

TI-on-ST v14.6 (full): Formale Supplementary zur Pipeline, Dynamik, POVMs und MCWF

Ziel: Emergenz der Thermalen Interpretation (TI) auf dem Sierpinski-Tetraeder-Graphen (ST)

antaris

3. September 2025

Zusammenfassung

Dieses Dokument erläutert die *vollständige* formale Grundlage der v14.6 “full” Open-Systems-Pipeline zum ST-Graphen, eng angelehnt an die CLI-Optionen und die Konfigurationsdateien (`run_pipeline_full_open_systems_v14.6.py`, `detector_pixels.json`, `ARGUMENTS_v16.4.md`).¹ Schwerpunkt sind (i) die Operator- und Semigruppen-Struktur (Laplacian, Heat-Kernel, Gibbs-Zustand), (ii) POVM-Detektion inkl. Pixel-Geometrien und Unitär-Mischer, (iii) GKSL-Mastergleichung und Monte-Carlo-Wellenfunktions-Trajektorien (MCWF), sowie (iv) Statistik (Goodness-of-Fit & Äquivalenzttests), *vergleichend* zu Annahmen und Vorhersagen der Thermalen Interpretation (TI) von Neumaier [1, 2, 3, 4, 5]. Nebenbemerkungen zum Render/Output erfolgen nur am Rande.

1 ST-Graph, Laplace-Operator und Heat-Kernel

1.1 Diskreter ST-Graph und Laplacian

Der Sierpinski-Tetraeder-Graph (ST) auf Level L ist ein endlich großer, post-critically finite (pcf) selbstähnlicher Graph. Der (ungewogene) Graph-Laplacian lautet

$$L = D - A,$$

mit Adjazenzmatrix A und Gradmatrix D . Auf p.c.f. Fraktalen bilden Widerstandsformen (resistance forms) die Grundlage der Analysis; die Effektiv-Widerstandsmetrik $R(\cdot, \cdot)$ induziert Sobolev- und Dirichlet-Strukturen [13, 14]. Dies trägt *sub-gaussiane* Heat-Kernel-Schätzungen und spektrale Dimensionen $d_S < 2$ auf typischen Fraktalgraphen [16, 17].²

1.2 Heat-Semigruppe und Gibbs-Zustand

Die (Markov-)Semigruppe

$$K_t := e^{-tL}, \quad t \geq 0,$$

definiert den Heat-Kernel auf Knotenebene (Matrixelemente $K_t(x, y)$). Für p.c.f. Fraktale gelten sub-gaussian Asymptotiken

$$K_t(x, y) \lesssim \frac{1}{V(x, t^{1/d_w})} \exp\left(-c \left(\frac{R(x, y)^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right),$$

¹Zur Codebasis: `run_pipeline_full_open_systems_v14.6.py`. :contentReference[oaicite:0]index=0 Argumente/Optionen (aktualisierte Doku v16.4, argument-nah zu v14.6): `ARGUMENTS_v16.4.md`. :contentReference[oaicite:1]index=1 Detektor-Definitionen: `detector_pixels.json`. :contentReference[oaicite:2]index=2

²Fraktal-Analysis und Widerstandsmetrik: [13, 14]. Sub-Gaussian HK auf (Random/Fractal) Graphs: [16, 17]. Siehe auch Überblick [15].

wobei d_w die walk-Dimension und $V(x, r)$ Volumina in der Widerstandsmetrik sind [14, 16, 17].³

Ein kanonischer Gibbs-Zustand (Dichteoperator) für inverse Temperatur $\beta > 0$ bzgl. L ist

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta L}}{\text{Tr}(e^{-\beta L})}.$$

Er wird im Skript direkt (bzw. indirekt über spektrale Zerlegung von L) gebildet und dient als *a-priori* Zustandsbeschreibung für die TI-Vorhersage von Zählern/Pixeln (s.u.).⁴

