Funkcijų aproksimavimas

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115/Skaitiniai inzinerijos metodai su MATLAB (KP RG RB)2009

F9.pdf

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115 /Skaitiniai inzinerijos metodai(RB) 2006

I.3.pdf

Funkcijų aproksimavimas.Uždavinio formuluotė

Aproksimavimas – tai funkcijos, kurios reikšmės aproksimavimo taškuose būtų *kiek galima mažiau nutolusios* nuo duotųjų reikšmių, radimas.

1.Kreivė $y=f(x)$ neprivalo praeiti per duotus taškus (x_i, y_i), t. y. $f(x_i)=y_i$, $i=1, 2, ..., n$;

2.funkcijos $f(x)$ analitinė išraiška neturi būti labai sudėtinga;

3.funkcija $f(x)$ turi būti nesunkiai integruojama ir diferencijuojama;

4.4) funkcija $f(x)$ turi būti nesunkiai surandama (pvz., jos parametrai apskaičiuojami pagal žinomas formules, arba sprendžiant tiesinių lygčių sistemą).

Funkcijų aproksimavimas *mažiausių kvadratų* metodu

Taškų seka, kurią reikia aproksimuoti: $\left(x_i, y_i\right), \quad i = 1, \ldots, n$

$$\Psi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(f\left(x_j\right) - y_j\right)^2$$

Aproksimacijos kokybės įverčio funkcija

ieškoma funkcija

$$\min_f \Psi$$

Aproksimavimas daugianariais *vienanarių bazėje*

Taškų seka, kurią reikia aproksimuoti: $(x_i, y_i)\ , \quad i = 1, \ldots, n$

Duotų taškų skaičius ir aproksimuojančių funkcijų skaičius gali nesutapti

Aproksimuojančios funkcijos ieškosime parinktų bazinių funkcijų tiesinės kombinacijos pavidale

$$f(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \ldots & g_{m-1}(x) & g_m(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ c_m \end{Bmatrix} = [\mathbf{g}(x)]\{\mathbf{c}\}$$

Bazinės funkcijos

koeficientai

Aproksimavimo kokybės įverčio funkcija užrašoma matricomis

$$f\left(x_j\right)-y_j$$

$$\begin{Bmatrix} f(x_1)-y_1 \\ f(x_2)-y_2 \\ \vdots \\ f(x_n)-y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \cdots & g_m(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \cdots & g_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \cdots & g_m(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]_{n\times m}\{\mathbf{c}\}_{n\times 1} - \{\mathbf{y}\}_{n\times 1}$$

$$\Psi = \frac{1}{2}\left([\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\}-\{\mathbf{y}\}\right)^T\left([\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\}-\{\mathbf{y}\}\right)$$

ieškomi koeficientai

Aproksimavimo kokybės įverčio funkcijos minimumo sąlyga:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \{\mathbf{c}\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial c_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \Psi}{\partial c_m} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \{\mathbf{c}\}} = \frac{\partial}{\partial \{\mathbf{c}\}} \left(\frac{1}{2} \left([\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} - \{\mathbf{y}\} \right)^T \left([\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} - \{\mathbf{y}\} \right) \right) =$$

$$= \left([\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} - \{\mathbf{y}\} \right)^T \frac{\partial}{\partial \{\mathbf{c}\}} \left([\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} - \{\mathbf{y}\} \right) = \left([\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} - \{\mathbf{y}\} \right)^T [\mathbf{G}];$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \{\mathbf{c}\}} \right)^T = [\mathbf{G}]^T [\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} - [\mathbf{G}]^T \{\mathbf{y}\} = 0;$$

$$\left(\left([\mathbf{G}]^T \right)_{m \times n} [\mathbf{G}]_{n \times m} \right)_{m \times m} \{\mathbf{c}\}_{m \times 1} = \left([\mathbf{G}]^T \right)_{m \times n} \{\mathbf{y}\}_{n \times 1}$$

Aproksimuojančios funkcijos pavaizdavimas

Vaizdavimo taškų abscisės: $x_0,\ x_0+\Delta x, \dots,\ x_0+(N-1)\Delta x$

N taškų

$$\left[\tilde{\mathbf{G}}\right]_{N\times m}=\begin{bmatrix} g_1(x_0) & g_2(x_0) & \cdots & g_m(x_0) \\ g_1(x_0+\Delta x) & g_2(x_0+\Delta x) & \cdots & g_m(x_0+\Delta x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_0+(N-1)\Delta x) & g_2(x_0+(N-1)\Delta x) & \cdots & g_m(x_0+(N-1)\Delta x) \end{bmatrix}$$

Vaizdavimo taškų ordinačių vektorius-stulpelis : $\left[\tilde{\mathbf{G}}\right]\{\mathbf{c}\}$

Bazinių funkcijų matricos apskaičiavimas

```
function G=base(m,x)
        for i=1:m
          G(:,i)=x.^(i-1);
        end
return
end
```

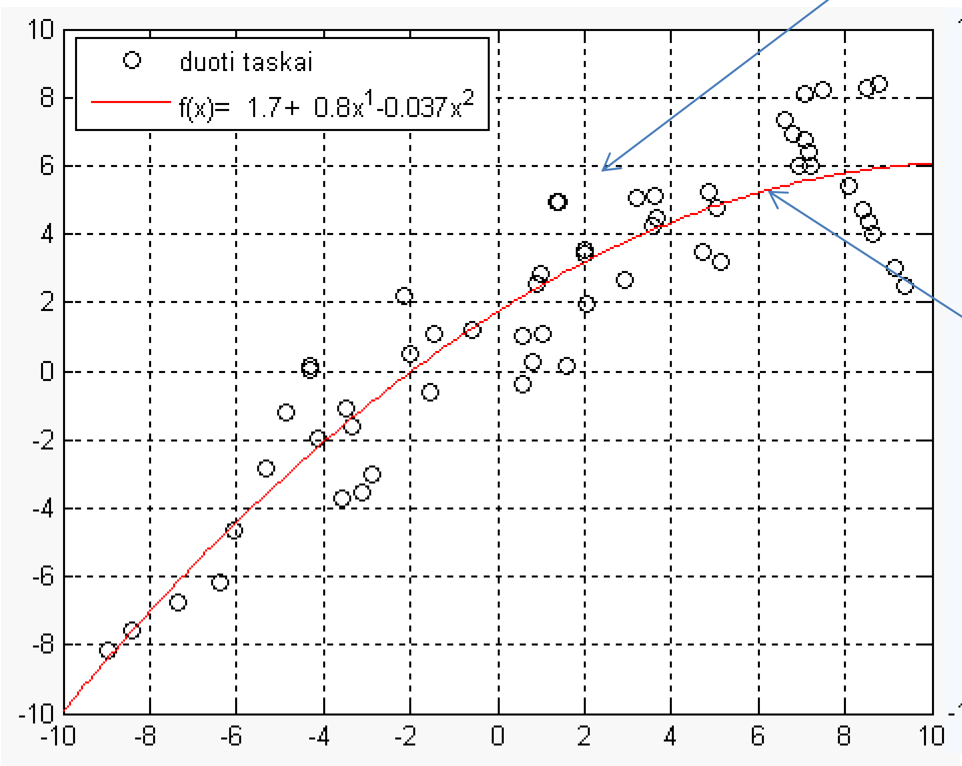
$$\begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \cdots & g_m(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \cdots & g_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & \cdots & g_m(x_n) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

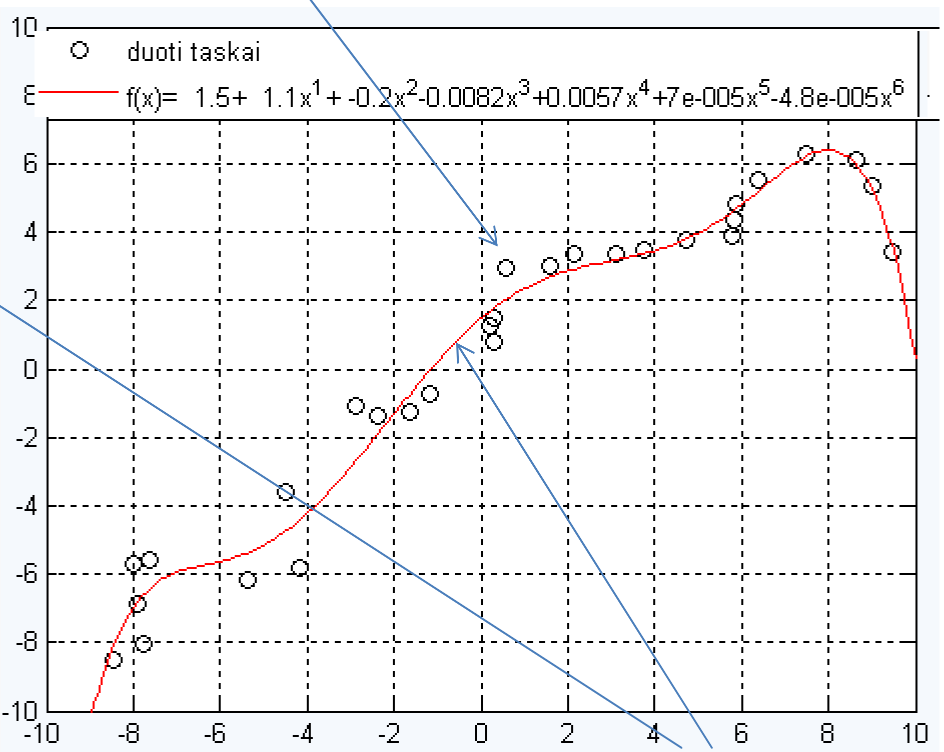
$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{bmatrix}$$

Aproksimavimas daugianariais *vienanarių bazėje*

Taškų seka, kurią reikia aproksimuoti: $(x_i, y_i)\,, \qquad i = 1, \ldots, n$

Bazinės funkcijos: $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \end{bmatrix}$

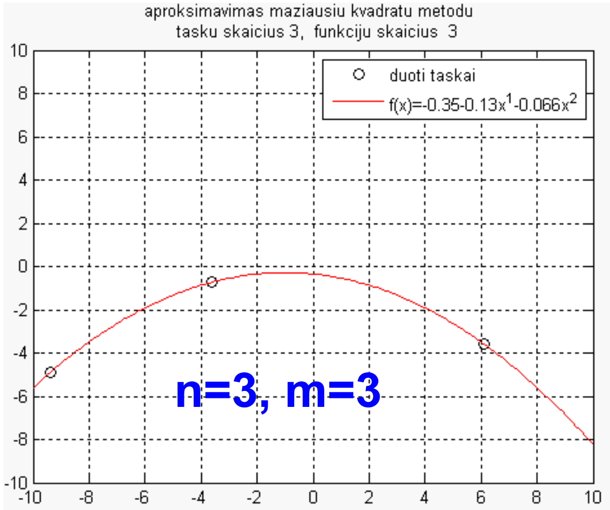


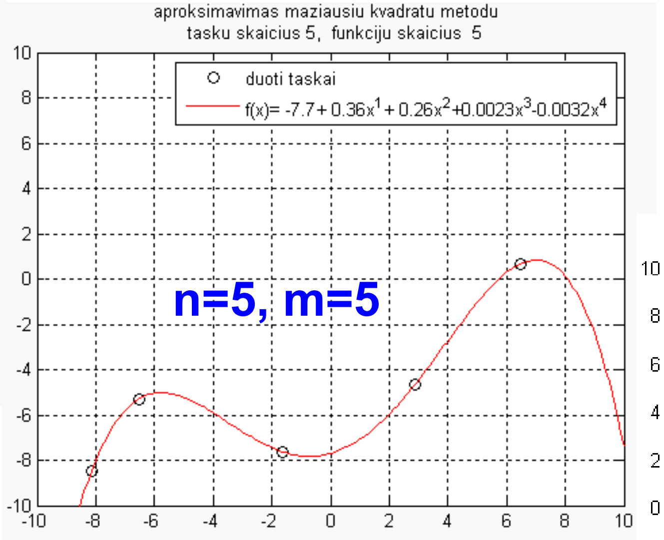


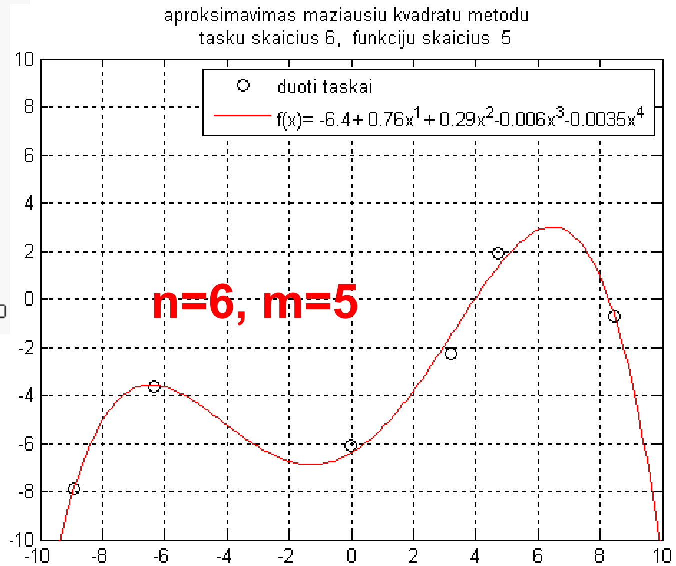
$$[\mathbf{G}]^T[\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} = [\mathbf{G}]^T\{\mathbf{y}\} \Rightarrow \{\mathbf{c}\} \Rightarrow [\tilde{\mathbf{G}}]\{\mathbf{c}\}$$

