Tiesinių lygčių sistemų sprendimas

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/P170B115/Skaitiniai inzinerijos metodai su MATLAB (KP RG RB)2009

F7.pdf - 4.1-4.5 poskyriai

http://oras.if.ktu.lt/moduliai/P170B115 /Skaitiniai inzinerijos metodai(RB) 2006

I.1.2.pdf

Algebrinės lygtys

Viena lygtis

Lygčių sistema

Tiesinės algebrinės lygtys
(vienas sprendinys)

$$ax + b = 0;$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Netiesinės algebrinės ir transcendentinės lygtys
(keli sprendiniai)

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f(x) = ax^6 + \sin^2 x + \ln(x+2) = 0;$$

$$x = ???$$

Tiesinių algebrinių lygčių sistemos
(vienas sprendinys(?))

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{b}\}$$

$$[\mathbf{A}][\mathbf{X}] = [\mathbf{b}]$$

Netiesinių algebrinių ir transcendentinių lygčių sistemos (keli sprendiniai)

Tiesinė lygčių sistema 1

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4; \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

Įprastinis 2 lygčių sistemos pavidalas

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Lygčių sistemos pavidalas matricomis

$$\begin{cases} 2 * x_1 + 1 * x_2 = 4 \\ 1 * x_1 - 1 * x_2 = -1 \end{cases}$$

Ryšys tarp šių pavidalų nusakomas *matricų daugybos* veiksmu

Tiesinė lygčių sistema 2

Koeficientų
matrica

Nežinomųjų
vektorius

Laisvųjų narių
vektorius

$$[A]_{m\times n}\{x\}_{n\times 1}=\{b\}_{m\times 1}$$

Nežinomųjų
skaičius

Lygčių skaičius

$$\{x\}?$$

Dažniausiai sutinkamas
atvejis m=n

Tiesinė lygčių sistema

$$[A]_{m\times n}\{x\}_{n\times 1}=\{b\}_{m\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

Matricų daugybos veiksmas

- **Matricų daugybos veiksmas:**

$$[\mathbf{C}]_{m\times p} = [\mathbf{A}]_{m\times n}[\mathbf{B}]_{n\times p}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

3

1 $\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad -2 \quad 4} \\ 5 \quad\ \ 2 \quad\ \ 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 4} =$

3

1 $= \begin{bmatrix} 1\times 2 - 2\times 1 + 4\times 2 & 1\times 3 - 2\times 5 + 4\times 4 & \boxed{1\times 4 + 2\times 1 + 4\times 2} & -1\times 2 - 2\times 1 - 4\times 3 \\ 5\times 2 + 2\times 1 + 3\times 2 & 5\times 3 + 2\times 5 + 3\times 4 & 5\times 4 - 2\times 1 + 3\times 2 & -5\times 2 + 2\times 1 - 3\times 3 \end{bmatrix} =$

1 $= \begin{bmatrix} 8 & 9 & \boxed{14} & -14 \\ 18 & 35 & 24 & -17 \end{bmatrix}$

3

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Veiksmas neapibrėžtas

$4 \neq 2$ (!)

- **Matricų daugybos veiksmas:** $[\mathbf{A}][\mathbf{B}] \neq [\mathbf{B}][\mathbf{A}]$

$$[\mathbf{C}]_{m\times p} = [\mathbf{A}]_{m\times n}[\mathbf{B}]_{n\times p} \Longrightarrow \left([\mathbf{C}]^T\right)_{p\times m} = \left([\mathbf{B}]^T\right)_{p\times n}\left([\mathbf{A}]^T\right)_{n\times m}$$

$$[\mathbf{C}]_{2\times 4} = [\mathbf{A}]_{2\times 3}[\mathbf{B}]_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 4} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 2-2\times 1+4\times 2 & 1\times 3-2\times 5+4\times 4 & 1\times 4+2\times 1+4\times 2 & -1\times 2-2\times 1-4\times 3 \\ 5\times 2+2\times 1+3\times 2 & 5\times 3+2\times 5+3\times 4 & 5\times 4-2\times 1+3\times 2 & -5\times 2+2\times 1-3\times 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 9 & 14 & -16 \\ 18 & 37 & 24 & -17 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

$$\left([\mathbf{C}]^T\right)_{p\times m} = \left([\mathbf{B}]^T\right)_{p\times n}\left([\mathbf{A}]^T\right)_{n\times m} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{4\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1-1\times 2+2\times 4 & 2\times 5+1\times 2+2\times 3 \\ 3\times 1-5\times 2+4\times 4 & 3\times 5+5\times 2+4\times 3 \\ 4\times 1+1\times 2+2\times 4 & 4\times 5-1\times 2+2\times 3 \\ -2\times 1-1\times 2-3\times 4 & -2\times 5+1\times 2-3\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 9 & 37 \\ 14 & 24 \\ -16 & -17 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

- **Kiti matricų daugybos veiksmo taikymai:**

Vektorių skaliarinė sandauga:

$$\{\mathbf{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{b}\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}; \qquad \{\mathbf{a}\}^T \{\mathbf{b}\} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n$$

Vektoriaus “ilgis” (Euklido norma):

$$\{\mathbf{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}; \qquad \sqrt{\{\mathbf{a}\}^T \{\mathbf{a}\}} = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots a_n{}^2}$$

Tiesinė lygčių sistema su daugeliu laisvųjų narių vektorių

$$[A]_{m\times n}[x]_{n\times {\color{red}p}}=[b]_{m\times {\color{red}p}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mp} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

