Emergenz der 3+1D-Maxwell-Gleichungen auf dem ST-Graphen

antaris

15. August 2025

Ziel. Wir zeigen: Aus einer ST-induzierten Folge formstabiler Tetraederverfeinerungen T_ℓ, lokalen SPD-Hodge-Operatoren (als Mikro-Output), und $U(1)$-Gauge-Invarianz der Mikrodynamik folgen (i) Γ-Konvergenz der diskreten Maxwell-Energien zu einer effektiven Energie mit homogenisierten Parametern $(\varepsilon_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}})$, (ii) Konvergenz der semi-diskreten Dynamik zu schwachen Lösungen der 3+1D-Maxwell-Gleichungen, (iii) endliche Ausbreitung unter lokaler Hodge (mass-lumped Whitney). Alle Notations- und Randdetails (PEC) sind präzisiert, inkl. Recovery-Sequence am Rand.

0. Setting, Axiome und Notation

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, Lipschitz, mit PEC-Randbedingung $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeitintervall $I = [0, T]$.

Annahme 1 (ST-induzierte, formstabile Verfeinerungen)**.** $\{T_\ell\}$ sei eine Folge von Tetraedertriangulationen von Ω, deren 1-Skelett mit der ST-hierarchischen Kantenstruktur kompatibel ist (ST-induziert). Es gelte *Formstabilität*: Es existiert $\kappa > 0$, so dass alle Aspekt-/Dihedralwinkel durch κ gitter-uniform beschränkt sind. Netzweiten $h_\ell \downarrow 0$.

Annahme 2 (DEC/Whitney und Projektionen)**.** $C^k(T_\ell)$ seien k-Cochain-Räume, $d_\ell : C^k \to C^{k+1}$ die Inzidenzen. $W_\ell^k : C^k(T_\ell) \to \Lambda^k(\Omega)$ seien Whitney-Rekonstruktionen mit $\mathrm{d}\, W_\ell^k = W_\ell^{k+1} d_\ell$ (in Distributionen). $\Pi_\ell^k : \Lambda^k \to W_\ell^k(C^k)$ seien L^2-stabile Projektionen mit Standard-Approximation $\left\| u - W_\ell^k \Pi_\ell^k u \right\|_{L^2} = O(h_\ell) \left\| u \right\|_{H^1}$ für glatte u.

Annahme 3 (Lokale (mass-lumped) Hodge-Operatoren)**.** Es existieren gitter-uniform SPD-Hodge-Matrizen H_ℓ^1 auf $C^1(T_\ell)$ und H_ℓ^2 auf $C^2(T_\ell)$, die lokal (mass-lumped Whitney) realisiert sind, so dass

$$\left\langle e_\ell, H_\ell^1 e_\ell \right\rangle \approx \int_\Omega (\varepsilon_\ell \boldsymbol{E}_\ell) \cdot \boldsymbol{E}_\ell \, dx, \quad \boldsymbol{E}_e ll = W_\ell^1 e_\ell,$$
$$\left\langle b_\ell, H_\ell^2 b_\ell \right\rangle \approx \int_\Omega (\mu_\ell^{-1} \boldsymbol{B}_\ell) \cdot \boldsymbol{B}_\ell \, dx, \quad \boldsymbol{B}_\ell = W_\ell^2 b_\ell,$$

mit SPD-Tensorfeldern $\varepsilon_\ell, \mu_\ell$ und gitter-uniformer Elliptizität $\alpha I \le \varepsilon_\ell, \mu_\ell \le \beta I$.

Annahme 4 (H-/G-Konvergenz der Koeffizienten)**.** Die stückweise konstanten SPD-Tensorfelder $\varepsilon_\ell, \mu_\ell$ konvergieren (bis zu einer Teilfolge) im Sinne der H-/G-Konvergenz zu SPD-Tensoren $\varepsilon_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}}$ auf Ω. Insbesondere gilt für alle Folgen $\boldsymbol{u}_\ell \rightharpoonup \boldsymbol{u}$ in $L^2(\Omega)^3$

$$\liminf_{\ell \to \infty} \int_\Omega \varepsilon_\ell \boldsymbol{u}_\ell \cdot \boldsymbol{u}_\ell \, dx \ge \int_\Omega \varepsilon_{\text{eff}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \, dx,$$
$$\liminf_{\ell \to \infty} \int_\Omega \mu_\ell^{-1} \boldsymbol{u}_\ell \cdot \boldsymbol{u}_\ell \, dx \ge \int_\Omega \mu_{\text{eff}}^{-1} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \, dx.$$

Annahme 5 (Mikro-$U(1)$-Gauge (Noether))**.** Die Mikro-Lagrangedichte auf $C^1 \times C^2$ ist invariant unter $e_\ell \mapsto e_\ell + d_\ell \phi_\ell$ ($\phi_\ell \in C^0$). Die Energie hängt nur von $d_\ell e_\ell$ (bzw. $\operatorname{curl} \boldsymbol{E}_\ell$) und $\boldsymbol{B}_\ell$ ab.