Kai *bazinių funkcijų skaičius* ir *aproksimuojamų taškų skaičius* sutampa (*n*=*m*), aproksimuojanti kreivė <u>praeina per visus taškus:</u>

$$\min_f \Psi = 0$$





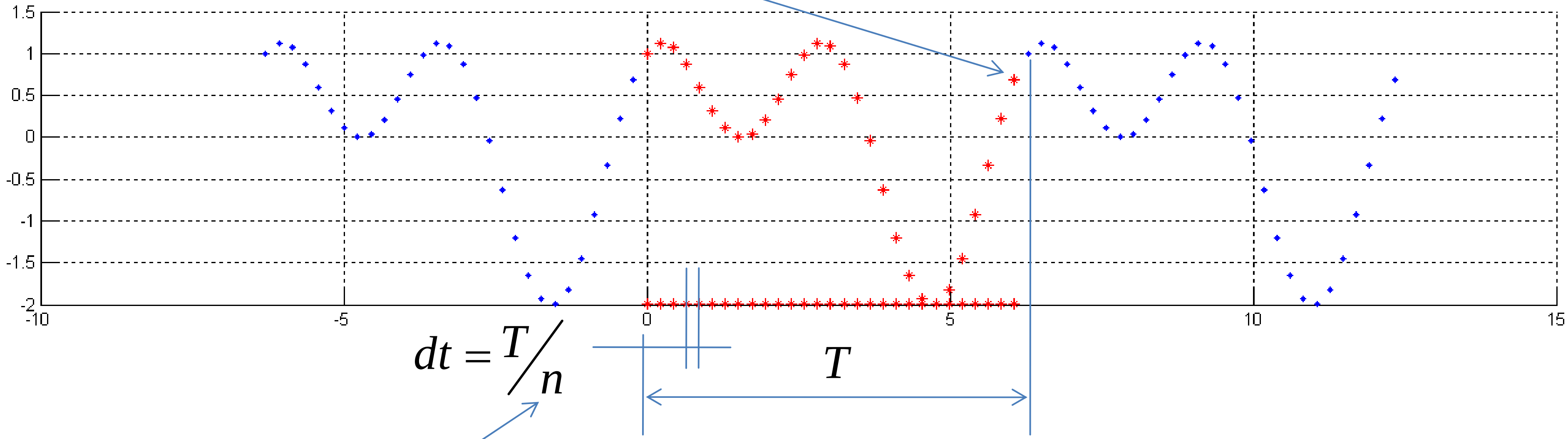


Interpoliavimo uždavinys yra aproksimavimo uždavinio atskiras atvejis, kai *n*=*m*

Aproksimavimas trigonometriniais daugianariais
Diskrečioji Furje aproksimacija

- Taškų seka, kurią reikia aproksimuoti, yra periodinė;
- Intervalai tarp taškų yra vienodi,
- Paskutinis duotas periodo taškas yra per viena intervala nuo periodo pabaigos

!



$$dt = T/n \qquad T$$

n – duotų taškų ir tuo pačiu periodo dalijimo intervalų skaičius

$$\left(t_i, y_i\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Trigonometrinės bazinės funkcijos

$$\left(t_i, y_i\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Trigonometrnio daugianario pavidalo interpoliacinė funkcija

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\frac{2\pi t}{T} & \cos 2\frac{2\pi t}{T} & \ldots & \cos(m-1)\frac{2\pi t}{T} & \sin\frac{2\pi t}{T} & \sin 2\frac{2\pi t}{T} & \ldots & \sin\left(m-1\right)\frac{2\pi t}{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{Bmatrix}$$

Bazinės funkcijos

koeficientai

Trigonometrinių bazinių funkcijų ortogonalumas sumavimo atžvilgiu:

$$(t_i, y_i), \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\left[1 \quad \cos\frac{2\pi t}{T} \quad \cos 2\frac{2\pi t}{T} \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{2\pi t}{T} \quad \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \sin 2\frac{2\pi t}{T} \quad \ldots \quad \sin(m-1)\frac{2\pi t}{T}\right]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right)\cos\left(l\frac{2\pi t_i}{T}\right) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right)\sin\left(l\frac{2\pi t_i}{T}\right) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right)\sin\left(l\frac{2\pi t_i}{T}\right) = 0;$$

$$k,l = 0:m-1, \quad k \neq l$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos^2\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right) = \frac{n}{2};$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sin^2\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right) = \frac{n}{2};$$

$$k = 1:m-1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos^2\left(0\frac{2\pi t_i}{T}\right) = n;$$

Mažiausių kvadratų metodo lygčių sistemos matrica

$$(t_i, y_i)\,, \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

$$[\mathbf{G}]^T[\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} = [\mathbf{G}]^T\{\mathbf{y}\}$$

$$[\mathbf{G}]^T[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cos\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \cos\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ 1 & \cos 2\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \cos 2\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(m-1)\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \cos(m-1)\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ 0 & \sin\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \sin\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ 0 & 2\pi t_1 & \dots & \sin 2\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \sin(m-1)\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \sin(m-1)\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \cos\frac{2\pi t_1}{T} & \cos\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \cos(m-1)\frac{2\pi t_1}{T} & \sin\frac{2\pi t_1}{T} & \sin 2\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \sin(m-1)\frac{2\pi t_1}{T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \cos\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \dots & \cos(m-1)\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \sin\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \sin 2\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \dots & \sin(m-1)\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{n/2} & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n/2 \end{bmatrix}_{(2m-1)\times(2m-1)}$$

Bazinės funkcijos yra ortogonalios sumavimo atžvilgiu, todėl sistemos matrica gaunama <u>įstrižaininė</u>

Mažiausių kvadratų metodo lygčių sistemos laisvųjų narių vektorius

$$\left(t_i, y_i\right), \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

$$[\mathbf{G}]^T [\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} = [\mathbf{G}]^T \{\mathbf{y}\}$$

$$[\mathbf{G}]^T [\mathbf{G}] == \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n/2 \end{bmatrix}_{(2m-1)\times(2m-1)} \quad ; \quad [\mathbf{G}]^T \{\mathbf{y}\} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} \cos\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} \cos(m-1)\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} \sin\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} \sin 2\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} \sin(m-1)\frac{2\pi t_i}{T} y_i \end{Bmatrix}_{(2m-1)\times 1}$$

Diskrečiosios Furje aproksimacijos koeficientai

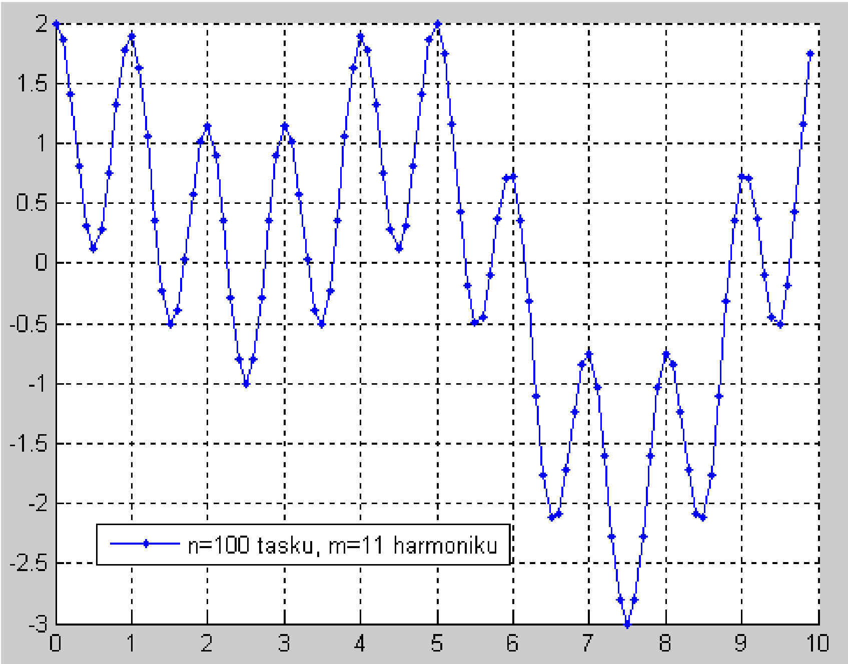
$$\left(t_i, y_i\right), \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$[\mathbf{G}]^T[\mathbf{G}]\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]^T\{\mathbf{y}\} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi t_i}{T}y_i \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos 2\frac{2\pi t_i}{T}y_i \\ \vdots \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos(m-1)\frac{2\pi t_i}{T}y_i \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{2\pi t_i}{T}y_i \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin 2\frac{2\pi t_i}{T}y_i \\ \vdots \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin(m-1)\frac{2\pi t_i}{T}y_i \end{Bmatrix}$$

Vaizdavimo taškų ordinačių vektorius-stulpelis :

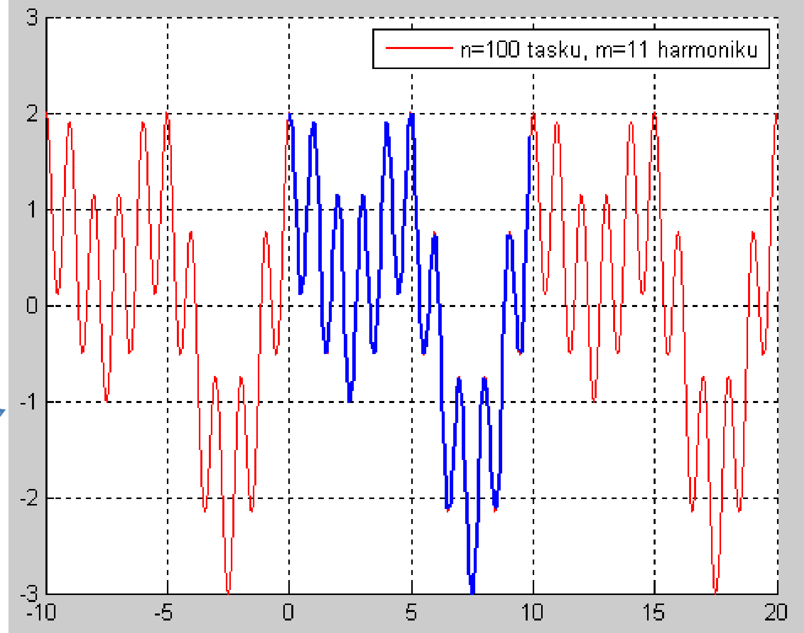
$$\left[\tilde{\mathbf{G}}\right]\{\mathbf{c}\}$$

Duota taškų seka, vienas periodas, n=100

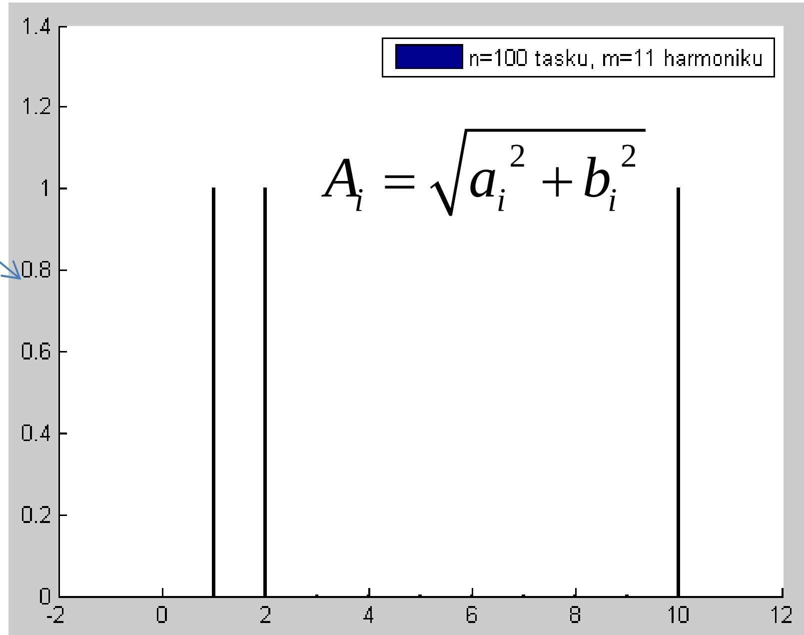



```
function rez=fnk(T,t)
        rez=sin(2*pi*t/T)+...
            cos(2*pi*2*t/T)+...
            cos(2*pi*10*t/T);
return
end
```

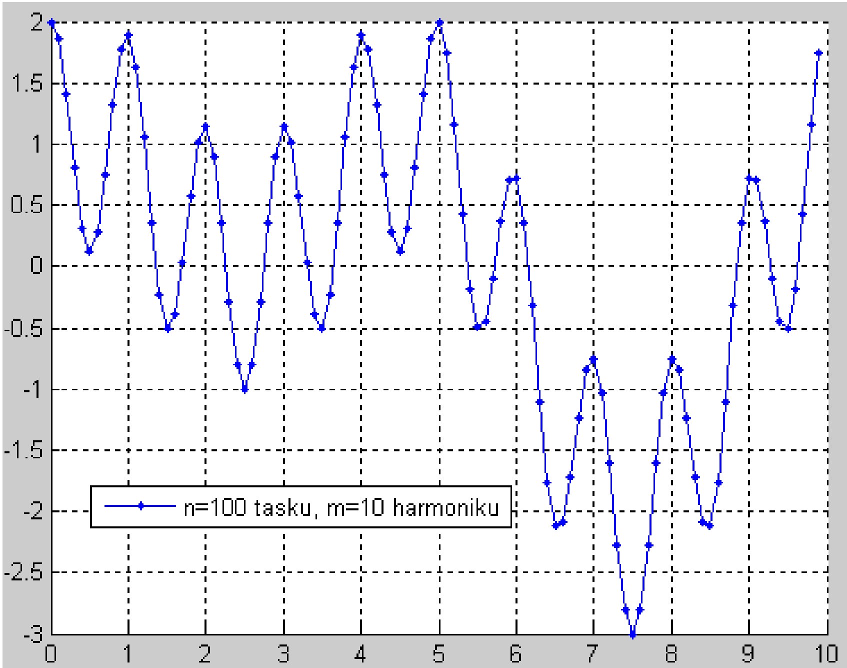
Furje aproksimacija, priklausomybė nuo laiko, m=11



Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės, m=11

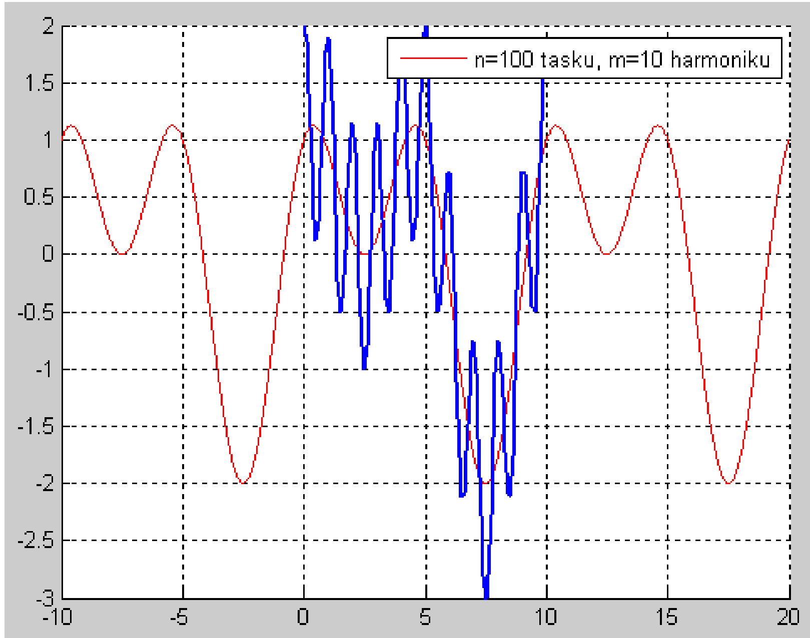


Duota taškų seka, vienas periodas, n=100

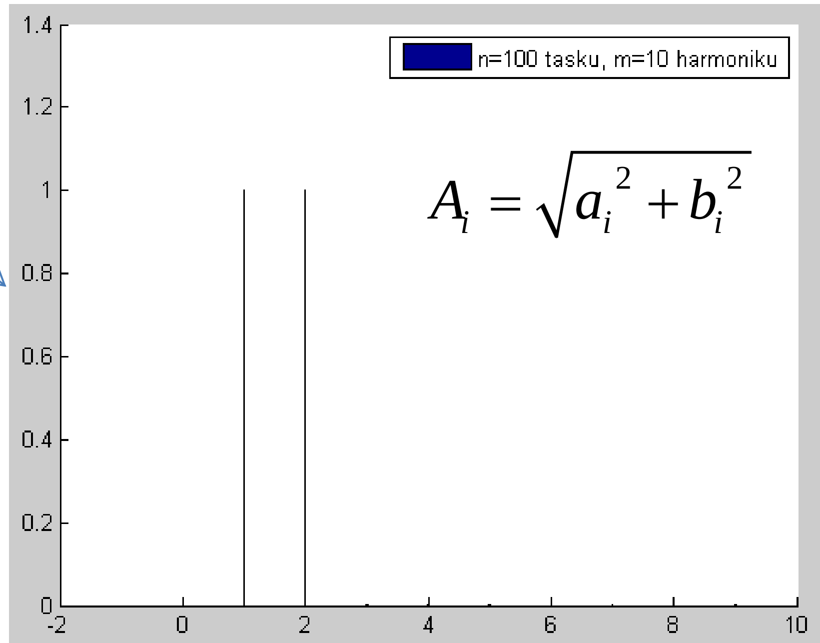



```
function rez=fnk(T,t)
         rez=sin(2*pi*t/T)+...
             cos(2*pi*2*t/T)+...
             cos(2*pi*10*t/T);
return
end
```

Furje aproksimacija, priklausomybė nuo laiko, m=10

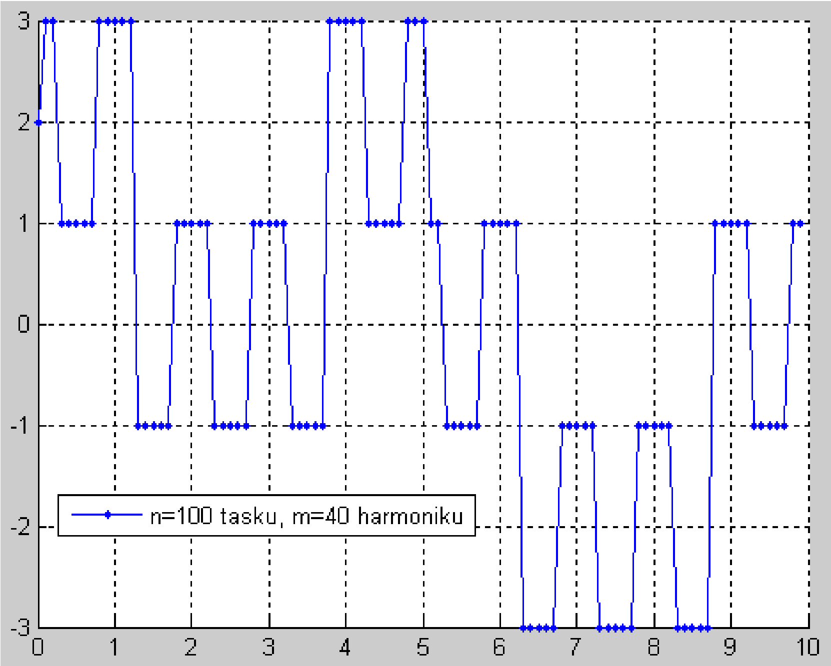


Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės, m=10



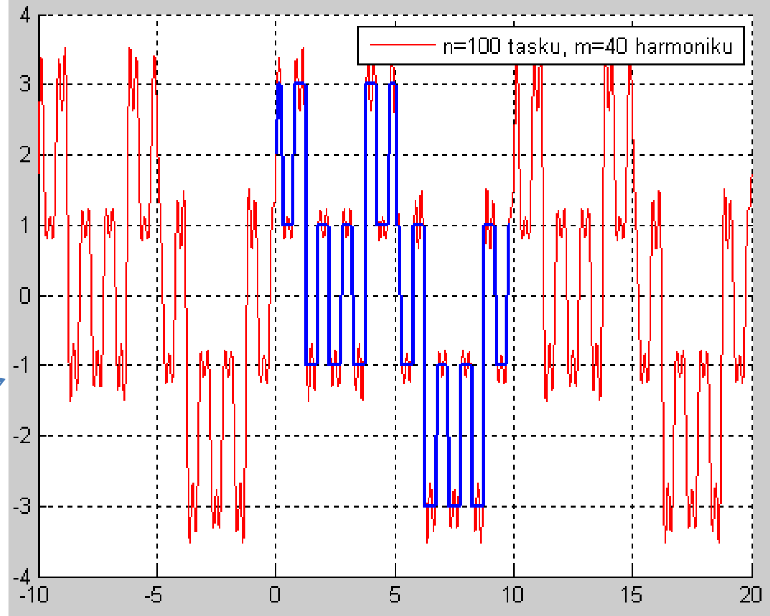
$$A_i = \sqrt{a_i^{\,2} + b_i^{\,2}}$$

Duota taškų seka, vienas periodas, n=100

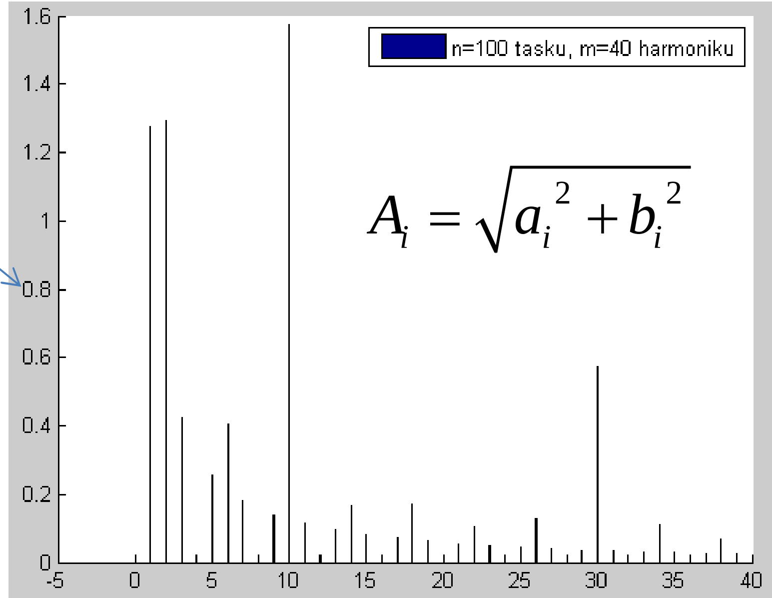



```
function rez=fnk(T,t)
         rez=sign(sin(2*pi*t/T))+...
             sign(cos(2*pi*2*t/T))+...
             sign(cos(2*pi*10*t/T));
return
end
```

Furje aproksimacija, priklausomybė nuo laiko, m=40

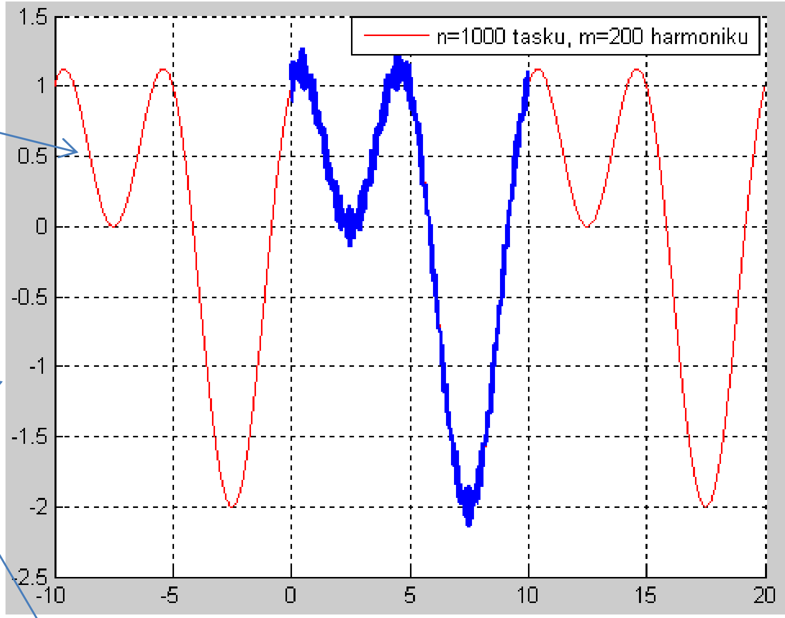


Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės, m=40

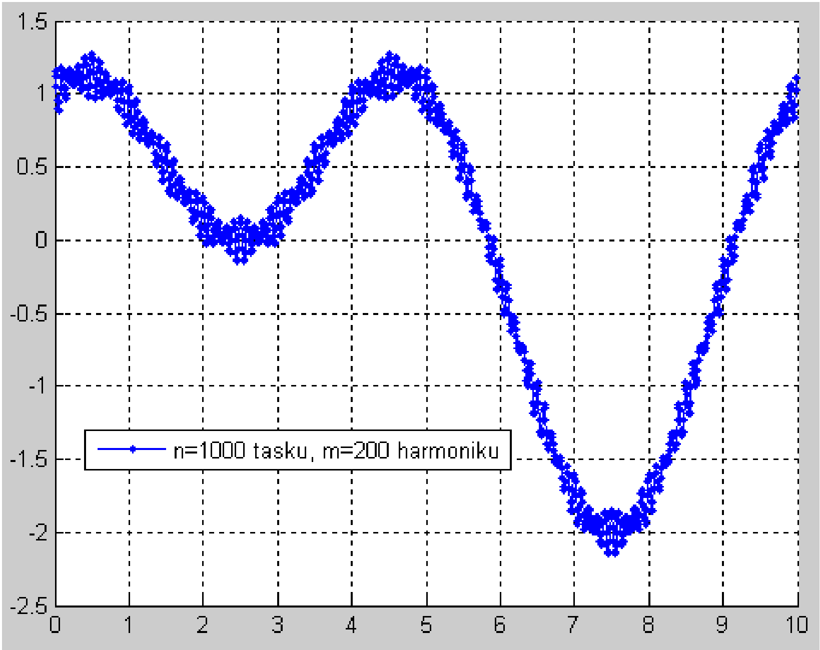


Signalas nufiltruotas, atmetant harmonines dedamąsias pagal amplitudės slenksčio reikšmę

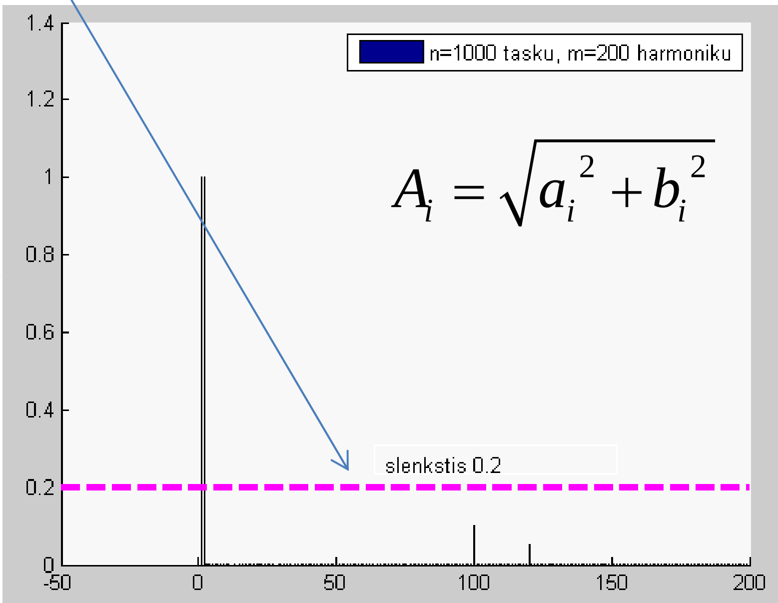
Furje aproksimacija, priklausomybė nuo laiko, m=200



Signalas su “triukšmais”, n=1000



Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės, m=200




```
function rez=fnk(T,t)
         rez=sin(2*pi*t/T)+...
              cos(2*pi*2*t/T)+...
          0.1*cos(2*pi*100*t/T)+...
         0.05*cos(2*pi*120*t/T);
return
end
```

MATLAB funkcijos *fft* taikymas diskrečiajai Furje transformacijai apskaičiuoti

Signalo reikšmės

Taškų skaičius

Harmoniku skaičius
m=floor((n+1)/2)

```
yyy=fft(fff)/n;
spektras=abs(2*yyy(1:m));        % harmoniku amplitudes
spektras(1)=spektras(1)/2;       % pastovi dedamoji

spektras_c0=real(yyy(1));         % pastovi dedamoji
spektras_c=real(2*yyy(2:m));      % cos amplitudes
spektras_s=-imag(2*yyy(2:m));     % sin amplitudes
```

- **Diskrečioji Furje aproksimacja (dažnai vadinama *Diskrečiaja Furje transformacija, DFT*) yra vienas iš svarbiausių *signalų analizėje* taikomų metodų;**
- **DFT įgalina nustatyti, kokie *harmoninių virpesių dažniai ir amplitudės* sudaro signalą, kuris buvo išmatuotas ir pateiktas *priklausomybės nuo laiko pavidale*. Kartais sakoma, kad DFT pavaizduoja signalą *amplitudžių ir dažnių erdvėje*;**
- **Signalo vaizdavimas amplitudžių ir dažnių erdvėje ne tik palengvina jo fizikinį suvokimą , tačiau gali būti panaudotas *informacijai saugoti (archyvuoti)*. Amplitudžių ir dažnių saugojimui dažniausiai reikia žymiai mažiau atminties, nei saugant to paties signalo reikšmių priklausomybę nuo laiko**

