Schrödingerdynamik, Liouville–von Neumann und Thermal Interpretation auf dem Sierpinski–Tetraeder (p.c.f. Ur–Graph)

antaris

13. August 2025

Zusammenfassung

Wir formalisierten die zeitunabhängige Schrödingergleichung, die Liouville–von Neumann–Gleichung und Kernaussagen der Thermal Interpretation (TI) auf dem Sierpinski–Tetraeder (ST), aufgefasst als post–critically finite (p.c.f.) selbstähnliche Menge mit Kigami–Dirichletform und Laplacian. Der Hamiltonoperator wird als $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{ST} + V$ definiert (geeignete Randbedingungen an V_0). Wir zeigen die Äquivalenz: (i) stationäre Schrödingergleichung $H\psi = E\psi$, (ii) stationäre von–Neumann–Dynamik $[H, \rho] = 0$ mit reiner Projektion $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, (iii) konstante q-Erwartungswerte der TI und Ehrenfest–Gleichungen. Die Konstruktion stützt sich auf die Theorie lokaler, stark abgeschlossener Dirichletformen auf p.c.f. Fraktalen [1, 2, 3, 5], sowie auf von Neumanns Dichteoperatorformulierung [9] und Neumaiers TI [11, 13, 15].

A. Axiome/Annahmen und Bühne (Ur–Graph)

(A1) **Ur–Graph/Bühne.** Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der *Sierpinski–Tetraeder* (ST), eine p.c.f. selbstähnliche Menge, erzeugt durch vier Kontraktionen $(F_i)_{i=0}^3$ auf einem regulären 3–Simplex (Tetraeder). Die postkritische Menge V_0 (die 4 Ecken) dient als *Rand*. Siehe p.c.f. Theorie nach Kigami [1, 2] und die explizite ST–Spektralanalyse [5].

(A2) **Dirichletform & Laplacian.** Auf K existiert eine reguläre, lokale Dirichletform $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ und der zugehörige selbstadjungierte Laplacian Δ_{ST} als renormalisierter Limes diskreter Graph–Laplaciane auf Approximationsgraphen G_m (*spectral decimation*) [1, 2, 3, 5]. Als Referenzmaß ist wahlweise Hausdorff–Maß oder Kusuoka–Maß zulässig [6, 2]; wir schreiben $L^2(K, \mu)$.

(A3) **Quantenraum.** Der kinematische Hilbertraum ist $\mathcal{H} := L^2(K, \mu)$; Observablen sind dicht definierte, (wesentlich) selbstadjungierte Operatoren auf $\mathcal{H}$.

(A4) **Hamiltonian.** Für Teilchenmasse $m > 0$ und messbarem Potential $V : K \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$H := -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta_{ST} \;+\; V \quad \text{mit geeigneter Wahl von Dirichlet/Neumann gem. } V_0.$$

H ist (unter Standardvoraussetzungen an V) selbstadjungiert auf einer dichten Domäne in $\mathcal{H}$ [2].

(A5) **Dynamik.** (i) *Schrödinger:* $i\hbar\,\partial_t\psi_t = H\psi_t$. (ii) *Liouville–von Neumann:* $i\hbar\,\partial_t\rho_t = [H, \rho_t]$ für Dichteoperatoren $\rho_t \geq 0$, $\mathrm{Tr}\rho_t = 1$ [9].

(A6) **Thermal Interpretation (TI).** Physikalische Größen sind ihre *q-Erwartungswerte* $\langle A\rangle_\rho := \mathrm{Tr}(\rho A)$; Messwerte approximieren diese (mit Unsicherheiten), nicht notwendig Eigenwerte. Dynamik der q-Erwartungen folgt den Ehrenfest–Gleichungen [11, 13, 14, 15].

B. Kigami–Laplacian auf dem ST (Essentials)

Definition 1 (Kigami–Dirichletform und Laplacian)**.** Seien $(G_m)_{m\ge 0}$ die ST–Approximationsgraphen mit Vertexmengen V_m und renormierten Diskretenergien $\mathcal{E}_m(u,u) = r_m \sum_{\{x,y\}\in E(G_m)}(u(x)-u(y))^2$. Unter passender Renormierung r_m konvergiert $\mathcal{E}_m$ zu einer geschlossenen, lokalen Dirichletform $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ auf $L^2(K,\mu)$; der Laplacian Δ_{ST} ist durch $\mathcal{E}(u,v) = -\int_K (\Delta_{ST} u)\, v\, d\mu$ für $u \in \mathrm{Dom}(\Delta_{ST}) \subset \mathcal{F}$, $v \in \mathcal{F}_0$ (Nullrand) definiert. Vgl. [1, 2, 3, 5].

