

## 7. Bangelės

### 7.1 Įvadas

Anksčiau aptarta Furje aproksimacija turi vieną esminį trūkumą, - jos bazinės funkcijos  $\sin kt$ ,  $\cos kt$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  yra apibrėžtos ir turi pastovią amplitudę visame argumento (laiko) kitimo intervale  $(-\infty, \infty)$ . Todėl funkciją aproksimuojančio trigonometrinio polinomo kurio nors nario pašalinimas iššauks polinomo pokytį visame intervale. Kitaip tariant, Furje bazinės funkcijos lokalizuotos dažnyje, bet ne laike. Todėl tai buvo viena iš priežasčių, kad pastaruoju metu signalų analizėje buvo pradėtos plačiai naudoti naujos bazinės funkcijos, - **bangelės** (angl. **wavelets**).

Bangelės, - tai bazinės funkcijos  $y = \psi(t)$ , tenkinančios du pagrindinius reikalavimus:

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ , t.y., funkcija „banguoja“ apie  $x$ -o ašį ir jos pagrindas yra baigtinis arba, didėjant argumentui, funkcijos reikšmės sparčiai artėja prie nulio. Vadinasi, funkcija  $y = \psi(t)$  gerai lokalizuota laike ir atrodo kaip maža bangelė.
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$ , t.y. funkcija turi baigtinę energiją.

Kiti reikalavimai, kuriuos aptarsime vėliau, reikalingi, kad būtų galima paprastai ir greitai atlikti tiesioginę ir atvirkštinę bangelių transformaciją, analogišką Furje transformacijai.

Yra daug bangelių tipų: tolydžiosios bangelės, baigtinio pagrindo bangelės, bangelės, turinčios paprastą matematinę išraišką, simetrinės bangelės ir taip toliau. Pati pirmoji ir paprasčiausia yra Haro bangelė (1910 m), kurią galima pavadinti bangelių prosenele. Šiuo metu dažnai naudojamos baigtinio pagrindo, tolydžios ir ortogonalios Debiušio (I. Daubechies) bangelės, kurias nagrinėsime toliau. Paprasčiausia Debiušio šeimos bangelė yra Haro bangelė.

Funkcija  $y = \psi(t)$  yra vadinama motinine bangele. Atliekant jos postūmius ir suspaudimus yra sudaroma **energetinių signalų** bazė  $\left\{ \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\}$ . Paprastai imama

$a = 2^{-j}$ ,  $b = k2^j$ , čia  $j$  ir  $k$  – sveikieji skaičiai. Toks parametrų  $a$  ir  $b$  pasirinkimas sukuria retą bazę, kuri įgalina natūraliai išskaidyti signalą į skirtingo mastelio dedamąsias.

Vadinasi, energetinių signalų bazė  $\left\{ \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z} \right\}$  sudaroma atliekant motininės bangelės dvigubus suspaudimus ir diadinius  $(k2^{-j}, j \in \mathbb{Z})$  postūmius. Todėl ši bazė yra gerai lokalizuota tiek dažnyje, tiek ir laike. Dėl šių savybių daug funkcijų klasių bangelių bazėje aproksimuojamos kompaktiškiau nei Furje bazėje. Pavyzdžiui, trūkios funkcijos arba funkcijos, turinčios aštrius pikus, norimu tikslumu bangelių bazėje aproksimuojamos mažesniu narių skaičiumi nei Furje bazėje.

Dėl išvardintų savybių bangelės plačiai naudojamos įvairiose srityse: suspaudžiant duomenis, šalinant signalų ir vaizdų triukšmus, analizuojant žemės drebėjimo bei kalbos signalus ir kitur. Pavyzdžiui, naudojant bangeles, pirštų atspaudų transformuoti duomenys buvo suspausti 20 kartų. Po to, atlikus jų atvirkštinę transformaciją, tik prityrę ekspertai galėjo pastebėti nežymius skirtumus nuo originalo. Pasinaudodami bangelių

funkcijomis Koifmanas (R. Coifman) ir jo Jeilio (Yale) universiteto komanda valė senus muzikos įrašus nuo triukšmų, pavyzdžiui, Bramso pirmąjį vengrų šokį pianinui.

## 7.2 Multi skiriamosios gebos (MSGA) analizė

Istoriškai bangelės skirtingais pavidalais buvo taikomos įvairiose fizikos ir technikos srityse ir pradžioje sunku buvo rasti ryšį tarp visų šių kryptių. Tačiau 1986 m. S. Malatas (S. Mallat) apjungė šias kryptis, sukurdamas bendrą teorinį bangelių pagrindą, kuris vadinamas **multi skiriamosios gebos analizės** (angl. Multiresolution analyses (MRA)) vardu.

**Apibrėžimas.** Erdvė  $L^2(R)$ , tai erdvė, kurią sudaro kvadratu integruojamų funkcijų  $f(x), x \in R$ , kurioms  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx < \infty$ , klasė su sumos ir sandaugos iš skaliaro, - realaus skaičiaus, operacijomis. Tokios funkcijos vadinamos **energetiniais** signalais. Šioje erdvėje įvedama skaliarinė sandauga  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$  ir norma  $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx$ .

MSGA analizė  $L^2(R)$  erdvėje apibrėžiama kaip uždarų, įdėtų viena į kitą  $L^2(R)$  erdvės poerdvių  $V_j, j \in Z$  seka, kuri tenkina žemiau išvardintas savybes.

1.  $V_j \subset V_{j+1}$ , t.y.  $\dots \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$ .
2. Jei funkcija  $v(x) \in V_j$ , tai funkcija  $v(2x) \in V_{j+1}$  ir atvirkščiai.
3. Jei funkcija  $v(x) \in V_0$ , tai funkcija  $v(x-k) \in V_0, k \in Z$ .
4. Poerdvių  $V_j$  sąjunga  $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$  yra tiršta erdvėje  $L^2(R)$ , o jų sankirta  $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$ .
5. Egzistuoja tokia funkcija  $\varphi(x)$ , vadinama masteline funkcija (angl. scaling), priklausanti poerdviui  $V_0$  ir kuriai  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)dx = 1$ , kad rinkinys  $\{\varphi(x-k) | k \in Z\}$  yra erdvės  $V_0$  normuota Rico bazė<sup>\*)</sup>.

Aptarkime keletą savybių, išplaukiančių iš MSGA apibrėžimo.

- Kadangi  $\{\varphi(x-k) | k \in Z\}$  yra erdvės  $V_0$  bazė, tai  $\left\{ 2^{\frac{n}{2}} \varphi_{nk}(2^n x - k) | n, k \in Z \right\}$  yra normuota erdvės  $V_n$  Rico bazė.
- Simboliu  $P_n f$  pažymėkime funkcijos  $f(x) \in L^2(R)$  projekciją erdvėje  $V_n$ , t.y.  $P_n f = \sum_{k \in Z} a_k \varphi_{nk}$ , tada iš 4 savybės darome išvadą, kad  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n f = f$ .

<sup>\*)</sup> Suskaičiuotina erdvės aibė  $\{f_n\}$  yra Rico bazė, jei kiekvienas erdvės elementas  $f$  gali būti vieninteliu būdu užrašytas suma  $f = \sum_n h_n f_n$  ir egzistuoja tokie teigiami skaičiai  $A$  ir  $B$ , kad

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |h_n|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Kaip matome, visų energetinių signalų erdvės  $L^2(R)$  poerdvių  $V_j, j \in Z$  bazės yra generuojamos remiantis viena motinine funkcija  $\varphi(x)$ , atliekant jos suspaudimus ir diadinius postūmius. Taip pat žinoma, kad funkcijos aproksimacijos (projekcijos) kokiame tai poerdvyje koeficientai labai priklauso nuo pasirinktos poerdvio bazės. Todėl dabar sukonstruokime tokią poerdvių  $V_j, j \in Z$  bazę, kuri įgalintų signalą (funkciją) išskaidyti į skirtingo mastelio dedamąsias.

Pradėkime nuo poerdvio  $V_1$  bazės formavimo.

Poerdvio  $V_0$  bazė yra  $\{\varphi(x-k) | k \in Z\}$ . Poerdvyje  $V_1$  raskime tokią funkciją  $\psi(x)$ , kuri tenkintų anksčiau aptartus reikalavimus, ir kurios sveikųjų skaičių postūmiai  $\{\psi(x-k) | k \in Z\}$  būtų bazinės funkcijos, suformuojančios tokį poerdvį  $W_0$ , kuris poerdvį  $V_0$  papildytų iki poerdvio  $V_1$ . Tai yra, kad poerdvis  $V_1$  būtų poerdvių  $V_0$  ir  $W_0$  tiesioginė suma:  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ , čia simbolis „ $\oplus$ “ žymi poerdvių tiesioginę sumą<sup>\*)</sup>. Taip pat pareikalaujame, kad funkcijos  $\psi(x)$  suspaudimai ir diadiniai postūmiai

$$\left\{ \psi_{nk} = 2^{\frac{n}{2}} \psi(2^n x - k) | n, k \in Z \right\} \text{ būtų bazinės funkcijos poerdvio } W_n, \text{ kuris poerdvį } V_n$$

papildytų iki poerdvio  $V_{n+1}$ , t.y.  $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ .

Funkcija  $\varphi(x)$  **vadinama motinine mastelio funkcija** (angl. mother scaling function), o ieškomoji **funkcija**  $\psi(x)$  **vadinama motinine bangelių funkcija** (angl. mother wavelet function).

Vadinasi, remiantis erdvės  $W_n$  apibrėžimu galime parašyti, kad

$$L_2(R) = V_0 \oplus \left\{ \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \right\}.$$

Kokia yra fizinė erdvės  $W_n$  prasmė? Kadangi  $P_{n+1}f = P_n f + (P_{n+1}f - P_n f)$  ir  $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ , tai erdvė  $W_n$  atspindi „detales“ informacijos, reikalingos pereinant nuo funkcijos  $f(x)$   $n$ -to lygio detalizacijos (skiriamosios gebos (angl. resolution)) prie  $(n+1)$  lygio detalizacijos, t.y. funkcijos  $f(x)$   $2^{-n}$  eilės detales (tiksliau šių detalių pagrindas yra  $2^{-n}$  eilės).

**Kokius privalumus turi taip suformuota erdvių  $V_j, j \in \{0,1,2,\dots\}$  bazė?**

Simboliu  $R_n f$  pažymėkime funkcijos  $f(x) \in L_2(R)$  projekciją (aproksimaciją) erdvėje  $W_n$ , t.y.  $R_n f = \sum_{k \in n} b_k \psi_{nk}$ , o simboliu  $P_n f$  - funkcijos  $f(x) \in L_2(R)$  projekciją erdvėje  $V_n$ , t.y.  $P_n f = \sum_{k \in n} a_k \varphi_{nk}$ .

---

\*) Primename, kad poerdvių  $V_n$  ir  $W_n$  tiesioginė suma, t.y.  $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ , reiškia, kad kiekvienas poerdvio  $V_{n+1}$  elementas vieninteliu būdu gali būti užrašytas kaip poerdvių  $V_n$  ir  $W_n$  elementų suma, t.y., tų poerdvių bazinių funkcijų tiesiniu dariniu.

Tada

$$\begin{aligned} P_n f &= P_0 f + (P_1 f - P_0 f) + (P_2 f - P_1 f) + \dots + (P_{n-1} f - P_{n-2} f) + (P_n f - P_{n-1} f) = \\ &= P_0 f + \sum_{l=1}^{n-1} R_l f = \sum_{k \in N} a_k \varphi(x-k) + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k \in N} b_{lk} \psi(2^l x - k). \end{aligned}$$

Pastaroji formulė aiškiai parodo, kaip funkcija išskaidoma į skirtingo mastelio dedamąsias:  $P_0 f$  duoda „grubią“ funkcijos aproksimaciją. Dėmuo  $(P_1 f - P_0 f)$  rodo  $2^{-1}$  pagrindo eilės detales, kurias pridėję prie „grubios“ funkcijos aproksimacijos, turėsime jos tikslesnę aproksimaciją erdvėje  $V_1$ . Dėmuo  $(P_2 f - P_1 f)$  rodo  $2^{-2}$  pagrindo eilės detales, kurias prisumavę turėsime funkcijos aproksimaciją erdvėje  $V_2$  ir t.t..

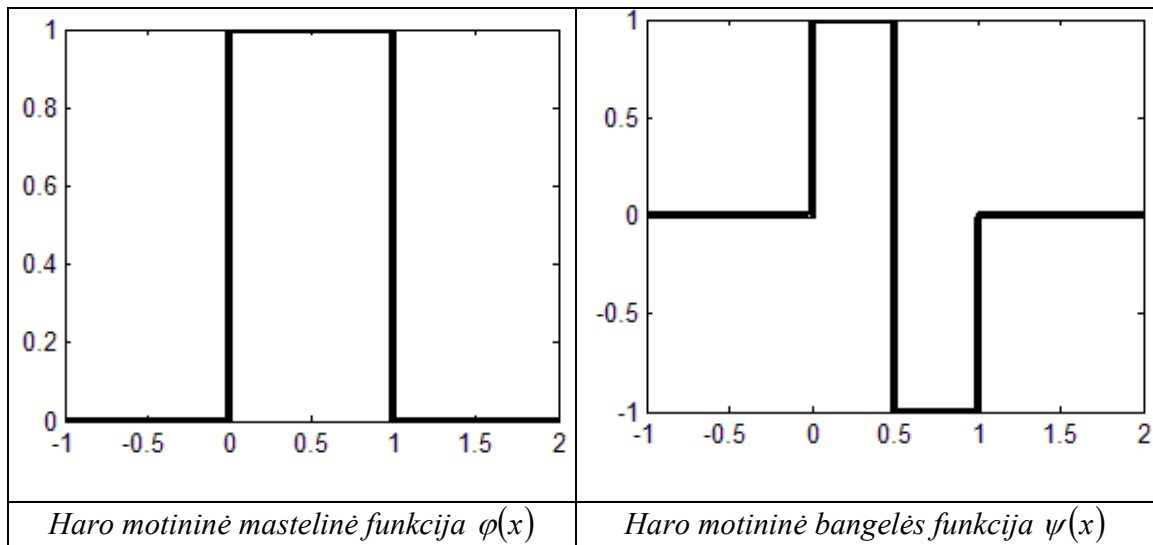
Vadinasi, jei atmesime funkcijos bangelių transformacijos (aproksimacijos) kurio nors lygio kelis koeficientus, o po to, remdamiesi likusiais koeficientais, funkciją atstatysime, tai pastaroji funkcija skirsis nuo pradinės tik atmetomomis detalėmis. Kitaip tariant, koeficientų pašalinimas analizuojamai funkcijai turi tik lokalią įtaką.

Kaip anksčiau minėjome, yra įvairių bangelių tipų. Dažnai yra naudojamos Debiuši šeimos bangelės, kurios sukuria ortogonalius poerdvių papildymus, t.y. sukuria ortonormuotą erdvės  $L^2(R)$  bazę.

Paprasčiausia Debiuši šeimos bangelė yra Haro bangelė, kurios motininė mastelio ir bangelių motininė funkcijos atitinkamai yra:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in [0;1), \\ 0, x \notin [0;1). \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, x \in [0;0.5), \\ -1, x \in [0.5;1) \\ 0, x \notin [0;1). \end{cases}$$

Paveiksle 7.1 pavaizduoti šių funkcijų grafikai.



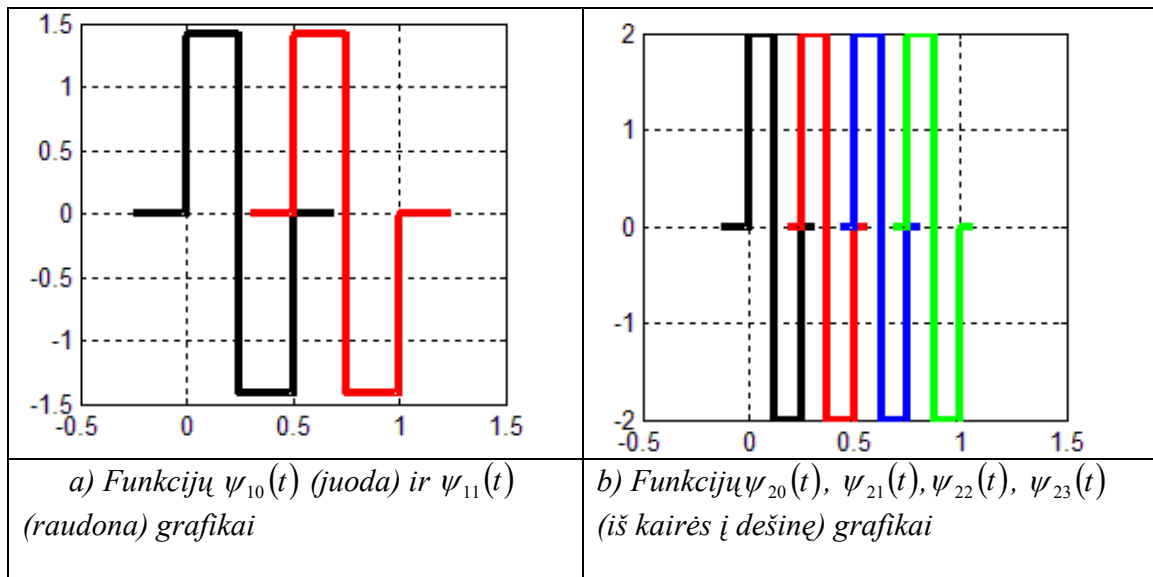
7.1 pav. Haro mastelinė ir bangelės funkcijos

Aišku, kad Haro bangelė pagal aptartą MSGA schemą sukuria erdvės  $L^2(R)$  ortonormuotą bazę.

**Pavyzdys.** Remdamiesi Haro baze, apskaičiuokime funkcijos

$y(t) = 1 + 2 \sin(2\pi t)$ ,  $t \in [0; 1]$  aproksimaciją poerdvyje  $V_3$ .

