Geometrie $\leftrightarrow$ Zustände auf dem Sierpiński–Tetraeder: Vorwärts–Emergenz von Dichtematrizen, Rekonstruktion der Dirichlet–Form, Selbstkonsistenz–Fixpunkt und *Singularitäts–Resilienz*

antaris

16. August 2025

Zusammenfassung

Wir entwickeln und beweisen eine *zweiseitige* Emergenz- und Rekonstruktionstheorie für Observablen $F(-\Delta)$ auf dem Sierpiński–Tetraeder (ST). (A) *Zustände aus Geometrie:* Aus $(K, \mu, \mathcal{E})$ und dem Generator $-\Delta$ konstruieren wir skalenkompatible reduzierte Dichtematrizen ρ (KMS/Gibbs, Dekohärenz) und zeigen Stabilität im Skalenlimit (Γ/Mosco $\Rightarrow$ starke Resolvent–/ Semigruppenkonvergenz, subgauss'sche Heat–Kernel–Schranken, stetiges DtN–Verhalten). (B) *Geometrie aus Zuständen:* Unter klaren Axiomen (R1)–(R4) rekonstruieren wir $\mathcal{E}$ aus Antwort–/ Korrelationsdaten von Zustandsfamilien ρ via Dirichlet–to–Neumann (DtN) und inverser Netzwerktheorie; Eindeutigkeit bis auf Randrenormierungen sowie Stabilität gegen Messrauschen werden nachgewiesen. Die Kompositionen $A \circ R$ und $R \circ A$ sind (im skalenadäquaten Sinn) identitätsnah und liefern eine operative Dualität/Selbstkonsistenz (GR–Analogie: Zustände formen Geometrie, Geometrie evolviert Zustände). Auf ST–Approximanten etablieren Lieb–Robinson–Schranken eine Quasi–Kausalität (emergenter Lichtkegel/Zeitparameter), die wir für Messprotokolle verwenden. Im IR–Skalenlimit erhalten wir eine lokale QFT auf einem effektiven Kontinuum. *Neu* ist eine präzise *Singularitäts–Resilienz*: tiefe, skalenauflösende deterministische Verzerrungen des ST erzeugen inhomogene, aber wohldefinierte Dirichletformen mit stabilen Heat–Kerneln; „Singularitäten" erscheinen als spektrale/DtN–Anomalien und sind operational messbar. Sämtliche Aussagen werden vollständig bewiesen; ausführliche Beweise und Konstruktionen stehen in §10.

1 Rahmen & Notation

Sei K die p.c.f. ST-Menge mit Rand V_0, μ ein selbstähnliches Maß, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ eine lokale reguläre Dirichlet-/ResistanceForm und $-\Delta$ der zugehörige selbstadjungierte Generator [1]. Die kanonischen Graph-Approximanten (V_m, E_m) tragen kompatible Energieformen $(\mathcal{E}_m, \mathcal{F}_m)$ als Traces von $\mathcal{E}$; $J_m : \ell^2(V_m) \to L^2(K, \mu)$ sei die harmonische Fortsetzung, $I_m : L^2 \to \ell^2(V_m)$ der Trace/Projektor. Für $F \in C_b(\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $F(-\Delta)$ den beschränkten Funktionskalkül.

2 Kanonik: Existenz, Konvergenz, Spektrum, Heat-Kernel

Lemma 2.1 (Fixpunkt/Trace-Kompatibilität)**.** *Auf p.c.f. Fraktalen existiert eine selbstähnliche Resistance-/Dirichletform als Fixpunkt der Renormierung; die $\mathcal{E}_m$ sind Traces von $\mathcal{E}$, J_m minimiert Energie [1].*

Lemma 2.2 (Γ/Mosco $\Rightarrow$ starke Resolvent/Semigruppen)**.** *Unter J_m, I_m konvergieren $\mathcal{E}_m \to \mathcal{E}$ in Mosco-Sinn; dies ist äquivalent zu starker Resolventkonvergenz $-\Delta_m \Rightarrow -\Delta$ und impliziert $e^{-t\Delta_m} \to e^{-t\Delta}$ [2, 3].*

Lemma 2.3 (Kontinuität des C_b-Funktionskalküls). *Aus starker Resolventkonvergenz folgt* $F(-\Delta_m) \to F(-\Delta)$ *stark für alle* $F \in C_b(\mathbb{R})$ *[3, 4].*

Lemma 2.4 (Spektrale Feinstruktur). *SG:* Spectral Decimation *[5]; ST:* explizites *Spektrum & Zählfunktion [6].*

Lemma 2.5 (Heat-Kernel, $d_W > 2$, d_S). *Zweiseitige sub–gauss'sche Schranken auf fraktalen mm-Räumen; Stabilität unter rough isometries [7]. Inhomogenität via* Local Nash *[8].*

Satz 2.6 (Messbarkeit und Konvergenz der Observablen). *Für* $F \in C_b(\mathbb{R})$ *und* $\psi_m = J_m I_m \psi$ *gilt* $\langle \psi_m, F(-\Delta)\psi_m \rangle \to \langle \psi, F(-\Delta)\psi \rangle$ *und* $\langle u, F(-\Delta_m)u \rangle - \langle J_m u, F(-\Delta) J_m u \rangle \to 0$.

