Skaitinis apibrėžtinio integralo apskaičiavimas. Niutono ir Koteso formulės

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115/Skaitiniai inzinerijos metodai su MATLAB (KP RG RB)2009

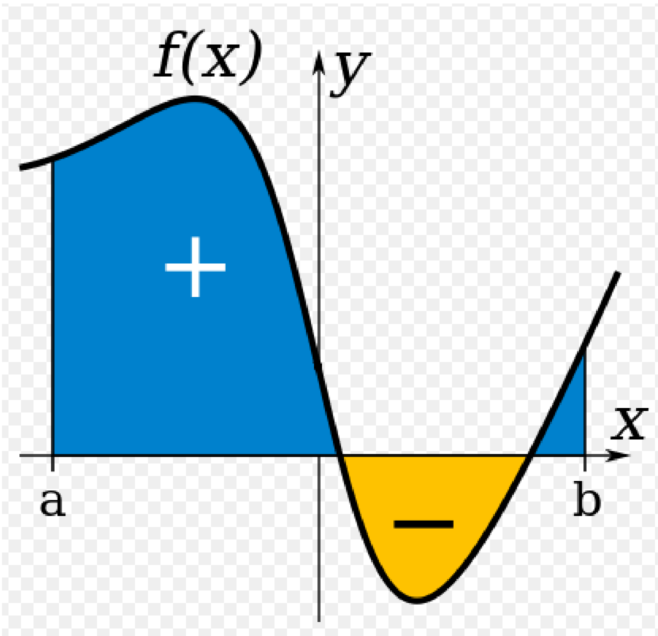
F11.pdf

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115 /Skaitiniai inzinerijos metodai(RB) 2006

I.3.pdf

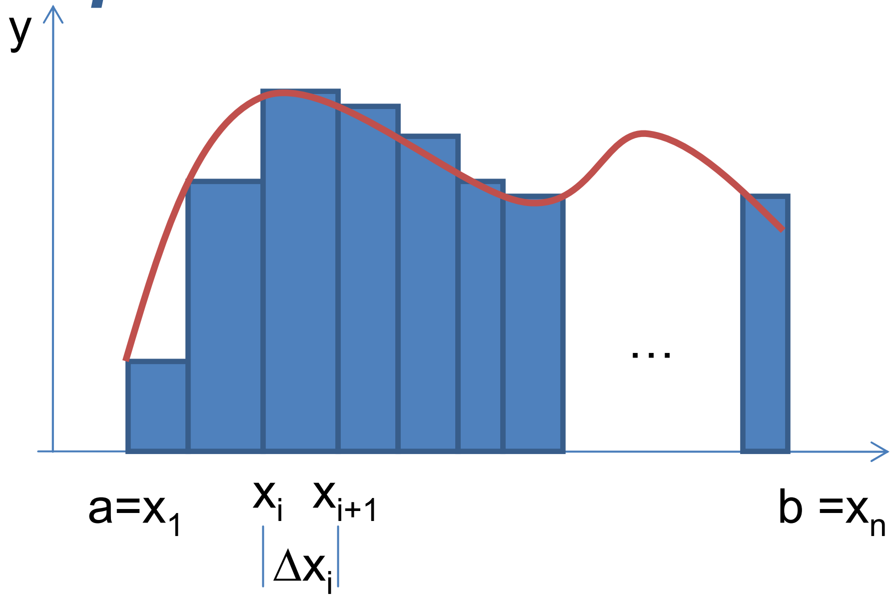
Apibrėžtinis integralas. *Apibrėžimas ir geometrinė prasmė*

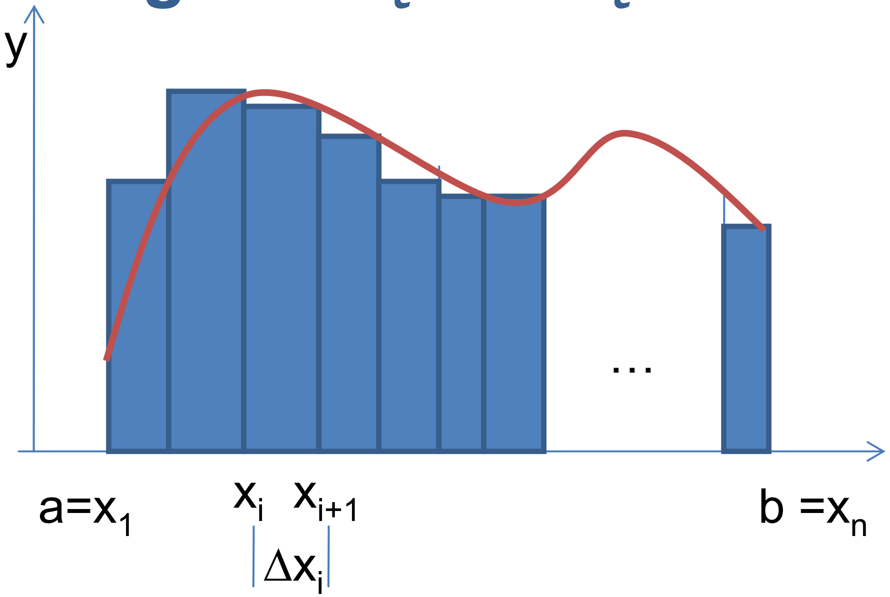
Duotos *funkcijos f(x) apibrėžtinis integralas intervale [a,b]* – tai suminė reikšmė su ženklu imamo ploto, kurį apriboja funkcijos kreivė, Ox ašis ir vertikalios atkarpos, išvestos taškuose x=a ir x=b nuo Ox ašies iki funkcijos kreivės



Tai *neformalus* apibrėžimas, paremtas *geometrine interpretacija*

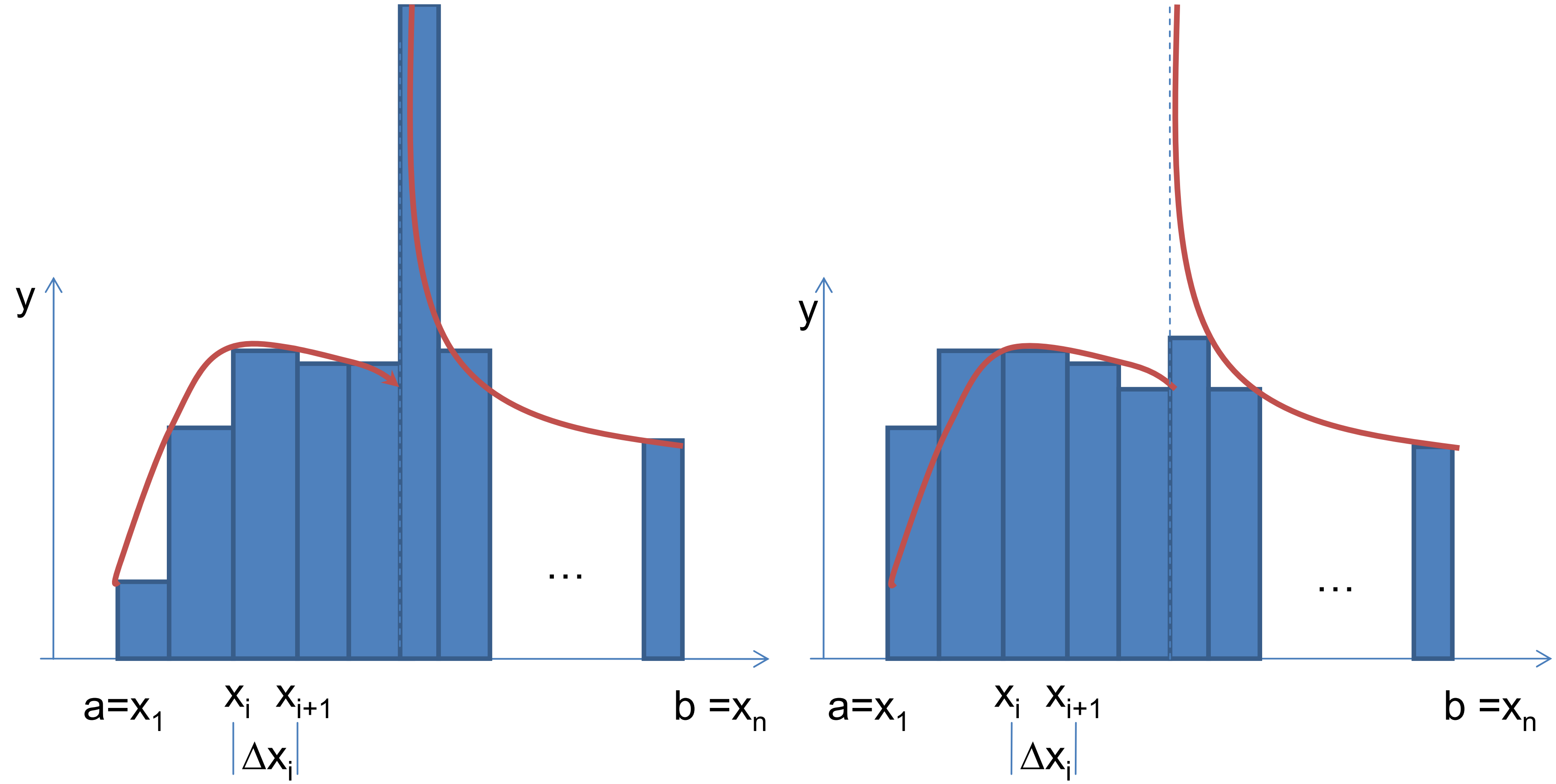
Apibrėžiant matematiškai, ***funkcijos f(x) apibrėžtinis integralas intervale [a,b] yra "apatinės" ir "viršutinės" integralinių sumų riba:***





$$I = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right) \Delta x_i = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{i+1}\right) \Delta x_i$$

Integralas apibrėžtas ***Rymano (Rieman) prasme,*** **kai abiejų sumų ribos sutampa**



???

$$I = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right)\Delta x_i = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{i+1}\right)\Delta x_i$$

- Nagrinėsime tik Rymano prasme apibrėžtus integralus;
- Apsiribosime situacijomis, kai funkcijos reikšmės yra *aprėžtos visame jos apibrėžimo intervale*, o integralo reikšmės kaip figūros ploto interpretacija yra akivaizdi ir vienareikšmė;
- Siekiama, kad *skaitiškai apskaičiuota integralo reikšmė* būtų kiek galima artimesnė *tiksliai jo reikšmei*;
- Realiuose uždaviniuose tikslios reikšmės apskaičiuoti dažniausiai negalime. Ar metodas pakankamai tikslus, nustatome:

