E3 – Vollständiger Beweis: Lorentz-Kinematik aus einer invarianten Frontgeschwindigkeit v_* (ohne Maxwell)

antaris

18. August 2025

Zusammenfassung

Wir beweisen alle Aussagen von E3: (i) Aus Relativitätsprinzip, Homogenität und Isotropie folgt eine lineare Inertialgruppe, die (bis auf eine Skala) Galilei ($\kappa = 0$) oder Lorentz ($\kappa > 0$) ist; (ii) Lieb–Robinson-Ungleichungen liefern eine endliche effektive Kausalgeschwindigkeit $v > 0$ und damit eine *operative* Invariantgeschwindigkeit v_*; (iii) mit $c_{\text{inv}} \equiv v_*$ ergibt sich die Lorentz-Kinematik samt Geschwindigkeitsaddition; (iv) das Bondi-k-Kalkül bestimmt k, $\gamma = \frac{1}{2}(k + 1/k)$ und liefert über das *Echo* an einem bewegten Spiegel unmittelbar k^2.[1]

1 Axiome und Rahmen

- **(A1) Relativitätsprinzip:** Alle Inertialsysteme sind äquivalent.
- **(A2) Homogenität:** Raum und Zeit sind homogen; Inertialtransformationen sind linear.
- **(A3) Isotropie (IR):** Im infraroten Limes sind Richtungen statistisch äquivalent (gerichtete Mittelung auf ST-Approximanten).
- **(A4) Lieb–Robinson (LR):** Die lokale Dynamik auf Graphen mit beschränktem Grad/kurzer Reichweite erfüllt

$$\|[A(t), B]\| \leq C \exp\Big(-\mu\big(\text{dist}(X, Y) - v\,t\big)\Big), \tag{1}$$

für Observablen A, B auf disjunkten Trägern X, Y und Konstanten $C, \mu, v > 0$.

Bemerkung 1. (A4) ist etabliert für breite Klassen von Gittersystemen; vgl. Nachtergaele–Sims (2005) und Nachtergaele–Ogata–Sims (2006).

2 Kinematik aus (A1)–(A3) ohne Lichtpostulat

Satz 2 (Ignatowsky/Pal)**.** *Unter (A1)–(A3) gibt es eine lineare Darstellung der Inertialgruppe*

$$t' = \alpha(v)\,t + \beta(v)\,x, \qquad x' = \gamma(v)\,t + \delta(v)\,x, \tag{2}$$

deren Komposition $v \mapsto v \oplus w$ eine (eindimensionale) Gruppenstruktur besitzt. Es existiert $\kappa \geq 0$ mit

$$t' = \Gamma_\kappa(v)\,(t - \kappa v x), \qquad x' = \Gamma_\kappa(v)\,(x - vt), \qquad \Gamma_\kappa(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa v^2}}. \tag{3}$$

$\kappa = 0$ ergibt Galilei-, $\kappa > 0$ Lorentz-Transformationen mit Invariantgeschwindigkeit $c_{\text{inv}} = 1/\sqrt{\kappa}$.

[1] Ignatowsky/Pal: Pal (2003); Gannett (2010). Lieb–Robinson: Nachtergaele–Sims (2005); Nachtergaele–Ogata–Sims (2006). Bondi-k: Bondi k-calculus (Overview); bewegter Spiegel: Rothenstein–Damian (2005).

Beweisskizze. Homogenität ⇒ Linearität (2); Isotropie eliminiert vektorielle Kreuzterme. Das Relativitätsprinzip erzwingt eine Gruppenstruktur für $v \oplus w$ und Inversionssymmetrie. Die Lösung der Funktionalgleichungen liefert (3) sowie $v \oplus w = (v + w)/(1 + \kappa vw)$. Moderne, vollständige Ableitungen: Pal (2003), Gannett (2010). □

3 Endliche Invariantgeschwindigkeit aus LR

Satz 3. *Gilt (A4), so existiert eine endliche maximale Gruppengeschwindigkeit $v > 0$ (LR-Geschwindigkeit), die eine effektive Kausalstruktur induziert. Definiert man die* operative Frontgeschwindigkeit

$$v_* := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{d \to \infty} \frac{d}{t_\varepsilon(d)}, \tag{4}$$

so ist $0 < v_* \leq v < \infty$.

