Tiesinių lygčių sistemų sprendimas (3)

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115/Skaitiniai inzinerijos metodai su MATLAB (KP RG RB)2009

F7.pdf - 4.1-4.5 poskyriai

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115 /Skaitiniai inzinerijos metodai(RB) 2006

I.1.2.pdf

Prisiminkime: skaitiniai tiesinių algebrinių lygčių sistemų sprendimo metodai

- *Tiesioginiai* – sprendinys gaunamas algebriškai pertvarkant lygčių sistemą (t.y.koeficientų matrica skaičiuojant pertvarkoma)

- ***Iteraciniai* – koeficientų matrica išlieka nepakitusi. Sprendinį apskaičiuojame nuosekliaisiais priartėjimais**

Paprastųjų iteracijų algoritmo taikymas tiesinių lygčių sistemai (1)

$$[\mathbf{A}] \quad \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix};$$

Jeigu įstrižainėje yra "0" reikšmė, reikia sukeisti vietomis kintamuosius. Pavyzdžiui, sukeitus vietomis kintamuosius x2 ir x3, susikeičia vietomis 2-as ir 3-ias matricos A stulpeliai

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{23}}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \\ \dfrac{a_{31}}{a_{33}} & \dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_1}{a_{22}} \\ \dfrac{b_1}{a_{33}} \end{Bmatrix};$$

Metodas konverguopja greičiau, kai įstrižainėje yra absoliutiniu dydžiu didesni koeficientai

Paprastųjų iteracijų algoritmo taikymas tiesinių lygčių sistemai (2)

Laisvai parinktas skaičius, nuo kurio galėtų priklausyti konvergavimo greitis. Dažniausiai priimama α=1

$$\alpha\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1-\alpha & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{23}}{a_{11}}\\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 1-\alpha & \dfrac{a_{23}}{a_{22}}\\ \dfrac{a_{31}}{a_{33}} & \dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 1-\alpha\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{b_1}{a_{11}}\\ \dfrac{b_1}{a_{22}}\\ \dfrac{b_1}{a_{33}}\end{bmatrix};$$

$$\alpha\{\mathbf{x}\} + \left[\tilde{\mathbf{A}}\right]\{\mathbf{x}\} = \{\tilde{\mathbf{b}}\}$$

$$\{\mathbf{x}\}^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left(\{\tilde{\mathbf{b}}\} - \left[\tilde{\mathbf{A}}\right]\{\mathbf{x}\}^{(k)}\right)$$

Paprastųjų iteracijų algoritmas

$\{\mathbf{x}\}^{(0)}$ - pradinis artinys

Iteracijų pabaigos sąlyga:

$$\frac{\left\| \left\{ \mathbf{x} \right\}^{(k+1)} - \left\{ \mathbf{x} \right\}^{(k)} \right\|}{\left\| \left\{ \mathbf{x} \right\}^{(k+1)} \right\| + \left\| \left\{ \mathbf{x} \right\}^{(k)} \right\|} < \varepsilon$$

Paprastųjų iteracijų algoritmas

```
A=[ 1 -1  0  0;
   -1  2 -1  0;
    0 -1  2 -1;
    0  0 -1  2]
b=[2;0;0;0]
n=size(A,1)

alpha=1;  % metodo parametras
Atld=diag(1./diag(A))*A-alpha*diag(ones(n,1));
btld=diag(1./diag(A))*b;

nitmax=1000; eps=1e-12;

x=zeros(n,1);  %pradinis artinys
for it=1:nitmax
  x1=btld-Atld*x;
  tikslumas=norm(x1-x)/(norm(x)+norm(x1));
  if tikslumas < eps, break, end
  x=x1;
end
```