Nežinomųjų vektoriai ir jiems atitinkantys laisvųjų narių vektoriai

Iš esmės, turime *p* lygčių sistemų, kurių koeficientų matricos vienodos

Matricos MATLAB terpėje 1

- **Kiekvienas kintamasis MATLAB yra suvokiamas kaip matrica arba vektorius;**
- **Skaliarinis dydis – tai matricos atskiras atvejis, kai jos išmatavimas 1x1;**
- **Kai tarpusavyje dauginami du kintamieji, MATLAB pagal nutylejimą atlieka *matricų daugybos* veiksmą. Todėl matricų išmatavimai turi būti suderinti. Už tai atsakingas *programuotojas***

Matricos MATLAB terpėje 2

```
A= [1 -2  4 ; 5  2  3];
B=[2  3  4 -2 ; 1  5 -1  1 ; 2  4  2 -3];
C= A*B
D=B'*A'
```

```
C =

     8     9    14   -16
    18    37    24   -17

D =

     8    18
     9    37
    14    24
   -16   -17
```

Tiesinių algebrinių lygčių sistemų pavyzdžiai ir analitiniai sprendimo metodai

$$\begin{cases} 2x + y = 4; \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Kramerio metodas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

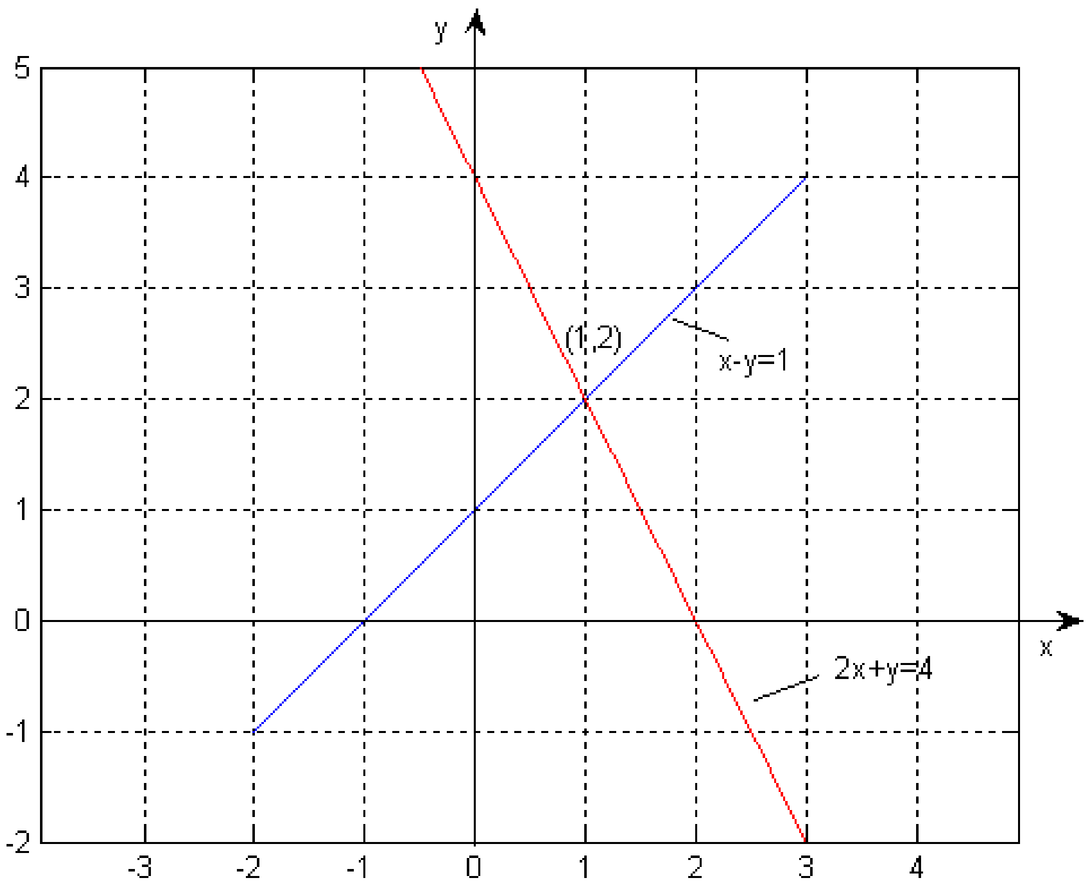
Kintamųjų eliminavimo metodas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} : 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \leftarrow - \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & -3/2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y/2 = 2 \\ \quad -3y/2 = -3 \end{cases}; \qquad y = 2; \; x = 1.$$

Grafinė interpretacija

$$\begin{cases} 2x + y = 4; \\ x - y = -1 \end{cases}$$



Lygčių sistema turi vienintelį sprendinį

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10; \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

Kramerio metodas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4;$$

sprendinių nėra

Kintamųjų eliminavimo metodas:

