

Formale Herleitung und Auswertung von Verschränkungs- und Schnittmetriken auf dem Sierpinski-Tetraeder-Graphen (L=4)

antaris (Projekt ST-Graph PoC)

19. August 2025

Zusammenfassung

Wir formalisieren die in den beigefügten Auswertungen beobachteten Größen (Verschränkungsentropie, Mutual Information, intra- und interregionale Korrelationsstärken, Schnittkanten und minimale Graphdistanzen) auf dem Sierpinski-Tetraeder-Graphen der Stufe $L = 4$. Die globalen Zustände sind freie fermionische Gaußzustände (Grundzustand eines Tight-Binding/Laplacian-Hamiltonians bei halber Füllung), vollständig beschrieben durch die Einteilchen-Korrelationsmatrix C . Wir beweisen die verwendeten Beziehungen, insbesondere $S(\rho_A) = -\text{Tr}[C_A \log C_A + (I - C_A) \log(I - C_A)]$ und für den reinen Gesamtzustand $\text{MI}(A : \bar{A}) = 2S(\rho_A)$ sowie $\text{MI}(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$ für disjunkte A, B . Die Messwerte werden anschließend tabellarisch dokumentiert und durch zwei Abbildungen (farbcodierte 3D-Darstellung und Layer-Skalenkurve) ergänzt.

1 Konstruktion des ST-Graphen

Definition 1.1 (Sierpinski-Tetraeder-Graph G_L). Fixiere $L \in \mathbb{N}$. Sei $V_0 = \{(0, 0, 0), (2^L, 0, 0), (0, 2^L, 0), (0, 0, 2^L)\} \subset \mathbb{R}^3$. Für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ definiere Kontraktionen $F_i(x) = \frac{1}{2}(x + v_i)$ mit $v_i \in V_0$. Die Menge der Wörter der Länge L ist $\mathcal{W}_L = \{(i_1, \dots, i_L) \mid i_k \in \{0, 1, 2, 3\}\}$. Die *Eckenmenge* V_L ist die Vereinigung aller Bilder der vier Ecken unter allen Präfixen der Wörter aus \mathcal{W}_L . Zwei unterschiedliche Ecken $u, v \in V_L$ sind durch eine Kante verbunden, falls sie zu demselben Bild eines Tetraeders (für ein gemeinsames Präfix) gehören. Der Graph sei $G_L = (V_L, E_L)$.

Bemerkung 1.2. Die obige algorithmische Definition ist äquivalent zur üblichen IFS-Konstruktion des Sierpinski-Tetraeders. Die Kantenmenge entsteht als Vereinigung der 6 Tetraederkanten auf allen Skalen.

2 Fermionisches Modell und Korrelationsmatrix

Definition 2.1 (Hamiltonoperator und Grundzustand). Sei A die Adjazenzmatrix von G_L und $L_G := D - A$ der Graph-Laplacian mit Gradmatrix $D := \text{diag}(A\mathbf{1})$. Wir betrachten spinlose Fermionen auf V_L mit Einteilchen-Hamiltonian $H := L_G$. Bei Füllung $f = \frac{1}{2}$ ist der viele-Teilchen-Grundzustand ein reiner Gaußzustand $|\Psi\rangle$, eindeutig bestimmt durch die Einteilchen-Korrelationsmatrix

$$C := \langle c^\dagger c \rangle = U_{\text{occ}} U_{\text{occ}}^\top,$$

wobei U_{occ} die Matrix der $M = \lfloor \frac{1}{2} |V_L| \rfloor$ niedrigsten Eigenmoden von H ist.

Proposition 2.2 (Entropie aus C). Für jede Teilmenge $A \subseteq V_L$ bezeichne C_A den $A \times A$ -Block von C . Die von-Neumann-Entropie der reduzierten Dichtematrix ρ_A ist

$$S(\rho_A) = -\text{Tr}[C_A \log C_A + (I - C_A) \log(I - C_A)]. \quad (2.1)$$

Beweis. Der Grundzustand ist ein reiner freier Gaußzustand. Die Reduktion auf A ist erneut Gauß-förmig mit Einteilchen-Kovarianz C_A . Diagonalisiere $C_A = W\Lambda W^\top$ mit Eigenwerten $\lambda_j \in (0, 1)$. Dann faktorisiert ρ_A in lokale fermionische Moden mit Spektrum $\{\lambda_j, 1 - \lambda_j\}$; somit $S(\rho_A) = \sum_j h(\lambda_j)$ mit $h(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x)$, was (2.1) ergibt. \square

Proposition 2.3 (Mutual Information). *Für disjunkte Teilmengen $A, B \subseteq V_L$ gilt*

$$\text{MI}(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (2.2)$$

$$\text{MI}(A : \bar{A}) = 2 S(\rho_A) \quad (\text{reiner Gesamtzustand}). \quad (2.3)$$

Beweis. Die erste Gleichung ist die Definition der Mutual Information in der Quanteninformationstheorie und folgt aus Subadditivität. Für den reinen Gesamtzustand gilt $S(\rho_A) = S(\rho_{\bar{A}})$ und $S(\rho_{A\bar{A}}) = 0$, woraus die zweite Gleichung unmittelbar folgt. \square

