

# TI-konforme Quantensimulation auf dem Sierpinski-Tetraeder: Physik, Mathematik und Observablen der Jupyter-Pipeline

antaris

12. August 2025

## Executive Summary

Wir modellieren einen freien fermionischen Quantenzustand auf einem hierarchischen Graphen, der aus den Approximanten des Sierpinski-Tetraeders (ST) entsteht. Die Pipeline konstruiert die Graphgeometrie, definiert ein einfaches lokales Hamiltonian  $H$  (diskreter Laplace-Operator), berechnet daraus die Korrelationsmatrix  $C$  des Grundzustands und bestimmt durch *Ausspuren* (Teilspur) Verschränkungsentropien, Mutual Information (MI), sowie Schnittmetriken zwischen Regionen (Anzahl der Schnittkanten, mittlere Kreuzkorrelation und minimaler Graphabstand). Die Darstellung folgt der *Thermal Interpretation* (TI): Observablen sind *Erwartungswerte*  $\langle A \rangle$  des (reduzierten) Zustands; Messergebnisse approximieren diese  $q$ -Erwartungswerte im statistischen Sinn. Die Wahl des ST als *Ur-Graph* ist motiviert durch seine selbstähnliche, postkritisch endliche Fraktalstruktur, die eine exakte Hierarchie und saubere Coarse-Graining-Schritte erlaubt.<sup>1</sup>

## 1 Konstruktion des Ur-Graphen (Sierpinski-Tetraeder)

### 1.1 Geometrie und Iterierte Funktionensysteme

Der reguläre 3-Simplex mit Ecken  $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  erzeugt mittels Kontraktionen  $F_i(x) = \frac{1}{2}(x + v_i)$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , ein selbstähnliches Mengensystem. Wörter  $w = (i_1, \dots, i_\ell) \in \{0, 1, 2, 3\}^\ell$  definieren Zellen  $F_w := F_{i_1} \circ \dots \circ F_{i_\ell}$ . Der Approximant  $G_L$  auf Level  $L$  hat als Knotenmenge alle Eckpunkte der Zellen  $F_w$  mit  $|w| \leq L$ ; Kanten verbinden jeweils die 6 Ecken eines Tetraeders auf allen Skalen. Dies ist der klassische p.c.f. (postcritically finite) Zugang der Fraktalanalyse.[1, 2]

### 1.2 Diskreter Laplace-Operator und Spektralstruktur

Aus der Adjazenz  $A$  von  $G_L$  wird  $L = D - A$  (Gradmatrix  $D$ ) gebildet. Auf ST-Fraktalen existieren sowohl Dirichletformen als auch Spektralrechnungen, inkl. Spektraldezimierung; für den 3D-Tetraeder sind Laplacian und Spektrum explizit in Arbeiten über “Sierpiński simplices” bzw. “Sierpinski tetrahedron” untersucht.[3, 4, 5] Diese Struktur legitimiert den Einsatz von  $L$  als lokales, graphbasiertes Hamiltonian.

## 2 Quantenmodell und Korrelationsmatrix

### 2.1 Freies fermionisches Modell auf dem Graphen

Wir betrachten ein Zahl-erhaltendes, freies Fermionenmodell mit Einteilchen-Hamiltonian  $H = L$  (oder äquivalent  $H = -A$  bis auf Verschiebung). Für Füllung 0.5 projiziert der Grundzustand

---

<sup>1</sup>Standardreferenzen: Kigami *Analysis on Fractals*; Strichartz *Differential Equations on Fractals*; Peschel-Eisler (freie Gittermodelle); Neumaier (TI).

auf die  $M$  niedrigsten Eigenmoden  $U_{\text{occ}}$ ; die Einteilchen-Korrelationsmatrix lautet

$$C = U_{\text{occ}} U_{\text{occ}}^\dagger. \quad (1)$$

Für freie Gittermodelle trägt  $C$  alle Informationen der reduzierten Zustände. Reduktionen  $C_A$  ergeben Verschränkungsentropien und Mutual Information direkt aus dem Spektrum von  $C_A$ . [6]

## 2.2 Observablen im TI-Sinn

Die *Vertex Occupancies* sind  $\text{diag } C$ ; für eine Region  $A$  ist der reduzierte Zustand durch  $C_A$  gegeben. Die von-Neumann-Entropie

$$S(A) = - \sum_k [\lambda_k \log \lambda_k + (1 - \lambda_k) \log(1 - \lambda_k)], \quad \{\lambda_k\} = \text{spec}(C_A), \quad (2)$$

und die Mutual Information  $I(A:B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B)$  folgen unmittelbar. Im *reinen* Gesamtzustand gilt  $I(A:\text{Rest}) = 2S(A)$ . Die TI interpretiert die so erhaltenen Erwartungswerte als objektive Eigenschaften; Messungen sind *statistische Proben* solcher  $q$ -Erwartungswerte, ohne Rekurs auf eine kollabierende Born'sche Zufallsvariable. [10, 11]

## 3 Regionen, Exklusivierung und Schnittmetriken

### 3.1 Regionen aus Prefixen und exklusive Zuweisung

Die Simulation wählt disjunkte Regionen per Wort-Prefix: **RED** = ein Level-4-Tetraeder (ein Wort  $|w| = 4$ ), **YELLOW** = ein Level-2-Subfraktal (alle Zellen mit Prefix  $|w| = 2$ ), **GREEN** = globale Ecken (Level 0). Zur Vermeidung gemeinsamer Randknoten wird eine *exklusive* Zuweisung implementiert (Priorität RED > YELLOW > GREEN).