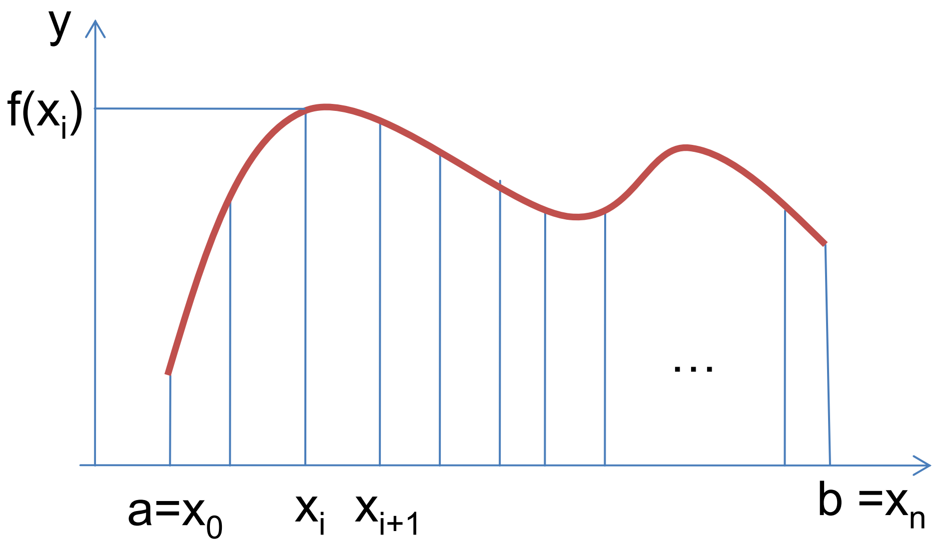
-teoriškai analizuodami jo savybes;

-spręsdami pavydžius, kurių tikslūs sprendiniai žinomi

Apibrėžtinio integralo *skaitinis apskaičiavimas*

•**Apibrėžtinis integralas skaitiškai apskaičiuojamas, pakeičiant jį baigtinio funkcijos reikšmių skaičiaus su svoriniais koeficientais suma:**

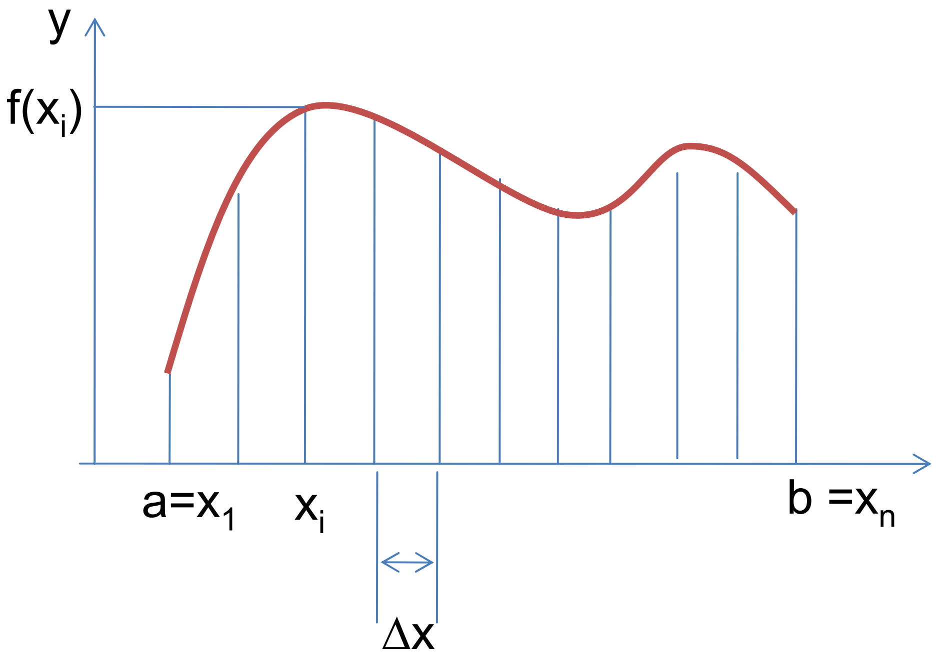
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i), \; a \le x_i \le b$$



Bendruoju atveju, taškai gali būti išdėstyti netolygiai

Niutono ir Koteso formulės. *Hemingo išvedimo būdas*

- Intervale taikomas interpoliavimas vienanariais, parinkus tolygiai išdėstytus interpoliavimo mazgus žingsniu **Δx=(b-a)/(n-1):**



$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}, \quad a \le x_i \le b$$

Reikia rasti formulės koeficientus

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),\ \ a \le x_i \le b$$

Pareikalaujame, kad formulė tiksliai integruotų daugianarius nuo 0 iki (n-1) eilės imtinai:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_a^b 1dx \\ \int_a^b xdx \\ \vdots \\ \int_a^b x^{n-1}dx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b-a \\ \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\left(b^n-a^n\right) \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[\mathbf{G}]\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{m}\}$$

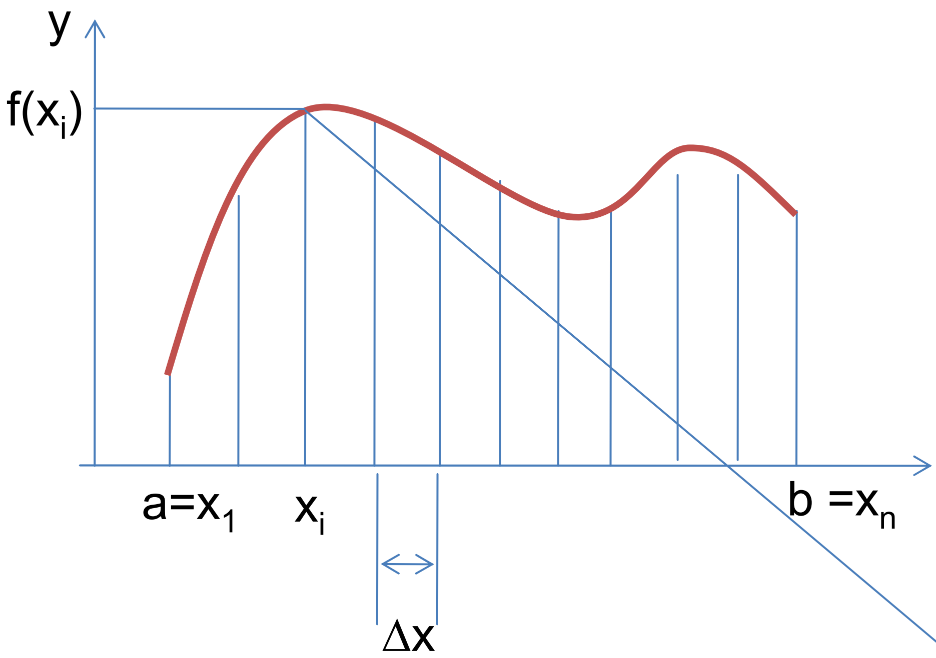
$$x_1 = a \quad x_2 = x_1 + \Delta x \quad \cdots \quad x_n = x_1 + (n-1)\Delta x = b$$

$$[\mathbf{G}]\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{m}\}$$

Koeficientų išraiškas apskaičiuojame iš lygčių sistemos. Tokiu būdu galime aprašyti bet kokios eilės skaitinio intergralo apskaičiavimo *formulę* (*schemą*)

Niutono ir Koteso formulės koeficientų apskaičiavimas *panaudojant Lagranžo daugianarius*

- Intervale taikomas interpoliavimas daugianariais (pvz. Lagranžo), parinkus tolygiai išdėstytus interpoliavimo mazgus žingsniu **Δx=(b-a)/(n-1):**



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b L_i(x)dx \right) f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),\ \ a \le x_i \le b \quad .$$

Niutono-Koteso formulės koeficientai

$$\int_a^{a+(n-1)\Delta x} f(x)dx = \int_a^{a+(n-1)\Delta x}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)\right)dx = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^{a+(n-1)\Delta x} L_i(x)dx\right) f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

$$a \le x_i \le a+(n-1)\Delta x$$

•Skaitinio integravimo formulės koeficientai gali būti apskaičiuoti, taikant simbolinio integravimo veiksmus :

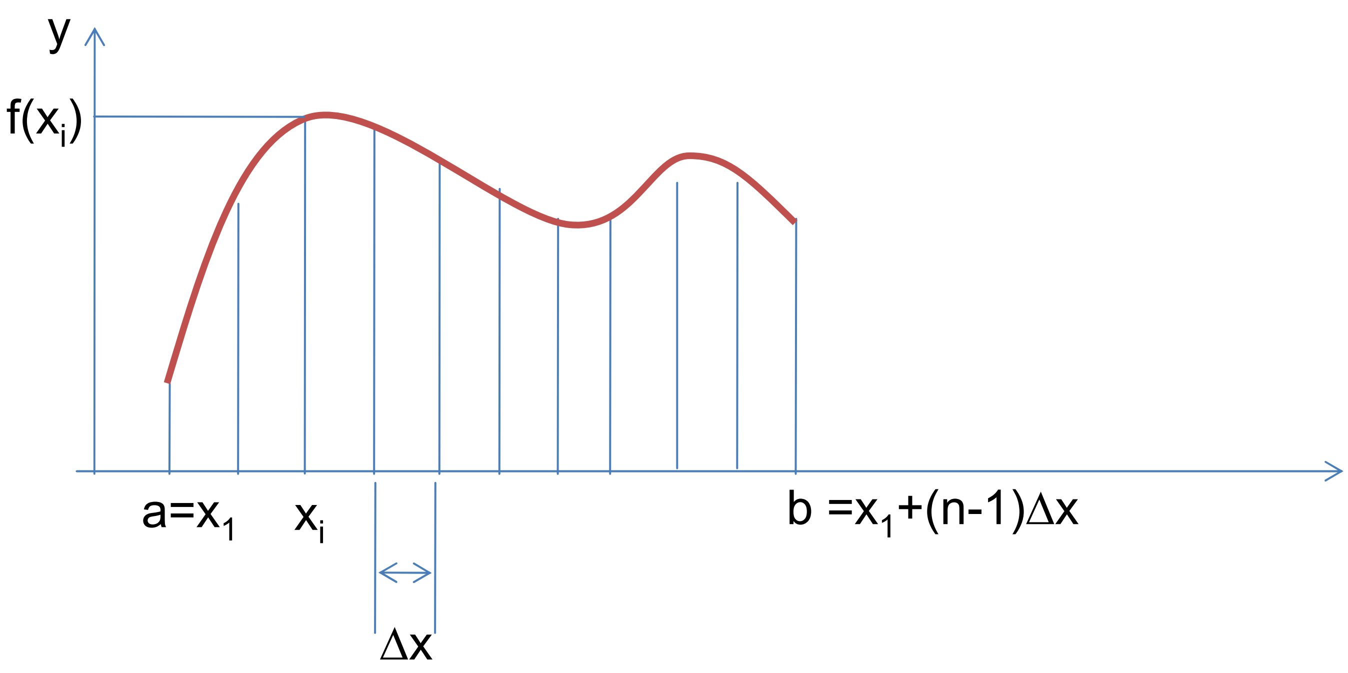
$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

