4.6. Matricos tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių apskaičiavimo metodai

Sprendžiant fizikos, technikos ir matematikos uždavinius, dažnai tenka ieškoti sistemos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ (arba $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$,- tai apibendrintas uždavinys) nenulinių sprendinių; čia A,B — n-tosios eilės kvadratinės matricos, $\boldsymbol{x}$ — n-matis vektorius, λ — skaliaras.

Tos parametro λ reikšmės, su kuriomis sistema turi nenulinį sprendinį, vadinamos matricos A ***tikrinėmis reikšmėmis***, o jas atitinkantys sprendiniai — ***tikriniais vektoriais***.

Matricos tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių apskaičiavimo uždavinių pasitaiko įvairiose fizikos ir technikos srityse. Pavyzdžiui, atliekant mechaninių sistemų dinaminę analizę, pagal matricos tikrines reikšmes sprendžiama apie tų sistemų svyravimo dažnį, o pagal tikrinius vektorius — apie to svyravimo pobūdį. Apskaičiuojant konstrukcijas, tikrinės reikšmės leidžia nustatyti kritines apkrovas, kurias viršijus sistema tampa nestabili.

n-tosios eilės kvadratinė matrica A yra operatorius, transformuojantis erdvę R^n pačią į save. Vadinasi, matricos A tikriniai vektoriai nusako kryptį, kuria vektoriai transformuojami į lygiagrečius su jais vektorius, o tikrinės reikšmės parodo šių vektorių išsitempimą arba susitraukimą.

Matricos tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių apskaičiavimo uždavinius galima suskirstyti į dvi grupes:

— uždavinius, kuriuos sprendžiant reikia rasti visas tikrines matricos reikšmes ir visus tikrinius vektorius;

— uždavinius, reikalaujančius rasti keletą tikrinių matricos reikšmių (pavyzdžiui, didžiausiąją ir mažiausiąją) ir jas atitinkančius tikrinius vektorius.

Yra daug metodų, skirtų šiems uždaviniams spręsti. Jų pasirinkimas priklauso nuo įvairių faktorių: uždavinio apimties, ar matricos yra simetrinės, realiosios ar kompleksinės, ar sprendžiame pirmos ar antros grupės uždavinius ir kitų.

Toliau detaliai aptarsime Jakobio metodą, o taip pat apžvelgsime Givenso, Hauseholderio ir QR metodus .

4.6.1. Tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių teorijos pagrindai

Gerai žinoma, kad sistema $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos determinantas lygus nuliui:

$$\det\left(A - \lambda E\right) = 0\,. \tag{4.8}$$

(4.8) lygtis vadinama sistemos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ***charakteristine lygtimi***. Jos šaknys ir yra matricos A tikrinės reikšmės. Vadinasi, matricos A tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius galima rasti taip:

— apskaičiuoti charakteristinės lygties, kuri yra n-tojo laipsnio polinomas, koeficientus,

— apskaičiuoti to polinomo šaknis,

— rasti sistemos $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ sprendinį, kai žinoma λ reikšmė.

Tačiau šis būdas yra neracionalus, mat, apskaičiuojant tikrines matricos reikšmes, reikia spręsti nė kiek ne lengvesnį polinomo šaknų ieškojimo uždavinį, o apskaičiuojant tikrinius vektorius — tiesinių lygčių sistemą.

Apskaičiuojant matricos tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius, naudinga žinoti kai kurias jų savybes.