1. Statische Energie, Constraints, Operatornormen

Definiere (Quelle $= 0$) die diskrete statische Energie

$$\mathcal{E}_\ell(e_\ell, b_\ell) := \tfrac{1}{2}\,\left\langle e_\ell, H^1_\ell e_\ell \right\rangle + \tfrac{1}{2}\,\left\langle b_\ell, H^2_\ell b_\ell \right\rangle, \tag{1}$$

unter folgenden PEC-kompatiblen Constraints

$$d_\ell b_\ell = 0, \qquad d^*_\ell H^1_\ell e_\ell = 0, \tag{2}$$

wobei d^*_ℓ das adjungierte bzgl. der H^k_ℓ-Skalarprodukte ist. Rekonstruktion: $\boldsymbol{E}_\ell = W^1_\ell e_\ell \in H_0(\mathrm{curl};\Omega)$, $\boldsymbol{B}_\ell = W^2_\ell b_\ell \in H(\mathrm{div};\Omega)$ mit $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}_\ell = 0$.

Lemma 6 (Whitney-Kommutation und Stabilität)**.** *Unter Annahme 2:* $\mathrm{d}W^1_\ell = W^2_\ell d_\ell$ *und* $\mathrm{d}W^2_\ell = W^3_\ell d_\ell$ *(Distributionen),* Π^k_ℓ *ist* L^2*-stabil;* $\left\|\boldsymbol{u} - W^k_\ell \Pi^k_\ell \boldsymbol{u}\right\|_{L^2} = O(h_\ell)\,\|\boldsymbol{u}\|_{H^1}$.

Lemma 7 (Gitter-uniforme Operatorabschätzungen)**.** *Es existiert* C *unabhängig von* ℓ *mit* $\|d_\ell u\|_{H^{-1}(\Omega)} \le C\,\|u\|_{L^2(\Omega)}$ *und* $\|d^*_\ell v\|_{H^{-1}(\Omega)} \le C\,\|v\|_{L^2(\Omega)}$.

Beweis. Stetigkeit der Inzidenzabbildungen auf formstabilen Gittern zusammen mit der Äquivalenz diskret/rekonstruiert (Whitney, Annahme 3) liefert die behaupteten Schranken. □

Lemma 8 (Energie-Äquivalenz)**.** *Unter Annahme 3 existieren* $c_1, c_2 > 0$ *(unabhängig von* ℓ*) mit*

$$c_1\big(\,\|\boldsymbol{E}_\ell\|^2_{L^2} + \|\boldsymbol{B}_\ell\|^2_{L^2}\,\big) \le \mathcal{E}_\ell(e_\ell, b_\ell) \le c_2\big(\,\|\boldsymbol{E}_\ell\|^2_{L^2} + \|\boldsymbol{B}_\ell\|^2_{L^2}\,\big).$$

Korollar 9 (Equi-Koerzivität)**.** *Die Funktionale* $\mathcal{E}_\ell$ *sind (modulo Gauge, PEC) equi-koerziv auf* $X := H_0(\mathrm{curl};\Omega) \times \{\boldsymbol{B} \in H(\mathrm{div};\Omega) : \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0\}$.

2. Homogenisierung und effektive Energie

Definition 10 (Zellenprobleme und effektive Tensoren)**.** Sei e_i die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Für jede Richtung $\xi \in \mathbb{R}^3$ sei $\chi^{(\xi)}_\ell \in \mathcal{V}_\ell$ Lösung des Zellenproblems

$$\int_\Omega \varepsilon_\ell(\xi + \nabla\chi^{(\xi)}_\ell) \cdot \nabla\eta\, dx = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\ell,$$

wobei $\mathcal{V}_\ell$ ein Nullmittel-/Rand-kompatibler Raum (ST-selbstähnlich, PEC-konform) ist. Definiere $\varepsilon_{\mathrm{eff}}\xi := \lim_{\ell\to\infty} \fint_\Omega \varepsilon_\ell(\xi + \nabla\chi^{(\xi)}_\ell)\, dx$. Analog via Dual-Zellenproblem μ^{-1}_{eff}.

Annahme 11 (Existenz der Effekttensoren)**.** Unter 4 existieren (ggf. nach Teilfolge) SPD-Tensoren $\varepsilon_{\mathrm{eff}}, \mu_{\mathrm{eff}}$ im obigen Sinn.