Bemerkung 1 (Spektrum & Weyl-Asymptotik). Für den ST ist das Spektrum von Δ_{ST} rein diskret; explizite Eigenwerte und Zählfunktion wurden konstruiert/abgeschätzt [5]. Für p.c.f. Gaskets gewährleisten [1, 2, 4] die Existenz von Wärmeleitung, Resolvente und Sobolev–Strukturen (vgl. Kusuoka–Maß [6, 7]).

C. Schrödingerdynamik auf dem ST

Definition 2 (Stationäres Spektralproblem)**.** Die zeitunabhängige Schrödingergleichung auf dem ST lautet

$$H\psi \;=\; E\psi, \qquad \psi \in \mathrm{Dom}(H) \subset \mathcal{H}. \tag{1}$$

Proposition 1 (Selbstadjungiertheit und Spektrum)**.** *Unter den Annahmen (A4) ist H selbstadjungiert mit rein diskretem Spektrum $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $E_n \to +\infty$, und vollständigem Orthonormalsystem von Eigenfunktionen $\{\psi_n\}$ in $\mathcal{H}$. (Begründung: selbstadjungierter, unterer Halbstrahl–Operator $-\Delta_{ST}$ auf p.c.f. Fraktalen [2], plus relativ beschränktes Potential V.)*

D. Liouville–von Neumann auf dem ST

Definition 3 (Dichteoperator & Dynamik)**.** Ein Dichteoperator ist $\rho \ge 0$ mit $\mathrm{Tr}\rho = 1$ auf $\mathcal{H}$. Die Dynamik ist

$$i\hbar\, \partial_t \rho_t = [H, \rho_t], \qquad \rho_t = U_t\, \rho_0\, U_t^\dagger, \quad U_t = e^{-iHt/\hbar}. \tag{2}$$

Proposition 2 (Stationarität & Spektralzerlegung)**.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) ψ *löst* (1) *mit Eigenwert* E.

(ii) $\rho_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ *erfüllt* $[H,\rho_\psi] = 0$ *und ist stationär in* (2).

(iii) Es existiert eine (gemischte) Spektraldarstellung $\rho = \sum_n p_n\, |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ *mit* $[H,\rho] = 0 \Leftrightarrow \rho$ *ist in der Eigenbasis von* H *diagonal.*

Beweis. *(i)⇒(ii):* $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow [H, |\psi\rangle\langle\psi|] = 0$. *(ii)⇒(iii) und (iii)⇒(ii): Spektralsatz/von Neumann [9].* □

E. Thermal Interpretation (TI) auf dem ST

Definition 4 (q–Erwartungswerte und Ehrenfest–Gleichungen)**.** Für Observablen A auf $\mathcal{H}$ und Zustand ρ ist

$$\langle A\rangle_\rho := \mathrm{Tr}(\rho A), \qquad \frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\rho_t} = \frac{i}{\hbar}\,\mathrm{Tr}(\rho_t [H,A]) + \mathrm{Tr}(\rho_t\, \partial_t A).$$

In der TI repräsentieren *diese* q-Erwartungen die (unscharfen) *wahren* Eigenschaften; Messwerte sind approximative Realisationen davon [11, 13, 15].

Proposition 3 (Kohärenz TI $\leftrightarrow$ LvN $\leftrightarrow$ Schrödinger)**.** *Gilt* $[H,\rho]=0$*, so sind alle zeitunabhängigen Observablen* A *stationär im TI–Sinn:* $\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\rho_t}=0$*. Für reine Zustände* ρ_ψ *ist dies äquivalent zu* $H\psi=E\psi$ *(Prop. 2).* Damit ist die statische TI–Beschreibung (konstante q-Erwartungen), die LvN–Stationarität und die stationäre Schrödingergleichung auf dem ST äquivalent.

F. Konsistenz in singulären Grenzregimen

Auf p.c.f. Fraktalen ist die Wärmeleitung, das Spektrum und die schwache Formulierung des Laplacians wohldefiniert [1, 2, 3, 4]. Dadurch bleiben sowohl:

- (i) die *stationäre* Schrödinger–Theorie als Spektralproblem $H\psi=E\psi$,
- (ii) die *dynamische* LvN–Theorie via starkstetige unitäre Gruppe $U_t=e^{-iHt/\hbar}$,
- (iii) die *TI*–Größen $\langle A\rangle_{\rho_t}$ und Ehrenfest–Gleichungen,

auch in Regimen wohldefiniert, die klassisch als singular gelten (keine glatte Mannigfaltigkeit nötig). Für den *Sierpinski–Tetraeder* liegen explizite Spektralinformationen vor [5], was die stationäre Theorie konkretisiert.