x_k

x_j

```
syms dx x L

for j=1:n       % n – mazgu skaicius
        % Lagranzo daugianaris:
        L=1;
        for k=1:n,
              if k ~= j, L=L*(x- (k-1)*dx) /( (j-1)*dx - (k-1)*dx ); end
        end
        coef(j)=int(L,sym(0),sym((N-1)*dx)); % Lagranzo daugianario integralas
end
    coef
```



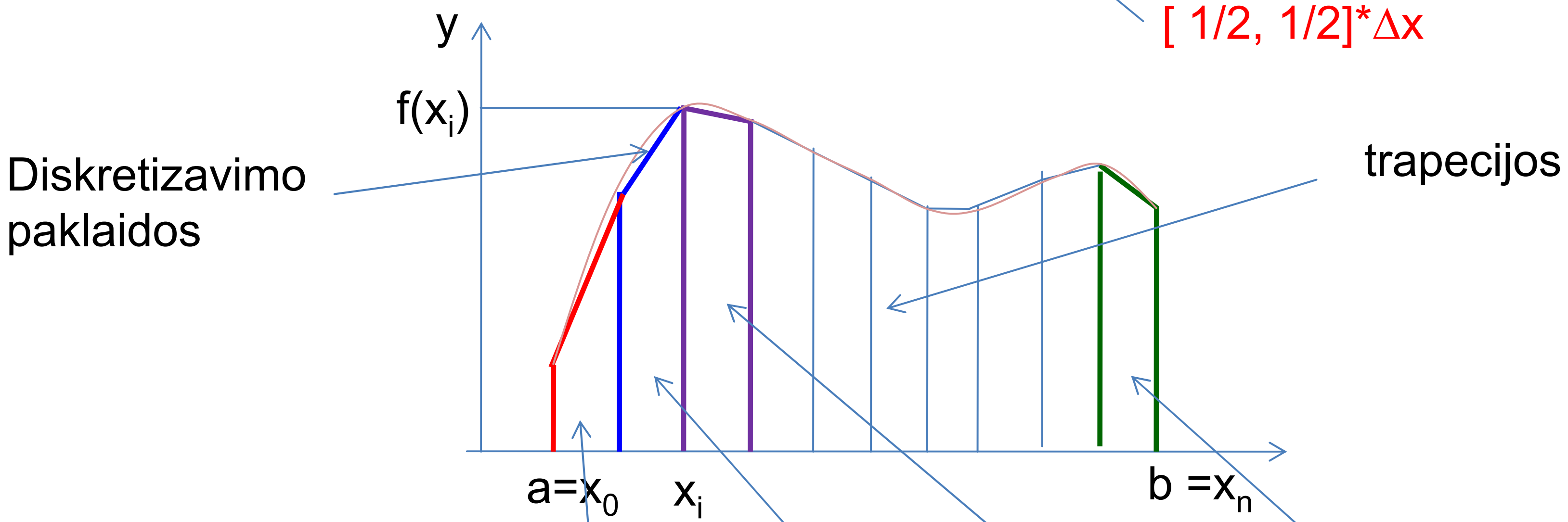
•Didinant interpoliavimo mazgų skaičių, gaunami aukštos eilės Lagranžo daugianariai. Jie labai banguoti, todėl ***didinant taškų skaičių integravimo tikslumas nedidėja;***

•Patogiau ***skaidyti intervalą [a,b] dalimis*** ir taikyti interpoliavimą daugianariu kiekvienoje dalyje, esant nedideliam mazgų skaičiui

Niutono ir Koteso formulės. *Tiesinis interpoliavimas Lagranžo daugianariais kiekviename intervale*

$$\int_a^{a+\Delta x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{2}\left(\int_a^{a+\Delta x} L_i(x)dx\right) f(x_i) = \sum_{i=1}^{2} w_i f(x_i),\ a \le x_i \le a+\Delta x \quad .$$

[1/2, 1/2]*Δx



$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\big),$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \ \ , \ i = \overline{1,\ n}$$

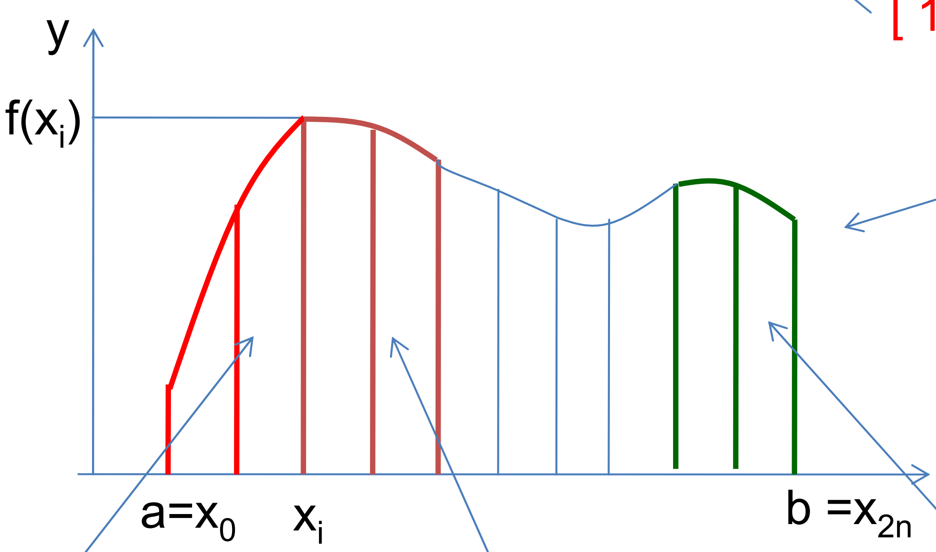
Trapecijų formulė:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\big(f(x_0) + \mathbf{2} f(x_1) + \mathbf{2} f(x_2) \cdots + \mathbf{2} f(x_{n-1}) + f(x_n)\big),$$

Niutono ir Koteso formulės. *Interpoliavimas antrosios eilės Lagranžo daugianariais intervalų porose*

$$\int_{a}^{a+2\Delta x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{a}^{a+2\Delta x} L_i(x)dx\right) f(x_i) = \sum_{i=1}^{3} w_i f(x_i), \;\; a \le x_i \le a+2\Delta x \;\; .$$

[1/3, 4/3, 1/3]*Δx



Intervalų poros, kuriose funkcija interpoliuojama 2-os eilės daugianariu (parabole)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right),$$

$$\Delta x = x_{i+1}-x_i \;\; , \; i=\overline{1,\;n}$$

Simpsono formulė:

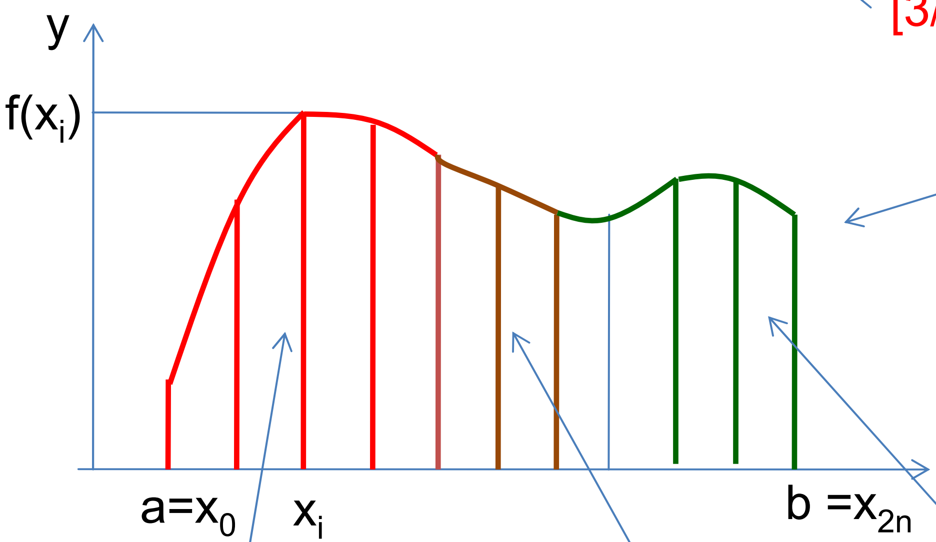
Intervalų skaičius n-1 turi būti **lyginis**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+\mathbf{2}f(x_2)+4f(x_3)+\mathbf{2}f(x_4)+\cdots+\mathbf{2}f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right),$$

Niutono ir Koteso formulės. *Interpoliavimas trečios eilės Lagranžo daugianariais intervalų triadose:*

$$\int_a^{a+3\Delta x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{4} \left(\int_a^{a+3\Delta x} L_i(x)dx \right) f(x_i) = \sum_{i=1}^{4} w_i f(x_i), \;\; a \le x_i \le a+3\Delta x \quad .$$

[3/8, 9/8, 9/8, 3/8]*Δx



Intervalų triados, kuriose funkcija interpoliuojama 3-ios eilės daugianariu

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{8}\left(3f(x_0)+9f(x_1)+9f(x_2)+3f(x_3)+3f(x_3)+9f(x_4)+\cdots+3f(x_{n-3})+9f(x_{n-2})+9f(x_{n-1})+3f(x_n)\right),$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \quad , \; i = \overline{1, \;\; n}$$