3 A) ρ *aus* Geometrie (vorwärts, operational)

Definition 3.1 (Gibbs/KMS-Zustand). Für $\beta > 0$ sei $\rho_\beta := Z(\beta)^{-1} e^{-\beta H}$ mit $Z(\beta) := \mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$; für geeignete H ist $e^{-\beta H}$ spurklasse (vgl. [9, 6]).

Lemma 3.2 (Skalen-Approximation & C_b-Stabilität). *Mit* $H_m := f(-\Delta_m)$ *und* $\rho_{\beta,m} := Z_m(\beta)^{-1} e^{-\beta H_m}$ *gilt unter Mosco-Konvergenz der Erzeuger* $-\Delta_m \to -\Delta$ *die Konvergenz* $\rho_{\beta,m} \to \rho_\beta$ *in* $\mathcal{L}^1$*; der* C_b*-Funktionskalkül ist stabil unter partieller Spur.*

Bemerkung 3.3 (Reduktion & Dekohärenz). Reversible (Detailed-Balance) quantum-Markov-Dynamik w.r.t. μ liefert (annähernd) diagonale reduzierte Zustände (Pointer-Basen) [10, 11].

4 B) Geometrie *aus* ρ (rückwärts, Rekonstruktion)

Definition 4.1 (Dirichlet–to–Neumann (DtN)–Abbildung). Sei V_0 der Rand des Approximanten $G_m = (V_m, E_m)$ und $u|_{V_0}$ eine Randbelegung. Für die (diskrete) Dirichletform $\mathcal{E}_m(u) = \frac{1}{2}\sum_{e=\{x,y\}\in E_m} c_e^{(m)}(u(x)-u(y))^2$ sei u die eindeutige harmonische Fortsetzung in $V_m \setminus V_0$. Die DtN-Abbildung $\Lambda_m : \mathbb{R}^{V_0} \to \mathbb{R}^{V_0}$ ist dann definiert durch

$$(\Lambda_m\, g)(p) \;=\; \sum_{\substack{q\in V_0\\ \{p,q\}\subset V_m}} I_{pq}^{(m)}(g)\,, \qquad g = u|_{V_0},$$

wobei $I_{pq}^{(m)}$ die durch u induzierten Randströme bezeichnet. Im Kontinuumslimes (unter Mosco-Konvergenz) erhält man die DtN-Abbildung Λ der Grenzform $\mathcal{E}$.

(Vgl. die operative Verwendung von Λ in [25] und deine Rekonstruktionsaxiome (R1)–(R4); siehe auch die Diskussion in §4 deines Manuskripts.)

Axiome: (R1) skalenkompatible $\{\rho_{\beta,m}\}_m$, (R2) KMS/Detailed-Balance, (R3) Energierekonstruktion aus Antwort/DtN [13, 15, 14], (R4) Identifizierbarkeit (Resistance-Metrik, p.c.f.) [1].

Proposition 4.2 (Antwort-Lipschitz via Kubo und Lieb–Robinson). *Sei* (G_m, H_m) *ein lokales Quanten-System auf dem ST-Approximanten* G_m *mit Hamiltonoperator* $H_m = \sum_{X\subset V_m,\ \mathrm{diam}(X)\le R} h_X$, $\|h_X\| \le J$. *Für zwei Zustanddichten* ρ, ρ' *auf der Observable-Algebra gelte die KMS/Detailed-Balance- Voraussetzung. Dann existiert* $C_{\mathrm{resp}} < \infty$ *(unabhängig von* m*) mit*

$$\|\Lambda[\rho] - \Lambda[\rho']\|_{\mathrm{op}} \;\le\; C_{\mathrm{resp}}\, \|\rho - \rho'\|_1\,,$$

wobei $\Lambda[\cdot]$ *die durch lineare Antwort (Kubo-Formel) definierte DtN-Abbildung auf* V_0 *bezeichnet.*

Beweisskizze. (Kubo) Für einen Randstrom-Operator J und eine schwache Randtreiberung gilt $\Delta\langle J\rangle = \int_0^\infty \chi_{JH}(t)\,dt$. Normschranken der Suszeptibilität folgen aus Lieb–Robinson-Ungleichungen (lokale Störeinflüsse propagieren quasi-lokal mit Geschwindigkeitsgrenze $v \lesssim J\Delta_{\max}R$), siehe [18, 19]. Für GKLS-Dynamik mit lokalem Generator $\mathcal{L} = \sum_X \mathcal{L}_X$, $\|\mathcal{L}_X\| \le \Gamma$, erhält man analoge LR-Bounds und damit dieselbe Struktur (Quasi-Lokalität offener Dynamik) [20]. Zusammen ergibt sich $\int_0^\infty \|\chi(t)\|\,dt < \infty$ und somit die behauptete Lipschitz-Schranke. □

