Funkcijų interpoliavimas
Interpoliavimas daugianariais

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115/Skaitiniai inzinerijos metodai su MATLAB (KP RG RB)2009

F9.pdf

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/T170B115 /Skaitiniai inzinerijos metodai(RB) 2006

I.3.pdf

Funkcijų interpoliavimas.Uždavinio formuluotė

Interpoliavimas – tai tolydžiosios kreivės $y=f(x)$, einančios per duotus taškus, radimas.

1) **kreivė $y=f(x)$ turi praeiti per visus duotus taškus (x_i,y_i), t. y. $f(x_i)=y_i$, $i=1, 2, ..., n$;**

   Jie vadinami *interpoliavimo mazgais*

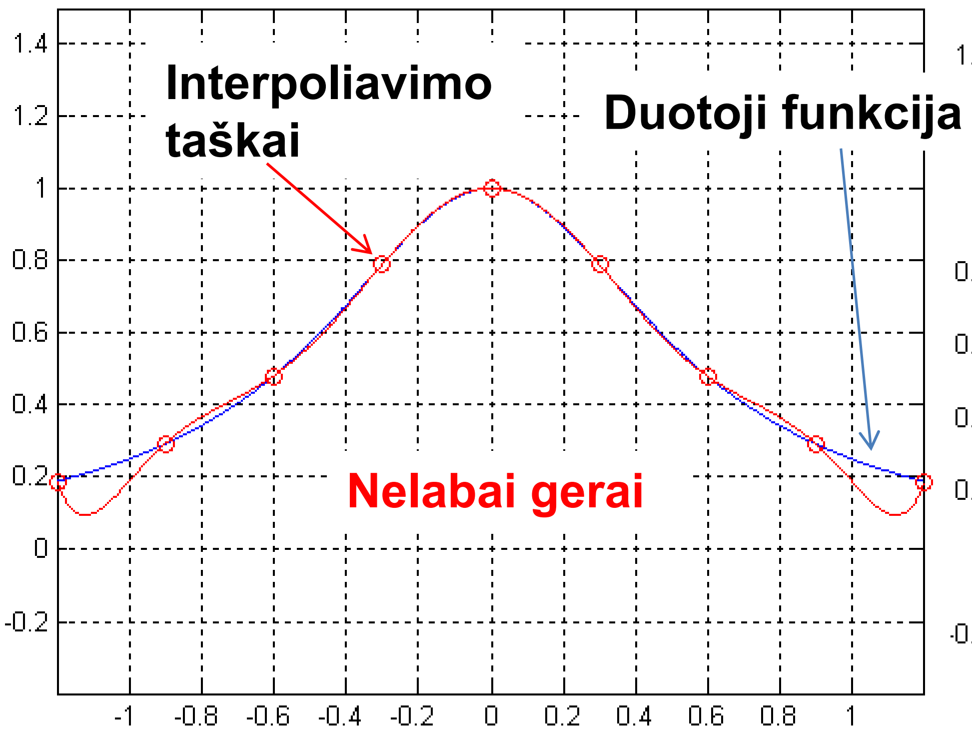
1) **funkcijos $f(x)$ analitinė išraiška neturi būti labai sudėtinga;**

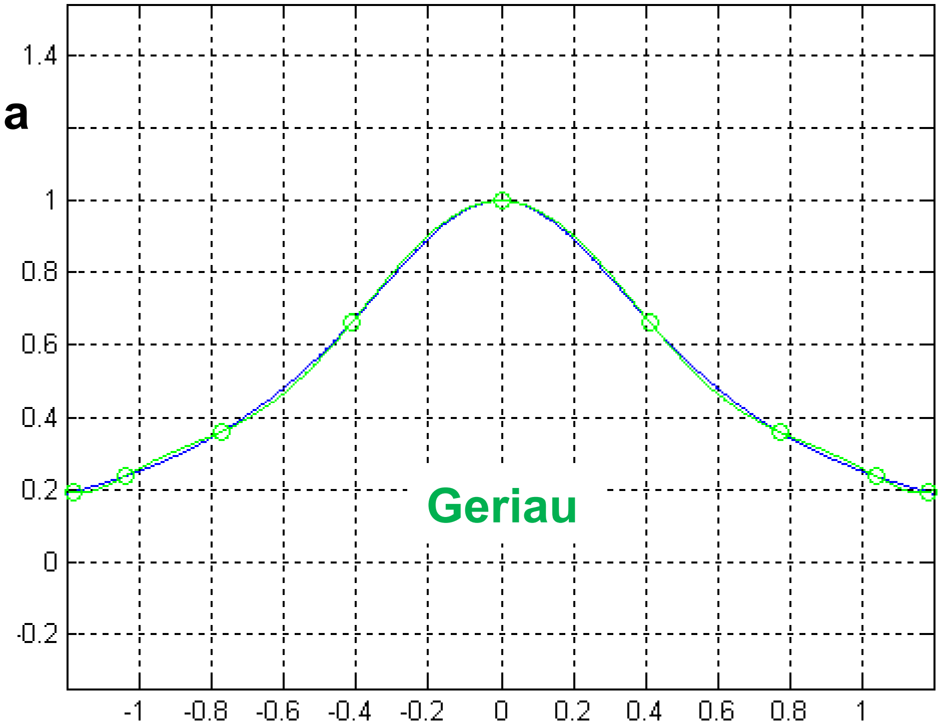
3) **funkcija $f(x)$ turi būti nesunkiai integruojama ir diferencijuojama;**

4) **funkcija $f(x)$ turi būti nesunkiai surandama (pvz., jos parametrai apskaičiuojami pagal žinomas formules, arba sprendžiant tiesinių lygčių sistemą).**

Dvi skirtingos interpoliavimo uždavinio sampratos:

1) **Kai daugianariu interpoliuojame *iš anksto žinomą funkciją* pagal ant jos kreivės interpoliavimo mazgus. Interpoliuojanti funkcija visame intervale turi galimai geriau atitikti duotosios funkcijos kreivės formą.**
Formuluotė būdinga sprendžiant *matematinius ir inžinerinius uždavinius*, kai norime analitiškai sudėtingą arba netgi nežinomos išraiškos funkciją pakeisti analitiškai paprastesne funkcija

