Gauso formulės ir skaitinis išvestinių apskaičiavimas

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115/Skaitiniai inzinerijos metodai su MATLAB (KP RG RB)2009

F11.pdf

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115 /Skaitiniai inzinerijos metodai(RB) 2006

I.3.pdf

Gauso formulės. *Optimalus interpoliavimo mazgu parinkimas*

- **Niutono ir Koteso formulės išvedamos, kai tolygiai intervale išdėstytų interpoliavimo mazgų padėtys iš anksto žinomos;**
- **Interpoliavimo mazgus būtų galima parinkti ir kituose intervalo taškuose, siekiant, kad formulės tikslumo eilė būtų kuo aukštesnė;**
- **Jeigu galime parinkti *n* mazgų padėtis ir n svorio koeficientų, kiekvienam jų parinkti svorio keficientą, yra galimybė tenkinti *2n* lygčių, t.y. *integralo skaitinio apskaičiavimo formulės tikslumo eilė būtų 2n-1***

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i), \ -1 \le t_i \le 1$$

Formules išvesime intervalui [-1,1]. Jeigu intervalas kitoks, galima pakeisti kintamąjį:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt$$

Gauso formulių išvedimas *Hemingo būdu. Pavyzdys, kai n=3*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_2^3 \\ t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\ t_1^5 & t_2^5 & t_3^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-1}^{1} 1dt \\ \int_{-1}^{1} tdt \\ \int_{-1}^{1} t^2dt \\ \int_{-1}^{1} t^3dt \\ \int_{-1}^{1} t^4dt \\ \int_{-1}^{1} t^5dt \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Šioje sistemoje nežinomieji yra:

$w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3$

Sudarykime daugianarį:

$$(t-t_1)(t-t_2)(t-t_2)=c_0+c_1t+c_2t^2+t^3;$$

$$c_0+c_1t_i+c_2t_i^{\,2}+t_i^{\,3}=0,\ \ i=1,2,3$$

Kol kas nekreipkime dėmesio, kad t_i nežinomi.
Pakanka, kad bent iš esmės būtų galima sudaryti
tokį daugianarį

$$
\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \\ t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\ t_1^5 & t_2^5 & t_3^5 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix}
$$

Šias lygtis kol kas atmetame

$$c_0 + c_1 t_i + c_2 t_i^{\,2} + t_i^{\,3} = 0,\ \ i = 1, 2, 3$$

$$
0 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}
= -m_3
$$

$$
\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
t_1 & t_2 & t_3 \\
t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\
t_1^3 & t_2^3 & t_2^3 \\
t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\
t_1^5 & t_2^5 & t_3^5
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix}
$$

Šias lygtis kol kas atmetame

$$
t_i\left(c_0 + c_1 t_i + c_2 t_i^2 + t_i^3\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3
$$

$$
0 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}
= -m_4
$$

Šias lygtis kol kas atmetame

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_2^3 \\ t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\ t_1^5 & t_2^5 & t_3^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix}$$

$$t_i^2\left(c_0 + c_1 t_i + c_2 t_i^2 + t_i^3\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$0 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -m_5$$

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_3 \\ -m_4 \\ -m_5 \end{Bmatrix}$$

Ležandro daugianaris

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + t^3 = 0$$

$$roots\left(\begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}\right)$$

$$t_1, t_2, t_3$$

$$w_i = \int_{-1}^{1} L_i(t)\,dt, \quad i = 1, 2, 3$$

```
syms G base
 N=3 % integravimo formules tasku skaicius (tikslumo eile bus 2*N-1)

% baziniai vienanariai
base(1)=sym(1);
for j=2:2*N, base(j)=sym(x^(j-1)); end
```

$$\int_{-1}^{1} t^i dt$$

```
% Vienanariu integralai("momentai"):
m=int(base,-1,1)
```

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_3 \\ -m_4 \\ -m_5 \end{Bmatrix}$$

```
for i=1:N,  A(i,1:N)=m(i:i+N-1); end
b=-m(N+1:2*N)’
c=A\b
coef=[1,c([N:-1:1])'] % Lezandro daugianario koeficientai

xx=sort(roots(eval(coef)));   %optimalus integravimo taskai

 % Svorio koeficientu apskaiciavimas
for j=1:N
    L=1;  for k=1:N, if k ~= j, L=L*(x-xx(k))/(xx(j)-xx(k)); end,
end
    w(j)=int(L,-1,1); % svorio koeficientai
end
```

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$\left(\int_{-1}^{1} L_i(x)dx \right)$$

Gauso ir Ležandro formulės apibrėžtiniam integralui apskaičiuoti

Taškų padėtys intervale [-1,1] | **Taškų skaičius** | **Koeficientai**

-

(Ležandro polinomų nuliai):

$\pm\xi_i$		v_i
	n=2	
0.57735 02691 89626		1.00000 00000 00000
	n=3	
0.00000 00000 00000		0.88888 88888 88889
0.77459 66692 41483		0.55555 55555 55556
	n=4	
0.33998 10435 84856 0.86113 63115 94053		0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
	n=5	
0.00000 00000 00000 0.53846 93101 05683		0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366
0.90617 98459 38664		0.23692 68850 56189
	n=6	
0.23861 91860 83197		0.46791 39345 72691
0.66120 93864 66265		0.36076 15730 48139
0.93246 95142 03152		0.17132 44923 79170

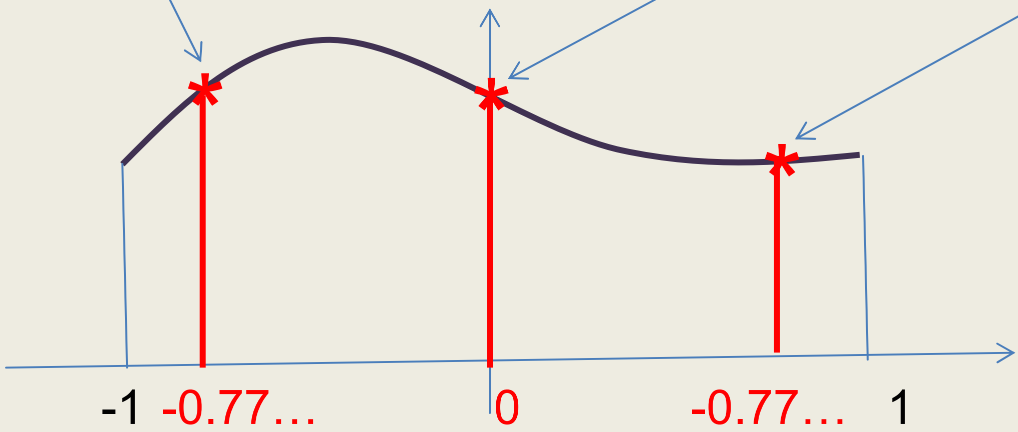
Gauso ir Ležandro formulės apibrėžtiniam integralui apskaičiuoti

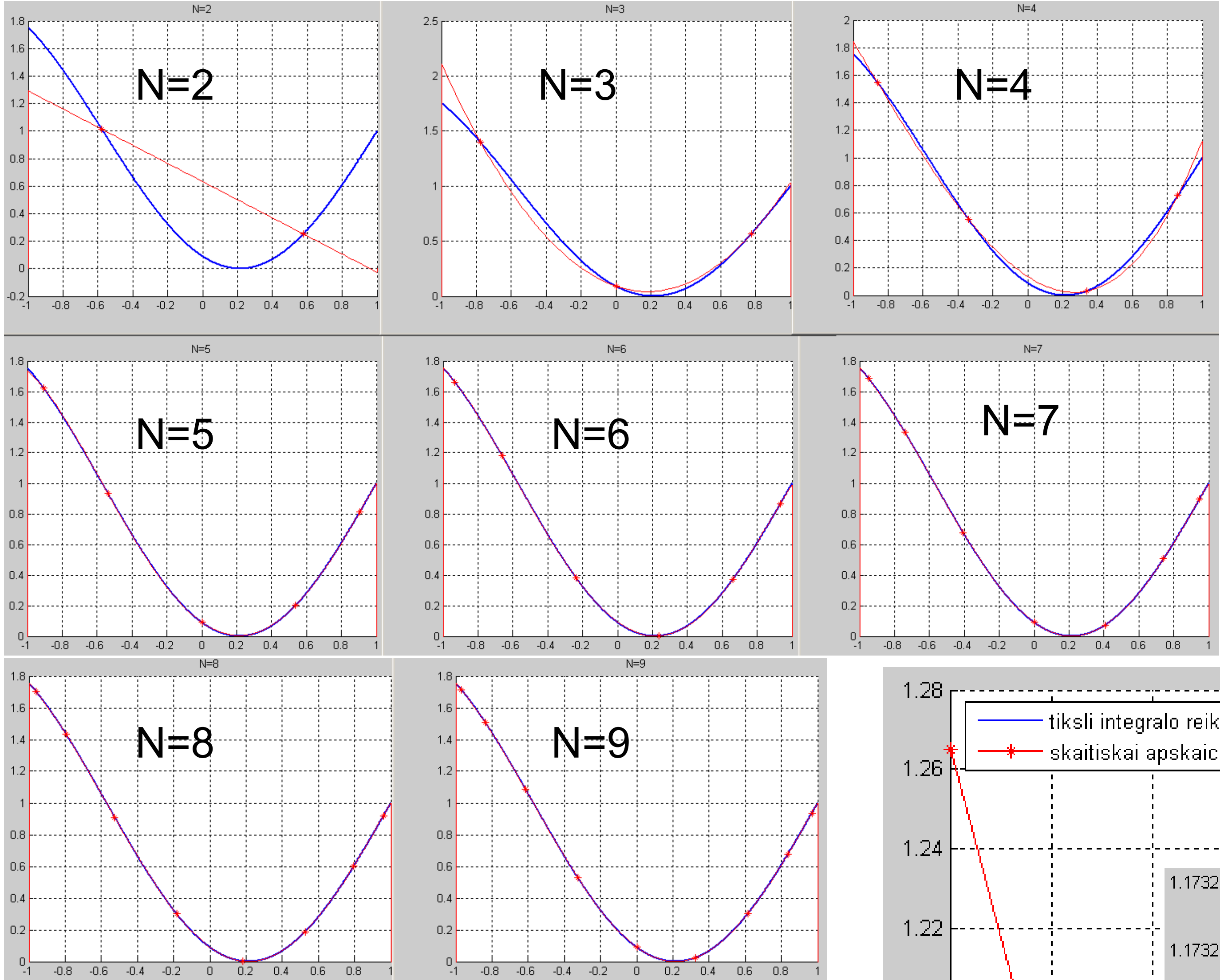
Taškų padėtys intervale [-1,1] | **Taškų skaičius** | **Koeficientai**

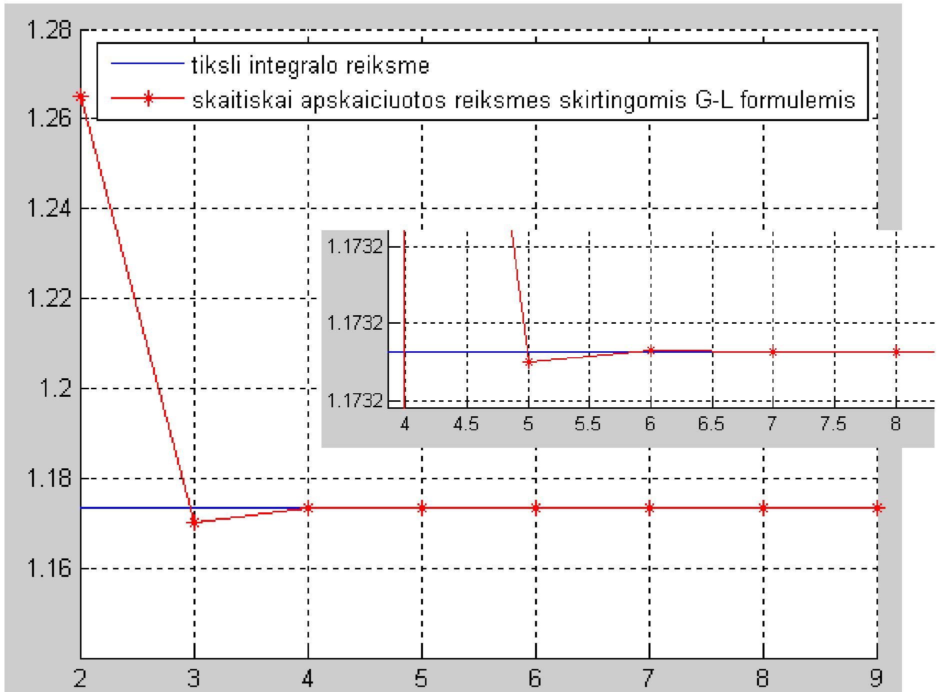
(Ležandro polinomų nuliai):

$\pm\xi_i$		v_i
	n=2	
0.57735 02691 89626		1.00000 00000 00000
	n=3	
0.00000 00000 00000		0.88888 88888 88889
0.77459 66692 41483		0.55555 55555 55556

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.55...*f(-0.77...) + 0.88...*f(0) + 0.55...*f(0.77...)$$

