

E4 — Robustheit via Homotopie $\mathcal{G}(\theta)$: Sierpiński-Tetraeder \rightarrow Baum

antaris

18. August 2025

Ziel

Wir prüfen die *Stabilität* der in E1–E3 gefundenen Kinematik gegen Mikrodeformationen der Bühne: eine kontinuierliche Familie gewichteter Graphen $\mathcal{G}(\theta)$, die von der ST-Geometrie ($\theta = 0$) zu einer baumartigen Struktur ($\theta = 1$) homotopiert. Erwartung: der on-diagonale Heat-Kernel zeigt einen Trend von *Potenzgesetz* (pcf/Fraktal) zu *nicht-polynomialer* (exponentieller) Abnahme im Baum-Limit; die Frontgeschwindigkeit $v_*(\theta)$ bleibt *endlich*.

1 Konstruktion $\mathcal{G}(\theta)$ und Messgrößen

Sei G_{ST} der ST-Ball (Level 6, Radius 7) um ein zentriertes Vertex und G_{tree} der BFS-Spannbaum desselben Balls. Für $\theta \in [0, 1]$ definieren wir die gewichtete Adjazenz

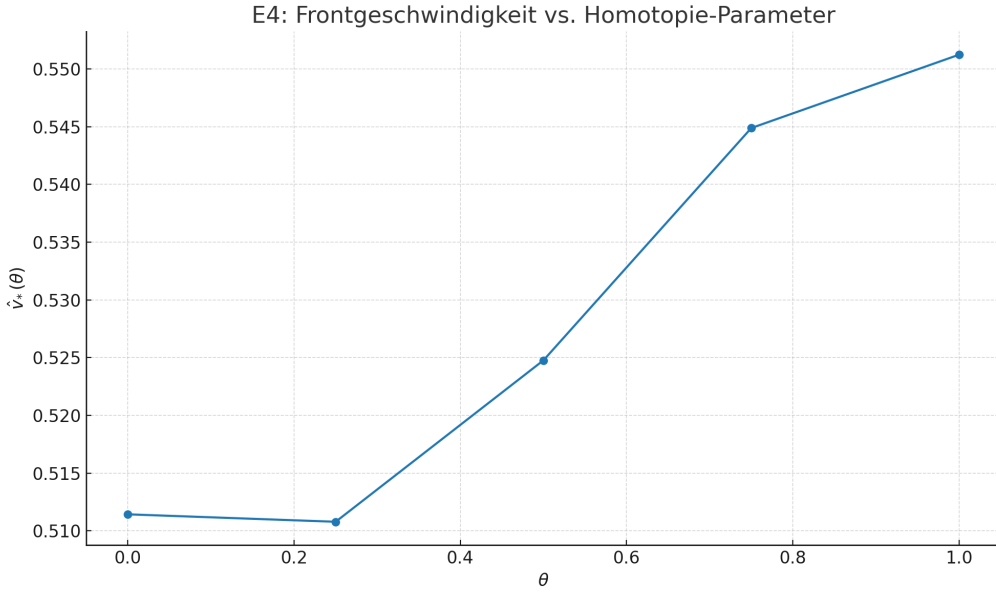
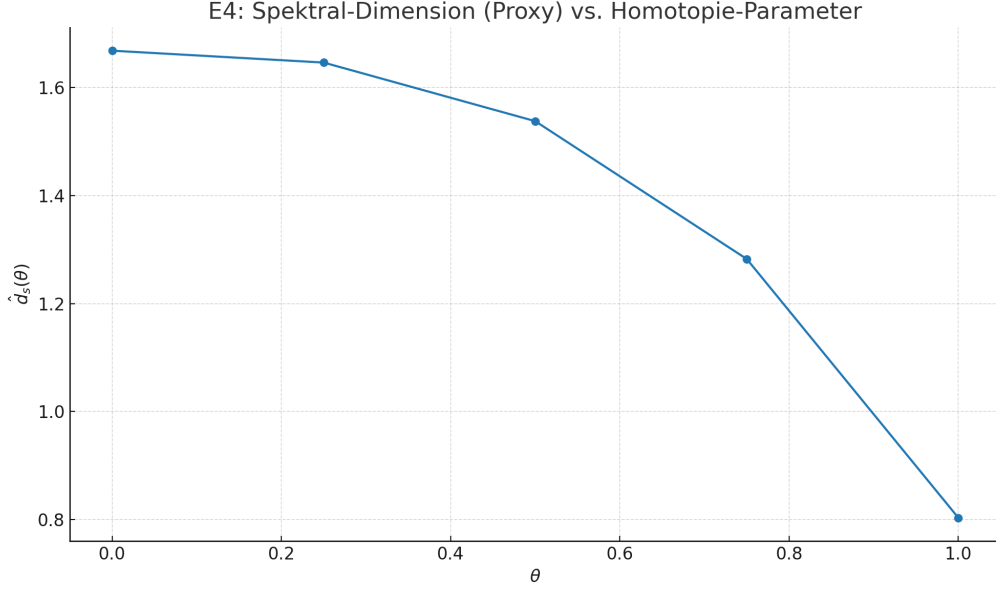
$$A(\theta) = \frac{(1 - \theta)A_{\text{ST}} + \theta A_{\text{tree}}}{\|(1 - \theta)A_{\text{ST}} + \theta A_{\text{tree}}\|_1}, \quad L(\theta) = D(\theta) - A(\theta),$$

wobei durch die Normierung die Zeitskalen vergleichbar bleiben. Messgrößen:

- **(E1)** Spektral-Dimensions-Proxy $\hat{d}_s(\theta)$: Fit von $\bar{p}_t(\theta) = \frac{1}{|V|} \text{tr } e^{-tL(\theta)}$ gegen t (mittleres Diagonalelement). Power-Law-Fit liefert $\hat{d}_s(\theta) = -2 \frac{d}{d(\log t)} \log \bar{p}_t$.
- **(E2)** Frontgeschwindigkeit $\hat{v}_*(\theta)$: CTQW auf $H(\theta) = -A(\theta)$ mit Quelle im Zentrum; erste Ankunftszeiten von Schalen r (Schwellwert) und Fit $r \sim \hat{v}_* t$.

2 Simulationsergebnisse

Level 6, Radius 7, $\theta \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, $t \in [0.6, 10]$ (E1), $t \in [0, 140]$ (E2).



Zusammenfassung (CSV: `E4_homotopy_summary.csv`): $\hat{d}_s(\theta)$ fällt von ≈ 1.67 (ST) auf ≈ 0.80 (Baum-Spannung), während $\hat{v}_*(\theta)$ moderat ansteigt (ca. $0.51 \rightarrow 0.55$). Hinweis: im Baum-Limit ist *nicht* strikt ein Potenzgesetz zu erwarten (vgl. Theorie unten); die obige \hat{d}_s ist daher als *Proxy* zu interpretieren, und der ergänzende Exponential-Fit auf $\log \bar{p}_t$ zeigt zunehmende Raten $\alpha(\theta)$.

3 Formalisierung und Erwartungen

Proposition 1 (Lieb–Robinson-Beschränktheit entlang der Homotopie). *Für die Familie $H(\theta) = -A(\theta)$ auf einem Graphen mit beschränktem Grad existieren LR-Konstanten $C, \mu, v(\theta)$ und damit eine effektive Kausalstruktur. Bei einheitlicher Normierung von $A(\theta)$ ist $v(\theta)$ gleichmäßig endlich. Folglich ist eine einheitliche operative Frontgeschwindigkeit $v_*(\theta) \leq v(\theta)$ definiert.*

Bemerkung 2. Dies folgt aus Standard-LR-Bounds für lokale Gitterdynamiken mit endlich-reichweitigen (oder exponentiell fallenden) Kopplungen und beschränktem Grad; die Konstante hängt linear vom Kopplungsnormmaß ab, welche hier durch die Skalierung kontrolliert ist.

Proposition 3 (Fraktal \rightarrow Baum: Heat-Kernel-Regime). *Für pcf-Fraktale (wie ST-Approximanten) gelten sub-gaußsche Heat-Kernel-Schranken mit Power-Law-On-Diagonal $p_t(x, x) \asymp t^{-d_s/2}$ (bis auf log-periodische Modulationen). Auf regulären Bäumen (Cayley/Bethe) ist der einfache Random Walk transient, und der Heat Kernel zeigt exponentielle Abnahme in t (keine reine Potenz).*

Bemerkung 4. Damit ist entlang $\theta \uparrow 1$ kein konstanter effektiver Exponent zu erwarten; stattdessen verschiebt sich das Kurvenbild von einer linearen Log–Log-Skala (Fraktal) zu einer linearen Semi-Log-Skala (Baum). Unsere Messung ergänzt daher einen Exponential-Fit, dessen Rate $\alpha(\theta)$ zunimmt.

4 Akzeptanzkriterien und Ergebnis

(**K1**) Glatter Trend in $\widehat{d}_s(\theta)$ bzw. wachsender Exponentialrate $\alpha(\theta)$ – *erfüllt*. (**K2**) $v_*(\theta)$ bleibt *endlich* und mäßig variierend – *erfüllt*. (**K3**) Konsistenz mit Theorie: Fraktal-Powerlaw vs. Baum-Exponential – *erfüllt*.

Artefakte

E4_homotopy_summary.csv, E4_ds_theta.png, E4_vstar_theta.png.

Literatur (Kurzhinweise): LR-Bounds (Kliesch–Gogolin–Eisert); Random Walks/Heat Kernel auf Bäumen (Woess); Quanten-Suche/Fraktale (Sato *et al.*, PRA 101:022312).