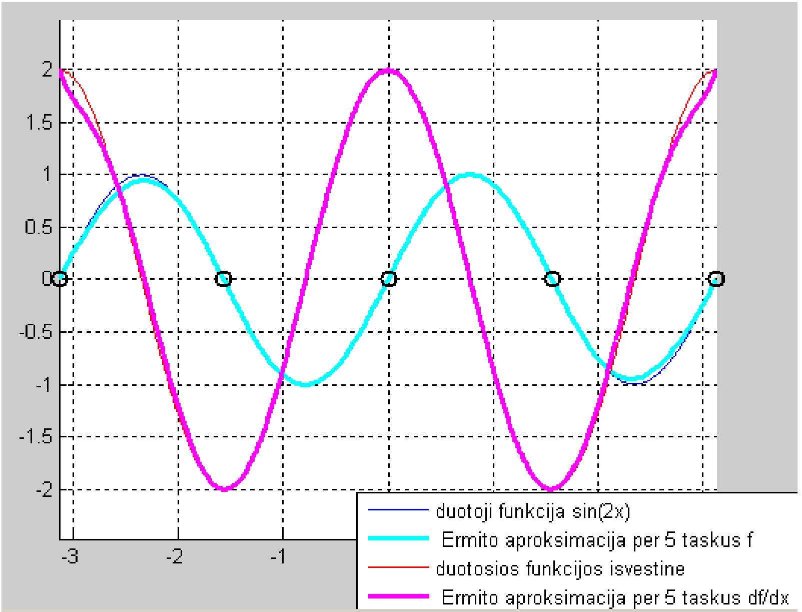
$$U'_j(x) = -2L_j^{'}(x_j)L_j^2(x) + 2(1 - 2L_j^{'}(x_j)(x - x_j))L_j(x)L_j^{'}(x);$$

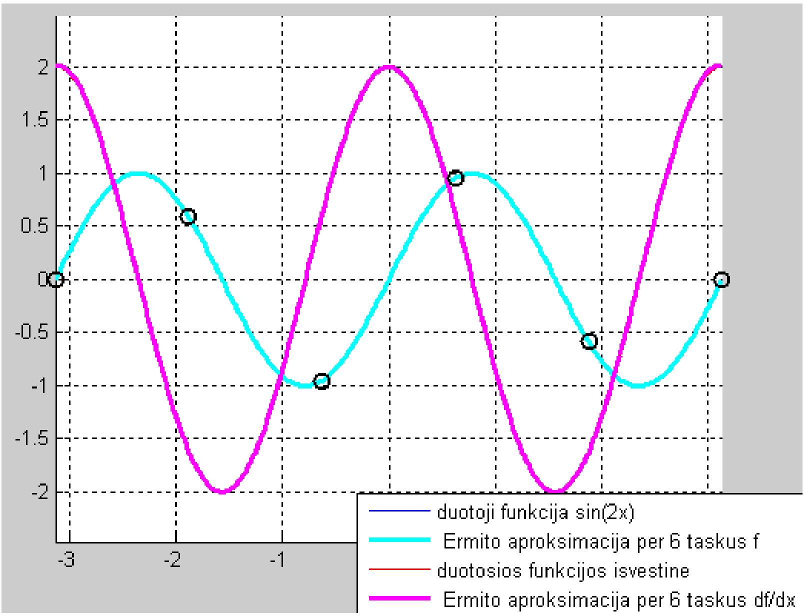
$$V'_j(x) = L_j^2(x) + 2(x - x_j)L_j(x)L_j^{'}(x);$$

$$\Downarrow$$

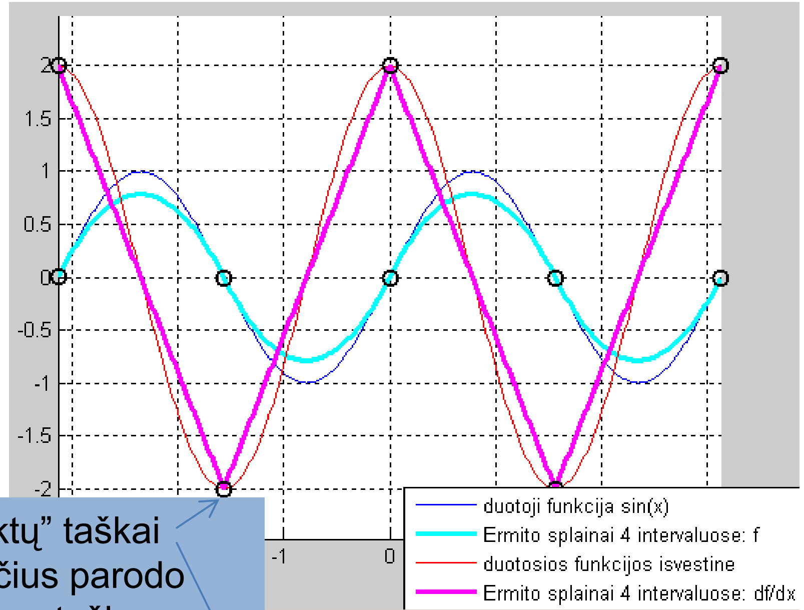
$$f'(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(U'_j(x)y_j + V'_j(x)y_j^{'}\right)$$

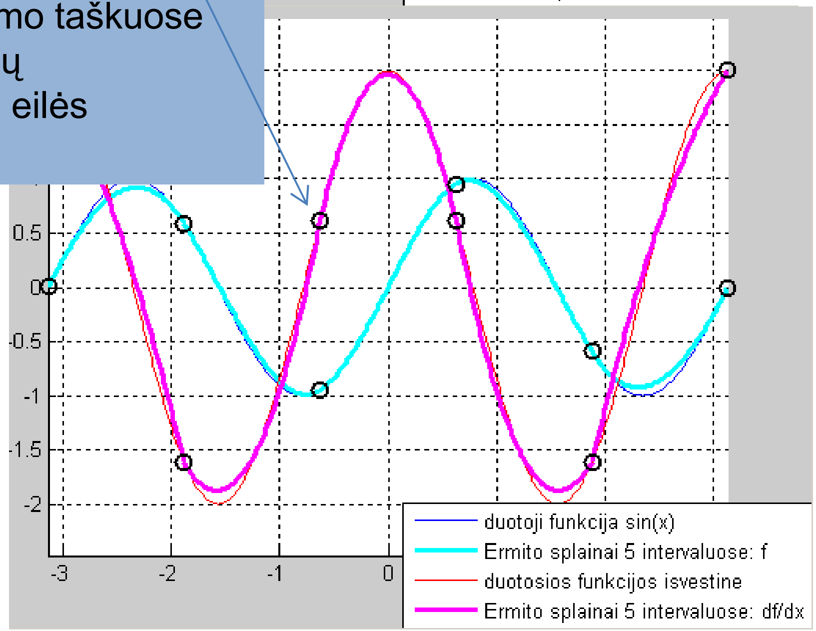
Funkcijos ir jos išvestinės interpoliavimas vienu Ermito daugianariu





Funkcijos ir jos išvestinės interpoliavimas 2 eilės Ermito splainais intervaluose





2 eilės "defektų" taškai
Defekto skaičius parodo kiek susidūrimo taškuose yra nevienodų aukščiausios eilės išvestinių.