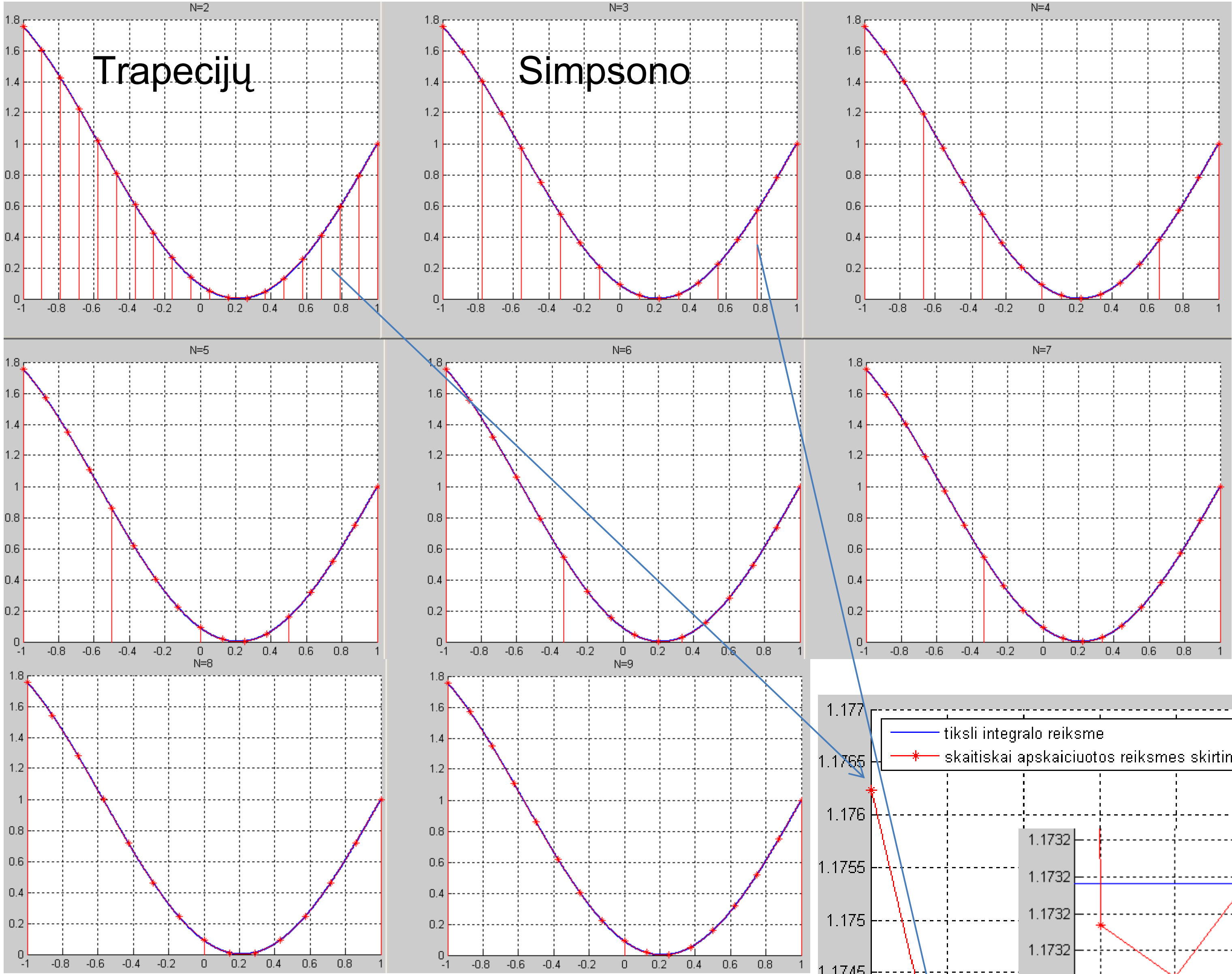


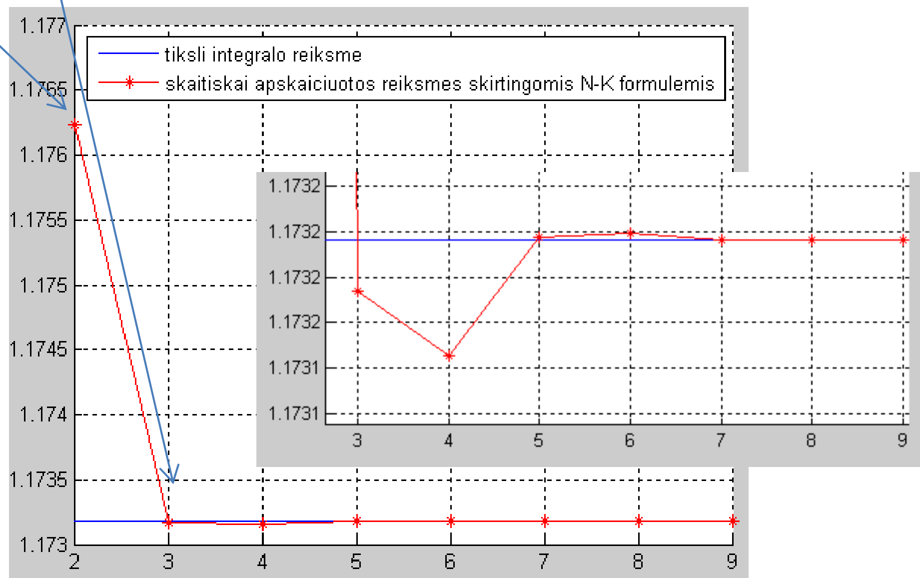




f=sin(2*x-2)+1

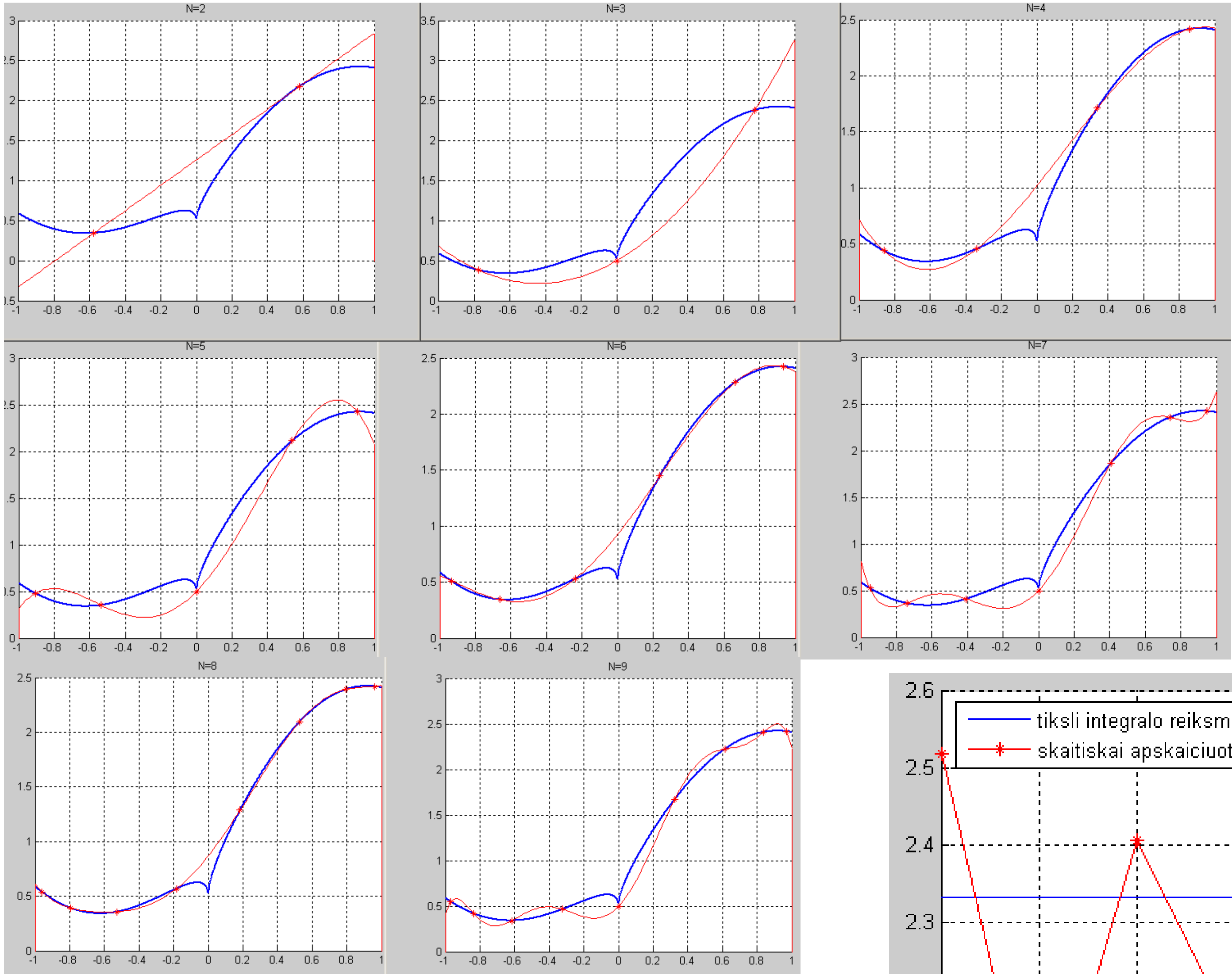
$$f(x) = \sin(2x-2)+1$$

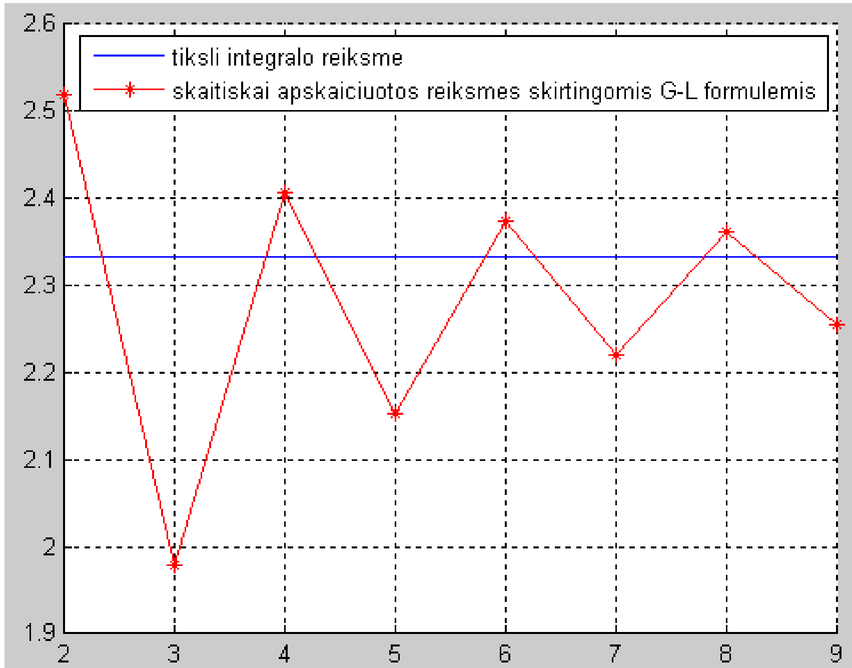




f=sin(2*x-2)+1

$$f(x) = \sin(2x-2) + 1$$





f=sin(2*x)+sqrt(abs(x))+0.5;

$$f\,(x) = \sin(2x) + \sqrt{|x|} + 0.5$$

- Gauso ir Ležandro formulės dažniausiai vartojamos, kai reikia integralą apskaičiuoti viena formule visame intervale(t.y. neskaidant intervalo);
- Sudėtingos funkcijos integralą galima būtų apskaičiuoti, skaidant ją intervalais, ir kiekviename jų taikyti Gauso ir Ležandro formules;
- Prisiminkime, kad skaidymo intervalais priėjimas buvo taikytas Niutono ir Koteso formulių šeimai. Jo rezųltate buvo gautos trapecijų, Simpsono ir kt. formulės

- **Gimininingos išnagrinėtoms Gauso-Ležandro formulėms yra *Gauso-Ermito* ir *Gauso-Legero* formulės**
- ***Gauso-Ermito* formulės skirtos integralui**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-t^2}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

- ***Gauso-Legero* formulės skirtos integralui**

$$\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-t}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

Gauso ir Ermito formulės netiesioginiam integralui apskaičiuoti

Taškų padėtys intervale [0,Inf]

Taškų skaičius

Koeficientai

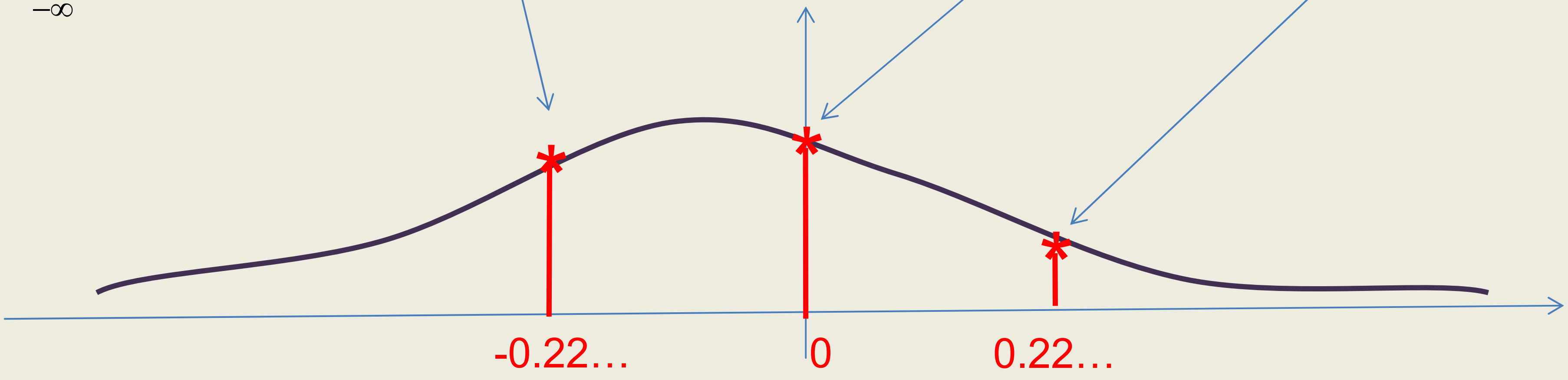
$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-t^2}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