Erdvės  $V_3$  Haro bazė atkarpoje  $[0; 1]$  sudaro funkcijos:  $\varphi_{00}(t) = \varphi(t)$ ,  $\psi_{00}(t) = \psi(t)$ ,  
 $\psi_{10}(t) = \sqrt{2}\psi(2t)$ ,  $\psi_{11}(t) = \sqrt{2}\psi(2t - 1)$ ,  $\psi_{20}(t) = 2\psi(2^2 t)$ ,  $\psi_{21}(t) = 2\psi(2^2 t - 1)$ ,  
 $\psi_{22}(t) = 2\psi(2^2 t - 2)$ ,  $\psi_{23}(t) = 2\psi(2^2 t - 3)$ . Funkcijos  $\varphi_{00}(t)$  ir  $\psi_{00}(t)$  pavaizduotos 7.1 paveiksle, o -  $\psi_{10}(t)$ ,  $\psi_{11}(t)$ ,  $\psi_{20}(t)$ ,  $\psi_{21}(t)$ ,  $\psi_{22}(t)$ ,  $\psi_{23}(t)$  pavaizduotos 7.2 paveiksle.



7.2 pav. Erdvių  $W_1$  (a) ir  $W_2$  (b) bazinės funkcijos atkarpoje  $[0; 1]$

Tada funkciją  $y(t) = 1 + 2 \sin(2\pi t)$  erdvėje  $V_3$  aproksimuosime šių bazinių funkcijų tiesiniu dariniu:  $y(t) = 1 + 2 \sin(2\pi t) \approx c_{00}\varphi_{00}(t) + d_{00}\psi_{00}(t) + d_{10}\psi_{10}(t) + d_{11}\psi_{11}(t) + d_{20}\psi_{20}(t) + d_{21}\psi_{21}(t) + d_{22}\psi_{22}(t) + d_{23}\psi_{23}(t)$ .

Kadangi motininė Haro bangelė generuoja erdvės  $L^2(R)$  ortonormuotą bazę, tai koeficientai apskaičiuojami pagal formules:

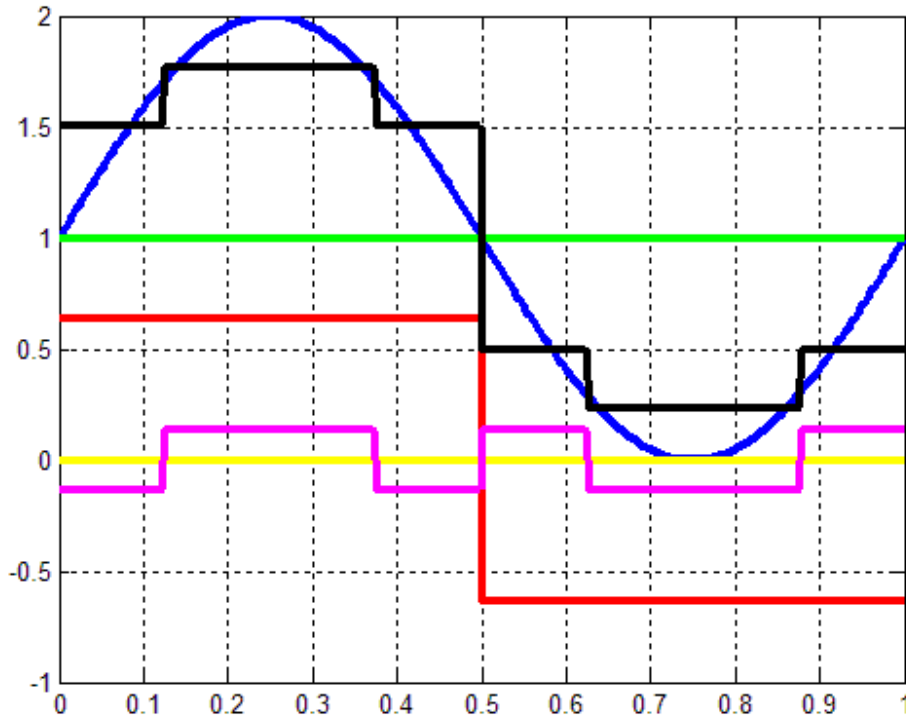
$$c_{00} = \int_0^1 y(t)\varphi_{00}(t)dt, \quad d_{00} = \int_0^1 y(t)\psi_{00}(t)dt, \quad d_{1j} = \int_0^1 y(t)\psi_{1j}(t)dt, \quad j = 0, 1,$$

$$d_{2j} = \int_0^1 y(t)\psi_{2j}(t)dt, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Apskaičiavę pagal šias formules koeficientus, turėsime:

$$c_{00} = 1, \quad d_{00} = 0.6366, \quad d_{10} = 0, \quad d_{11} = 0, \quad d_{20} = -0.1319, \quad d_{21} = 0.1319, \quad d_{22} = 0.1319, \quad d_{23} = -0.1319.$$

7.3 paveiksle pavaizduoti funkcijos  $y(t) = 1 + 2 \sin(2\pi t)$  (mėlyna spalva), jos aproksimacijos grafikas (juoda spalva), o taip pat detalių grafikai: erdvėje  $V_0$  - grubus vaizdas (žalia spalva), erdvėje  $W_0$  (geltona spalva), erdvėje  $W_1$  (raudona spalva) ir erdvėje  $W_2$  (magenta spalva).



7.3 pav. Funkcijos  $y(t) = 1 + 2 \sin(2\pi t)$  aproksimacija Haro bangelių bazėje

### 7.3 Debiuši bangelių konstravimas

#### 7.3.1. Plėtinio lygtis

Nors Haro bangelių pagrindas yra baigtinis ir jos sudaro ortonormuotą erdvės  $L^2(R)$  bazę, tačiau jos yra trūkios, - tai pagrindinis jų trūkumas. Todėl buvo stengiamasi sukonstruoti baigtinio pagrindo tolydžiąsias bangeles, kurios generuotų erdvės  $L^2(R)$  ortonormuotą bazę. Šį uždavinį sėkmingai išsprendė prancūzų matematikė Ingrida Debiušė. Aptarkime tokių bangelių konstravimą.

Kadangi funkcija  $\varphi(x) \in V_0 \subset V_1$ , tai  $\varphi(x)$  galima tiesiškai išreikšti per erdvės  $V_1$

bazines funkcijas  $\left\{ 2^{\frac{1}{2}} \varphi_{1k}(2x - k) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ , t.y. egzistuoja tokia koeficientų

$$\left\{ c_k, k \in \mathbb{Z} \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2 < \infty \right\} \text{ aibė, kad } \varphi(x) = \sum_k c_k \varphi(2x - k). \quad (7.1)$$

Ši lygtis vadinama **plėtinio lygtimi** (angl. dilation equation) arba **dviejų mastelių skirtumine lygtimi** (angl. two-scale difference equation).

Baigtinio pagrindo funkcijoms  $\varphi(x)$  plėtinio lygtyje narių skaičius turi būti baigtinis. Jei natūralusis skaičius  $N$  yra funkcijos  $\varphi(x)$  pagrindas, tai narių skaičius plėtinio lygtyje yra lygus  $N+1$ , t.y. baigtinio pagrindo funkcijos  $\varphi(x)$  plėtinio lygtis yra:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi(2x - k). \quad (7.2)$$

Pavyzdžiui, Haro funkcijos  $\varphi(x)$  plėtinio lygtis yra  $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$ , t.y. koeficientai  $c_0 = c_1 = 1$ . Tuo tarpu Debiušio mastelio funkcijos  $\varphi(x)$ , kurios pagrindas yra  $N = 3$  (MATLAB'e jos vardas yra **db2**), plėtinio lygtis yra:

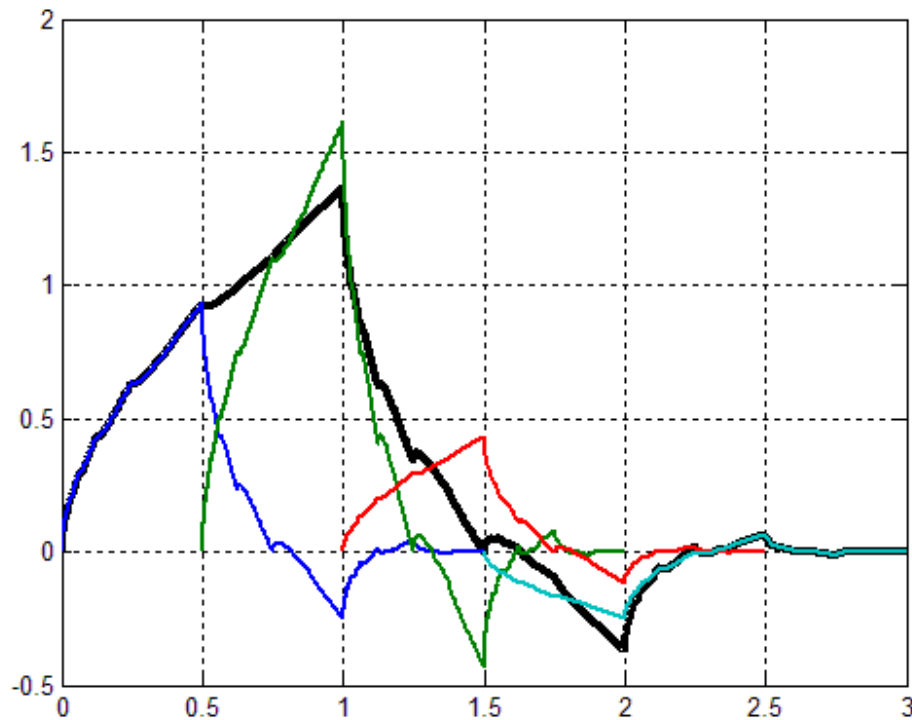
$$\varphi(x) = c_0 \varphi(2x) + c_1 \varphi(2x-1) + c_2 \varphi(2x-2) + c_3 \varphi(2x-3),$$

ir, kaip parodysime vėliau, šios lygties koeficientai yra:  $c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ,  $c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ,

$$c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

**Pastaba.** Debiušio šeimos bangelių plėtinio lygtyse sumuojamų narių skaičius yra lyginis, t.y.  $N+1 = 2p$ .

7.4 paveiksle pavaizduota **db2** funkcijos  $\varphi(x)$  bei dedamųjų  $c_k \varphi(2x-k)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  grafikai.



7.4 pav. Debiušio (**db2**) funkcijos  $\varphi(x)$  (juoda) ir dedamųjų  $c_k \varphi(2x-k)$  grafikai

Analogiškai, kadangi  $\psi(x)$  - motininė bangelės (angl. mother wavelet) funkcija priklauso erdvei  $W_0$ , o tuo pačiu erdvei  $V_1$ , tai  $\psi(x)$  galima užrašyti sąryšiu

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^N g_k \varphi(2x - k). \quad (7.3)$$

Panagrinėkime, kaip apskaičiuojami ortonormuotų bangelių koeficientai  $c_k$  ir  $g_k$ .

### 7.3.2. Bangelių koeficientų apskaičiavimas.

Tam, kad, remdamiesi plėtinio lygtimi, galėtume sukonstruoti MSGA ortonormuotą bazę, reikia atsakyti į du klausimus.

1. Kokias sąlygas turi tenkinti plėtinio lygties koeficientai  $c_k, k = \overline{0, N}$ , kad

plėtinio lygties  $\varphi(x) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi(2x - k)$  sprendinio  $\varphi(x)$  sveikųjų skaičių postūmiai  $\{\varphi(x - k) | k \in Z\}$  generuotų erdvės  $V_0$  ortonormuotą bazę?

2. Kam turi būti lygūs motininės bangelės funkcijos  $\psi(x)$  koeficientai  $g_k$ , kad jos sveikųjų skaičių postūmiai  $\psi(x - k), k \in Z$  sudarytų ortonormuotą  $W_0$  bazę, o jos suspaudimai ir diadiniai postūmiai

$\left\{ \psi_{nk} = 2^{\frac{n}{2}} \psi_{nk}(2^n x - k) | n, k \in Z \right\}$  sudarytų erdvės  $W_n$  ortonormuotą bazę?

**Reikalavimai plėtinio lygties koeficientams.** Pirmasis reikalavimas koeficientams

$c_k, k = \overline{0, N}$  iškyla iš sąlygos:  $\int_0^N \varphi(x) dx = 1$ , t.y.

$$\int_0^N \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^N c_k \int_0^N \varphi(2x - k) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N c_k \int_0^N \varphi(2x - k) d(2x - k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N c_k = 1.$$

Vadinasi,  $\sum_{k=0}^N c_k = 2$ , t.y. plėtinio lygties koeficientų suma turi būti lygi 2.

**Ortogonalumo sąlyga.** Tam, kad plėtinio lygties sprendinys  $\varphi(x)$  generuotų erdvės  $L^2(R)$  ortonormuotą bazę, jos koeficientai  $c_k$  privalo tenkinti orthogonalumo sąlygą, kurią apibrėžia lygybės:

$$\sum_k c_k \cdot c_{k+2l} = 2\delta_{0l}, l \in Z, \delta_{0l} = \begin{cases} 1, \text{ kai } l = 0, \\ 0, \text{ kai } l \neq 0, \end{cases} \text{ čia } c_k = 0, \text{ jei } k \notin [0; N]. \quad (7.4)$$

Kaip buvo minėta anksčiau, Debiuši bangelių plėtinio lygties koeficientų skaičius yra lyginis, t.y.  $N + 1 = 2p$ . Todėl orthogonalumo sąlygos lygčių skaičius yra  $p$ , t.y.

$$l = 0, 1, 2, \dots, p - 1.$$

Pavyzdžiui, bangelės **db2** orthogonalumo sąlyga nusakoma lygtimis:

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2,$$

$$c_0 c_2 + c_1 c_3 = 0,$$

o bangelės **db3** (Debiuši bangelė, kurios pagrindas lygus 5) orthogonalumo sąlyga - lygtimis:



$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 = 2,$$

$$c_0c_2 + c_1c_3 + c_3c_5 = 0,$$

$$c_0c_4 + c_1c_5 = 0.$$

Paprastai vietoje pirmosios lygties imama anksčiau įrodyta lygybė:  $\sum_{k=0}^N c_k = 2$ .

**Pastaba.** Pateikta ortogonalumo sąlyga yra būtina, bet nepakankama. Pakankamumo sąlygą įrodė Lavtonas (Lawton).

Tarkime, kad  $(2N-1)$ -os eilės kvadratinė matrica apibrėžiama taip:  $A = [a_{lk}]$ , čia

$$a_{lk} = \sum_{n=0}^N c_n \cdot c_{k-2l+n}, \quad -N+1 \leq l, k \leq N-1 \text{ ir } c_m = 0, \text{ jei } m < 0 \text{ arba } m > N.$$

Tada plėtinio lygties  $\varphi(x) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi(2x-k)$  sprendinys  $\varphi(x)$  generuos erdvės  $L^2(R)$

ortonormuotą bazę, jei koeficientai  $c_k$  tenkina ortogonalumo sąlygą ir matrica  $A$  turi vienintelę tikrinę reikšmę lygią vienetui.

Kadangi koeficientų skaičius yra  $2p$ , o ortogonalumo sąlygą nusakančių lygčių skaičius –  $p$ , tai reikia įvesti  $p$  papildomų sąlygų, kurios vadinamos *aproximavimo sąlygomis*.

**Aproximavimo sąlyga.** Aproximavimo sąlyga, tai sąlyga, kurią turi tenkinti plėtinio lygties koeficientai  $c_k$ , kad erdvėje  $V_0$  (jos bazė yra  $\{\varphi(x-k), k \in Z\}$ ) būtų tiksliai aproksimuojami kuo aukštesnės eilės polinomial. Ši sąlyga yra:

$$\sum_{k=0}^N (-1)^m k^m c_k = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p-1. \quad (7.5)$$

Ortogonalumo ir aproximavimo sąlygos pilnai apibrėžia plėtinio lygties koeficientus. Pavyzdžiui, Debiuši bangelės **db3** plėtinio lygties koeficientai yra lygčių sistemos

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 = 0, \\ -c_1 + 2c_2 - 3c_3 + 4c_4 - 5c_5 = 0, \\ -c_1 + 4c_2 - 9c_3 + 16c_4 - 25c_5 = 0, \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 2, \\ c_0c_2 + c_1c_3 + c_2c_4 + c_3c_5 = 0, \\ c_0c_4 + c_1c_5 = 0, \end{array} \right.$$

sprendinys:

$$c_0 = \left(1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16, \quad c_1 = \left(5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16,$$

$$c_2 = \left(10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16, \quad c_3 = \left(10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16,$$

$$c_4 = \left(5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16, \quad c_5 = \left(1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16.$$

Iš aproximavimo sąlygos galima padaryti išvadas, kad

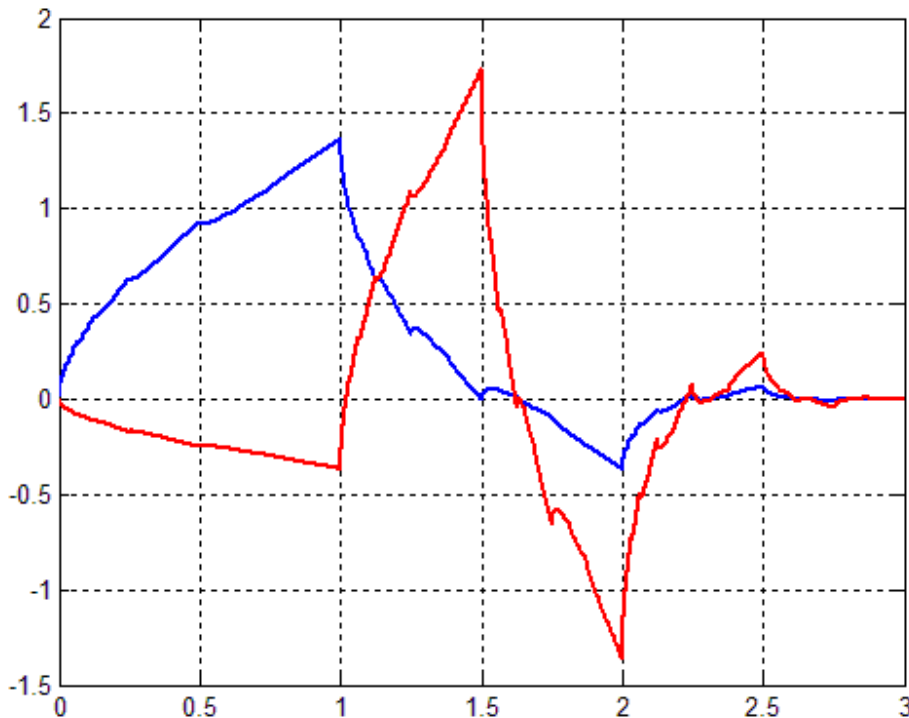
- polinomiali  $1, x, x^2, \dots, x^{p-1}$  priklauso erdvei  $V_0$ , t.y. jie yra tiesiniai funkcijų  $\varphi(x-k)$  dariniai,
- bangelių pirmi  $p$  momentų lygūs nuliui, t.y.  $\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x-k) dx = 0, m = \overline{0, p-1}$ .

