# E3 — Operative Kinematik auf dem ST-Ur-Graph: Emergente Lorentz-Invarianz mit $v_*$ als Invariant

18. August 2025


**Zusammenfassung**

Wir etablieren die *kinematische* Ebene des PoC: Aus dem in E2 nachgewiesenen effektiven Lichtkegel (Lieb–Robinson) mit *invarianter Ausbreitungsgeschwindigkeit* $v_*$ konstruieren wir operativ eine Lorentz-Kinematik. Zentral ist die dimensionslose Geschwindigkeit $u := v/v_*$ und der Lorentz-Faktor $\gamma(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$. Der theoretische Teil folgt Ignatowsky/Pal (Relativität aus Prinzipien ohne Maxwell-Input), implementiert über Bondis Radar-/$k$-Kalkül; der experimentelle Teil spezifiziert präzise Messprotokolle auf ST-Approximanten (Radarzeiten, Dopplerfaktoren, Komposition von Geschwindigkeiten, Zeitdilatation). Akzeptanzkriterien und numerische Auswertung werden angegeben.


## 1 Axiome und Ableitung der Lorentz-Kinematik ohne Lichtpostulat

**Axiome.** (i) *Relativitätsprinzip* (alle Inertialsysteme äquivalent), (ii) *Homogenität* von Raum und Zeit, (iii) *Isotropie* im IR (gerichtete Mittelung auf dem ST, Sec. 2). Aus diesen Annahmen folgt, dass die zulässigen Inertial-Transformationen eine eindimensionale Geschwindigkeitsgruppe bilden; je nach einem Parameter $\kappa \in \{0, 1/c^2\}$ erhält man Galilei ($\kappa = 0$) bzw. Lorentz ($\kappa > 0$) [1, 2, 3, 4].

**Ergebnis.** Es existiert eine *invariante Geschwindigkeitsskala* $c_{\text{inv}}$ (hier operational gleich $v_*$ aus E2), so dass mit $u := v/c_{\text{inv}}$ die Transformationen

$$t' = \gamma\,(t - ux/c_{\text{inv}}), \qquad x' = \gamma\,(x - ut), \qquad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

und die Komposition $u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv}$ gelten. Dies lässt sich rein aus Gruppenaxiomen, Symmetrien und der Existenz der Skala $c_{\text{inv}}$ zeigen (Ignatowsky/Pal).

**Radar/$k$-Kalkül.** Ohne Vorgriff auf Feldgleichungen lässt sich die Metrikstruktur aus *Radarzeiten* (Ping/Echo) gewinnen; der *Bondi-$k$-Faktor* ist der (radiale) Dopplerfaktor. Aus $k(u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ folgt $\gamma(u) = \frac{1}{2}\,(k + 1/k)$ und die Additivität der Rapidität $\theta = \ln k$ (also $\theta(u \oplus v) = \theta(u) + \theta(v)$).

## 2 Operative Umsetzung auf ST-Approximanten

Wir arbeiten auf zentralen ST-Bällen (E2), definieren $v_*$ als gemessene Frontgeschwindigkeit und verwenden Radarprotokolle mit Signalen, die sich (im Mittel) mit $v_*$ ausbreiten.

**P1**. **IR-Isotropie:** Wähle viele Richtungen (Shell-Sampling) und prüfe, dass die Frontzeit $t_\varepsilon(d)$-Geraden gleiche Steigung (innerhalb Toleranz) haben. Mittelwert definiert $v_*$, Streuung misst Restanisotropie.

**P2.** **Radar-Synchronisation:** Beobachter $A$ (ruhig) sendet zwei Pings im Eigenabstand $\Delta\tau_A$; Beobachter $B$ (gleichförmig relativ zu $A$) misst Empfangsabstand $\Delta t_B$. Der empirische $k$-Faktor ist $k := \Delta t_B/\Delta\tau_A$. Rollenwechsel liefert $1/k$.

**P3.** **Gamma aus $k$:** $\hat{\gamma} = \frac{1}{2}(k + 1/k)$; die zugehörige $u$-Schätzung ist $\hat{u} = \sqrt{1 - 1/\hat{\gamma}^2}$.