ξ_i		ν_i
	n=2	
0.70710 67811 86548		1.46114 11826 611
	n=3	
0.00000 00000 00000		0.18163 59006 037
0.22474 48713 91589		0.32393 11752 136
	n=4	
0.52464 76232 75290		1.05996 44828 950
1.65068 01238 85785		1.24022 58176 958
	n=5	
0.00000 00000 00000		0.94530 87204 829
0.95857 24646 13819		0.98658 09967 514
2.02018 28704 56086		1.18148 86255 360

Gauso ir Ermito formulės netiesioginiam integralui apskaičiuoti

ξ_i		ν_i
	n=2	
0.70710 67811 86548		1.46114 11826 611
	n=3	
0.00000 00000 00000		0.18163 59006 037
0.22474 48713 91589		0.32393 11752 136

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-t^2}dt = 0.32\ldots * f(-0.22\ldots) + 0.18\ldots * f(0) + 0.32\ldots * f(0.22\ldots)$$



Gauso ir Legero formulės netiesioginiam integralui apskaičiuoti

Taškų padėtys intervale [0,Inf]

Taškų skaičius

Koeficientai

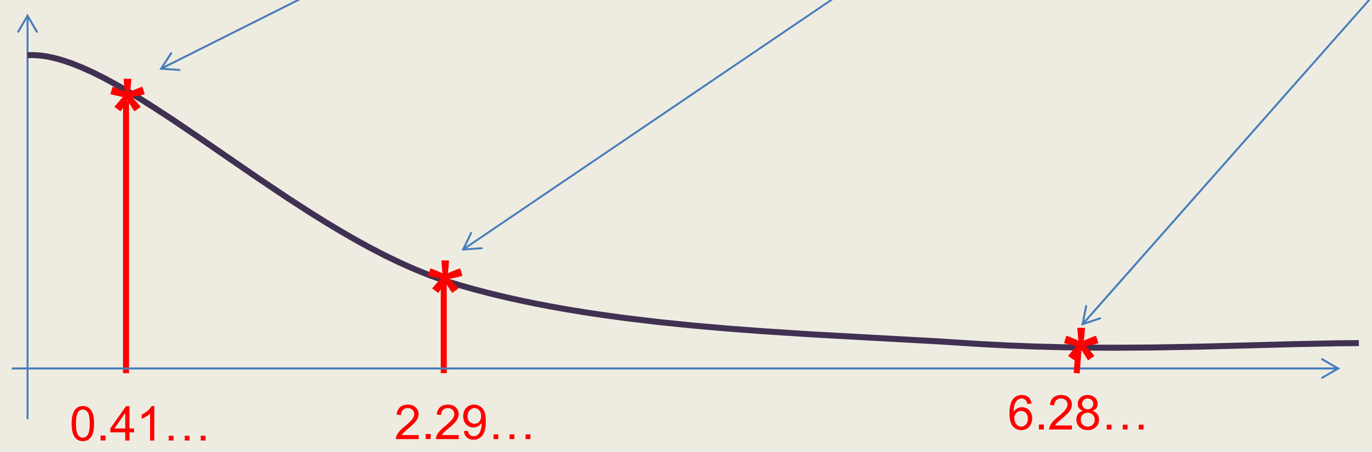
$$\int_0^\infty f(t)e^{-t}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

ξ_i		ν_i
	n=2	
0.58578 6437627		1.53332 603312
3.41421 3562373		4.45095 733505
	n=3	
0.41577 4556783		1.07769 286927
2.29428 0360279		2.76214 296190
6.28994 5082937		5.60109 462543
	n=4	
0.32254 7689619		0.83273 912383
1.74576 1101158		2.04810 243845
4.53662 0296921		3.63114 630582
9.39507 0912301		6.48714 508441

Gauso ir Legero formulės netiesioginiam integralui apskaičiuoti

ξ_i		ν_i
	n=2	
0.58578 6437627		1.53332 603312
3.41421 3562373		4.45095 733505
	n=3	
0.41577 4556783		1.07769 286927
2.29428 0360279		2.76214 296190
6.28994 5082937		5.60109 462543

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-t}dt = 1.07\ldots * f(0.41\ldots) + 2.76\ldots * f(2.29\ldots) + 5.60\ldots * f(6.28\ldots)$$



- **Apibrėžtinio integralo skaitinio apskaičiavimo formulės dar vadinamos *kvadratūrinėmis formulėmis* (žodį “kvadratas” laikant “ploto” sinonimu)**

- **Gimininingas yra dvilypio integralo, arba tūrio apskaičiavimo uždavinys. Tokios formulės dar vadinamos *kubatūrinėmis formulėmis* (žodį “kubas” laikant “tūrio” sinonimu)**

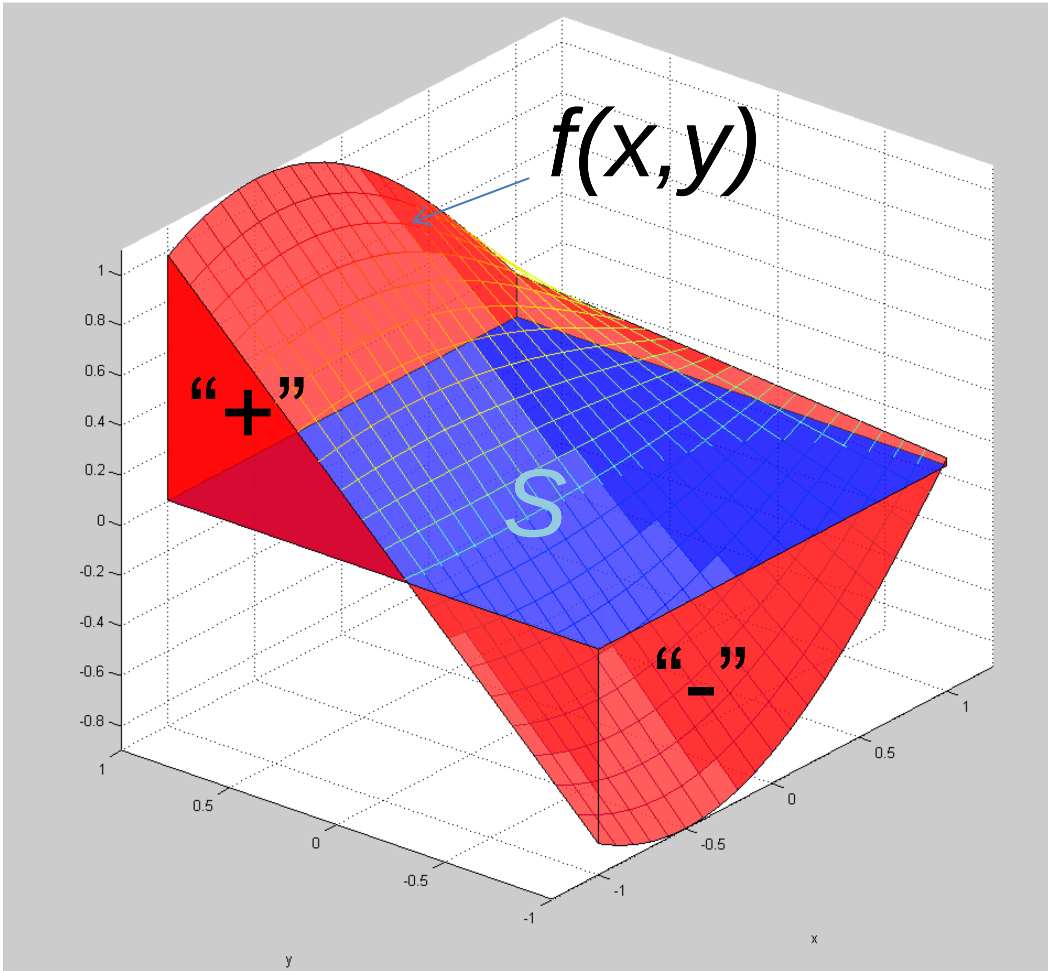
Dvilypis integralas. *Apibrėžimas ir geometrinė prasmė*

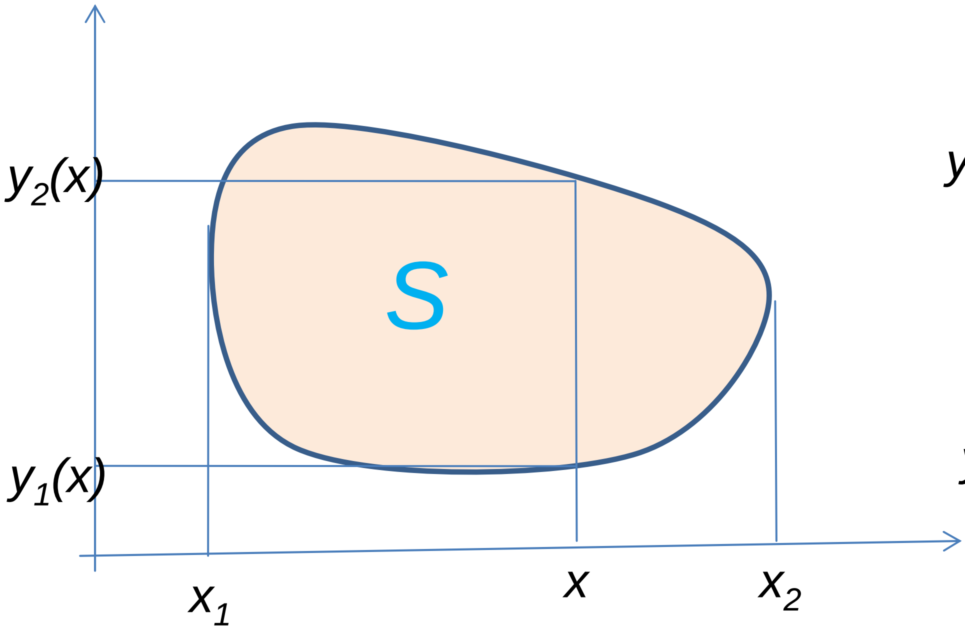
Duotos *funkcijos f(x,y) dvilypis integralas argumentų srityje S* – tai suminė reikšmė su ženklu imamo tūrio, kurį apriboja funkcijos paviršius,

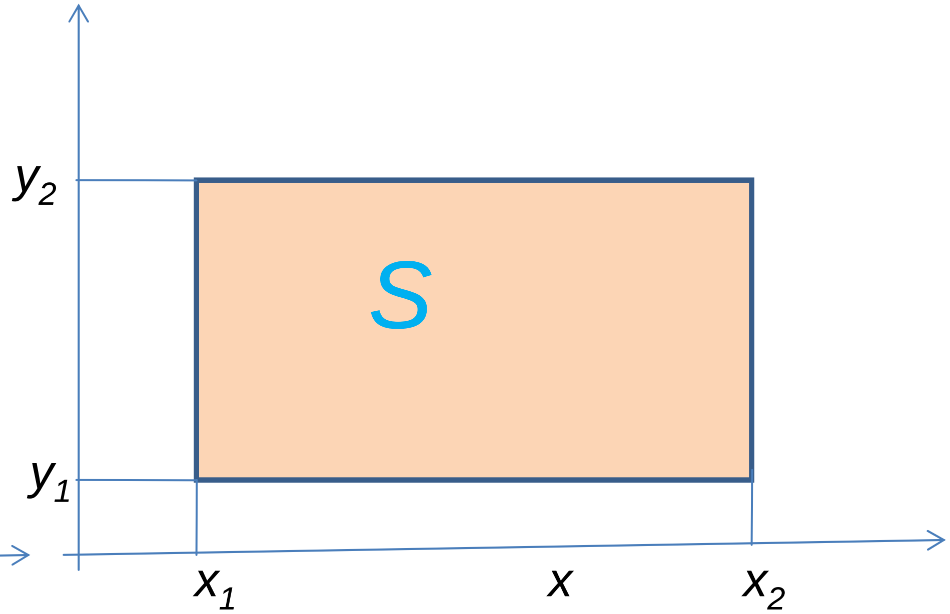
•xOy plokštuma ir

•cilindrinis paviršius, kurio sudaromoji lygiagreti z ašiai ir praeina srities *S* kontūru, imamas nuo xOy plokštumos iki funkcijos paviršiaus

$$\iint_S f(x,y)dxdy$$



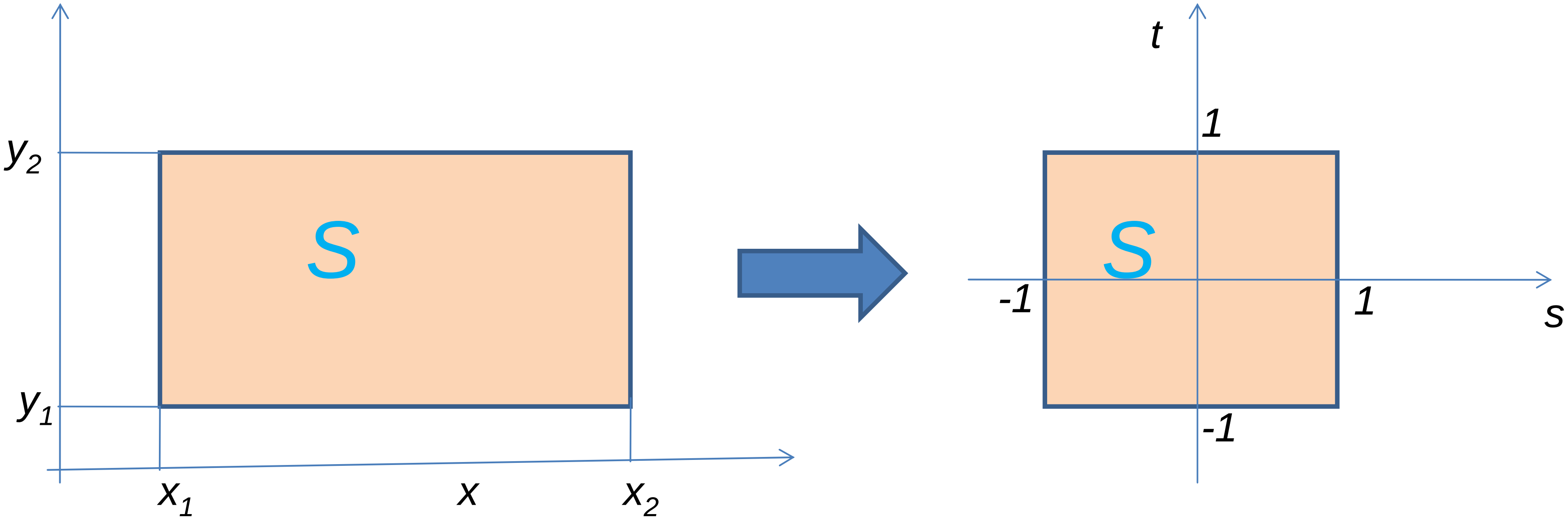




$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \qquad \iint_S f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\right)dx$$

