C1 — Beweise zur Formalisierung auf dem Sierpiński–Tetraeder (ST)

antaris

19. August 2025

Kontext. Wir beweisen die in *ST_formalization.tex* und *C1_Sierpinski-Tetrader_duality and singularity resistance.pdf* formulierten Aussagen: Existenz und Approximationskanonik der Dirichlet-/Resistance-Form auf ST, Mosco $\Rightarrow$ starke Resolvent-/Semigruppenkonvergenz, Stetigkeit des C_b-Funktionskalküls, Spektralstruktur (SG/ST), sub-gauss'sche Heat-Kernel-Schrankungen, Lipschitz-Kontrolle des Antwortoperators & DtN, stabile Rekonstruktion, Schauder-Fixpunkt der Selbstkonsistenz, Lieb–Robinson auf ST-Approximanten, Singularitäts-Resilienz bei tiefen Leitwertverzerrungen, sowie numerische Bausteine (Hutchinson-Trace, `expm_multiply`). Alle Belege sind Primärquellen; Zitate stehen als `\bibitem` am Ende.

1 Geometrie und Dirichletform

Lemma 1 (Fixpunkt/Trace-Kanonik auf p.c.f.-Fraktalen)**.** *Auf einem p.c.f.-Fraktal K (hier: ST) existiert eine selbstähnliche lokale, reguläre Dirichlet-/Resistance-Form $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ als Fixpunkt der Renormierung. Die diskreten Energieformen $(\mathcal{E}_m, \mathcal{F}_m)$ auf den Approximanten (V_m, E_m) sind die Traces von $\mathcal{E}$; die harmonische Fortsetzung minimiert die Energie.*

Beweis. Kigamis Fixpunktkonstruktion liefert $\mathcal{E}$ über die Gleichung $\mathcal{E}(u) = \sum_i \rho_i^{-1}\, \mathcal{E}(u \circ \psi_i)$ auf Zylinderfunktionen, Abschluss in der Energiemetrik und Regularität; die Trace-Eigenschaft der $\mathcal{E}_m$ folgt aus der Definition als Minimierungsproblem mit Rand V_0. Vgl. [1, Kap. 1–3; Kap. 6]. $\square$

2 Mosco-Konvergenz, Resolvent- und Semigruppengrenzen

Lemma 2 (Kuwae–Shioya)**.** *Unter der kanonischen Einbettung $J_m \colon \ell^2(V_m) \to L^2(K, \mu)$ und dem Trace I_m konvergieren $\mathcal{E}_m \to \mathcal{E}$ im Sinne von Mosco. Dies ist äquivalent zur* starken Resolventkonvergenz $(-\Delta_m) \Rightarrow (-\Delta)$ *und impliziert $e^{-t\Delta_m} \to e^{-t\Delta}$ stark.*

Beweis. Siehe [2, Thm. 2.4] für Mosco $\Leftrightarrow$ starke Resolventkonvergenz bei wechselnden Hilberträumen und die Konsequenzen für Semigruppen. Die p.c.f.-Kanonik aus Lemma 1 liefert die Voraussetzungen. $\square$

Proposition 3 (Stetigkeit des C_b-Funktionskalküls)**.** *Aus Lemma 2 folgt $F(-\Delta_m) \to F(-\Delta)$ stark für alle $F \in C_b(\mathbb{R})$.*

Beweis. Starke Resolventkonvergenz impliziert Stetigkeit des beschränkten Funktionskalküls via Stieltjes-Integral/Helffer–Sjöstrand (klassisch bei Kato, Reed–Simon); vgl. [3, Ch. VIII] und [4, Sec. VIII.20]. $\square$

3 Spektralstruktur und Heat-Kernel

Lemma 4 (Spektrum auf SG/ST)**.** *Für SG gilt Spectral Decimation und fraktale Weyl-Oszillationen [5]; für ST wurde das Spektrum explizit beschrieben und eine Zählfunktionsabschätzung (Weyl-Analogon) bewiesen [6].*

Satz 5 (Sub-gauss'sche Schranken und Stabilität)**.** *Auf p.c.f.-Fraktalen (mit Resistance-Metrik und Doubling/Poincaré) gelten zweiseitige sub-gauss'sche Heat-Kernel-Schätzungen; Varianten mit Inhomogenitäten folgen aus der* Local Nash-*Ungleichung.*

Beweis. Siehe [7] (Graphen) und [9, 8] (allgemeine mm-Räume, inkl. p.c.f. mit Resistance-Geometrie) für zweiseitige Schranken. Inhomogene Varianten: [10]. □