Intervalų skaičius n-1 turi būti **dalus iš 3**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{8}\left(3f(x_0)+9f(x_1)+9f(x_2)+\mathbf{6}f(x_3)+9f(x_4)+\cdots+\mathbf{6}f(x_{n-3})+9f(x_{n-2})+9f(x_{n-1})+3f(x_n)\right),$$

Niutono ir Koteso formulės. *Aukštesnių eilių interpoliavimas Lagranžo daugianariais:*

N=2:
[1/2, 1/2]*Δx

N=3:
[1/3, 4/3, 1/3] *Δx

N=4:
[3/8, 9/8, 9/8, 3/8] *Δx

N=5:
[14/45, 64/45, 8/15, 64/45, 14/45] *Δx

N=6:
[95/288, 125/96, 125/144, 125/144, 125/96, 95/288] *Δx

N=7:
[41/140, 54/35, 27/140, 68/35, 27/140, 54/35, 41/140] *Δx

N=8:
[5257/17280, 25039/17280, 343/640, 20923/17280, 20923/17280, 343/640, 25039/17280, 5257/17280] *Δx

N=9:
[3956/14175, 23552/14175, -3712/14175, 41984/14175, -3632/2835, 41984/14175, -3712/14175, 23552/14175, 3956/14175] *Δx

```
syms dx x L

for j=1:N      % N – mazgu skaicius
       % Lagranzo daugianaris:
       xx=[a:dx:a+(i-1)*dx];  % taskai kas dx
       L=1;
       for k=1:N,
                if k ~= j, L=L*(x- xx(k)) /(xx(j) -xx(k)); end
       end
       coef(j)=int(L,sym(xx(1)),sym(xx(N))); % Lagranzo daugianario integralas
end
```

Niutono ir Koteso formulių *tikslumo eilė*

- **Formulės, kuri tiksliai apskaičiuoja k laipsnio daugianario integralą, tikslumo eilė yra k;**
- **Formulės sudarytos taip, kad n taškų panaudojanti formulės tikslumo eilė yra bent jau n-1 ;**
- **Iš principo, kai kurių formulių tikslumo eilė gali būti ir aukštesnė. Patikrinkime.**

Ši sistemos dalis tikrai tenkinama

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\
x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} \\
x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \cdots & x_n^{n+1} \\
x_1^{n+2} & x_1^{n+2} & \cdots & x_1^{n+2} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
b-a \\
\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) \\
\vdots \\
\frac{1}{n}\left(b^n-a^n\right) \\
\frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right) \\
\frac{1}{n+2}\left(b^{n+2}-a^{n+2}\right) \\
\frac{1}{n+2}\left(b^{n+2}-a^{n+2}\right) \\
\vdots
\end{Bmatrix}
$$

•Kiek papildomų lygčių tenkinama, galime patikrinti kiekvienos konkrečios formulės atveju;

•Jeigu tenkinama kuri nors iš šių lygčių, tai reiškia, kad formulė tiksliai integruoja tokį kintamojo laipsnį

Trapecijų formulės tikslumo eilės patikrinimas

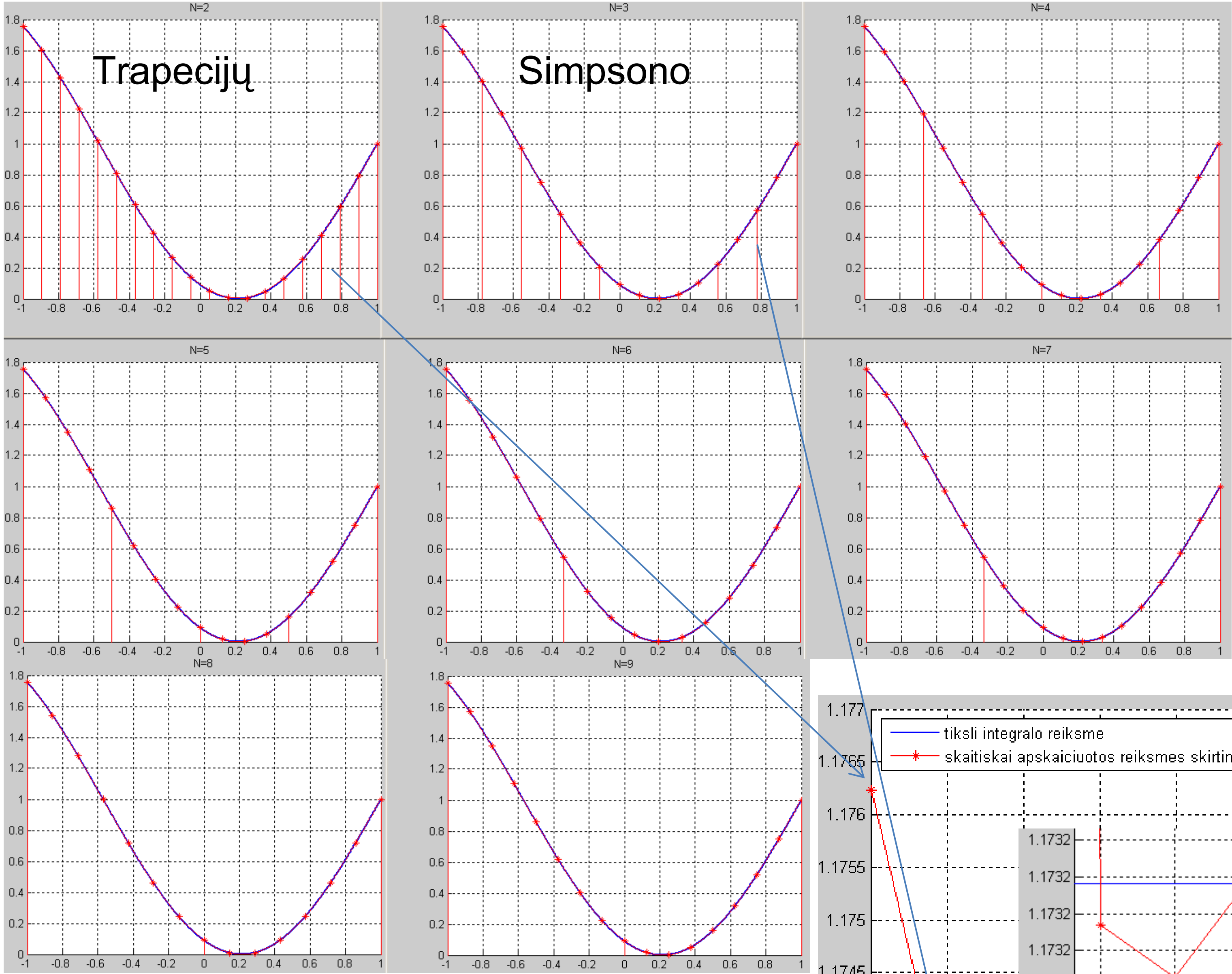
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \Delta x \\ 0 & \Delta x^2 \\ 0 & \Delta x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x/2 \\ \Delta x/2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta x^2/2 \\ \Delta x^3/3 \\ \Delta x^4/4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{\Delta x^3/6} \\ \mathbf{\Delta x^4/4} \end{Bmatrix}$$

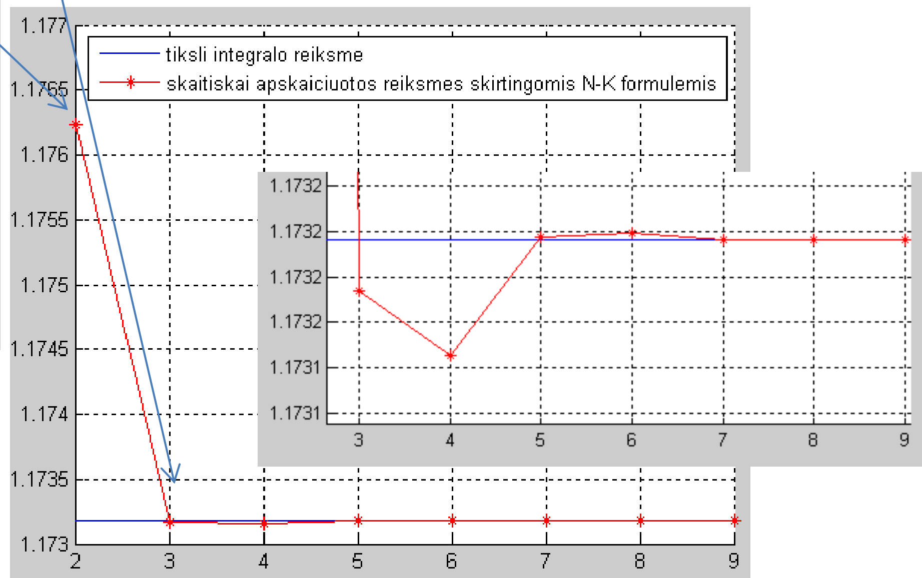
- Tenkinamos 2 lygtys (t.y. kiek buvo numatyta apskaičiuojant koeficientus)
- Trapecijų formulės tikslumo eilė yra 1

Simpsono formulės tikslumo eilės patikrinimas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \Delta x & 2\Delta x \\ 0 & \Delta x^2 & 4\Delta x^2 \\ 0 & \Delta x^3 & 8\Delta x^3 \\ 0 & \Delta x^4 & 16\Delta x^4 \\ 0 & \Delta x^5 & 32\Delta x^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x/3 \\ 4\Delta x/3 \\ \Delta x/3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2\Delta x \\ 2\Delta x^2 \\ 8\Delta x^3/3 \\ 4\Delta x^4 \\ 32\Delta x^5/5 \\ 4\Delta x^6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{4\Delta x^5/15} \\ \mathbf{4\Delta x^6/3} \end{Bmatrix}$$