Nuo x priklausantys dydžiai

Pastovūs dydžiai



$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right)dx \Longrightarrow \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(s,t)\,dt\right)ds$$

$$x=\frac{x_2-x_1}{2}t+\frac{x_2+x_1}{2}$$

$$y=\frac{y_2-y_1}{2}t+\frac{y_2+y_1}{2}$$

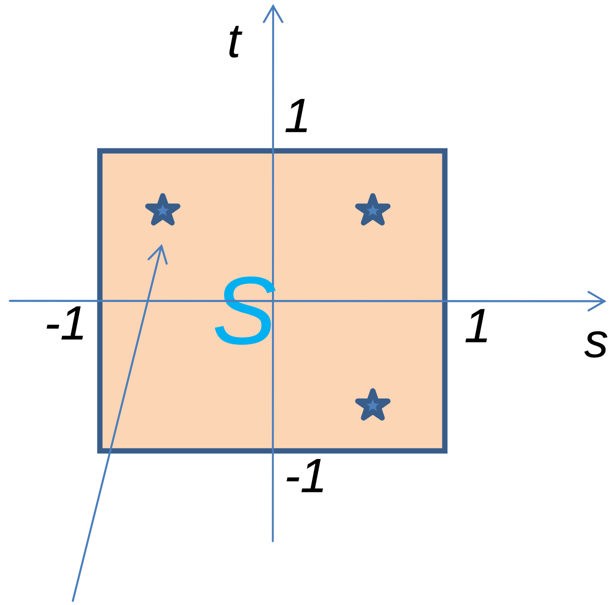
- Skaitinio integravimo formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti stačiakampėje srityje gaunamos, taikant Gauso ir Ležandro metodą;

- Kai sritis ne stačiakampė, taikomos koordinačių transformacijos , sukuriančios nestačiakampės srities vaizdą stačiakampyje. Tokiu būdu gaunamos integravimo taškų koordinatės nestačiakampėje srityje

Skaitinio integravimo formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti *stačiakampėje srityje* gaunamos, taikant Gauso ir Ležandro metodą:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(s,t)dt\right)ds = \sum_{j=1}^{n_s}\left(w_j \sum_{i=1}^{n_t} w_i f(s_j, t_i)\right)$$

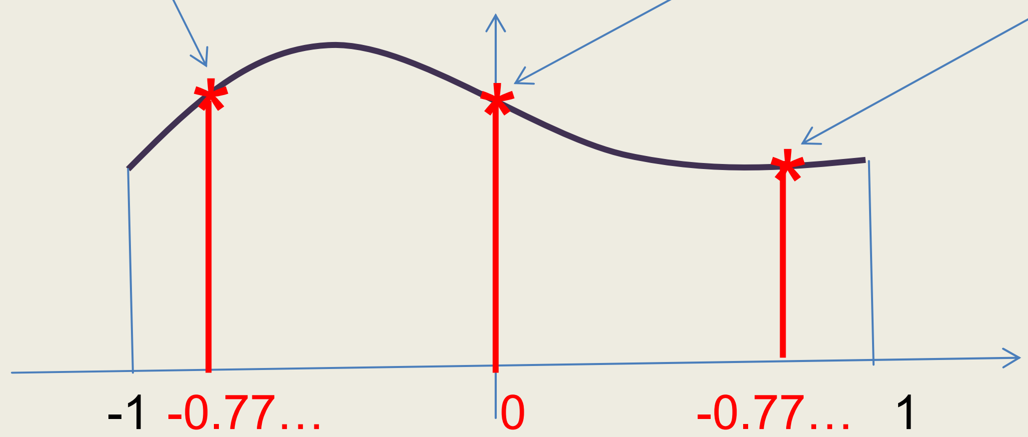
$$-1 \le s_i \le 1,\ -1 \le t_i \le 1$$

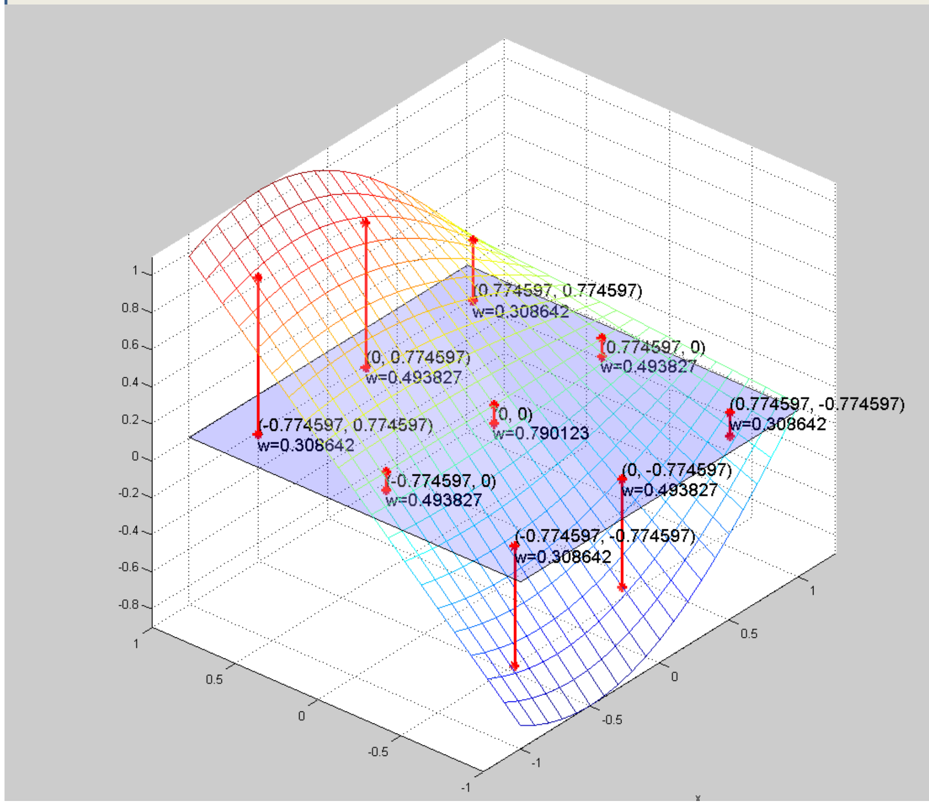


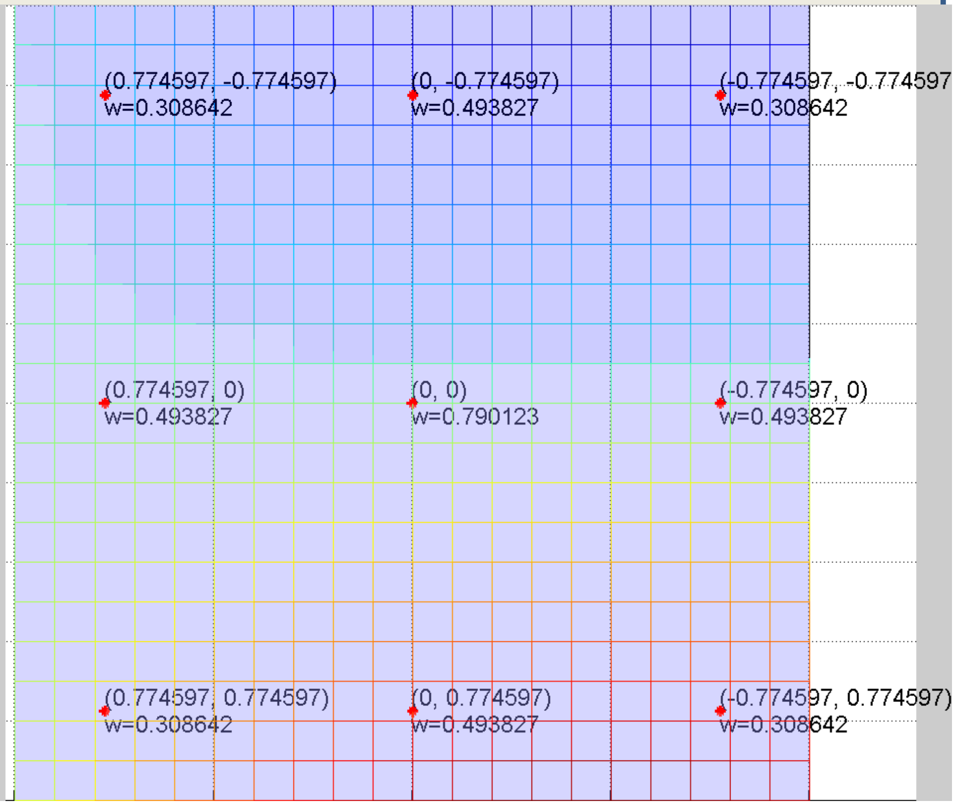
Integravimo taškas *(i,j)*
Svoris $w_i w_j$

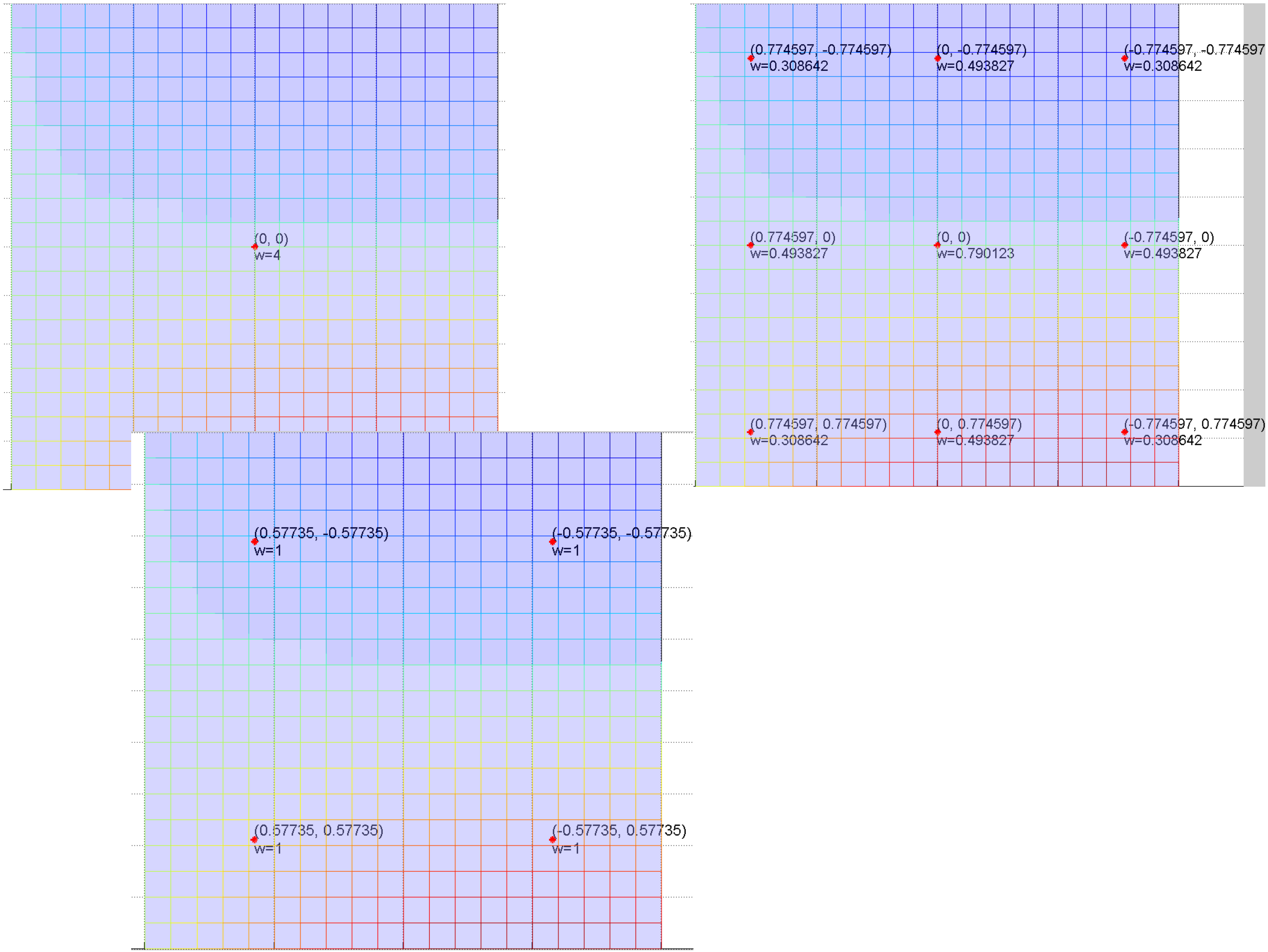
Taškų koordinatės pagal abi ašis parenkamos tokios pat, kaip ir taikant Gauso ir Ležandro metodą integruojant pagal vieną kintamąjį

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.55...* f(-0.77...) + 0.88...* f(0) + 0.55...* f(0.77...)$$