**P4.** **Komposition:** Drei Beobachter $A, B, C$; messe $k_{AB}$, $k_{BC}$; prüfe $k_{AC} \stackrel{?}{=} k_{AB}\, k_{BC}$ (Rapiditäts-Additivität). Daraus folgt die Einstein'sche Additionsformel.

**P5.** **Zeitdilatation:** Eine *Uhr* (lokaler Oszillator) bewegt sich mit Beobachter $B$; vergleiche $N$ Eigenperioden $\Delta\tau_B$ mit der Radarzeit-Spanne bei $A$. Erwartet: $\Delta t_A = \gamma\, \Delta\tau_B$.

**Signale/Beobachter.** Signale sind Fronten der Dynamik (CTQW/Tight-Binding), d. h. Levelsets von $|U_{ij}(t)|$; Beobachter sind *Weltenlinien* $x_A(t)$, $x_B(t)$ auf Pfadnähe einer Geodäte im ST-Ball. In der 1D-Ketten-Validierung sind dies Gittersites mit $x_B(t) = x_B(0) + u\, v_*\, t$ (diskrete Approximation).

## 3 Akzeptanzkriterien

- **K1 (Gamma-Law):** Für $u \in \{0.2, 0.4, 0.6\}$ liegt $\hat{\gamma}(u)$ innerhalb $2\sigma$ der Kurve $\gamma(u) = 1/\sqrt{1 - u^2}$.
- **K2 (Rapidität):** $\theta = \ln k$ addiert (innerhalb Fehlerbalken) für Ketten- und ST-Setups.
- **K3 (Addition):** $\hat{u}_{AC}$ stimmt (innerhalb $2\sigma$) mit $\frac{u_{AB}+u_{BC}}{1+u_{AB}u_{BC}}$ überein.
- **K4 (IR-Isotropie):** Richtungs-Spread der $\hat{v}_*$-Schätzungen $\leq 20\%$ (Level 6+).

## 4 Numerik-Plan (Kette $\to$ ST)

**N1.** **Kette (Goldstandard):** Bestimme $v_* = 2J$ analytisch; simulierte Radarzeiten liefern $k(u)$ und $\gamma(u)$ (Kontrollplot).

**N2.** **ST (Level 5/6):** Verwende die in E2 aufgebauten Bälle; generiere *Weltenlinien* entlang nahezu-geodätischer Pfade, führe Radarprotokolle P2–P5 aus, fit $\hat{\gamma}(u)$.

**N3.** **Bootstrap/Resampling:** Über Richtungen/Shells und Schwellen $\varepsilon$ mitteln; erzeuge CI für $\gamma$-Residuen.

## 5 Skizzierte Beweise und Begründungen

**(S1) Lorentz ohne Licht.** Aus Relativität + Homogenität + Isotropie folgt (Ignatowsky/Pal) eine Transformationsgruppe mit Parameter $\kappa$; $\kappa > 0$ induziert eine Invariantgeschwindigkeit $c_{\text{inv}}$ und die Lorentz-Form mit $\gamma(u)$. Proofs: [1, 2, 3, 4].

**(S2) Radar/Kalkül.** Der Bondi-$k$-Faktor ist direkt aus Ping/Echo-Intervallen definiert; daraus folgen $\gamma = \frac{1}{2}(k + 1/k)$ und Rapiditätsadditivität $\theta = \ln k$ [5].

**(S3) LR-Kegel $\Rightarrow$ operative $v_*$.** Der LR-Satz liefert $\|[A(t), B]\| \leq C \exp[-\mu(d - vt)]$; daraus folgen lineare Frontzeiten $t_\varepsilon(d)$ und eine wohldefinierte Skala $v_*$ als $\varepsilon \downarrow 0$ (E2). Für kurze Reichweite/uniforme Schranken siehe [6, 7].

## Implementierungsanhang (Pseudo-Code)

**C1. Radar auf Kette:** Wähle $u$; setze Weltenlinie $x_B(t)$; bestimme Eintreffzeiten zweier nacheinander gesendeter Fronten (Schwelle $\varepsilon$) am $x_B(t)$. Bestimme $k = \Delta t_B / \Delta \tau_A$ und $\hat{\gamma}$.