- Dažniausiai aproksimuojančių harmonikų skaičius *m* parenkamas toks, kad duotų signalo taškų skaičius ir bendras aproksimuojančių funkcijų skaičius sutaptų, t.y., $n=2m-1$. Tai reiškia, kad sprendžiamas interpoliavimo uždavinys. Aproksimuojanti kreivė praeina per visus duotus signalo taškus, todėl prarandama mažiausiai informacijos;
- Mūsų išnagrinėtame DFT algoritme nereikia spręsti lygčių sistemos. Vis dėlto, koeficientų apskaičiavimui tenka atlikti apie ($2m^2$) daugybos ir sudėties veiksmų. Greitesnis, tačiau sudėtingesnis yra *sparčiosios Furje transformacijos (FFT)* algoritmas, kuris nagrinėjamas specializuotuose signalų analizės kursuose. Jis sumažina veiksmų skaičių iki ($m*\log_2 m$) , be to, gaunamos mažesnės apvalinimo paklaidos

MATLAB funkcijos *fft* taikymas diskrečiajai Furje transformacijai apskaičiuoti

Signalo reikšmės

Taškų skaičius

Harmoniku skaičius
m=floor((n+1)/2)

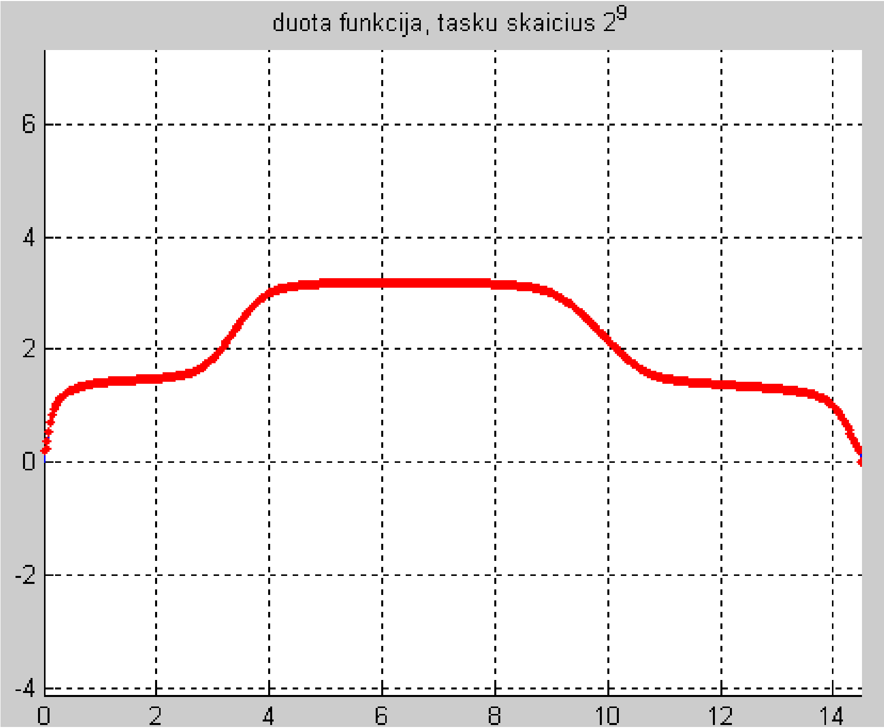
```
yyy=fft(fff)/n;
spektras=abs(2*yyy(1:m));        % harmoniku amplitudes
spektras(1)=spektras(1)/2;       % pastovi dedamoji

spektras_c0=real(yyy(1));        % pastovi dedamoji
spektras_c=real(2*yyy(2:m));     % cos amplitudes
spektras_s=-imag(2*yyy(2:m));    % sin amplitudes
```

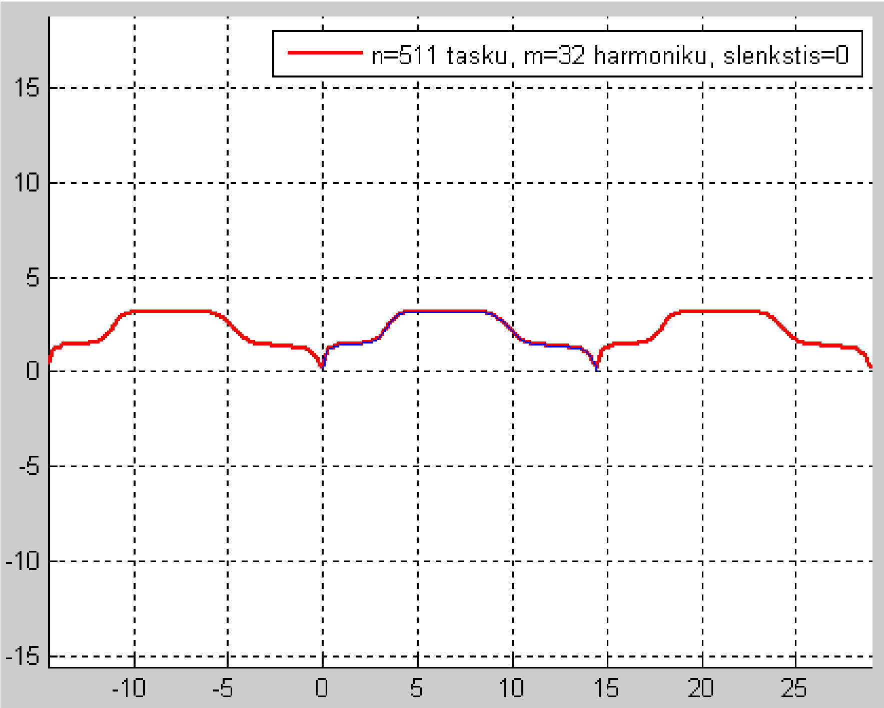
Aproksimavimas bangelėmis (wavelets).

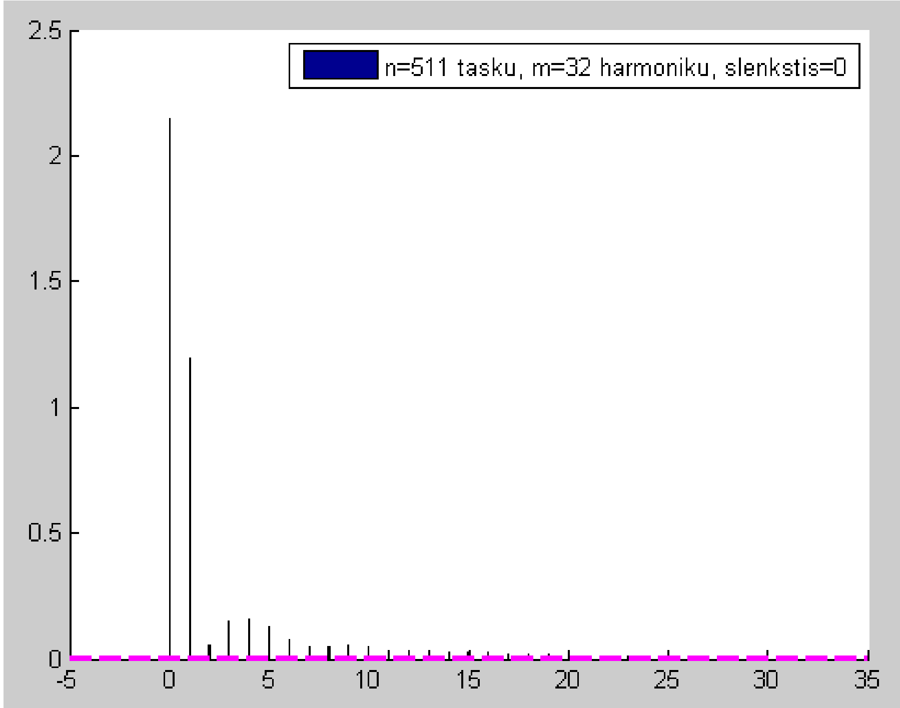
Haro bangelių aproksimacija

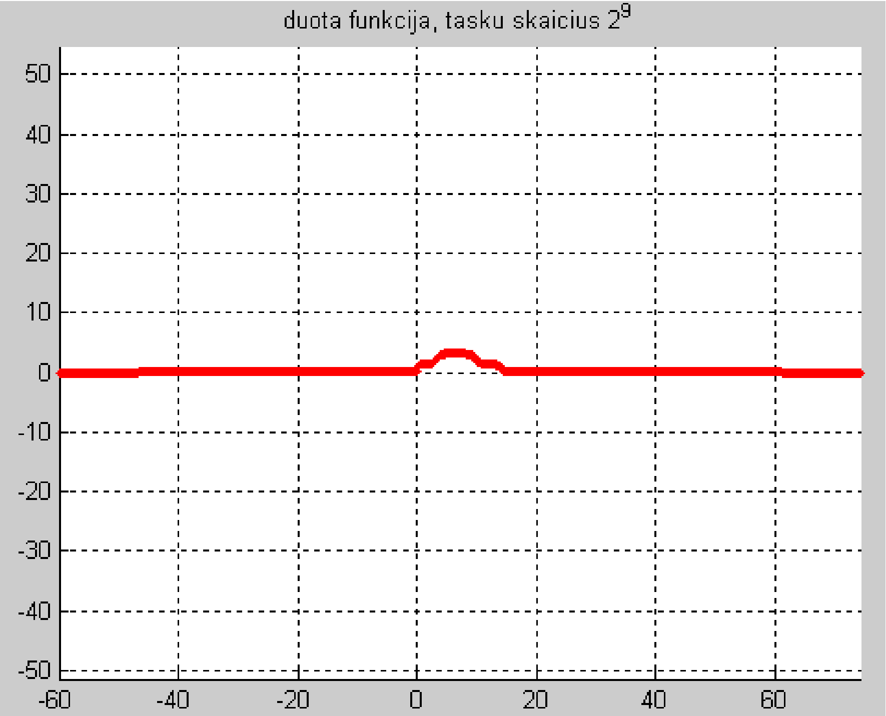
- **Furje aproksimacija geriausiai tinka periodinėms funkcijoms;**
- **Atskirą neperiodinį signalą galime sąlyginai aproksimuoti Furje būdu, pavaizdavę jį “ilgame periode“. Tačiau juo ilgesnis periodas, tuo daugiau harmonikų reikia signalo aproksimacijai;**
- **Galima teigti, kad Furje aproksimaciją neperiodiniams signalams taikyti neracionalu, kadangi jos bazinių funkcijų pobūdis *<u>nėra lokalus</u>***



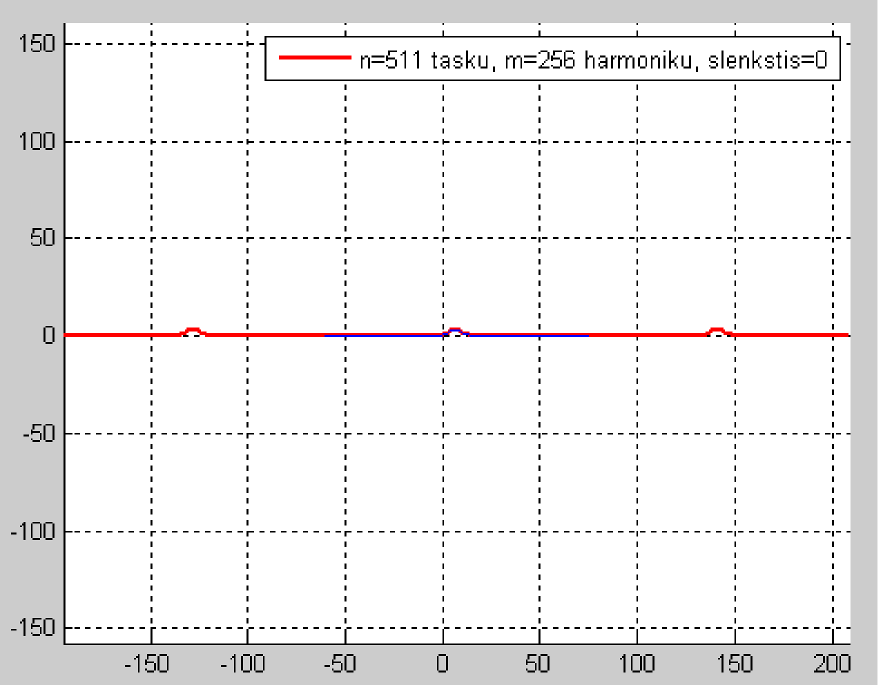
Aproksimuojant Furje būdu, tam tikrame intervale duota funkcija *pagal nutylėjimą tampa periodine*

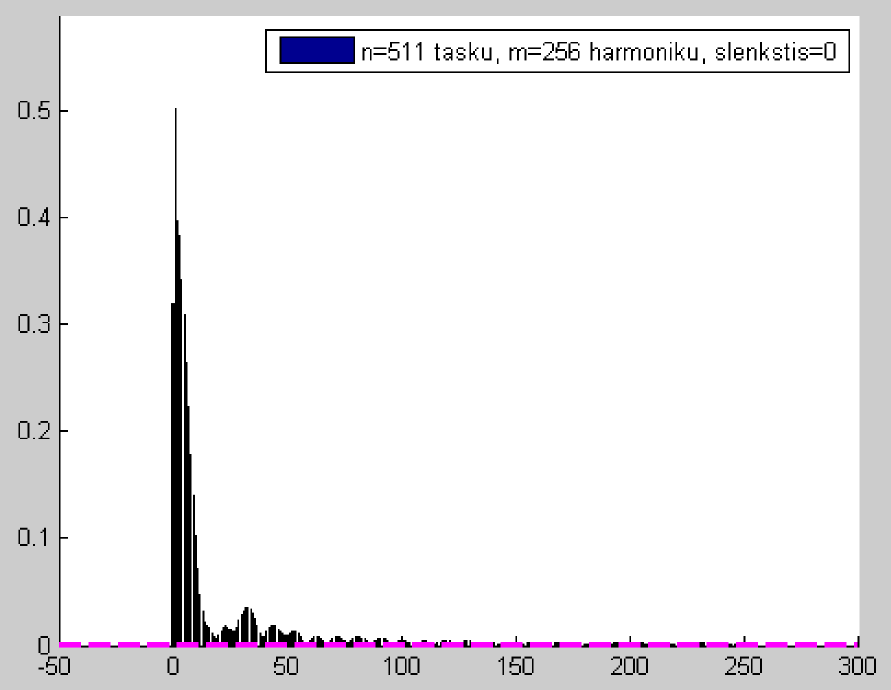






Dirbtinai izoliavus signalą tam tikrame laiko intervale, *smarkiai išauga aproksimuojančių Furje harmonikų skaičius.*





•Neperiodinėms funkcijoms aproksimuoti naudojamos lokalųjį pobūdį turinčios bazinės funkcijos, vadinamos ***bangelėmis (wavelet)*** **;**

• Bangelės gali būti įvairios, tačiau privalo tenkinti du svarbiausius reikalavimus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$$

- turi “banguoti “ apie *Ox* ašį

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t)\,dt < \infty$$

- “energija“ turi būti baigtinė

Šios abi sąlygos gali būti patenkintos, jeigu funkcija nelygi nuliui tik tam tikrame baigtiniame intervale. Jos grafikas visuomet panašus į tame intervale pavaizduotą “subangavimą”, t.y. pavienę *bangelę*

“Energijos” terminas paremtas fizikine analogija: diferencijuodami “energiją”, turime gauti “jėgą”, pvz:

Tamprioji energija ir tamprumo jėga: $\Pi = \dfrac{kx^2}{2}, \qquad F = \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = kx;$

Svorio energija ir svorio jėga: $\Pi = mgz; \qquad F = \dfrac{\partial \Pi}{\partial z} = mg;$

- Išraiškos paprastesnės, kai formuluotės pateikiamos funkcijoms, apibrėžtoms [0,1] intervale;
- Esant kitokiam intervalui, galima pakeisti kintamąjį.