Paprastųjų iteracijų metodo konvergavimo greičiai esant skirtingoms α reikšmėms

A =

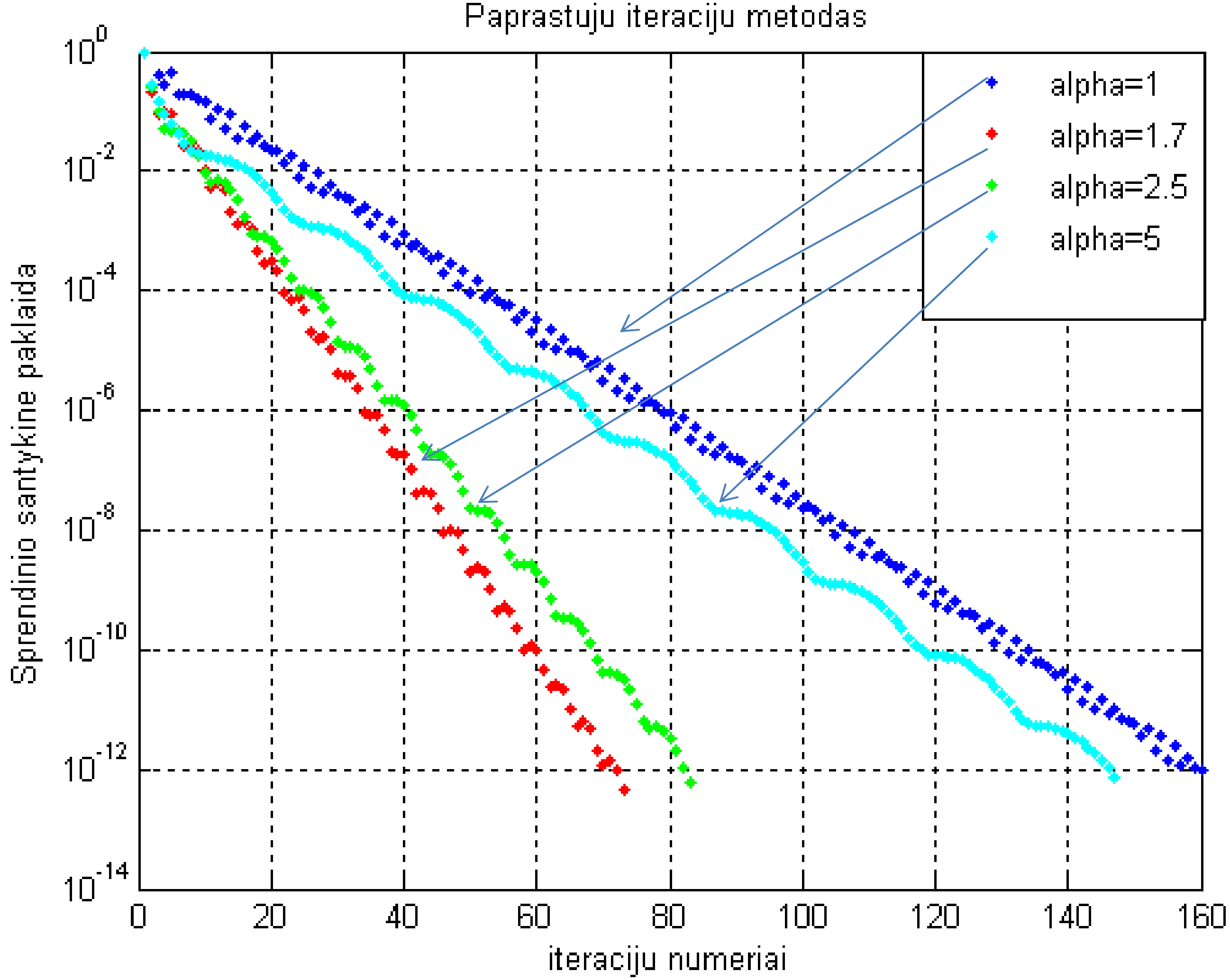
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -10 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -10 \end{matrix}$$

b =

$$\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 9 \\ -7 \end{matrix}$$

x =

$$\begin{matrix} 1.0110 \\ 0.4857 \\ -0.4571 \\ 0.9604 \end{matrix}$$



Gauso-Zeidelio iteracijų algoritmo taikymas tiesinių lygčių sistemai

$$\{\mathbf{x}\}^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left(\{\tilde{\mathbf{b}}\} - \left[\tilde{\mathbf{A}}\right] \{\mathbf{x}\}^{(k)}\right)$$