Tai reiškia, kad glodžių funkcijų  $j$ -to lygio bangelių koeficientai yra  $O(2^{-jp})$  eilės skaičiai. Todėl aproksimavimo sąlyga dar vadinamos **nykstančių momentų** (angl. vanishing moments) sąlyga.

**Motininės bangelės funkcijos  $\psi(x)$  koeficientai  $g_k$ .** Motininės bangelės, generuojančios ortonormuotą erdvės  $L^2(R)$  bazę, koeficientai nusakomi formule:

$$g_k = (-1)^k c_{N-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (7.6)$$

**Pavyzdys.** 7.5 paveiksle pavaizduoti **db2** motininių funkcijų  $\varphi(x)$  ir  $\psi(x)$  grafikai.



7.5 pav. **db2** motininių funkcijų  $\varphi(x)$  (mėlyna) ir  $\psi(x)$  (raudona) grafikai.

Turėdami Debiušio bangelių koeficientų sąlygas, galime apskaičiuoti koeficientų skaitines reikšmes. Tam tikslui reikia išspręsti anksčiau aptartą netiesinių lygčių sistemą. 7.1 lentelėje patalpinti Debiušio bangelių: **db1, db2, db3, ..., db10** koeficientai.

**7.3.3. Motininių funkcijų  $\varphi(x)$  ir  $\psi(x)$  reikšmių apskaičiavimas.** Motininė mastelio funkcija  $\varphi(x)$  yra plėtinio lygties sprendinys. Tačiau tik Haro funkcija  $\varphi(x)$  turi analitinę

išraišką. Kitas baigtinio pagrindo ortonormuotą bazę generuojančių funkcijų  $\varphi(x)$  reikšmes galima apskaičiuoti tik netiesiogiai.

Yra trys funkcijos  $\varphi(x)$  apskaičiavimo metodai:

- Iteracinis metodas,
- Furje transformacijos metodas,
- Diadinės interpoliacijos metodas.

7.1 lentelė. Debiuši šeimos bangelių koeficientai  $c_k / \sqrt{2}$

$db^*$	$c_k / \sqrt{2}$	$db^*$	$c_k / \sqrt{2}$	$db^*$	$c_k / \sqrt{2}$
$db0$	1.0 1.0	$db5$	0.160102397974 0.603829269797 0.724308528438 0.138428145901 -0.242294887066	$db5$	-0.032244869585 0.077571493840 -0.006241490213 -0.012580751999 0.003335725285
$db2$	0.482962913145 0.836516303738 0.224143868042 -0.129409522551	$db6$	0.111540743350 0.494623890398 0.751133908021 0.315250351709 -0.226264693965 -0.129766867567	$db6$	0.097501605587 0.027522865530 -0.031582039318 0.000553842201 0.004777257511 -0.001077301085
$db3$	0.332670552950 0.806891509311 0.459877502118 -0.135011020010 -0.085441273882 0.035226291885	$db7$	0.077852054085 0.396539319482 0.729132090846 0.469782287405 -0.143906003929 -0.224036184994 0.071309219267	$db7$	0.080612609151 -0.038029936935 -0.016574541631 0.012550998556 0.000429577973 -0.001801640704 0.000353713800
$db4$	0.230377813309 0.714846570553 0.630880767929 -0.027983769417 -0.187034811719 0.030841381835 0.032883011667 -0.010597401785	$db8$	0.054415842243 0.312871590914 0.675630736297 0.585354683654 -0.015829105256 -0.284015542962 0.000472484574 0.128747426620	$db8$	-0.017369301002 -0.044088253931 0.013981027917 0.008746094047 -0.004870352993 -0.000391740373 0.000675449406 -0.000117476784
$db9$	0.038077947364 0.243834674613 0.604823123690 0.657288078051 0.133197385825 -0.293273783279	$db9$	-0.096840783223 0.148540749338 0.030725681479 -0.067632829061 0.000250947115 0.022361662124	$db9$	-0.004723204758 -0.004281503682 0.001847646883 0.000230385764 -0.000251963189 0.000039347320
$db10$	0.026670057901 0.188176800078 0.527201188932 0.688459039454 0.281172343661 -0.249846424327 -0.195946274377	$db10$	0.127369340336 0.093057364604 -0.071394147166 -0.029457536822 0.033212674059 0.003606553567 -0.010733175483	$db10$	0.001395351747 0.001992405295 -0.000685856695 -0.000116466855 0.000093588670 -0.000013264203

**Iteracinis metodas** paremtas tuo, kad mastelinė funkcija  $\varphi(x)$  yra tiesinio operatoriaus

$$F: Fh(x) = \sum_{k=0}^N c_k \cdot h(2x - k) \text{ nejudomasis taškas, t.y. } h(x) = \sum_{k=0}^N c_k \cdot h(2x - k). \text{ Šis taškas}$$

apskaičiuojamas iteraciniu būdu parinkus pradinę funkciją  $\varphi_0(x)$ , turinčią tas pačias

$$\text{savybes, kaip ir funkcija } \varphi(x). \text{ Paprastai } \varphi_0(x) = \chi_{[-1/2, 1/2]} = \begin{cases} 1, & -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & x \notin [-1/2, 1/2] \end{cases}.$$

$$\text{Aišku, kad } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^2(x) dx = 1. \text{ Tokias savybes turi ir motininė mastelio}$$

funkcija  $\varphi(x)$ , generuojanti ortonormuotą MSGA bazę.

Ištačius  $\varphi_0(x)$  į plėtinio lygtį, apskaičiuosime  $\varphi_1(x)$  išraišką:

$$\varphi_1(x) = c_i \cdot \chi_{\left[\frac{2i-1}{2^2}, \frac{2i+1}{2^2}\right]}, i = \overline{0, N}.$$

Ištačius  $\varphi_1(x)$  išraišką į plėtinio lygties pirmąją narį, t.y. narį  $c_0 \cdot \varphi(2x)$ ,

$$\text{apskaičiuosime } \varphi_2(x) \text{ dedamąsias: } c_0 \cdot c_i \cdot \chi_{\left[\frac{2i-1}{2^3}, \frac{2i+1}{2^3}\right]}, i = \overline{0, N}.$$

Analogiškai, ištačius  $\varphi_1(x)$  išraišką į plėtinio lygties antrąją narį, t.y. narį

$$c_1 \cdot \varphi(2x - 1), \text{ apskaičiuosime } \varphi_2(x) \text{ dedamąsias: } c_1 \cdot c_i \cdot \chi_{\left[\frac{2i+3}{2^3}, \frac{2i+5}{2^3}\right]}, i = \overline{0, N}.$$

Ir apskritai, ištačius  $\varphi_1(x)$  išraišką į plėtinio lygties  $k$ -ąją narį, t.y. narį  $c_k \cdot \varphi(2x - k)$ ,

$$\text{apskaičiuosime } \varphi_2(x) \text{ dedamąsias: } c_k \cdot c_i \cdot \chi_{\left[\frac{2i+2^2 k-1}{2^3}, \frac{2i+2^2 k+1}{2^3}\right]}, i = \overline{0, N}.$$

Aišku, kad dedamųjų aibės turės bendro pagrindo narių, kuriuos reikės susumuoti.

Nesunku pastebėti, kad  $\varphi_2(x)$  yra laiptuota funkcija ir laiptelių skaičius  $n_2$

išreiškiamas rekurentine lygtimi  $n_2 = n_1 + N \cdot 2^{2-1}$ , čia  $n_1 = 4$  yra  $\varphi_1(x)$  laiptelių skaičius, o  $N - \varphi(x)$  pagrindas (natūralusis skaičius). Pavyzdžiui, **db2** funkcijos  $\varphi_2(x)$  laiptelių skaičius  $n_2 = 4 + 3 \cdot 2 = 10$ .

Tęsiant iteracinį procesą,  $\varphi(x)$  laiptelių skaičius augs, o vieno laiptelio pagrindas artės prie nulio. Tuo būdu  $\varphi(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_l(x)$ .

Tam, kad iteracinis procesas konverguotų, plėtinio lygties koeficientai turi tenkinti sąlygą:  $\sum_k c_{2k} = \sum_k c_{2k+1} = 1$ .

**Formaliai aprašysime iteracinio proceso  $l$ -ąją  $l = 1, 2, 3, \dots$  iteraciją.**

Aišku,  $\varphi_{l-1}(x)$  yra laiptuota funkcija, turinti  $n_{l-1} = 1 + N \cdot (2^{l-1} - 1)$  laiptelių. Tarkime, kad laiptelių reikšmės patalpintos masyve  $f_i$ . Aišku, kad  $n_0 = 1$  ir  $f_i = \{1\}$ .

Statydami  $\varphi_{l-1}(x)$  reikšmes į plėtinio lygtį, lygties  $k$ -asis narys duos tokias  $\varphi_l(x)$  dedamąsias:  $c_k \cdot \hat{f}_i \cdot \chi_{\left[\frac{2i+2^l k-1}{2^{l+1}}, \frac{2i+2^l+1}{2^{l+1}}\right]}$  visiems  $k = \overline{0, N}$  ir  $i = \overline{0, n_{l-1}-1}$ . Po to, dedamąsias, turinčias tą patį pagrindą, reikia susumuoti.

Funkcijos  $\varphi_l(x)$  laiptelių skaičius  $n_l$  išreiškiamas tokia rekurentine lygtimi  $n_l = n_{l-1} + N \cdot 2^{l-1}$ . Šios lygties sprendinys yra  $n_l = 1 + N \cdot (2^l - 1)$ .

Kairysis  $\varphi(x)$  pagrindo galas  $x_k$  yra  $x_k = \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2^{l+1}} \right) = 0$ , o dešinysis -

$$x_d = \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \frac{2N(2^{l-1} - 1) + 2^l N + 1}{2^{l+1}} \right) = N.$$

Turint motininės mastelinio funkcijos  $\varphi(x)$  reikšmes, iš sąryšio

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^N g_k \varphi(2x - k), \text{ čia } g_k = (-1)^k c_{N-k}, k = 0, 1, 2, \dots, N, \text{ (žr. (7.6) formulę) galima}$$

apskaičiuoti motininės bangelės funkcijos  $\psi(x)$  reikšmes.

Žemiau pateikta funkcijų  $\varphi(x)$  ir  $\psi(x)$  reikšmių (grafiko) apskaičiavimo funkcija **bangrafikas**.

```
function [fi,psi,xfi,xpsi]=bangrafikas(c,l);
% Bangrafikas iteraciniu būdu apskaičiuoja  $\varphi(x)$  ir  $\psi(x)$  reikšmes.
% Įėjimo parametrai
% c - bangelės koeficientai,
% l - iteracijų skaičius.
% Išėjimo parametrai
% fi - funkcijos  $\varphi(x)$  reikšmės,
% psi - funkcijos  $\psi(x)$  reikšmės,
% xfi - funkcijos  $\varphi(x)$  argumento reikšmės,
% xpsi - funkcijos  $\psi(x)$  argumento reikšmės.

% fi reikšmių apskaičiavimas
n=numel(c); nn=n-1; % bangelės pagrindo plotis
v=zeros(1,1+nn*(2^l-1));
fi=c; m=n; dl=1;
for it=2:l
    dl=dl*2; t=0;
    for k=1:n
        for i=1:m
            v(i+t)=v(i+t)+c(k)*fi(i);
        end
        t=t+dl;
    end
    m=m+nn*dl; fi=v; v(1:m)=zeros(1,m);
end
xfi=linspace(0,n-1,m);
% psi reikšmių apskaičiavimas
mpsi=nn*(2^(l+1)-1)+1; dl=2^l; psi=zeros(1,mpsi); t=0; sgn=1;
for k=1:n
```

```

for i=1:m
    psi(i+t)=psi(i+t)+sgn*c(n-k+1)*fi(i);
end
t=t+dl; sgn=-sgn;
end
xpsi=linspace(0,nn,mpsi);

```

**Furje transformacijos metodas.** Furje metodas daugiau skirtas teoriniam bangelių nagrinėjimui. Atlikime plėtinio lygties Furje transformaciją:  $\hat{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{i\omega x} dx$ .

Turėsime

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{2} \left( \sum_k c_k e^{ik\omega/2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{iy\omega/2} dy = P\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ čia}$$

funkcijos  $P(\omega)$  išraiška yra:  $P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{ik\omega}$ .

Pastebėsime, kad  $P(0) = 1$ .

Dabar pakartokime  $\hat{\phi}(x)$  išraišką imdami  $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{8}, \dots, \frac{\omega}{2^n}, \dots$  ir įvertinę, kad

$$\hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \text{ turėsime } \hat{\phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^n P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} P\left(\frac{\omega}{2^j}\right).$$

**Remiantis funkcija**  $P(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{ik\omega}$ , kuri yra periodinė funkcija su periodu  $2\pi$ ,

**išvedamos anksčiau aptartos ortogonalumo bei aproksimacijos sąlygos.**

Kaip parodyta literatūroje, ortogonalumo sąlyga galios, jei

$$P(0) = 1 \text{ ir } |P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = 1$$

arba, kaip buvo minėta anksčiau,

$$\sum_k c_k \cdot c_{k+2l} = 2\delta_{0l}, l \in \mathbb{Z}.$$

Aproksimavimo sąlyga galios, jei funkcija  $P(\omega)$  turės  $p$  kartų kartotinę šaknį  $\omega = \pi$  arba, kad funkcijos  $P(\omega)$   $m$ -os eilės išvestinės reikšmė taške  $\pi$  lygi nuliui, t.y.  $P^{(m)}(\pi) = 0$ .

Kaip buvo minėta anksčiau, tas ekvivalentu

$$\sum_{k=0}^N (-1)^m k^m c_k = 0, m = 0, 1, \dots, p-1.$$

Vadinasi, vienas iš būdų konstruoti ortogonalų bangelių aibę yra toks. Jus tiesiog sugalvojate funkciją  $P(\omega)$ , kuri tenkina išvardintas ortogonalumo ir aproksimacijos sąlygas. Tada koeficientai  $c_k$  bus apskaičiuojami pritaikius funkcijai  $P(\omega)$  atvirkštinę Furje transformaciją, t.y. pagal formulę:

$$c_k = \sum_{j=0}^N P\left(\frac{2\pi j}{N}\right) e^{\frac{-2\pi i j k}{N}}, k = \overline{0, N}.$$

Tačiau aprašyta procedūra negarantuoja baigtinio pagrindo bangelių. Kitais žodžiais tariant, visi  $c_k$ ,  $k = \overline{0, N}$  yra nelygūs nuliui, nors, didėjant  $k$ , koeficientų  $c_k$  reikšmės sparčiai mažėja.

Debiuši bangelėms, kaip ir kitoms baigtinio pagrindo bangelėms, funkcija  $P(\omega)$  sukonstruojama taip, kad tik baigtinis skaičius koeficientų  $c_k$  būtų nelygus nuliui.

Iš kitos pusės, nėra ypatingos priežasties reikalauti baigtinio pagrindo bangelių. Kadangi koeficientai  $c_k$  sparčiai mažėja, vietoje baigtinio pagrindo geriau pareikalauti didesnio bangelės glodumo bei didesnio skaičiaus nykstančių momentų. Tuo labiau, kad toliau aptartas **piramidinis algoritmas**, apskaičiuojantis diskrečiąją bangelių transformaciją, yra efektyvesnis, nei greitosios Furje transformacijos algoritmas.

**Diadinės interpoliacijos metodas.** Šio metodo esmė yra tokia. Tarkime, kad žinome funkcijos  $\varphi(x)$  reikšmes sveikųjų skaičių taškuose. Tada, remiantis plėtinio lygtimi, galima apskaičiuoti  $\varphi(x)$  reikšmes taškuose  $\frac{k}{2} \in [0; N]$ , čia  $k$  – sveikasis skaičius. Toliau, žinant  $\varphi\left(\frac{k}{2}\right)$  reikšmes, iš plėtinio lygties apskaičiuosime  $\varphi(x)$  reikšmes taškuose  $x = \frac{k}{2^2} \in [0; N]$ . Tęsdami šį procesą, galėsime apskaičiuoti  $\varphi(x)$  reikšmes visuose diadiniuose taškuose, t.y., kai  $x = \frac{k}{2^n} \in [0; N]$ .

Norint realizuoti šį metodą, reikia žinoti  $\varphi(x)$  reikšmes sveikųjų skaičių taškuose. Kaip jas apskaičiuoti?

Galimi du šio klausimo sprendimo būdai.

**Pirmasis būdas.** Šio metodo aiškinimui pasirinkime konkrečią bangelę, pavyzdžiui, **db2**. Ši bangelė nusakoma plėtinio lygtimi:

$\varphi(x) = c_0 \cdot \varphi(2x) + c_1 \cdot \varphi(2x-1) + c_2 \cdot \varphi(2x-2) + c_3 \cdot \varphi(2x-3)$ , čia, kaip buvo minėta anksčiau,  $c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ,  $c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ,  $c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ ,  $c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$ .

Kadangi šios bangelės pagrindas yra intervalas  $[0;3]$  ir  $\varphi(0) = \varphi(3) = 0$ , tai

$$\begin{cases} \varphi(1) = c_1 \cdot \varphi(1) + c_0 \cdot \varphi(2), \\ \varphi(2) = c_3 \cdot \varphi(1) + c_2 \cdot \varphi(2). \end{cases}$$

Vadinasi,  $\varphi(1)$  ir  $\varphi(2)$  reikšmės yra matricos  $A = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix}$  tikrinės reikšmės, lygios

vienetui, tikrinio vektoriaus komponentės.

Kadangi kiekvienai tikrinei reikšmei atitinka be galo daug tikrinių vektorių, tai reikia papildomos sąlygos, kuri leistų iš visų tikrinių vektorių išrinkti reikiamą vektorių.

Yra žinoma, kad jeigu plėtinio lygties koeficientai tenkina sąlygą:  $\sum_k (-1)^k c_k = 0$ , tai funkcija  $\varphi(x)$  turi vieneto išskaidymo savybę (angl. partition of unity), t.y.  $\forall x \in R$ :  $\sum_k \varphi(x-k) = 1$ . Vadinasi,  $\sum_{k=0}^N \varphi(k) = 1$ , t.y. bangelių reikšmių sveikųjų skaičių taškuose suma lygi vienetui.