1. Simetrinės matricos tikrinės reikšmės yra realieji skaičiai. Tokių matricų daugiausia pasitaiko inžineriniuose skaičiavimuose.
2. Jei matricos tikrinės reikšmės skirtingos, tai jos tikriniai vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi, o jei matrica simetrinė, tai šie vektoriai yra dar ir ortogonalūs.
3. Matricos tikrinį vektorių padauginę iš skaliaro, turėsime vektorių, kuris taip pat bus matricos tikrinis vektorius. Todėl paprastai matricos tikriniai vektoriai yra normuojami taip, kad arba a) pati didžiausia vektoriaus komponentė būtų lygi vienetui, arba b) vektoriaus modulis būtų lygus vienetui.
4. Tarkime, kad matricos A tikrinis vektorius yra $\boldsymbol{u}_i$, o jį atitinkanti tikrinė reikšmė — λ_i. Tada matricos $A-\lambda E$ tikrinis vektorius $\boldsymbol{u}_i$ bus lygus matricos A tikriniam vektoriui $\boldsymbol{u}_i$, o jį atitinkanti tikrinė reikšmė bus lygi $\lambda_i - \lambda$. (Iš tikrųjų $(A-\lambda E)\boldsymbol{u}_i = A\boldsymbol{u}_i - \lambda E\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i - \lambda \boldsymbol{u}_i = (\lambda_i - \lambda)\boldsymbol{u}_i$).
5. Tikrinės reikšmės λ_i kartotinumas.
   - ***Algebrinis kartotinumas***. Jei λ_i yra charakteristinės lygties k kartų kartotinė šaknis, tai sakoma, kad tikrinės reikšmės λ_i algebrinis kartotinumas yra k. Jei $k=1$, tai λ_i yra paprastoji tikrinė reikšmė.
   - ***Geometrinis kartotinumas***. Jei k kartotinė reikšmė λ_i turi $p, p \le k$ nepriklausomų tikrinių vektorių, tai skaičius p yra tikrinės reikšmės λ_i geometrinis kartotinumas.

     Jei $p < k$, tai sakoma, kad λ_i yra defektinė tikrinė reikšmė.
6. Matricos A ir B vadinamos panašiosiomis, jeigu teisinga lygybė $B = P^{-1}AP$; čia P — neišsigimusioji matrica.

Teorema. Panašiųjų matricų tikrinės reikšmės sutampa, o tikriniai vektoriai yra susiję sąryšiu $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$; čia $\boldsymbol{x}$ — matricos A tikrinis vektorius, $\boldsymbol{y}$ — matricos B tikrinis vektorius.

Įrodysime, kad matricų A ir B charakteringosios lygtys, taigi ir tikrinės reikšmės, sutampa:

$$\det(B-\lambda E) = \det\left(P^{-1}AP - \lambda E\right) = \det\left(P^{-1}(A-\lambda E)P\right) =$$
$$= \det P^{-1} \cdot \det(A-\lambda E) \cdot \det P = \det(A-\lambda E).$$

Įrodysime, kad matricų A ir B tikriniai vektoriai yra susiję sąryšiu $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$.

Iš tikrųjų

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x},$$

$$P^{-1}A\boldsymbol{x} = \lambda P^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Jei $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, tai

$$P^{-1}A\,P\boldsymbol{y} = \lambda P^{-1}P\boldsymbol{y},$$

$$B\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{y}.$$

Vadinasi, $\boldsymbol{y}$ yra matricos B tikriniai vektoriai.

4.6.2. Jakobio metodas

Inžinerinėje praktikoje dažniausiai pasitaiko simetrinės matricos, todėl tikslinga plačiau išnagrinėti, kaip apskaičiuojamos simetrinių matricų visos tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai. Praktinę vertę turintys šio uždavinio sprendimo metodai remiasi matricų panašumu.

Pirmąjį tokio sprendimo metodą 1846 m. pasiūlė įžymus vokiečių matematikas Karlas Gustavas Jakobis (Jacobi). 1952 metais šis metodas buvo atrastas iš naujo ir suprogramuotas.

Jakobio metodo idėja labai paprasta: reikia apskaičiuoti į duotąją simetrinę matricą A panašią matricą B, kuri būtų įstrižaininė matrica. Aišku, kad įstrižaininės matricos tikrinės reikšmės sutampa su pagrindinės įstrižainės elementais, o tikriniai vektoriai yra vienetinės matricos stulpeliai. Vadinasi, jei $B = P^{-1}AP$ (čia B — įstrižaininė matrica), tai matricos B pagrindinės įstrižainės elementai yra matricos A tikrinės reikšmės, o matricos P stulpeliai yra matricos A tikriniai vektoriai.

Jakobis pasiūlė matricą P formuoti iteracijų metodu, naudojant posūkio matricas.