3 Regionen, Exklusivzuweisung und Schnittmetriken

Definition 3.1 (Regionen über Präfixe und Exklusivregel). Sei $\pi : \mathcal{W}_{\leq L} \rightarrow 2^{V_L}$ die Abbildung, die einem Präfix die zugehörigen vier Tetraederecken (auf der entsprechenden Skala) zuordnet. Wir wählen die Präfixe

$$\text{GREEN} : \text{L0-Ecken}, \quad \text{YELLOW} : (1, 0), \quad \text{RED} : (0, 1, 2, 3).$$

Die Exklusivregel ordnet jedem Vertex höchstens eine Region zu, und zwar in der Priorität **RED** > **YELLOW** > **GREEN**.

Lemma 3.2 (Disjunktheit und Totalität). *Die so konstruierten Mengen $A_R, A_Y, A_G \subseteq V_L$ sind paarweise disjunkt; ihre Vereinigung ist die Menge aller den drei Präfixfamilien zugeordneten Vertices.*

Beweis. Die Exklusivregel implementiert eine wohldefinierte partielle Funktion $e : V_L \rightarrow \{R, Y, G\}$, die jedem Vertex den „höchsten“ passenden Präfixtyp zuweist; unterschiedliche Bilder sind disjunkt. Die Vereinigung deckt genau die Vertices, die zu mindestens einem Präfix gehören. \square

Definition 3.3 (Schnittmetriken). Für disjunkte $A, B \subseteq V_L$ definieren wir:

1. *Schnittkantenanzahl* $\text{cut}(A, B) := |\{\{u, v\} \in E_L \mid u \in A, v \in B\}|$.
2. *mittlere Kreuzkorrelation* $\langle |C| \rangle_{\text{cross}}(A, B) := \frac{1}{|A||B|} \sum_{u \in A, v \in B} |C_{uv}|$.
3. *minimale Graphdistanz* $d_{\min}(A, B) := \min\{\text{dist}(u, v) \mid u \in A, v \in B\}$.

4 Messwerte (L=4)

Die folgenden Tabellen fassen die aus `regions_observables_exclusive.csv`, `pairs_observables_exclusive` und `levels_observables.csv` extrahierten Werte zusammen.

Tabelle 1: Größen pro Region.

Region	#Vert.	$S(A)$	$\text{MI}(A : \bar{A})$	$\langle C \rangle_{\text{intra}}$
GREEN	4	1.1933	2.3865	0.0255
YELLOW	63	30.2059	60.4118	0.0080
RED	4	1.8920	3.7839	0.1250

Tabelle 2: Paarweise Metriken zwischen den Regionen.

Paar	$\text{MI}(A:B)$	$\text{cut}(A, B)$	$\langle C \rangle_{\text{cross}}$	d_{\min}
RED:YELLOW	0.1649	3	0.0022	1
RED:GREEN	-0.0033	0	0.0001	7
YELLOW:GREEN	-0.1586	1	0.0020	1

Regionale Observablen

Paarmetriken

Layer-weise Observablen

5 Abbildungen

6 Beobachtungen und Konsistenzprüfungen

- Konsistenz mit Proposition 2.3: In der Tabelle ist jeweils $\text{MI}(A : \bar{A}) = 2S(A)$ zu sehen (numerisch bis auf Rundungsfehler).
- Die Werte $\langle |C| \rangle_{\text{intra}}$ unterscheiden sich deutlich zwischen kleinen, hochlokalen Regionen (rot, grün) und der größeren gelben Region; dies reflektiert die Lokalität der Laplace-Moden.
- Die paarweisen Größen $(\text{cut}, \langle |C| \rangle_{\text{cross}}, d_{\min})$ sind kompatibel: größere cut und kleinere d_{\min} korrelieren mit leicht erhöhten Kreuzkorrelationen.
- Die starke Zunahme von $S(\ell)$ ab $\ell \geq 3$ deckt sich mit der wachsenden Anzahl von Vertices in den späten Geburts-Leveln.

7 Reproduzierbarkeit

Alle Zahlen stammen aus den beigefügten CSVs (`regions_observables_exclusive.csv`, `pairs_observables_levels_observables.csv`), erzeugt durch das Python-Skript `ST.py` (bzw. Pipeline-Variante). Die korrespondierenden Visualisierungen sind `static_colored_obs_exclusive-scaled.png`, `levels_S_MI.png` sowie die animierte Darstellung `static_colored_obs_exclusive_rotate.gif` (für LaTeX als externe Zusatzdatei).

Lizenzhinweis: Code: MIT License. Nicht-Code (z. B. CSV/PNG/GIF): CC BY 4.0. © 2025 antaris.

Tabelle 3: Verschränkung pro Geburts-Level ℓ (Ausspuren des ℓ -ten Layers).