### 3.2 Kreuzkorrelationen sind nicht gleich Null trotz Disjunktheit

Auch bei disjunkten Knotenmengen bleibt  $C_{AB}$  i.a. ungleich Null, da lokale Kopplungen über Schnittkanten und delokalisierte Eigenmoden Korrelationen generieren. Daher ist  $I(A:B) > 0$  typisch; dies reflektiert die *Lokalität* des Hamiltonians und führt zu *Area Laws* (Entropie  $\sim$  Randfläche) in vielen Gittersystemen. [7, 8, 9]

### 3.3 Zusätzliche Schnittmetriken

Neben  $S$  und  $I$  werden drei Graphmetriken ausgewertet:

- **cut\_edges**( $A, B$ ): Anzahl der Kanten mit einem Ende in  $A$ , dem anderen in  $B$  (Diskretisierung der Schnittfläche).
- $\langle |C| \rangle_{\text{cross}}(A, B)$ : Mittelwert der absoluten Einträge im Kreuzblock  $C_{AB}$ .
- $d_{\min}(A, B)$ : Minimaler Graphabstand (Breitensuche). Kleine  $d_{\min}$  korreliert mit größerem  $I(A:B)$ .

Diese Größen machen die Kopplung *geometrisch* (Kanten, Abstand) und *quantentheoretisch* (Korrelation) sichtbar.

## 4 Birth-Level-Partition und Coarse-Graining

Die Knoten werden nach *Geburtslevel*  $\ell$  (erstes Auftreten in der IFS-Hierarchie) gruppiert. Die Entropie  $S(\ell)$  und  $MI(\ell:\text{Rest})$  charakterisieren, wie stark neu auftauchende Skalen korreliert sind. Auf hierarchischen Gittern spiegelt sich die Kopplung typischerweise in (fraktalen) Flächenmaßen wider; dies ist der Bereich, in dem Area-Law-Phänomenologie mit fraktaler Randdimension zusammenkommt. [7]

## 5 Darstellung und Geometrieausrichtung

Für die 3D-Plots wird die ST-Basisfläche in die  $xy$ -Ebene rotiert (Ausrichtung der Flächennormale auf  $+z$ ). **GREEN** wird als äußeres Drahtgitter gezeichnet; **RED** und **YELLOW** erhalten zusätzlich farbige Außenkanten (konvexe Hüllkanten ihrer je 4 Ecken). Titel-Textboxen enthalten alle relevanten Observablen und Schnittmetriken.

## 6 Physikalische Einordnung (QFT-Bild, TI, Nichtlokalität)

### 6.1 Standard-QFT auf Graphen als effektive Diskretisierung

Das freie Fermionenmodell auf  $G_L$  ist die diskrete Analogie eines freien Dirac/Fermionfelds auf einer nichttrivialen Geometrie. Für lokale Hamiltonians führen Lieb–Robinson–Schränken zu einer effektiven Lichtkegelstruktur und begründen die Entstehung von Area Laws.[9, 12] Unsere numerischen  $I(A:B)$  folgen genau dieser Logik: mehr Schnittkanten (größere “Kontaktfläche”)  $\Rightarrow$  größeres  $I$  und größere  $\langle |C| \rangle_{\text{cross}}$ .

### 6.2 Bezug zur Thermal Interpretation (TI)

In der TI sind Zustände primär durch ihre *Erwartungswerte* beschrieben; Reduktionen (Teilspuren) modellieren das Ignorieren von Freiheitsgraden. Unsere *Ausspuren* der ST-Level und Teilmengen illustriert diese Sicht:  $S$ ,  $I$  und Korrelationsblöcke entstehen aus dem *einen* (reinen) globalen Zustand durch Einschränkung der zugänglichen Observablen. Messungen sind in der TI Näherungen an diese  $q$ -Erwartungswerte; die hier gezeigten Größen sind somit *physikalische Eigenschaften* der reduzierten Systeme, nicht Resultate eines stochastischen Kollapses.[10, 11]

### 6.3 Nichtlokalität vs. Bell

$C_{AB} \neq 0$  und  $I(A:B) > 0$  bedeuten Verschränkung/Korrelation, nicht automatisch eine Bell-Verletzung. Für Bell-Nichtlokalität bräuchte man zusätzlich geeignete Observablenfamilien und die Verletzung einer Bell-Ungleichung (z. B. CHSH). Unsere Größen liefern jedoch die strukturelle Grundlage, aus der solche Effekte in geeigneten Setups erwachsen können (lokale Kopplung, endliche Ausbreitung, hierarchische Geometrie).[9, 12]