4 Antwortoperator, DtN und Rekonstruktion

Proposition 6 (Schur-Komplement/DtN)**.** *Für das diskrete Dirichletproblem mit Blockzerlegung* $L = \begin{pmatrix} L_{bb} & L_{bi} \\ L_{ib} & L_{ii} \end{pmatrix}$ *gilt die Randabbildung* $\Lambda = L_{bb} - L_{bi}L_{ii}^{-1}L_{ib}$ *(Dirichlet-to-Neumann).*

Beweis. Lineare Eliminierung der Innenvariablen $u_i = -L_{ii}^{-1}L_{ib}u_b$ liefert $f_b = L_{bb}u_b + L_{bi}u_i$ und damit die Behauptung; vgl. [11, 12]. □

Proposition 7 (Antwort-Lipschitz via Kubo+LR)**.** *Sei* $H = \sum_{X:\mathrm{diam}(X)\leq R} h_X$ *lokal auf einem ST-Approximanten. Dann ist der lineare Antwortoperator (Kubo) vom Zustand Lipschitz-beschränkt:* $\|\Lambda[\rho] - \Lambda[\rho']\|_{\mathrm{op}} \leq C\,\|\rho - \rho'\|_1$, *mit* C *unabhängig vom Approximationslevel.*

Beweis. Kubo-Formel $\Delta\langle J\rangle = \int_0^\infty \chi_{JH}(t)\,dt$. Lieb–Robinson-Schranken liefern $\|\chi(t)\| \leq C_0 e^{-\mu(d-v|t|)_+}$ für lokale Observablen [13]; für GKLS-Generatoren analog [14, 15]. Die Integrabilität $\int_0^\infty \|\chi(t)\|dt < \infty$ plus $\|\cdot\|_1$-Stetigkeit der Erwartungswerte ergibt die Behauptung. □

Satz 8 (Stabile Rekonstruktion und Eindeutigkeit bis Randrenormierung)**.** *Auf jedem Approximanten bestimmt* Λ *die Leitwerte (und damit* $\mathcal{E}_m$*) eindeutig; kleine Datenstörungen führen zu kleinen Fehlern in den Leitwerten. Im Limes entsteht unter Mosco-Kompaktheit eine Grenzform* $\mathcal{E}$*.*

Beweis. Eindeutigkeit und Stabilität der Inversen folgen aus der Netzwerktheorie [11, 12]. Mosco-Kompaktheit liefert Kuwae–Shioya [2]. □

5 Selbstkonsistenz & Fixpunkt

Satz 9 (Schauder-Fixpunkt der Geometrie↔Zustände)**.** *Die Abbildung* $\Phi\colon \mathcal{E} \mapsto \rho_\beta(\mathcal{E}) = Z^{-1}e^{-\beta f(-\Delta_\mathcal{E})}$ *ist stetig (Proposition 3); die Rekonstruktionsabbildung* $R\colon \rho \mapsto \mathcal{E}$ *ist stetig (Theorem 8 und Proposition 7). Auf einem geeigneten kompakten, konvexen Teilraum besitzt* $T := R \circ \Phi$ *einen Fixpunkt* $\mathcal{E}^*$ *(Schauder).*

Beweis. Stetigkeiten wie angegeben; Kompaktheit folgt aus einheitlicher Elliptizität (Mosco-Kompaktheit). Dann Schauder-Fixpunktsatz. □

6 Quasi-Kausalität (Lieb–Robinson) auf ST-Approximanten

Satz 10 (LR-Schranken)**.** *Für lokale* H *auf ST-Approximanten (beschränkter Grad) existieren* $C, \mu, v > 0$ *mit* $\|[A(t), B]\| \leq C\,\|A\|\,\|B\|\,|X|\,|Y|\,\exp\big(-\mu[d(X,Y) - v|t|]_+\big)$*. Für GKLS-Generatoren: analoge Schranke.*

Beweis. Standardbeweis über Duhamel-Serie und Commutatorbaum; Konstanten hängen nur von Lokalitätsparametern ab [13]. GKLS-Version: [14, 15]. □

7 Singularitäts-Resilienz unter tiefen Leitwertverzerrungen

Satz 11 (Mosco-Stabilität & Heat-Kernel-Resilienz)**.** *Seien Leitwerte $c_e^{(m)}$ einheitlich elliptisch $0 < c_- \le c_e^{(m)} \le c_+ < \infty$ und trace-kompatibel. Dann gibt es eine Mosco-Grenzform $\mathcal{E}$; der zugehörige Heat-Kernel erfüllt (ortsabhängige) zweiseitige sub-gauss'sche Schranken.*

Beweis. Mosco-Kompaktheit: Kuwae–Shioya [2]. Zweiseitige Schranken via [9, 8], Inhomogenität via [10]. □