Taigi, norint apskaičiuoti  $\varphi(x)$  reikšmes sveikųjų skaičių taškuose, reikia elgtis taip.

1. Apskaičiuoti  $(N-1)$ -os eilės kvadratinės matricos  $A = (a_{ij})$   $i, j = \overline{1, N-1}$ , čia  $a_{ij} = c_{2i-j}$  ( $c_{2i-j} = 0$ , jei  $2i-j > N$  arba  $2i-j < 0$ ), tikrinei reikšmei 1 atitinkanti tikrinį vektorių:  $v = (v_1, v_2, \dots, v_{N-1})$ .
2. Apskaičiuoti  $\varphi(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$  pagal formulę  $\varphi(k) = \frac{v_k}{\sum_{j=1}^{N-1} v_j}$ .

Aišku, kad  $\varphi(0) = \varphi(N) = 0$ .

**Pavyzdys.** Bangelei *db2* apskaičiuokime tikrinį vektorių, kurio komponentės yra

$$v_1 = \frac{1}{2} \text{ ir } v_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Tada } \varphi(1) = \frac{\frac{1}{2}}{v_1 + v_2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \text{ o } \varphi(2) = \frac{-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{v_1 + v_2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

**Antrasis būdas.** Šis būdas remiasi anksčiau išnagrinėtu funkcijos  $\varphi(x)$  reikšmių apskaičiavimo iteraciniu metodu. Skaičiavimo eigoje funkcija  $\varphi(x)$  keičiama laiptuota funkcija. Didinant iteracijų skaičių, laiptelių skaičius katastrofiškai auga. Todėl iteracijų skaičius yra ribotas. Tačiau iteracijų metodu galime skaičiuoti tik  $\varphi(x)$  reikšmes sveikųjų skaičių taškuose. Tam tikslui reikia truputį modifikuoti anksčiau pateiktą iteracinį algoritmą.

Pradžioje  $\varphi(x)$  reikšmės sveikųjų skaičių taškuose yra:

$$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(2) = 0, \dots, \varphi(N) = 0.$$

**I-oje iteracijoje**  $\varphi(t)$  taškuose  $t = \overline{0, N-1}$  tikslinama pagal plėtinio lygties formulę:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^N c_k \cdot \varphi(2t-k),$$

čia  $0 \leq 2t-k \leq n-1$ .

Žemiau pateikta funkcija *dbfi*, įgalinanti apskaičiuoti iteraciniu metodu bangelių reikšmes sveikųjų skaičių taškuose

```
function fi=dbfi(c,l)
% DBFI funkcija apskaičiuoja Debiuši funkcijos,
% reikšmes sveikaskaitiniuose taškuose.
%Formalus parametrai
% Įėjimo parametrai
```



```

% c - Debiusi bangelę nusakantys koeficientai,
% l - iteracijų skaičius.
% Išėjimo parametrai
% fi - fi(x) reikšmės sveikaskaitiniuose taškuose.

n=numel(c); fi=zeros(1,n); fi(2)=1;
for it=1:l
    v=zeros(1,n);
    for t=1:n
        for k=1:n
            ind=2*t-k;
            if (ind>=1)&(ind<=n)
                v(t)=v(t)+c(k)*fi(ind);
            end
        end
    end
    fi=v;
end

```

**Pavyzdys.** Apskaičiuokime **db3** bangelės reikšmes sveikaskaitiniuose taškuose.

Paėmę  $n=6$ ,  $l=50$  ir

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \left(1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16, & c_1 &= \left(5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16, \\
 c_2 &= \left(10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16, & c_3 &= \left(10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16, \\
 c_4 &= \left(5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16, & c_5 &= \left(1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}\right)/16,
 \end{aligned}$$

kreipsimės į funkciją **dbfi**:  $fi=dbfi(n,c,l)$  ir apskaičiuosime **fi** reikšmes. 7.2 lentelėje patalpintos **db3** bangelės reikšmės sveikųjų skaičių taškuose.

7.2 lentelė. **db3** bangelės reikšmės sveikųjų skaičių taškuose.

Taškai $x$	$\varphi(x)$ reikšmės
0	0
1	1.28633506942571
2	-0.38583696104588
3	0.09526754600378
4	0.00423434561640
5	0

### 7.3.3. Diskrečioji bangelių transformacija

Aptarkime praktikoje dažniausiai sutinkamą diskrečiąją bangelių transformaciją (angl. discrete time wavelet transform (DTWT)). Primename, kad bangelės pilnai apibrėžiamos plėtinio lygties koeficientais  $c_k$ .

**Uždavinio formulavimas.** Funkcija  $f(x)$  nusakyta reikšmių, apskaičiuotų tolygiai išsidėstytoose taškuose, lentelė  $(f_i = f(x_i)), i = \overline{1, 2^n}$ . Norime apskaičiuoti funkcijos aproksimaciją bangelių bazėje, t.y.

$$f(x) = \sum_{k \in N} a_k \varphi(x-k) + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{2^l-1} b_k^{(l)} 2^{\frac{l}{2}} \psi(2^l x - k).$$

Vadinasi, pagrindinis klausimas yra: kaip, turint funkcijos reikšmes (signalą), apskaičiuoti bangelių koeficientus (atlikti signalo dekompoziciją) ir, atvirkščiai, kaip, turint bangelių koeficientus, rekonstruoti signalą?

Yra paprastas algoritmas, vadinamas **piramidiniu algoritmu**, kuris efektyviai atlieka signalo dekompoziciją ir rekonstrukciją. Jo sudėtingumas yra  $O(m)$ , čia  $m$  - funkcijos reikšmių skaičius.

Nagrinėkime erdvę  $V_n$  (žr. MSGA). Mūsų duomenys turi tą patį skiriamosios gebos laipsnį. Todėl galima tikėtis, kad

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} f_k 2^{\frac{n}{2}} \varphi(2^n x - k)$$

bus gera funkcijos aproksimacija. Be to, nėra pagrindo jaudintis, kaip tiksliai ši suma aproksimuoja funkciją  $f(x)$ , nes funkcijos reikšmes galime tiksliai atstatyti iš skleidinio koeficientų.

Kadangi  $V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$ , tai funkciją  $f(x)$  galima užrašyti dvejopai:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} f_k 2^{\frac{n}{2}} \varphi(2^n x - k) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k^{(n)} 2^{\frac{n}{2}} \varphi(2^n x - k) \quad (7.7)$$

ir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k^{(n-1)} 2^{\frac{n-1}{2}} \varphi(2^{n-1} x - k) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} b_k^{(n-1)} 2^{\frac{n-1}{2}} \psi(2^{n-1} x - k). \quad (7.8)$$

Remdamiesi funkcijų  $\varphi(x)$  ir  $\psi(x)$  bei jų postūmių ortogonalumu, apskaičiuosime koeficientus  $a_k^{(n)}, a_k^{(n-1)}, b_k^{(n-1)}$ .

(7.7) lygybę padauginę iš  $2^{\frac{n}{2}} \varphi(2^n x - k)$  ir abi puses integruodami, turėsime:

$$f_k = a_k^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varphi(2^n x - k) dx.$$

Analogiškai, (7.8) lygybę padauginę iš  $2^{\frac{n-1}{2}} \varphi(2^{n-1} x - k)$  ir integruodami, apskaičiuosime  $a_k^{(n-1)}$ , o – padauginę iš  $2^{\frac{n-1}{2}} \psi(2^{n-1} x - k)$  ir integruodami, apskaičiuosime  $b_k^{(n-1)}$ . Turėsime

$$a_k^{(n-1)} = 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varphi(2^{n-1} x - k) dx \quad \text{ir} \quad b_k^{(n-1)} = 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi(2^{n-1} x - k) dx. \quad (7.9)$$

Funkcijos  $\varphi(2^{n-1} x - k)$  plėtinio lygtis yra:

$$\begin{aligned} \varphi(2^{n-1} x - k) &= c_0 \varphi(2(2^{n-1} x - k)) + c_1 \varphi(2(2^{n-1} x - k) - 1) + \dots + c_p \varphi(2(2^{n-1} x - k) - l) + \dots + \\ &+ c_N \varphi(2(2^{n-1} x - k) - N) = \sum_{p=0}^N c_p \varphi(2^n x - (2k + p)), \end{aligned} \quad (7.10)$$

o funkcija  $\psi(2^{n-1} x - k)$  užrašoma lygybe:

$$\psi(2^{n-1}x - k) = \sum_{p=0}^N (-1)^p c_{N-p} \varphi(2^n x - (2k + p)). \quad (7.11)$$

Į koeficientų  $a_k^{(n-1)}$  ir  $b_k^{(n-1)}$  formules (žr. (7.9) formulę) atitinkamai įstatykime  $\varphi(2^{n-1}x - k)$  ir  $\psi(2^{n-1}x - k)$  išraiškas (žr. 7.10 ir 7.11 formules). Turėsime

$$\begin{aligned} a_k^{(n-1)} &= 2^{\frac{n-1}{2}} \sum_{p=0}^N c_p \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2^n x - (2k + p)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^N c_p 2^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2^n x - (2k + p)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^N c_p \cdot a_{2k+p}^{(n)}, \text{ t.y.} \\ a_k^{(n-1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^N c_p \cdot a_{2k+p}^{(n)} \quad \text{ir} \quad b_k^{(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^N (-1)^p c_{N-p} \cdot a_{2k+p}^{(n)} \quad \text{visiems } k = \overline{0, 2^{n-1} - 1}. \end{aligned}$$

**Pastarosios formulės yra piramidinio algoritmo pagrindas.**

Signalų analizėje koeficientai  $c_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}} c_k, k = \overline{0, N}$  yra žemo dažnio (suglodinančio)

filto koeficientai, o koeficientai  $g_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^k c_{N-k}, k = \overline{0, N}$  yra aukšto dažnio filtro

koeficientai. Jų pora signalų analizėje vadinama kvadratinio veidrodiniu filtru.

**Kraštinių sąlygų problema.** Išskyrus Haro bangeles, bangelių transformacijoje iškyla kraštinių sąlygų problema. Pavyzdžiui, norėdami apskaičiuoti **db2** bangelių koeficientus

$a_k^{(n-1)}$  ir  $b_k^{(n-1)}$ , kai  $k = 2^{n-1} - 1$ , turėsime apskaičiuoti sumas:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^3 c_p \cdot a_{2k+p}^{(n)}$  ir

$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^3 (-1)^p c_{N-p} \cdot a_{2k+p}^{(n)}$ , t.y. koeficientų  $a_i^{(n)} = f_i$  indeksas  $i$  įgaus reikšmes

$2^n - 2, 2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ . Kadangi reikšmių  $f_{2^n}$  ir  $f_{2^n+1}$  nėra, todėl jas reikia apibrėžti.

Aišku, kad platesnio pagrindo bangelėms ši problema iškyla skaičiuojant ne tik paskutinį narį, bet kelis paskutinius narius, kurių skaičius priklauso nuo bangelės koeficientų skaičiaus.

Aišku, su kraštinių sąlygų problema susiduriama ne tik aukščiausiam, bet ir visuose lygiuose.

Kraštinių sąlygų problema sprendžiama dvejopai: taikomos **simetrijos** arba **periodinės** sąlygos.

**Simetrijos sąlygų** atveju trūkstamos reikšmės apibrėžiamos imant paskutinių funkcijos reikšmių veidrodinį atspindį, t.y.  $f_{2^n} = f_{2^n-1}, f_{2^n+1} = f_{2^n-2}, \dots, f_{2^n+N-2} = f_{2^n-N+1}$ .

**Periodinių sąlygų** atveju laikoma, kad signalas yra periodinis, ir trūkstamos reikšmės apibrėžiamos taip:  $f_{2^n} = f_0, f_{2^n+1} = f_1, \dots, f_{2^n+N-2} = f_{N-2}$ .

**Dekompozicijos piramidinis algoritmas.** Piramidinį algoritmą paaiškinsime imdami baigtinio pagrindo bangelę, kurios pagrindas yra  $N$ , t. y. bangelę apibrėžiančių koeficientų skaičius yra  $N + 1$ . Tarkime, kad funkcijos reikšmių vektorius  $f$  turi  $m = 2^n$  komponentų.

Priimsime periodines kraštines sąlygas, t.y. signalo reikšmių vektorių  $f$  pratęsime elementais:  $f_0, f_1, \dots, f_{N-2}$  ir šį vektorių pažymėkime simboliu  $F$ .

***j*-oji iteracija**  $j = 1, 2, \dots, n$

1. Apskaičiuosime du vektorius:  $s^{(j)}$  ir  $d^{(j)}$ .

- Vektoriaus  $s^{(j)} = (s_0, s_1, \dots, s_k, \dots, s_t)$ , čia  $t = 2^{n-j} - 1$ ,  $k$ -oji

komponentė  $s_k$  apskaičiuojama pagal formulę:  $s_k = \sum_{p=0}^N c_p^* \cdot F_{2k+p}$ ,

$k = \overline{0, t}$ . Vektorius  $s^{(j)}$  vaizduoja  $(n-j)$ -to lygio signalo suglondintas reikšmes (koeficientus  $a_k^{(n-j)}$ ).

- Vektoriaus  $d^{(j)} = (d_0, d_1, \dots, d_k, \dots, d_t)$ , čia  $t = 2^{n-j} - 1$ ,  $k$ -oji

komponentė  $d_k$  apskaičiuojama pagal formulę:  $d_k = \sum_{p=0}^N g_p^* \cdot F_{2k+p}$ ,

$k = \overline{0, t}$ . Vektorius  $d^{(j)}$  vaizduoja signalo  $(n-j)$ -to lygio detales (koeficientus  $b_k^{(n-j)}$ ). Tolesniuose skaičiavimuose (iteracijose)

vektorių  $d^{(j)}$  - **nekinta**.

2. Vektoriumi  $F$  suteikiame vektorius  $s^{(j)}$  reikšmę ir pratęsiame komponentėmis  $s_0, s_1, \dots, s_{N-2}$ .

**Pastaba 1.** Reikia pabrėžti, kad iteracijas galima nutraukti bet kuriame, pavyzdžiui,  $l$ -jame lygyje. Tada turėsime suglondintą  $(n-l)$ -to lygio signalą ir jo detales (detalizacijos koeficientus), pradedant  $(n-l)$ -tu ir baigiant *pirmu* lygiu.

**Pastaba 2.** Transformacijos eigą galima aprašyti, pasinaudojant transformacijos matrica  $T$ , sudaryta iš bangelių koeficientų. Pavyzdžiui, **db2** bangelei, kai vektoriaus  $s^{(j)}$  elementų skaičius yra  $2^3$ , matrica  $T$ , esant periodinėms sąlygoms, yra:

$$T = \begin{pmatrix} c_0^* & c_1^* & c_2^* & c_3^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3^* & -c_2^* & c_1^* & -c_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0^* & c_1^* & c_2^* & c_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^* & -c_2^* & c_1^* & -c_0^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0^* & c_1^* & c_2^* & c_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3^* & -c_2^* & c_1^* & -c_0^* \\ c_2^* & c_3^* & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0^* & c_1^* \\ c_1^* & -c_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3^* & -c_2^* \end{pmatrix}.$$

Tada  $j$ -oje iteracijoje apskaičiuojame vektorių  $v^{(n-1)} = T \cdot s^{(j)} = (v_0, v_1, \dots, v_{2^j-1})$ , kurio lyginės komponentės apibrėžia vektorių  $s^{(j-1)}$ , o nelyginės komponentės - vektorių  $d^{(j-1)}$ , t. y. žemesnio lygio suglondinimo ir detalių vektorius:  $s^{(j-1)} = (v_0, v_2, \dots, v_{2^j-2})$  ir  $d^{(j-1)} = (v_1, v_3, \dots, v_{2^j-1})$ .

Vadinasi, atlikę signalo dekompoziciją, turėsime sugludintos dedamosios vektorių  $s^{(n)}$  ir detalių vektorius  $d^{(n)}, d^{(n-1)}, \dots, d^{(1)}$ . Rekonstruotas vektorius  $s^{(n)}$  duoda grubią funkcijos aproksimaciją, o rekonstruoti detalių vektoriai  $d^{(i)}, i = \overline{n,1}$  – signalo detales: kuo mažesnis indeksas  $i$ , tuo detalės yra smulkesnės.

**Signalo rekonstrukcija.** Signalo rekonstrukcija atliekama atvirkščia tvarka. Pirmiausia iš vektorių  $s^{(n)}$  ir  $d^{(n)}$  rekonstruojamas vektorius  $s^{(n-1)}$ . Po to iš vektorių  $s^{(n-1)}$  ir  $d^{(n-1)}$  rekonstruojamas vektorius  $s^{(n-2)}$  ir t.t. Procesas baigiamas, kai iš vektorių  $s^{(1)}$  ir  $d^{(1)}$  rekonstruojamas pradinis signalas  $f$ .

Tam, kad iš vektorių  $s^{(j)}$  ir  $d^{(j)}$  rekonstruotume sugludintos dedamosios vektorių  $s^{(j-1)}$ , pirmiausia sudarome vektorių  $v^{(j-1)}$ , kurio lyginės komponentės sutapatinašos su vektoriaus  $s^{(j)}$  komponentėmis, o nelyginės – su vektoriaus  $d^{(j)}$  komponentėmis. Tada vektorius  $s^{(j-1)}$  apskaičiuojamas pagal formulę:

$$s^{(j-1)} = T^t \cdot v^{(j-1)},$$

nes  $T$  yra ortogonalioji matrica, čia simbolis „ $t$ “ žymi transponavimo operaciją.

Vadinasi, iš vektoriaus  $v^{(j-1)}$  rekonstruojame signalą, naudodami koeficientų rinkinių porą:

$$rk1 = (c_{N-1}^*, c_1^*, c_{N-2}^*, c_3^*, \dots, c_0^*, c_N^*) \text{ ir } rk2 = (c_N^*, -c_0^*, c_{N-2}^*, -c_2^*, \dots, c_1^*, c_{N-1}^*).$$

Kad ją būtų galima taikyti reguliariai, vektorių  $v^{(j-1)}$  reikia išplėsti į abi puses, pagal pasirinktas kraštines sąlygas. Tada pirmosios išplėsto vektoriaus  $v^{(j-1)}$  komponentės nuosekliai skaliariškai dauginamos iš  $rk1$  ir  $rk2$ . Po to, praleidus dvi vektoriaus  $v^{(j-1)}$  komponentės, kitos iš eilės einančios jo komponentės dauginamos iš  $rk1$  ir  $rk2$  ir t.t.