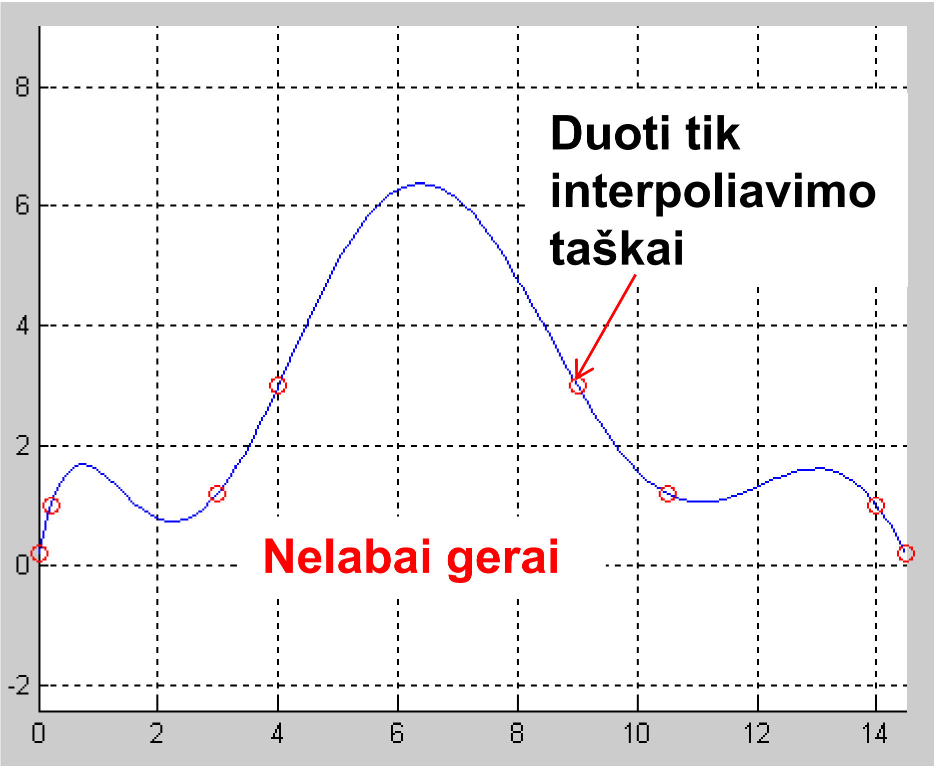


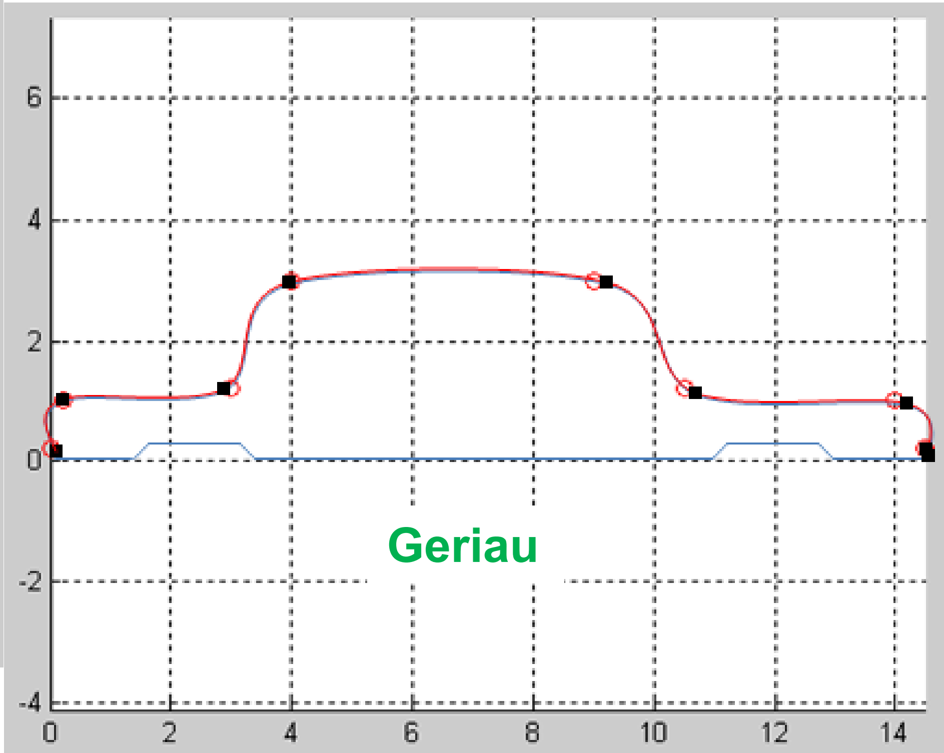


Dvi skirtingos interpoliavimo uždavinio sampratos:

2)Kai duotos tik interpoliavimo taškų koordinatės. Interpoliuojančios funkcijos geometrinei formai nenustatome griežtų matematinių atitikties kriterijų.Vadovaujames daugiau vizualiniu-estetiniu interpoliavimo kokybės suvokimu.

Formuluotė būdinga kompiuterinei grafikai, geometrinio dizaino ir pan. uždaviniams.





Interpoliavimas daugianariais *vienanarių bazėje*

Duoti interpoliavimo mazgai: $(x_i, y_i)\,, \qquad y_i = f(x_i),\;\; i = 1,\ldots,n$

Daugianario pavidalo interpoliacinė funkcija

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & \ldots & x^{n-2} & x^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Bazinės funkcijos}} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{Bmatrix}$$

Tiesinių lygčių sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n-1},\;\; a_{n-2},\; \ldots\;,\; a_0$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & \ldots & x^{n-2} & x^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{Bmatrix}$$

- **Interpoliaciniam daugianariui sudaryti parenkamos tam tikros bazinės funkcijos. Čia buvo parinkta *vienanarių bazė*;**
- **Interpoliacinio daugianario koeficientus apskaičiuoti sprendžiant lygčių sistemą nėra racionalu;**
- **Yra sukurti kiti, matematiškai patogesni ir mažiau skaičiavimų reikalaujantys būdai interpoliaciniam polinomui apskaičiuoti;**

Lagranžo interpoliacinė išraiška (1)

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} L_j(x)\,y_j$$

Daugianarių tiek, kiek yra interpoliavimo mazgų

$L_j(x),\ i=\overline{1,n}$

n-1 eilės daugianariai, kurie interpoliavimo mazguose įgauna reikšmes:

$$L_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & kai\ \ i=j,\\ 0, & kai\ \ i\neq j.\end{cases}$$

Nėra nario ($x-x_j$), todėl daugianaris L_j virsta nuliu visuose interpoliavimo mazguose , išskyrus x_j

$$L_j(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

$$L_j(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

Užrašę bazinėmis funkcijomis ir sudarę lygčių sistemą koeficientams rasti, gauname:

$$f(x) = \begin{bmatrix} L_1(x) & L_2(x) & \dots & L_{n-1}(x) & L_n(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{Bmatrix}$$

Bazinės funkcijos

$$\begin{bmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & \cdots & L_{n-1}(x_1) & L_n(x_1) \\ L_1(x_2) & L_2(x_2) & \cdots & L_{n-1}(x_2) & L_n(x_2) \\ & & \vdots & & \\ L_1(x_n) & L_2(x_n) & \cdots & L_{n-1}(x_n) & L_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Bazinių funkcijų reikšmės interpoliavimo mazguose

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j(x)$$

Lagranžo interpoliacinė išraiška (2)

- Matematine prasme interpoliavimo daugianaris yra žinomas, jeigu žinomi jo koeficientai. Tai reiškia, interpoliavimo uždavinys išspręstas , kai užrašyta n formulių pavidalo

$$L_{\mathbf{j}}(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_{\mathbf{j}}-x_1)(x_{\mathbf{j}}-x_2)\dots(x_{\mathbf{j}}-x_{j-1})(x_{\mathbf{j}}-x_{j+1})\dots(x_{\mathbf{j}}-x_n)}$$

- Norint interpoliuotą kreivę pavaizduoti grafiškai, to nepakanka. Interpoliuojanti kreivė atrodys glotniai tik tada, kai daugianariai bus apskaičiuoti ir pavaizduoti daugelyje taškų N, artimų vienas kitam. Dažniausiai N >> n. Todėl praktiškai tenka apskaičiuoti matricą

$$[\mathbf{L}]_{N\times n}=\begin{bmatrix} L_1(x_0) & L_2(x_0) & \cdots & L_n(x_0) \\ L_1(x_0+\Delta x)) & L_2(x_0+\Delta x) & \cdots & L_n(x_0+\Delta x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(x_0+(N-1)\Delta x) & L_2(x_0+(N-1)\Delta x) & \cdots & L_n(x_0+(N-1)\Delta x) \end{bmatrix}$$

Lagranžo interpoliacinė išraiška (3)

$$\{\mathbf{X}\}_{N\times 1} = [\mathbf{L}]_{N\times n}\{\mathbf{y}\}_{n\times 1}$$

- X galima tiesiogiai vaizduoti grafiškai ir išgauti glotnios kreivės įspūdį;
- Jeigu žinoma matrica L , ją galime naudoti pakartotinai, imdami vis kitas interpoliavimo taškų ordinačių reikšmes y;
- Jeigu pakanka pavaizduoti kreivę esant vienam y vektoriui, pakanka paeiliui apskaičiuoti matricos X stulpelius, ankstesniųjų neišsaugant

$$\begin{Bmatrix} F(x_0) \\ F(x_0+\Delta x) \\ \vdots \\ F(x_0+(N-1)\Delta x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(x_0) & L_2(x_0) & \cdots & L_n(x_0) \\ L_1(x_0+\Delta x)) & L_2(x_0+\Delta x) & \cdots & L_n(x_0+\Delta x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(x_0+(N-1)\Delta x) & L_2(x_0+(N-1)\Delta x) & \cdots & L_n(x_0+(N-1)\Delta x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