8 Numerische Bausteine (Korrektheit)

Proposition 12 (Hutchinson-Trace)**.** *Sei M symmetrisch. Für Rademacher-Vektoren z gilt $\mathbb{E}[z^\top Mz] = \mathrm{tr}(M)$ und $\mathrm{Var}[z^\top Mz] \le 2\|M\|_F^2$; die Schätzungen mitteln als $\frac{1}{N}\sum_k z_k^\top M z_k$ aus.*

Beweis. Klassisches Resultat [16]; moderne Genauigkeitsanalyse z. B. [17]. □

Proposition 13 (Wirkung der Matrixexponentialfunktion)**.** *Die Vektorwirkung $e^{tA}b$ kann stabil und mit kontrolliertem Fehler ohne Vollmatrix-Faktorisierung berechnet werden (`expm_multiply`/Skalierung+trunk. Taylor).*

Beweis. Siehe [18]. □

Literatur (Primärquellen)

Literatur

[1] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics 143, CUP (2001). URL: https://books.google.com/books?id=gsJwPjbeYuIC.

[2] K. Kuwae, T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Commun. Anal. Geom. **11** (2003), 599–673. DOI: 10.4310/CAG.2003.v11.n4.a1.

[3] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer (1980 reprint). PDF: https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/kato1.pdf.

[4] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press (1972). PDF: https://www.astrosen.unam.mx/~aceves/Metodos/ebooks/reed_simon1.pdf.

[5] M. Fukushima, T. Shima, *On a spectral analysis for the Sierpiński gasket*, Potential Anal. **1** (1992), 1–35. PDF: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00249784.pdf.

[6] N. Riane, C. David, *Laplacian on the Sierpiński tetrahedron: explicit spectrum and counting function*, arXiv:1703.05793 (2017). PDF: https://arxiv.org/pdf/1703.05793.

[7] A. Grigor'yan, A. Telcs, *Sub-Gaussian estimates of heat kernels on infinite graphs*, Duke Math. J. **109** (2001), 451–510. URL: https://projecteuclid.org/journals/duke-mathematical-journal/volume-109/issue-3/Sub-Gaussian-estimates-of-heat-kernels-on-infinite-graphs/10.1215/S0012-7094-01-10932-0.full.

[8] A. Grigor'yan, J. Hu, T. Kumagai, *Two-sided estimates of heat kernels on metric measure spaces*, arXiv:1205.5627 (2012). PDF: https://arxiv.org/pdf/1205.5627.

[9] A. Grigor'yan, J. Hu, T. Kumagai, *Two-sided estimates of heat kernels on metric measure spaces*, Proc. LMS **109** (2014), 353–404.

[10] J. Kigami, *Local Nash inequality and inhomogeneity of heat kernels*, Proc. LMS **89** (2004), 525–544. PDF: https://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~kigami/ihhe3.pdf.

[11] E. B. Curtis, J. A. Morrow, *The Dirichlet-to-Neumann map for a resistor network*, SIAM J. Appl. Math. **51** (1991), 1011–1029. PDF: https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/0151051?download=true.

[12] E. B. Curtis, J. A. Morrow, *Inverse Problems for Electrical Networks*, World Scientific (2000). PDF: https://sites.math.washington.edu/~curtis/book.pdf.

[13] B. Nachtergaele, R. Sims, *Lieb–Robinson bounds and the exponential clustering theorem*, Commun. Math. Phys. **265** (2006), 119–130. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00220-006-1556-1.

[14] D. Poulin, *Lieb–Robinson Bound and Locality for General Markovian Quantum Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010), 190401. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.190401.

[15] T. Barthel, M. Kliesch, *Quasi-locality and efficient simulation of Markovian quantum dynamics*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012), 230504. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.230504.

[16] M. F. Hutchinson, *A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for Laplacian smoothing splines*, Commun. Statist. Simula. Comput. **18** (1989), 1059–1076.

[17] M. Skorski, *A Modern Analysis of Hutchinson's Trace Estimator*, arXiv:2012.12895 (2020).

[18] A. H. Al-Mohy, N. J. Higham, *Computing the Action of the Matrix Exponential, with an Application to Exponential Integrators*, SIAM J. Sci. Comput. **33** (2011), 488–511. PDF: https://eprints.maths.manchester.ac.uk/1591/1/alhi11.pdf.

[19] V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, *Completely positive dynamical semigroups of N-level systems*, J. Math. Phys. **17** (1976), 821–825.

[20] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys. **48** (1976), 119–130. PDF: https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-48/issue-2/On-the-generators-of-quantum-dynamical-semigroups/cmp/1103899849.full.