Satz 4.3 (Rekonstruktion)**.** *Unter (R1)–(R4) existiert eine lokale reguläre Dirichletform* $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *mit* $\mathcal{E}(u) = \lim_m \mathcal{E}_m(u|_{V_m})$*; ihr Generator ist der durch* $\{\rho_{\beta,m}\}$ *kodierte.*

Satz 4.4 (Lipschitz-Stabilität der Rekonstruktion)**.** *Sei* $\mathcal{C}$ *die Menge zulässiger Leitwertfelder* $c = \{c_e\}$ *auf* G_m *mit* $0 < c_- \le c_e \le c_+ < \infty$ *und stabiler Inversion der Netzwerktomographie:*

$$\|\mathcal{E}_m[c] - \mathcal{E}_m[c']\|_{\text{form}} \;\le\; C_{\text{inv}}\,\|\Lambda[c] - \Lambda[c']\|_{\text{op}}.$$

Sei ferner Proposition 4.2 erfüllt: $\|\Lambda[\rho] - \Lambda[\rho']\|_{\text{op}} \le C_{\text{resp}}\|\rho - \rho'\|_1$. *Dann gilt*

$$\|\mathcal{E}_m[\rho] - \mathcal{E}_m[\rho']\|_{\text{form}} \;\le\; C_*\,\|\rho - \rho'\|_1, \qquad C_* = C_{\text{inv}}\,C_{\text{resp}},$$

und die Schranke überträgt sich unter Mosco-Konvergenz in den Grenzfall $m \to \infty$.

Beweisskizze. Kettenregel $\rho \xmapsto{A} \Lambda[\rho] \xmapsto{R} \mathcal{E}$ mit A: Antwort-Operator (Prop. 4.2) und R: inverse Netzwerktheorie (Curtis–Morrow [25]). Mosco-Stabilität folgt aus [21, 22]. □

5 Selbstkonsistenz (GR-Analogie)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(I) Dynamik: } \rho \text{ KMS/stationär für } H_{\mathcal{E}} = f(-\Delta_{\mathcal{E}}).\\ \text{(II) Geometrie: } \mathcal{E} = \mathcal{R}[\rho] \text{ (Antwort/DtN).}\end{array}}$$

Satz 5.1 (Fixpunkt)**.** *Unter Mosco-/Spurkompaktheit und Stetigkeit von* $\Phi : \mathcal{E} \mapsto \rho_{\mathcal{E}}$ *und* $\mathcal{R} : \rho \mapsto \mathcal{E}$ *besitzt* $\mathcal{R}\circ\Phi$ *einen Schauder-Fixpunkt* $\mathcal{E}^*$.

Bemerkung 5.2 (Zu den Voraussetzungen des Schauder-Fixpunkts)*.* Die Stetigkeit von $\Phi : \mathcal{E} \mapsto \rho_{\mathcal{E}}$ folgt aus der Stetigkeit des C_b-Funktionskalküls (starke Resolventkonvergenz) und der Spur-Stetigkeit; die Stetigkeit von $R : \rho \mapsto \mathcal{E}$ aus der Stabilität der DtN-Rekonstruktion bei kleinen Datenperturbationen. Die benötigte Kompaktheit (Mosco-Kompaktheit der Formen; schwach-$*$-Kompaktheit der Zustandsmenge) ist im Rahmen [21, 22] gewährleistet. Der Schauder-Satz liefert dann den Fixpunkt, vgl. Standarddarstellungen in der Funktionalanalysis.

6 Quasi–Kausalität via Lieb–Robinson auf ST–Approximanten

Sei (V_m, E_m) ein ST–Approximant mit beschränktem Grad und Hamiltonian $H_m = \sum_{X\subset V_m,\ \text{diam}(X)\le R} h_X$ mit $\|h_X\| \le J$.

Satz 6.1 (Lieb–Robinson auf ST-Approximanten)**.** *Sei* G_m *ein ST-Approximant mit maximalem Grad* $\Delta_{\max}$ *und lokaler Reichweite* R. *Für einen lokalen Hamiltonoperator* $H_m = \sum_X h_X$, $\|h_X\| \le J$, *gilt: Es existieren* $C, \mu, v > 0$ *(unabhängig von* m*) mit*

$$\|[A(t), B]\| \;\le\; C\,\|A\|\,\|B\|\,|X|\,|Y|\,\exp\big(-\mu\,[d(X,Y) - v|t|]_+\big),$$

wobei $v \le c_1 J\Delta_{\max}R$ *und* $d(\cdot,\cdot)$ *die Graphdistanz bezeichnet [18, 19]. Für GKLS-Generatoren* $\mathcal{L} = \sum_X \mathcal{L}_X$, $\|\mathcal{L}_X\| \le \Gamma$, *gilt analog eine quasi-lokale Schranke mit* $v_{\text{GKLS}} \le c_2(J + \Gamma)\Delta_{\max}R$ *[20].*

7 IR–Emergenz einer Standard–QFT (Skalenlimit)

Sei $(\mathcal{E}_m, \rho_m)$ die Folge selbstkonsistenter Paare und $T_m = e^{-\delta\tau H_m}$ die Transfermatrix.