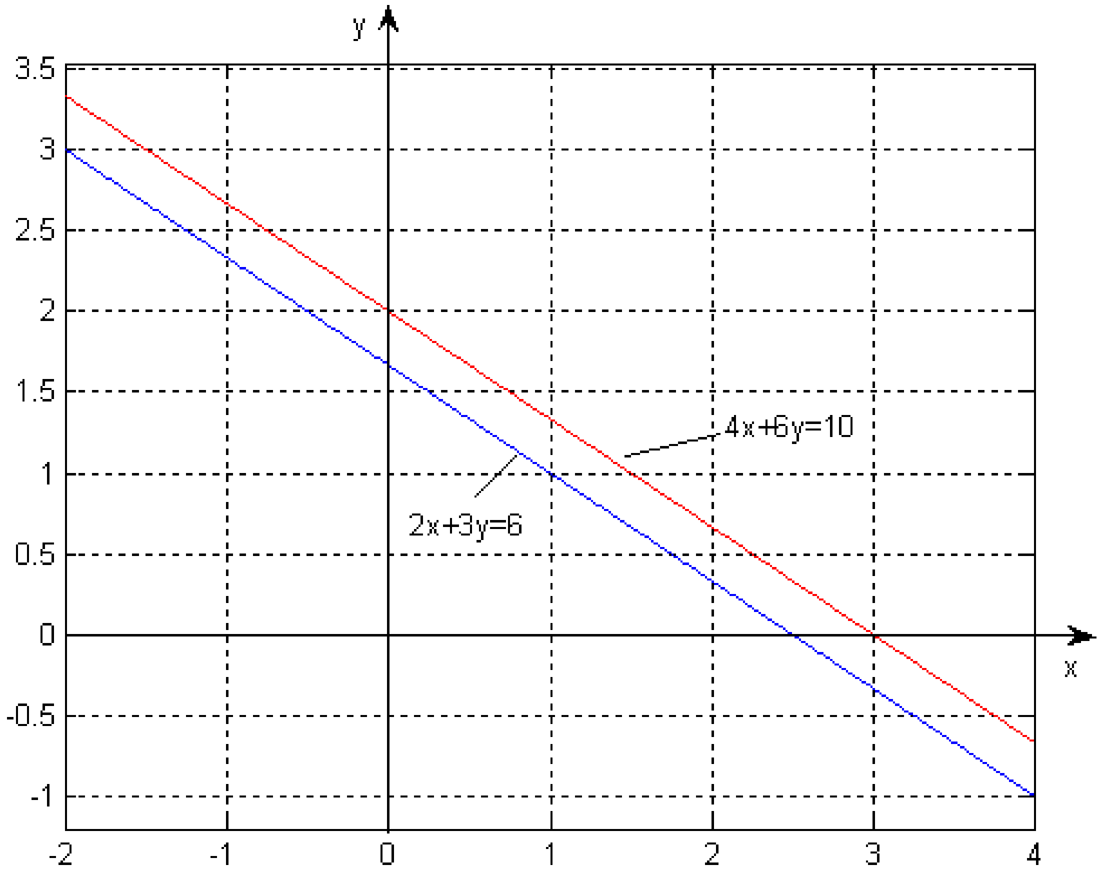
$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} : 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \leftarrow - \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0 + 0 = 1 \end{cases};$$

antroji lygybė negali būti tenkinama, todėl sprendinių nėra

Grafinė interpretacija

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10; \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$



Lygčių sistema sprendinių neturi

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10; \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Kramerio metodas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

be galo daug sprendinių, kadangi visi determinantai lygūs nuliui

Kintamųjų eliminavimo metodas:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} : 2 \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \leftarrow - \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases};$$

Lieka viena lygtis; be galo daug sprendinių

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10; \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \;\; + \;\; 3y = 5 \\ 0 \;\; + \;\;\;\; 0 \;\; = 0 \end{cases} \quad ;$$

"Be galo daug sprendinių" nereiškia, kad sprendiniu gali būti bet kokia skaičių pora (!). Tokiu atveju galime vieno nežinomojo reikšmę pasirinkti laisvai, o kitus išreikšti per šią reikšmę:

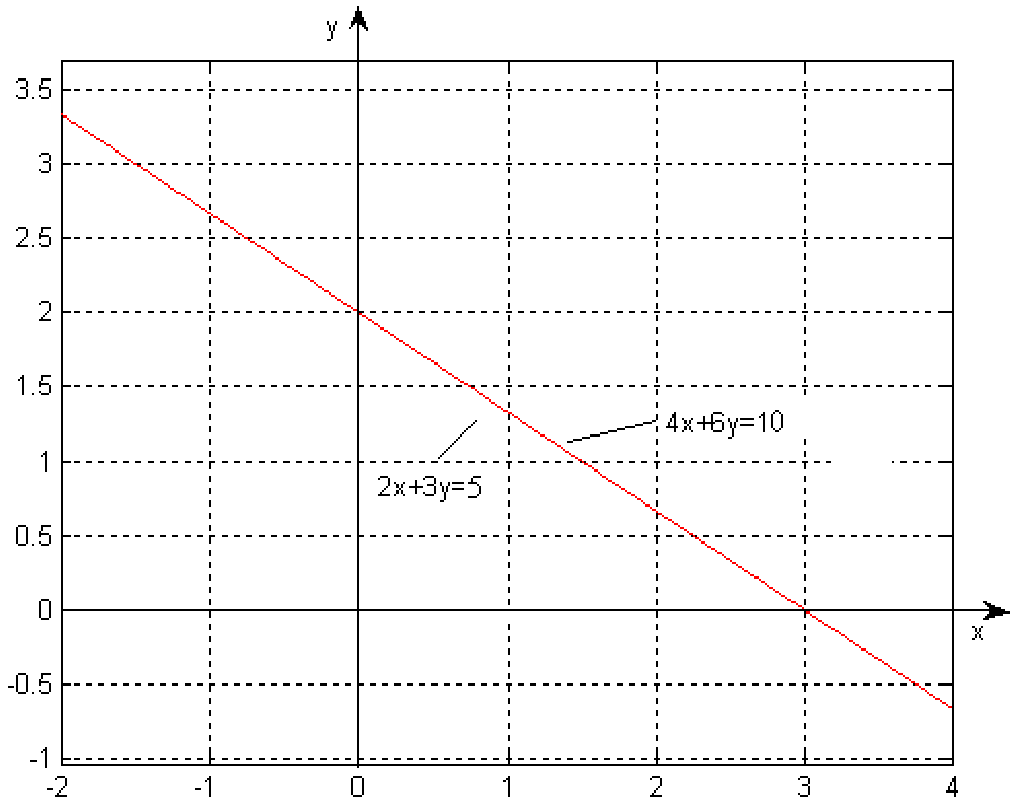
$$\begin{cases} 2x \;\; + \;\; 3y = 5 \\ 0 \;\; + \;\;\;\; 0 \;\; = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = p \; (pasirenkame \;\; laisvai).$$