Ermito splainai: išvestinų reikšmių nustatymas “pagal nutylėjimą”

- Ermito splainai yra lokalieji. Pakeitus funkcijos arba jos išvestinės reikšmę viename interpoliavimo taške, pakinta tik dviejų su šiuo tašku susietų splainų forma. Sąvokos *Ermito splainas* ir *lokalusis splainas* yra sinonimai. Ermito splainas yra *2 eilės defekto* splainas (t.y.);
- Kadangi kiekviename taške galima valdyti tiek funkcijos, tiek ir jos išvestinės reikšmes, interpoliuojančiai kreivei nesunku suteikti pageidaujamą formą;
- Ne visuomet patogu , kai numatant interpoliavimo taškus kiekvienam jų būtina priskirti ir išvestinės reikšmę ;
- Išvestinės reikšmės “pagal nutylėjimą” gali būti nustatytos, panaudojant Akima formules arba skaitinio diferencijavimo formules, diskretizacijos taškais laikant duotus interpoliavimo taškus

Skaitinio diferencijavimo formulės išvestinių reikšmėms nustatyti

$$f(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f_{i+1}$$

$$f^{'}(x)=\frac{(x-x_i)+(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})+(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f_i+\frac{(x-x_{i-1})+(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f_{i+1}$$

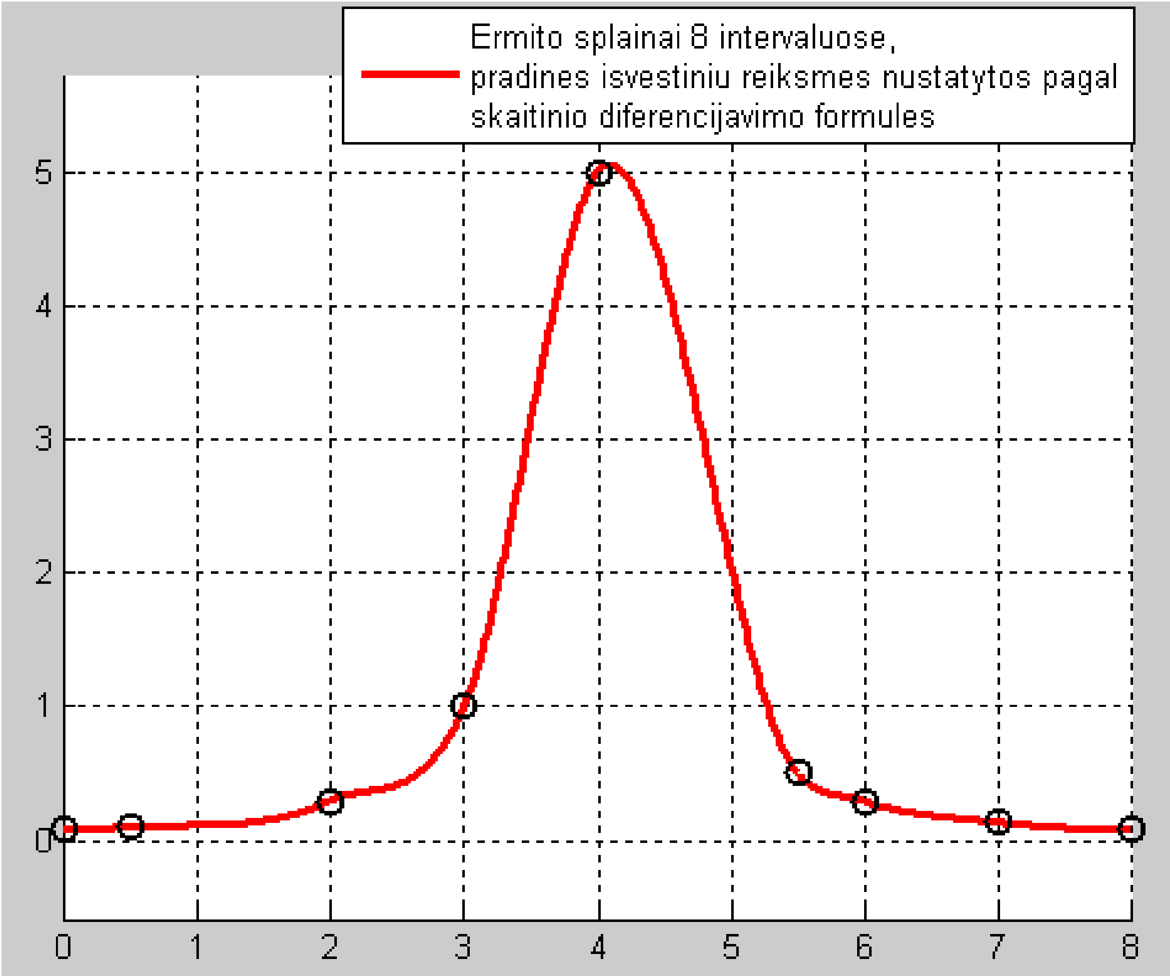
$$f^{'}(x_{i-1}),\ f^{'}(x_i),\ f^{'}(x_{i+1})$$

Kairiajame taške

Vidiniuose taškuose

dešiniajame taške

Interpoliavimas Ermito splainais, panaudojant pagal nutylėjimą apskaičiuotas pradines išvestinių reikšmes



Globalusis interpoliavimas splainais per *n* taškų

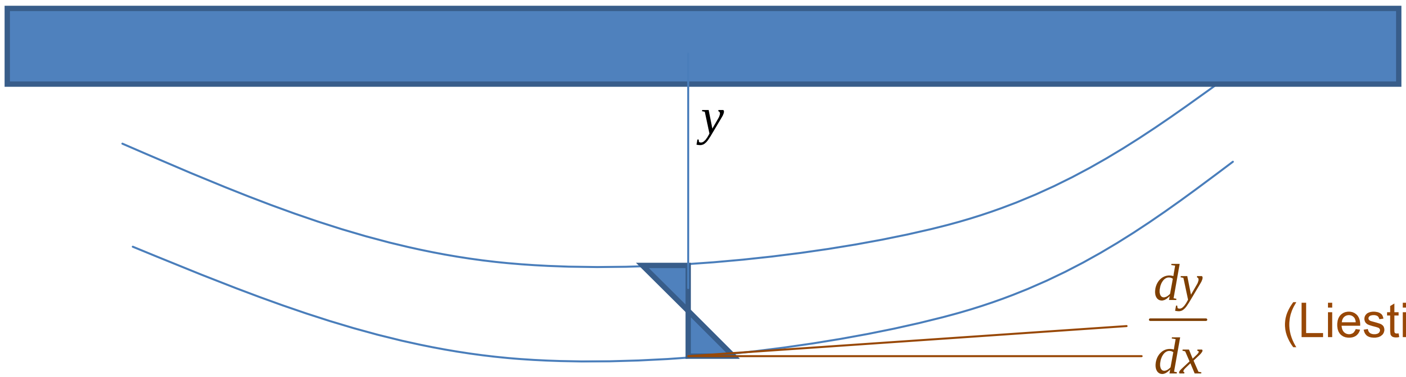
Siekiame sudaryti splainais paremtą glotnią interploliacinę kreivę per n taškų , kai duotos tik interpoliavimo taškų koordintės;

Intervalų sandūrose (t.y. interpoliavimo taškuose) splainams sudaryti reikalingos funkcijos išvestinių reikšmės iš anksto nėra žinomos. Jas apskaičiuojame taip, lyg ta pati “lanksti liniuotė” būtų pravedama per visus interpoliavimo taškus. Todėl splainas primena *fizikine elgsena* paremtą kreivę. Tuo šis interpoliavimo būdas skiriasi nuo *Ermito splainų*;

Koreguojant tam tikro interpoliavimo taško padėtį, interpoliacinės kreivės forma kinta iškart visuose intervaluose. Tai reiškia, kad splainas reaguoja *globaliai*.

Splainų per *n* taškų sudarymo prncipas

- Žinome, kad kiekviename intervale splainas yra 3 eilės(kubinis) daugianaris;
- Intervalų sandūrose (t.y. interpoliavimo taškuose) visuminė kreivė turi išlikti glotni su 1 eilės defektu . Tai reiškia, kad intervalų sandūroje funkcijos išvestinės turi sutapti iki 2 eilės imtinai. Terminas ***splainas*** yra šio ***1 eilės defekto splaino*** sinonimas (prisiminkime, kad Ermito splainų sutapo tik 1 eilės išvestinių reikšmės, tai buvo 2 eilės defekto splainai);