MATLAB'as turi programinių priemonių komplektą, skirtą bangelių transformacijai. Pagrindines šio komplekto funkcijas aptarsime vėliau.

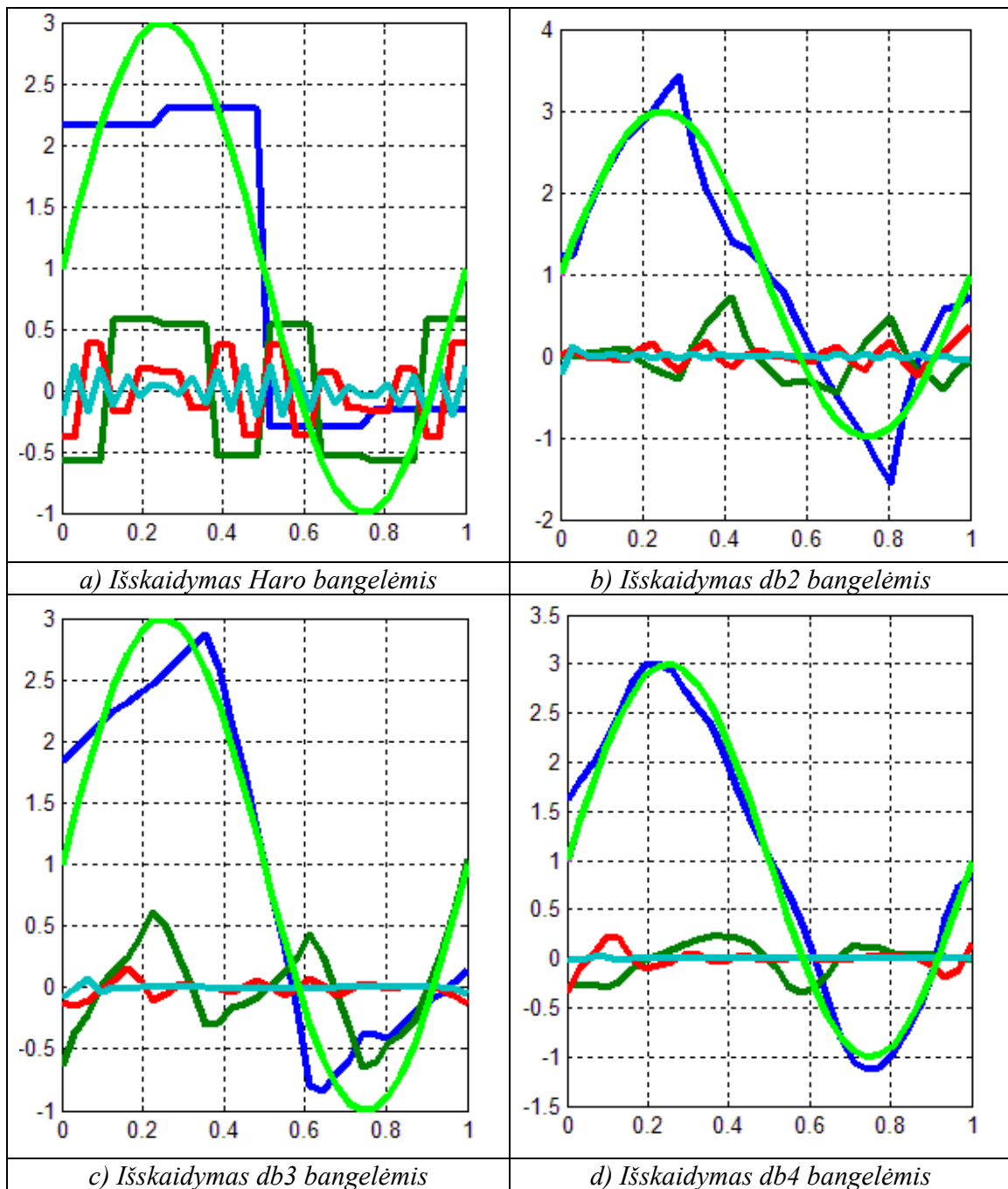
**Pavyzdys.** Funkcija  $y(x) = 1 + 2 \sin(2\pi x)$ ,  $x \in [0;1]$ , nusakyta taškais:  $(x_i, f(x_i))$ , čia  $x_0 = 0$ ,  $x_i = x_0 + h$ ,  $i = \overline{0,31}$  ir  $h = 1/32$ . Naudodami Debiuši bangeles: **db1** (Haro), **db2**, **db3** ir **db4**, šią funkciją išskaidykime dedamosiomis:  $s3, d3, d2$  ir  $d1$ .

Kadangi  $32 = 2^5$ , tai funkciją galima išskaidyti dedamosiomis:  $s5, d5, d4, d3, d2, d1$ , t.y. galime gauti penkto lygio sugludintą funkciją  $s5$  (grubią funkcijos  $y(x)$  aproksimaciją) ir visas detales, pradedant grubiausiomis  $d5$  ir baigiant smulkiausiomis –  $d1$ . Nagrinėjamu atveju turėsime sugludintą funkciją  $s3 = s5 + d5 + d4$  ir detales  $d3, d2, d1$ .

Pavyzdžiui, funkcijos išskaidymą, naudojant **db2** bangeles, apskaičiuosime atlikę komandų seką.

```
x=linspace(0,1,32); y=1+2*sin(2*pi*x);
[c 1]=wavedec(y,3,'db2');
a3=wrcoef('a',c,1,'db2',3); d3=wrcoef('d',c,1,'db2',3);
d2=wrcoef('d',c,1,'db2',2); d1=wrcoef('d',c,1,'db2',1);
plot(x,y,'g','LineWidth',3)
grid on; hold on
plot(x,a3,x,d3,x,d2,x,d1,'LineWidth',3)
```

7.6 paveiksle pavaizduotas funkcijos  $y(x) = 1 + 2 \sin(2\pi x)$ ,  $x \in [0;1]$  išskaidymas dedamosiomis.



7.6 pav. Funkcijos  $y(x) = 1 + 2 \sin(2\pi x)$ ,  $x \in [0;1]$  išskaidymas

7.6 paveiksle žalia spalva pavaizduota funkcija, mėlyna spalva –  $s_3$ , samaninė spalva –  $d_3$ , raudona spalva –  $d_2$  ir mėlsva spalva –  $d_1$ .

#### 7.3.4. MATLAB'o bangelių funkcijos, skirtos vieno kintamojo funkcijų transformacijai.

MATLAB'as, turi bangelių priemonių komplektą (angl. toolbox). Aptarkime pagrindines jo funkcijas.

Apie bangelių taikymo galimybes ir jų pavyzdžius galima susipažinti paleidus veikti MATLAB'o programą „*wavedemo*“.

Funkcija *wavenames*. Ši funkcija išvardina MATLAB'e naudojamų bangelių vardus. Kreipinys į ją yra: *w=wavenames(t)*. Parametro „*t*“ galimos reikšmės yra: „*all*“, „*lazy*“, „*orth*“ ir „*bior*“.

Kai parametro reikšmė yra „*all*“, tai išvardinami visų bangelių vardai; jei - „*lazy*“, tai išvedamas vardas „*lazy*“; jei - „*orth*“, tai ortogonalųjų bangelių vardai (pavyzdžiui, „*db1*“, „*db2*“, ..., „*db10*“ - Debiušio bangelių šeima ir kitų ortogonalųjų bangelių vardai); jei - „*bior*“, tai biortogonalųjų bangelių vardai.

Funkcija *wavefun*. Ši funkcija apskaičiuoja bangelių funkcijos  $\psi(x)$  ir mastelio funkcijos  $\phi(x)$  (jei egzistuoja) reikšmes anksčiau aprašytu iteraciniu metodu.

Ortogonalioms bangelėms kreipinys į funkciją yra: *[fi,psi,x]=wavefun('wname',iter)*.

Parametras „*wname*“, tai bangelės vardas, o *iter* – iteracijų skaičius (natūralusis skaičius). Parametrai *fi* ir *psi* yra masyvai, talpinantys funkcijų  $\phi(x)$  ir  $\psi(x)$  reikšmes ir jų skaičius lygus  $2^{iter}$ .

Apie kreipinius į kito tipo bangelės galima sužinoti komandos „*help wavefun*“ pagalba.

Funkcija *wavedec*. Kreipinys į funkciją yra: *[c,l]=wavedec(y,n,'wname')*.

Ši funkcija atlieka vieno kintamojo funkcijos  $y = y(x)$ , nusakytos reikšmių vektoriumi  $y_i = y(x_i), i = 1, 2^m$  diskrečiąją bangelių transformaciją. Parametras  $n \leq m$  – natūralusis skaičius, nurodantis detalizacijos lygių skaičių, o parametras „*wname*“ nurodo bangelės tipą.

Išėjimo parametras „*c*“ yra speciali struktūra (masyvas), talpinanti transformacijos koeficientus, o parametras „*l*“ nurodo koeficientų apimtį.

Struktūra „*c*“ sudaryta tokiu būdu:  $c = [suglod.koef(n)|detal.koef(n)|...|detal.koef(1)]$ . Masyvo „*l*“ elementai reiškia:  $l(1) = suglod.koef(n) \text{ skaičius}$ ,  $l(i) = detal.koef(n-i+2) \text{ skaičius}$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , o  $l(n+2) = vektoriaus y \text{ elementų skaičius}$ .

Funkcijos *appcoef* ir *detcoef*. Šios funkcijos skirtos iš anksčiau aprašytos struktūros „*c,l*“ „ištraukti“ transformuoto signalo aproksimacijos (suglodinimo) ir detalizacijos koeficientus.

Kreipiniai į funkcijas yra:

*apkof=appcoef(c,l,'wname',n)* ir *dkof=detcoef(c,l,n)*.

Parametrai „*c*“ ir „*l*“ nusako „*c,l*“ struktūrą, „*wname*“ – bangelės vardą, o „*n*“ – lygio numerį ( $1 \leq n \leq m$ , jei vektoriaus *y* elementų skaičius yra  $2^m$ ). Parametras „*apkof*“ yra *n*-to lygio aproksimavimo koeficientai, o parametras „*dkof*“ – *n*-to lygio detalių koeficientai.

Funkcija **wrcoef**. Ši funkcija iš struktūros „**c,l**“ rekonstruoja **n**-to lygio funkcijos dedamąją.

Kreipinys į funkciją yra: **yn = wrcoef('type',c,l,'wname',n)**.

Parametras '**type**' gali įgauti dvi reikšmes : '**a**' ir '**d**'. Pirmasis naudojamas, jei norime apskaičiuoti aproksimacijos (suglodinimo) dedamąją, o antrasis, jei – detalizacijos dedamąją.

Parametrai „**c**“ ir „**l**“ nusako anksčiau aprašytą „**c,l**“ struktūrą, o parametrai '**wname**' ir „**n**“ - atitinkamai bangelės vardą ir lygio numerį.

Funkcija **waverec**. Ši funkciją atlieką atvirkštinę bangelių transformaciją, t.y. iš struktūros „**c,l**“ atstato pradinės funkcijos  $y = y(x)$  vektorių **y**.

Kreipinys į procedūrą yra: **y=waverec(c,l,'wname')**.

Funkcija **dwt**. Kreipinys į šią funkciją yra **[ca1,da1]=dwt(y,'wname')** ir ji atlieka signalo **y** tiesioginę bangelių '**wname**' transformaciją, apskaičiuodama pirmo (tiksliausio) lygio aproksimacijos **ca1** ir detalių **da1** koeficientus.

Funkcija **upcoef**. Ši funkcija iš aproksimavimo koeficientų „**ca1**“ rekonstruoja signalo suglodinančią dedamąją, o iš detalių koeficientų „**da1**“ rekonstruoja detalių dedamąją. Abiejų dedamųjų suma sutampa su pradiniu signalu **y**.

Kreipinys į šią funkciją yra: **sy = upcoef(o,x,'wname',n,l)**.

Parametras „**o**“ įgauna reikšmes '**a**', jei rekonstruojama signalo suglodinančioji dedamoji, arba '**d**', jei rekonstruojama signalo detalių dedamoji. Pirmuoju atveju **x** turi būti suglodinimo koeficientai „**ca1**“, o antruoju – detalių koeficientai „**da1**“.

Parametras '**wname**' nurodo bangelės vardą, o parametrai „**n**“ ir „**l**“ – atitinkamai lygio numerį bei rekonstruotų reikšmių skaičių.

Funkcija **idwt**. Ši funkcija iš suglodinimo „**ca**“ ir detalių koeficientų „**cd**“ atlieka atvirkštinę transformaciją. Kreipinys į funkciją yra:

**y = idwt(ca,cd,'wname')**.

### 7.3.5 Biortogonaliosios bangelės

Anksčiau aptartos ortogonaliosios bangelės nėra simetriškos. Eilėje taikomųjų uždavinių simetriškumo savybė yra labai svarbi. Tai buvo viena iš priežasčių dėl ko buvo sukurtos simetriškos biortogonaliosios bangelės.

Tegu  $\varphi(x)$  ir  $\tilde{\varphi}(x)$  yra dvi skirtingos mastelio funkcijos, nusakomos plėtinio lygtimis:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_n h_n \varphi(2x - n) \quad \text{ir} \\ \tilde{\varphi}(x) &= \sum_n \tilde{h}_n \tilde{\varphi}(2x - n).\end{aligned}\tag{7.12}$$

Be to,

$$(\varphi(x), \tilde{\varphi}(x - k)) = \delta(k),\tag{7.13}$$

čia simbolis „ $( )$ “ žymi funkcijų skaliarinę sandaugą, t.y. funkcijos  $\varphi(x)$  ir  $\tilde{\varphi}(x)$  yra biortogonaliosios.



Tegu  $\varphi(x)$  ir  $\tilde{\varphi}(x)$  kiekviena atskirai generuoja anksčiau aprašytą MSGA, t.y. erdvės  $L^2(R)$  poerdvių sistemą: atitinkamai  $V_i$  ir  $\tilde{V}_i$  yra biortogonalios.

Tarkime, kad funkcija  $f(x) \in L^2(R)$ . Aptarkime jos aproksimaciją  $f_0(x)$  erdvėje  $V_0$ .

$$f_0(x) = \sum_n a_n^{(0)} \varphi(x-n), n \in Z.$$

Tada, remiantis 7,13 formule, koeficientai  $a_n^{(0)}$  apskaičiuojami pagal formulę

$$a_n^{(0)} = (f(x), \tilde{\varphi}(x-n)).$$

Analogiškai galima užrašyti  $f(x)$  projekciją erdvėje  $V_k$ :

$$f_k(x) = \sum_n a_n^{(k)} \varphi(2^k x - n), n \in Z, \text{ čia } a_n^{(k)} = 2^k (f(x), \tilde{\varphi}(2^k x - n)).$$

Kiekviena mastelio funkcija  $\varphi(x)$  ir  $\tilde{\varphi}(x)$  turi atitinkamą bangelės funkciją:  $\psi(x)$  ir  $\tilde{\psi}(x)$ . Šios bangelės tenkina papildomas sąlygas:

$$\begin{aligned} (\psi(x), \tilde{\psi}(x-k)) &= \delta(k), \\ (\psi(x), \tilde{\varphi}(x-k)) &= 0, \\ (\tilde{\psi}(x), \varphi(x-k)) &= 0. \end{aligned}$$

Be to, kiekviena funkcija  $\psi(x)$  ir  $\tilde{\psi}(x)$  užrašomos išraiškomis:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n g_n \varphi(2x-n) \quad \text{ir} \\ \tilde{\psi}(x) &= \sum_n \tilde{g}_n \tilde{\varphi}(2x-n). \end{aligned}$$

Aišku, kad funkcija  $\psi(x)$  ir jos sveikųjų skaičių poslinkiai yra erdvės  $W_0$  bazė, o funkcija  $\tilde{\psi}(x)$  ir jos sveikųjų skaičių poslinkiai yra erdvės  $\tilde{W}_0$  bazė.

Analogiškai, erdvės  $W_k$  bazė yra  $\{\psi(2^k x - n), n \in Z\}$ , o erdvės  $\tilde{W}_k$  bazė yra  $\{\tilde{\psi}(2^k x - n), n \in Z\}$  ir erdvės  $W_k$  bei  $\tilde{W}_k$  yra biortogonalios.

Tada  $f(x)$  projekciją erdvėje  $V_k$ , analogiškai kaip ir ortogonalų bangelių bazėje, galima užrašyti:

$$f_k(x) = \sum_n a_n^{(k-1)} \varphi(2^{k-1} x - n) + \sum_n b_n^{(k-1)} \psi(2^{k-1} x - n),$$

čia

$$a_n^{(k-1)} = \sum_p \tilde{h}_p \cdot a_{2k+p}^{(k)} \quad \text{ir} \quad b_n^{(k-1)} = \sum_p \tilde{g}_p \cdot a_{2k+p}^{(n)}.$$

Pastarosios formulės nusako funkcijos dekompoziciją, t.y. funkcijos  $f(x)$  suglodintą ir detalių dedamąsias.