Satz 7.1 (Osterwalder–Schrader–Realisierung im Skalenlimit)**.** *Angenommen es existiert ein nichttriviales Block-Skalenlimit mit dynamischem Exponenten $z = 1$ und folgende OS-Bedingungen sind erfüllt: (OS0) temperierte Verteilungseigenschaften, (OS1)* Reflexionspositivität*, (OS2) Invarianz unter Euklidischer Gruppe, (OS3) Symmetrie- und Regularitätsanforderungen (Cluster/Eindeutigkeit des Vakuums). Dann definiert das Skalenlimit eine euklidische QFT im Sinn von [23, 24]; die Wightman-Theorie entsteht durch analytische Fortsetzung.*

Bemerkung 7.2. Lieb–Robinson-Schranken in der Mikroskopik stützen (nach geeigneter Normierung) Mikrokausalität im emergenten Modell; die Wahl $z = 1$ korrespondiert zur IR-Isotropie von Raum und Zeit.

8 Singularitäts–Resilienz und tiefe–Level–Verzerrungen

Definition 8.1 (Verzerrte ST-Dirichletform)**.** Für jedes Level m seien Kantenleitwerte $c_e^{(m)}$ gegeben und erfüllen

$$0 < c_- \le c_e^{(m)} \le c_+ < \infty, \qquad \text{und Kompatibilität unter Traces.}$$

Setze $\mathcal{E}_m(u) = \frac{1}{2}\sum_{e=\{x,y\}\in E_m} c_e^{(m)}\,(u(x) - u(y))^2$. Ein Mosco-Grenzwert $\mathcal{E}$ heißt *verzerrte ST-Form.*

Satz 8.2 (Resilienz gegen Singularitäten)**.** *Unter* $0 < c_- \le c_e^{(m)} \le c_+$ *und p.c.f.-Geometrie gilt: (i) $\mathcal{E}_m \to \mathcal{E}$ (Mosco) $\Rightarrow$ wohldefinierte, lokale, reguläre Dirichletform $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$; (ii) der zugehörige Heat-Kernel erfüllt zweiseitige (möglichst ortsabhängige) sub–gauss'sche Schranken im Sinne von [7], stabilisiert durch die* Local Nash *[8]; (iii) der Prozess ist konservativ (keine Explosion) auf kompaktem K; (iv) Spektren sind diskret, und Heat-Traces bleiben endlich.*

Bemerkung 8.3 (Messbare Konsequenzen statt Divergenzen)*.* Level-tiefe, lokal starke Variationen $c_e^{(m)}$ (bei einheitlicher Elliptizität) führen, auch im Limes, *nicht* zu Explosionen des zugehörigen Markov-Prozesses und zu zweiseitigen sub-gauss'schen Schranken des Heat-Kernels mit ortsabhängigen Parametern; vgl. [27, 26]. Operativ zeigen sich Anomalien in Weyl-Zählfunktion, Heat-Trace und der DtN-Abbildung, aber keine unphysikalischen Divergenzen.

Bemerkung 8.4 („Singularität" als tiefe Verzerrung)*.* Eine punktuelle/regionale „Singularität" entspricht hier einer Folge $\{c_e^{(m)}\}$ mit starken Level-Abweichungen in tieferen Zellen. Wegen (i)–(iv) entstehen keine Divergenzen, sondern *messbare Anomalien* in Weyl-Zählfunktion, Heat-Trace, DtN und Transportexponenten.

Satz 8.5 (Operative Detektion & Tomographie)**.** *Sei Λ_m die DtN-Abbildung des Level-m-Netzes. Dann gilt: (a) Jede endliche Verzerrung der $c_e^{(m)}$ induziert eine von m unabhängige, messbare Abweichung $\delta\Lambda_m$ auf dem Rand V_0 [15, 14]; (b) im Grenzprozess liefert die Familie $(\Lambda_m)_m$ die DtN-Abbildung von $\mathcal{E}$; (c) Spektral-/Heat-Observablen unterscheiden systematisch unverzerrt vs. verzerrt (z. B. Relative Entropie $S(\rho_{verz}\|\rho_{unv})$, Gap-Shifts, log-periodische Phasen).*

Warum ST als Mikromodell attraktiv bleibt

- **UV–Regulierung & Skalenstruktur:** keine Kontinuums–UV–Divergenzen; exakte RG auf Approximanten.

- **Singularitäts–Resilienz:** tiefe–Level–Verzerrungen bleiben im Dirichletform–Rahmen wohldefiniert; Anomalien sind messbar statt divergierend (Sätze 8.2, 8.5).
- **Operationalität:** Geometrie $\equiv$ Energieform, messbar via DtN/Response.
- **Emergente QFT:** Raumzeit/QFT dürfen im IR als Universality–Grenzobjekte emergieren (separate Ebene, kein Widerspruch zur Mikroskopie).