$$Tuomet \quad x = {}^{5}\!/_{2} - {}^{3}\!/_{2}\, p$$

Sprendinys yra (p, 5-3p), čia p – bet koks skaičius

Grafinė interpretacija

$$\begin{cases} 4x+6y=10; \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$



be galo daug sprendinių

$$\begin{array}{l} 5x+7y \;\;= 12 \\ 7x+10y = 17 \end{array};$$

Kramerio metodas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 1;\;\; \Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 17 & 10 \end{vmatrix} = 1;\;\; \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} = 1;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1.$$

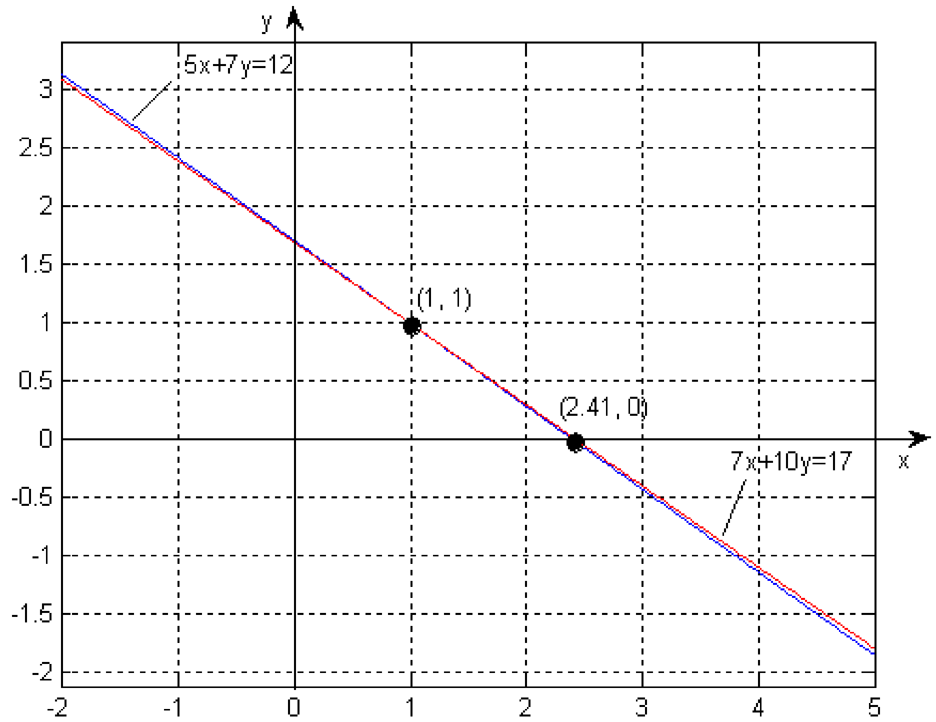
Kintamųjų eliminavimo metodas:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 7 & 10 & 17 \end{bmatrix} : \, {}^{5}\!/_{7} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & {}^{49}\!/_{5} & {}^{84}\!/_{5} \\ 7 & 10 & 17 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow - \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & {}^{49}\!/_{5} & {}^{84}\!/_{5} \\ 0 & {}^{1}\!/_{5} & {}^{1}\!/_{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x + {}^{49y}\!/_{5} = {}^{84}\!/_{5} \\ \quad\quad\; {}^{y}\!/_{5} = {}^{1}\!/_{5} \end{cases}; \qquad y = 1;\; x = 1.$$

Grafinė interpretacija

$$\begin{cases} 5x + 7y = 12; \\ 7x + 10y = 17 \end{cases}$$



x=1; *y*=1 ⇨ $\begin{matrix} 5 + 7 = 12 \\ 7 + 10 = 17 \end{matrix}$

x=2,41; *y*=0 ⇨ $\begin{cases} 12,05 + 0 \cong 12 \\ 16,87 + 0 \cong 17 \end{cases}$

Lygčių sistema “silpnai apibrėžta”, ją apytiksliai tenkina ir kitos skaičių poros, gana tolimos tikrajam sprendiniui

Skaitiniai tiesinių algebrinių lygčių sistemų sprendimo metodai:

•*Tiesioginiai* – sprendinys gaunamas algebriškai pertvarkant lygčių sistemą (t.y.koeficientų matrica skaičiuojant pertvarkoma)

•*Iteraciniai* – koeficientų matrica išlieka nepakitusi

Tiesioginiai metodai, paremti kintamųjų eliminavimu : Gauso algoritmas (1)

Tiesioginis etapas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

Vedantieji elementai

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow\times(-1) \\ \leftarrow\times(-2) \\ \leftarrow\times(-3) \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2^* & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow\times\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ \leftarrow\times(-1) \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2^* & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow\times\tfrac{1}{2} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right]$$