Funkcijos  $f(x)$  rekonstrukcijai parašykime jos aproksimaciją erdvėje  $V_1$ :

$$f_1(x) = \sum_n a_n^{(0)} \varphi(x-n) + \sum_n b_n^{(0)} \psi(x-n).$$

Remdamiesi  $\varphi(x)$  ir  $\psi(x)$  plėtinio lygtimis, pastarąją lygybę galima užrašyti taip:

$$\sum_n a_n^{(1)} \varphi(2x-n) = \sum_l \sum_p a_l^{(0)} h_p \varphi(2x-2l-p) + \sum_l \sum_p b_n^{(0)} g_p \varphi(2x-2l-p).$$

Pakeiskime:  $2l+p=n$ . Tada  $p=n-2l$  ir

$$\sum_n a_n^{(1)} \varphi(2x-n) = \sum_l \sum_p a_l^{(0)} h_{n-2l} \varphi(2x-n) + \sum_l \sum_p b_n^{(0)} g_{n-2l} \varphi(2x-n).$$

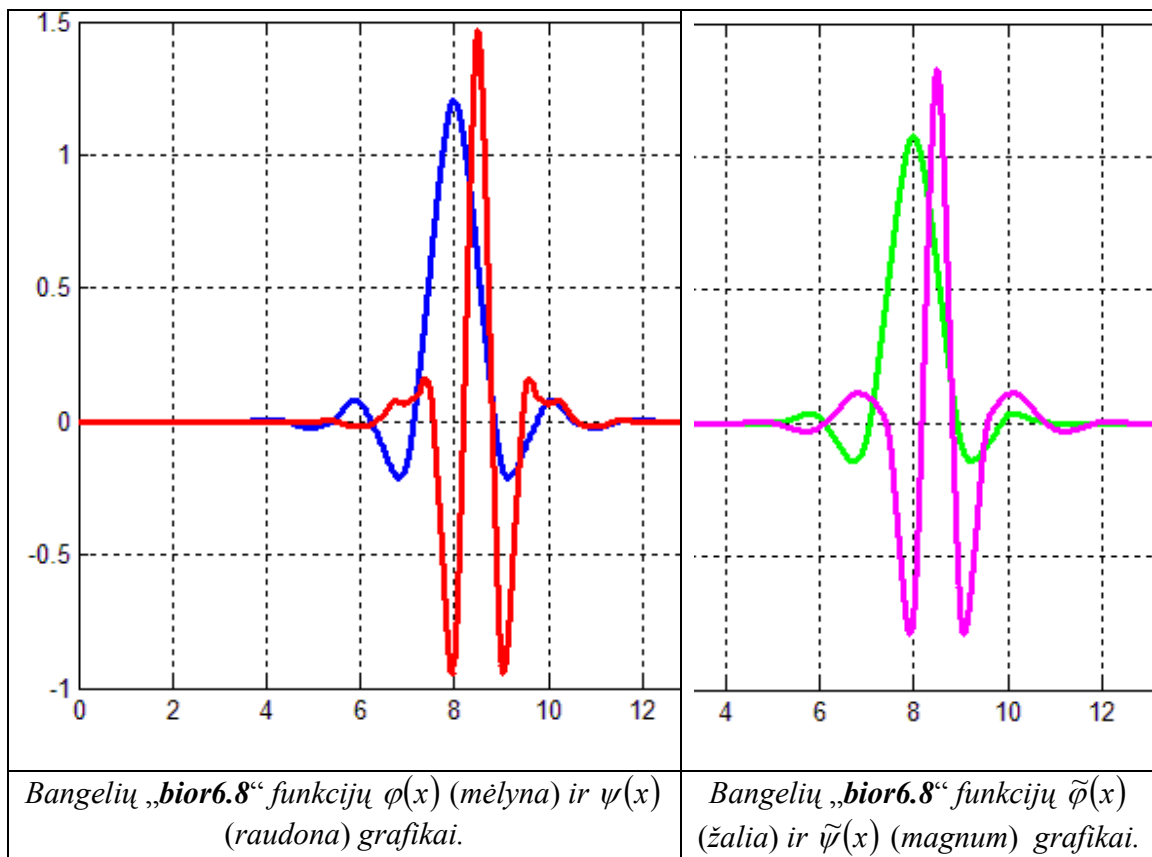
Vadinasi,

$$a_n^{(1)} = \sum_l a_l^{(0)} h_{n-2l} + \sum_l b_l^{(0)} g_{n-2l}.$$

Pastaroji formulė apibrėžia funkcijos rekonstrukciją, t.y., kaip iš žemesnio lygio sugludintos ir detalių dedamųjų koeficientų apskaičiuoti aukštesnio lygio sugludintos dedamosios koeficientus.

Iš pateikto nagrinėjimo darome išvadą, kad funkciją  $f(x)$  biortogonalinių bangelių bazėje galima išskaidyti skirtingais detalizacijos lygiais analogiškai, kaip ji skaidoma ortogonalinių bangelių bazėje. Vienintelis skirtumas yra tas, kad, atliekant funkcijos dekompoziciją „grubesnio“ lygio sugludintos ir detalių dedamosios iš tikslesnio lygio sugludintos dedamosios apskaičiuojamos naudojant koeficientus  $\tilde{h}_n$  ir  $\tilde{g}_n$ , o, rekonstruojant funkciją, tikslesnio lygio sugludinta dedamoji iš „grubesnio“ lygio sugludintos ir detalių dedamųjų apskaičiuojama naudojant koeficientus  $h_n$  ir  $g_n$ .

7.7 paveiksle pavaizduoti MATLAB'o biortogonalinių bangelių „**bior6.8**“ grafikai.



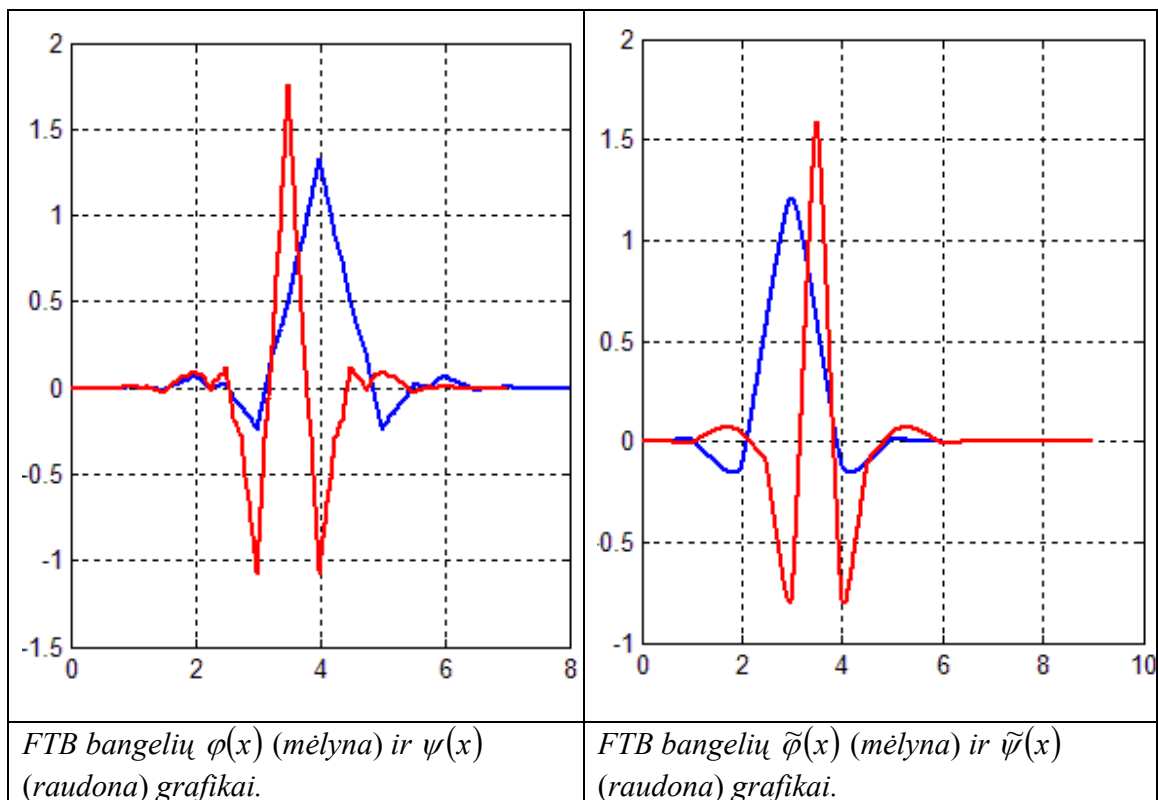
7.7 pav. Biortogonalinių bangelių „**bior6.8**“ grafikai.

7.3 lentelėje pateikti koeficientai biortogonalinių bangelių, kurias JAV Federalinis tyrimo biuras naudoja pirštų atspaudams suspausti, o 7.8 paveiksle pateikti šių bangelių grafikai. Pavadinkime šias bangeles FTB bangelėmis. Nesunku pastebėti, kad funkcijos

$\tilde{\varphi}(x)$  plėtinio lygties koeficientai  $\tilde{h}_k$  tenkina sąlygą:  $\tilde{h}_k = (-1)^{n+1} g_{N-k}, k = 0, 1, 2, \dots, N$ , o funkcijos  $\tilde{\psi}(x)$  plėtinio lygties koeficientai  $\tilde{g}_k$  - sąlygą:  $\tilde{g}_k = (-1)^n h_{N-k}, k = 0, 1, 2, \dots, N$ .

7.3 lentelė. Biortogonalinių bangelių plėtinio lygčių koeficientai

Funkcija	Plėtinio lygčių koeficientai
$\varphi(x)$	0.0534997, -0.0337276, -0.1564403, 0.5337242, 1.2063242, 0.5337242, -0.1564403, -0.0337276, 0.0534997
$\psi(x)$	0.0912733, -0.0575443, -0.5912827, 1.1151074, -0.5912827, -0.0575443, 0.0912733
$\tilde{\varphi}(x)$	-0.0912733, -0.0575443, 0.5912827, 1.1151074, 0.5912827, -0.0575443, -0.0912733
$\tilde{\psi}(x)$	0.0534997, 0.0337276, -0.1564403, -0.5337242, 1.2063242, -0.5337242, -0.1564403, 0.0337276, 0.0534997

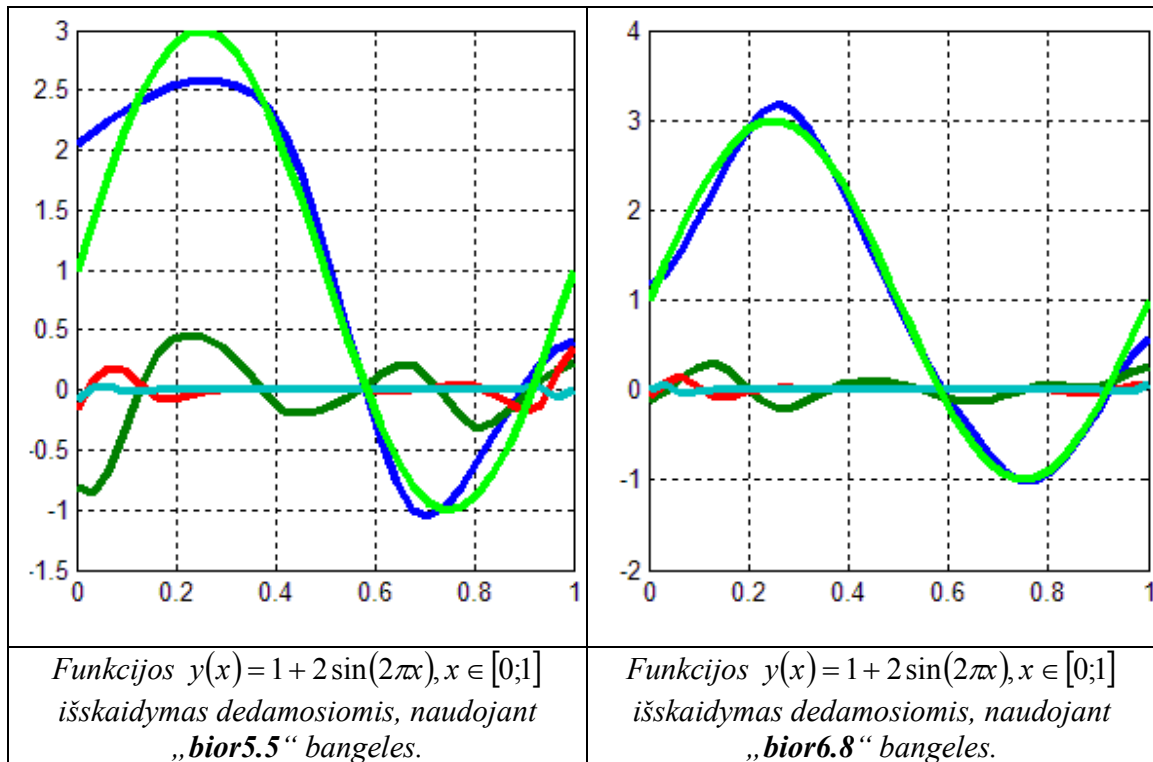


7.8 pav. FTB bangelių grafikai

**Pastaba.** Visa, kas pasakyta apie MATLAB'o bangelių funkcijas, skirtas vieno kintamojo funkcijų transformacijai, tinka ir biortogonalioms bangelėms, išskyrus kreipinį į funkciją „wavefun“. Kreipinys į šią funkciją yra:

$[fi1,psi1,fi2,psi2,x]=wavefun('wname',iter)$ , čia „ $fi1,psi1,fi2,psi2$ “ atitinkamai yra funkcijų  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\tilde{\varphi}(x)$  ir  $\tilde{\psi}(x)$  reikšmių masyvai, o „ $x$ “ – argumento reikšmių masyvas.

7.9 paveiksle pavaizduotas funkcijos  $y(x) = 1 + 2 \sin(2\pi x)$ ,  $x \in [0;1]$  išskaidymas dedamosiomis, naudojant „ $bior5.5$ “ ir „ $bior6.8$ “ bangeles.



7.9 pav. Funkcijos  $y(x) = 1 + 2 \sin(2\pi x)$ ,  $x \in [0;1]$  išskaidymas dedamosiomis.

### 7.3.6. Dviejų kintamųjų bangelės

Tarkime, kad funkcija  $f(x, y)$  yra dviejų kintamųjų kvadratu integruojama funkcija,

t.y.  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, y) dx dy < \infty$ . Tegu  $\varphi(t)$  yra vieno kintamojo mastelio funkcija,

generuojanti multi skiriamosios gebos analizę (MSGA) (žr. 7.2 paragrafą).

Panagrinėkime dviejų kintamųjų funkciją :

$$s_{\varphi, \varphi} \equiv \varphi(x)\varphi(y).$$

Kadangi  $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  yra ortonormuota vieno kintamojo funkcijų erdvės  $v_0$  bazė, tai galima parodyti, kad  $\{s_{\varphi, \varphi}(x-k, y-l), k, l \in \mathbb{Z}\}$  yra ortonormuota dviejų kintamųjų funkcijų erdvės  $V_0$  bazė.

Vadinasi, funkciją  $f_0(x, y) \in V_0$  galima užrašyti šių bazinių funkcijų tiesiniu dariniu:

$$f_0(x, y) = \sum_k \sum_l a_{k,l}^{(0)} s_{\varphi, \varphi}(x - k, y - l), \text{ kur } a_{k,l}^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x, y) \cdot s_{\varphi, \varphi}(x - k, y - l) dx dy < \infty.$$

Kitaip tariant, kaip ir vieno kintamojo atveju, galima sukurti multi skiriamosios gebos analizę (MSGA) dviejų kintamųjų funkcijoms.

Tarkime, kad  $f_1(x, y) \in V_1, V_0 \subset V_1$ . Tada funkciją  $f_1(x, y)$  galima užrašyti:

$$f_1(x, y) = \sum_k \sum_l a_{k,l}^{(1)} \varphi(2x - k) \varphi(2y - l).$$

$$\text{Pažymėkime } f_1(x, l) \equiv \sum_k a_{k,l}^{(1)} \varphi(2x - k), \quad l \in Z.$$

Funkcija  $f_1(x, l)$  skiriasi nuo funkcijos  $f_1(x, y)$  tuo, kad kintamasis  $l$  yra ne tolydusis, kaip funkcijoje  $f_1(x, y)$ , bet - diskretusis dydis ( $l \in Z$ ).

Tada funkciją  $f_1(x, y)$  galima užrašyti taip:

$$f_1(x, y) = \sum_l f_1(x, l) \varphi(2y - l).$$

Simboliais  $v_k$  ir  $w_k$  atitinkamai pažymėkime vieno kintamojo funkcijos MSGA  $k$ -to lygio poerdvį ir jo ortogonalųjį papildymą iki  $(k+1)$  lygio erdvės, t.y.  $v_{k+1} = v_k \oplus w_k$ .

Kadangi, funkcija  $f_1(x, l) \in v_1$ , o  $v_1 = v_0 \oplus w_0$ , tai  $f_1(x, l)$  galima išreikšti jos projekcijų į  $v_0$  (žymėsime  $f_0(x, l)$ ) ir  $w_0$  (žymėsime  $g_0(x, l)$ ) suma:

$$f_0(x, l) \equiv \sum_n a_{l,n}^{(0)} \varphi(x - n), \quad l \in Z,$$

ir

$$g_0(x, l) \equiv \sum_n b_{l,n}^{(0)} \psi(x - n), \quad l \in Z.$$

Vadinasi,

$$f_1(x, l) = \sum_n a_{l,n}^{(0)} \varphi(x - n) + \sum_n b_{l,n}^{(0)} \psi(x - n), \quad l \in Z. \quad (7.1)$$

Išstatę  $f_1(x, l)$  išraišką į  $f_1(x, y)$ , turėsime:

$$f_1(x, y) = \sum_l \sum_n a_{l,n}^{(0)} \varphi(x - n) \varphi(2y - l) + \sum_l \sum_n b_{l,n}^{(0)} \psi(x - n) \varphi(2y - l).$$

Pažymėkime

$$f_1(n, y) \equiv \sum_l a_{l,n}^{(0)} \varphi(2y - l), \quad n \in Z$$

ir

$$g_1(n, y) \equiv \sum_l b_{l,n}^{(0)} \varphi(2y - l), \quad n \in Z.$$

Šiuos pažymėjimus įstatę į  $f_1(x, y)$  išraišką, turėsime:

$$f_1(x, y) = \sum_n f_1(n, y) \cdot \varphi(x - n) + \sum_n g_1(n, y) \cdot \psi(x - n). \quad (7.2)$$

Funkcijos  $f_1(n, y)$  ir  $g_1(n, y)$ , kaip ir funkcija  $f_1(x, l)$ , priklauso erdvei  $v_1$ , tai jas galima išreikšti jų projekcijų į  $v_0$  ir  $w_0$  suma.