Die effektive kontinuierliche Energie auf X ist

$$\mathcal{E}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) := \tfrac{1}{2} \int_\Omega (\varepsilon_{\mathrm{eff}} \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E} + (\mu^{-1}_{\mathrm{eff}} \boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}\, dx. \tag{3}$$

3. Γ-Konvergenz der Energien

Setze die auf X definierte erweiterte Funktionalfolge

$$\widehat{\mathcal{E}}_\ell(\boldsymbol{E}_\ell, \boldsymbol{B}_\ell) := \begin{cases} \mathcal{E}_\ell(e_\ell, b_\ell), & \text{falls } \boldsymbol{E}_\ell = W^1_\ell e_\ell,\ \boldsymbol{B}_\ell = W^2_\ell b_\ell \text{ und (2) gilt,} \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 12 (Γ-Konvergenz)**.** *Unter 1–11 gilt auf X:* $\widehat{\mathcal{E}}_\ell \xrightarrow[\Gamma]{L^2\times L^2} \mathcal{E}_{\text{eff}}$.

Beweis. *(i) Kompaktheit.* Sei $\sup_\ell \widehat{\mathcal{E}}_\ell(\boldsymbol{E}_\ell, \boldsymbol{B}_\ell) < \infty$. Lemma 8 liefert L^2-Bounds und via Whitney-Kommutation die Erhaltung der Constraints im Grenzraum X. Es existiert $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \in X$ mit $(\boldsymbol{E}_\ell, \boldsymbol{B}_\ell) \rightharpoonup (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ in $L^2 \times L^2$.
(ii) liminf. Schreibe

$$\widehat{\mathcal{E}}_\ell = \tfrac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon_\ell \boldsymbol{E}_\ell\cdot\boldsymbol{E}_\ell\,dx + \tfrac{1}{2}\int_\Omega \mu_\ell^{-1}\boldsymbol{B}_\ell\cdot\boldsymbol{B}_\ell\,dx + r_\ell, \quad r_\ell \to 0,$$

wobei $r_\ell \to 0$ aus der mass-lumped-Konsistenz folgt (Annahme 3). Mit 4 erhält man

$$\liminf_\ell \int \varepsilon_\ell \boldsymbol{E}_\ell \cdot \boldsymbol{E}_\ell \geq \int \varepsilon_{\text{eff}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}, \qquad \liminf_\ell \int \mu_\ell^{-1} \boldsymbol{B}_\ell \cdot \boldsymbol{B}_\ell \geq \int \mu_{\text{eff}}^{-1} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}.$$

(iii) limsup. Für glatte $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \in X$ definiere Zellen-korrigierte Felder

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\ell &:= \boldsymbol{E} + \sum_{i=1}^{3} (\boldsymbol{E}\cdot e_i)\,\nabla\chi_\ell^{(e_i)},\\
\boldsymbol{B}_\ell &:= \boldsymbol{B} + \sum_{i=1}^{3} ((\mu_{\text{eff}}^{-1}\boldsymbol{B})\cdot e_i)\,\nabla\psi_\ell^{(e_i)},
\end{aligned}$$

wobei $\chi_\ell^{(e_i)}$, $\psi_\ell^{(e_i)}$ die Zellenprobleme (Definition 10) lösen. **Randbehandlung (PEC):** In einer dünnen Randlage Ω_δ setzt man die Korrektoren Null oder verwendet ein Rand-Zellenproblem mit $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0$; der Fehler ist $o(1)$ in L^2. Setze $e_\ell := \Pi_\ell^1 \boldsymbol{E}_\ell$, $b_\ell := \Pi_\ell^2 \boldsymbol{B}_\ell$; eine Gauge-Korrektur $e_\ell \mapsto e_\ell + d_\ell \phi_\ell$ stellt (2) exakt her (Annahme 5). Dann folgt $\limsup_\ell \widehat{\mathcal{E}}_\ell(\boldsymbol{E}_\ell, \boldsymbol{B}_\ell) \leq \mathcal{E}_{\text{eff}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$. Dichte glatter Felder in X schließt ab. $\square$

Korollar 13 (Starke Konvergenz)**.** *Ist der Grenzminimierer von $\mathcal{E}_{\text{eff}}$ eindeutig, folgt aus Quadratik/strikter Konvexität die starke L^2-Konvergenz der Minimierer (und entsprechender energetischer Lösungen).*

4. Noether-Gauge, Constraints und Dynamik

Proposition 14 (Noether $\Rightarrow$ Kontinuität und Constraints)**.** *Unter 5 existiert ein diskreter Strom J_ℓ mit $\partial_t\rho_\ell + d_\ell J_\ell = 0$. Die Gauss-Constraints in (2) werden von der Dynamik erhalten.*

Die (zeit-)semi-diskrete Maxwell-Dynamik lautet

$$\begin{aligned}
H_\ell^1 \partial_t e_\ell &= -\,d_\ell^* b_\ell, &(4)\\
H_\ell^2 \partial_t b_\ell &= \quad d_\ell e_\ell, &(5)
\end{aligned}$$

mit PEC-kompatiblen Anfangsdaten; äquivalent zur Form $\partial_t B_\ell + d_\ell E_\ell = 0$, $d_\ell^* D_\ell - \partial_t D_\ell = 0$ mit $D_\ell = H_\ell^1 E_\ell$, $H_\ell = H_\ell^{2\,-1} B_\ell$.