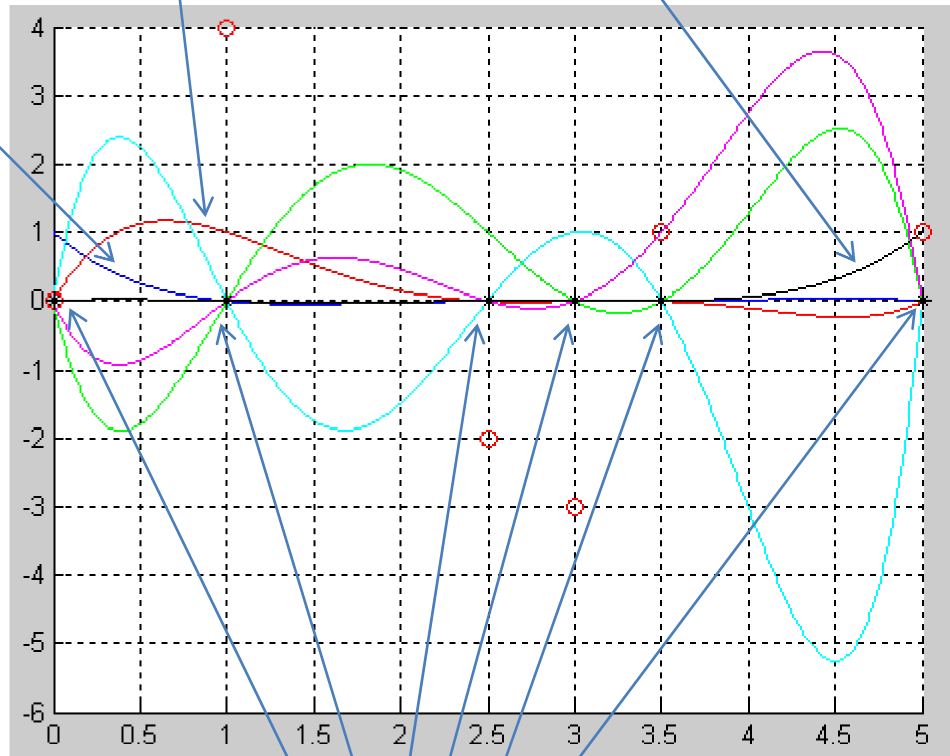
```
function pagrindine
X=[0  1  2  3  4  5]
Y=[0 4 -2 -3  1  1]
x=0:0.01:5;
n=length(X)

F=0;
for j=1:n
    L=Lagranzo_polinomas(X,n,j,x);
    F=F+L*Y(j)
end
end

function L=Lagranzo_polinomas(X,n,j,x)
L=1;
for i=1:n
    if i == j, continue, end
    L=L.*(x-X(i))/(X(j)-X(i));
end
return
end
```

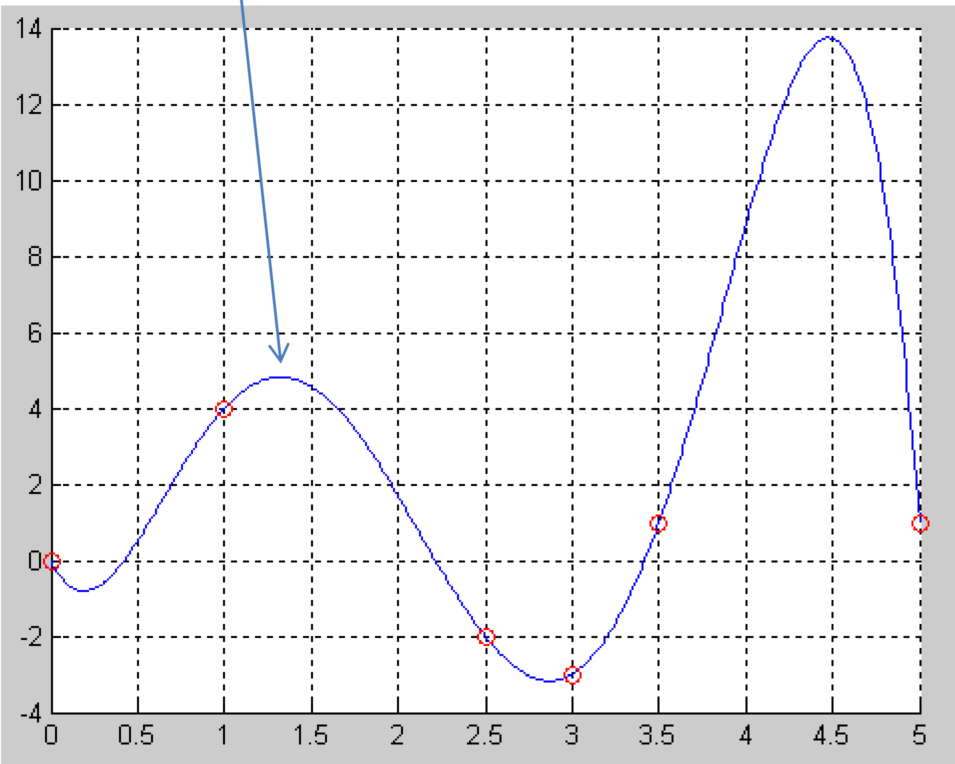
x yra visų vaizdavimo abscisių vektorius

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

$$\begin{Bmatrix} F(x_0) \\ F(x_0+\Delta x) \\ \vdots \\ F(x_0+(N-1)\Delta x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(x_0) & L_2(x_0) & \cdots & L_6(x_0) \\ L_1(x_0+\Delta x)) & L_2(x_0+\Delta x) & \cdots & L_6(x_0+\Delta x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(x_0+(N-1)\Delta x) & L_2(x_0+(N-1)\Delta x) & \cdots & L_6(x_0+(N-1)\Delta x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_6 \end{Bmatrix}$$