Vadinasi,

$$\begin{aligned} f_1(n, y) &= A_0(n, y) + B_0(n, y), \\ g_1(n, y) &= C_0(n, y) + D_0(n, y), \end{aligned}$$

čia

$$\begin{aligned} A_0(n, y) &= \sum_p a_{n,p}^{(0)} \varphi(y-p), \quad B_0(n, y) = \sum_p b_{n,p}^{(0)} \psi(y-p), \\ C_0(n, y) &= \sum_p c_{n,p}^{(0)} \varphi(y-p), \quad D_0(n, y) = \sum_p d_{n,p}^{(0)} \psi(y-p). \end{aligned}$$

Istatę šias išraiškas į (7.2) formulę, turėsime:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sum_n \sum_p a_{n,p}^{(0)} \varphi(x-n) \varphi(y-p) + \sum_n \sum_p b_{n,p}^{(0)} \varphi(x-n) \psi(y-p) + \\ &+ \sum_n \sum_p c_{n,p}^{(0)} \psi(x-n) \varphi(y-p) + \sum_n \sum_p d_{n,p}^{(0)} \psi(x-n) \psi(y-p). \end{aligned}$$

Pažymėję  $s_{\varphi, \varphi} \equiv \varphi(x)\varphi(y)$ ,  $s_{\varphi, \psi} \equiv \varphi(x)\psi(y)$ ,  $s_{\psi, \varphi} \equiv \psi(x)\varphi(y)$ ,  $s_{\psi, \psi} \equiv \psi(x)\psi(y)$ ,

turėsime:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sum_n \sum_p a_{n,p}^{(0)} s_{\varphi, \varphi}(x-n, y-p) + \sum_n \sum_p b_{n,p}^{(0)} s_{\varphi, \psi}(x-n, y-p) + \\ &+ \sum_n \sum_p c_{n,p}^{(0)} s_{\psi, \varphi}(x-n, y-p) + \sum_n \sum_p d_{n,p}^{(0)} s_{\psi, \psi}(x-n, y-p). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Pirmasis narys (7.3) formulėje yra funkcija  $f_0(x, y)$ , t.y. erdvėje  $V_0$  suglodinta (aproksimuota) funkcija  $f_1(x, y)$ ; tuo tarpu kiti trys nariai yra detalės, kurias pridėję prie  $f_0(x, y)$ , turėtume funkciją  $f_1(x, y)$ .

Funkcijos  $s_{\varphi, \varphi}(x, y)$ ,  $s_{\varphi, \psi}(x, y)$ ,  $s_{\psi, \varphi}(x, y)$ ,  $s_{\psi, \psi}(x, y)$  ir jų sveikųjų skaičių  $x$  ir  $y$  postūmiai vienas kito atžvilgiu yra ortogonalūs. Tuo būdu funkcija  $f_1(x, y)$ , skirtingai nei vieno kintamojo atveju, yra jos projekcijų ne į dvi, o į keturias poerdves suma.

Šias  $t$  – to lygio poerdves pažymėkime:  $V_t, W_{bt}, W_{ct}, W_{dt}$ . Tada  $(t+1)$ -o lygio poerdvė bus šių poerdvių tiesioginė suma:

$$V_{t+1} = V_t \oplus W_{bt} \oplus W_{ct} \oplus W_{dt}.$$

**Pastaba.** Bendru atveju funkcija  $s_{\varphi, \varphi}(x, y)$  gali būti sukonstruota imant skirtingas motines funkcijas  $\varphi(x)$ , t.y.  $s_{\varphi_1, \varphi_2}(x, y) \equiv \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ .

### ***Kaip dvimačiu atveju atliekama bangelių transformacija ?***

Tarkime, kad žinomi  $(t+1)$  – o lygio suglodintos funkcijos koeficientai  $a_{k,l}^{(t+1)}$ ,  $k, l = \overline{1, 2^{t+1}}$ . Aišku, kad tiksliausio lygio koeficientai, kaip ir vienmačiu atveju, sutapatunami su funkcijos  $f(x, y)$  reikšmių matrica.

Tarkime, kad  $c_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}} c_k$ ,  $k = \overline{0, N}$  yra žemo filtro koeficientai (žymėsime „ $L$ “ nuo anglų žodžių „Low filter“), o  $g_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^k c_{N-k}$ ,  $k = \overline{0, N}$  – aukšto filtro koeficientai

(žymėsime „ $H$ “ nuo anglų žodžių „High filter“), čia  $c_k, k = \overline{0, N}$  yra funkciją  $\varphi(x)$  nusakantys koeficientai, o  $(-1)^k c_{N-k}, k = \overline{0, N}$  - funkciją  $\psi(x)$  apibrėžiantys koeficientai.

Tada  $t$  – o lygio suglodinimo bei detalių koeficientai apskaičiuojami pagal 7.3 lentelėje surašytą algoritmą. Tam, kad simbolika būtų paprastesnė, koeficientų viršutiniai indeksai „ $t$ “, žymintys poerdvių numerius, yra praleisti.

Sakinys, pavyzdžiui, „ $a_{k,l}$  eilutės perskaičiuojamos su  $L$ , o po to stulpeliai – su  $H$ “, reiškia, kad matricos  $a = (a_{k,l})$  eilutės nuosekliai, pradedant pirmąja ir baigiant paskutinąją, transformuojamos (žr. 7.3.3 paragrafą) naudojant žemo filtro koeficientus, o po to analogiškai perskaičiuojami transformuotos matricos stulpeliai, naudojant aukšto filtro koeficientus.

7.3 lentelė. Koeficientų  $a_{n,p}, b_{n,p}, c_{n,p}, d_{n,p}$  apskaičiavimas

Koeficientai	Koeficientų apskaičiavimo tvarka	Žymėjimai
$a_{n,p}$	$a_{n,p}$ eilutės perskaičiuojamos su $L$ , o po to stulpeliai – su $L$	$LL$
$b_{n,p}$	$a_{n,p}$ eilutės perskaičiuojamos su $L$ , o po to stulpeliai – su $H$	$LH$
$c_{n,p}$	$a_{n,p}$ eilutės perskaičiuojamos su $H$ , o po to stulpeliai – su $L$	$HL$
$d_{n,p}$	$a_{n,p}$ eilutės perskaičiuojamos su $H$ , o po to stulpeliai – su $H$	$HH$

### 7.3.7. MATLAB‘o bangelių funkcijos, skirtos dviejų kintamųjų funkcijų transformacijai.

MATLAB‘as turi funkcijas, skirtas dviejų kintamųjų funkcijų bangelių transformacijai, kurios yra analogiškos vieno kintamojo funkcijų transformacijos funkcijoms.

Funkcija **wavedec2**. Ši funkcija atlieka dviejų kintamųjų funkcijos transformaciją. Kreipinys į funkciją yra:

$$[c,s] = \text{wavedec2}(x,n,'wname'),$$

čia  $x$  – dviejų kintamųjų funkcijos reikšmės (matrica);

$n$  – natūralusis skaičius, nurodantis iki kurio lygio atlikti transformaciją. Maksimalią  $n$  reikšmę galima sužinoti funkcijos **wmaxlev** pagalba, kreipinys į kurią yra

$n = \text{wmaxlev}(s,'wname')$ , čia  $s$  – vieno kintamojo funkcijos reikšmių vektorius arba dviejų kintamųjų funkcijos reikšmių matrica;

**waname** – bangelės vardas;

**c,s** – struktūra, nusakanti transformacijos rezultatus.

**c,s** struktūrą sudaro vektorius **c** ir matrica **s**. Vektorius **c** sudarytas taip:

$c = [a(n) \mid h(n) \mid v(n) \mid d(n) \mid h(n-1) \mid v(n-1) \mid d(n-1) \mid \dots \mid h(1) \mid v(1) \mid d(1)]$ , čia  $a, h, v, d$  yra vektoriai vaizduojantys:

$a$  – aproksimacijos koeficientai (**LL**),

$h$  – horizontalių detalių koeficientai (**LH**),

$v$  – vertikalinių detalių koeficientai (**HL**),

$d$  – įstrižaininių detalių koeficientai (**HH**),

ir kiekvienas vektorius vaizduoja „protingai“ išdėstytus matricos elementus.

Matricos **s** struktūra yra:

$s(1,:) =$  aproksimacijos koeficientų  $a(n)$  formatui,  
 $s(i,:) =$  detalių koeficientų  $(n-i+2)$  formatas,  $i = 2, \dots, n+1$  ir  
 $s(N+2,:) =$  pradinių duomenų  $x$  formatą.

Funkcijos **appcoef2** ir **detcoef2**. Šios funkcijos, kaip ir vieno kintamojo analogiškos funkcijos, skirtos iš anksčiau aprašytos „**c,s**“ struktūros „ištraukti“ transformuoto signalo aproksimacijos (suglodinimo) ir detalizacijos koeficientus.

Kreipiniai į funkcijas yra:

$can = \text{appcoef2}(c,s,'wname',n)$  ir  $dkof = \text{detcoef2}(o,c,s,n)$ .

Parametrai „**c**“ ir „**s**“ nusako „**c,s**“ struktūrą, „**wname**“ – bangelės vardą, „**n**“ – lygio numerį (natūralusis skaičius) ir parametras „**o**“ nurodo detalių tipą. Jo reikšmėmis gali būti: „**h**“, „**v**“, „**d**“ arba „**all**“. Pirmaisiais trim atvejais išvedami nurodyto tipo detalizacijos koeficientai, o esant reikšmei „**all**“ – visi „**h**“, „**v**“, „**d**“ detalizacijos koeficientai.

Funkcija **wrcoef2**. Ši funkcija iš „**c,s**“ struktūros rekonstruoja  $n$ -to lygio lygio funkcijos dedamąsias.

Kreipinys į funkciją yra:  $yn = \text{wrcoef2}('type',c,s,'wname',n)$ .

Parametras „**type**“ gali įgauti keturias reikšmes: „**a**“ ir „**h**“, „**v**“, „**d**“. Pirmasis naudojamas, jei norime turėti suglodintą signalą, o kiti – nurodo atitinkamo tipo dedamąsias. Lygio numeris „**n**“ turi tenkinti reikalavimus:

$0 \leq n \leq \text{size}(s,1)-2$ , jei „**type**“ = „**a**“ ir  $1 \leq n \leq \text{size}(s,1)-2$ , jei „**type**“ = „**h**“, „**v**“ arba „**d**“.

Funkcija **waverec2**. Ši funkcija iš „**c,s**“ struktūros rekonstruoja dviejų kintamųjų funkciją. Kreipinys į ją yra:  $y = \text{waverec2}(c,s,'wname')$ .

Funkcija **dwt2**. Ši funkcija atlieka dviejų kintamųjų funkcijos vieno lygio dekompoziciją. Kreipinys į funkciją yra:  $[ca,ch,cv,cd] = \text{dwt2}(y,'wname')$ , čia  $y$  – funkcijos reikšmių matrica, „**wname**“ – bangelės vardas, o **ca,ch,cv,cd** suglodintos funkcijos ir detalių koeficientai.

Funkcija **upcoef2**. Ši funkcija iš aproksimavimo koeficientų „**ca**“ rekonstruoja funkcijos suglodinančią dedamąją, o iš detalių koeficientų „**ch,cv,cd**“ rekonstruoja detalių dedamąsias. Visų dedamųjų suma sutampa su pradiniu signalu  $y$ .

Kreipinys į šią funkciją yra:  $sy = \text{upcoef2}(o,x,'wname',n,l)$ .

Parametras „**o**“ įgauna reikšmes „**a**“, jei rekonstruojama funkcijos suglodinančioji dedamoji, arba „**h**“, „**v**“, „**d**“, jei rekonstruojama signalo detalių dedamoji. Pirmuoju atveju  $x$  turi būti suglodinimo koeficientai „**ca**“, o antruoju – detalių koeficientai „**ch**“, „**cv**“ arba „**cd**“.

Parametras „**wname**“ nurodo bangelės vardą, o parametrai „**n**“ ir „**l**“ – atitinkamai lygio numerį bei rekonstruotų reikšmių skaičių.

Funkcija **idwt2**. Ši funkcija iš suglodinimo „**ca**“ ir detalių koeficientų „**ch**“, „**cv**“, „**cd**“ atlieka atvirkštinę transformaciją. Kreipinys į funkciją yra:  
 $y = \text{idwt2}(ca,ch,cv,cd,'wname')$ .



### 7.3.8. Bangelių bazės parinkimas

Iš anksčiau pateikto nagrinėjimo matyti, kad sukurta daug įvairių bangelių. Todėl praktikoje, analizuojant signalus, labai svarbu parinkti optimalią bangelių bazę. Tam tikslui reikalinga tikslo funkcija, kiekybiškai įvertinanti pasirinktą bazę.

Tikslo funkcija turėtų tenkinti tokius reikalavimus.

1. Ji turėtų būti matas skaičiaus koeficientų, reikalingų norimu tikslumu aprašyti funkciją. Pavyzdžiui, tikslo funkcijos reikšmė turėtų būti didesnė, jei visų koeficientų reikšmės yra maždaug lygios, ir mažesnė, jei tik kelių koeficientų reikšmės yra svarbios.
2. Tikslo funkcija turėtų būti adityvioji, t.y. tikslo funkcijos reikšmė signalo reikšmių sekai turi būti lygi sumai funkcijos reikšmių signalo reikšmių poaibiams.

Šie reikalavimai rodo, kad tikslo funkcija turi būti panaši į informacijos teorijoje naudojamą entropijos mato funkciją:

$$\mu(\{x_i\}) = -\sum_n p_n \ln p_n, \text{ čia } p_n = \frac{|x_n|^2}{\sum_i |x_i|^2}.$$

Tarkime, kad seka  $\{x_i\}$  yra vektoriaus  $x$  komponentės ir  $t = Bx$ , čia

$B$  transformacijos matrica, kurią apibrėžia pasirinkta bangelių bazė, o  $t$  - transformacijos koeficientų vektorius. Tada bangelių bazė (tarp pasirinktų bangelių) bus geriausia, kuriai funkcijos  $\mu(t)$  reikšmė bus mažiausia.

Geriausios bangelių bazės parinkimo algoritmas yra glaudžiai susijęs su signalo dekompozicijos, naudojant bangeles, strategija.

Ankstesniuose signalo dekompozicijos pavyzdžiuose buvo taikoma standartinė strategija, kai, panaudojant žemo ir aukšto dažnių filtro koeficientus, gautus iš funkcijų  $\varphi(x)$  ir  $\psi(x)$  plėtinio lygčių, signalas buvo išskaidomas į grubią suglodingą dedamąją ir į eilę skirtingo lygio (tikslumo) detalių dedamąsias. Ši detalizacijos procesą galima pavaizduoti specifiniu binariniu medžiu, kurio dešinėsios briaunos yra kabančios ir vaizduoja detalių dedamąsias, o kairiosios briaunos vaizduoja kiekvieno lygio suglodingas dedamąsias, kurios išsiskaidomos į žemesnio lygio (grubesnę) suglodingą dedamąją ir detalių dedamąją.

Šis medis pavaizduotas 7.10 a) paveiksle.

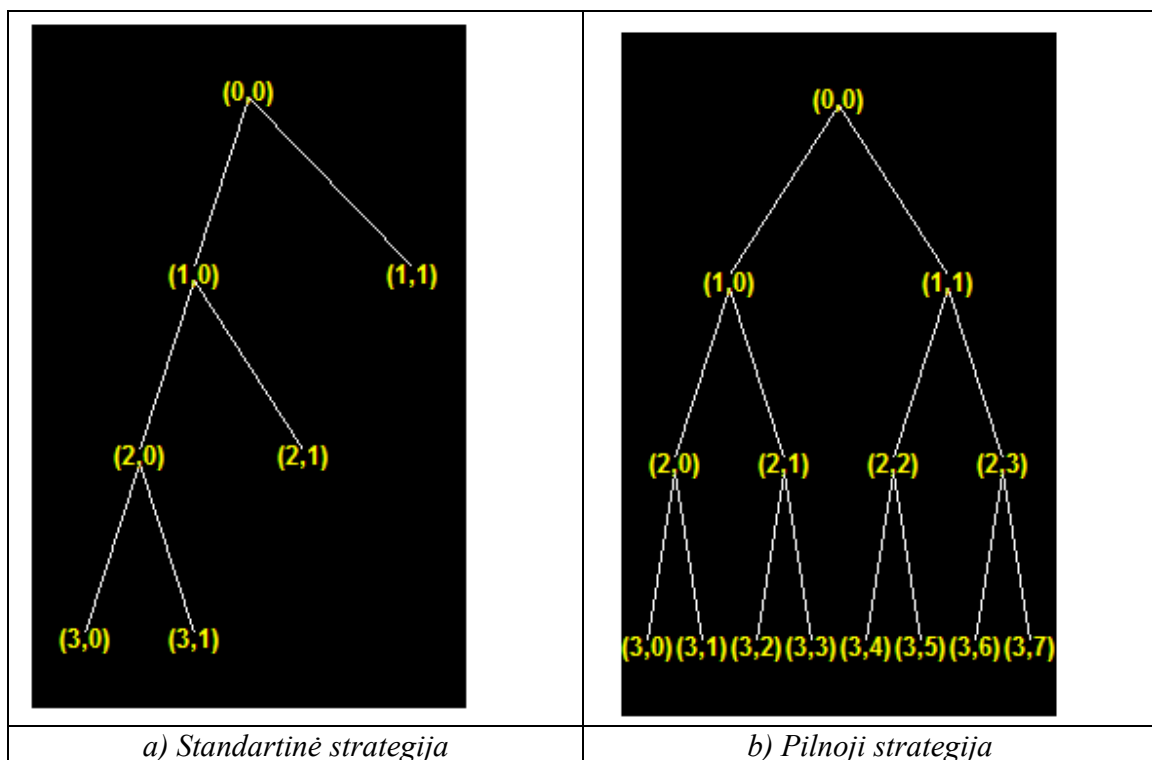
Tačiau praktikoje galima taikyti ir kitokias signalo dekompozicijos strategijas, kai bet kurio lygio detalių dedamosios gali būti išskaidytos į žemesnio lygio suglodingas ir detalių dedamąsias. Kitaip tariant, bet koks binarinis medis gali vaizduoti signalo dekompozicijos strategiją. Tokia strategija vadinama **bangelių paketais** (angl. **wavelet packets**). 7.10 b) paveiksle pavaizduotas trijų lygių pilnas binarinis medis, kuris vaizduoja signalo išskaidymą tokiomis dedamosiomis, kurias galima nusakyti kodais (medžio šakomis):  $l, l, l$ ;  $l, l, h$ ;  $l, h, l$ ;  $l, h, h$ ;  $h, l, l$ ;  $h, l, h$ ;  $h, h, l$ ;  $h, h, h$ . Dedamųjų kodus suprantame taip: raidė „l“ žymi suglodingą dedamąją, o „h“ žymi detalių dedamąją. Pavyzdžiui, kodas  $l, h, l$  reiškia, kad signalo pirmo lygio dedamąją išskaidėme į suglodingą ir detalių dedamąsias. Paėmėme detalių dedamąją ir vėl ją išskaidėme į suglodingą ir detalių dedamąsias ir imame pastarojo skaidinio suglodingą dedamąją.