“Motininė” Haro bangelė :

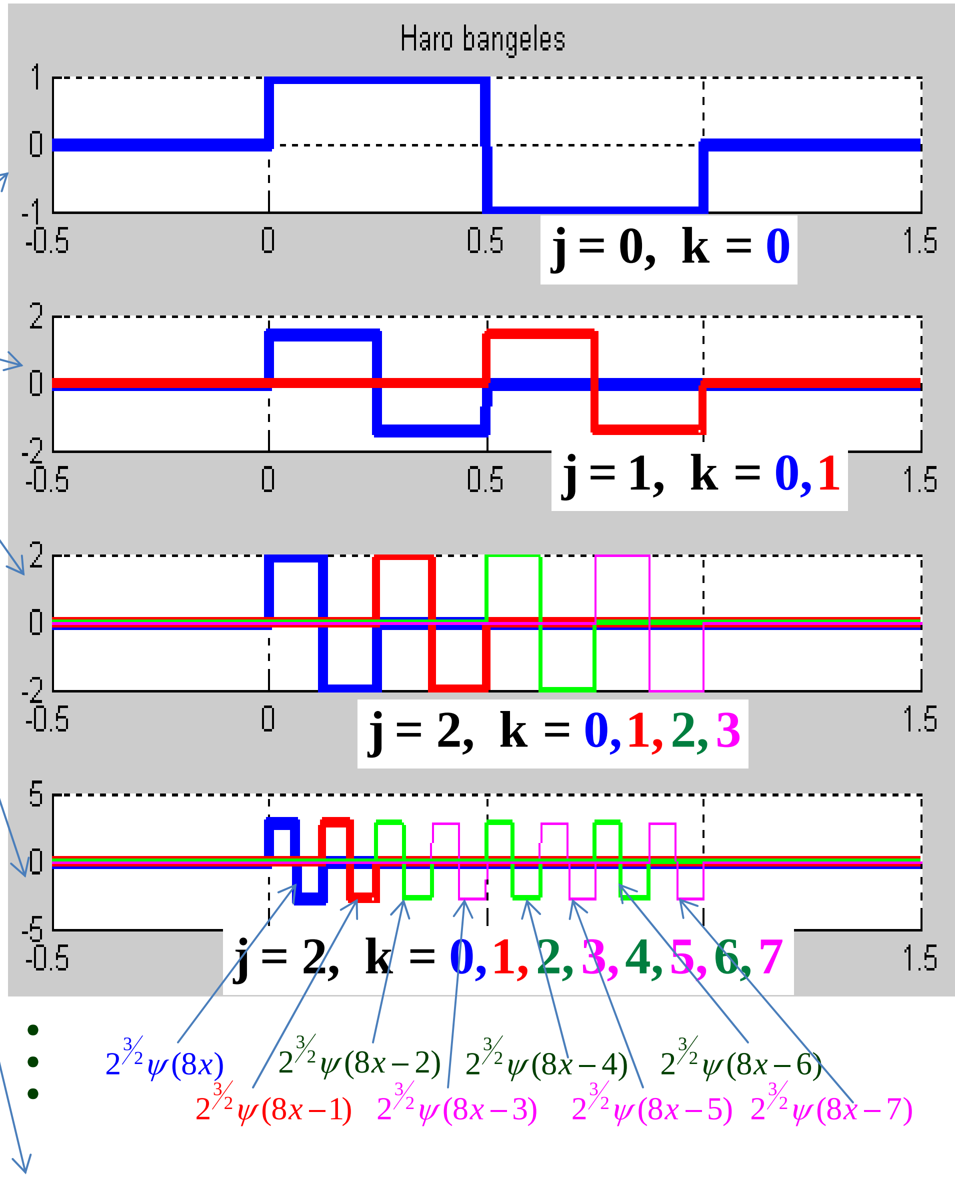
$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left(sign(x) - 2sign(x-0.5) + sign(x-1)\right)$$

“Energetinių signalų” bazė, gaunama, suspaudžiant ir perslenkant Ox ašyje motininę bangelę:

$$\left\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\right\},$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$$

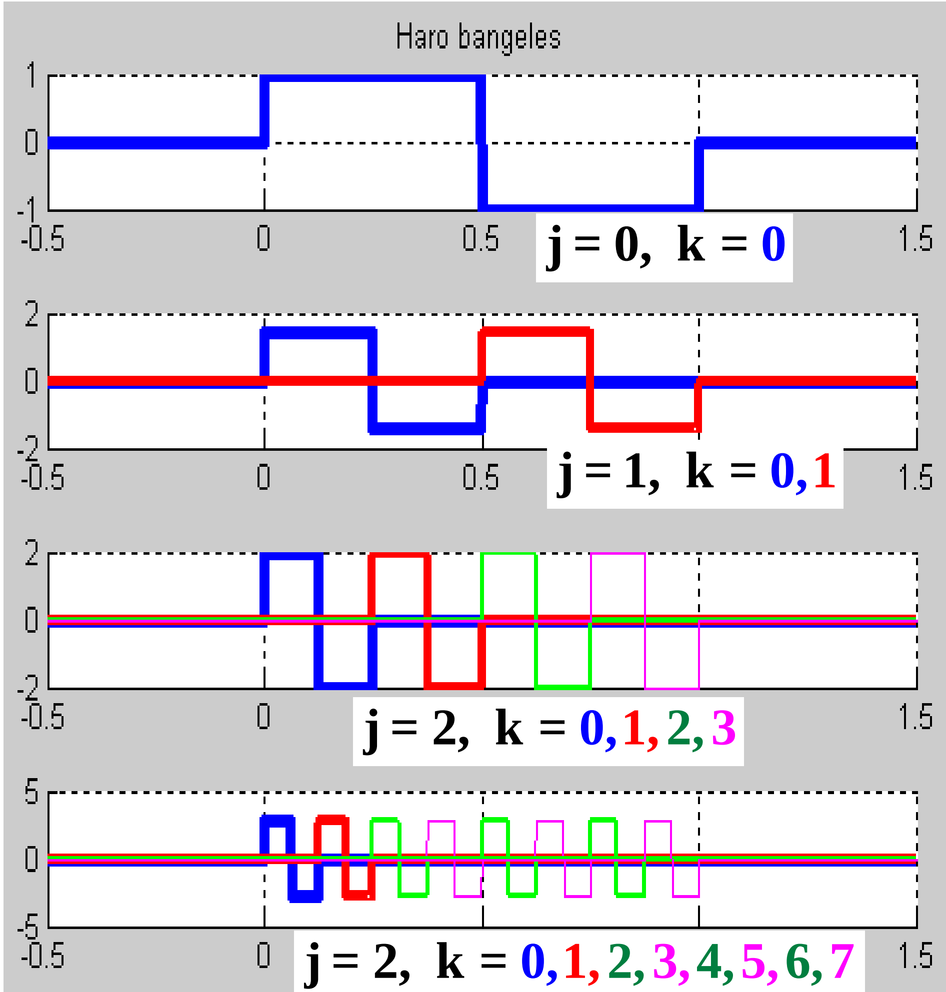


Bangelių amplitudės skirtingos. Jos parenkamos taip:

$$\int_0^1 \left(2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right)^2 dx = 1$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$$



Bangelės yra ortogonalios:

if $((j \sim= r) \,||\, (k \sim= s))$

$$\int_0^1 \left(2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right) \left(2^{r/2} \psi(2^r x - s) \right) dx = 1$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

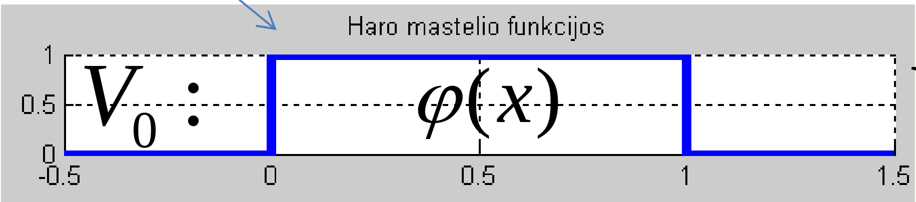
$$s = 0, 1, \ldots, 2^r - 1$$

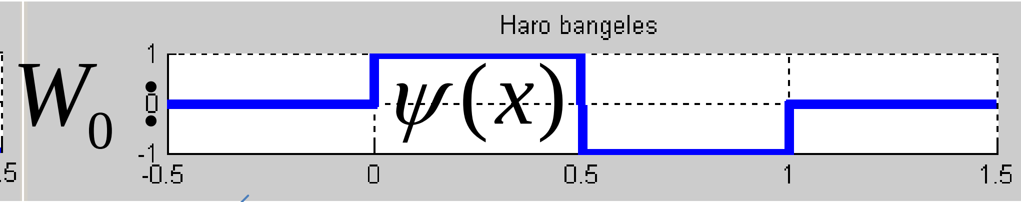
end

Bangelės susiejamos su “mastelio” (scaling) funkcijomis:

“Motininė” mastelio funkcija

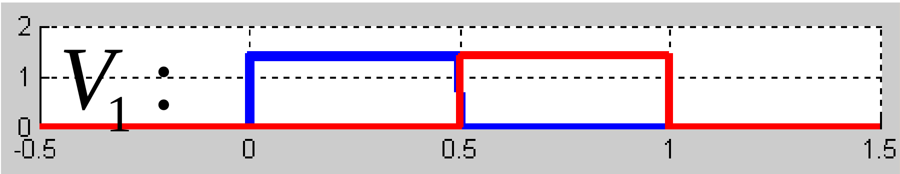
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(sign(x) - sign(x-1)\right)$$

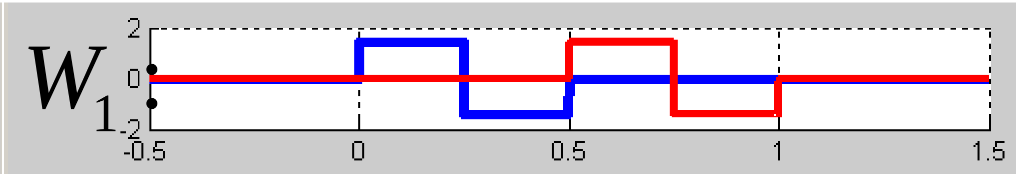




$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

Smulkesnės mastelio funkcijos **gali būti gautos, tiesiškai kombinuojant vienu lygiu stambesnes** ***mastelio*** **ir** ***bangelių*** **funkcijas**



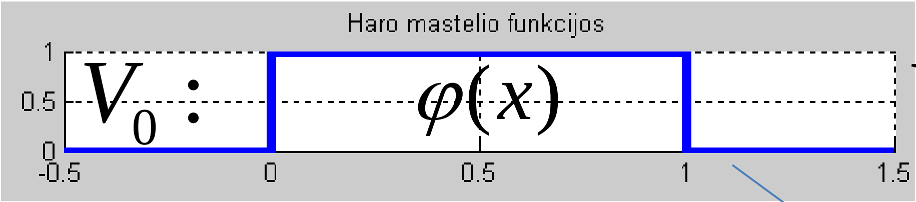


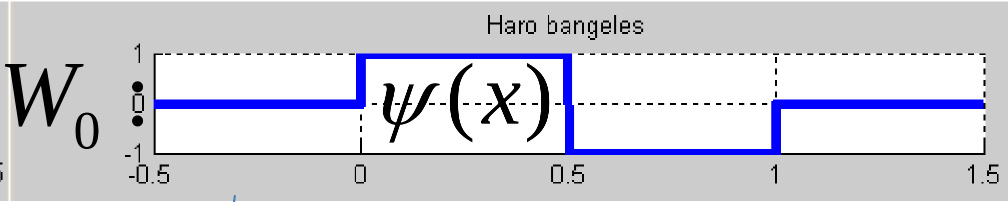
Mastelio funkcijos suspaudimai ir perslinkimai:

$$\left\{2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\right\},\ j = 0,1,2,\ldots \quad k = 0,1,\ldots,2^j - 1$$

Tam tikro smulkumo mastelio funkcijų bazėje pavaizduojama *suglodinta* (t.y. aproksimuota) signalo funkcija

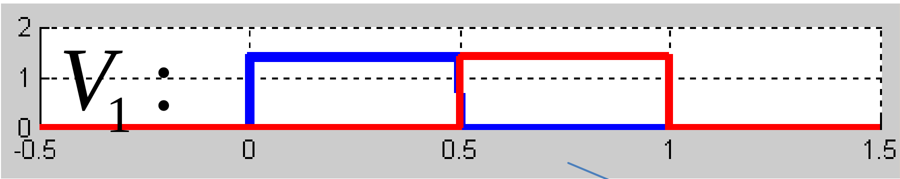
To paties lygio bangelių funkcija pavaizduoja *smulkesnes signalo detales*

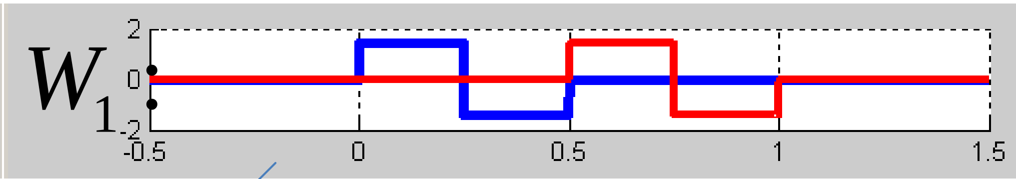




Suglodintos funkcijos ir jos detalių suma yra tas pats signalas, *suglodintas smulkesnio mastelio funkcijų bazėje*