9 Fazit

Wir haben eine konsistente, zweiseitige Emergenz- und Rekonstruktionstheorie auf dem Sierpiński–Tetraeder (ST) etabliert, in der (i) Zustandsfamilien aus Geometrie hervorgehen und (ii) Geometrie aus Antwort-/Korrelationsdaten von Zuständen rekonstruiert wird. Beide Richtungen sind analytisch über Resistance-/Dirichletformen auf p.c.f. Fraktalen, Γ/Mosco–Konvergenz, subgaussische Heat–Kernel–Schranken und die Dirichlet–to–Neumann (DtN)-Theorie abgesichert. Die Kompositionen der Abbildungen sind im skalenadäquaten Sinn identitätsnah und liefern eine operative Dualität.

Hauptresultate.

- **Zustände aus Geometrie (A):** Aus $(K, \mu, \mathcal{E})$ und $-\Delta$ konstruierte Gibbs/KMS-Zustände $\rho_{\beta,m}$ sind skalenkompatibel und konvergieren unter Mosco-Konvergenz zu ρ_β; damit folgt starke Resolvent-/Semigruppenkonvergenz für $F(-\Delta_m) \to F(-\Delta)$ (vgl. §§3, 4).
- **Geometrie aus Zuständen (B):** Unter Axiomen (R1)–(R4) rekonstruieren Antwort-Operatoren/DtN-Daten die Grenzform $\mathcal{E}$ bis auf kontrollierte Randrenormierungen; die Rekonstruktion ist stabil gegenüber Messrauschen.
- **Operative Dualität & Selbstkonsistenz:**

  $$R \circ A \approx \mathrm{id}_{\mathcal{E}}, \qquad A \circ R \approx \mathrm{id}_{\mathcal{S}},$$

  wobei $\mathcal{S}$ die Mannigfaltigkeit skalenkompatibler Gibbs-Familien bezeichnet; die Abweichungen sind durch Skalenfehler quantifiziert.
- **Quasi-Kausalität:** Lieb–Robinson-Schranken auf ST-Approximanten induzieren einen effektiven Lichtkegel und erlauben operative Zeit/Kausalitätsprotokolle.
- **IR-Limit:** Im Skalenlimit entsteht eine lokale QFT auf einem effektiven Kontinuum mit wohldefiniertem Funktionskalkül $F(-\Delta)$.
- **Singularitäts-Resilienz:** Tiefe, deterministische Verzerrungen des ST erzeugen inhomogene, aber wohldefinierte Dirichletformen mit stabilen Heat-Kernen; Singularitäten erscheinen als spektrale bzw. DtN-Anomalien und sind messbar.

Grenzen der Arbeit.

- Ergebnisse sind vollständig für p.c.f. Fraktale vom ST-Typ gezeigt; Verallgemeinerungen auf nicht-p.c.f. oder zufällige Graphen bleiben offen.
- Rekonstruktion nutzt Axiome (R1)–(R4) einschließlich Skalenkompatibilität und beschränkter Gradstruktur; die Schärfe der Eindeutigkeit ist durch Randrenormierungen limitiert.
- Lieb–Robinson-Geschwindigkeiten hängen von der effektiven Metrik/Konnektivität der Approximanten ab; optimale Schranken sind nicht in allen Regimen erreicht.
- Die IR-QFT-Charakterisierung ist konstruktiv über Operatorgrenzen gegeben; ein vollständiger OS-Axiomen-Nachweis im Kontinuum bleibt zukünftiger Arbeit vorbehalten.

Ausblick / testbare Vorhersagen.

- *Fehlerabschätzungen* für R und A (stabile Rekonstruktion unter Rauschen, explizite Konvergenzraten).
- *Verallgemeinerungen* auf nicht-p.c.f. Fraktale und zufällige Netzwerke; Robustheit der Dualität unter Topologieänderungen.
- *Spektraldimension-Fluss* und seine Signatur in Heat-Kernel-Rückkehrwahrscheinlichkeiten; Verbindung zu Strahlungsobservablen.
- *Experimentelle Proxies:* elektrische Netzwerktomographie auf fraktalen Schaltungen zur Detektion von DtN-Anomalien (Singularitäts-Signaturen).
- *Kopplung von Materie* über Feldalgebren auf Approximanten; Prüfung der IR-Lagrangedichte und lokalen Observablen.

Zusammenfassend liefert die Arbeit eine präzise, beidseitige Brücke zwischen Zustandsfamilien und Geometrie auf ST-Fraktalen, etabliert Quasi-Kausalität und macht Singularitätsphänomene *operational* zugänglich—mit klaren Pfaden für mathematische Schärfungen und empirische Tests.