**C2. ST:** Erzeuge Pfad $P$ (kürzester Pfad) durch den Ball; definiere diskrete Weltenlinie entlang $P$; wiederhole wie oben und aggregate über Pfade/Schwellen.

**Ausblick.** Mit $\gamma(u)$, Rapiditäten und Komposition ist die Kinematik vollständig. Dynamische Tests (E4) prüfen Lorentz-Invarianz von Spektren/Korrelationen (z. B. isotrope lineare Dispersionsrelationen, $z = 1$).

## Literatur


[1] P. B. Pal, *Nothing but Relativity*, arXiv:physics/0302045 (2003). `https://arxiv.org/pdf/physics/0302045`.

[2] J. W. Gannett, *Nothing but Relativity, Redux*, arXiv:1005.2062 (2010). `https://arxiv.org/pdf/1005.2062`.

[3] S. Datta, *A Revisit to Lorentz Transformation without Light*, arXiv:2212.03706 (2022). `https://arxiv.org/pdf/2212.03706`.

[4] O. Čertík, *Simple derivation of SR without the speed-of-light axiom*, arXiv:0710.3398 (2007). `https://arxiv.org/pdf/0710.3398`.

[5] PhysicsForums Insight: *Relativity using Bondi k-calculus* (2017). `https://www.physicsforums.com/insights/relativity-using-bondi-k-calculus/`.

[6] M. C. Tran *et al.*, *Lieb–Robinson Light Cone for Power-Law Interactions*, Phys. Rev. Lett. 127, 160401 (2021).

[7] T. Kuwahara *et al.*, *Effective light cone and digital quantum simulation of many-body dynamics*, Nat. Commun. 15, 2147 (2024).


# 6 Numerik: Radar per Echo (Bondi) auf Kette & ST-Pfad

Wir implementieren das *Echo-Protokoll* (Bondi-$k$-Kalkül): A sendet zwei Pulse mit Emissionsabstand $\Delta T$; B bewegt sich geradlinig mit $u = v/v_*$ fort. Beim Eintreffen reflektiert B sofort; A misst die Echozeiten $T_1, T_2$. Aus dem Verhältnis

$$\frac{T_2 - T_1}{\Delta T} \;=\; k^2 \;=\; \frac{1+u}{1-u}$$

folgen direkt $k = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$, $\gamma = \frac{1}{2}(k + 1/k)$ und die Einstein-Addition (über Rapiditäten).

**Analytischer Check mit invariantem $v_*$.** Unter der Annahme eines invarianten Ausbreitungstempos $c \equiv v_*$ ergeben sich die Echozeiten geschlossen $t_{\text{out}} = (s_0 + c\,s)/(c(1-u))$, $T = t_{\text{out}} + \frac{s_0 + uc\,t_{\text{out}}}{c}$. Die gemessenen Ratios (CSV: `E3_radar_analytic.csv`) reproduzieren $k^2 = (1+u)/(1-u)$ exakt.

**CTQW-Echo (Proof-of-Concept).** Wir implementieren dasselbe Protokoll auf der 1D-Kette (Goldstandard) und im ST-Level-6-Ball (CSV: `E3_radar_chain_fast.json`, `E3_radar_STL6_fast.json`). Die Echo-Erkennung via Schwellwerten $|U_{ij}(t)| \geq \varepsilon$ ist robust, benötigt aber längere Zeithorizonte; die beigefügten „fast"-Runs dienen als funktionsfähiger Minimalnachweis und werden in E4 mit erweitertem Raster verfeinert.

**Quellen.** Bondis $k$-Kalkül (Radar), Relativität ohne Lichtpostulat (Ignatowsky/Pal) und bewegte Spiegel/Doppler: [1, 2, 3, 4].

## Literatur


[1] P. B. Pal, *Nothing but Relativity*, arXiv:physics/0302045 (2003).

[2] *Relativistic Doppler effect*, Wikipedia (Zugriff 2025-08-17).

[3] *Bondi k-calculus*, Wikipedia (Zugriff 2025-08-17).

[4] B. Rothenstein, I. Damian, *Doppler Effect with reflection on a moving mirror*, arXiv:physics/0508134.