G. Redundante Konsistenzprüfungen

(K1) **Spektral/LvN Check.** $H\psi=E\psi\Rightarrow\rho_\psi$ stationär (§D). Umgekehrt induziert jede LvN–stationäre reine Projektion einen Eigenzustand.

(K2) **TI Check.** Für alle domänenverträglichen A gilt Stationarität $\langle\dot{A}\rangle=0$ genau dann, wenn $[H,\rho]=0$.

(K3) **Fraktal Check.** Wärme–Kernel und Resolvent existieren; Δ_{ST} ist selbstadjungiert; H erzeugt U_t ([1, 2, 3, 5]).

H. Hinweise zur Modellierung auf dem ST

- *Potentialmodellierung:* $V\in L^\infty(K)$ (oder formrelativ–beschränkt) sichert Selbstadjungiertheit von H [2].
- *Randbedingungen:* Dirichlet an V_0 modelliert *eingeklemmte* Zustände; Neumann spiegelt *freie* Randkopplung.
- *Kusuoka–Maß:* Alternative Wahl $\mu=\nu_{\text{Kusuoka}}$ verbessert *differentialgeometrische* Eigenschaften (Cheeger–Energie) [6, 8].

I. Beispielrechnungen: Erste Eigenwerte/Eigenfunktionen auf dem ST

Die Spektralanalyse des Laplacians auf dem Sierpinski–Tetraeder wurde in [5] mittels *spectral decimation* durchgeführt. Damit folgt für Dirichlet–Rand an V_0 eine rekursive Erzeugung der

Eigenwerte λ des normierten Δ_{ST} aus einem rationalen Abbildungsgesetz $\mathcal{D}$, das bei jeder Stufe $m \mapsto m+1$ skaliert und Randresonanzen ausschließt. Typisch gilt:

$$\lambda_{m+1} \;=\; \mathcal{D}^{-1}(\lambda_m), \qquad \text{und} \quad \lambda = \lim_{m\to\infty} c^{-m}\lambda_m$$

mit einem fraktalspezifischen Skalierungsfaktor $c > 1$ (vgl. [5]). Die zugehörigen Eigenfunktionen entstehen durch stückweise harmonische Erweiterung entlang der IFS-Zellen $F_i(K)$ und erfüllen Selbstähnlichkeitsrelationen der Form

$$\psi \circ F_i = \alpha_i(\lambda)\,\psi \quad (i = 0, \ldots, 3),$$

wobei die Zellenfaktoren α_i aus der lokalen Energieminimierung (Dirichletprinzip) folgen. Konkrete numerische Listen erster Eigenwerte/Eigenfunktionen (inkl. Multiplizitäten) finden sich tabelliert in [5] und können direkt zur Konstruktion von SchrödingerZuständen $H\psi = E\psi$ mit $E = \frac{\hbar^2}{2m}\lambda + \langle V\rangle$ verwendet werden.

J. Varianten: Kusuoka–Maß und Cheeger–Energie

Neben dem d–dimensionalen Hausdorff–Maß H^d kann das *Kusuoka–Maß* ν_{Kusuoka} auf K gewählt werden [6]. Dieses ist für die quadratintegrierbare Energieform besonders geeignet und führt zu einer differentialgeometrischen Struktur im Sinne von Cheeger. Die Cheeger–Energie Ch_μ auf (K, μ) ist definiert als

$$\mathrm{Ch}_\mu(u) = \inf\left\{\liminf_{n\to\infty} \int_K |\nabla u_n|^2\, d\mu \;\middle|\; u_n \in \mathrm{Lip}(K),\ u_n \to u \text{ in } L^2(\mu)\right\},$$

und liefert eine äquivalente Dirichletform zu $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ für geeignete Maße μ auf Gasket-Typ-Fraktalen [8]. Dies kann Spektralexponenten, Heat-KernelGlättung und Funktionalräume geringfügig verschieben, lässt jedoch die Gültigkeit der Schrödinger-, LvN- und TI-Formulierung unverändert, da diese nur die geschlossene, lokale Dirichletform und deren selbstadjungierten Generator benötigen [2].

K. Randwertprobleme: Dirichlet vs. Neumann an V_0

Für p.c.f.–Fraktale wie den ST sind Randbedingungen an der postkritischen Menge V_0 definierbar:

- **Dirichlet–Rand:** $\psi|_{V_0} = 0$; $\mathcal{F}_0 := \{u \in \mathcal{F} \mid u|_{V_0} = 0\}$. Der Generator $\Delta_{ST}^{(D)}$ auf $\mathcal{F}_0$ ist selbstadjungiert, positiv, diskretes Spektrum.
- **Neumann–Rand:** natürliche Bedingung $\partial_n\psi|_{V_0} = 0$, wohldefiniert über Energiefluss und Integration by parts im Dirichletform-Setting [1, 2]. Der Generator $\Delta_{ST}^{(N)}$ besitzt das konstante $\psi \equiv 1$ als Eigenfunktion zum Eigenwert 0.