Gauso algoritmas (2)

Atvirkštinis etapas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Atliktas tiesioginio etapo algoritmas}} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_3 = 6 \\ -4x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \quad x_1 = (2 - x_2 - x_3 - x_4)/1 = 5/2 \\ \rightarrow \quad x_2 = (-2 + 2x_3 - 0 * x_4)/(-2) = 4 \\ \rightarrow \quad x_3 = (6 - 0 * x_4)/(-2) = -3 \\ \rightarrow \quad x_4 = -3/2 \end{array}$$

Gauso algoritmas (3)

```
A=[1 1 1 1;
   1 -1 -1 1;
   2 1 -1 2;
   3 1 2 -1]
b=[2;0;9;7]
n=size(A,1)
A1=[A,b]

 %Tiesioginis zingsnis

for i=1:n-1
    for j=i+1:n
      A1(j,i:n+1)=A1(j,i:n+1)-A1(i,i:n+1)*A1(j,i)/A1(i,i);
    end
end

% Atvirkstinis zingsnis

x=zeros(n,1);
x(n)=A1(n,n+1)/A1(n,n);

for i=n-1:-1:1
    x(i,:)=(A1(i,n+1) -A1(i,i+1:n)*x(i+1:n))/A1(i,i);
end
```

Gauso algoritmas (4)

Vedančio elemento parinkimas:

•Jeigu vedantis elementas lygus 0, Gauso algoritmas neveiks;

•Lygtys sukeičiamos vietomis taip, kad vedančiu elementu taptų absoliutiniu dydžiu didžiausias koeficientas

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}$$

Iš šių lygčių į vedančiosios poziciją perkeliama ta, kuri 2-ame stulpelyje turi didžiausią absoliutiniu dydžiu koeficientą

Gauso algoritmas, kai koeficientų matrica singuliari *

Ką daryti, kai tam tikrame žingsnyje vedančio elemento(tarkime, k stulpelyje) parinkti negalime?:

$$\begin{array}{ccccc:c} x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array}$$

Vedantis elementas =0

- **Tokia matrica yra singuliari (jos determinantas =0). Galėtume stabdyti programą ir išvesti klaidos pranešimą. Tai paprasčiausia išeitis;**
- **Singuliari lygčių sistemos matrica gali reikšti, kad *sprendinių nėra*, arba kad *sprendinių yra be galo daug*;**
- ***Be galo daug* sprendinių – tai ne *bet koks* sprendinys. Parodysime, kaip galima apskaičiuoti tokius sprendinius**

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & k & & & \\
x & x & x & x & x \\
0 & 0 & x & x & x \\
0 & 0 & x & x & x \\
0 & 0 & x & x & x
\end{array}
$$

- **Tiesioginį Gauso algoritmo etapą galime vykdyti toliau, (k stulpelio apatiniai elementai *jau* yra nuliniai)**

- **Nekeisdami k stulpelio, pereiname prie k+1 stulpelio ir parenkame vedantį elementą (k+1,k+1) pozicijoje**

1	1	1	1	2
1	1	-1	1	7
2	2	-2	2	14
-1	2	1	3	-7

2 lygtys vienodos. Tikėtina situacija 3 lygtys ir 4 nežinomieji, t.y. be galo daug sprendinių. Patikrinkime:

Tiesioginis Gauso algoritmo etapas

2	2	-2	2	14
0	3	-1	5	7
0	0	2	0	-5
0	0	0	0	0

$$0 \cdot x_4 = 0$$

Gavome tapatybę, todėl x4 gali būti bet koks skaičius.
Priimkime x4=1

Atvirkštinis Gauso algoritmo etapas

3.6667
-0.1667
-2.5000
1.0000

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 14 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

Tiesioginis Gauso algoritmo etapas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 2 & 14 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow 0 \cdot x_4 = 0$$

Jeigu galime atlikti operacijas su simboliniais dydžiais, priimkime x4=p

Atvirkštinis Gauso algoritmo etapas

(14-2*p-5-2*(1.5-5/3*p))/2=**(2*p)/3 + 3**

(7-5*p-2.5)/3= **1.5-(5/3)*p**

-2.5

p

1	1	1	1	2
1	1	-1	1	7
2	2	-2	2	15
-2	1	1	3	-7

2 lygtys nesuderintos. Turėtų nebūti sprendinių. Patikrinkime:

Tiesioginis Gauso algoritmo etapas

2	2	-2	2	15
0	3	-1	5	8
0	0	2	0	-5.5
0	0	0	0	-0.5

$$0 \cdot x_4 = 0.5$$

Lygybė negali būti tenkinama.
Stabdome programą su pranešimu
“Sprendinių nėra”

Singuliari matrica: bendrasis atvejis, be galo daug sprendinių

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 9.1429 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 14 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & -2 & 0 & 7.1429 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

Tiesioginis Gauso algoritmo etapas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & -2 & 0 & 7.1429 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_1 = \frac{2 - x_2 - x_3 - x_4}{1} = 5.14286\text{-}p$$

$$0 \cdot x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 = 7.1429 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \cdot x_2 = 2.85714\text{e-}006 \approx 0; \quad x_2 = p$$

$$x_3 = \frac{12 - 3x_4}{-3} = \text{-}3.57143$$

$$x_4 = 3/7 = 0.428571$$

Atvirkštinis Gauso algoritmo etapas

Laikome, kad patenkinamu tikslumu gauta *tapatybė*, t.y. x2 gali būti bet koks skaičius