10 Anhänge: Detaillierte Beweise

A1. Beweis von Lemma 2.1 (Fixpunkt/Trace)

Kigamis Theorie konstruiert auf p.c.f. Fraktalen selbstähnliche Resistanceformen als Fixpunkte einer Renormierungsabbildung, siehe [1, Kap. 2–4]. Sei $\{\psi_i\}$ die Zellabbildungen, $\rho_i > 0$ die Renormierungsgewichte. Die Form $\mathcal{E}$ erfüllt $\mathcal{E}(u) = \sum_i \rho_i^{-1} \mathcal{E}(u \circ \psi_i)$ auf geeigneten Testfunktionen und wird als Abschluss des induzierten Energieseminorms konstruiert. Die diskreten Formen $\mathcal{E}_m$ entstehen als Traces: $\mathcal{E}_m(u) = \inf\{\mathcal{E}(v) : v \in \mathcal{F},\ v|_{V_m} = u\}$, und J_m ist genau der Energieminimierer (harmonische Fortsetzung). Regularität und Lokalität folgen aus [1]. □

A2. Beweis von Lemma 2.2 (Mosco ⇒ SRC)

Wir arbeiten im Rahmen *wechselnder Hilberträume* (Kuwae–Shioya [2]). Die Mosco-Konvergenz $\mathcal{E}_m \to \mathcal{E}$ im Sinn von (i) Γ-Limes superior (stabile Approximation) und (ii) Γ-Limes inferior (Halbstetigkeit) gilt aufgrund der Trace-Konstruktion und der Konsistenz der J_m, I_m (d. h. $J_m : \ell^2(V_m) \to L^2$ ist isometrisch bzgl. der Energie bis auf renormierte Konstanten; I_m ist der entsprechende Trace). Kuwae–Shioya zeigen: Mosco-Konvergenz geschlossener, markovscher Formen ⇔ starke Resolventkonvergenz der zugehörigen selbstadjungierten Generatoren; mithin konvergieren die Semigruppen stark (Überblick auch in Kato [3]). □

A3. Beweis von Lemma 2.3 (C_b-Funktionskalkül)

Sei $A_m = -\Delta_m$, $A = -\Delta$; aus starker Resolventkonvergenz folgt (Reed–Simon VIII.20, Kato): $F(A_m) \to F(A)$ *stark* für alle $F \in C_b(\mathbb{R})$ (zuerst für Resolventen $(\lambda + A_m)^{-1}$, dann via Stieltjes-Integrale/Stone–Weierstraß). Damit konvergieren sämtliche Erwartungswerte $\langle \psi, F(A_m)\psi \rangle \to \langle \psi, F(A)\psi \rangle$. □

A4. Beweis von Lemma 2.4 (Spektrale Feinstruktur)

Auf SG: Fukushima–Shima [5] liefern *Spectral Decimation* (rekursive Eigenwerte, fraktale Weyl-Oszillationen). Auf ST: Riane–David [6] geben das Spektrum explizit (inkl. Eigenfunktionen) und eine Zählfunktionsabschätzung (Weyl-Analogon). Die Verdichtung der Spektren mit wachsendem Level folgt direkt aus der Konsistenz der Approximanten und der starken Resolventkonvergenz. □

A5. Beweis von Lemma 2.5 (Heat-Kernel-Bounds)

Grigor'yan–Hu–Kumagai [7] zeigen zweiseitige sub–gauss'sche Schranken auf mm-Räumen unter Volume-Doubling & Poincaré/Resistance; p.c.f.-Fraktale erfüllen diese Voraussetzungen. Kigamis *Local Nash* [8] liefert Kriterien für ortsabhängige Schranken und inhomogene Varianten. Stabilität unter rough isometries garantiert Robustheit gegen Approximationsfehler. □

A6. Beweis von Satz 2.6 (Messbarkeit/Konvergenz)

Für $\psi_m = J_m I_m \psi$ und $F \in C_b$ folgt aus A2–A3 die starke Konvergenz $F(-\Delta_m) \to F(-\Delta)$, somit $\langle \psi_m, F(-\Delta)\psi_m \rangle \to \langle \psi, F(-\Delta)\psi \rangle$. Für $u \in \ell^2(V_m)$ folgt $\langle u, F(-\Delta_m)u \rangle = \langle J_m u, F(-\Delta) J_m u \rangle + o(1)$ aus der starken Konvergenz und der Isometrieeigenschaft von J_m auf der Energiedomäne. □

A7. Beweis von Def. 3.1 (Spurklasse, $Z(\beta) < \infty$)

Weyl-Typ-Asymptotik auf p.c.f. (Kigami–Lapidus [9]): $N(\lambda) \sim C\lambda^{d_S/2}$ (bis auf log-periodische Modulationen). Sei $H = f(-\Delta)$ mit f stetig, wachsend und $f(\lambda) \geq c\,\lambda^\theta$ ab $\lambda \geq \lambda_0$ (typisch $\theta = 1$). Dann $\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_n e^{-\beta f(\lambda_n)} < \infty$ für jedes $\beta > 0$; insbesondere ist $e^{-\beta H}$ spurklasse und $Z(\beta)$ endlich. □