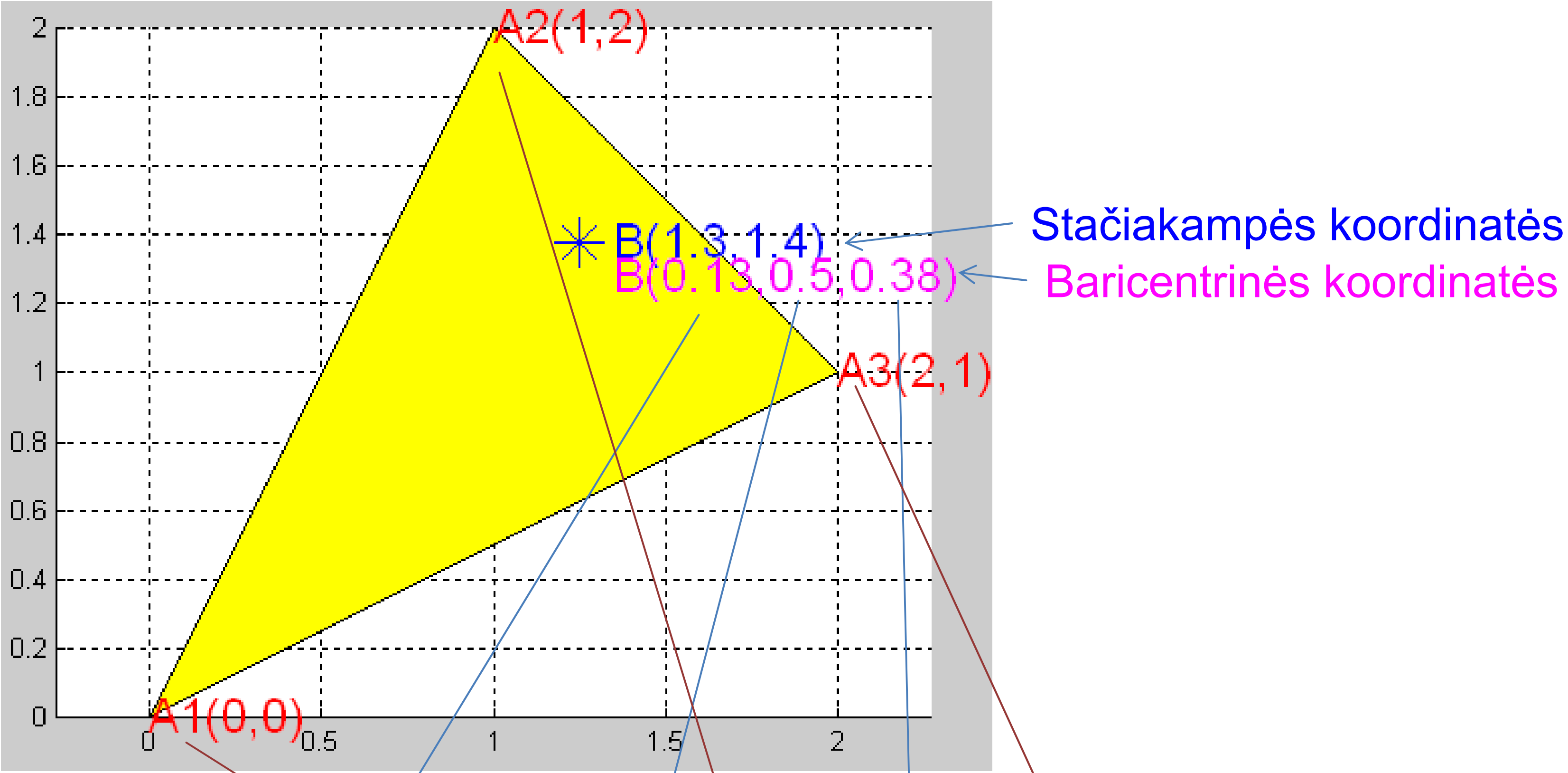





(0, 0)
w=4
(0.774597, -0.774597)
w=0.308642
(0, -0.774597)
w=0.493827
(-0.774597, -0.774597
w=0.308642
(0.774597, 0)
w=0.493827
(0, 0)
w=0.790123
(-0.774597, 0)
w=0.493827
(0.774597, 0.774597)
w=0.308642
(0, 0.774597)
w=0.493827
(-0.774597, 0.774597)
w=0.308642
(0.57735, -0.57735)
w=1
(-0.57735, -0.57735)
w=1
(0.57735, 0.57735)
w=1
(-0.57735, 0.57735)
w=1

Skaitinio integravimo formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti *trikampėje srityje*

- Kai sritis ne stačiakampė, Gauso-Ležandro integravimo taškai išreiškiami per *baricentrines koordinates*;
- Taikant baricentrines koordinates, bet kurio trikampiui priklausančio taško koordinatės išreiškiamos *viršūnių koordinačių svertinės sumos pavidale;*
- Taško *baricentrinės koordinatės yra viršūnių koordinačių daugikliai* taško koordinačių išraiškoje;
- Baricentrinių koordinačių suma visuomet =1



$$B = 0.125*(0,0) + 0.5*(1,2) + 0.375*(2,1) = (1.3, 1.4)$$

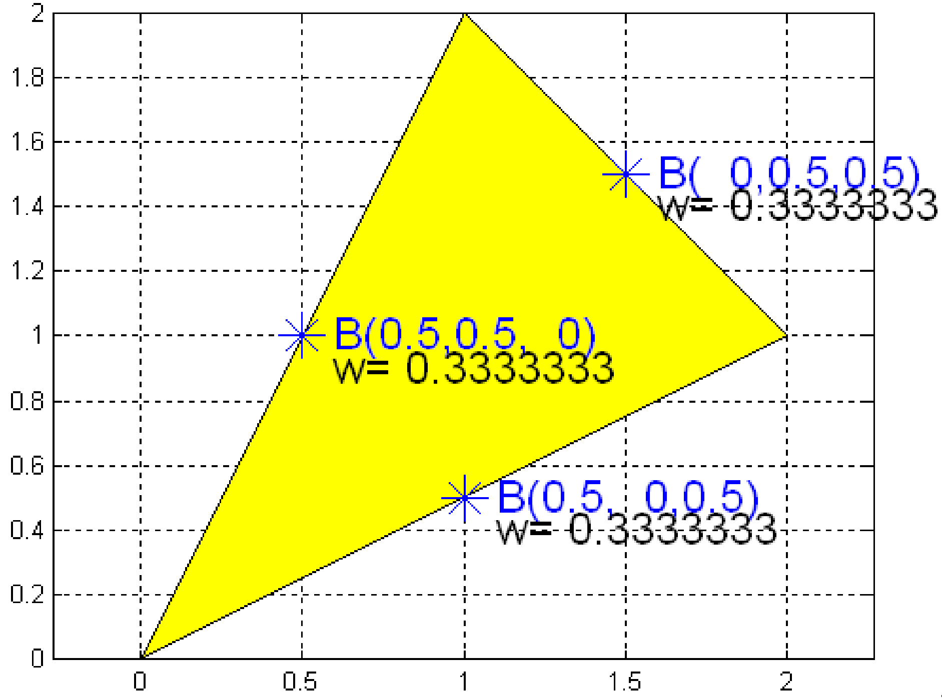
$$0.125 + 0.5 + 0.375 = 1$$

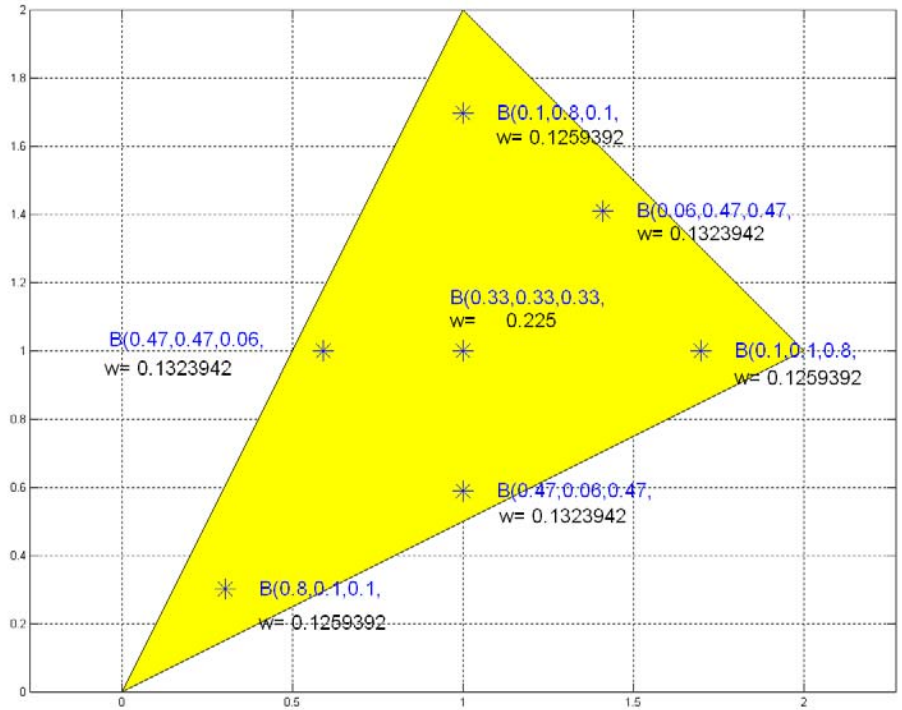
Baricentrinių koordinačių suma visuomet =1

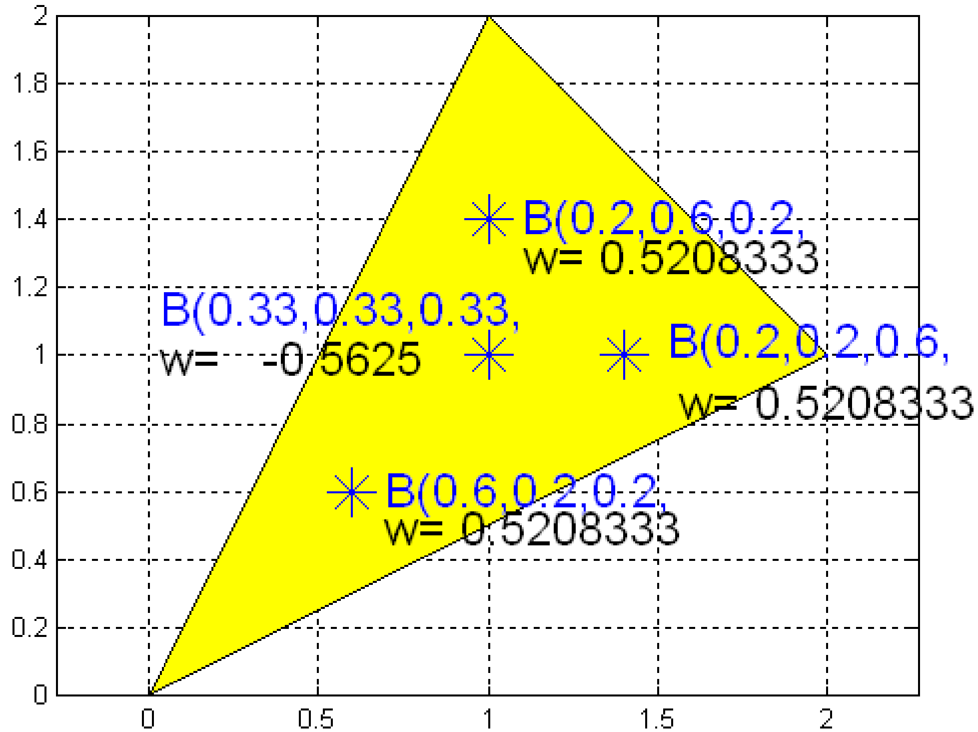
Gauso ir Ležandro skaitinio integravimo taškai *trikampėje srityje:*