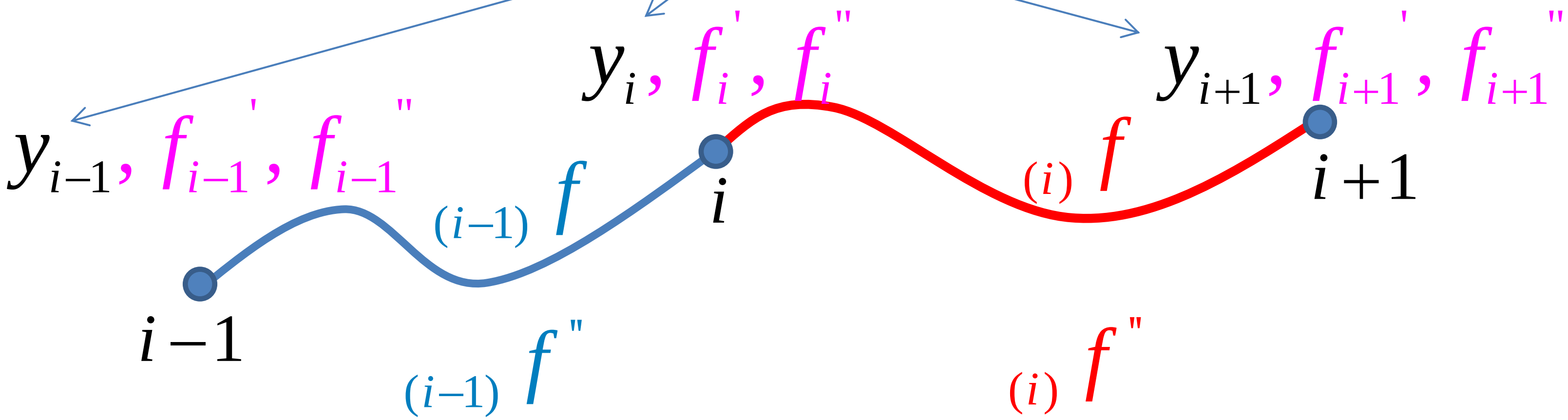


$\frac{dy}{dx}$ (Liestinės kryptis)

$\frac{d^2y}{dx^2}$ **(Kreivumas. Jis nusako įtempimų dydį. Įtempimų pusiausvyra užtikrina mechaninę pusiausvyros būklę)**

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

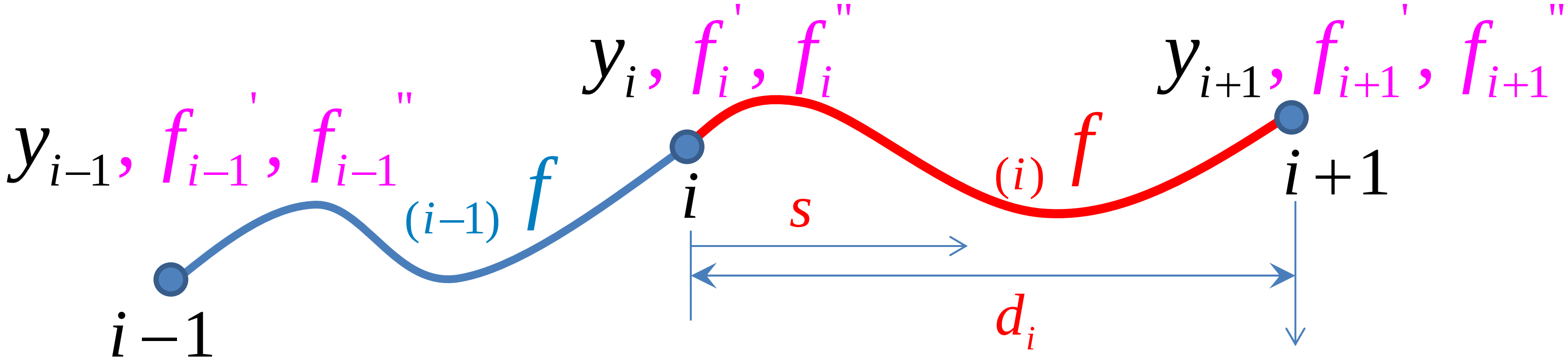
Žinomos tik funkcijos reikšmės



$$ {}^{(i)}f'' = f_i'' \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} $$

antroji kubinio splaino išvestinė
kiekviename intervale yra tiesinė funkcija

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (integruojame antros išvestinės išraišką)



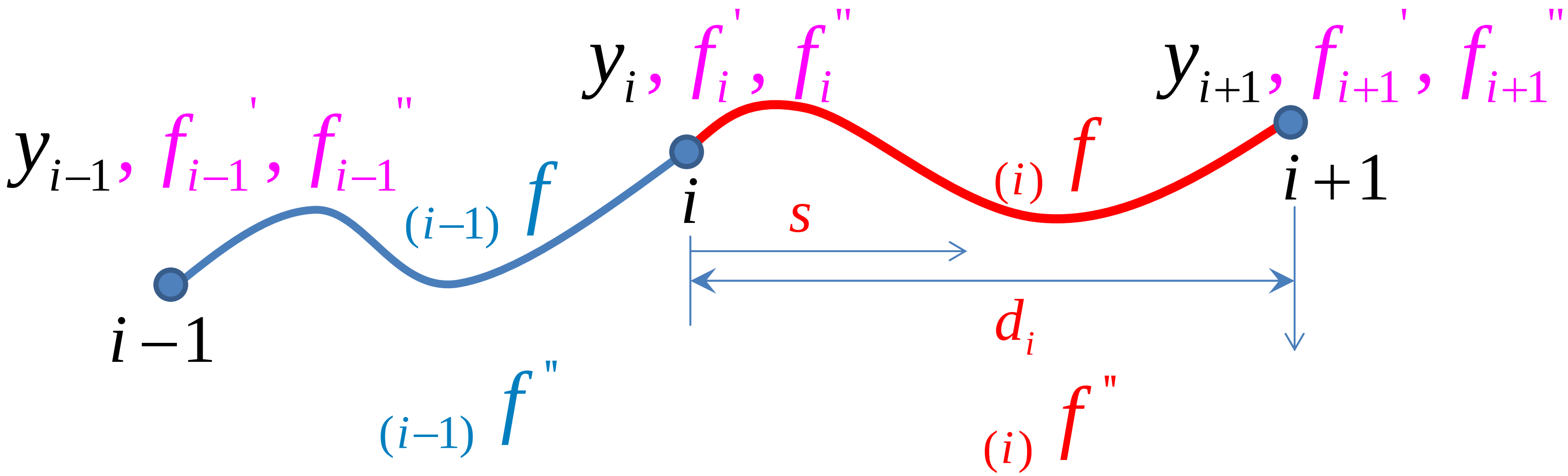
$$_{(i)}f'' = f_i'' \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$_{(i)}f'' = f_i'' \frac{x_{i+1} - x_i - (x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i};$$

$$_{(i)}f'' = f_i'' \left(1 - \frac{s}{d_i}\right) + f_{i+1}'' \frac{s}{d_i};$$

$s = x - x_i; \qquad d_i = x_{i+1} - x_i$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (integruojame antros išvestinės išraišką)

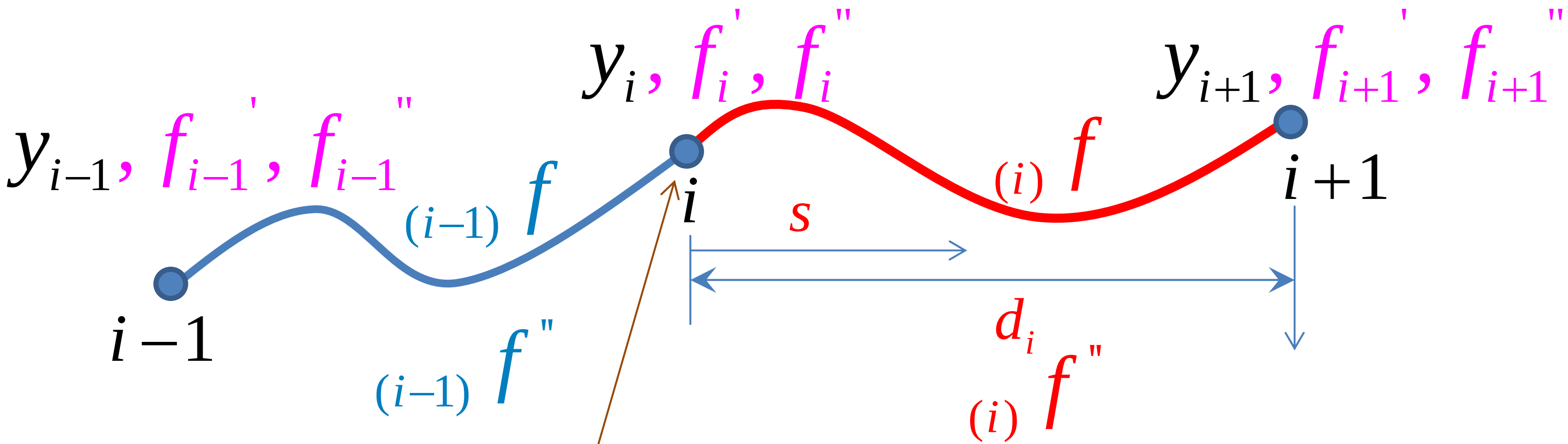


$$_{(i)}f'' = f_i''\left(1-\frac{s}{d_i}\right)+f_{i+1}''\frac{s}{d_i};$$

$$_{(i)}f' = f_i''s - f_i''\frac{s^2}{2d_i}+f_{i+1}''\frac{s^2}{2d_i}+C_1;$$

$$_{(i)}f = f_i''\frac{s^2}{2} - f_i''\frac{s^3}{6d_i}+f_{i+1}''\frac{s^3}{6d_i}+C_1 s+C_2;$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (randame integravimo konstantą C2)