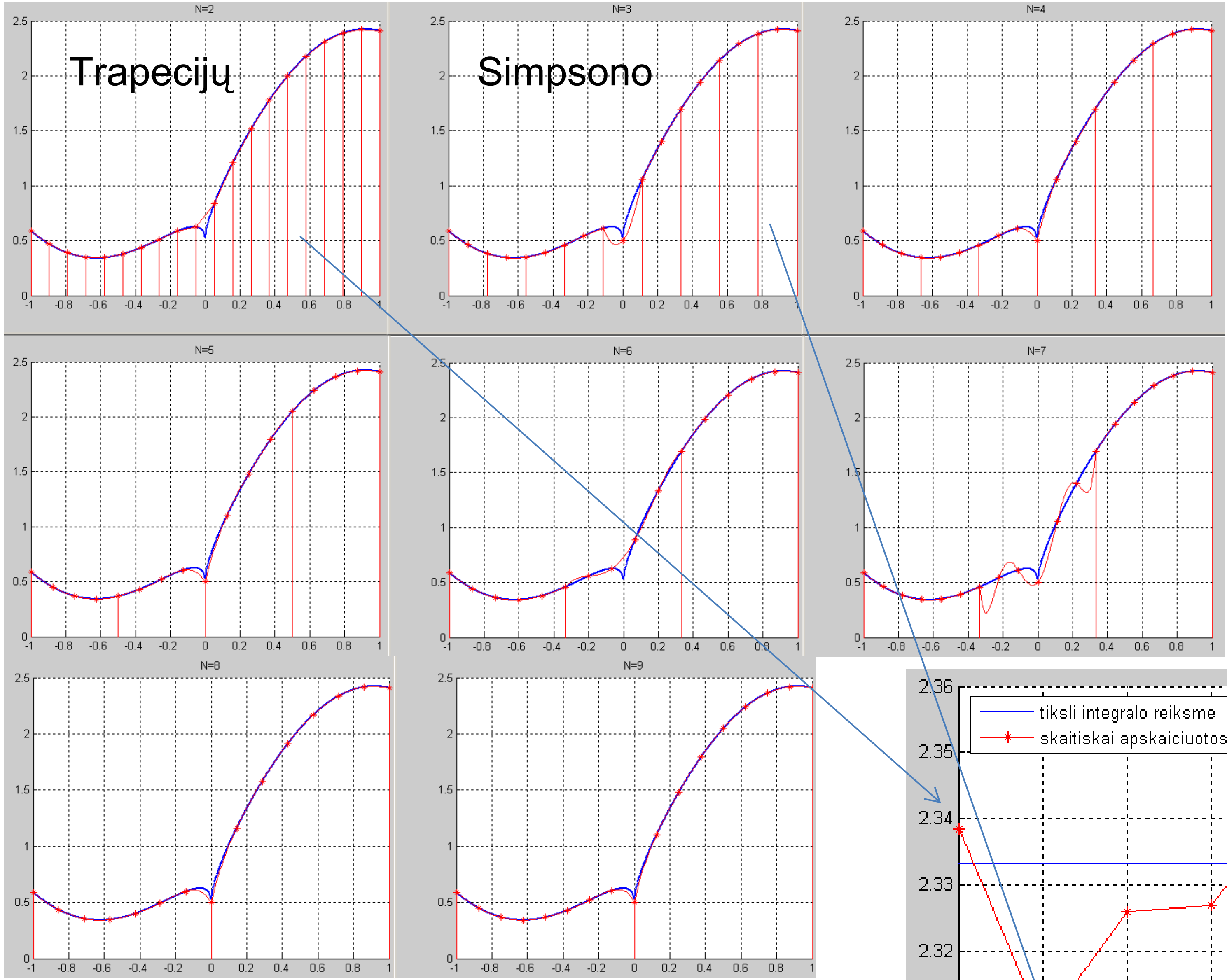
- **Tenkinamos 4 lygtys (t.y. viena daugiau, nei buvo numatyta apskaičiuojant koeficientus)**
- **Simpsono formulės tikslumo eilė yra 3**
- **Būtų galima pademonstruoti, kad visų Niutono ir Koteso formulių, panaudojančių *nelyginį taškų skaičių*, tikslumo eilė yra *lygi taškų skaičiui*;**
- **visų Niutono ir Koteso formulių, panaudojančių *lyginį taškų skaičių*, tikslumo eilė yra *vienetu mažesnė už taškų skaičių*;**

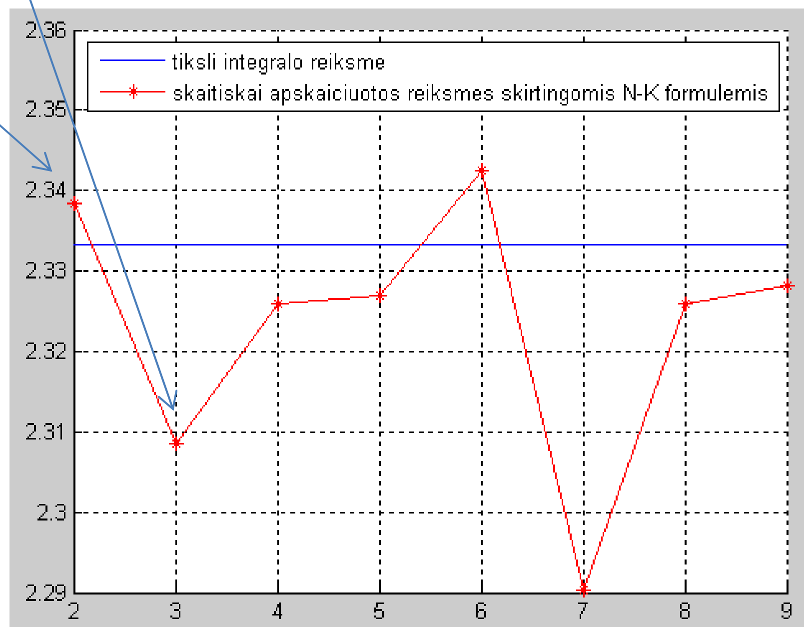




f=sin(2*x-2)+1

$$f(x) = \sin(2x-2)+1$$





f=sin(2*x)+sqrt(abs(x))+0.5;

$$f(x) = \sin(2x) + \sqrt{|x|} + 0.5$$

- **Dažniausiai naudojama tiesinė arba antros eilės Lagranžo interpoliacija (t.y. trapecijų ir Simpsono formulės) dėl dviejų priežasčių:**

-tokios formulės paprastesnės;

-aukštesnės eilės formulės įgalina padidinti tikslumą tik nežymiai, be to, ne visuomet;

-kai intervalai tarp interpoliavimo mazgų vienodi, tikslumą galima pagerinti, panaudojant *Ričardsono ekstrapoliacijos formulę ir Rombergo metodą*

Niutono ir Koteso metodu apskaičiuotų integralo reikšmių tikslumo pagerinimas, panaudojant *Ričardsono ekstrapoliacijos forumulę*

Tarkime, kad tam tikru metodu galime apskaičiuoti integralo reikšmę su paklaida, proporcinga dizkretizavimo žingsnio ilgiui (t.y. formulė yra nulinės tikslumo eilės):

$$I_0(h) = I + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots,$$

$$I_0(h/2) = I + c_1 h/2 + c_2 h^2/4 + \cdots,$$

$$\Downarrow$$

$$I_1 = 2I_0(h/2) - I_0(h) = I - \frac{c_2}{2}h^2 + \cdots,$$

Taip apskaičiuotos reikšmės paklaida yra proporcinga *diskretizavimo žingsnio ilgio kvadratui*. Tai reiškia, *gavome aukštesnės tikslumo eilės reikšmę, panaudodami dvi reikšmes, apskaičiuotas pagal žemesnės tikslumo eilės formulę.*

Jeigu reikšmę galime apskaičiuoti pagal pirmos tikslumo eilės formulę:

$$I_1(h) = I + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \cdots,$$

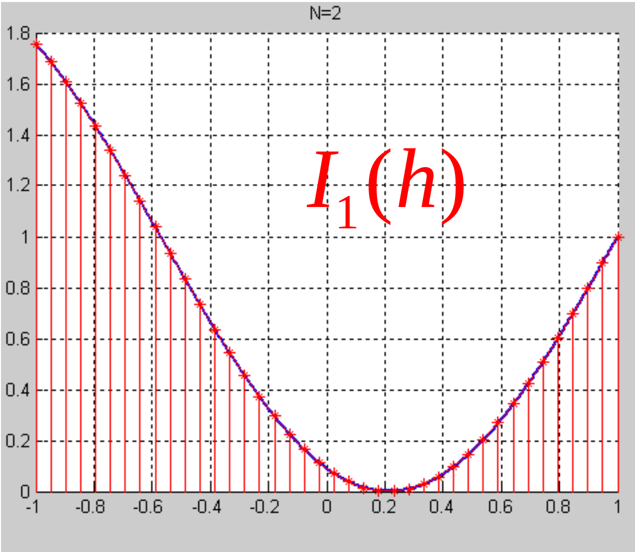
$$I_1(h/2) = I + c_2 h^2/4 + c_3 h^3/8 + \cdots,$$

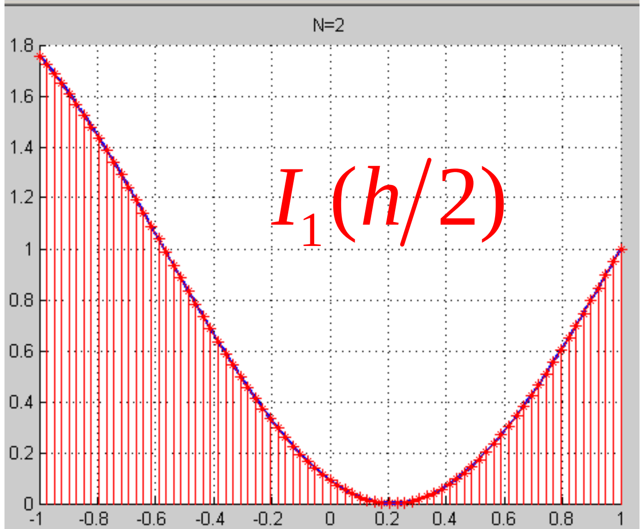
$$I_2 = \left(4I_1(h/2) - I_1(h)\right)/3 = I - \frac{c_3}{6} h^3 + \cdots,$$