Zeitskalierung. Die Option `--s` (oder äquivalente Pipeline-Schalter) skaliert effektive Zeiten $t \mapsto s t$ (und/oder $L \mapsto s^{-1} L$), um Level-abhängige Zeitskalen (Harmonic-Scaling) konsistent zu halten (Hintergrund: Energieskalen und Widerstandsmetriken auf p.c.f. Graphen) [13].⁵

1.3 Spektrale Dimension

Aus dem diagonalen Heat-Kernel gilt heuristisch

$$K_t(x, x) \asymp t^{-d_S/2} \quad (t \downarrow 0),$$

und damit $d_S = -2 \frac{d \log K_t(x, x)}{d \log t}$ (Fit in einem geeigneten Fenster) [15]. In der Pipeline wird d_S über Slope-Fits der log-log-Kurve bestimmt.

2 Detektion als POVM: Pixel, Geometrien, Mischer

2.1 Pixel-Definition und Selektoren

Die Datei `detector_pixels.json` beschreibt K Pixel über Mengen $S_k \subseteq V$ (Knoten), aufgebaut aus *Selektoren* (`selectors`): `sphere`, `gauss3d`, `cone`, `polyhedron`, `address_prefix`, `union`, `exclude` usw.⁶ Formal entsteht für jedes Pixel k ein Effekt-Operator E_k durch Projektion auf den (normalisierten) Indikator P_{S_k} und eine Effizienz $0 \leq \eta_k \leq 1$:

$$E_k = \eta_k P_{S_k}, \quad P_{S_k} = \sum_{x \in S_k} |x\rangle\langle x|.$$

Die Menge $\{E_k\}$ bildet zusammen mit ggf. einem “No-Click”-Effekt E_0 eine POVM, d. h.

$$E_k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^K E_k = \mathbb{I},$$

ggf. nach geeigneter Normierung von Effizienzen/Masken. Dies entspricht der Standard-Messungstheorie mit verallgemeinerten Messungen [11, Ch. 2][12].⁷

³Semigruppen-Grundlagen sind Standard; für fraktale Geometrien siehe [13, 14].

⁴Implementationsnah: Konstruktion von $e^{-\beta L} / e^{-tL}$ über Exponential von L im Code. `:contentReference[oaicite:3]index=3`

⁵Zur Zeitskalierung siehe die Argument-Doku; die v16.4-ARGUMENTS spiegelt das v14.6-Set weitgehend. `:contentReference[oaicite:4]index=4`

⁶JSON-Schema: `detector_pixels.json`. `:contentReference[oaicite:5]index=5`

⁷Die Bildung von E_k erfolgt im Skript in `povm_from_pixels` analog zu obigem Schema (gewichtete Projektoren auf Pixelmengen). `:contentReference[oaicite:6]index=6`

2.2 Unitäre Mischer (--mixer) und 50/50-Beamsplitter

Die Pipeline gestattet `--mixer unitary` mit vorgegebenem $U \in U(K)$ (z. B. aus JSON) *oder* `--mixer beamsplitter_50_50` mit

$$U_{\text{BS}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

oder äquivalenten Konventionen aus der Quantenoptik. Der Mischer definiert eine neue Pixelbasis (“Moden”) durch

$$E'_j = \sum_{k,\ell} U_{jk}^* E_k U_{j\ell},$$

sodass die *Messwahrscheinlichkeit* (TI-Vorhersage) wird

$$p_j^{(\text{TI})} = \text{Tr}(\rho_\beta E'_j).$$

Dies entspricht der Standardbehandlung verallgemeinerter Messungen nach vorgelagerter unitärer Modenmischung [11].⁸