Posūkio matrica. n-matę erdvę vienareikšmiškai apibrėžia vienetiniai vektoriai δ_i, $i = \overline{1, n}$. Vektorių δ_i visos koordinatės lygios nuliui, išskyrus i-tąją, kuri lygi vienetui. Šie vektoriai sudaro ortonormuotąją bazę. Matricą Q_{kl} vadiname posūkio plokštumoje β_{kl} matrica, jeigu ji, transformuodama erdvę pačią į save, visus bazinius vektorius δ_i palieka nepakeistus, išskyrus vektorius δ_k ir δ_l, kuriuos pasuka kampu α. Aišku, kad

$$Q_{kl} = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} & & & k & & l & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ k \\ l \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cos\alpha & \dots & \sin\alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\sin\alpha & \dots & \cos\alpha & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Posūkio matrica yra ortogonali, t. y. $Q_{kl}^{-1} = Q_{kl}^{t}$, jos determinantas lygus vienetui, o transformuodama erdvę, ji nekeičia vektorių ilgio.

Matricos B apskaičiavimas Jakobio metodu pagrįstas iteracijų metodu, kurį taikant naudojamos posūkio matricos, todėl literatūroje šis metodas dar vadinamas sukimo metodu. Procedūrą galima nusakyti formule

$$B = \dots P_q^{-1} \dots P_2^{-1} P_1^{-1} A P_1 \, P_2 \dots P_q \dots ;$$

čia $q = 1, 2, \dots$, o P_q — matrica posūkio plokštumoje β_{kl}. Panagrinėkime q-tąją iteraciją.

q-toji iteracija $(q = 1, 2, \dots)$

$$\hat{A} = Q_{kl}^{-1} A Q_{kl} .$$

Aišku, kad matrica $\hat{A}$ skirsis nuo matricos A tik k-tąja bei l-tąja eilute ir k-tuoju bei l-tuoju stulpeliu. Šių matricų elementai susiję tokiomis formulėmis:

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \;\; i \neq k, \;\; i \neq l,$$
$$j = \overline{1, n}, \;\; j \neq k, \;\; j \neq l,$$

$$\hat{a}_{ik} = \hat{a}_{ki} = a_{ik}\cos\alpha - a_{il}\sin\alpha\,,\ i = \overline{1,n},\quad i \neq k,\quad i \neq l\,;$$

$$\hat{a}_{il} = \hat{a}_{li} = a_{ik}\sin\alpha + a_{il}\cos\alpha\,,\ i = \overline{1,n},\quad i \neq k,\quad i \neq l\,; \qquad (4.9)$$

$$\hat{a}_{kk} = a_{kk}\cos^2\alpha - a_{kl}\sin 2\alpha + a_{ll}\sin^2\alpha\,,$$

$$\hat{a}_{lk} = \hat{a}_{kl} = \frac{1}{2}\left((a_{kk} - a_{ll})\sin 2\alpha + 2a_{kl}\cos 2\alpha\right),$$

$$\hat{a}_{ll} = a_{kk}\sin^2\alpha + a_{kl}\sin 2\alpha + a_{ll}\cos^2\alpha\,.$$

Iš šių formulių matyti, kad

$$\hat{a}_{ij}^2 = a_{ij}^2,\quad i \neq k,\quad i \neq l,\quad j \neq k,\quad j \neq l\,;$$

$$\hat{a}_{ki}^2 + \hat{a}_{li}^2 = \hat{a}_{ik}^2 + \hat{a}_{il}^2 = a_{ik}^2 + a_{il}^2\,,\ i = \overline{1,n},\quad i \neq k,\quad i \neq l\,.$$

Vadinasi, matricų $\hat{A}$ ir A neįstrižaininių elementų kvadratų sumos susijusios lygybe

$$\sum_{i \neq j}\hat{a}_{ij}^2 = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 - 2a_{kl}^2 + \left((a_{kk} - a_{ll})\sin 2\alpha + 2a_{kl}\cos 2\alpha\right)^2.$$

Kad matricos $\hat{A}$ neįstrižaininių elementų kvadratų suma kuo daugiau sumažėtų, posūkio matricą P_{kl} turime parinkti taip, kad būtų tenkinamos tokios dvi sąlygos:

$$|a_{kl}| = \max_{i \neq j}|a_{ij}|$$

ir

$$(a_{kk} - a_{ll})\sin 2\alpha + 2a_{kl}\cos 2\alpha = 0\,.$$

Iš šios sąlygos išplaukia, jog

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{kl}}{a_{ll} - a_{kk}}\,;\ \text{čia}\ |\alpha| \leq \frac{\pi}{4}\,.$$

Įrodykime, kad, taip parinkus posūkio matricą, iteracinis procesas konverguoja.