Lemma 15 (Zeit-Ableitungs-Schranken)**.** *Unter 3 und Lemma 7 gelten gitter-uniforme Schranken $\partial_t \boldsymbol{E}_\ell, \partial_t \boldsymbol{B}_\ell$ in geeigneten Dualräumen (H^{-1}).*

Proposition 16 (Endliche Ausbreitung)**.** *Seien Anfangsdaten/Quellen außerhalb eines kompakten $K \Subset \Omega$ Null. Unter 3 gilt: Für $t < \operatorname{dist}(K, \operatorname{supp})/c$ vanishen $\boldsymbol{E}_\ell(t), \boldsymbol{B}_\ell(t)$ auf K.*

Beweis. Definiere die lokalisierte Energie $E_\chi(t) := \frac{1}{2}\big(\langle e_\ell, H_\ell^1 e_\ell \chi(t)\rangle + \langle b_\ell, H_\ell^2 b_\ell \chi(t)\rangle\big)$ mit $\chi(x,t) = \eta(\operatorname{dist}(x,K) - ct)$, $\eta \in C^1$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta' = 0$ auf $(-\infty, 0]$, $\eta' = 1$ auf $[1,\infty)$. Leite E_χ in der Zeit ab, benutze (4)–(5), Produktregeln und die Lokalität der mass-lumped Hodge, um einen Flussterm der Form $\int_\Omega (\partial_t\chi)\mathcal{H} - \nabla\chi \cdot \mathcal{S}\, dx$ zu erhalten (diskreter Poynting-Vektor $\mathcal{S}$, Energiedichte $\mathcal{H}$). Aus $|\partial_t \chi| \le c\,|\nabla\chi|$ folgt $\dot{E}_\chi(t) \le 0$. Da $E_\chi(0) = 0$ (Außenenergie anfänglich Null), bleibt $E_\chi(t) = 0$, also vanishen die Felder im Kegelkomplement. □

Satz 17 (Dynamik-Konvergenz)**.** *Seien (e_ℓ^0, b_ℓ^0) PEC-kompatibel und rekonstruktiv konvergent gegen $(\boldsymbol{E}^0, \boldsymbol{B}^0) \in X$. Dann existiert $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \in L^\infty(I; X)$, das die schwachen Maxwell-Gleichungen erfüllt:*

$$\varepsilon_{\text{eff}}\partial_t \boldsymbol{E} = \operatorname{curl}\boldsymbol{H}, \quad \partial_t \boldsymbol{B} = -\operatorname{curl}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon_{\text{eff}}\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{H} = \mu_{\text{eff}}^{-1}\boldsymbol{B},$$

und (bis auf Unterfolgen) $W_\ell^1 e_\ell \rightharpoonup \boldsymbol{E}$, $W_\ell^2 b_\ell \rightharpoonup \boldsymbol{B}$ in $L^2(I \times \Omega)$. Energien konvergieren: $\mathcal{E}_\ell(e_\ell(t), b_\ell(t)) \to \mathcal{E}_{\text{eff}}(\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{B}(t))$ für a. e. t.

Beweis. (1) Energieerhaltung liefert uniforme $L_t^\infty L_x^2$-Bounds; Lemma 15 gibt Zeit-Regularität in Dualräumen. (2) Aubin–Lions ⇒ relative Kompaktheit in $L^2_{\text{loc}}(I \times \Omega)$. (3) Teste die diskrete schwache Form mit rekonstruierten Testfeldern (Whitney, Lemma 6), lasse $\ell \to \infty$. Grenzidentifikation folgt aus Theorem 12 und 11. Constraint-Erhaltung via Proposition 14. □

5. Schlussbemerkungen

(i) Anisotrope Mikrostruktur liefert anisotrope $\varepsilon_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}}$; ST-Symmetrie kann Isotropie im Limes begünstigen. (ii) PMC-Randbedingungen sind analog. (iii) Vollzeitdiskrete Schemata folgen per Rothe und variationaler Zeitdiskretisierung (Energie-Stabilität ⇒ Konvergenz).

Fazit. Unter den rein mikroskopischen Annahmen 1–5 emergiert das Maxwell-System als IR-Grenztheorie: Die konstitutiven Parameter $(\varepsilon_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}})$ sind *Output* der Homogenisierung; endliche Ausbreitung und Gauge-Constraints bleiben erhalten.