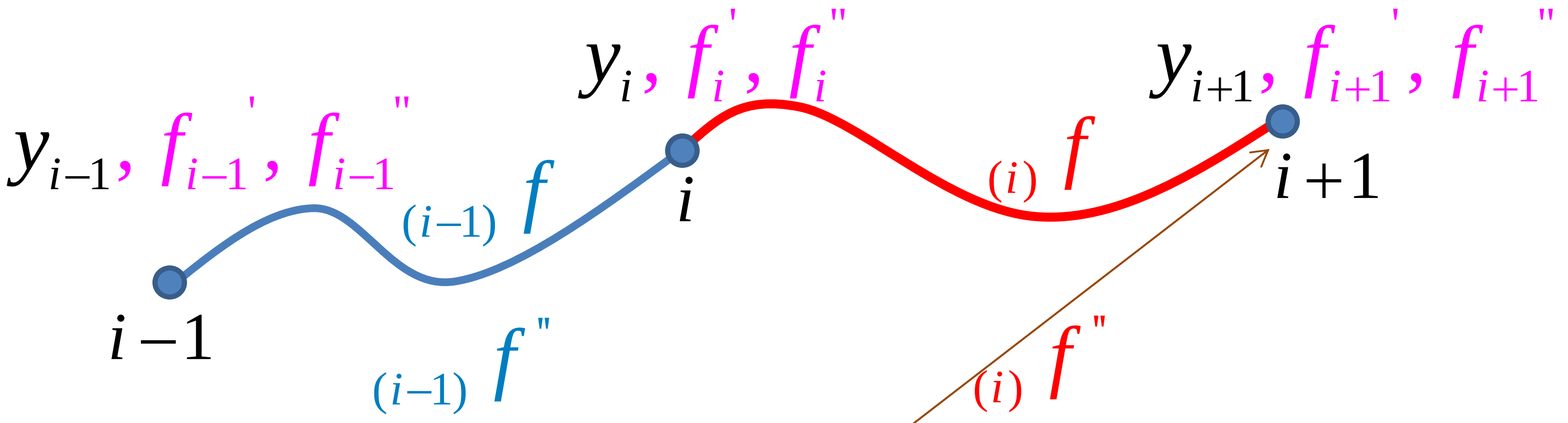


$$ {}_{(i)}f = f_i'' \frac{s^2}{2} - f_i'' \frac{s^3}{6d_i} + f_{i+1}'' \frac{s^3}{6d_i} + C_1 s + C_2; $$

$$ y_i = {}_{(i)}f(0) = C_2; $$

$$ C_2 = y_i $$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (randame integravimo konstantą C1)

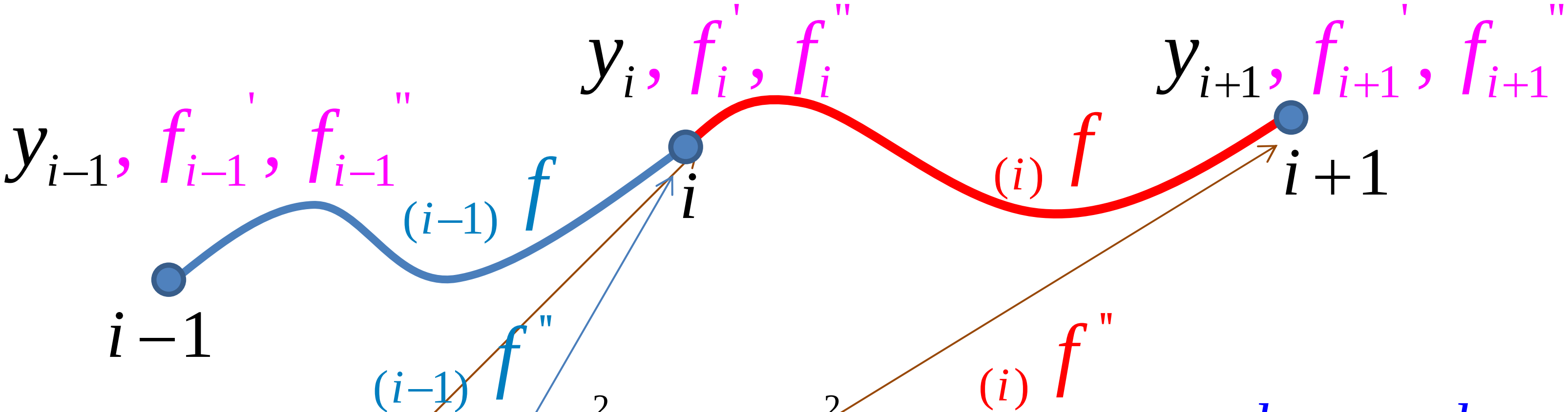


$${}_{(i)}f = f_i''\frac{s^2}{2} - f_i''\frac{s^3}{6d_i} + f_{i+1}''\frac{s^3}{6d_i} + C_1 s + C_2;$$

$$y_{i+1} = {}_{(i)}f(d_i) = f_i''\frac{d_i^2}{2} - f_i''\frac{d_i^2}{6} + f_{i+1}''\frac{d_i^2}{6} + C_1 d_i + y_i;$$

$$C_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} - f_i''\frac{d_i}{3} - f_{i+1}''\frac{d_i}{6}$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (pirmųjų išvestinių išraiškos intervalų galuose)



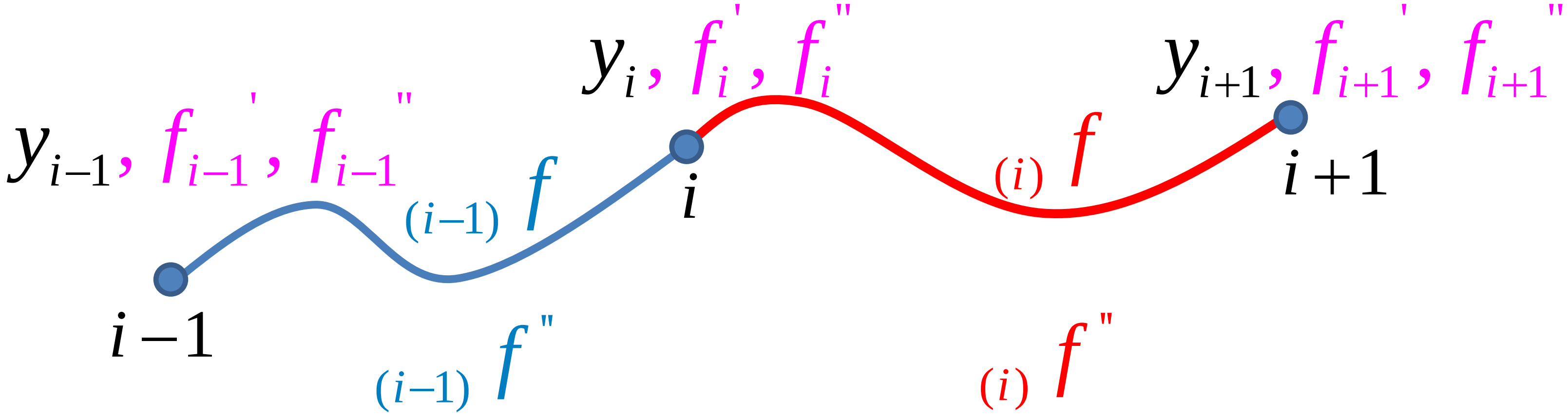
$${}_{(i)}f\,'(s) = f_i^{''}s - f_i^{''}\frac{s^2}{2d_i} + f_{i+1}^{''}\frac{s^2}{2d_i} + \frac{y_{i+1}-y_i}{d_i} - f_i^{''}\frac{d_i}{3} - f_{i+1}^{''}\frac{d_i}{6};$$