$$\int_S f(t,s)\,ds\,dt = A\sum_{i=1}^{n} w_i f_i$$

Trikampio plotas

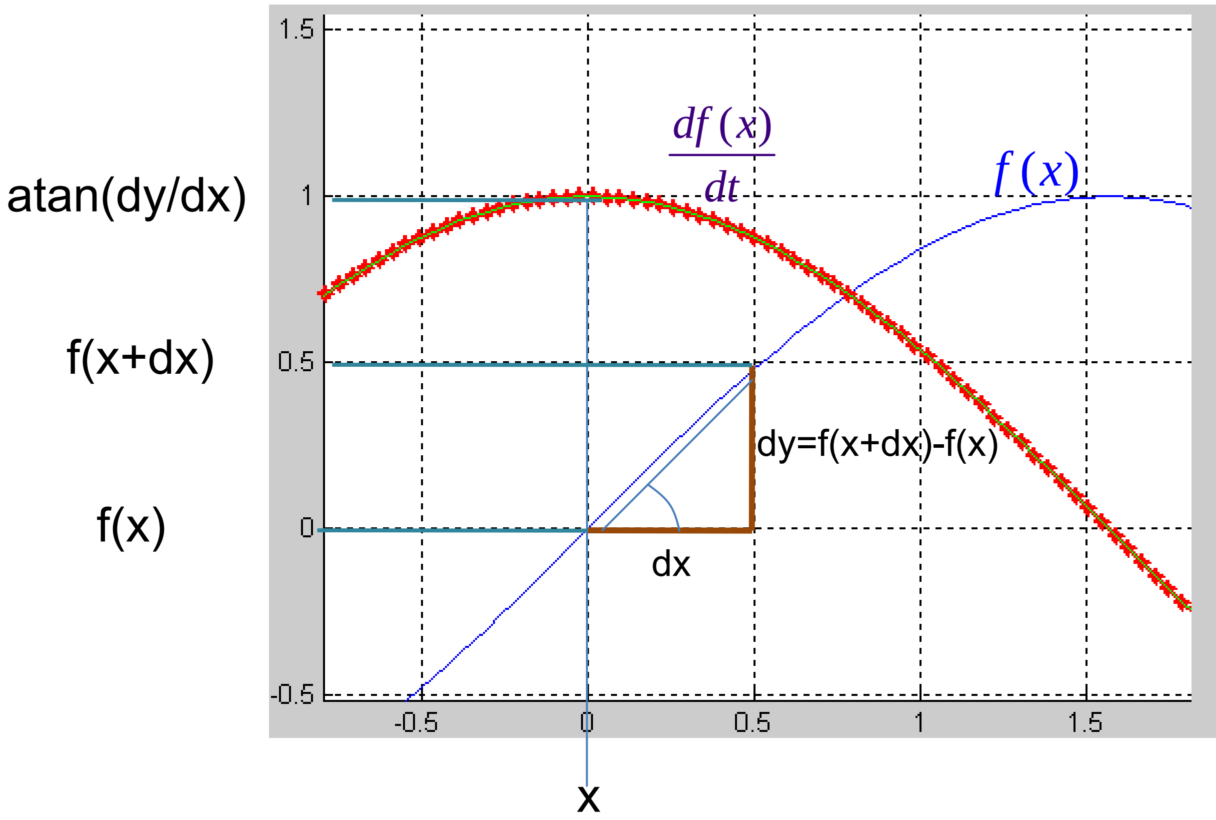






Skaitinis išvestinių apskaičiavimas

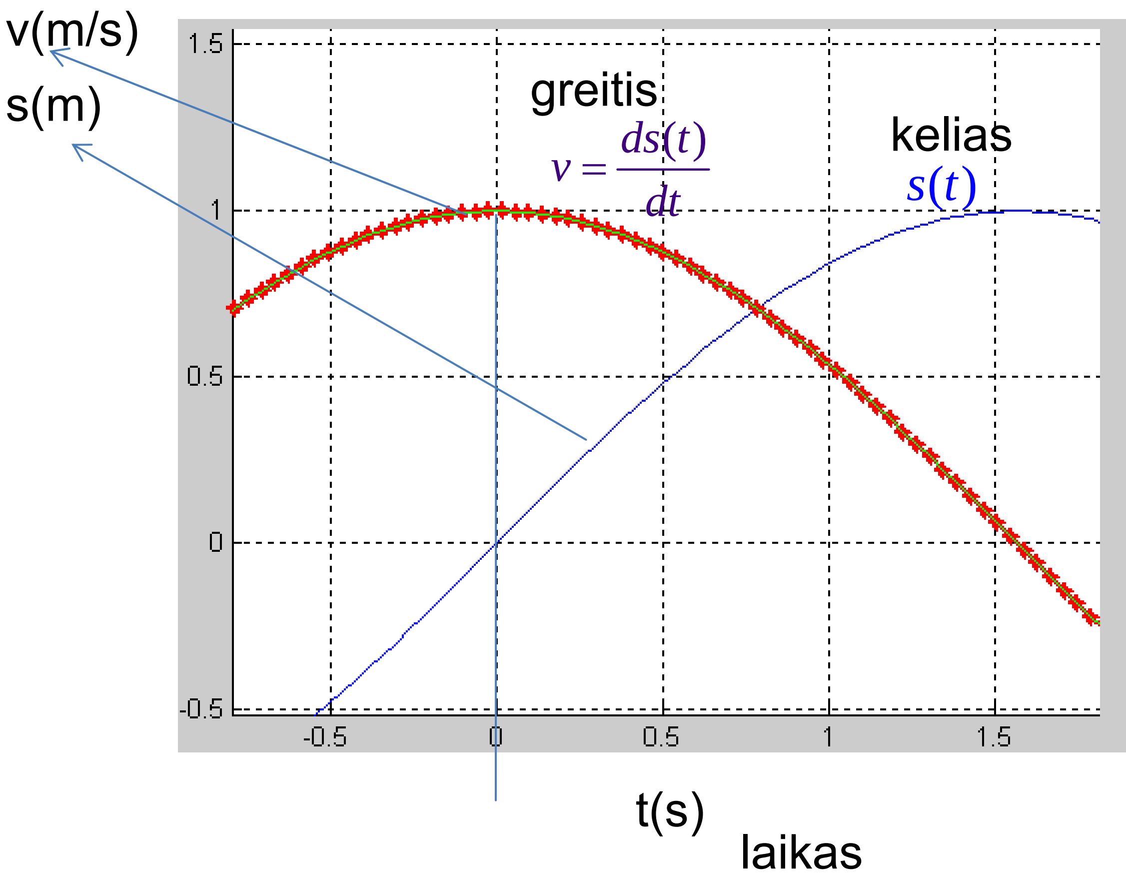
Funkcijos f(x) išvestinė yra funkcija, **kurios reikšmė kiekviename taške x yra kampo, kurį taške x sudaro funkcija f(x) su Ox ašimi, tangentas**



$$\frac{df(x)}{dt} \approx \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx};$$

$$\frac{df(x)}{dt} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

- *Funkcijos išvestinė nusako **funkcijos reikšmės kitimo spartą** kiekviename taške;*
- *Funkciją ir jos išvestinę dėl patogumo dažnai vaizduojame tose pačiose ašyse. Tačiau **funkcijos ir jos išvestinės reikšmes tiesiogiai lyginti tarpusavyje yra nekorektiška. Jos matuojamos skirtingais vienetais.***



Paprančiausia būtų funkcijos išvestinę skaitiškai apskaičiuoti, remiantis jos apytikslės reikšmės apibrėžimu:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Tai įmanoma, jeigu funkcija duota analitiškai ir jos reikšmę galima apskaičiuoti, parinkus labai mažą argumento reikšmės prieaugį.

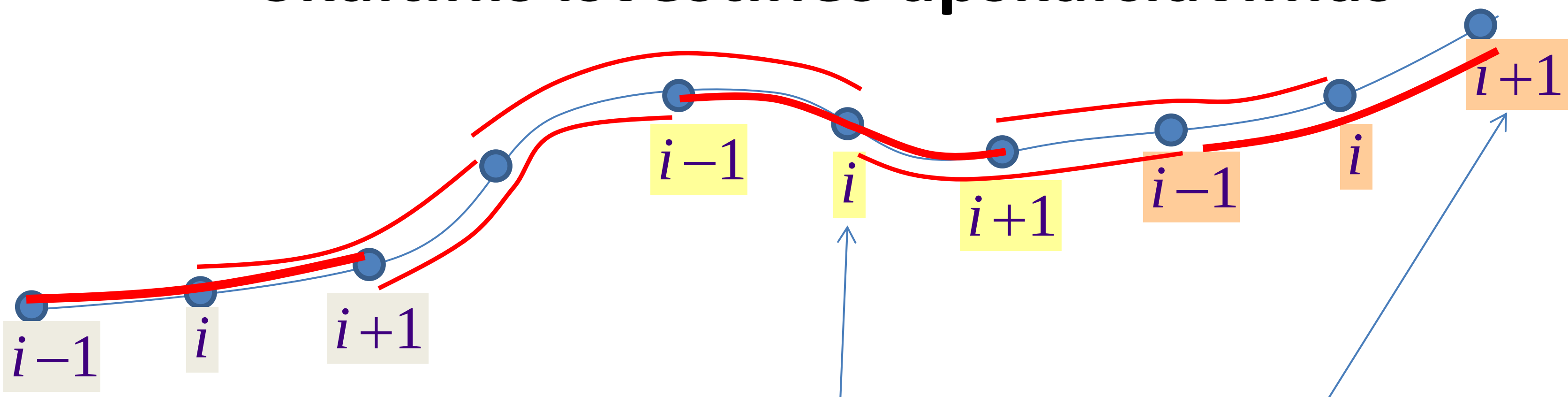
Skaičiavimo pagal išvestinės apytikslės reikšmės apibrėžimą trūkumai:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- **Kiekvienai išvestinės reikšmei reiktų 2 kartus apskaičiuoti funkcijos reikšmę – *neracionalu*;**
- **Jeigu funkcija duota tik diskrečiuose taškuose, nėra galimybės apskaičiuoti funkcijos reikšmę, suteikus labai mažą argumento prieaugį – *menkas tikslumas***

Tobulesni skaitinio išvestinės apskaičiavimo *(skaitinio diferencijavimo)* algoritmai yra paremti *interpoliavimu daugianariais*, kai funkcija duota tolygiai intervale išdėstytuose taškuose

Skaitinis išvestinės apskaičiavimas



$$f(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f_{i+1}$$

$$f^{'}(x)=\frac{(x-x_i)+(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})+(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f_i+\frac{(x-x_{i-1})+(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f_{i+1}$$

$$f^{'}(x_{i-1}),\ f^{'}(x_i),\ f^{'}(x_{i+1})$$

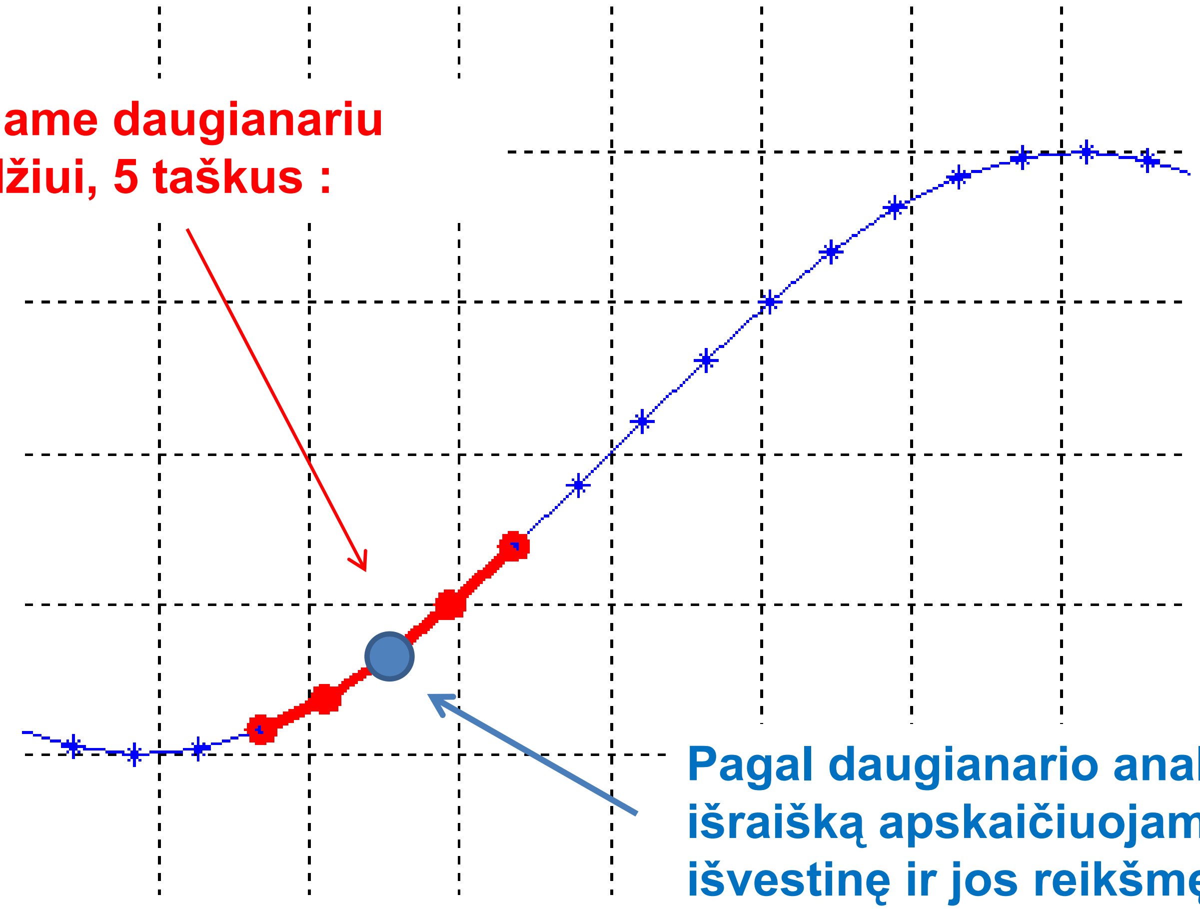
Kairiajame taške

Vidiniuose taškuose

dešiniajame taške

Aukštesniųjų eilių skaitinio diferencijavimo formulių išvedimas, panaudojant skaičiavimą simboliais