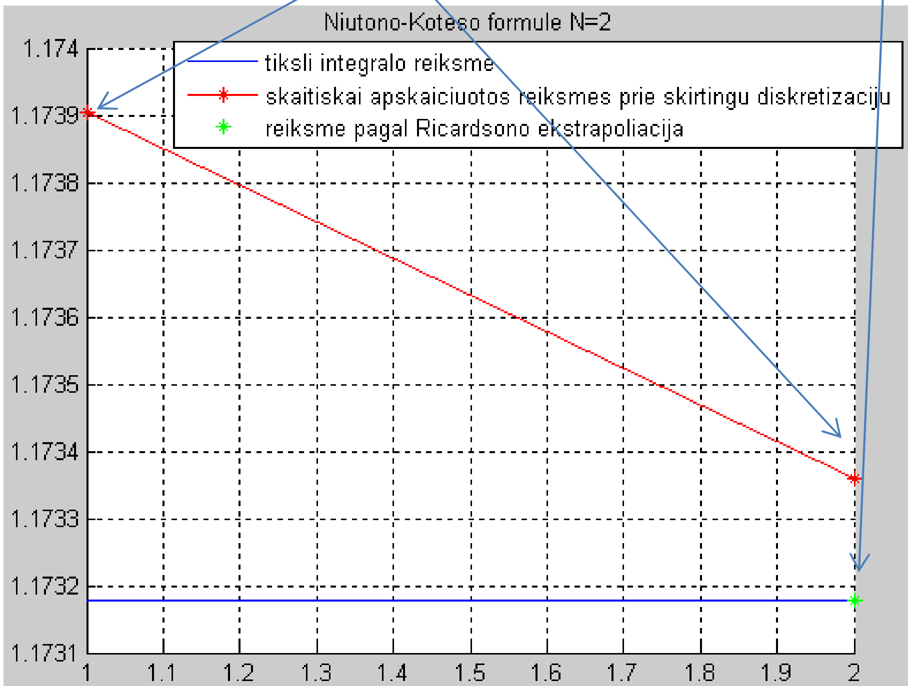
Taip apskaičiuotos reikšmės paklaida yra proporcinga *diskretizavimo žingsnio ilgio kubui*. Tai reiškia, *gavome aukštesnės tikslumo eilės reikšmę, panaudodami dvi reikšmes, apskaičiuotas pagal žemesnės tikslumo eilės formulę.*

Pavyzdys. Trapecijų metodas yra *1 tikslumo eilės* (t.y. jo paklaida proporcinga žingsnio kvadratui);
Apskaičiavę trapecijų metodu integralo reikšmes, esant tam tikram ir du kartus mažesniam žingsniui, pagal Ričardsono formulę gausime aukštesnės tikslumo eilės reikšmę

$$\left(4I_1(h/2)-I_1(h)\right)/3=I_2$$

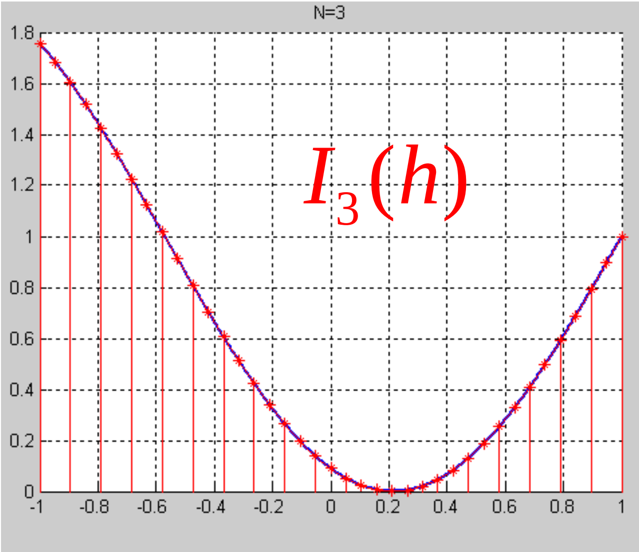


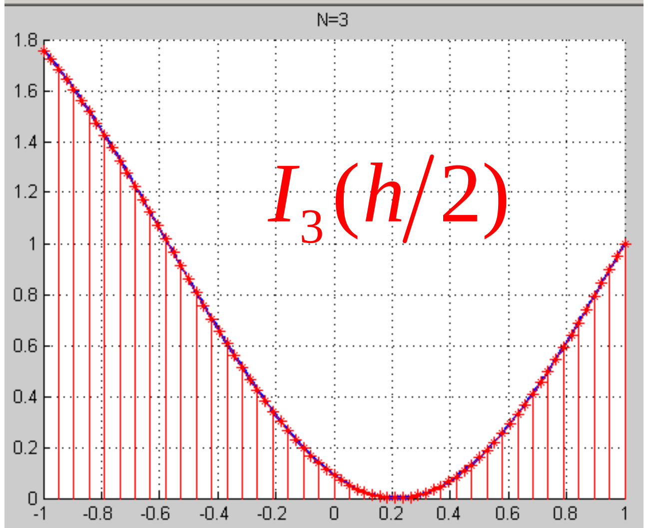


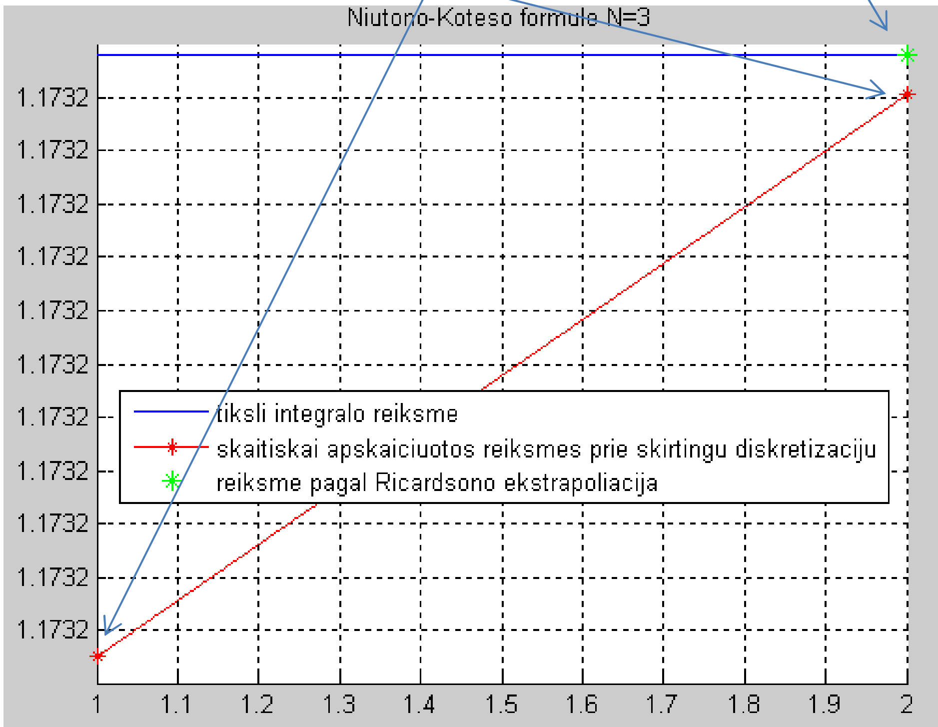


Pavyzdys. Simpsono metodas yra *3 tikslumo eilės* (t.y. jo paklaida proporcinga žingsnio ketvirtajam laipsniui);
Apskaičiavę Simpsono metodu integralo reikšmes, esant tam tikram ir du kartus mažesniam žingsniui, pagal Ričardsono formulę gausime aukštesnės tikslumo eilės reikšmę:

$$\left(16 I_2(h/2) - I_2(h)\right)/15 = I_4$$

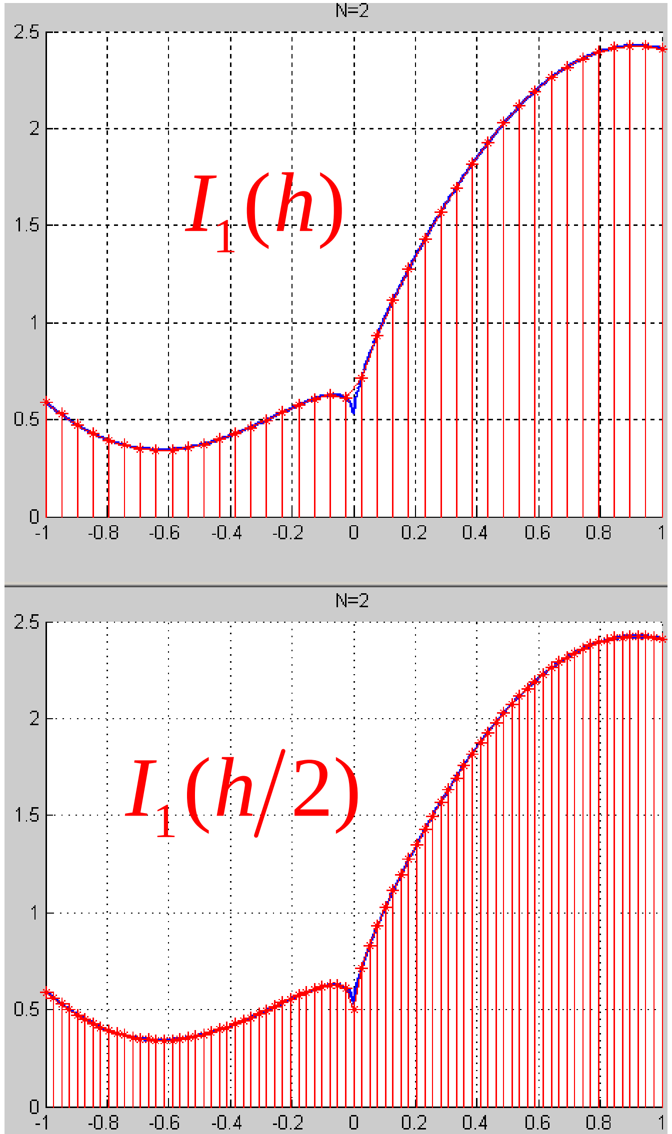


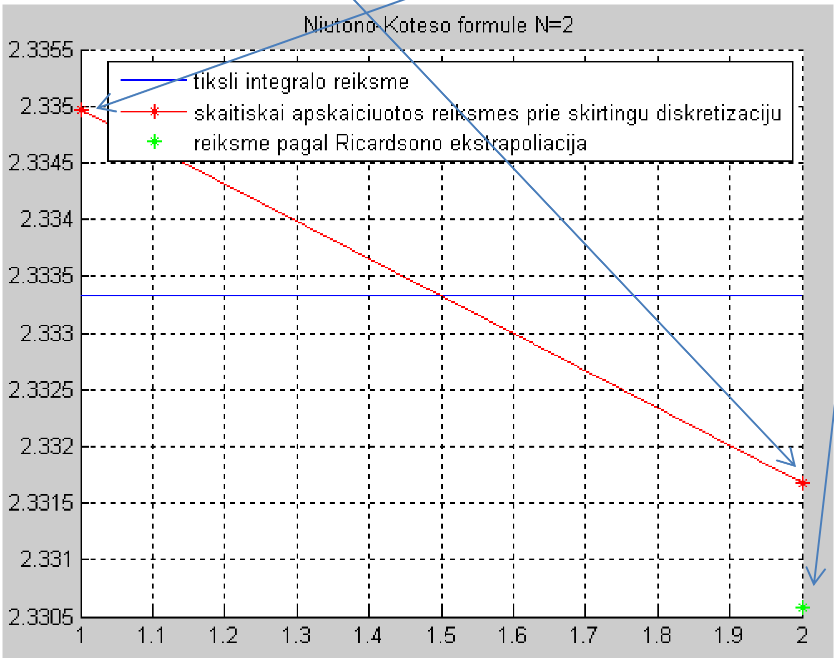




Pavyzdys. Trapecijų metodas yra *1 tikslumo eilės* (t.y. jo paklaida proporcinga žingsnio kvadratui);
Apskaičiavę trapecijų metodu integralo reikšmes, esant tam tikram ir du kartus mažesniam žingsniui, pagal Ričardsono formulę gausime aukštesnės tikslumo eilės reikšmę