$${}_{(i)}f\,'(0) = \frac{y_{i+1}-y_i}{d_i} - f_i^{''}\frac{d_i}{3} - f_{i+1}^{''}\frac{d_i}{6};$$

$${}_{(i)}f\,'(d_i) = f_i^{''}\frac{d_i}{6} + f_{i+1}^{''}\frac{d_i}{3} + \frac{y_{i+1}-y_i}{d_i};$$

$${}_{(i-1)}f\,'(d_{i-1}) = f_{i-1}^{''}\frac{d_{i-1}}{6} + f_i^{''}\frac{d_{i-1}}{3} + \frac{y_i-y_{i-1}}{d_{i-1}};$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (pirmųjų išvestinių reikšmių sulyginimas)

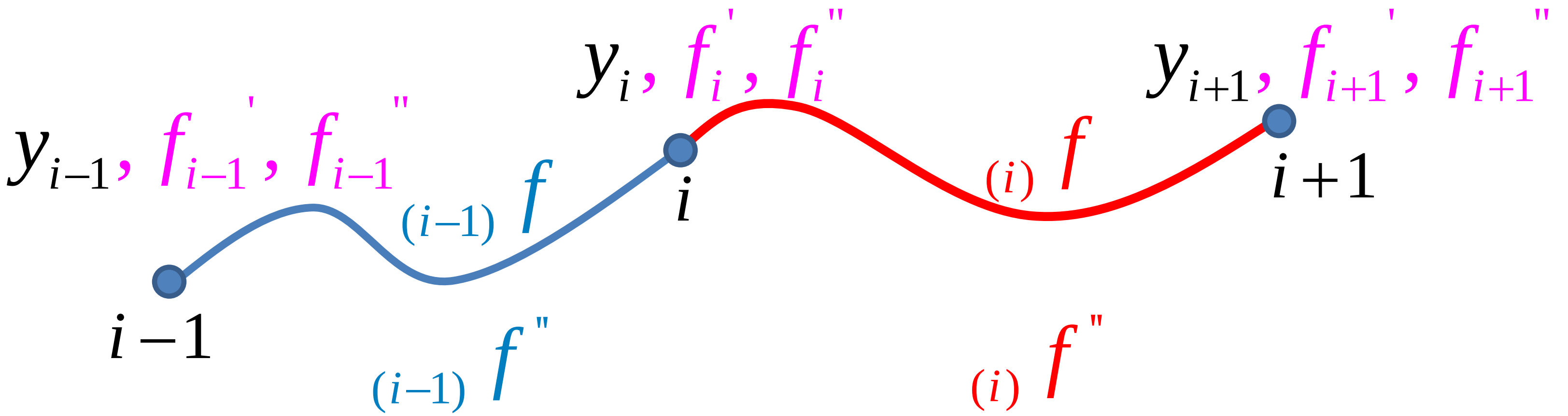


$$_{(i-1)}f'(d_{i-1}) = {}_{(i)}f'(0)$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{d_i} - f_i''\frac{d_i}{3} - f_{i+1}''\frac{d_i}{6} = f_{i-1}''\frac{d_{i-1}}{6} + f_i''\frac{d_{i-1}}{3} + \frac{y_i-y_{i-1}}{d_{i-1}};$$

$$f_{i-1}''\frac{d_{i-1}}{6} + f_i''\frac{d_{i-1}+d_i}{3} + f_{i+1}''\frac{d_i}{6} = \frac{y_{i+1}-y_i}{d_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{d_{i-1}}$$

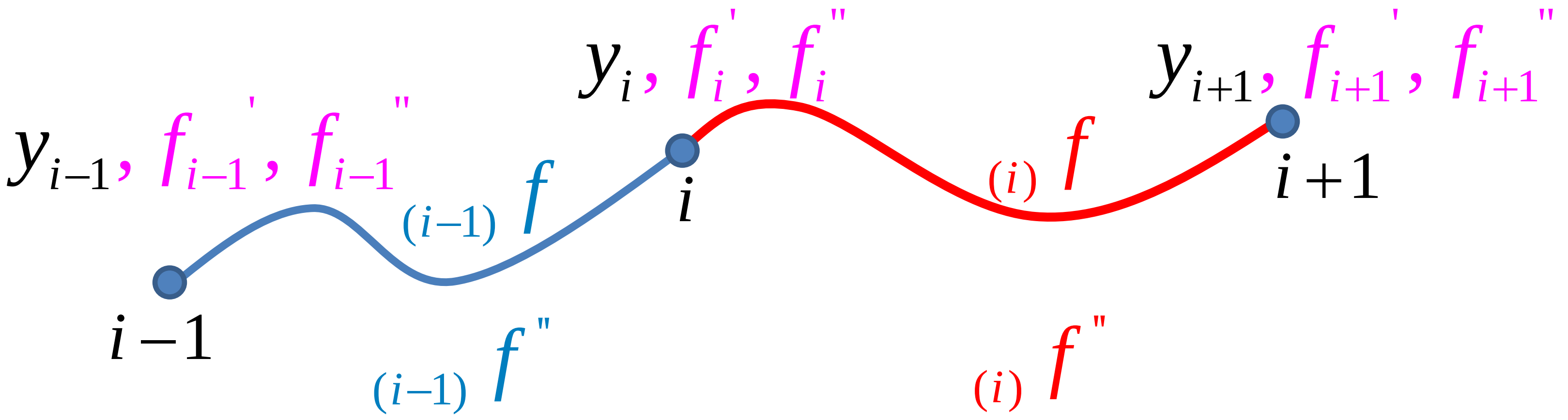
Splaino matematinės išraiškos sudarymas (pagrindinė lygčių sistema)



$$f_{i-1}''\frac{d_{i-1}}{6}+f_i''\frac{d_{i-1}+d_i}{3}+f_{i+1}''\frac{d_i}{6}=\frac{y_{i+1}-y_i}{d_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{d_{i-1}},\quad i=2:(n-1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d_1}{6} & \frac{d_1+d_2}{3} & \frac{d_2}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{6} & \frac{d_2+d_3}{3} & \frac{d_3}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{d_{n-2}}{6} & \frac{d_{n-2}+d_{n-1}}{3} & \frac{d_{n-1}}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \vdots \\ f_n'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{y_3-y_2}{d_2}-\frac{y_2-y_1}{d_1} \\ \frac{y_4-y_3}{d_3}-\frac{y_3-y_2}{d_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \end{Bmatrix}$$