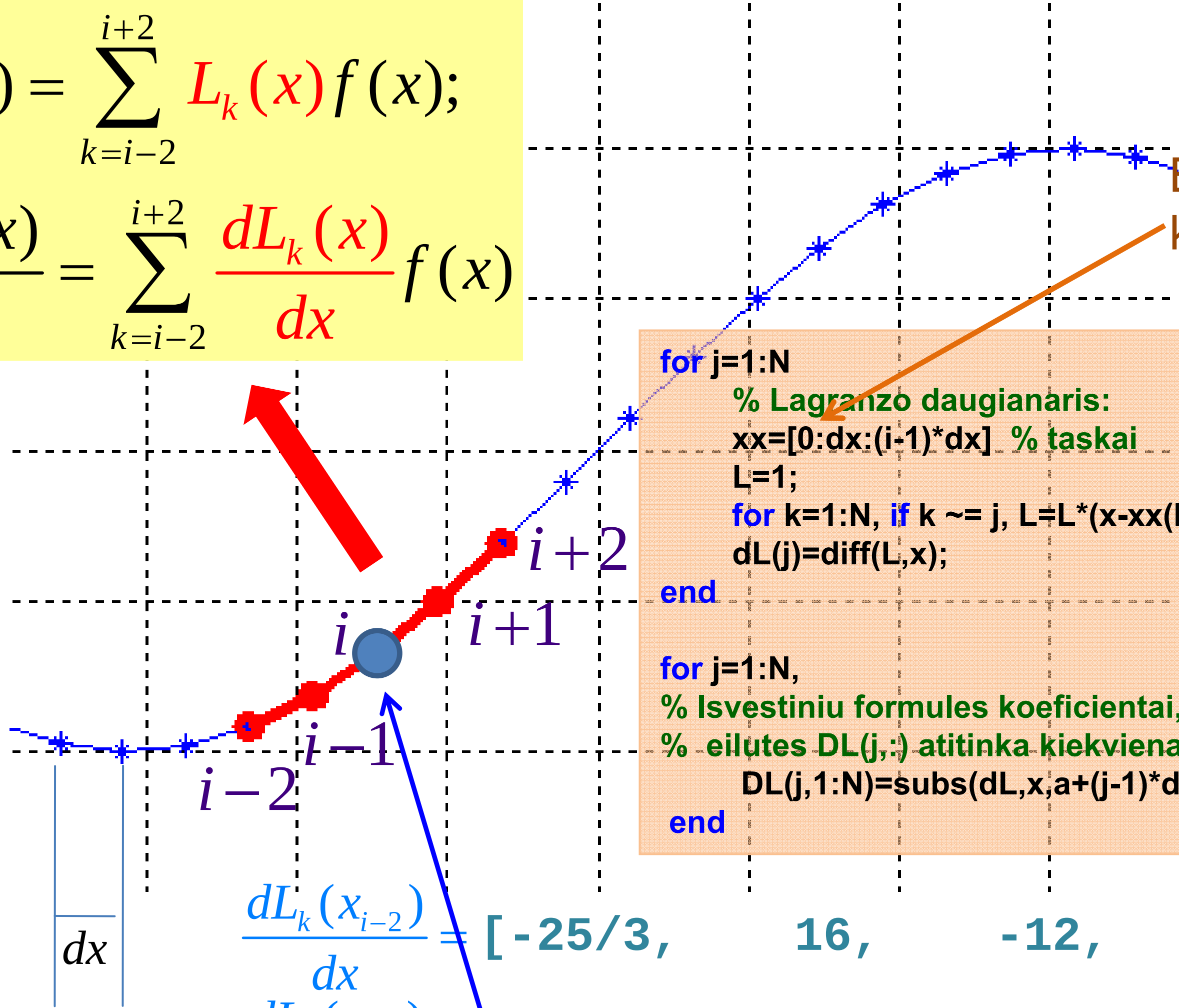
Interpoliuojame daugianariu per, pavyzdžiui, 5 taškus :



Pagal daugianario analitinę išraišką apskaičiuojame išvestinę ir jos reikšmę centriniame taške

$$f(x)=\sum_{k=i-2}^{i+2} L_k(x) f(x);$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\sum_{k=i-2}^{i+2} \frac{dL_k(x)}{dx} f(x)$$



Bet kurio taškų penketo koeficientai yra tokie patys

```
for j=1:N
        % Lagranzo daugianaris:
        xx=[0:dx:(i-1)*dx]  % taskai
        L=1;
        for k=1:N, if k ~= j, L=L*(x-xx(k))/(xx(j)-xx(k)); end, end
        dL(j)=diff(L,x);
end

for j=1:N,
% Isvestiniu formules koeficientai,
%  eilutes DL(j,:) atitinka kiekvienam isvestines apskaiciavimo taskui
        DL(j,1:N)=subs(dL,x,a+(j-1)*dx);
 end
```

$$\frac{dL_k(x_{i-2})}{dx} = [-25/3,\ 16,\ -12,\ 16/3,\ -1\ ]/(4*dx)$$

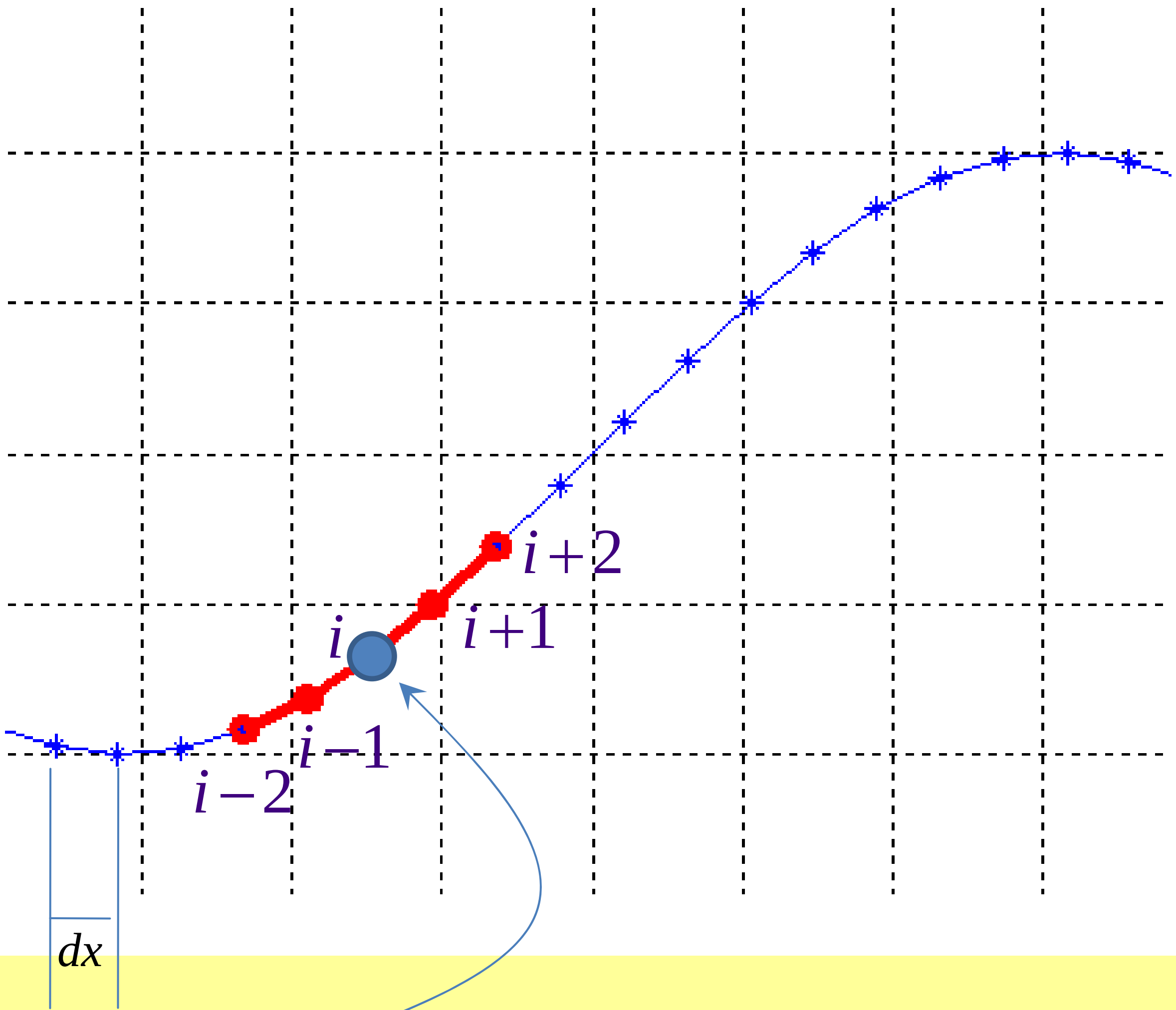
$$\frac{dL_k(x_{i-1})}{dx} = [\ -1,\ -10/3,\ 6,\ -2,\ 1/3\ ]/(4*dx)$$

"centrinė" formulė

$$\frac{dL_k(x_{i})}{dx} = [\ 1/3,\ -8/3,\ 0,\ 8/3,\ -1/3\ ]/(4*dx)$$

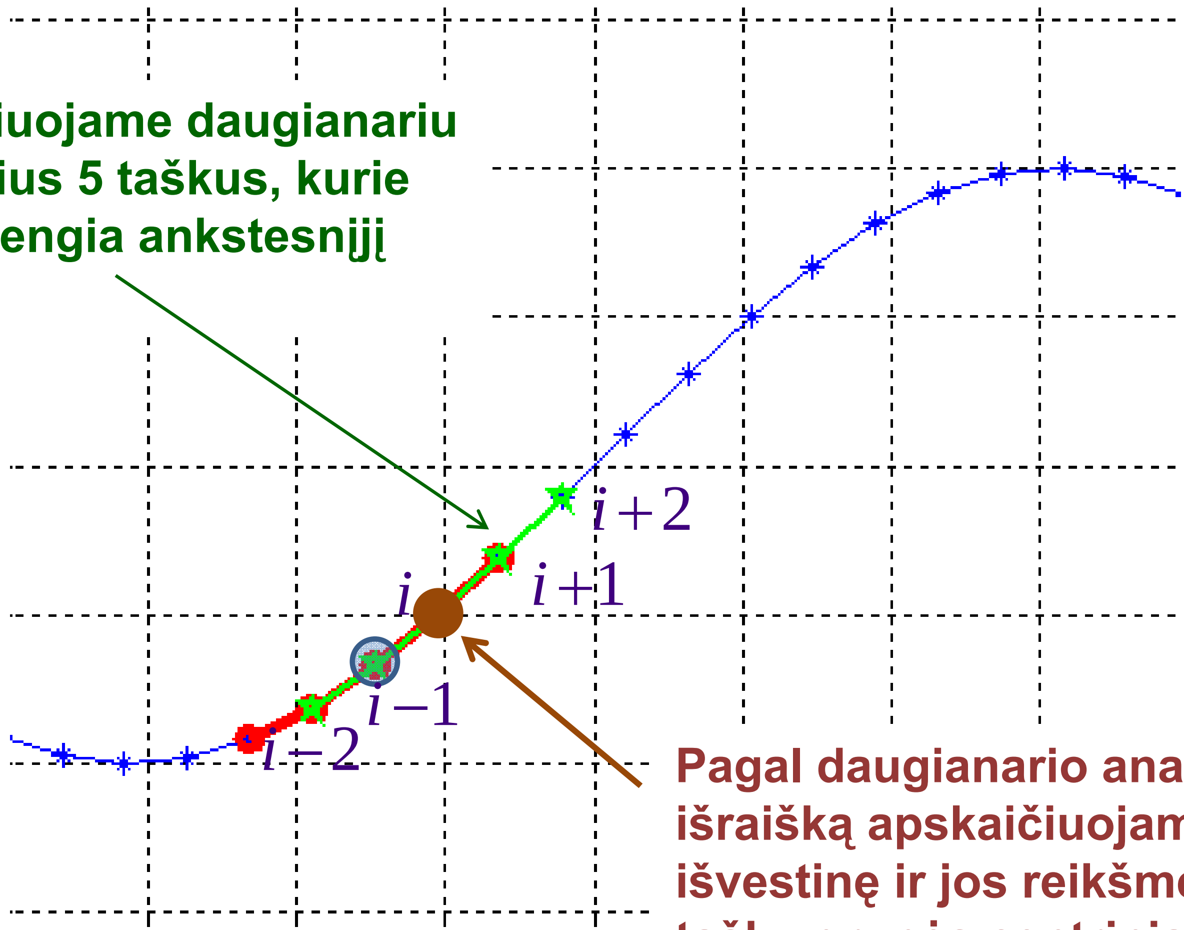
$$\frac{dL_k(x_{i+1})}{dx} = [\ -1/3,\ 2,\ -6,\ 10/3,\ 1\ ]/(4*dx)$$

$$\frac{dL_k(x_{i+2})}{dx} = [\ 1,\ -16/3,\ 12,\ -16,\ 25/3\ ]/(4*dx)$$



$$\frac{df(x_i)}{dx} = \sum_{k=i-2}^{i+2} \frac{dL_k(x)}{dx} f(x_i) = \frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix} 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_{i-2}) \\ f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \\ f(x_{i+2}) \end{Bmatrix}$$

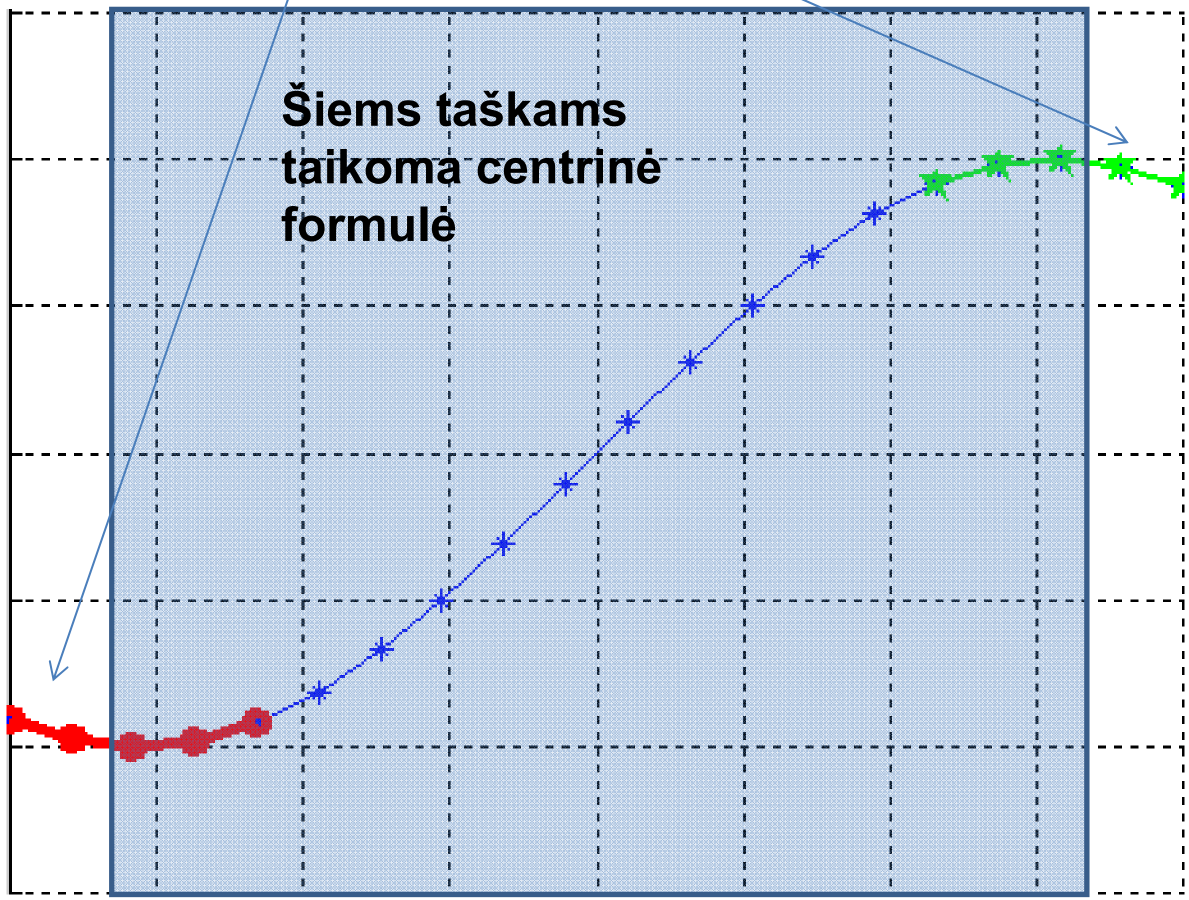
Vėl interpoliuojame daugianariu per sekančius 5 taškus, kurie dalinai perdengia ankstesnįjį intervalą :