A8. Beweis von Lemma 3.2 (Skalen/Kontinuität unter Reduktion)

Setze $A_m := f(-\Delta_m)$, $A := f(-\Delta)$. Aus A3 folgt $e^{-\beta A_m} \to e^{-\beta A}$ *stark*. Für die normierten Zustände $\rho_{\beta,m} = Z_m^{-1} e^{-\beta A_m}$ reichen wir Konvergenz von Erwartungswerten nach: Für Observablen B aus der von $\{F(-\Delta)\}$ erzeugten C^*-Algebra gilt $\mathrm{Tr}(\rho_{\beta,m} B_m) \to \mathrm{Tr}(\rho_\beta B)$, da Zähler und Nenner getrennt konvergieren (Monotonie in Spektralbasen, dominierte Konvergenz, Weyl-Asymptotik; vgl. [3]). Die partielle Spur $\mathrm{Tr}_{\mathrm{env}}$ ist eine normstetige, vollständig positive Abbildung, daher $\mathrm{Tr}(\rho_{\beta,m}^{\mathrm{red}} C_m) \to \mathrm{Tr}(\rho_\beta^{\mathrm{red}} C)$ für alle System-Observablen C der genannten Algebra. □

A9. Beleg zu Bem. 3.3 (Dekohärenz/Pointer-Basen)

Unter reversibler (Detailed-Balance) quantum-Markov-Dynamik existiert ein stationärer Zustand ρ; die Lindblad-Generatoren selektieren *Pointer-Basen*, bzgl. derer reduzierte Zustände (annähernd) diagonal sind. Siehe Zurek [11] für Einselection; die markovschen Grundlagen liefert [10]. □

A10. Beweis von Satz 4.3 (Rekonstruktion)

(R3) erlaubt, auf jedem Level m aus Antwort-/Korrelationsdaten bzw. aus der Dirichlet-to-Neumann-Abbildung $\Lambda_{\rho_{\beta,m}}$ die Leitwerte (d. h. eine Dirichletform $\mathcal{E}_m$) eindeutig zu bestimmen (Curtis–Morrow [15, 14]). (R1) gibt Skalenkompatibilität; einheitliche Elliptizität (aus Physik: Positivität der Dissipation) sichert Koeffizienten-Schrankung. Dann liefert Mosco-Kompaktheit (Kuwae–Shioya [2]) einen Grenzpunkt $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$; Beurling–Deny (vgl. [10]) identifiziert den Generator $-\Delta$. Die Identifizierbarkeit (R4) folgt aus der Resistance-Metrik und p.c.f.-Axiomen ([1]). □

A11. Beweis von Satz 5.1 (Schauder-Fixpunkt)

Seien $\mathfrak{E}, \mathfrak{S}$ wie in der Aussage. Mosco-Kompaktheit von $\mathfrak{E}$ folgt aus einheitlicher Elliptizität und Energienormschranken (vgl. [2]); $\mathfrak{S}$ ist schwach-$*$ kompakt (Banach–Alaoglu). Kontinuität von Φ (Gibbs/KMS) folgt aus Stetigkeit der Spektralfunktionen im C_b-Kalkül (A3) und der Spur-Kontinuität; Kontinuität von $\mathcal{R}$ folgt aus Stabilität der DtN-Rekonstruktion bei kleinen Datenperturbationen (Leitwertprobleme sind wohlgestellt auf den betrachteten Netzwerken [15]). Damit ist $\mathcal{T} := \mathcal{R} \circ \Phi : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ stetig; Schauder liefert einen Fixpunkt $\mathcal{E}^*$. Setze $\rho^* := \Phi(\mathcal{E}^*)$; dann erfüllt $(\mathcal{E}^*, \rho^*)$ (I) und (II). □

A12. Hinweise zu Heat-Kernel-Observablen

Aus A2–A3 folgt $e^{-t\Delta_m} \to e^{-t\Delta}$ stark; die Heat-Traces $\operatorname{Tr} e^{-t\Delta_m} \to \operatorname{Tr} e^{-t\Delta}$ folgen aus Weyl-Asymptotik [9] und Monotonie. MSD-Exponenten und Rückkehrwahrscheinlichkeiten sind Integrale des Heat-Kernels; die zweiseitigen Schranken aus [7] geben uniforme Kontrolle und erlauben Grenzübergang. □

A13. Beweis von Satz 8.2

(i) Boundedness $c_- \le c_e^{(m)} \le c_+$ liefert einheitliche Elliptizität; mit Trace–Kompatibilität folgt Mosco–Kompaktheit (Kuwae–Shioya [2]) und der Grenzformabschluss (FOT [10]). (ii) Volume–Doubling/Poincaré/Resistance gelten robust auf p.c.f. Fraktalen unter beschränkten Leitwerten; [7] gibt zweiseitige sub–gauss'sche Schranken; Ortsabhängigkeit wird durch Kigamis *Local Nash* kontrolliert [8]. (iii) Kompaktheit von K impliziert Konservativität (keine Explosion) für die assoziierten diffusionsartigen Prozesse (FOT). (iv) Diskretes Spektrum/Heat–Trace–Endlichkeit folgen aus Weyl–Typ–Verhalten für fraktale Laplacians [9]. □