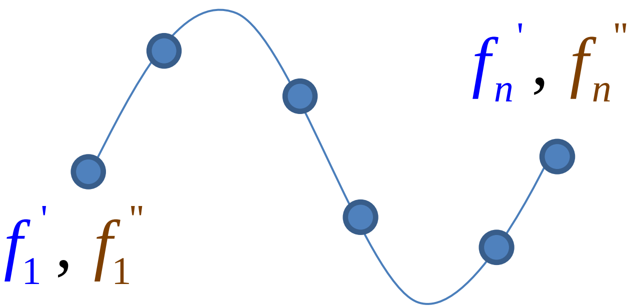
Splaino matematinės išraiškos sudarymas (splainas laisvais galais)



$$f_1'' = f_n'' = 0$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{\frac{d_1}{6}} & \frac{d_1+d_2}{3} & \frac{d_2}{6} & 0 & \cdots & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \frac{d_2}{6} & \frac{d_2+d_3}{3} & \frac{d_3}{6} & \cdots & \cancel{0} \\ \cancel{\vdots} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\cdots & \cancel{\vdots} \\ \cancel{0} & 0 & \cdots & \frac{d_{n-2}}{6} & \frac{d_{n-2}+d_{n-1}}{3} & \cancel{\frac{d_{n-1}}{6}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cancel{f_1''} \\ f_2'' \\ f_3'' \\ \vdots \\ f_{n-1}'' \\ \cancel{f_n''} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{y_3-y_2}{d_2} - \frac{y_2-y_1}{d_1} \\ \frac{y_4-y_3}{d_3} - \frac{y_3-y_2}{d_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \end{Bmatrix}$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (periodinis splainas)



$$_{(1)}\ f\,'(0) =_{(n-1)} f\,'(d_{n-1})$$

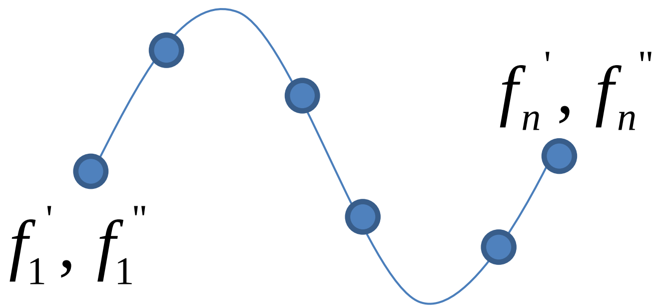
$$_{(i)}\ f\,'(0) = \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} - f_i^{''}\frac{d_i}{3} - f_{i+1}^{''}\frac{d_i}{6};$$

$$_{(i)}\ f\,'(d_i) = f_i^{''}\frac{d_i}{6} + f_{i+1}^{''}\frac{d_i}{3} + \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i};$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1^{''}\dfrac{d_1}{3} + f_2^{''}\dfrac{d_1}{6} + f_{n-1}^{''}\dfrac{d_{n-1}}{6} + f_n^{''}\dfrac{d_{n-1}}{3} = \dfrac{y_2 - y_1}{d_1} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{d_{n-1}}; \\ f_1^{''} - f_n^{''} = 0 \end{array}}$$

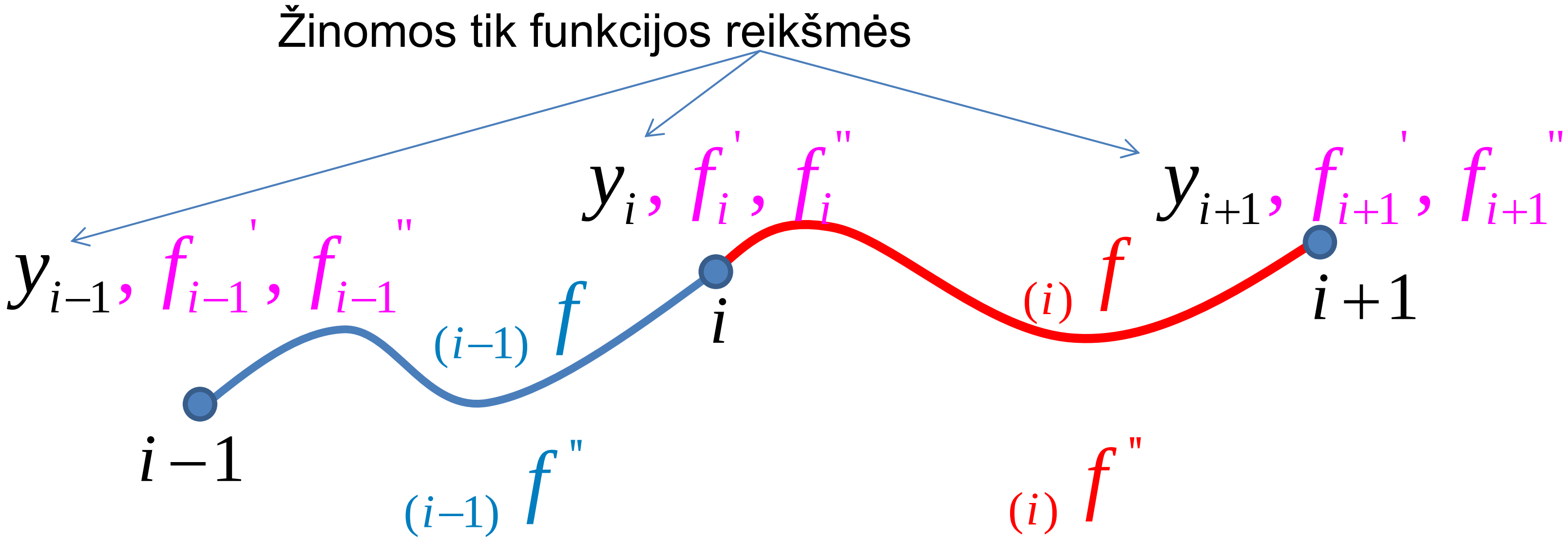
šios lygtys turi būti sprendžiamos drauge su pagrindine splaino lygčių sistema

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (periodinis splainas)



$$
\begin{bmatrix}
\frac{d_1}{6} & \frac{d_1+d_2}{3} & \frac{d_2}{6} & & & & & \\
 & \frac{d_2}{6} & \frac{d_2+d_3}{3} & \frac{d_3}{6} & & & \mathbf{0} & \\
 & & \frac{d_3}{6} & \frac{d_3+d_4}{3} & \frac{d_4}{6} & & & \\
 & \mathbf{0} & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \frac{d_{n-2}}{6} & \frac{d_{n-2}+d_{n-1}}{3} & \frac{d_{n-1}}{6} \\
\frac{d_1}{3} & \frac{d_1}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d_{n-1}}{6} & \frac{d_{n-1}}{3} \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \\ \vdots \\ f_{n-1}'' \\ f_n''
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\frac{y_3-y_2}{d_2}-\frac{y_2-y_1}{d_1} \\
\frac{y_4-y_3}{d_3}-\frac{y_3-y_2}{d_2} \\
\frac{y_5-y_4}{d_4}-\frac{y_4-y_3}{d_3} \\
\vdots \\
\frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \\
\frac{y_2-y_1}{d_1}-\frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}} \\
0
\end{Bmatrix}
$$

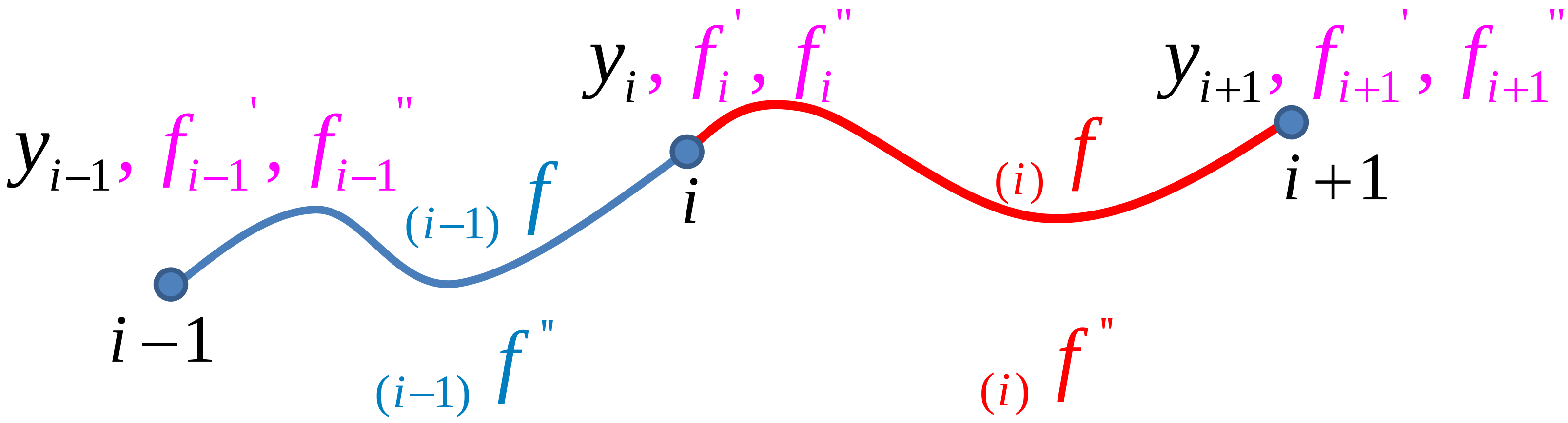
Įtemptieji splainai



$$\left({}_{(i)}f'' - \sigma^2 \, {}_{(i)}f\right) = (f_i'' - \sigma^2 y_i)\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} + (f_{i+1}'' - \sigma^2 y_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