Gemischte Randbedingungen (Dirichlet auf Teilmengen von V_0) modellieren gekoppeltes/offenes Verhalten. Physikalisch stehen Dirichlet-Ränder für *eingeklemmte* Zustände, Neumann-Ränder für *freie* Kopplung an weitere Strukturen. In allen Fällen ist H über Formsumme $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{ST}^{(\cdot)} + V$ wohldefiniert und erzeugt eine unitäre Dynamik [2].

L. TI-Messprozesse im ST-Setting

In der Thermal Interpretation [12, 14] sind Messprozesse keine *Kollapsereignisse*, sondern physikalische Wechselwirkungen zwischen System und Messapparatur, beschrieben durch eine CPTP–Map $\Phi : \rho \mapsto \Phi(\rho)$ (Heisenberg: $A \mapsto \Phi^*(A)$).

Double–Slit auf ST. Die Ausbreitung erfolgt über den Propagator $U_t = e^{-iHt/\hbar}$ auf K. Zwei "Schlitze" werden als Potentiallandschaft V_{slit} implementiert (z. B. hohe Barriere überall außer in zwei dünnen Kanälen). DetektorRegionen $R \subset K$ werden durch Projektoren Π_R repräsentiert. Die Intensitäten sind q–Erwartungen $\langle \Pi_R \rangle_{\rho_t} = \mathrm{Tr}(\rho_t \Pi_R)$; Interferenz resultiert aus kohärenter Summation der Amplituden entlang verschiedener zellulärer Pfade (IFS-Zerlegung), nicht aus einem fundamentalen Kollaps.

Stern–Gerlach auf ST. Ein Spin–System auf K koppelt über $H_{\text{SG}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ an ein inhomogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, definiert z. B. auf Knoten/Regionen der Approximationsgraphen G_m. Die räumliche Aufspaltung der Zweige erscheint als disjunkte SupportRegionen der Wellenfunktion; die gemessenen Häufigkeiten sind q–Erwartungen $\langle \Pi_{\uparrow/\downarrow} \rangle_{\rho_t}$. Schwankungen stammen aus endlicher Stichprobe; die TI identifiziert Messwerte als approximative Realisationen der q–Erwartungen [11, 12, 15].

Bemerkung. Das ST–Setting ermöglicht Simulationen von Messprozessen in nichtglatten Geometrien und bleibt dabei *singulärfrei*: Dirichletformen und ihre Generatoren liefern wohldefinierte Dynamik, wodurch Schrödinger, LvN und TI konsistent bleiben.

Literatur

[1] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, (Vorabdruck/Kapitel zu Grenzwerten diskreter Laplacians), 2000.

[2] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd ed., de Gruyter, 2011. DOI:10.1515/9783110218091.

[3] M.T. Barlow, E.A. Perkins, *Brownian motion on the Sierpinski gasket*, Probab. Theory Relat. Fields **79** (1988), 543–623.

[4] K. Dalrymple, R.S. Strichartz, J.P. Vinson, *Fractal Differential Equations on the Sierpinski Gasket*, J. Fourier Anal. Appl. **5** (1999), 203–284.

[5] N. Riane, C. David, *Laplacian on the Sierpinski tetrahedron*, arXiv:1703.05793 (2017).

[6] J. Kigami, *The Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate on the Sierpinski gasket*, Math. Ann. **340** (2008), 781–804.

[7] A. Öberg, K. Tsougkas, *Properties of the energy Laplacian on Sierpinski gasket type fractals*, Preprint (2014).

[8] U. Bessi, *Cheeger's energy on the harmonic Sierpinski gasket*, Nonlinear Anal. **200** (2020), 111988.

[9] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932).

[10] E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem*, Ann. Phys. **384** (1926), 361–376; **385** (1926), 437–490.

[11] A. Neumaier, *Foundations of quantum physics II. The thermal interpretation*, arXiv:1902.10779 (2019).

[12] A. Neumaier, *Foundations of quantum physics III. Measurement*, arXiv:1902.10782 (2019).

[13] A. Neumaier, *Foundations of quantum physics IV. More on the thermal interpretation*, arXiv:1904.12721 (2019).

[14] A. Neumaier, *Foundations of quantum physics V. Coherent spaces*, arXiv:1905.00920 (2019).

[15] A. Neumaier, *Coherent Quantum Physics: A Reinterpretation of the Tradition*, de Gruyter (2019).