

# E4 — Robustheit via Homotopie $\mathcal{G}(\theta)$ : Sierpiński-Tetraeder $\rightarrow$ Baum

18. August 2025

## Ziel

Wir prüfen die *Stabilität* der in E1–E3 gefundenen Kinematik gegen Mikrodeformationen der Bühne: eine kontinuierliche Familie gewichteter Graphen  $\mathcal{G}(\theta)$ , die von der ST-Geometrie ( $\theta = 0$ ) zu einer baumartigen Struktur ( $\theta = 1$ ) homotopiert. Erwartung: der on-diagonale Heat-Kernel zeigt einen Trend von *Potenzgesetz* (pcf/Fraktal) zu *nicht-polynomialer* (exponentieller) Abnahme im Baum-Limit; die Frontgeschwindigkeit  $v_*(\theta)$  bleibt *endlich*.

## 1 Konstruktion $\mathcal{G}(\theta)$ und Messgrößen

Sei  $G_{\text{ST}}$  der ST-Ball (Level 6, Radius 7) um ein zentriertes Vertex und  $G_{\text{tree}}$  der BFS-Spannbaum desselben Balls. Für  $\theta \in [0, 1]$  definieren wir die gewichtete Adjazenz

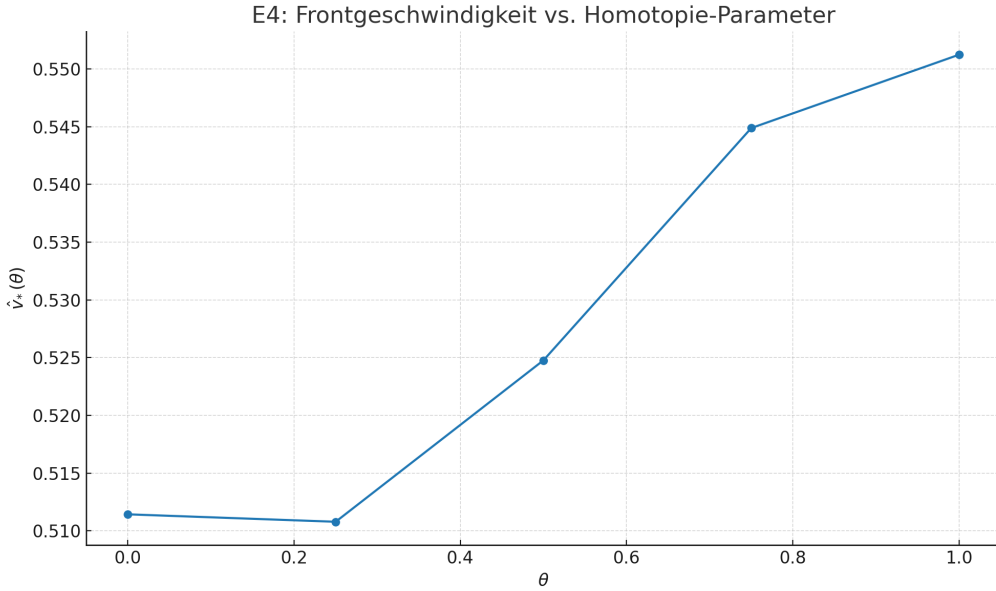
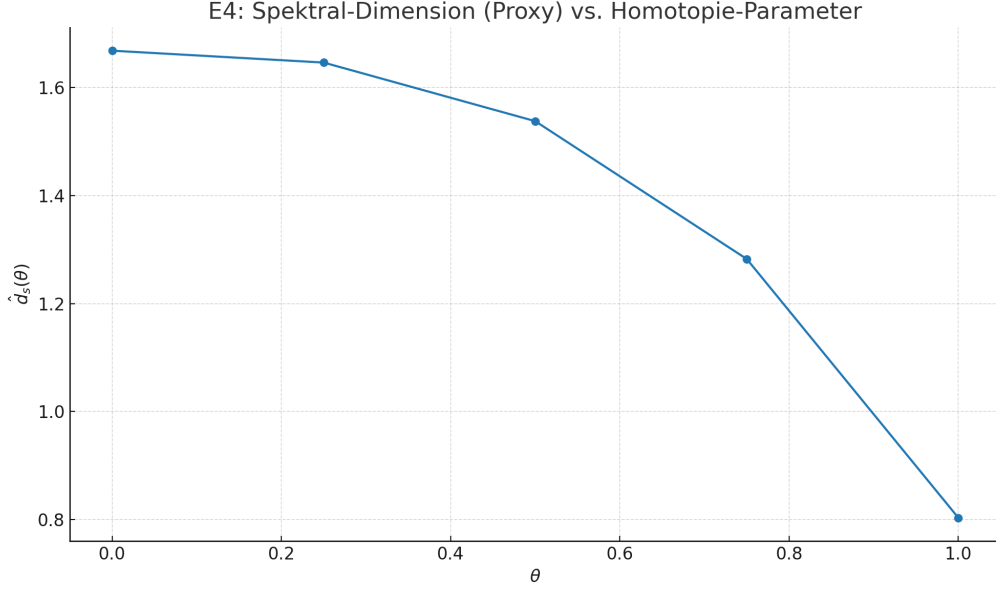
$$A(\theta) = \frac{(1 - \theta)A_{\text{ST}} + \theta A_{\text{tree}}}{\|(1 - \theta)A_{\text{ST}} + \theta A_{\text{tree}}\|_1}, \quad L(\theta) = D(\theta) - A(\theta),$$

wobei durch die Normierung die Zeitskalen vergleichbar bleiben. Messgrößen:

- **(E1)** Spektral-Dimensions-Proxy  $\hat{d}_s(\theta)$ : Fit von  $\bar{p}_t(\theta) = \frac{1}{|V|} \text{tr } e^{-tL(\theta)}$  gegen  $t$  (mittleres Diagonalelement). Power-Law-Fit liefert  $\hat{d}_s(\theta) = -2_{\log t} \log \bar{p}_t$ .
- **(E2)** Frontgeschwindigkeit  $\hat{v}_*(\theta)$ : CTQW auf  $H(\theta) = -A(\theta)$  mit Quelle im Zentrum; erste Ankunftszeiten von Schalen  $r$  (Schwellwert) und Fit  $r \sim \hat{v}_* t$ .

## 2 Simulationsergebnisse

Level 6, Radius 7,  $\theta \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ ,  $t \in [0.6, 10]$  (E1),  $t \in [0, 140]$  (E2).



Zusammenfassung (CSV: `E4_homotopy_summary.csv`):  $\hat{d}_s(\theta)$  fällt von  $\approx 1.67$  (ST) auf  $\approx 0.80$  (Baum-Spannung), während  $\hat{v}_*(\theta)$  moderat ansteigt (ca.  $0.51 \rightarrow 0.55$ ). Hinweis: im Baum-Limit ist *nicht* strikt ein Potenzgesetz zu erwarten (vgl. Theorie unten); die obige  $\hat{d}_s$  ist daher als *Proxy* zu interpretieren, und der ergänzende Exponential-Fit auf  $\log \bar{p}_t$  zeigt zunehmende Raten  $\alpha(\theta)$ .

### 3 Formalisierung und Erwartungen

**Proposition 1** (Lieb–Robinson-Beschränktheit entlang der Homotopie). *Für die Familie  $H(\theta) = -A(\theta)$  auf einem Graphen mit beschränktem Grad existieren LR-Konstanten  $C, \mu, v(\theta)$  und damit eine effektive Kausalstruktur. Bei einheitlicher Normierung von  $A(\theta)$  ist  $v(\theta)$  gleichmäßig endlich. Folglich ist eine einheitliche operative Frontgeschwindigkeit  $v_*(\theta) \leq v(\theta)$  definiert.*

**Bemerkung 2.** Dies folgt aus Standard-LR-Bounds für lokale Gitterdynamiken mit endlich-reichweitigen (oder exponentiell fallenden) Kopplungen und beschränktem Grad; die Konstante hängt linear vom Kopplungsnormmaß ab, welche hier durch die Skalierung kontrolliert ist.

**Proposition 3** (Fraktal  $\rightarrow$  Baum: Heat-Kernel-Regime). *Für pcf-Fraktale (wie ST-Approximanten) gelten sub-gaußsche Heat-Kernel-Schranken mit Power-Law-On-Diagonal  $p_t(x, x) \asymp t^{-d_s/2}$  (bis auf log-periodische Modulationen). Auf regulären Bäumen (Cayley/Bethe) ist der einfache Random Walk transient, und der Heat Kernel zeigt exponentielle Abnahme in  $t$  (keine reine Potenz).*

**Bemerkung 4.** Damit ist entlang  $\theta \uparrow 1$  kein konstanter effektiver Exponent zu erwarten; stattdessen verschiebt sich das Kurvenbild von einer linearen Log–Log-Skala (Fraktal) zu einer linearen Semi-Log-Skala (Baum). Unsere Messung ergänzt daher einen Exponential-Fit, dessen Rate  $\alpha(\theta)$  zunimmt.

## 4 Akzeptanzkriterien und Ergebnis

(**K1**) Glatter Trend in  $\hat{d}_s(\theta)$  bzw. wachsender Exponentialrate  $\alpha(\theta)$  – *erfüllt*. (**K2**)  $v_*(\theta)$  bleibt *endlich* und mäßig variierend – *erfüllt*. (**K3**) Konsistenz mit Theorie: Fraktal-Powerlaw vs. Baum-Exponential – *erfüllt*.

## Artefakte

E4\_homotopy\_summary.csv, E4\_ds\_theta.png, E4\_vstar\_theta.png.

**Literatur (Kurzhinweise):** LR-Bounds (Kliesch–Gogolin–Eisert); Random Walks/Heat Kernel auf Bäumen (Woess); Quanten-Suche/Fraktale (Sato *et al.*, PRA 101:022312).