Paprastųjų iteracijų algoritmas

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left(\tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j^{(k)}\right), \quad i = 1:n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha}\left(\tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j^{(k)}\right), \quad i = 1:n$$

Gauso-Zeidelio iteracijų algoritmas

Gauso-Zeidelio iteracijų algoritmas

```
A=[ 1  -1  0  0;
   -1   2 -1  0;
    0  -1  2 -1;
    0   0 -1  2]
b=[2;0;0;0]
n=size(A,1)

alpha=1;  % metodo parametras
Atld=diag(1./diag(A))*A- alpha*diag(ones(n,1));
btld=diag(1./diag(A))*b;

nitmax=1000; eps=1e-12;
x=zeros(n,1);  %pradinis artinys
for it=1:nitmax
  for i=1:n
    x1(i)=(btld(i)- Atld(i,1:i-1)*x1(1:i-1)-Atld(i,i:n)*x(i:n))/alpha;
  end
  tikslumas=norm(x1-x)/(norm(x)+norm(x1));
  if tikslumas < eps, break, end
  x=x1;
end
```

A =

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -10 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -10 \end{matrix}$$

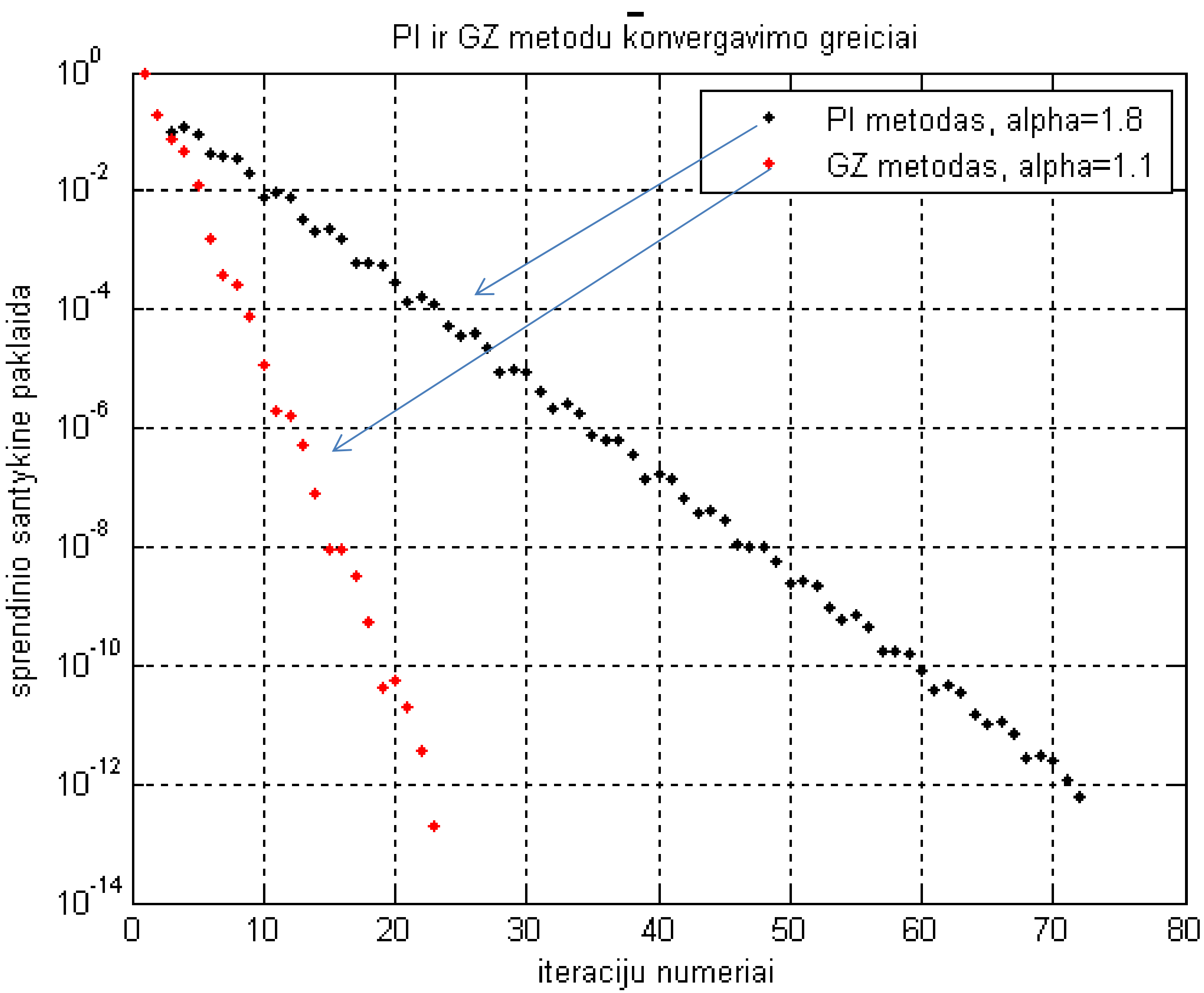
b =

$$\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 9 \\ -7 \end{matrix}$$

x =

$$\begin{matrix} 1.0110 \\ 0.4857 \\ -0.4571 \\ 0.9604 \end{matrix}$$

Paprastųjų iteracijų ir Gauso-Zeidelio metodai: konvergavimo greičiai



Kiti iteraciniai tiesinių lygčių sistemų sprendimo metodai

- **Yra ir kitokių iteracinių metodų TLS spręsti – *jungtinių gradientų(funkcija cjg),***

***mažiausių kvadratų (funkcija lsqr)* ir kt.**

Šie metodai gali būti taikomi bendruoju pavidalu saugomoms retosioms matricoms;

- **Metodų matematinis veikimo principas paremtas funkcijos minimizavimo algoritmais. Dėl ribotos kurso apimties čia jų nenagrinėsime.**