Singuliari matrica: bendrasis atvejis, sprendinių nėra

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 14 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & -7 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

Tiesioginis Gauso algoritmo etapas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

$$0 \cdot x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \cdot x_2 = -2.14286;$$

$$x_3 = \frac{12 - 3x_4}{-3} = -3.57143$$

$$x_4 = 3/7 = 0.428571$$

Atvirkštinis Gauso algoritmo etapas

Ši lygybė negali būti tenkinama, todėl sprendinių nėra

Singuliarios koeficientų matricos: apibendrinimas

- Parodėme, kad vykdant Gauso algoritmą, galima gauti sprendinį arba išvadą apie sprendinio nebuvimą, kai koeficientų matrica yra singuliari;
- Kai sprendinys egzistuoja, nuliniam vedančiajam elementui atitinkiantis kintamasis gali būti bet koks skaičius;
- Bet kokios kintamųjų reikšmės bendruoju atveju vaizduojamos simboliais, pvz. *pi, pj,* … . Kiti kintamieji išreiškiami skaičiais ir šiais simboliais;
- Jeigu pakanka rasti vieną sprendinį iš daugelio, bet kokias reikšmes galintiems priimti kintamiesiems skaitines reikšmes parenkame laisvai, pvz. =1

Kiti kintamųjų eliminavimu paremti algoritmai 1

Gauso algoritmas

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow x_{n,1:p},\ x_{n-1,1:p},\ldots,x_{1,1:p}$$

$$\mathbf{A} \qquad \mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{b}$$

Gauso-Žordano algoritmas

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \qquad \mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{b}$$

Atvirkštinis žingsnis nereikalingas

$\mathbf{x}$

Kiti kintamųjų eliminavimu paremti algoritmai 2

Atvirkštinės matricos algoritmas

$$\mathbf{A\,x = b}\ ; \qquad \mathbf{A^{-1}A\,x = A^{-1}b}; \qquad \mathbf{x = A^{-1}b};$$

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{X}}{\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{E}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Taikome Gauso-Žordano algoritmą

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$$

- **Vieną kartą apskaičiavę atvirkštinę matricą, galime rasti sprendinį esant bet kokiam dešinės pusės vektoriui;**
- **Tam pakanka padauginti atvirkštinę matricą iš laisvųjų narių vektoriaus**

Skaičiavimų apimtis taikant Gauso algoritmą

sudėties veiksmų skaičius $$s = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

daugybos veiksmų skaičius $$d = \frac{n(n^2+3n-1)}{3}$$

Jei *n* — didelis skaičius, tai $$s \approx d \approx \frac{n^3}{3}$$

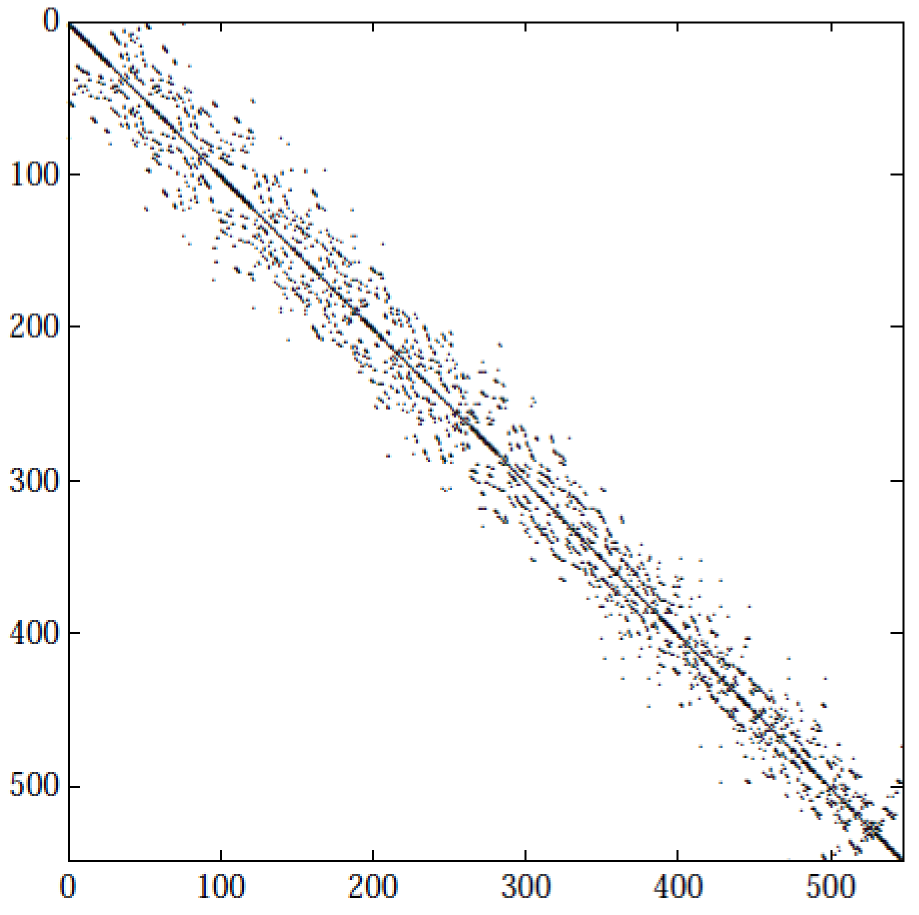
Gauso metodo skaičiavimo apimtis $$O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$$