Sakykime, t_q^2 yra matricos A neįstrižaininių elementų kvadratų suma po q iteracijų (šią matricą žymėsime A_q). Iš anksčiau pateikto nagrinėjimo matyti, kad

$$t_{q+1}^2 = t_q^2 - 2\left(a_{k_q l_q}^{(q)}\right)^2.$$

Jei kiekvienoje iteracijoje pašalinsime didžiausio modulio elementą, tai bus

$$\left(a_{k_q l_q}^{(q)}\right)^2 \geq \frac{t_q^2}{n(n-1)},$$

taigi neįstrižaininių elementų kvadratų suma bus ne didesnė už

$$n \cdot (n-1) \cdot \max_{i \neq j}\left|a_{ij}^{(q)}\right|.$$

Iš paskutiniųjų dviejų sąlygų matyti, kad

$$t_{q+1}^2 \leq t_q^2\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \leq \ldots \leq t_0^2\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{q+1}.$$

Vadinasi, $\lim\limits_{q\to\infty} t_q^2 = 0$.

Gali atrodyti, kad gautos nelygybės iliustruoja mažą metodo konvergavimo greitį. Iš tikrųjų yra kitaip. Literatūroje nurodyta: nors matrica A gali turėti lygias tikrines reikšmes, tačiau Jakobio metodas pasižymi asimptotiniu kvadratiniu konvergavimo greičiu.

Taikant Jakobio metodą, kiekvienoje iteracijoje reikia rasti didžiausio modulio neįstrižaininį matricos A elementą. Kai matricos eilė didelė, ši operacija užima daug laiko (tokio elemento paieškai reikia $O(n^2)$ veiksmų), todėl praktikuojami kiti elemento a_{kl} parinkimo metodai. Aptarkime keletą iš jų.

Ciklinis metodas. Skaičiavimo metu elementas a_{kl} cikliškai įgyja laisvai sunumeruotų neįstrižaininių elementų reikšmes, pavyzdžiui, $a_{12}, \ldots, a_{1n}$, $a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n-1,n}$.

Barjerinis metodas. Skaičiavimo metu elementas a_{kl} cikliškai įgyja laisvai sunumeruotų neįstrižaininių elementų reikšmes, jei tų elementų modulis yra didesnis už barjerą — iš anksto paimtą skaičių. Barjero reikšmė skaičiuojant keičiama. Jei kurio nors ciklo metu visi $|a_{ij}|$ $(j > i)$ yra mažesni už barjerą, tai imama mažesnė barjero reikšmė. Taigi barjero reikšmės $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sudaro monotoniškai mažėjančią ir artėjančią prie nulio seką.

Vojevodino metodas. Vertas dėmesio toks elemento a_{kl} parinkimo būdas. Tarkime, kad $A_{q+1} = Q_{kl}^{-1} A_q Q_{kl}$. Tada matricos A_{q+1} visų eilučių, išskyrus k-tąją ir l-tąją, neįstrižaininių elementų kvadratų sumos sutaps su matricos A_q atitinkamų eilučių neįstrižaininių elementų kvadratų sumomis. Todėl, jei iš pradžių apskaičiuotume ir prisimintume matricos A visų eilučių neįstrižaininių elementų kvadratų sumas $s_1, s_2, \ldots, s_n$, tai kiekvienoje iteracijoje tektų pataisyti tik dvi sumas: s_k ir s_l.

Dabar elementą a_{kl} pasirinksime taip:

$$|a_{kl}| = \max_{\substack{1\le j\le n,\\ j\ne k}} \left(|a_{kj}|,\ s_k = \max_{1\le i\le n} s_i \right),$$

t. y. iš visų sumų išrinksime didžiausią ir eilutėje, kurią nusako ši suma, rasime didžiausio modulio neįstrižaininį elementą. Aišku, kad taip parinkto elemento a_{kl} modulis geriausiu atveju bus artimas didžiausio modulio neįstrižaininiam elementui arba su juo sutaps, blogiausiu atveju jis bus ne mažesnis už neįstrižaininių elementų kvadratų vidurkį.