Laisvųjų narių vektoriaus paklaidos įtaka sprendinio paklaidai

$$\left[\mathbf{A}\right]\left(\left\{\mathbf{x}\right\}+\Delta\left\{\mathbf{x}\right\}\right)=\left\{\mathbf{b}\right\}+\Delta\left\{\mathbf{b}\right\}$$

$$\left[\mathbf{A}\right]\cdot\Delta\left\{\mathbf{x}\right\}=\Delta\left\{\mathbf{b}\right\}$$

- Reikia nustatyti kiekybinį skaliarinį įvertį, kaip laisvųjų narių vektoriaus paklaidos įtakoja sprendinio paklaidas;

- Panaudosime *matricos ir vektoriaus normų* sąvokas;

Vektorių ir matricų normos

Pagal apibrėžimą, *norma yra matricą ar vektorių apibūdinantis skaičius*, tenkinantis tokias sąlygas:

$$\left\|[\mathbf{A}]\right\| \geq 0;$$

$$\left\|\alpha[\mathbf{A}]\right\| = \alpha\left\|[\mathbf{A}]\right\|;$$

$$\left\|[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]\right\| \leq \left\|[\mathbf{A}]\right\| + \left\|[\mathbf{B}]\right\|;$$

$$\left\|[\mathbf{A}]\bullet[\mathbf{B}]\right\| \leq \left\|[\mathbf{A}]\right\|\bullet\left\|[\mathbf{B}]\right\|;$$

Naudosime tokias normas:

$$\left\|[\mathbf{A}]\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}; \qquad \left\|\{\mathbf{x}\}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

MATLAB-e: norm(A) norm(x)

Laisvųjų narių ir sprendinio santykinių paklaidų tarpusavio priklausomybė

$$[\mathbf{A}]\left(\{\mathbf{x}\}+\Delta\{\mathbf{x}\}\right)=\{\mathbf{b}\}+\Delta\{\mathbf{b}\}$$

$$[\mathbf{A}]\cdot\Delta\{\mathbf{x}\}=\Delta\{\mathbf{b}\}$$

$$\|\Delta\{\mathbf{x}\}\|=\left\|[\mathbf{A}]^{-1}\Delta\{\mathbf{b}\}\right\|\le\left\|[\mathbf{A}]^{-1}\right\|\cdot\|\Delta\{\mathbf{b}\}\|$$