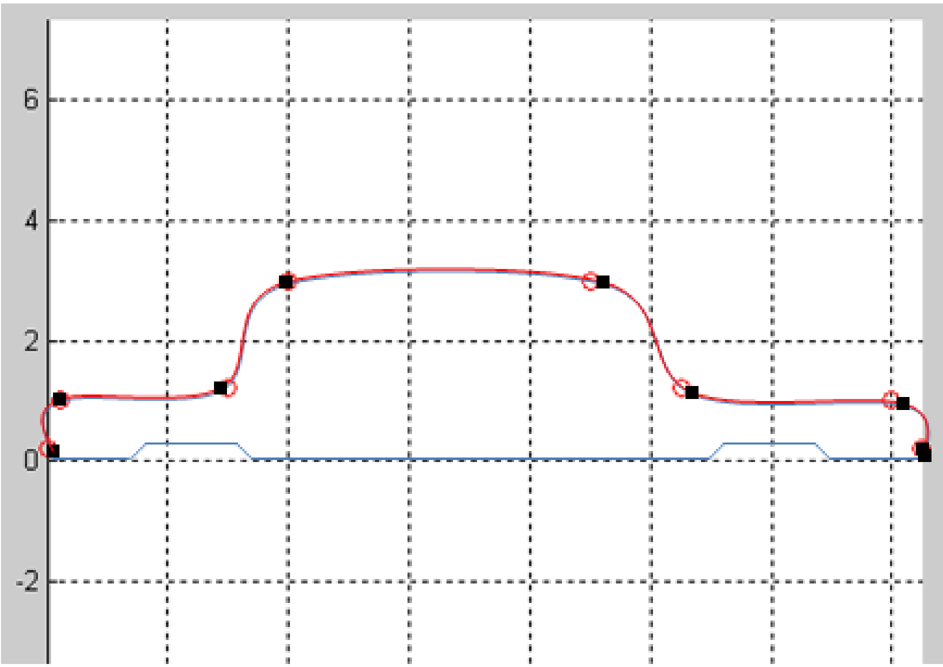
Lagranžo bazinės funkcijos

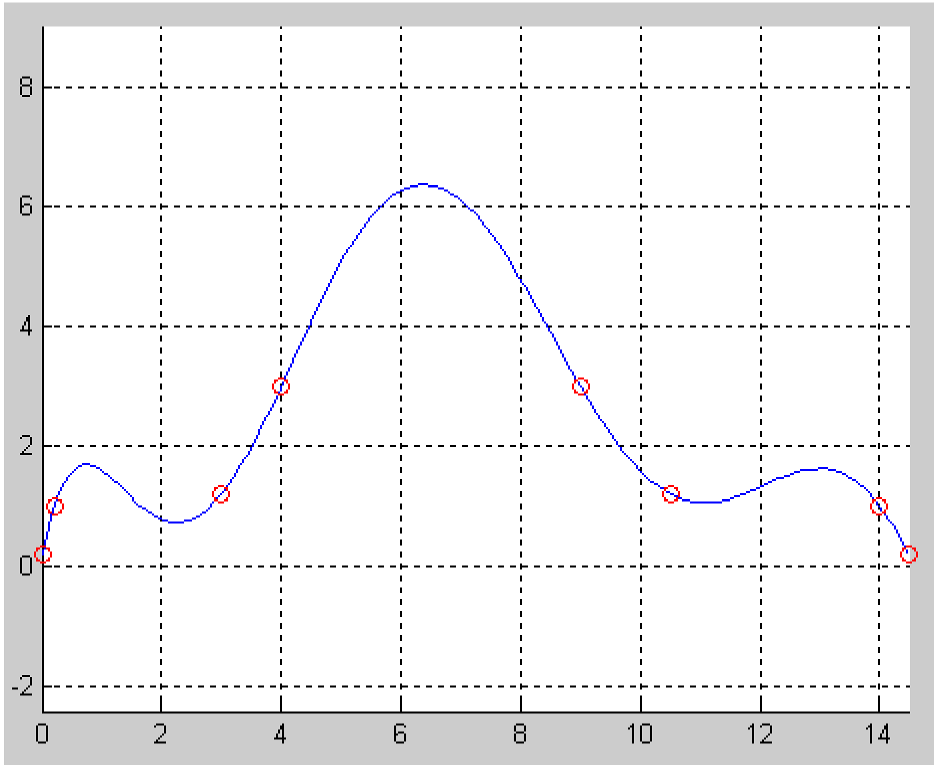




Interpoliavimo taškų abscisės

- Interpoliuojant vienu daugianariu per visus interpoliavimo mazgus, kreivė yra visiškai glotni, “be defektų” (t.y. kiekviename interpoliavimo taške pati funkcija ir visos jos išvestinės netrūkios);
- Jeigu interpoliavimo mazgų daug, kreivė neišvengiamai tampa labai banguota. Taip yra dėl aukštos polinomo eilės;





- Be Lagranžo išraiškos, dar žinomos ir kitokios (Aitkeno, Nevilio, Niutono, Čiobyševo) išraiškos interpoliacinio daugianario koeficientams apskaičiuoti;
- Taikant bet kurią iš minėtų išraiškų gaunamas toks pats interpoliacinis daugianaris. Skiriasi tik koeficientų apskaičiavimo formulių pavidalai ir taikomos algebrinių veiksmų sekos(algoritmai);
- Viena ar kita išraiška gali būti matematiškai patogesnė, esant tam tikram taikomojo uždavinio pobūdžiui

,

Čiobyševo daugianariai. “Mažiausiai banguoto” daugianario radimas.

Nagrinėjame funkciją, duotą intervale -1 <= x <= 1. Tai nemažina formuluotės bendrumo. Kai turime kitokį apibrėžimo intervalą a<= X<= b, pakanka pakeisti kintamąjį:

$$X = Ax + B;$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad X = a \quad \Rightarrow \quad a = -A + B;$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad X = b \quad \Rightarrow \quad b = A + B;$$

$$A = \frac{b-a}{2}; \quad B = \frac{b+a}{2}$$

$$X = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$$

Čiobyševo daugianarių bazė

$$T_0(x) = 1;$$

$$T_1(x) = \cos\ (\arccos x) = x;$$

$$T_2(x) = \cos\ (2\arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x) = 2x^2 - 1$$

$$\vdots$$

$$T_{j+1}(x) = 2xT_j(x) - T_{j-1}(x)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & T_1(x) & \dots & T_{n-2}(x) & T_{n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{Bmatrix}$$

,

Interpoliavimas per duotus taškus Čiobyševo daugianarių bazėje

Jeigu interpoliuojame pagal duotus interpoliavimo mazgus , (x_i, y_i) , $y_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$

gauname įprastinę koeficientų apskačiavimo schemą:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & T_1(x) & \dots & T_{n-2}(x) & T_{n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & T_1(x_1) & \cdots & T_{n-2}(x_1) & T_{n-1}(x_1) \\ 1 & T_1(x_2) & \cdots & T_{n-2}(x_2) & T_{n-1}(x_2) \\ & & \vdots & & \\ 1 & T_1(x_n) & \cdots & T_{n-2}(x_n) & T_{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n-1}, \quad a_{n-2}, \dots, a_0$$

Interpoliuota funkcija niekuo nesiskirtų nuo vienanarių arba Lagranžo bazėje atliktos interpoliacijos. Todėl taip skaičiuoti yra <u>neracionalu</u>.

Čiobyševo daugianarių ortogonalumas

$$T_0(x) = 1;$$

$$T_1(x) = \cos\left(\arccos x\right) = x;$$

$$T_2(x) = \cos\left(2\arccos x\right) = \cos^2\left(\arccos x\right) - \sin^2\left(\arccos x\right) = 2x^2 - 1$$

$$\vdots$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Čiobyšovo daugianariai yra ortogonalūs su svoriu $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\cdot T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad n \neq m, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{kai} \quad n = m \neq 0, \\ \pi, & \text{kai} \quad n = m = 0. \end{cases}}$$

Čiobyševo daugianarių panaudojimas duotai funkcijai interpoliuoti

$$f(x)=\begin{bmatrix}1 & T_1(x) & \dots & T_{n-2}(x) & T_{n-1}(x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-2}\\a_{n-1}\end{Bmatrix}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{bmatrix}T_i(x) & T_1(x)T_i(x) & \dots & T_{n-2}(x)T_i(x) & T_{n-1}(x)T_i(x)\end{bmatrix}dx\begin{Bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-2}\\a_{n-1}\end{Bmatrix},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=a_i\int_{-1}^{1}\frac{T_i^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad a_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\cdot T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad k\ge 1}$$

Apskaičiuojant koeficientus, nenaudojamos interpoliavimo taškų koordinatės

Čiobyševo interpoliavimo kreivės susikirtimai su interpoliuojamos funkcijos kreive

- Apskaičiuojant Čiobyševo interpoliacijos koeficientus, nepanaudojamos interpoliavimo mazgų koordinatės;
- Galima įrodyti, kad interpoliuojančios ir duotosios funkcijų grafikai susikerta n taškuose, kurių koordinatės tokios:

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Šie taškai vadinami "Čiobyševo abscisėmis" ir sutampa su n eilės Čiobyševo daugianario nuliais