Sukimo kampo apskaičiavimas. Kiekvienoje iteracijoje matricos A elementai apskaičiuojami pagal (14) formules. Vadinasi, kiekvienoje iteracijoje reikia rasti $\sin\alpha$ ir $\cos\alpha$ reikšmes. Jos apskaičiuojamos remiantis sąlyga $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2a_{kl}}{a_{ll} - a_{kk}}$, iš kurios išplaukia:

jei $a_{ll} = a_{kk}$, tai $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

jei $a_{ll} \neq a_{kk}$, tai $\cos\alpha = \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|y|}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$, $\sin\alpha = \frac{\operatorname{sign}(xy)|x|}{2\cos\alpha \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$;

čia $x = 2a_{kl}$, $y = a_{ll} - a_{kk}$.

Skaičiavimo paklaidos bus mažesnės, jeigu, prieš skaičiuodami sinuso ir kosinuso reikšmes, vektorių (x, y) normuosime taip: $z := \max(|x|, |y|)$. Tada, kai $z = 0$, tai $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$; priešingu atveju $x := x/z$, $y := y/z$.

Skaičiavimo pabaigos sąlyga. Skaičiavimas paprastai baigiamas, kai arba $\sqrt{t^2} < \varepsilon$, arba $\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < \varepsilon$.

4.6.2. Givenso, Hauseholderio ir QR metodų apžvalga

Givenso ir Hauseholderio metodai. Jakobio metodas yra kompaktiškas ir patikimas, tačiau iteracinis. Didžiausias jo trūkumas yra tas, kad q-tojoje iteracijoje maksimalų neįstrižaininį elementą pavertus nuliu, kitose iteracijose tas elementas perskaičiuojamas ir jo reikšmė pasidaro nelygi nuliui. Gal galima sugalvoti tokią elementų, nusakančių posūkio matricas, parinkimo strategiją, kad neįstrižaininį elementą pavertus nuliu, jo reikšmė toliau skaičiuojant nesikeistų?

Pirmasis tokią strategiją 1954 m. pasiūlė I. V. Givensas (Givens), o 1958 m. ją patobulino A. S. Hauseholderis (Hauseholder).

Šių metodų esmė tokia. Pirmiausia pradinė simetrinė matrica baigtiniu skaičiumi žingsnių perskaičiuojama į panašią simetrinę triįstrižainę matricą, paskui, taikant specialius metodus, apskaičiuojamos tos matricos tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai. Todėl matricos tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai šiais metodais paprastai apskaičiuojami kur kas greičiau nei Jakobio metodu.

Givenso ir Hauseholderio metodai skiriasi vienas nuo kito tuo, kad Givensas panašumo transformacijose naudoja posūkio matricas, o Hauseholderis,- atspindžio matricas. Šie metodai detaliai išnagrinėti vadovėlyje *Kostas Plukas, Skaitiniai metodai ir algoritmai, Kaunas, Naujasis lankas, 2001.*

QR metodas. Šį metodą pagrindžia realųjį I. Šuro (Schur I.) skaidinį nusakanti teorema.

Teorema. *Jei matrica $A \in R^{n \times n}$, tai egzistuoja tokia ortogonalioji matrica $Q \in R^{n \times n}$, kad $Q^t A Q = R$, čia R viršutinė trikampė matrica, kurios pagrindinę įstrižainę sudaro 1×1 arba 2×2 formato blokeliai.*

Išvados.

- *Pagrindinės įstrižainės blokeliai apibrėžia matricos A tikrines reikšmes.*
- *Jei A yra realioji simetrinė matrica, tai visi blokeliai yra 1×1 formato matricos, t.y. – realieji skaičiai.*

Vienas iš pagrindinių metodų apskaičiuoti matricą R yra QR metodas, kurį nepriklausomai vienas nuo kito 1961 metais pasiūlė J. G. F. Francis ir V. Kublanovskaja. Šio metodo pagrindą sudaro matricos A išskaidymas į matricų Q ir R sandaugą, t. y.