$$\|\{\mathbf{b}\}\|=\|[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}\|\le\|[\mathbf{A}]\|\cdot\|\{\mathbf{x}\}\|.$$

$$\|\Delta\{\mathbf{x}\}\|\cdot\|\{\mathbf{b}\}\|\le\|[\mathbf{A}]\|\cdot\left\|[\mathbf{A}]^{-1}\right\|\cdot\|\Delta\{\mathbf{b}\}\|\cdot\|\{\mathbf{x}\}\|.$$

$$\frac{\|\Delta\{\mathbf{x}\}\|}{\|\{\mathbf{x}\}\|}\le\|[\mathbf{A}]\|\cdot\left\|[\mathbf{A}]^{-1}\right\|\frac{\|\Delta\{\mathbf{b}\}\|}{\|\{\mathbf{b}\}\|}.$$

Matricos sąlygotumo skaičius. Gerai, jeigu artimas 1; blogai, jeigu labai didelis

Matricos sąlygotumo skaičiaus apskaičiavimas

Matricos tikrinės reikšmės

$$\left\| [\mathbf{A}] \right\| \cdot \left\| [\mathbf{A}]^{-1} \right\|$$

$$\det\left([\mathbf{A}] - \sigma [\mathbf{E}] \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

$$\left\| [\mathbf{A}] \right\| \cdot \left\| [\mathbf{A}]^{-1} \right\| = \frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \sigma_i}{\min\limits_{1 \le i \le n} \sigma_i}$$

MATLAB-e:

norm(A)* norm(inv(A))

cond(A)

Matricų sąlygotumo skaičių pavyzdžiai

norm1=norm(A)*norm(inv(A))
norm2=cond(A)

$$\frac{\left\|\Delta\{\mathbf{x}\}\right\|}{\left\|\{\mathbf{x}\}\right\|} \le \left\|[\mathbf{A}]\right\| \cdot \left\|[\mathbf{A}]^{-1}\right\| \frac{\left\|\Delta\{\mathbf{b}\}\right\|}{\left\|\{\mathbf{b}\}\right\|}$$

A =

5	0	0
0	5	0
0	0	5

norm1 = 1
norm2 = 1

A =

1	2	-3
-4	5	6
7	-8	9

norm1 = 6.9511
norm2 = 6.9511

A =

1.0000	2.0000	3.0100
1.0000	2.0000	3.0000
1.0100	2.0000	3.0000

norm1 = 1.9890e+003
norm2 = 1.9890e+003

A =

1	0	0
0	5	0
0	0	9

norm1 = 9
norm2 = 9

A =

11	-5	12
6	-2	10
0	13	29

norm1 = 70.7940
norm2 = 70.7940

A =

1.0000	2.0000	3.0001
1.0000	2.0000	3.0000
1.0001	2.0000	3.0000

norm1 = 1.9850e+005
norm2 = 1.9850e+005

Sprendinio tikslumo pagerinimas

Jeigu gauto sprendinio tikslumas nepatenkinamas, jį galima pagerinti taip:

Tikslus, tačiau nežinomas sprendinys

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\} \rightarrow \{\mathbf{x}\}^{(0)}$$

Gautas nepakankamai tikslus sprendinys

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\}^{(0)} = \{\mathbf{b}\}^{(0)}$$

$$[\mathbf{A}]\left(\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}\}^{(0)}\right) = \{\mathbf{b}\} - \{\mathbf{b}\}^{(0)}$$

Reikalinga pataisa

$$\{\boldsymbol{\beta}\} = \{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}\}^{(0)}; \ \boldsymbol{\varepsilon} = \{\mathbf{b}\} - \{\mathbf{b}\}^{(0)}$$

$$[\mathbf{A}]\boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \rightarrow \{\boldsymbol{\beta}\}^{(1)}$$

Gauta pataisa

$$\{\mathbf{x}\}^{(1)} = \{\mathbf{x}\}^{(0)} + \{\boldsymbol{\beta}\}^{(1)}$$

Tikslesnis sprendinys