Retosios *(sparse)* matricos 1

- Įprastai lygčių sistemos koeficientų matrica saugojama ***stačiakampiame pavidale.*** Tai reiškia, kad kompiuterio atmintyje saugomi visi koeficientai, kiekvienos lygties koeficientus (tame tarpe ir nulinius) išdėstant atskirose eilutėse;

- Pasitaiko, kad koeficientų matricoje yra daug nulinių koeficientų. Tokias matricas vadiname ***retosiomis*** . Jas saugant stačiakampiame pavidale, kompiuterio atmintis būtų panaudojama labai neekonomiškai;

Retosios *(sparse)* matricos 2



- Retosios matricos saugomos specialiuose pavidaluose, neužimant kompiuterio atminties nulinėmis reikšmėmis

Retųjų matricų saugojimo būdai 1

- ***Simetrinis*** - kai saugomas tik *viršutinis matricos trikampis.* Tai nėra retoji matrica tikrąja to žodžio prasme;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 \\ & 3 & 5 & 8 & 12 & 17 \\ & & 6 & 9 & 13 & 18 \\ & & & 10 & 14 & 19 \\ & & & & 15 & 20 \\ & & & & & 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- ***Juostinis*** – kai stačiakampiame pavidale saugoma *koeficientų juosta*;

$$0\begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}0$$

Šiuos perteklinius nulius verta saugoti

Retųjų matricų saugojimo būdai 2

- ***Bendrasis pavidalas*** (nenulinių reikšmių ir jų indeksų saugojimas);

```
A=[ 2 -1  0  0  0  0 -1;
   -1  2 -1  0  0  0  0;
    0 -1  2 -1  0  0  0;
    0  0 -1  2 -1  0  0;
    0  0  0 -1  2 -1  0;
    0  0  0  0 -1  2 -1;
   -1  0  0  0  0 -1  2]

S=sparse(A)

B=full(S)
```

```
S =

   (1,1)        2
   (2,1)       -1
   (7,1)       -1
   (1,2)       -1
   (2,2)        2
   (3,2)       -1
   (2,3)       -1
   (3,3)        2
   (4,3)       -1
   (3,4)       -1
   (4,4)        2
   (5,4)       -1
   (4,5)       -1
   (5,5)        2
   (6,5)       -1
   (5,6)       -1
   (6,6)        2
   (7,6)       -1
   (1,7)       -1
   (6,7)       -1
   (7,7)        2
```

MATLAB-e retoji matrica yra speciali *sparse* duomenų struktūra

Retųjų matricų saugojimo būdai 3

```
i=[1  2  7  1  2  3  2  3  4  3  4  5   4  5  6  5  6  7  1  6  7];
j=[1  1  1  2  2  2  3  3  3  4  4  4   5  5  5  6  6  6  7  7  7];
s=[2 -1 -1 -1  2 -1 -1  2 -1 -1  2 -1 -1  2 -1 -1  2 -1 -1 -1  2 ];
```

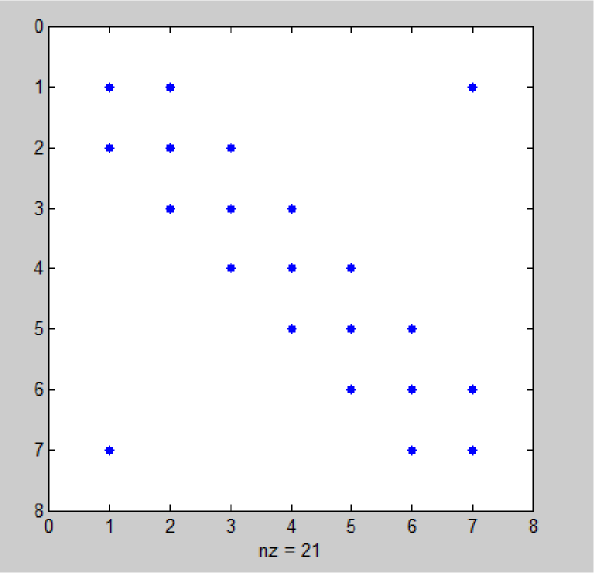
S1=sparse(i,j,s)

spy(S1)

B1=full(S1)

B1 =

2	-1	0	0	0	0	-1
-1	2	-1	0	0	0	0
0	-1	2	-1	0	0	0
0	0	-1	2	-1	0	0
0	0	0	-1	2	-1	0
0	0	0	0	-1	2	-1
-1	0	0	0	0	-1	2



S =

(1,1)	2
(2,1)	-1
(7,1)	-1
(1,2)	-1
(2,2)	2
(3,2)	-1
(2,3)	-1
(3,3)	2
(4,3)	-1
(3,4)	-1
(4,4)	2
(5,4)	-1
(4,5)	-1
(5,5)	2
(6,5)	-1
(5,6)	-1
(6,6)	2
(7,6)	-1
(1,7)	-1
(6,7)	-1
(7,7)	2

Retųjų matricų saugojimo būdai 4

- Galimi kiti ***specialūs saugojimo būdai***, įvertinantys koeficientų išdėstymo matricoje ypatumus

Retųjų matricų saugojimo būdai 5

- Ne visus lygčių sistemų sprendimo algoritmus patogu taikyti retosioms matricoms;
- **Gauso algoritmą** galima taikyti **simetrinėms** ir **juostinėms** matricoms, kadangi skaičiavimų eigoje nenulinių koeficientų išsidėstymo zona nepakinta