Interpoliavimas per Čiobyševo abscises

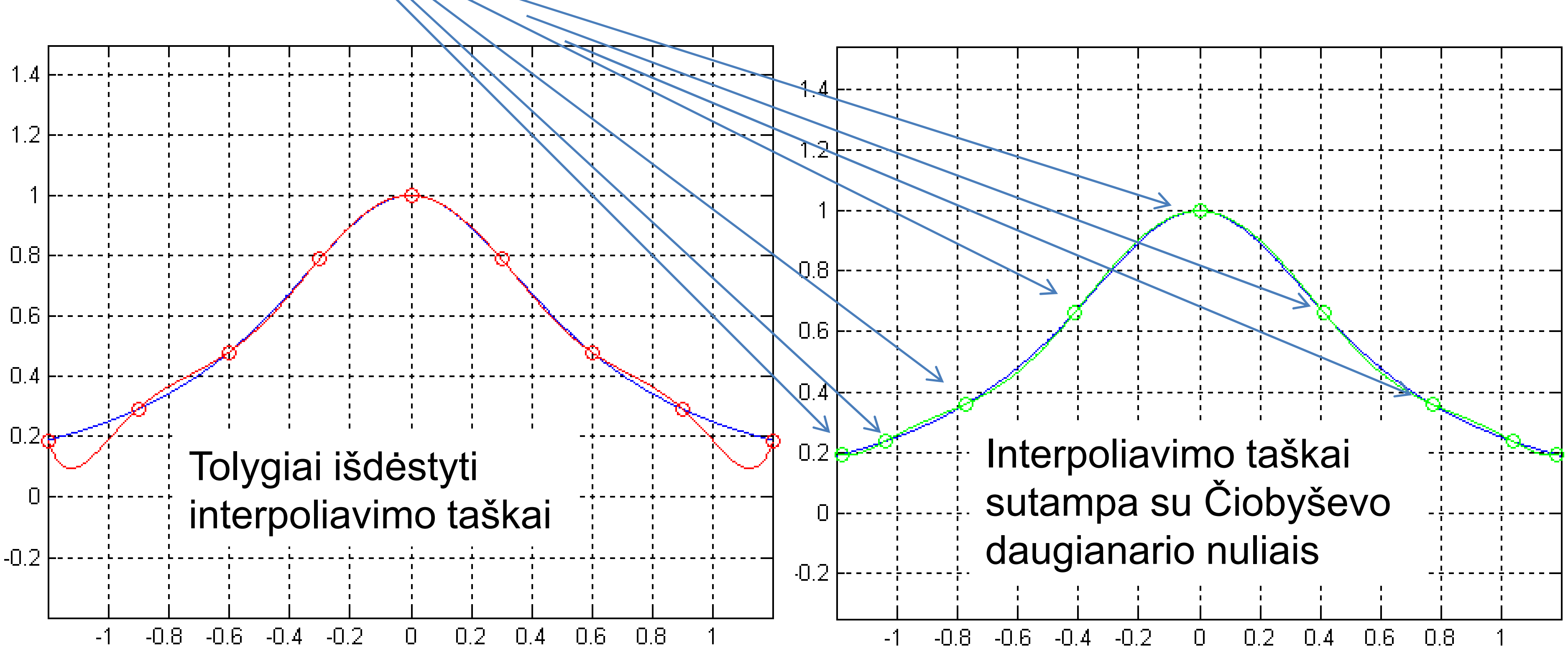
- Galima įrodyti, kad per Čiobyševo abscisėms atitinkančius taškus pravesta interpoliuojančio daugianario kreivė yra mažiausiai “banguota”, palyginus su tos pačios eilės daugianarių kreivėmis pravestas per kitaip išdėstytą tą patį skaičių interpoliavimo mazgų;
- Jeigu žinome Čiobyševo abscises, interpoliuoti daugianariu galima ir ne Čiobyševo bazėje. Tą patį rezultatą gautume, interpoliuodami pvz. Lagranžo bazėje

“Mažiausiai banguoto” daugianario radimas.

Tarkime, kad funkciją intervale [a;b] norime aproksimuoti n-os eilės interpoliaciniu daugianariu.

Tada interpoliavimo mazgus reikia sutapatinti su n-os eilės Čiobyšovo daugianario šaknimis, transformuotomis į intervalą [a;b], t.y. interpoliavimo mazgai turi būti apskaičiuoti pagal formulę

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n}\right), i = 0,1,\ldots,n-1$$



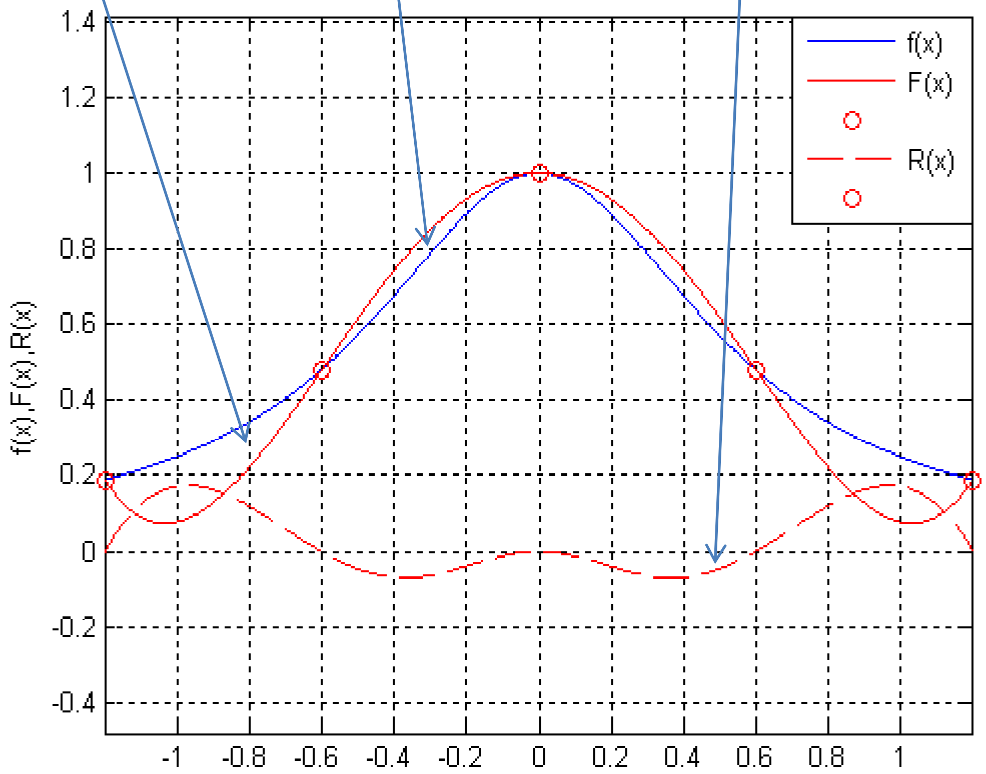
Interpoliacinių daugianarių liekamojo nario apskaičiavimas

$$f(x) = F^{(n)}(x) + R^{(n)}(x)$$

Žinoma funkcija

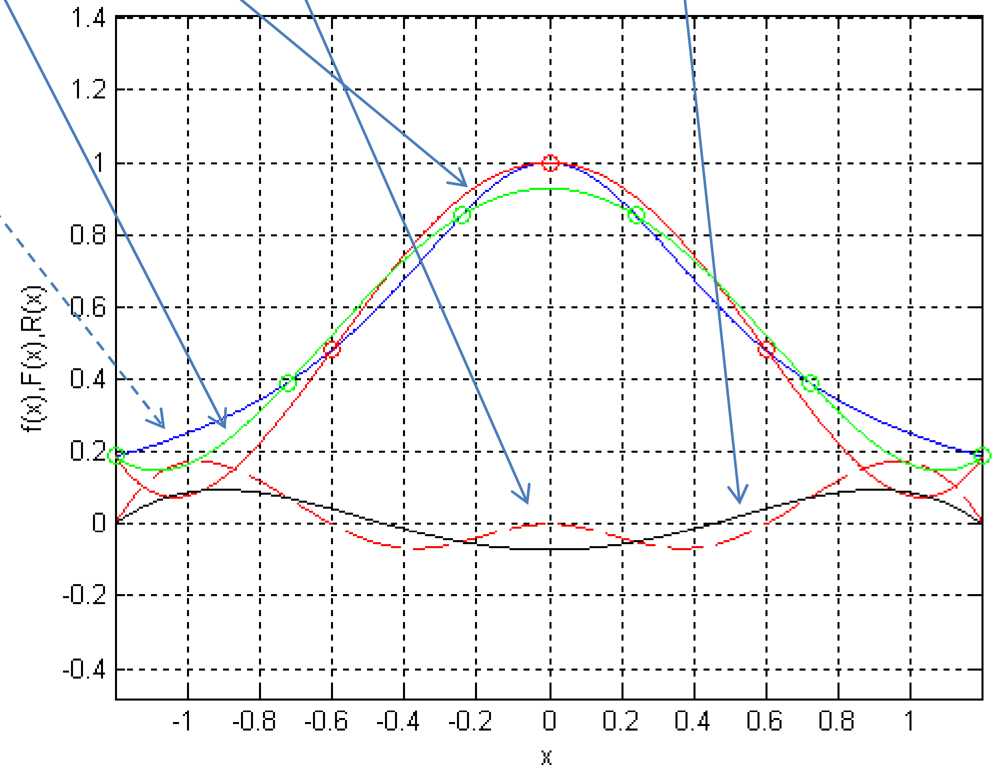
n-ojo laipsnio daugianariu interpoliuota funkcija