## 7 Warum ausgerechnet der Sierpinski-Tetraeder als Ur-Graph?

1. **Hierarchie und Selbstähnlichkeit:** Der ST ist p.c.f. selbstähnlich; er besitzt eine exakte Hierarchie von Zellen, die ein *sauberes Coarse-Graining* erlaubt – ideal für die schrittweise TI-Reduktion (Ausspuren) und für Renormierungsbilder.[1, 2]
2. **Analytische Zugänglichkeit:** Für ST-Strukturen existieren Dirichletformen, Laplace-Operatoren und Spektraltheorie (inkl. Spektraldezimierung und numerisch stabilen Schemata), auch spezifisch für den 3D-Tetraeder.[3, 4, 5]
3. **Zwischen Dimensionen:** Der ST hat fraktale Dimension  $d_f \in (2, 3)$ ; *Randflächen* sind selbst fraktal. Damit lassen sich Area-Law-Phänomene *und* fraktale Geometrie in einem Minimalmodell koppeln.[7]
4. **Minimaler 3D-Ur-Graph:** Vier Ecken, sechs Kanten, klare Topologie. Er ist klein genug, um alles sichtbar zu machen, und reich genug, um nichttriviale Korrelationen und hierarchische Skalen zu tragen.

## 8 Was die Simulation besonders macht

- **TI-konform:** Alle Größen sind *Erwartungswert-basierte* Observablen; Reduktion  $\Rightarrow S, I, C_{AB}$ .
- **Geometrie  $\leftrightarrow$  Korrelation:** Gleichzeitige Ausgabe von  $I(A : B)$ ,  $\langle |C| \rangle_{\text{cross}}$ ,  $d_{\text{min}}$  und  $\text{cut\_edges}$ .
- **Hierarchische Auswertung:** Birth-Level-Entropien zeigen Skalenaufbau der Korrelationen.
- **Exklusive Regionen:** Streng disjunkt, dennoch  $I > 0$  wegen lokaler Kopplung über Schnittkanten — anschauliche “Quasi-Nichtlokalität” ohne Überlappung.
- **Reproduzierbarkeit:** Vollständige Jupyter-Skripte, große PNGs/GIF, CSVs für Weiteranalyse.

## 9 Grenzen und nächste Schritte

Das Modell ist frei (Gaussian). Nächste Schritte: wechselwirkende Modelle (Mean-Field oder Hubbard auf ST), zeitabhängige Dynamik zur Ausbreitung von Korrelationen (Lieb-Robinson-Lichtkegel), alternative Füllungen, sowie explizite Bell-Setups auf disjunkten Regionen des ST.

## Reproduzierbarkeit

Alle genannten Artefakte

```
static_colored_obs_exclusive.png,  
levels_S_MI.png,  
regions_observables_exclusive.csv,  
pairs_observables_exclusive.csv,  
levels_observables.csv,  
static_colored_obs_exclusive_rotate.gif
```

entstehen mit  
`st_pipeline_metrics.py`.

Parameter wie Level  $L$ , Prefixe und Exklusivierung sind im Script einfach anpassbar.

## Literatur

- [1] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge Univ. Press (2001).
- [2] R. S. Strichartz, *Differential Equations on Fractals: A Tutorial*, Princeton Univ. Press (2006).
- [3] R. S. Strichartz, “The Laplacian on the Sierpinski gasket via the method of averages,” *Pacific J. Math.* **201** (2001) 241–257.
- [4] N. Riane, C. David, “Laplacian on the Sierpinski tetrahedron,” arXiv:1703.05793 (2017).
- [5] N. Riane, “The finite volume method on Sierpiński simplices,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **89** (2020) 105310.

- [6] I. Peschel, V. Eisler, “Reduced density matrices and entanglement entropy in free lattice models,” *J. Phys. A* **42** (2009) 504003.
- [7] J. Eisert, M. Cramer, M. B. Plenio, “Area laws for the entanglement entropy — a review,” arXiv:0808.3773; *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 277.
- [8] M. B. Hastings, “An area law for one dimensional quantum systems,” *J. Stat. Mech.* (2007) P08024.
- [9] E. H. Lieb, D. W. Robinson, “The finite group velocity of quantum spin systems,” *Commun. Math. Phys.* **28** (1972) 251–257.
- [10] A. Neumaier, “Foundations of quantum physics II. The thermal interpretation,” arXiv:1902.10779 (2019).
- [11] A. Neumaier, “Foundations of quantum physics IV. More on the thermal interpretation,” arXiv:1904.12721 (2019).
- [12] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio, “Area laws for the entanglement entropy,” *Rev. Mod. Phys.* **82**, 277–306 (2010). doi:10.1103/RevModPhys.82.277; arXiv:0808.3773.