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$



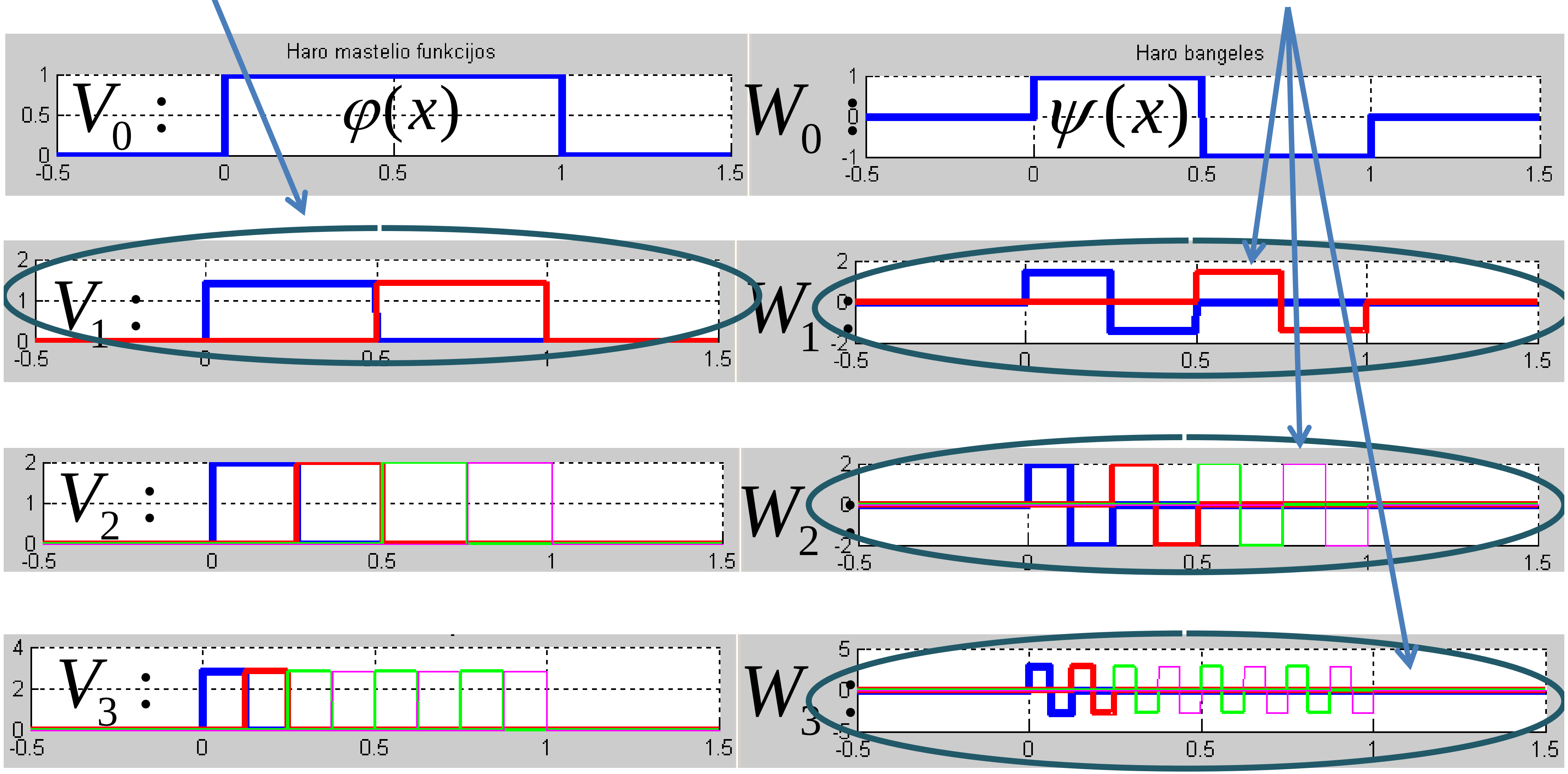


$$V_2 = V_1 \oplus W_1$$

Aproksimavimo bangelėmis schema:

1.Pasirenkamas pradinis suglodinimo mastelis, apskaičiuojami ir išsaugomi koeficientai, kai duotas signalas aproksimuojamas šių mastelio funkcijų bazėje

2.Smulkesnių signalo detalių aproksimavimo koeficientai apskaičiuojami ir išsaugomi to paties ir smulkesniųjų lygių bangelių funkcijų bazėse



$$V_j : 2^{j/2}\varphi(2^j x - k),\ k = 0 : 2^j - 1 \qquad 2^{j/2}\psi(2^j x - k),\ k = 0 : 2^j - 1$$

Kaip apskaičiuoti bangelių aproksimacijos koeficientus?

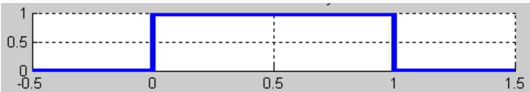
1. Bangelių aproksimacija yra bendrojo aproksimavimo uždavinio atskiras atvejis, kai turime tokią aproksimuojančių funkcijų bazę:

Mastelio funkcija

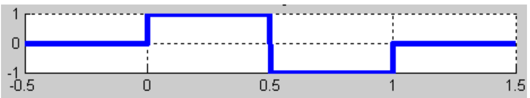
(pradinis suglodinimas)

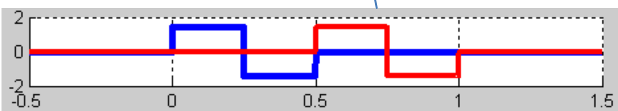
Bangelių funkcijos

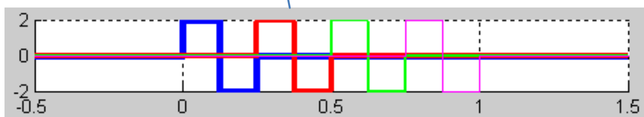
(detalės)



$$f(x) = \varphi(x) \quad \psi(x) \quad 2^{1/2}\psi(2x) \quad 2^{1/2}\psi(2x-1) \quad 2^{1}\psi(2x) \quad 2^{1}\psi(2x-1) \quad 2^{1}\psi(2x-2) \quad 2^{1}\psi(2x-3) \quad \cdots \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0^0 \\ b_0^1 \\ b_1^1 \\ b_0^2 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$







koeficientai

$$f(x)=\begin{bmatrix}\varphi(x) & \psi(x) & 2^{1/2}\psi(2x) & 2^{1/2}\psi(2x-1) & 2^{1}\psi(2x) & 2^{1}\psi(2x-1) & 2^{1}\psi(2x-2) & 2^{1}\psi(2x-3) & \cdots\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\ b_0^0\\ b_0^1\\ b_1^1\\ b_0^2\\ b_1^2\\ b_2^2\\ b_3^2\\ \vdots\end{Bmatrix}$$

$$f(x)=[\mathbf{G}(x)]\{\mathbf{c}\}$$

Ieškomi koeficientai

$$[\mathbf{G}(x)]^T[\mathbf{G}(x)]\{\mathbf{c}\}=[\mathbf{G}(x)]^T f(x)$$

$$\int_0^1[\mathbf{G}(x)]^T[\mathbf{G}(x)]dx\{\mathbf{c}\}=\int_0^1[\mathbf{G}(x)]^T f(x)dx$$

- Aproksimacjos išraišką paeiliui padauginame iš visų bazinių funkcijų ir apskaičiuojame integralus;
- Integralų tiesiogiai keisti diskretinėmis sumomis, deja, negalime. Skirtingai nuo Furje bazinių funkcijų, čia bazė <u>ortogonali tik integruojant</u>, o ne sumuojant diskrečiuose taškuose

1

Visi ne įstrižainėje esantys integralai =0

$$
\begin{bmatrix}
\int_0^1 (\varphi(x))^2\,dx & \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx & \int_0^1 \varphi(x)2^{1/2}\psi(2x)dx & \int_0^1 \varphi(x)2^{1/2}\psi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 \psi(x)\varphi(x)dx & \int_0^1 (\psi(x))^2\,dx & \int_0^1 \psi(x)2^{1/2}\psi(2x)dx & \int_0^1 \psi(x)2^{1/2}\psi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^{1/2}\psi(2x)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^{1/2}\varphi(2x)\psi(x)dx & \int_0^1 \left(2^{1/2}\psi(2x)\right)^2 dx & \int_0^1 \left(2^{1/2}\psi(2x)\right)2^{1/2}\psi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^{1/2}\psi(2x-1)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^{1/2}\psi(2x-1)\psi(x)dx & \int_0^1 2^{1/2}\psi(2x-1)2^{1/2}\psi(2x)dx & \int_0^1 \left(2^{1/2}\psi(2x-1)\right)^2 dx & \cdots \\
\int_0^1 2^1\psi(4x)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x)\psi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x)2^{1/2}\varphi(2x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x)2^{1/2}\varphi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-1)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-1)\psi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-1)2^{1/2}\varphi(2x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-1)2^{1/2}\varphi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-2)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-2)\psi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-2)2^{1/2}\varphi(2x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-2)2^{1/2}\varphi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-3)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-3)\psi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-3)2^{1/2}\varphi(2x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-3)2^{1/2}\varphi(2x-1)dx & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0^0 \\ b_0^1 \\ b_1^1 \\ b_0^2 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\int_0^1 \varphi(x)f(x)dx \\
\int_0^1 \psi(x)f(x)dx \\
\int_0^1 2^{1/2}\varphi(2x)f(x)dx \\
\int_0^1 2^{1/2}\varphi(2x-1)f(x)dx \\
\int_0^1 2^1\psi(4x)f(x)dx \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-1)f(x)dx \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-2)f(x)dx \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-3)f(x)dx \\
\vdots
\end{Bmatrix}
$$

Ši matrica gaunama vienetinė, kadangi bangelių ir mastelio funkcijų bazė yra ortonormuota

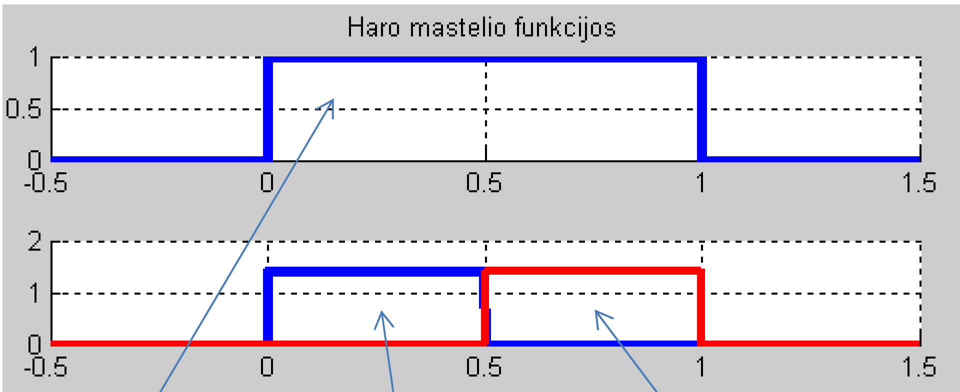
ieškomi koeficientai

Šiuos integralus tektų apskaičiuoti

Kaip apskaičiuoti bangelių aproksimacijos koeficientus?

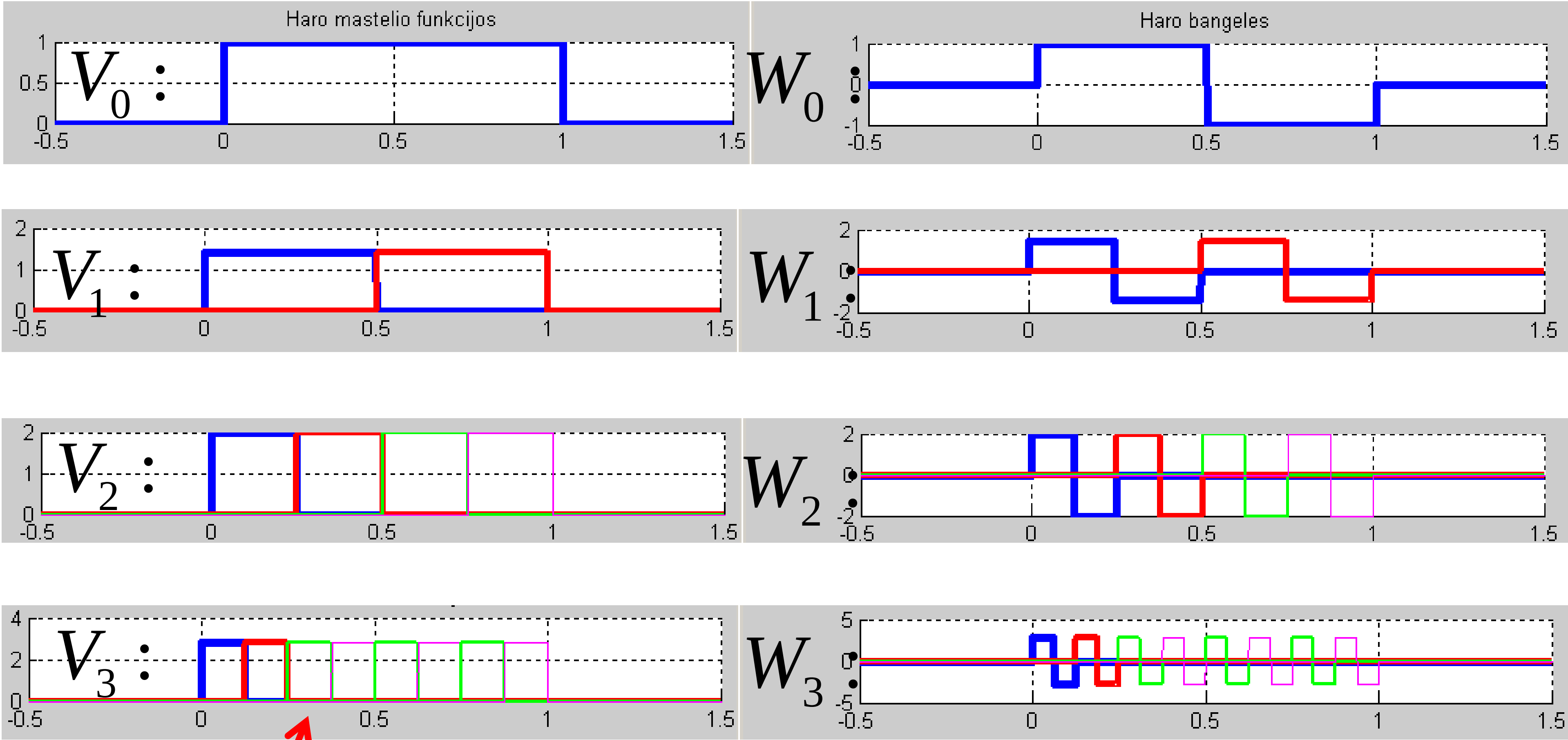
2. Piramidinis algoritmas

- **Skaičiavimų apimties požiūriu, neracionalu tiesiogiai taikyti mažiausių kvadratų algoritmą bangelių aproksimacijos koeficientų apskaičiavimui. Tą patį rezultatą žymiai greičiau gausime, taikydami *piramidinį algoritmą;***
- **Piramidinis algoritmas paremtas jau aptartomis bangelių savybėmis ir *plėtinio lygtimi*;**
- ***Plėtinio lygtis* tiesine priklausomybe susieja mastelio funkcijų išraiškas dviejuose gretimuose smulkumo lygiuose:**