Šias dedamosios atitinkamai vaizduojamos kabančiomis medžio viršūnėmis (angl. *terminal nodes*): (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7). Žemiau aprašytoje MATLAB'o funkcijoje *wpdec* medžio viršūnės numeruojamos iš eilės einančiais natūraliaisiais skaičiais: viršūnės  $(k,l)$  numeris apskaičiuojamas pagal formulę:  $nr(k,l) = 2^k + l - 1$ . Todėl 7.11 b) paveiksle pavaizduotas medis nusakomas viršūnėmis, kurių numeriai yra: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ir 14.

Bangelių paketai plačiai naudojami šalinant triukšmus bei suspaudžiant vaizdus.

MATLAB'as turi visą eilę funkcijų, kuriose naudojami bangelių paketai, ir kurios skirtos tiek signalų dekompozicijai, tiek rekonstrukcijai, tiek ir šalinti triukšmus bei suspausti vaizdus.

Aptarkime pagrindines MATLAB'o funkcijas, skirtas šiems uždaviniams spręsti.



7.10 pav. Binariniai medžiai, vaizduojantys bangelių dekompozicijos strategijas.

#### Signalų dekompozicijos funkcijos.

Funkcija *wpdec* (*wpdec2* – dviejų kintamųjų signalams). Ši funkcija atlieka signalo dekompoziciją pagal pilną binarinį medį. Pilnas kreipinys į šią funkciją yra:

$t = wpdec(x, n, 'wname', e, p)$ , čia  $x$  – signalo reikšmių vektorius,  $n$  – binarinio medžio lygių skaičius, '*wname*' – bangelės vardas,  $e$  – simbolių eilutė, nurodanti entropijos tipo vardą (funkcijos  $\mu(\{x_i\})$  išraišką), o  $p$  – yra opcijos  $e$  parametras. Funkcijos  $\mu(\{x_i\})$  išraiškas galima sužinoti MATLAB'o pagalbos žinyne vardu: *doc wentropy*.

Simbolių eilutės  $e$  reikšmės yra: '*shannon*', '*threshold*', '*norm*', '*log energy*', '*sure*', '*user*'.

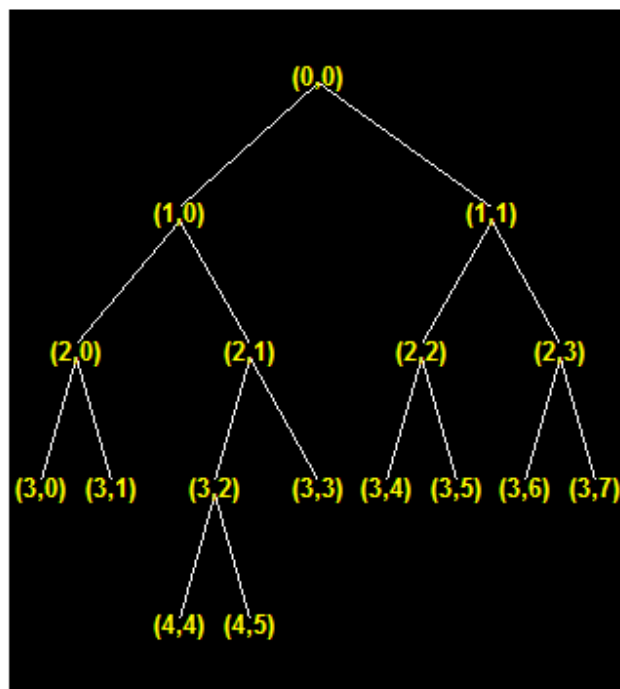
Parametro  $p$  reikšmės:

- jei  $e = 'shannon'$  arba  $'log\ energy'$ :  $p$  – nenaudojamas;
- jei  $e = 'threshold'$  arba  $'sure'$ :  $p$  yra slenkstis ir  $p \geq 0$ ;
- jei  $e = 'norm'$ :  $p$  - yra laipsnis ir  $p \geq 1$ ;
- jei  $e = 'user'$ :  $p$  yra vardas vartotojo funkcijos, skirtos apskaičiuoti  $\mu(\{x_i\})$ .

Išėjimo parametras  $t$  yra speciali struktūra, nusakanti binarinę medį. Grafiškai tą medį galima pavaizduoti komanda `plot(t)`.

Galimas ir trumpesnis kreipinys į funkciją:  $t = wpdec(x, n, 'wname')$ . Tada pagal nutylėjimą  $e = 'shannon'$ . Šenono funkcija yra  $\mu(\{x_i\}) = -\sum_i x_i^2 \ln(x_i^2)$ , kai  $0 \cdot \ln(0) = 1$ .

Funkcija `wpsplt`. Ši funkcija atlieka papildomą nurodytos kabančios viršūnės išskaidymą. Pilnas kreipinys yra:  $[t1, ca, cd] = wpsplt(t, n)$  (sutrumpintas:  $t1 = wpsplt(t, n)$ ), čia  $t$  yra speciali anksčiau aprašyta struktūra, nusakanti binarinę medį,  $n$  – medžio kabančios viršūnės numeris,  $t1$  – nauja medžio struktūra su išskaidyta viršūne  $n$ , o  $ca$  ir  $cd$  – atitinkamai suglodinančių ir detalių dedamųjų dekompozicijos koeficientai. Pavyzdžiui, komandos: `t1=wpsplt(t,9); plot(t1)`, kai turime pilną binarinę medį (žr. 7.10 b) pav.), turėsime medį `t1`, kuris pavaizduotas 7.11 paveiksle.



7.11 pav. Medis išskaidžius viršūnę  $nr(3,2) = 9$

### Signalų rekonstrukcijos funkcijos.

Funkcija `wprcoef`. Ši funkcija rekonstruoja signalą nurodytai medžio viršūnei. Kreipinys yra:  $y = wprcoef(t, n)$ , čia  $t$  – medžio struktūra,  $n$  - viršūnės numeris,  $y$  – rekonstruotas signalas.

Funkcijos `wprec` ir `wprec2`. Funkcijos `wprec` ir `wprec2` iš medžio struktūros  $t$  rekonstruoja atitinkamai vieno kintamojo ir dviejų kintamųjų funkcija. Kreipinys yra:  $y = wprec(t)$  ir  $y = wprec2(t)$ .

Funkcija **wpjoin**. Ši funkcija rekonstruoja medžio  $t$  struktūrą. Kreipiniai į funkciją gali būti keli.

$t1 = \text{wpjoin}(t, n)$ ;  $t1 = \text{wpjoin}(t)$ ;  $[t1, x] = \text{wpjoin}(t, n)$ ;  $[t1, x] = \text{wpjoin}(t)$ .

Parametras  $n$  yra medžio viršūnės numeris: pora  $[k, l]$  arba tos viršūnės numeris – natūralusis skaičius -  $nr(k, l) = 2^k + l - 1$ . Išėjimo parametras  $t1$  yra medžio struktūra, kai struktūroje  $t$  pomedis, kurio šaknis yra viršūnė  $n$ , keičiama viena kabančia viršūne su numeriu  $n$ , o  $x$  yra signalo transformacijos koeficientai, atitinkantis rekonstruotą viršūnę  $n$ . Jei parametro  $n$  reikšmė nenurodyta, tai pagal nutylėjimą jo reikšmė lygi nuliui.

#### **Dekompozicijos struktūros funkcijos.**

Funkcija **besttree**. Ši funkcija duotam medžiui  $t$  apskaičiuoja optimalų pomedį su mažiausia funkcijos  $\mu(t)$  reikšme. Kreipiniai į funkciją yra:

$t1 = \text{besttree}(t)$ ;  $[t1, e] = \text{besttree}(t)$ ;  $[t1, e1, n] = \text{besttree}(t)$ , čia  $t1$  – medžio  $t$  optimalus pomedis, t.y. pomedis su mažiausia funkcijos  $\mu(t)$  reikšme,  $e1$  – optimalaus medžio kiekvienos viršūnės entropijos reikšmių masyvas, o  $n$  – apjungtų viršūnių (apjungtų pomedžių šaknų) numerių vektorius. Pavyzdžiui, surinkus komandų seką:

```
load noisdopp; x = noisdopp;
% Signalo x dekompozicija: db1 bangeles ir 3 -jų lygių medis.
wpt = wpdec(x, 3, 'db1');
% Viršūnės [3 0] išskaidymas
wpt = wpsplt(wpt, [3 0]);
% Medžio wpt brėžimas
plot(wpt)
% Geriausio medžio bt apskaičiavimas
[bt, e, n] = besttree(wpt);
% Medžio bt brėžimas
plot(bt)
```

turėsime medžius, pavaizduotus 7.12 paveiksle.

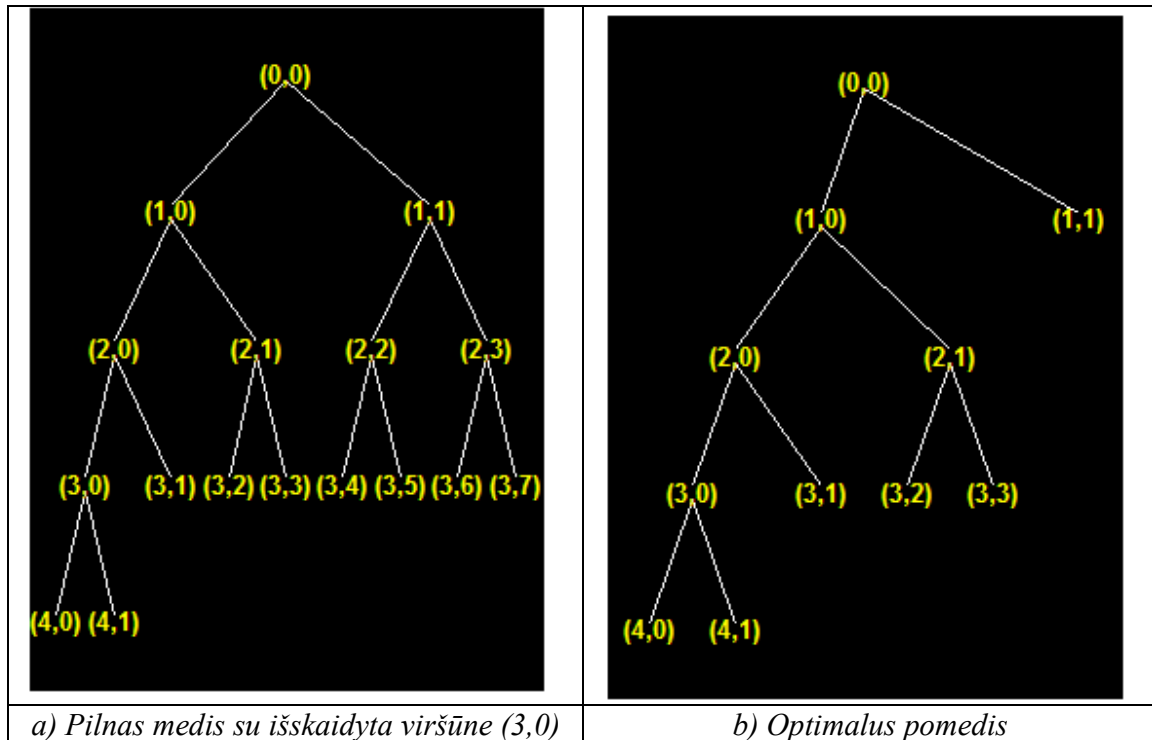
Parametro  $n$  reikšmė bus lygi 2 (arba (1, 1)). Tas reiškia, kad buvo apjungtos visos pomedžio, kurio šaknis yra viršūnė (1, 1), viršūnės.

Funkcija **bestlevt**. Ši funkcija, skirtingai nuo funkcijos **besttree**, duotam medžiui  $t$  apskaičiuoja **pilną** optimalų pomedį su mažiausia funkcijos  $\mu(t)$  reikšme. Apskaičiuotas pomedis gali turėti mažiau lygių, nei pradinis medis  $t$ . Kreipiniai į funkciją yra:

$t1 = \text{bestlevt}(t)$ ;  $[t1, e1] = \text{bestlevt}(t)$ ,

čia parametrų reikšmės tokios pat, kaip ir funkcijos **besttree**.

Funkcija **wp2wtree**. Ši funkcija, iš pilno dekompozicijos medžio  $t$  (žr. 7.10 b) pav.) „ištraukia“ dekompozicijos medį, pavaizduotą 7.10 b) paveiksle. Kreipinys į funkciją yra:  $t1 = \text{wp2wtree}(t)$ .



7.12 pav. Signalo „noisdopp“ geriausias dekompozicijos medis

Funkcija **wpcutree**. Ši funkcija, iš pilno dekompozicijos medžio  $t$  ( žr.7.10 b) pav.) apskaičiuoja dekompozicijos medį  $t1$ , nukirsdama žemiau nurodyto lygio  $l$  visas medžio  $t$  šakas. Kreipiniai į funkciją yra:  $t1 = wpcutree(t, l)$ ,  $[t1, n] = wpcutree(t, l)$ , čia  $n$  – vektorius, kurio komponentės žymi rekonstruotų viršūnių numerius.

MATLAB‘as taip pat turi triukšmų šalinimo bei vaizdų suspaudimo specifines funkcijas: **ddencmp**, **wpbmpen**, **wpdencmp**, **wpthcoef**, **wthrmngr**. Daugiau apie jas sužinoti galima MATLAB‘o pagalbos žinyne skyriuje „**Wavelt packets**“.

**Pavyzdys.** Taikydami **db2** bangelių paketus, funkciją  $y(x) = 1 + 2 \sin(2\pi x)$ ,  $x \in [0;1]$  išskaidykime dedamosiomis, kurias apibrėžia pilno trijų lygių binarinio medžio viršūnės: 2, 3 ir 4 ( arba [1, 1], [2, 0] ir [2, 1] ).

Surinkę komandas:

```
x=linspace(0,1,32);
y=1+2*sin(2*pi*x);
t=wpdec(y,3,'db2')
plot(t)
y3=wprcoef(t,[2,0]);
y4=wprcoef(t,[2,1]);
y2=wprcoef(t,[1,1]);
plot(x,y,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(x,y2,'k','LineWidth',2)
hold on
```

```

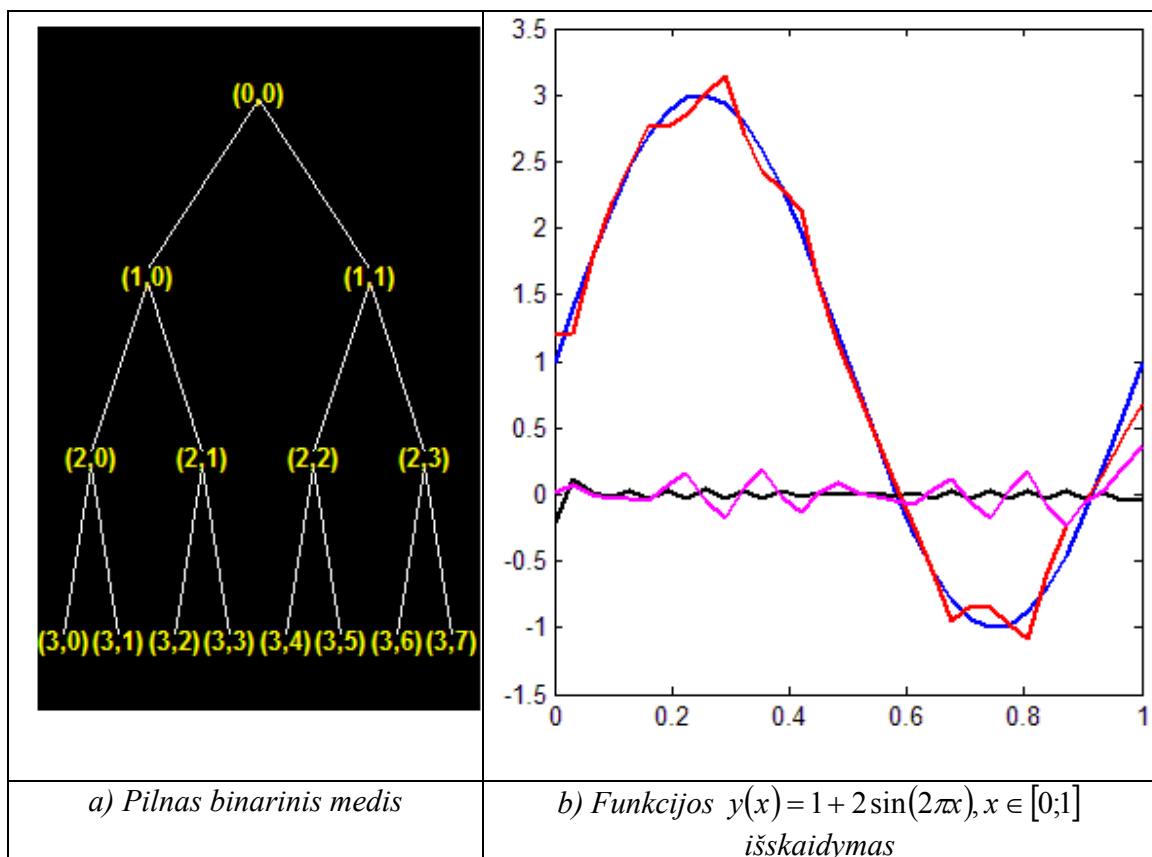
plot(x,y3,'r','LineWidth',2)
hold on
plot(x,y4,'m','LineWidth',2)

```

turėsime rezultatus, pavaizduotus 7.13 paveiksle.

7.13 a) paveiksle pavaizduotas pilnas binarinis medis. 7.13 b) paveiksle pavaizduotas išskaidytas signalas: funkcijos  $y(x) = 1 + 2 \sin(2\pi x)$ ,  $x \in [0;1]$  grafikas (mėlyna spalva), viršūnės (2, 0) dedamoji (**ll** dedamoji) (raudona spalva), viršūnės (2, 1) dedamoji (**lh** dedamoji) (magenta spalva), viršūnės (1, 1) dedamoji (**h** dedamoji) (juoda spalva).

Kadangi viršūnės (1, 1), (2, 0), (2, 1) padengia pomedžius, kurių šaknimis jos yra, tai visų dedamųjų suma lygi funkcijos reikšmėms.



7.13 pav. Funkcijos  $y(x) = 1 + 2 \sin(2\pi x)$ ,  $x \in [0;1]$  išskaidymas, taikant db2 bangelių paketus