- **Įtemptųjų splainų fizikinė prasmė yra išilgai įtempta lanksti liniuotė, kai išilginės jėgos dydis i segmente yra** σ_i
- **Splaino funkcijos išraiška gaunama, sprendžiant diferencialinę lygtį.** (Prisiminkime, kad neįtempto splaino atveju pakako du kartus suintegruoti dešiniąją pusę)

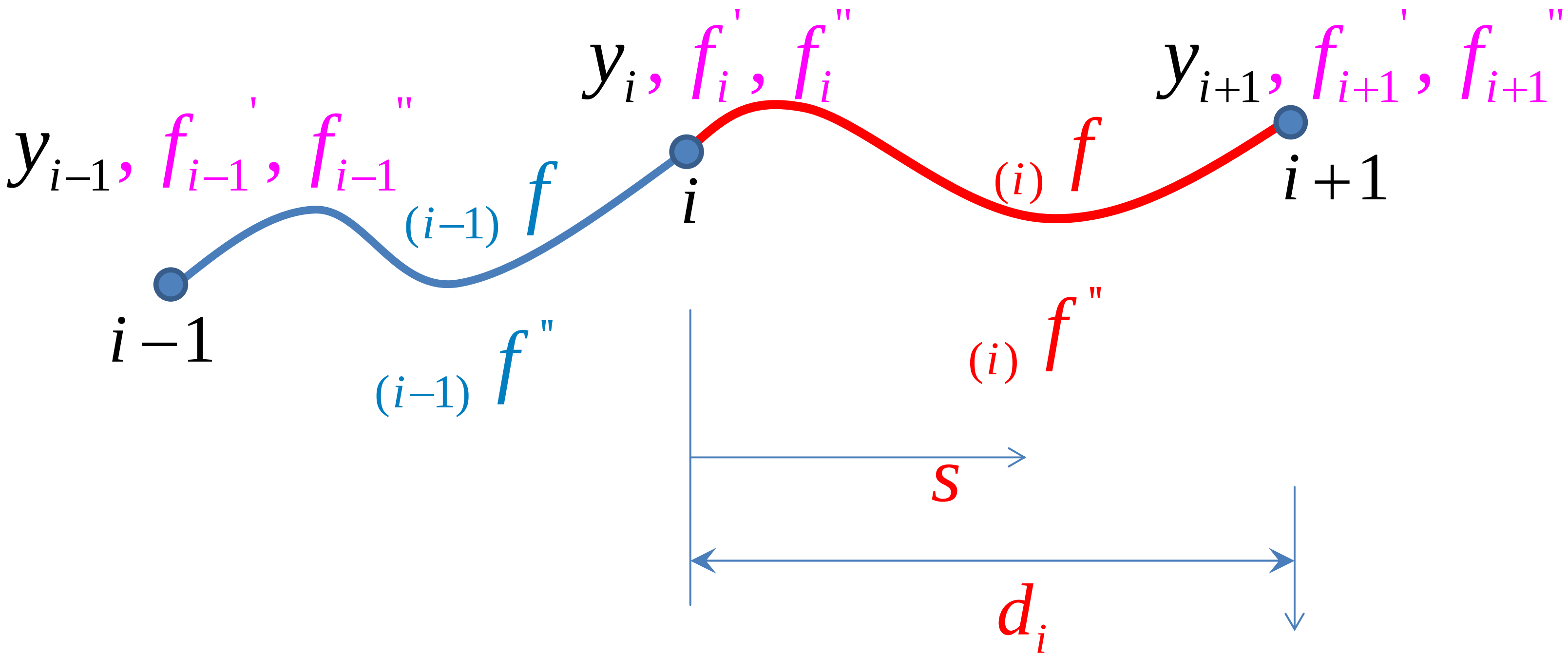
Įtemptųjų splainų lygčių sistema (“laisvi” galai)



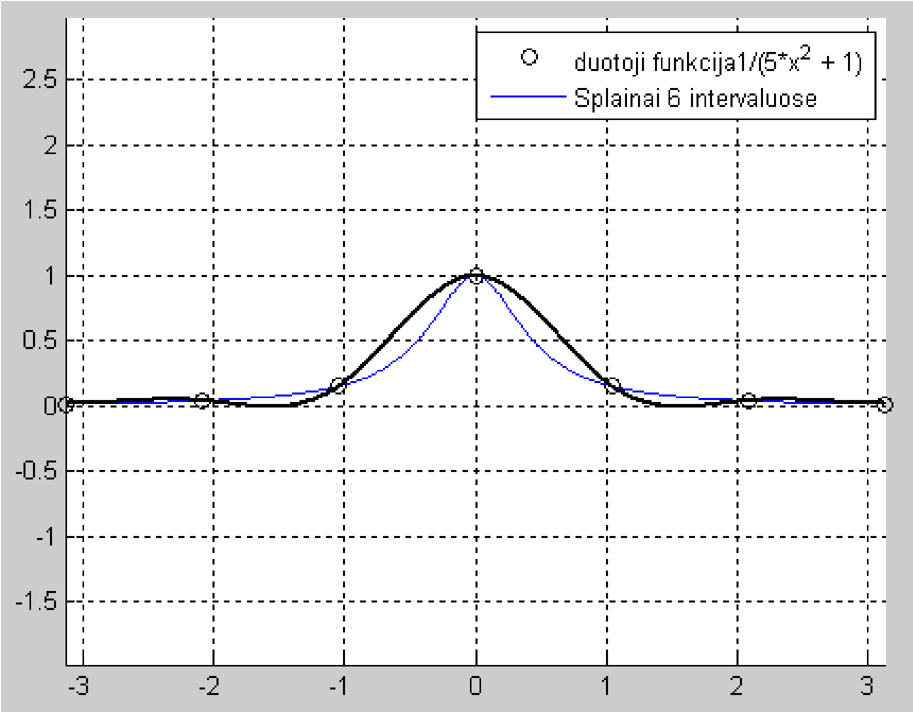
$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sigma^2 d_1}-\frac{1}{\sigma\sinh(\sigma d_1)} & \frac{\cosh(\sigma d_1)}{\sigma\sinh(\sigma d_1)}+\frac{\cosh(\sigma d_2)}{\sigma\sinh(\sigma d_2)}-\frac{1}{\sigma^2 d_1}-\frac{1}{\sigma^2 d_2} & \frac{1}{\sigma^2 d_2}-\frac{1}{\sigma\sinh(\sigma d_2)} & & & & \\
& \frac{1}{\sigma^2 d_2}-\frac{1}{\sigma\sinh(\sigma d_2)} & \frac{\cosh(\sigma d_2)}{\sigma\sinh(\sigma d_2)}+\frac{\cosh(\sigma d_3)}{\sigma\sinh(\sigma d_3)}-\frac{1}{\sigma^2 d_2}-\frac{1}{\sigma^2 d_3} & \frac{1}{\sigma^2 d_3}-\frac{1}{\sigma\sinh(\sigma d_3)} & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & \frac{1}{\sigma^2 d_{n-2}}-\frac{1}{\sigma\sinh(\sigma d_{n-2})} & \frac{\cosh(\sigma d_{n-2})}{\sigma\sinh(\sigma d_{n-2})}+\frac{\cosh(\sigma d_{n-1})}{\sigma\sinh(\sigma d_{n-1})}-\frac{1}{\sigma^2 d_{n-2}}-\frac{1}{\sigma^2 d_{n-1}} & \frac{1}{\sigma^2 d_{n-1}}-\frac{1}{\sigma\sinh(\sigma d_{n-1})} \\
\frac{1}{\sigma^2} & & & & & & \\
& & & & & & \frac{1}{\sigma^2}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} f_1^{''} \\ f_2^{''} \\ \vdots \\ f_n^{''} \end{Bmatrix} =
$$