$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$$

Piramidinis algoritmas, 1 žingsnis:

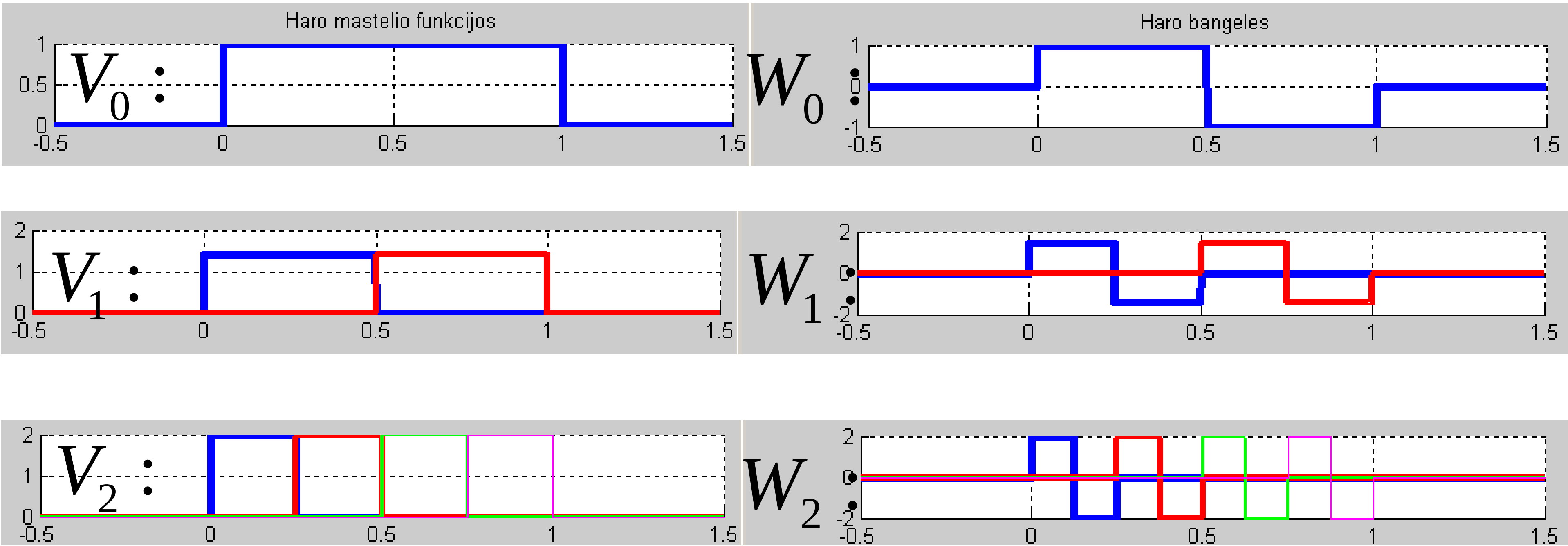


1. Signalą, duotą 2^n *(šiame paveiksle n=3)taškuose*, aproksimuojame mastelio funkcijų bazėje

$$\mathbf{V}_n : \ 2^{n/2}\varphi(2^n x - k), \ k = 0 : 2^n - 1$$

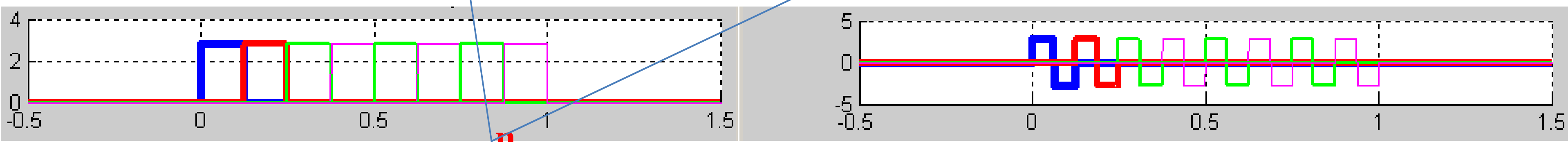
$$\mathbf{a}_\mathbf{i}^\mathbf{n} = 2^{-n/2} y_i, \quad i = 0 : 2^n - 1$$

Piramidinis algoritmas, 2 žingsnis:



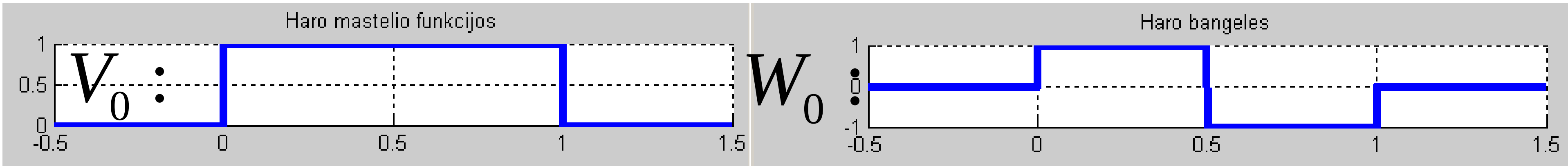
$$a_i^{n-1} = \frac{a_{2i-1}^{n} + a_{2i}^{n}}{\sqrt{2}};\qquad b_i^{n-1} = \frac{a_{2i-1}^{n} - a_{2i}^{n}}{\sqrt{2}};$$

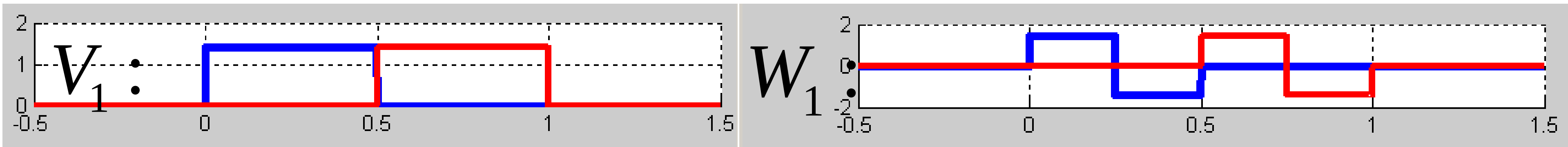
2. Apskaičiuojame mastelio funkcijų ir bangelių koeficientus, aproksimuojančius stambesnio mastelio bazinių funkcijų lygmenyje



a_i^n nesaugome

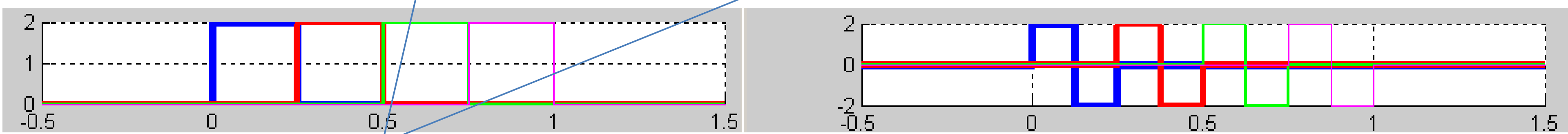
Piramidinis algoritmas, 3 žingsnis, ir t.t.:



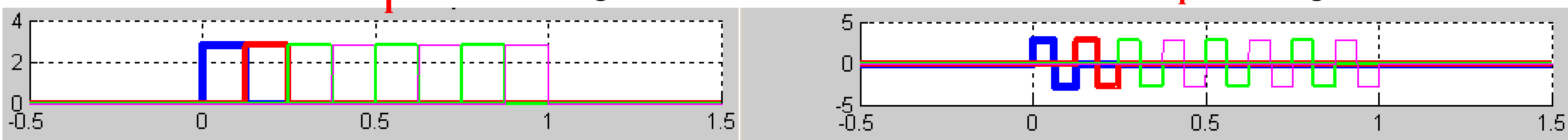


$$\mathbf{a}_i^{n-1} = \frac{\mathbf{a}_{2i-1}^n + \mathbf{a}_{2i}^n}{\sqrt{2}}; \qquad \mathbf{b}_i^{n-1} = \frac{\mathbf{a}_{2i-1}^n - \mathbf{a}_{2i}^n}{\sqrt{2}};$$

3. Apskaičiuojame mastelio funkcijų ir bangelių koeficientus, aproksimuojančius stambesnio mastelio bazinių funkcijų lygmenyje



$\mathbf{a}_i^{n-1}$ nesaugome $\qquad$ $\mathbf{b}_i^{n-1}$ saugome



$\mathbf{a}_i^{n}$ nesaugome

Atvejis, kai intervalas [a,b]:

$$\tilde{x} = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}; \qquad \varphi(\tilde{x}) = \frac{1}{2(b-a)}\left(sign(\tilde{x}) - sign(\tilde{x}-1)\right)$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}; \qquad \psi(\tilde{x}) = \frac{1}{2(b-a)}\left(sign(\tilde{x}) - 2sign(\tilde{x}-0.5) + sign(\tilde{x}-1)\right)$$

Suglodinimas pagal duotas signalo reikšmes smulkiausiame mastelyje:

$$\mathbf{a}_i^{\mathbf{n}} = 2^{-n/2}(b-a)y_i, \quad i = 0:2^n - 1$$

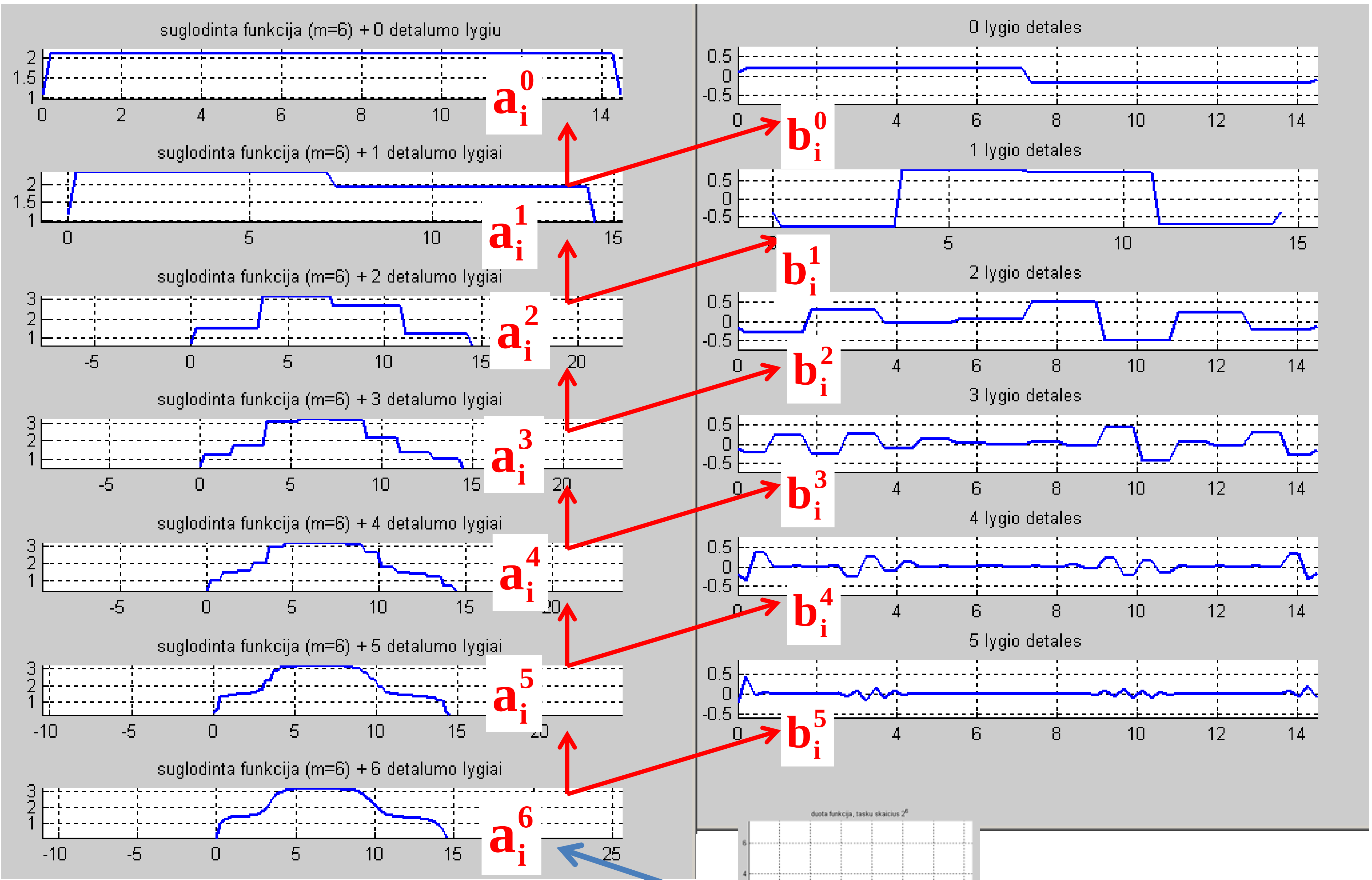
!!! Realizuojant programiškai, stačiakampių frontų priekinis ir galinis “nuliai “ nevaizduojami.
Tam horizontalios bazinių funkcijų dalys labai mažais dydžiais pratesiamos už intervalo ribų

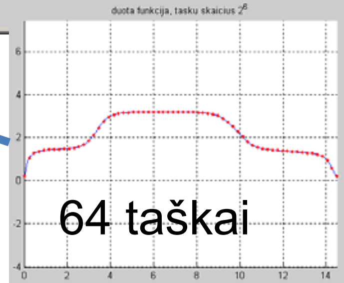
```
function h=Haar_scaling(x,j,k,a,b)   %
eps=1e-9; xtld=(x-a)/(b-a);
xx=2^j*xtld-k; h=2^(j/2)*(sign(xx+eps)-sign(xx-1-eps))/(2*(b-a));
return,end

function h=Haar_wavelet(x,j,k,a,b)
eps=1e-9; xtld=(x-a)/(b-a);
xx=2^j*xtld-k; h=2^(j/2)*(sign(xx+eps)-2*sign(xx-0.5)+sign(xx-1-eps))/(2*(b-a));
return,end
```

Piramidinis algoritmas (formulių suvestinė)