$$\left(4I_1(h/2) - I_1(h)\right)/3 = I_2$$

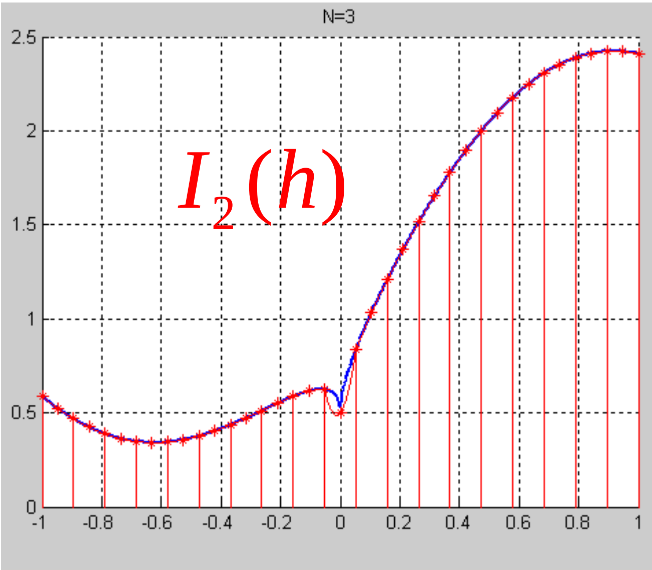


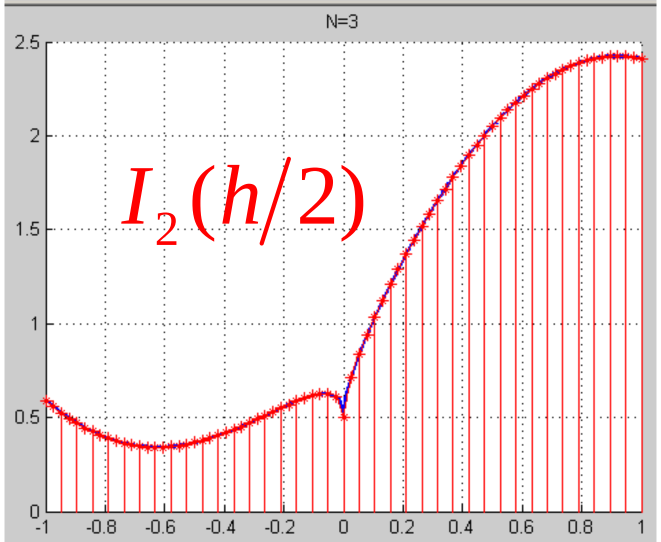


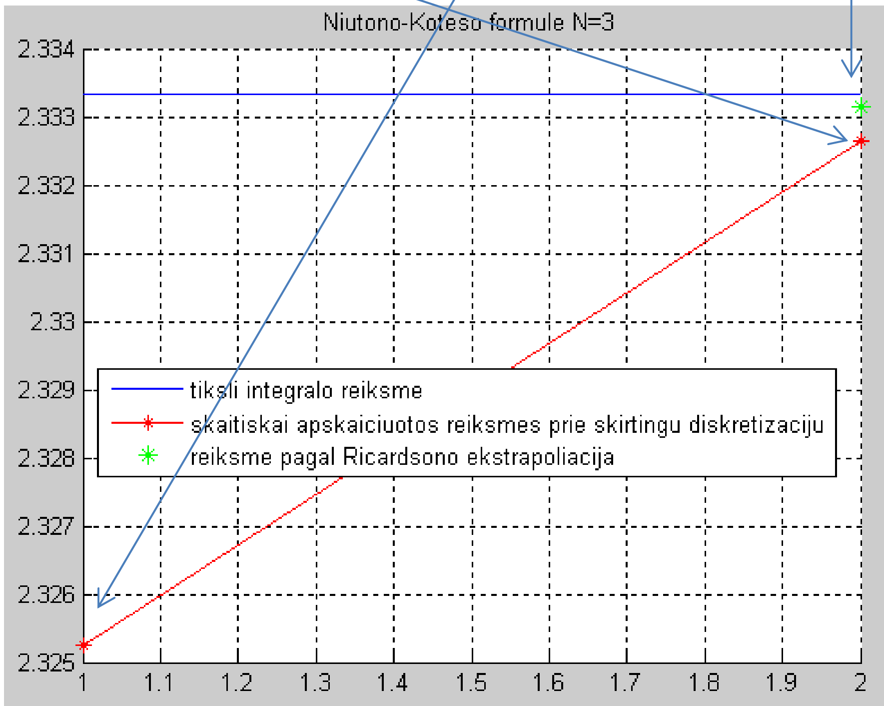
Ekstrapoliuota reikšmė tikslumo nepagerino. Priežastis – šios konkrečios funkcijos atveju apskaičiuota reikšmė labai “jautri” integravimo žingsnio dydžiui.

Pavyzdys. Simpsono metodas yra *3 tikslumo eilės* (t.y. jo paklaida proporcinga žingsnio ketvirtajam laipsniui);
Apskaičiavę Simpsono metodu integralo reikšmes, esant tam tikram ir du kartus mažesniam žingsniui, pagal Ričardsono formulę gausime aukštesnės tikslumo eilės reikšmę:

$$\left(16 I_3(h/2) - I_3(h)\right)/15 = I_4$$



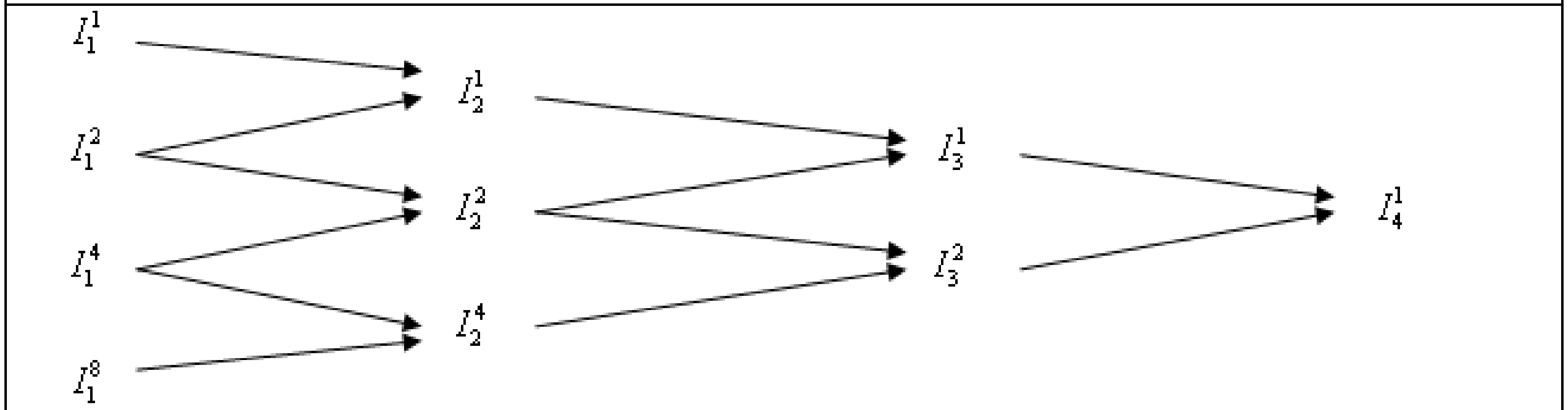




Ekstrapoliuotos reikšmės tikslumas pagerėjo.