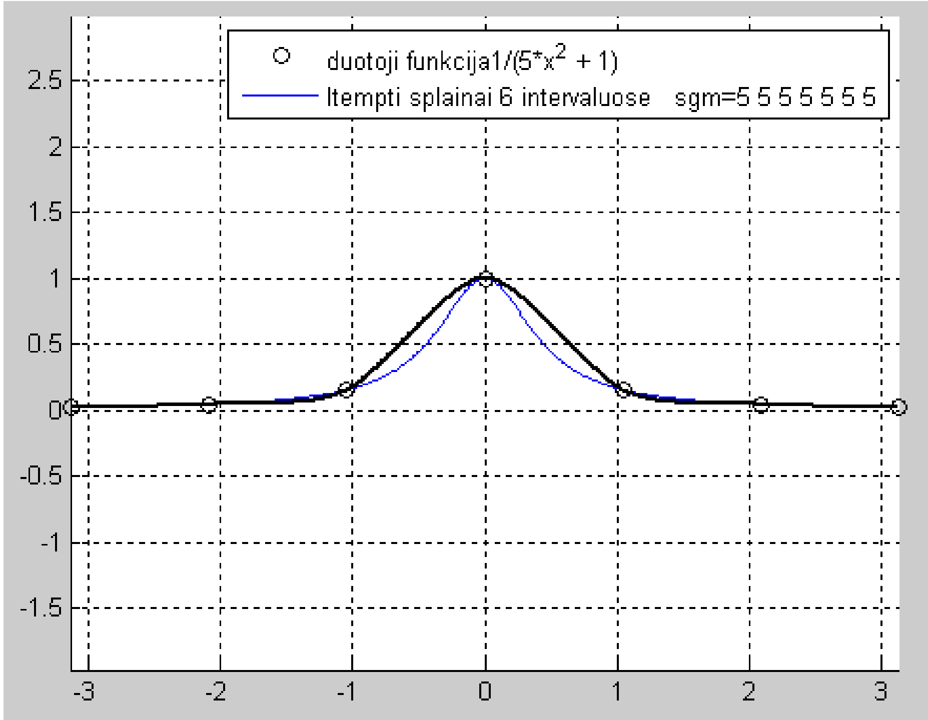
$$
= \begin{Bmatrix}
\frac{y_3-y_2}{d_2}-\frac{y_2-y_1}{d_1} \\
\frac{y_4-y_3}{d_3}-\frac{y_3-y_2}{d_2} \\
\vdots \\
\frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \\
y_1 \\
y_n
\end{Bmatrix}
$$

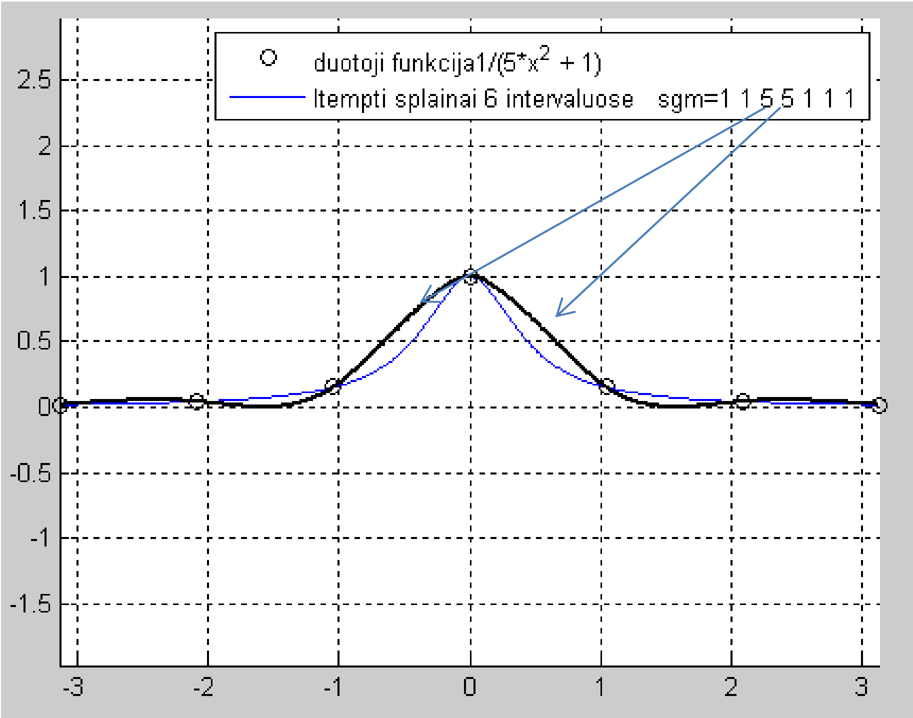
Įtemptųjų splainų išraiška

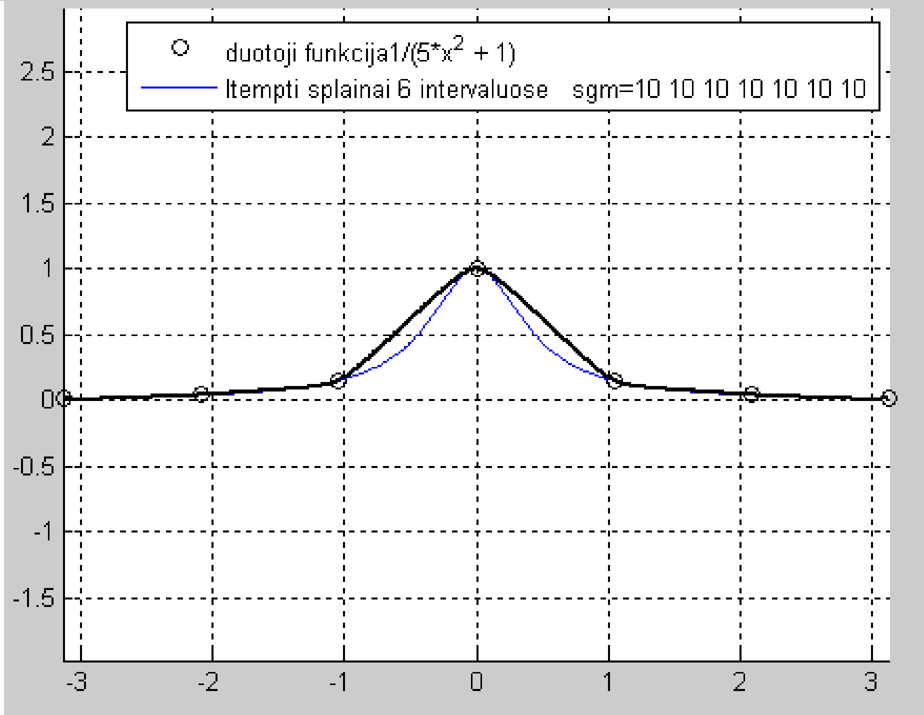


$$ {}_{(i)}f = \frac{f''_i}{\sigma_i^2}\frac{\sinh(\sigma_i(d_i - s))}{\sinh(\sigma_i d_i)} + \left(y_i - \frac{f''_i}{\sigma_i^2}\right)\frac{d_i - s}{d_i} + \frac{f''_{i+1}}{\sigma_i^2}\frac{\sinh(\sigma_i s)}{\sinh(\sigma_i d_i)} + \left(y_{i+1} - \frac{f''_{i+1}}{\sigma_i^2}\right)\frac{s}{d_i} $$


duotoji funkcija1/(5*x^2 + 1)
Splainai 6 intervaluose
2.5 2 1.5 1 0.5 0 -0.5 -1 -1.5
-3 -2 -1 0 1 2 3


duotoji funkcija1/(5*x^2 + 1)
Itempti splainai 6 intervaluose sgm=5 5 5 5 5 5 5
2.5 2 1.5 1 0.5 0 -0.5 -1 -1.5
-3 -2 -1 0 1 2 3


duotoji funkcija1/(5*x^2 + 1)
Itempti splainai 6 intervaluose sgm=1 1 5 5 1 1 1
2.5 2 1.5 1 0.5 0 -0.5 -1 -1.5
-3 -2 -1 0 1 2 3


duotoji funkcija1/(5*x^2 + 1)
Itempti splainai 6 intervaluose sgm=10 10 10 10 10 10 10
2.5 2 1.5 1 0.5 0 -0.5 -1 -1.5
-3 -2 -1 0 1 2 3