Liekamasis narys (“banguotumo” matas)



Interpoliacinių daugianarių liekamojo nario įvertis, kai tikroji funkcija nežinoma

$$\begin{cases} f(x) = F^{(n)}(x) + R^{(n)}(x) \\ f(x) = F^{(n+1)}(x) + R^{(n+1)}(x) \end{cases} \Rightarrow \hat{R}^{(n)}(x) \approx F^{(n+1)}(x) - F^{(n)}(x)$$



Skaliarinis liekamojo nario įvertis:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left| \hat{R}^{(n)}(x) \right| dx$$

Niutono interpoliacinė išraiška

$$f(x)=\begin{cases} a_0 \quad +a_1(x-x_0) & , x_0 \le x < x_1 \\ a_0 \quad +a_1(x-x_0) \quad +a_2(x-x_0)(x-x_1) & , x_0 \le x < x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ a_0 \quad +a_1(x-x_0) \quad +a_2(x-x_0)(x-x_1) \quad \cdots \quad +a_n\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) & , x_0 \le x \le x_n \end{cases}$$

Tai užrašome siekdami, kad didinant interpoliavimo taškų skaičių, anksčiau apskaičiuoti intrerpoliacijų koeficientai nepasikeistų

Įrašius papildomą narį, pati interpoliacinė kreivė pasikeis *visa*, nors turime tik vieną naują koeficientą

Niutono interpoliacinės išraiškos koeficientai

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_{n-1} - x_0) & (x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) & \cdots & \prod_{i=0}^{n} (x_n - x_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

- **Kadangi matrica trikampė, interpoliacijos koeficientus apskaičiuoti nesunku;**
- **Pridėjus naują interpoliavimo tašką, pakanka apskaičiuoti naują koeficientą tik pagal paskutinę lygtį;**
- **Skaičiuojant kompiuteriu, Niutono išraiška neturi aiškių privalumų, lyginant su Lagranžo išraiška. Tačiau Niutono išraiška turi svarbią teorinę reikšmę. Iš jos ribiniu atveju galima išvesti *Teiloro eilutę.***

Niutono interpoliacinės išraiškos koeficientai

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & (x_1-x_0) & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & (x_2-x_0) & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_{n-1}-x_0) & (x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1) & \cdots & \prod_{i=0}^{n-1}(x_n-x_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = y_0;$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1);$$

$$y_2 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) - a_1(x_1 - x_0) + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1);$$

$$y_2 = y_1 + a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1);$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0, x_1, x_2);$$

$$a_3 = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = f(x_0, x_1, x_2, x_3);$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0} = f(x_0, x_1, \ldots, x_n);$$

“Skirtuminiai santykiai”

Niutono interpoliacinės išraiškos koeficientai

Tarkime,kad $$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

n-os eilės skirtuminis santykis nėra n-os eilės išvestinės aproksimacija(!!). Jis apytiksliai išreiškia n-os eilės išvestinę <u>padalintą iš n faktorialo</u>

$$a_1 = f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h} \approx \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0};$$

$$a_2 = f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \approx \frac{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_1} - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}}{2h} \approx \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0};$$

$$a_3 = f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} \approx \frac{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_1} - \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0}}{3h} \approx \frac{1}{2 \cdot 3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0};$$

$$\vdots$$

$$a_n = f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0} \approx \frac{\frac{1}{(n-1)!}\left.\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right|_{x_1} - \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{2}\left.\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right|_{x_0}}{nh} \approx \frac{1}{n!}\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0};$$

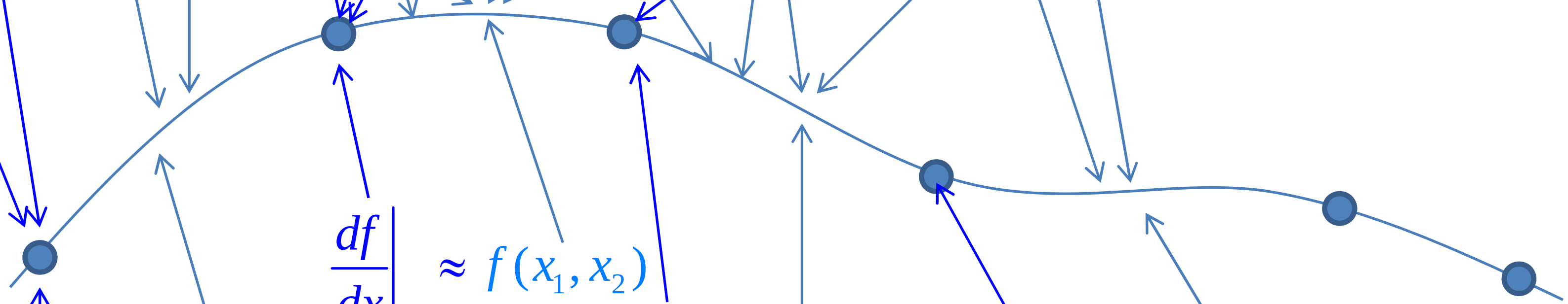
$$\left.\frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0} \approx f(x_0,x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3) - f(x_0,x_1,x_2)}{3h}$$

$$\left.\frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_1} \approx f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_2,x_3,x_4) - f(x_1,x_2,x_3)}{3h}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_1} \approx f(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_2,x_3) - f(x_1,x_2)}{2h}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} \approx f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2) - f(x_0,x_1)}{2h}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_2} \approx f(x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_3,x_4) - f(x_2,x_3)}{2h}$$



$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_1} \approx f(x_1,x_2)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_2} \approx f(x_2,x_3)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_3} \approx f(x_3,x_4)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \approx f(x_0,x_1)$$

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & f(x_0) + \\
& + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \\
& + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\
& + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\
& + \ldots \\
& + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) + \\
& + \ldots
\end{aligned}
$$

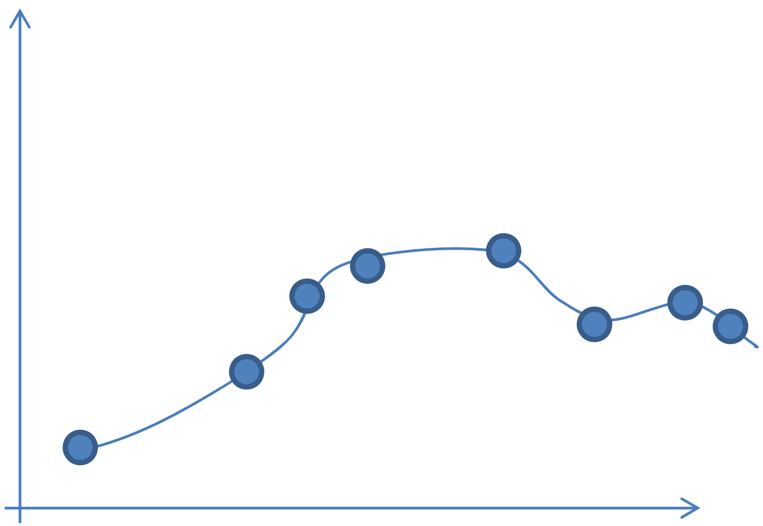
Pereinant prie ribos, kai visi interpoliavimo mazgai sutampa ir skirtuminiai santykiai tampa išvestinėmis, gauname Teiloro eilutę:

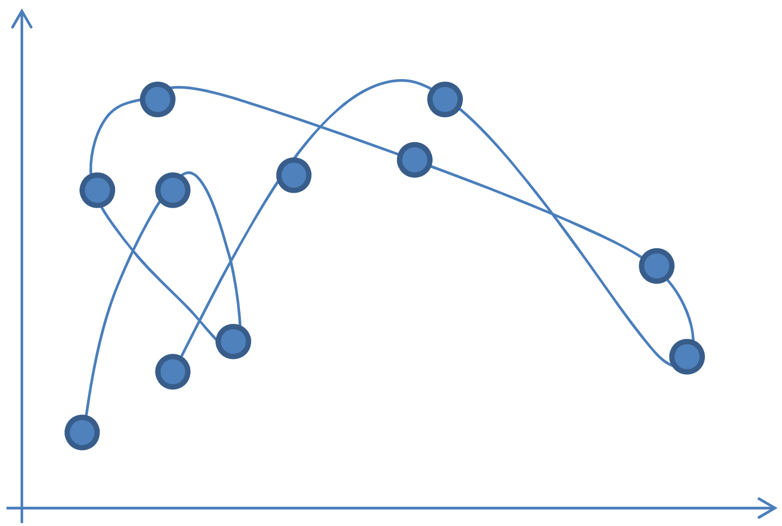
$$
h \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 \approx x_1 \approx x_2 \approx \cdots \approx x_n
$$

$$
f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0} + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} + \ldots
$$

Erdvėje duotos taškų sekos interpoliavimas

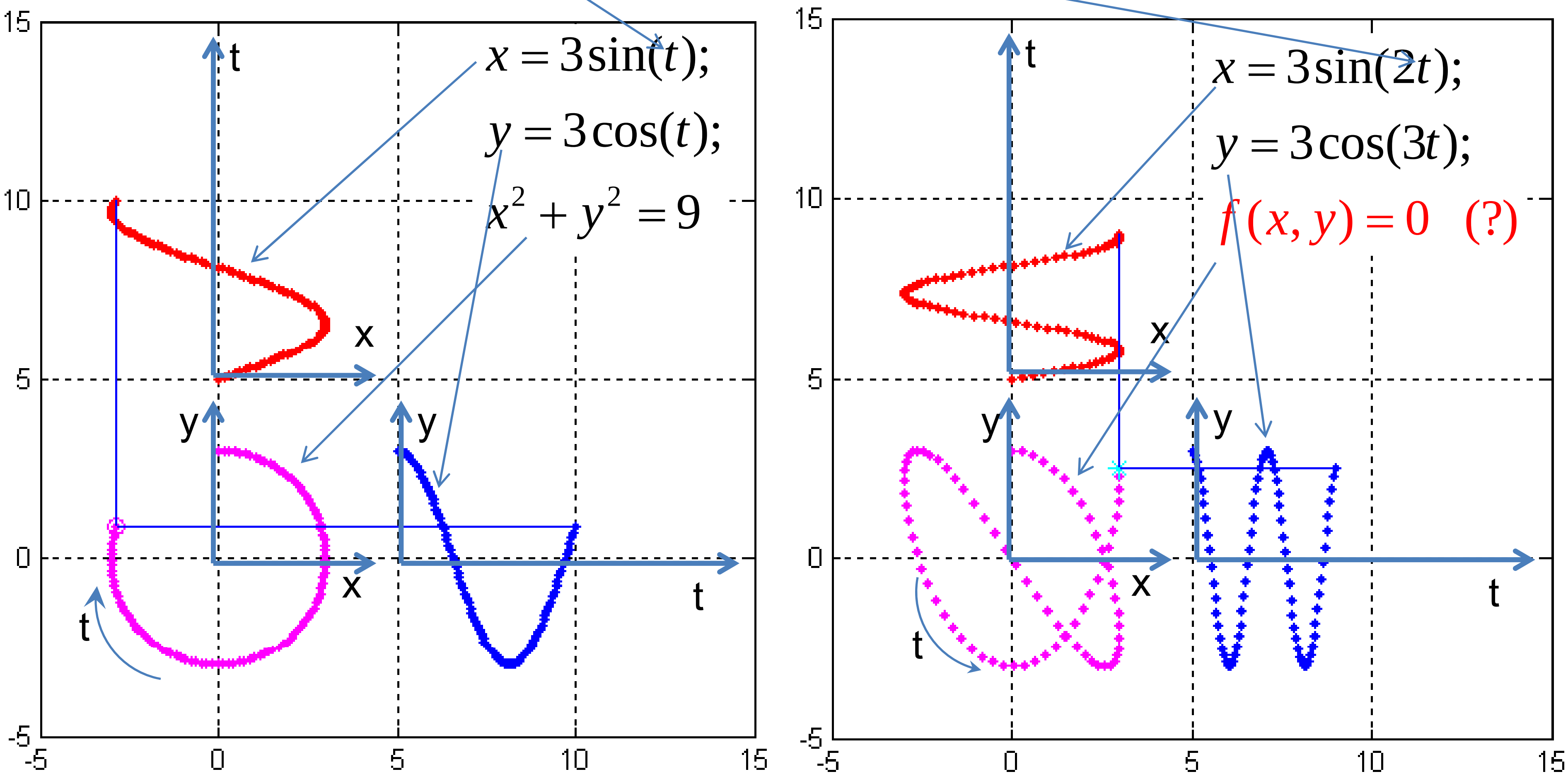
- Iki šiol nagrinėjome, kaip interpoliuoti funkcijos kreivę pagal duotas abscises;
- Laikėme, kad abscisių sekos reikšmės didėjančios;
- Toks priėjimas būtų netinkamas, jeigu interpoliavimo taškais siektume interpoliuoti ne funkcijos grafiką, tačiau bet kokią kreivę





Parametrinis funkcijos vaizdavimas 1

- **Parametrinė funkcijos išraiška pavaizduoja, kaip tolydžio didėjant parametro reikšmei (pvz. *laikui bėgant*) sukuriami vis nauji funkcijos kreivei priklausantys taškai;**



Parametrinis funkcijos vaizdavimas 2

- **Priklausomybę f(x,y)=0 dažniausiai galima pakeisti parametrinėmis priklausomybėmis, ir atvirkščiai;**

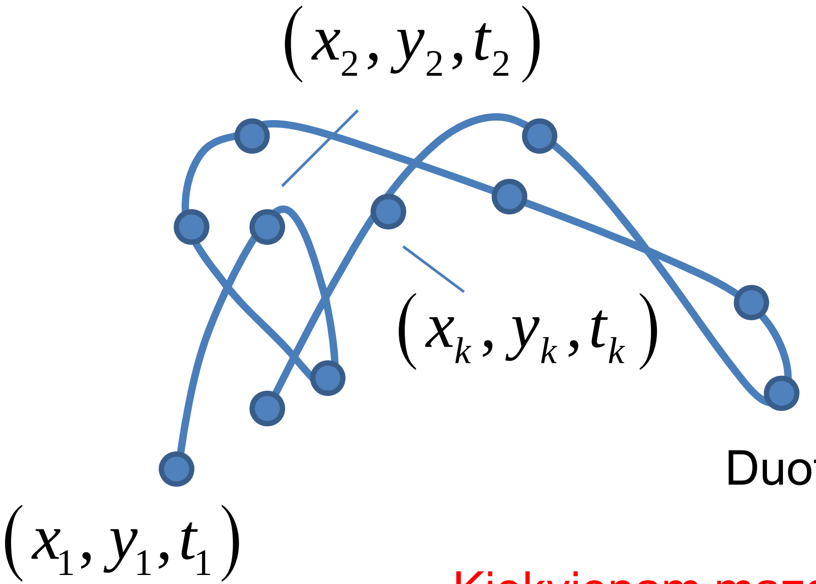
Jeigu reikia tik pavaizduoti funkciją, taip keisti nėra prasmės