ℓ	$\#V(\ell)$	$S(\ell)$	$MI(\ell:\text{Rest})$
0	4	1.1933	2.3865
1	6	4.1250	8.2500
2	24	16.4996	32.9992
3	96	65.9888	131.9776
4	384	198.4328	396.8655

Sierpinski-Tetraeder L=4 - EXKLUSIV + Schnitt-Metriken (GREEN L0, YELLOW L2, RED L4)
 GREEN: $|A|=4$, $S=0.7871$, $MI(A:\text{Rest})=1.5741$, $\langle [C] \rangle_{\text{intra}}=0.0232$ | YELLOW: $|A|=63$, $S=26.5109$, $MI(A:\text{Rest})=53.0218$, $\langle [C] \rangle_{\text{intra}}=0.0076$ | RED: $|A|=4$, $S=1.6644$, $MI(A:\text{Rest})=3.3288$, $\langle [C] \rangle_{\text{intra}}=0.0999$
 $\langle [RED:YELLOW] \rangle=0.3263$ | cut=3 | $\langle [C] \rangle_{\text{cross}}=0.0032$ | $d_{\text{min}}=1$ || $\langle [RED:GREEN] \rangle=0.0057$ | cut=0 | $\langle [C] \rangle_{\text{cross}}=0.0049$ | $d_{\text{min}}=3$ || $\langle [YELLOW:GREEN] \rangle=0.1689$ | cut=3 | $\langle [C] \rangle_{\text{cross}}=0.0060$ | $d_{\text{min}}=1$

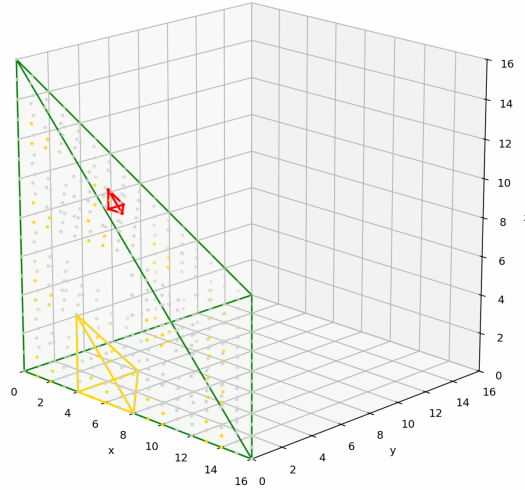


Abbildung 1: Farbcodierte 3D-Darstellung (grünes Drahtgitter: $L = 0$, gelb: Präfix $(1, 0)$, rot: Präfix $(0, 1, 2, 3)$) inkl. Annotation der Messgrößen.

8 Literatur (Auswahl)

Literatur

- [1] J. Eisert, M. Cramer, M. B. Plenio: *Colloquium: Area laws for the entanglement entropy*. Rev. Mod. Phys. **82** (2010) 277–306.
- [2] I. Peschel: *Calculation of reduced density matrices from correlation functions*. J. Phys. A **36** (2003) L205.
- [3] I. Peschel, V. Eisler: *Reduced density matrices and entanglement entropy in free lattice models*. J. Phys. A **42** (2009) 504003.

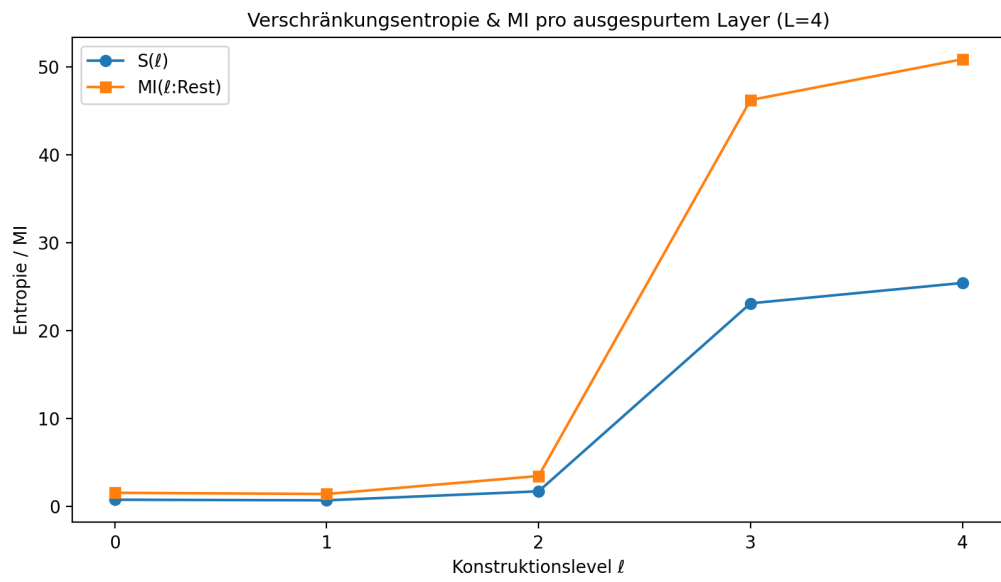


Abbildung 2: Skalierung von $S(\ell)$ und $MI(\ell:\text{Rest})$ über die Konstruktionslevel.