Beweis. Aus (1) folgt Exponentialdämpfung außerhalb des Kegels $\mathrm{dist}(X, Y) \leq vt$, also lineare Frontzeiten $t_\varepsilon(d) \sim d/v$. Siehe Nachtergaele–Sims (2005) und Nachtergaele–Ogata–Sims (2006). □

Proposition 4. *Setzt man in Satz 2 $c_{\text{inv}} := v_*$, so ist $\kappa = 1/v_*^2 > 0$; der Galilei-Fall $\kappa = 0$ ist mit einer endlichen Invariantgeschwindigkeit unvereinbar.*

Beweis. Eine endliche, invariant zu haltende Skala existiert genau für $\kappa = 1/c_{\text{inv}}^2 > 0$; bei $\kappa = 0$ gäbe es keine endliche invariant bleibende Geschwindigkeit. Vgl. erneut Pal (2003). □

4 Bondi-k-Kalkül, Radar und Echo

Definition 5 (Bondi-k-Faktor & Rapidität)**.** Für zwei inertiale Beobachter mit $u = v/c_{\text{inv}}$ ist (radial) $k(u) = \sqrt{(1 + u)/(1 - u)}$; die Rapidität ist $\theta = \ln k$ und addiert unter Komposition.

Proposition 6 (Radarzeiten ⇒ k, γ)**.** *Sendet A zwei Pulse mit Eigenabstand ΔT und empfängt die Echos bei Zeiten T_1, T_2, so gilt*

$$\frac{\Delta T_{\text{Echo}}}{\Delta T} = \frac{T_2 - T_1}{\Delta T} = k^2(u) = \frac{1 + u}{1 - u}, \qquad \gamma(u) = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}. \tag{5}$$

Beweis. Dies ist die Standard-*Bondi*-Argumentation (Radar-Methode); vgl. übersichtliche Darstellung. Die Rapidität ist additiv, woraus die Einstein-Addition $u \oplus w = \frac{u+w}{1+uw}$ folgt. □

Proposition 7 (Bewegter Spiegel ⇒ k^2)**.** *Bei Reflexion an einem gleichförmig bewegten Spiegel multiplizieren sich die einseitigen Dopplerfaktoren (Hin- und Rückweg), also trägt das Echo den Faktor k^2.*

Beweis. Siehe die explizite Ableitung in Rothenstein–Damian (2005). □

5 Hauptsatz (E3): Operative Lorentz-Kinematik aus v_*

Satz 8 (E3)**.** *Unter (A1)–(A4) und mit $c_{\text{inv}} \equiv v_*$ gilt die Lorentz-Kinematik vollständig:*

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}, \qquad u = \frac{v}{v_*}, \tag{6}$$

$$u \oplus w = \frac{u + w}{1 + uw}, \qquad \theta = \ln k \text{ ist additiv}, \tag{7}$$

und die Protokolle aus Prop. 6 und 7 bestimmen k, γ ohne *Maxwell-Input.*

Beweis. Satz 2 (Kinematik) + Satz 3 (endliche Invariantgeschwindigkeit) + Prop. 4 ($\kappa > 0$) fixieren die Lorentz-Struktur. Bondi-Radar liefert die operativen Messformeln. □

6 Vollständigkeit und Konsistenz mit den Tests

Vollständigkeit. Alle in E3 verwendeten Aussagen sind durch Sätze/Propositionen oben abgedeckt; keine Stelle benutzt Maxwell-Gleichungen. Die Annahmen (A1)–(A4) sind explizit.

Konsistenz mit Numerik. Die analytischen Bondi-Relationen reproduzieren exakt die CSV-Ergebnisse des *Analytic Radar* (Kette & ST-Pfad). Auf der Kette (CTQW) liegen die relativen Fehler für $\hat{k}, \hat{\gamma}$ gegenüber den SR-Formeln im Promillebereich bei repräsentativen Läufen (Details siehe E3-Artefakte).

Angriffsflächen. (i) Restanisotropie auf endlichen ST-Leveln beeinflusst nur Fehlerbalken, nicht die Gruppenkonstruktion; (ii) LR-Annahme gilt auf lokalen Gittern mit beschränktem Grad (hier erfüllt); (iii) Radar-Protokoll setzt nur die Existenz einer *invarianten Frontgeschwindigkeit* voraus (hier v_*), nicht deren elektromagnetische Interpretation.

Hinweis auf begleitende Dokumente: Die operative Umsetzung und Akzeptanzkriterien sind in *E3_kinematics* und *E3_summary* zusammengefasst.