$$x = x(t); y = y(t) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = 0$$

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad x = t; y = f(t)$$

Taip pakeisti galima visuomet

Plokščiosios kreivės parametrinis pavidalas



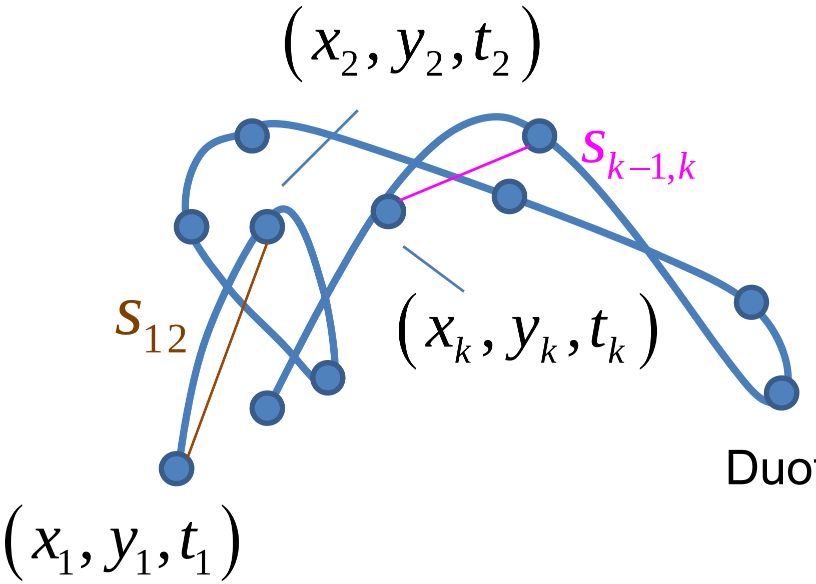
Duota mazgų seka
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k & \cdots \end{bmatrix}$$

Kiekvienam mazgui priskiriamas parametras („laiko momentas").
$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_k & \cdots \end{bmatrix}$$

Interpoliuojamos dvi mazgų sekos
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k & \cdots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k & \cdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t) \end{aligned}}$$

Kokias parametro reikšmes priskirti?



1) Galima būtų imti bet kokią didėjančią reikšmių seką, pvz. t=0,1,2,...,k,.. ;
2) Teisingiau parametro reikšmes priskirti, remiantis atstumu tarp gretimų interpoliavimo mazgų:

Duota mazgų seka $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k & \cdots \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & s_{12} & \cdots & s_{k-1,k} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t) \end{aligned}}$$

Interpoliuojamos dvi mazgų sekos

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ 0 & s_{12} & \cdots & s_{k-1,k} & \cdots \end{bmatrix}$$

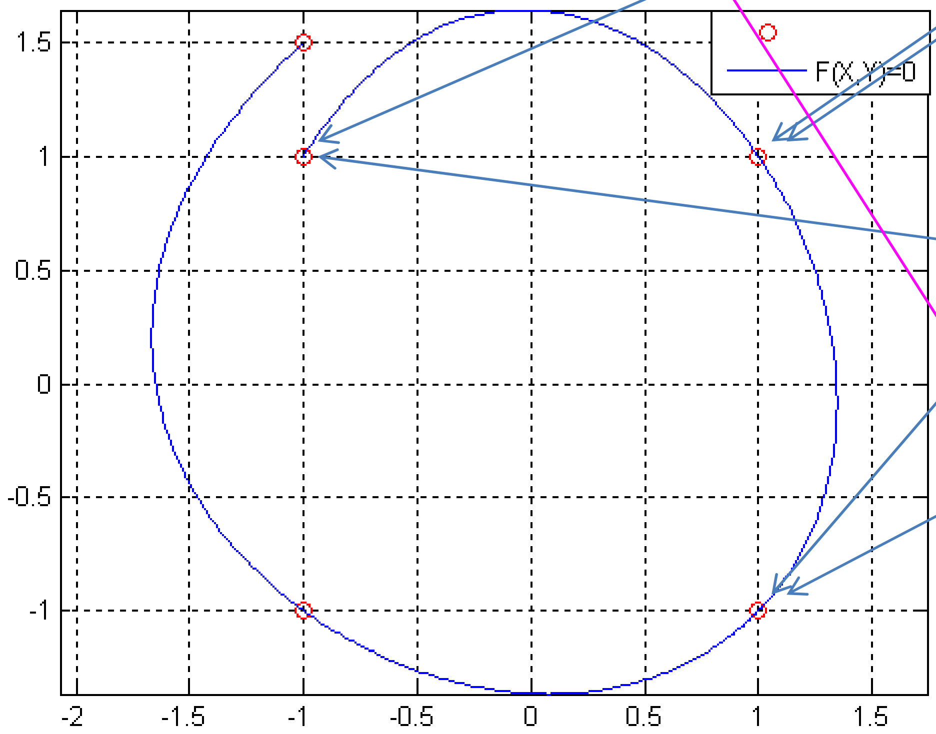
$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k & \cdots \\ 0 & s_{12} & \cdots & s_{k-1,k} & \cdots \end{bmatrix}$$

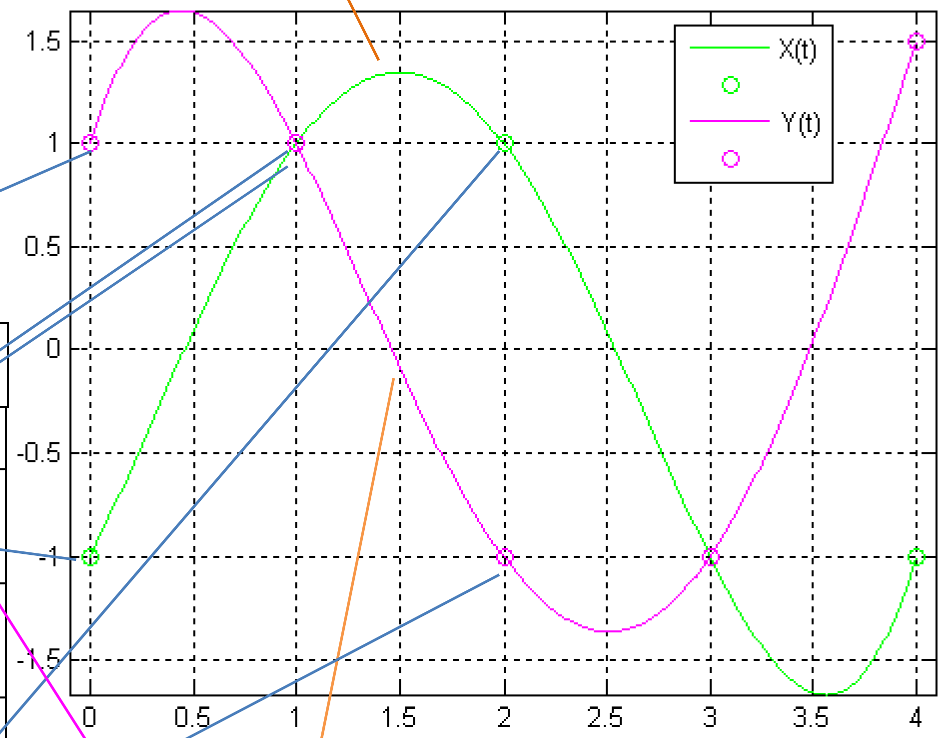
Pavyzdys

X=[-1 1 1 -1 -1   ]
t=[0 1 2   3 4]

Duota taškų seka:

X=[-1 1 1 -1 -1   ]
Y=[1 1 -1 -1 1.5]
t=[0 1 2   3 4]





Y=[1 1 -1 -1 1.5]
t=[0 1 2   3 4]