Duoti taškai:	$(x_i, y_i),\ i = 1:2^n$
Suglodinimas smulkiausiame mastelyje:	$a_i^n = 2^{-n/2}(b-a)y_i,\ i = 1:2^n$
Suglodinimo ir detalių koeficientų apskaičiavimas stambesniuse masteliuose:	$a_i^{n-1} = \dfrac{a_{2i-1}^n + a_{2i}^n}{\sqrt{2}};\quad b_i^{n-1} = \dfrac{a_{2i-1}^n - a_{2i}^n}{\sqrt{2}};$ $a_i^{n-2} = \dfrac{a_{2i-1}^{n-1} + a_{2i}^{n-1}}{\sqrt{2}};\quad b_i^{n-3} = \dfrac{a_{2i-1}^{n-1} - a_{2i}^{n-1}}{\sqrt{2}};$ $\vdots$ $a_i^0 = \dfrac{a_1^1 + a_2^1}{\sqrt{2}};\quad b_i^0 = \dfrac{a_1^1 - a_2^1}{\sqrt{2}};$



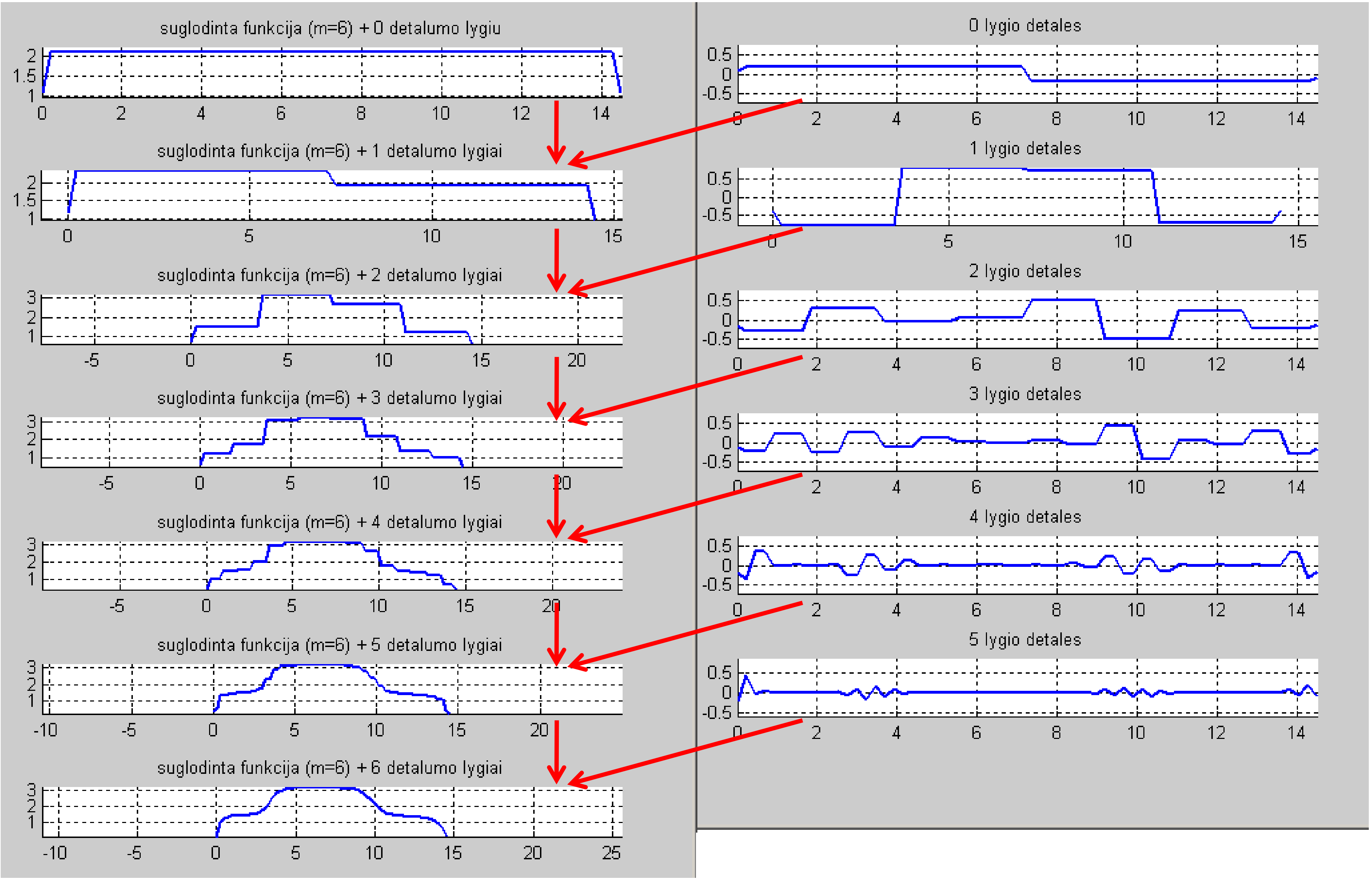


$$\left(x_i, y_i\right), \; i = 1:2^6$$

$$a_i^6 = 2^{-3}(b-a)y_i, \; i = 1:2^6$$

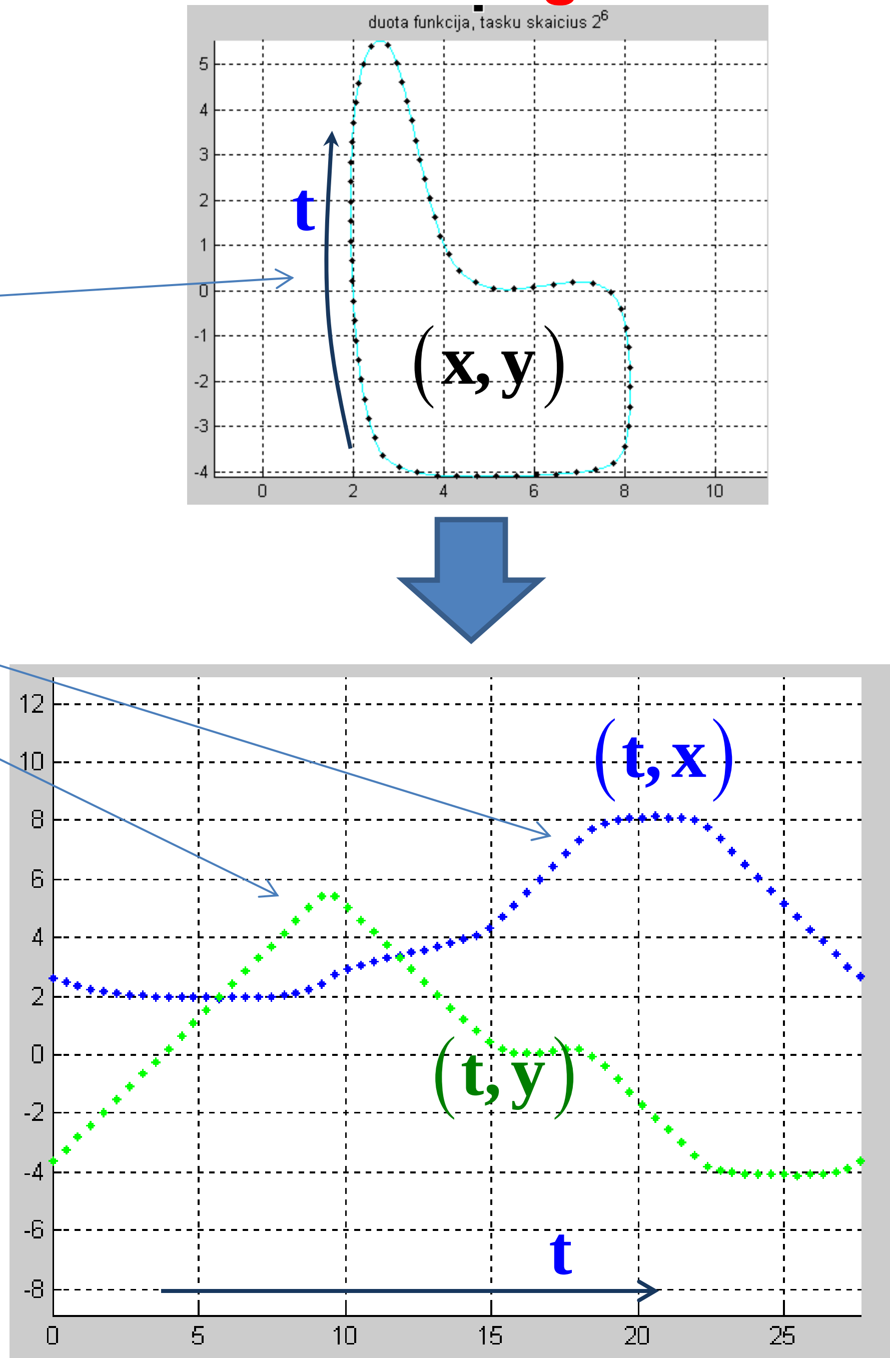
Bangelių koeficientų apskaičiavimas

Bangelėmis aproksimuoto signalo reikšmių apskaičiavimas

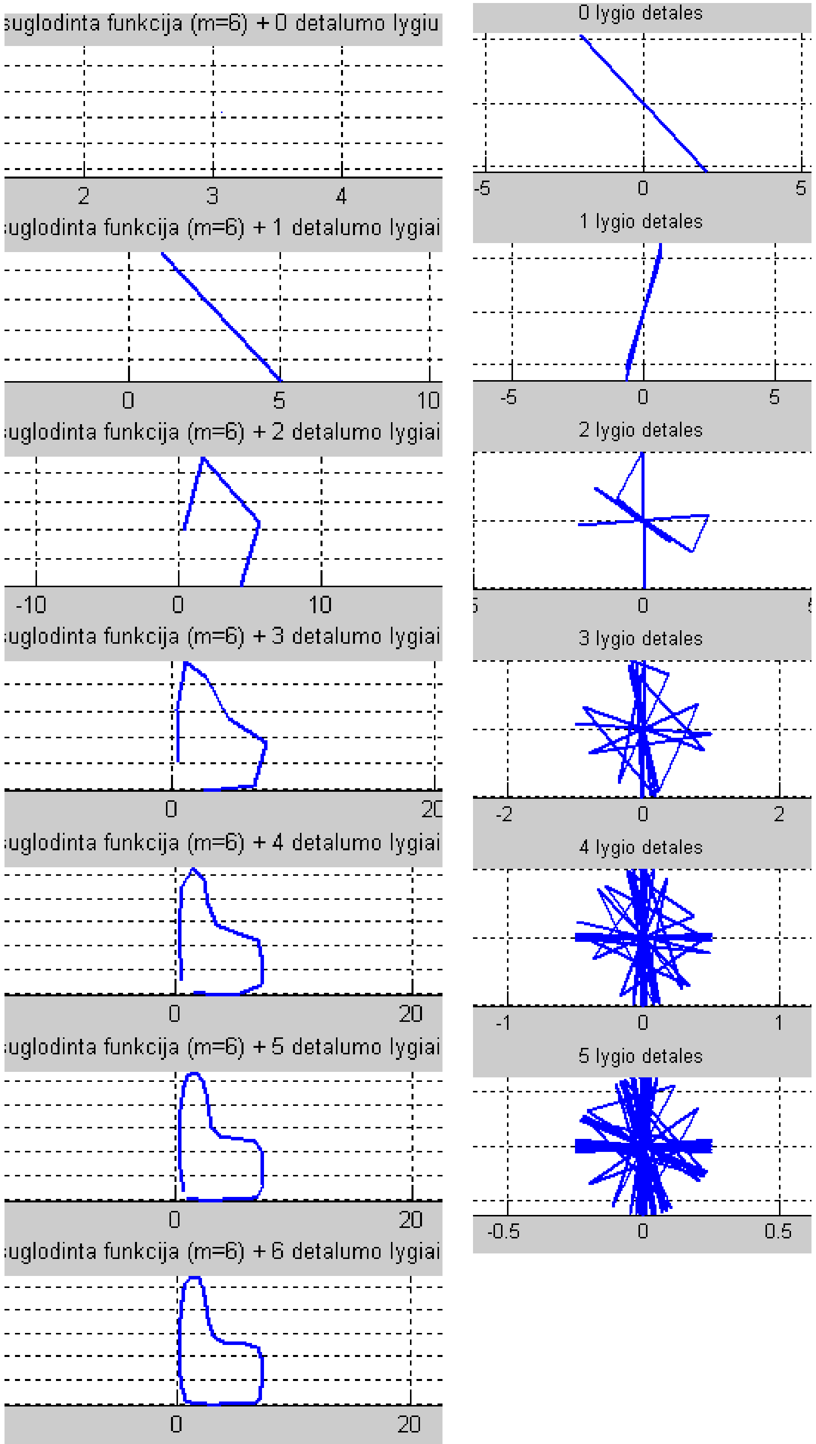


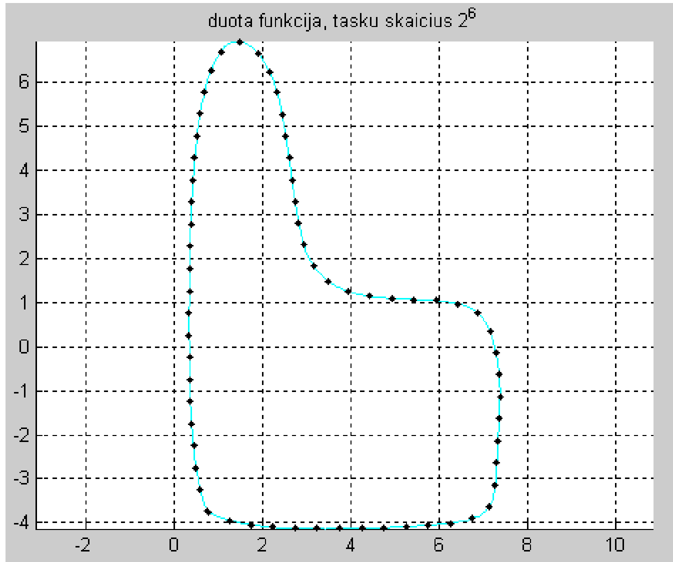
Parametriškai duotų funkcijų aproksimavimas bangelėmis

- Duota taškų seka, aprašanti bendrojo pavidalo *kreivę*
- Sudaromos jos koordinačių priklausomybės nuo parametro
- Didėjančio argumento sekos (t,x) ir (t,y) laikomos dviem nepriklausomais signalais, kurie aproksimuojami bangelėmis



Parametrinis aproksimavimas Haro bangelėmis





- Apskaičiavus aproksimuoto signalo reikšmes, jos vaizduojamos erdvėje (x,y), t.y. eliminuojamas parametras t
- Čia nulinio detalumo lygio suglodinta funkcija yra vienas taškas, kadangi duotoji kreivė yra uždara