Gauso algoritmas juostinei *trijų įstrižainių* matricai

(i, j)

$$
\begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x & x & x & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & x & x & 0 & 0 \\
0 & 0 & x & x & x & 0 \\
0 & 0 & 0 & x & x & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & x & x
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ 0 \end{array}
\qquad\qquad
\begin{bmatrix}
0 & x & x \\
x & x & x \\
x & x & x \\
x & x & x \\
x & x & x \\
x & x & 0
\end{bmatrix}
$$

(is, js)

Indeksų perskaičiavimo formulė:

Indeksai stačiakampėje matricoje

$$is \Rightarrow i$$

$$js \Rightarrow j - i + 2$$

Indeksai juostinėje matricoje

Gauso algoritmas stačiakampei *trijų įstrižainių* matricai

i+1 eilutė pertvarkoma, atimant iš jos *i* eilutę:

galima įrašyti 0 neskaičiuojant

apskaičiuoti reikia tik šiuos elementus

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ (i) \\ (i+1) \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc:c}
x & x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\
0 & x & x & 0 & 0 & 0 & x \\
0 & 0 & x & x & 0 & 0 & x \\
0 & 0 & x & x & x & 0 & x \\
0 & 0 & 0 & x & x & x & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x
\end{array}\right]
$$

elementas nepakinta

```
% Gauso algoritmo tiesioginis etapas:
for i=1:n-1
       A1(i+1,[i+1,n+1])=A1(i+1,[i+1,n+1])-A1(i,[i+1,n+1])*A1(i+1,i)/A1(i,i);
       A1(i+1,i)=0;
end

% Gauso algoritmo atvirkstinis etapas:
x=zeros(n,1);
x(n)=A1(n,n+1)/A1(n,n);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=(A1(i,n+1)-A1(i,i+1)*x(i+1))/A1(i,i);
end
```

Gauso algoritmas juostinei *trijų įstrižainių* matricai 1

```
% Staciakampis matricos pavidalas
% Gauso algoritmo tiesioginis etapas:
for i=1:n-1
       A1(i+1,[i+1,n+1])=A1(i+1,[i+1,n+1])-A1(i,[i+1,n+1])*A1(i+1,i)/A1(i,i);
       A1(i+1,i)=0;
end

% Gauso algoritmo atvirkstinis etapas:
x=zeros(n,1);
x(n)=A1(n,n+1)/A1(n,n);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=(A1(i,n+1)-A1(i,i+1)*x(i+1))/A1(i,i);
end
```

```
% Juostinis matricos pavidalas
% Gauso algoritmo tiesioginis etapas:
for i=1:n-1
       A1(i+1,[2,4])=A1(i+1,[2,4])-A1(i,[3,4])*A1(i+1,1)/A1(i,2);
       A1(i+1,[1])=0;
end

% Gauso algoritmo atvirkstinis etapas:
x=zeros(n,1);
x(n)=A1(n,4)/A1(n,2);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=(A1(i,4)-A1(i,3)*x(i+1))/A1(i,2);
end
```

$$eilutems: \quad i \Rightarrow i;$$

$$stulpeliams: \quad j \Rightarrow j-i+2, \qquad n+1 \Rightarrow 4$$

Gauso algoritmas juostinei *trijų įstrižainių* matricai 2

i+1 eilutė pertvarkoma, atimant iš jos *i* eilutę:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ (i+1) \\ \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc:c}
0 & x & x & x \\
0 & x & x & x \\
0 & x & x & x \\
x & x & x & x \\
x & x & x & x \\
x & x & 0 & x
\end{array}\right]
\end{array}
$$

galima įrašyti 0 neskaičiuojant

apskaičiuoti reikia tik
šiuos elementus

elementas nepakinta

```
% Juostinis matricos pavidalas
% Gauso algoritmo tiesioginis etapas:
for i=1:n-1
       A1(i+1,[2,4])=A1(i+1,[2,4])-A1(i,[3,4])*A1(i+1,1)/A1(i,2);
       A1(i+1,[1])=0;
end

% Gauso algoritmo atvirkstinis etapas:
x=zeros(n,1);
x(n)=A1(n,4)/A1(n,2);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=(A1(i,4)-A1(i,3)*x(i+1))/A1(i,2);
end
```

Skaičiavimų apimtis taikant Gauso algoritmą juostinei *trijų įstrižainių* matricai 1

\+ * *

n-1 kartų

$$s = 2(n-1);\ \ d = 3(n-1)$$

```
% Juostinis matricos pavidalas
% Gauso algoritmo tiesioginis etapas:
for i=1:n-1
       A1(i+1,[2,4])=A1(i+1,[2,4])-A1(i,[3,4])*(A1(i+1,1)/A1(i,2));
       A1(i+1,[1])=0;
end

% Gauso algoritmo atvirkstinis etapas:
x=zeros(n,1);
x(n)=A1(n,4)/A1(n,2);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=(A1(i,4)-A1(i,3)*x(i+1))/A1(i,2);
end
```

* + * *

n-1 kartų

$$s = n-1;\ \ d = 2(n-1)+1$$

Skaičiavimų apimtis taikant Gauso algoritmą juostinei *trijų įstrižainių* matricai 2

	Bendruoju atveju	**Trijų įstrižainių matricai**
sudėties veiksmų skaičius	$s = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$	$s = 3(n-1)$
daugybos veiksmų skaičius	$d = \frac{n(n^2+3n-1)}{3}$	$d = 5(n-1)+1$
Jei *n* — didelis skaičius, tai	$s \approx d \approx \frac{n^3}{3}$	$s + d \approx 8n$

Gauso metodo skaičiavimo apimtis	$O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$	$O(8n)$