$A = Q \cdot R$; čia Q — ortogonalioji (pavyzdžiui, atspindžio) matrica, o R — viršutinė trikampė matrica. Tada panašiųjų matricų seka $A = A_0, A_1, \ldots, A_s, A_{s+1}, \ldots$ generuojama taip:

$$A_s = Q_s R_s,$$

$$A_{s+1} = Q_s^t A_s Q_s = Q_s^t Q_s R_s Q_s = R_s Q_s .$$

Literatūroje [Gene H. Golub, Charles F. Van Loan. Matrix Computations, The John Hopkins University Press, Baltimore and London, 1989] parodyta, kad QR metodas konverguoja, ir jis yra ypač efektyvus, jei taikomas Hesenbergo matricoms. Todėl matricos A tikrinės reikšmės apskaičiuojamos paprasčiau, jei prieš tai ši matrica, naudojant panašumo transformaciją, perskaičiuojama į Hesenbergo matricą H.

Matrica H vadinama viršutine Hesenbergo matrica, jei jos elementai $h_{ij} = 0$, kai $i > j+1$, ir apatine Hesenbergo matrica, jei $h_{ij} = 0$, kai $j > i+1$. Pavyzdžiui,

$$H = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$ yra viršutinė 5-osios eilės Hesenbergo matrica, o

$$H = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$ yra apatinė 5-osios eilės Hesenbergo matrica.

MATLAB‘as turi funkciją ***hess***, kuri, naudodama panašumo transformacijas, perveda matricą A į Hesenbergo formą.

Pagrindiniai kreipiniai į šią procedūrą yra: ***H=hess(A)*** arba **[*P,H*]=*hess*(*A*).**

Pirmuoju atveju nesimetrinė matrica A perskaičiuojama į Hesenbergo matricą H, o jei matrica A yra simetrinė, tai ji transformuojama į triįstrižaininė matricą H. Antruoju atveju be matricos H apskaičiuojama panašumo transformaciją apibrėžianti ortogonalioji matrica P, t.y. $H = P^t AP$. Daugiau informacijos apie funkciją ***hess*** galima gauti surinkus komandą ***help hess***.

QR metodas detaliai išnagrinėtas vadovėlyje *Kostas Plukas, Skaitiniai metodai ir algoritmai, Kaunas, Naujasis lankas, 2001.* Todėl čia plačiau QR metodo nenagrinėsime.

4.6.3. MATLAB‘o funkcija eig.

MATLAB‘as turi matricos tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių apskaičiavimo funkciją ***eig***. Pagrindiniai kreipiniai į šią funkciją yra: ***lambda=eig(A)***, **[*P,lambda*]= *eig*(*A*), *lambda=eig*(*A,B*), [*P,lambda*]= *eig*(*A,B*).**

Įstrižaininės matricos ***lambda*** pagrindinės įstrižainės elementai pirmaisiais dviem atvejais yra matricos A tikrinės reikšmės, o trečiuoju ir ketvirtuoju atvejais, - apibendrinto uždavinio ($A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$) tikrinės reikšmės. Matricos P stulpeliai apibrėžia matricos A arba apibendrinto uždavinio tikrinius vektorius.

Funkcijos ***eig*** veikimo schema yra tokia: pirmiausia matrica A transformuojama į Hesenbergo formą, o po to, tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai apskaičiuojami QR

metodu. Sprendžiant apibendrintą uždavinį, naudojama QR metodo modifikacija - QZ metodas [19].

Pavyzdys. Pasinaudodami funkcija ***eig***, apskaičiuokime matricos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius.

```
>> a=[1 2 3 4;2 2 3 4;3 3 3 4;4 4 4 4]
a =  1     2     3     4
     2     2     3     4
     3     3     3     4
     4     4     4     4
>> [p,lambda]=eig(a)
p = 0.7003   -0.5144    0.2767    0.4103
    0.3592    0.4851   -0.6634    0.4422
   -0.1569    0.5420    0.6504    0.5085
   -0.5965   -0.4543   -0.2457    0.6144
lambda =
   -2.0531         0         0         0
         0   -0.5146         0         0
         0         0   -0.2943         0
         0         0         0   12.8621
```

Matome, kad simetrinės matricos A visos tikrinės reikšmės yra realieji skaičiai: -2.0531, -0.5146, -0.2943 ir 12.8621, o tikriniai vektoriai yra matricos P stulpeliai. Tikriniai vektoriai yra normuoti taip, kad jų ilgiai lygūs vienetui. Kadangi matrica A yra simetrinė, tai šie vektoriai yra ortogonalūs ir tiesiškai nepriklausomi.