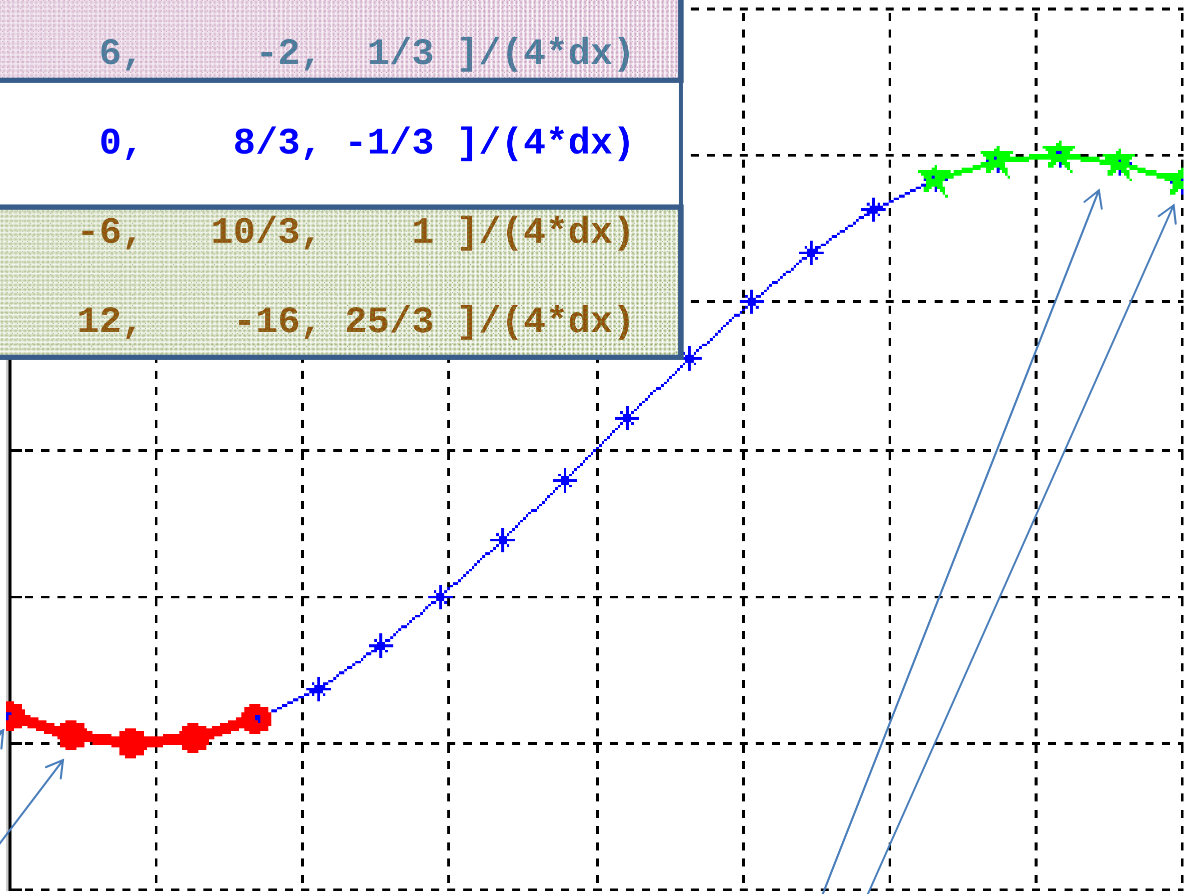
Pagal daugianario analitinę išraišką apskaičiuojame išvestinę ir jos reikšmę naujos taškų grupės centriniame taške

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \sum_{k=i-2}^{i+2} \frac{dL_k(x)}{dx} f(x_i) = \frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix} 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_{i-2}) \\ f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \\ f(x_{i+2}) \end{Bmatrix}$$

- Apskaičiuodami išvestinės reikšmę, naudojame vieną ir tą pačią "centrinę" formulę;
- Ji netinka tik keliuose taškuose intervalo pradžioje ir pabaigoje. Kiek tokių taškų yra, priklauso nuo taškų skaičiaus, per kuriuos interpoliuojama vienu daugianariu



```
[-25/3,     16,    -12,   16/3,    -1 ]/(4*dx)
[   -1, -10/3,       6,     -2,   1/3 ]/(4*dx)
[  1/3,  -8/3,       0,    8/3,  -1/3 ]/(4*dx)
[ -1/3,      2,     -6,   10/3,     1 ]/(4*dx)
[    1, -16/3,      12,    -16,  25/3 ]/(4*dx)
```



$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_1)}{dx} \\ \dfrac{df(x_2)}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{Bmatrix}$$

pirmyneigės formulės

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_{N-1})}{dx} \\ \dfrac{df(x_N)}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix} -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_{N-4}) \\ f(x_{N-3}) \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{Bmatrix}$$

atgalinės formulės

3 taškų skaitinio diferencijavimo formulė

```
[-3, 4, -1]/(2*dx)
[-1, 0, 1]/(2*dx)
[1, -4, 3]/(2*dx)
```

pirmyneigė formulė
(pirmam taškui)

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \frac{1}{2\Delta \mathrm{x}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix}$$

centrinė formulė
(vidiniams taškams)

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{1}{2\Delta \mathrm{x}}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \end{Bmatrix}$$

atgalinė formulė
(galiniam taškui)

$$\frac{df(x_N)}{dx} = \frac{1}{2\Delta \mathrm{x}}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{Bmatrix}$$

5 taškų skaitinio diferencijavimo formulė

```
[-25/3 ,  16  ,-12 , 16/3,  -1 ]/(4*dx)
[  -1  , -10/3, 6  ,  -2 ,  1/3]/(4*dx)
[  1/3 , -8/3 , 0  , 8/3 , -1/3]/(4*dx)
[ -1/3 ,   2  , -6 , 10/3,  1  ]/(4*dx)
[   1  , -16/3, 12 , -16 , 25/3]/(4*dx))
```

pirmyneigė formulė
(1 ir 2 taškui)

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_1)}{dx} \\ \dfrac{df(x_2)}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x} \begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{Bmatrix}$$

centrinė formulė
(vidiniams taškams)

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{1}{4\Delta x} \begin{bmatrix} 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_{i-2}) \\ f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \\ f(x_{i+2}) \end{Bmatrix}$$

atgalinė formulė
(dviems paskutniams taškams)

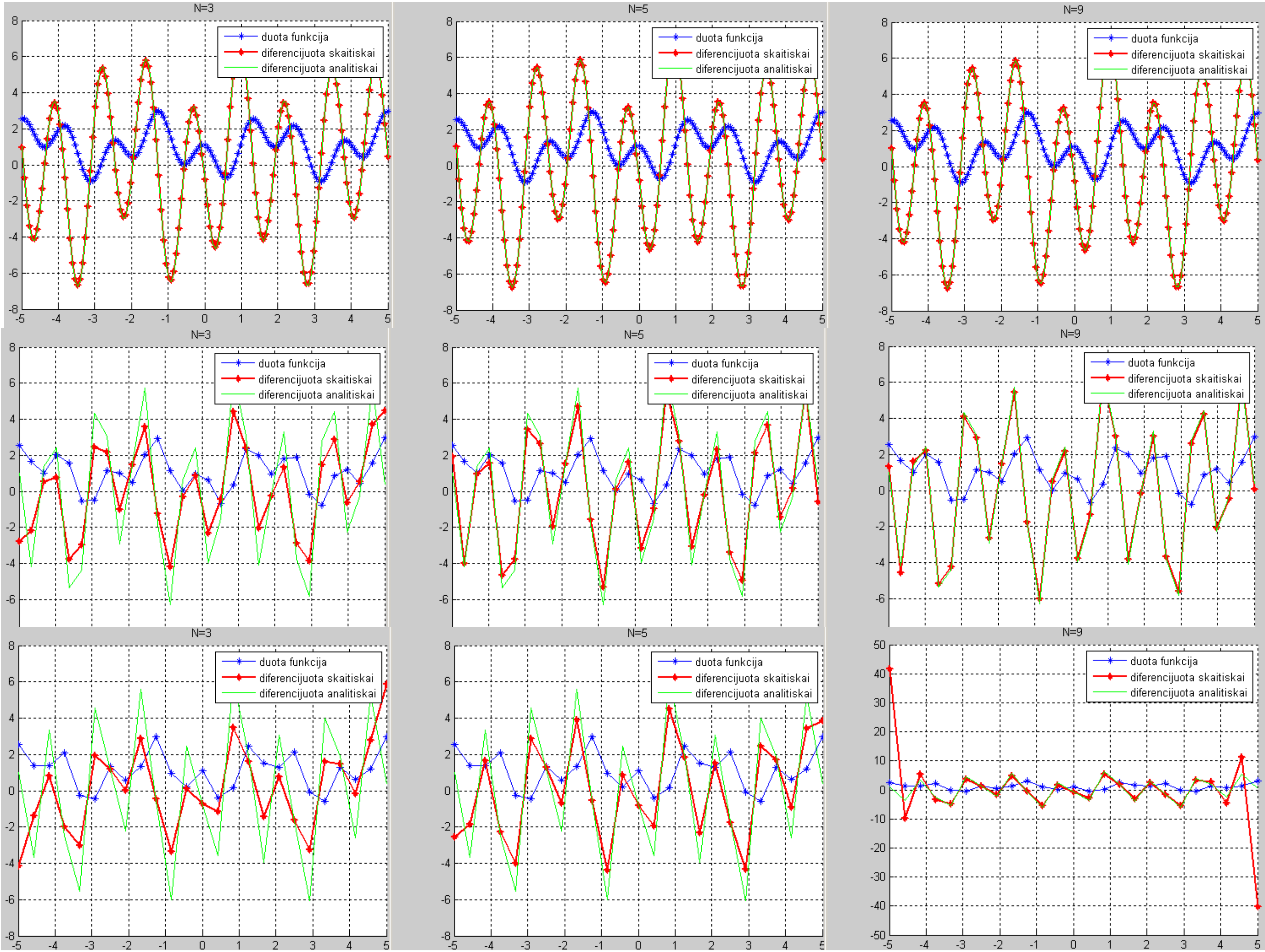
$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_{N-1})}{dx} \\ \dfrac{df(x_N)}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x} \begin{bmatrix} -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_{N-4}) \\ f(x_{N-3}) \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{Bmatrix}$$

7 taškų skaitinio diferencijavimo formulė

```
[-147/10,   36   , -45 ,  40,-45/2, 36/5,    -1  ]/(6*dx)
[   -1   , -77/10,  15 , -10,  5   , -3/2,  1/5  ]/(6*dx)
[   1/5  , -12/5 , -7/2,  8 , -3   ,  4/5, -1/10  ]/(6*dx)
[  -1/10,  9/10 , -9/2,  0 , 9/2 , -9/10, 1/10  ]/(6*dx)
[  1/10  , -4/5  ,   3 , -8 , 7/2 ,  12/5, -1/5  ]/(6*dx)
[  -1/5  ,  3/2  ,  -5 ,  10, -15 , 77/10,   1   ]/(6*dx)
[   1    , -36/5 , 45/2, -40,  45 ,  -36 , 147/10]/(6*dx)
```

9 taškų skaitinio diferencijavimo formulė

```
[-761/35,   64    , -112  , 448/3, -140, 448/5 , -112/3,  64/7,    -1  ]/(8*dx)
[   -1   , -446/35,   28   , -28   , 70/3,  -14   ,   28/5, -4/3 ,  1/7   ]/(8*dx)
[  1/7   , -16/7  , -38/5 ,  16   , -10 , 16/3   ,    -2 , 16/35, -1/21 ]/(8*dx)
[  -1/21,   4/7   ,   -4   , -18/5,  10 ,  -4    ,   4/3 , -2/7 , 1/35  ]/(8*dx)
[   1/35, -32/105,   8/5 , -32/5,   0 , 32/5   ,  -8/5 ,32/105, -1/35 ]/(8*dx)
[  -1/35,   2/7   ,  -4/3 ,    4 , -10 , 18/5   ,    4   , -4/7 , 1/21  ]/(8*dx)
[   1/21,  -16/35,    2   , -16/3,  10 ,  -16   ,  38/5 , 16/7 , -1/7  ]/(8*dx)
[   -1/7,    4/3 ,  -28/5,   14 , -70/3,  28   ,   -28 ,446/35,   1    ]/(8*dx)
[      1 ,   -64/7 , 112/3,-448/5,  140 ,-448/3,   112 , -64  , 761/35]/(8*dx)
```


N=3
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai
N=5
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai
N=9
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai
N=3
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai
N=5
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai
N=9
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai
N=3
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai
N=5
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai
N=9
duota funkcija
diferencijuota skaitiskai
diferencijuota analitiskai