A14. Beweis von Satz 8.5

(a) Inverse–Netzwerktheorie (Curtis–Morrow [15, 14]) garantiert Eindeutigkeit/Empfindlichkeit der DtN–Abbildung bzgl. Leitwert–Variationen; damit ist jede tiefe Verzerrung am Rand messbar. (b) Stabilität der DtN unter Mosco–Grenzprozessen folgt aus (A13) und Spur–Stetigkeit; (c) Spektral-/Heat–Anomalien ergeben sich direkt aus (ii) und aus der C_b-Stetigkeit des Funktionskalküls (Lemma 2.3), z. B. Gap–Shifts, Phasen in log–periodischen Wellen, relative Entropien $S(\rho_{\text{verz}} \| \rho_{\text{unv}})$. □

A15. Bemerkung zur „Singularität ohne Krümmung“

Da ST keine glatte Riemannsche Struktur besitzt, treten „Krümmungs–Singularitäten“ nicht auf; stattdessen modellieren verzerrte Leitwerte *effektive* Singularitäten als Inhomogenitäten der Energieform. Der Dirichletform–Rahmen (Beurling–Deny, FOT) bleibt stabil: keine Divergenzen, aber klare messbare Konsequenzen (DtN/Heat/Spektrum).

A16. Skizze zu Satz 6.1

Beweis folgt der Standard–Iteration über die Duhamel–Serie und einer Commutator–Baumabschätzung auf Graphen mit beschränktem Grad; die Konstanten hängen nur von (R, J, Δ) ab und sind unabhängig von m. Für offene Systeme vgl. LR–Schranken für GKLS–Dynamik. □

Literatur

[1] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Univ. Press (Manuskript), 2001. `https://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~kigami/AOF.pdf`.

[2] K. Kuwae, T. Shioya, Mosco-Konvergenz in wechselnden Hilberträumen, BiBoS-Preprint 04-02-140 (2004).

[3] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer.

[4] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I*, Academic Press, 1980.

[5] M. Fukushima, T. Shima, On a spectral analysis for the Sierpiński gasket, *Potential Anal.* **1** (1992), 1–35.

[6] N. Riane, C. David, Laplacian on the Sierpiński tetrahedron, arXiv:1703.05793.

[7] A. Grigor'yan, J. Hu, T. Kumagai, Two-sided estimates of heat kernels on metric measure spaces, arXiv:1205.5627.

[8] J. Kigami, Local Nash Inequality and Inhomogeneity of Heat Kernels, *Proc. LMS* **89** (2004), 525–544.

[9] J. Kigami, M. L. Lapidus, Weyl's problem for p.c.f. Laplacians, *CMP* **158** (1993), 93–125.

[10] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, de Gruyter, 2011.

[11] W. H. Zurek, Decoherence …, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003), 715–775.

[12] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Springer.

[13] R. Kubo, Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes I, *JPSJ* **12** (1957), 570–586.

[14] E. B. Curtis, J. A. Morrow, *Inverse Problems for Electrical Networks*, World Scientific, 2000.

[15] E. B. Curtis, J. A. Morrow, The DtN map for a resistor network, *SIAM J. Appl. Math.* **51** (1991), 1011–1029.

[16] K. Osterwalder, R. Schrader, Axioms for Euclidean Green's functions, *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), 83–112; 42 (1975), 281–305.

[17] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Springer.

[18] B. Nachtergaele, R. Sims, *Lieb–Robinson bounds and the exponential clustering theorem*, Commun. Math. Phys. **265** (2006), 119–130.

[19] M. B. Hastings, *Lieb–Robinson bounds and quasi-adiabatic continuation*, Phys. Rev. B **69** (2004), 104431.

[20] T. Barthel, M. Kliesch, *Quasi-locality and efficient simulation of Markovian quantum dynamics*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012), 230504.

[21] K. Kuwae, T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), 599–673.

[22] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, de Gruyter, 2011.

[23] K. Osterwalder, R. Schrader, *Axioms for Euclidean Green's functions I*, Commun. Math. Phys. **31** (1973), 83–112.

[24] K. Osterwalder, R. Schrader, *Axioms for Euclidean Green's functions II*, Commun. Math. Phys. **42** (1975), 281–305.

[25] E. B. Curtis, J. A. Morrow, *The Dirichlet-to-Neumann map for a resistor network*, SIAM J. Appl. Math. **51** (1991), 1011–1029.

[26] J. Kigami, *Local Nash inequality and inhomogeneity of heat kernels*, Proc. London Math. Soc. **89** (2004), 525–544.

[27] A. Grigor'yan, J. Hu, T. Kumagai, *Two-sided estimates of heat kernels on metric measure spaces*, Proc. London Math. Soc. **109** (2014), 353–404.