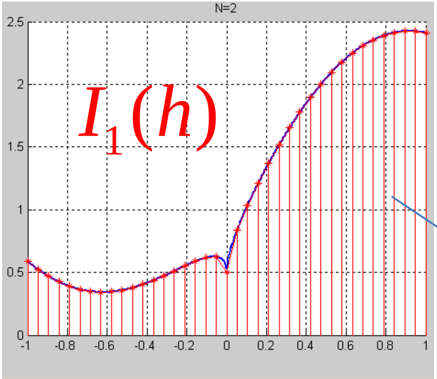
Niutono ir Koteso metodu apskaičiuotų integralo reikšmių tikslumo pagerinimas, panaudojant *Rombergo metodą*

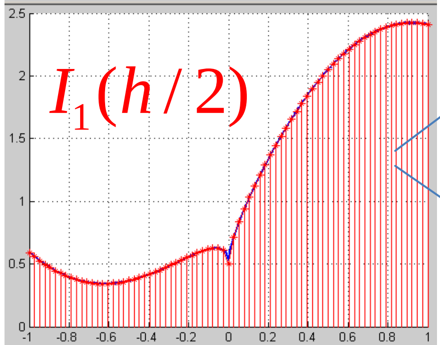
$$I_2^{2^{k-1}} = \frac{4I_1^{2^k} - I_1^{2^{k-1}}}{3} \quad I_3^{2^{k-1}} = \frac{8I_2^{2^k} - I_2^{2^{k-1}}}{7} \quad I_4^{2^{k-1}} = \frac{16I_2^{2^k} - I_2^{2^{k-1}}}{15}$$

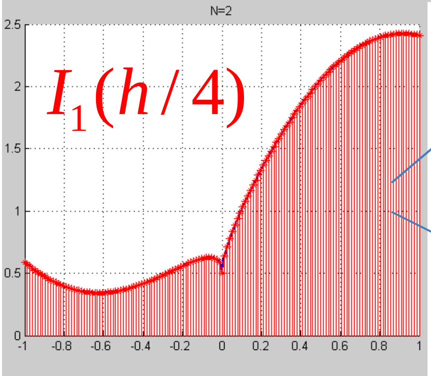


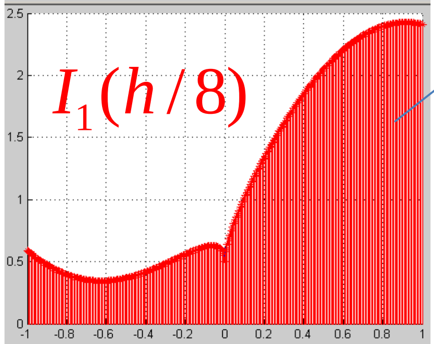
$I+\mathcal{O}(h^2)$	$I+\mathcal{O}(h^3)$	$I+\mathcal{O}(h^4)$	$I+\mathcal{O}(h^5)$

Trapecijų metodas + Rombergo metodas:









$$\frac{\left(4I_1(h/2)-I_1(h)\right)}{3}$$

$$I_2(h)$$

$$\frac{\left(8I_2(h/2)-I_2(h)\right)}{7}$$

$$I_2(h/2)$$

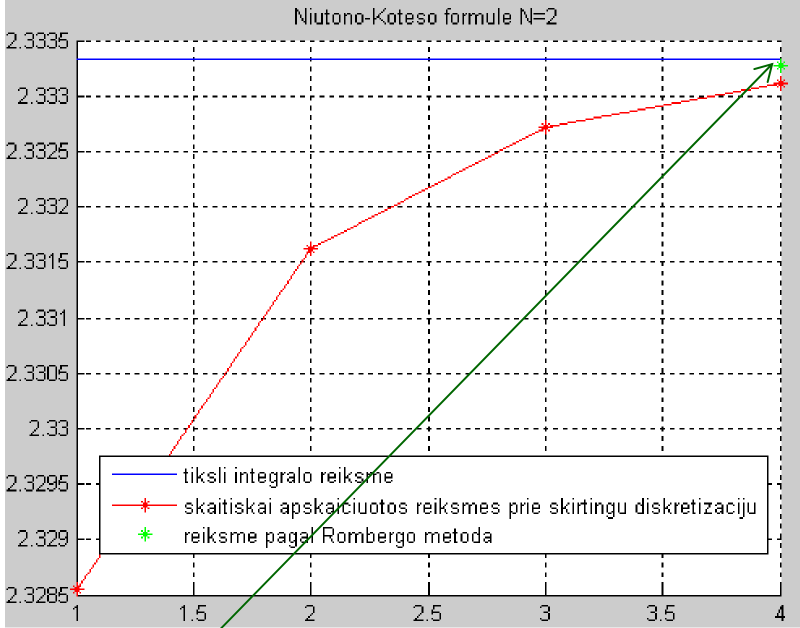
$$I_2(h/4)$$

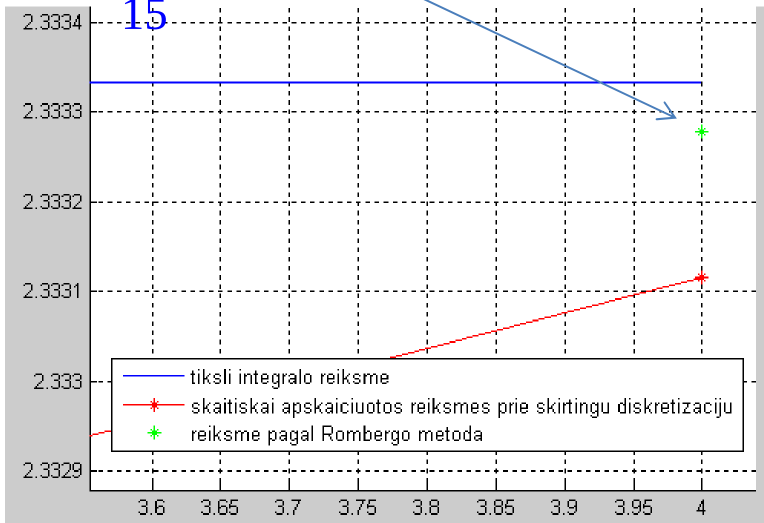
$$I_3(h)$$

$$I_3(h/2)$$

$$I_4(h)$$

$$\frac{\left(16I_2(h/2)-I_2(h)\right)}{15}$$

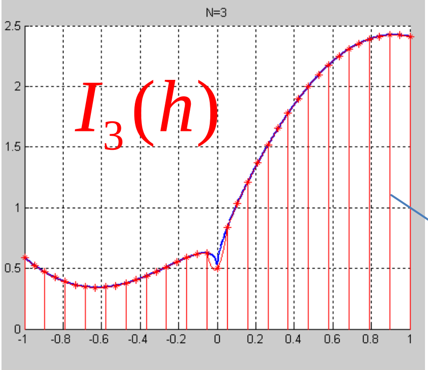


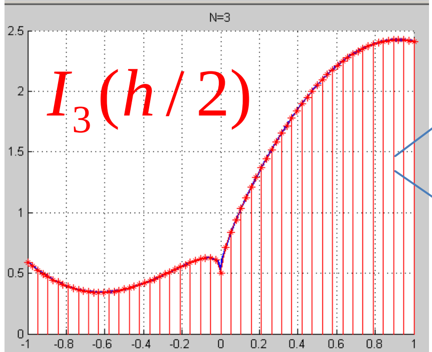


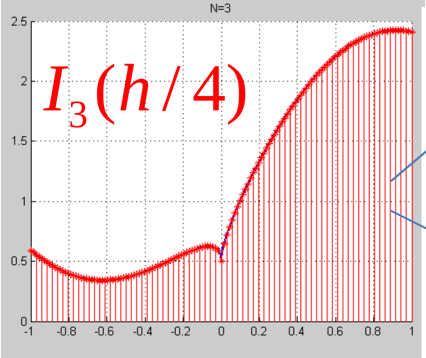
f=sin(2*x)+sqrt(abs(x))+0.5;

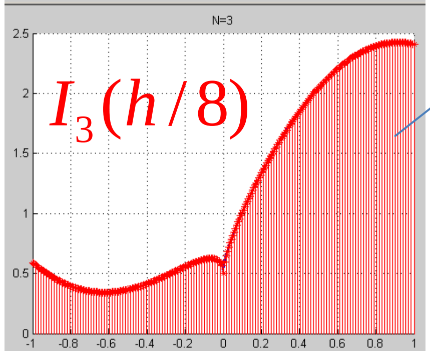
$$f(x)=\sin(2x)+\sqrt{|x|}+0.5$$

Simpsono metodas + Rombergo metodas:









$$\frac{\left(16I_2(h/2)-I_2(h)\right)}{15}$$

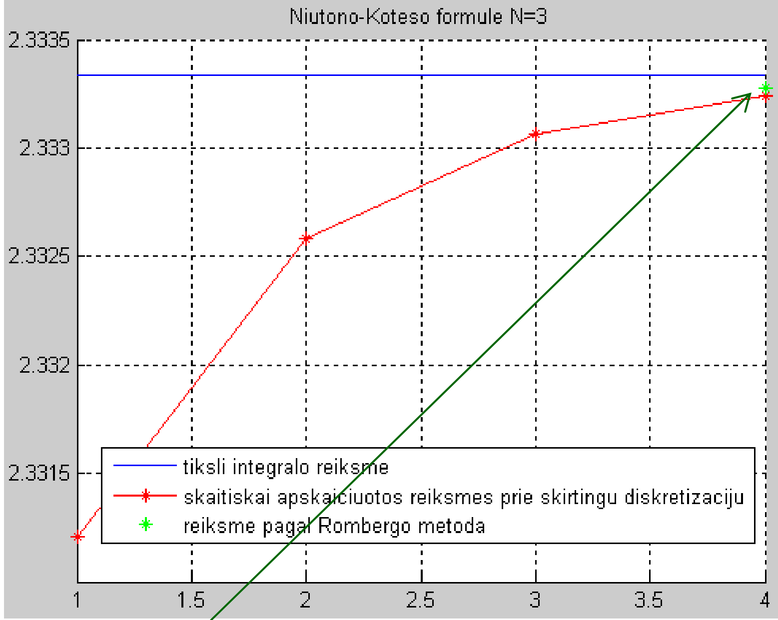
$$I_3(h) \qquad I_3(h/2) \qquad I_3(h/4)$$

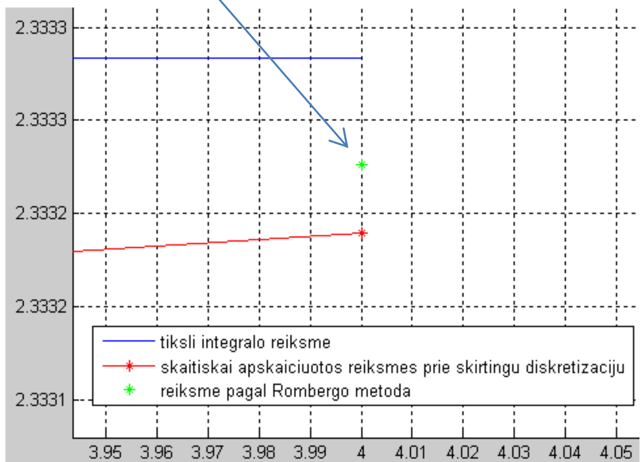
$$\frac{\left(32I_2(h/2)-I_2(h)\right)}{31}$$

$$I_4(h) \qquad I_4(h/2)$$

$$\frac{\left(64I_2(h/2)-I_2(h)\right)}{63}$$

$$I_5(h)$$





f=sin(2*x)+sqrt(abs(x))+0.5;

$$f(x)=\sin(2x)+\sqrt{|x|}+0.5$$