Formale Sicht: Definiert man die (spärliche) Matrix $C \in \mathbb{R}^{K \times |V|}$ mit $C_{k,x} = 1$ für $x \in S_k$ (sonst 0), dann sind $E_k = \eta_k C^\dagger |k\rangle\langle k| C$ und $E'_j = C^\dagger U^\dagger |j\rangle\langle j| U C$. Die TI-Wahrscheinlichkeiten $p^{(\text{TI})}$ werden zu

$$p^{(\text{TI})} = \text{diag}(U C \rho_\beta C^\dagger U^\dagger).$$

3 Dynamik: geschlossen/offen, GKSL und MCWF

3.1 Geschlossene Dynamik (--schro yes)

Bei geschlossener Dynamik wird (falls aktiviert) die Schrödinger-Entwicklung mit Hamiltonoperator H integriert. In der ST-Pipeline wird häufig H aus dem Laplacian gewonnen (`--ham laplacian`), etwa $H = \gamma L$ mit Skalenfaktor $\gamma > 0$ (CLI: `--gamma`). Damit

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)], \quad \rho(0) = \rho_\beta \text{ oder präpariert.}$$

3.2 Offene Dynamik (GKSL, --open yes)

Für offene Systeme implementiert die Pipeline die GKSL-Mastergleichung [6, 7]:

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left(L_{\alpha} \rho(t) L_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha}, \rho(t) \} \right), \quad (1)$$

mit Sprung-/Dephasierungsoperatoren L_{α} und Raten $\gamma_{\alpha} \geq 0$. Typisch:

- **Site-Dephasierung** (`--dephase_site`): $L_x = |x\rangle\langle x|$ für Knoten $x \in V$ (Pure-Dephasing in Ortsbasis).
- **Pixel-Dephasierung** (`--dephase_pixel`): $L_k = \sum_{x \in S_k} |x\rangle\langle x|$ (Dephasing innerhalb eines Pixels).
- **Detektionskanal(e)** (`--det_gamma`): beobachtete Sprünge J_k (s. u.) für MCWF-Klicks; zusätzlich Verlustkanäle `--loss` mit L_{loss} .

Die rechte Seite (1) wird im Skript als `lindblad_rhs_full` ausgewertet, Integration via explizitem RK4 (`integrate_master_rk4_full`) mit Zeitschritt `--dt` und $t \in [0, t_{\text{max}}]$ (`--tmax`).⁹

⁸Im Code wird dies effizient über einen Pixel-Projektionsoperator C umgesetzt (“mode projection”); dann ist $p = \text{diag}(U C \rho C^\dagger U^\dagger)$. :contentReference[oaicite:7]index=7

⁹Vektorisiert/Operatorform im Code: `lindblad_rhs_full`, `integrate_master_rk4_full`. :contentReference[oaicite:8]index=8 Formale Grundlagen GKSL: [6, 7].

3.3 Monte-Carlo-Wellenfunktionsmethode (MCWF, `--traj yes`)

Die MCWF/“Quantum Jumps”-Methode simuliert einzelne Trajektorien $|\psi_t\rangle$ [8, 9, 10]. Unbeobachtete Kanäle (z. B. Dephasierung) gehen in den *effektiven* nicht-hermiteschen Hamiltonoperator

$$H_{\text{eff}} = H - \frac{i}{2} \sum_{\alpha \in \text{unobs}} \gamma_{\alpha} L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha}$$

ein; die stochastischen Sprünge zu beobachteten Kanälen J_k (Detektoren) treten mit Rate $r_k(t) = \gamma_k \langle \psi_t | J_k^{\dagger} J_k | \psi_t \rangle$ auf.¹⁰ Im Skript werden N Trajektorien (`--ntraj`) bis $t_{\text{max}}^{(\text{traj})}$ (`--tmax_traj`) mit Schritt `--dt` simuliert, wahlweise mit `--traj_unobs nojump` (No-Jump für unbeobachtete Kanäle).¹¹

Detektionsoperatoren. Für beobachtete Pixelkanäle k wählt man J_k proportional zur Projektorstruktur des Pixels (ggf. nach Mischer U), z. B. $J_k \propto C^{\dagger} U^{\dagger} |k\rangle\langle k| U C$. Dann ist die MCWF-*Click-Statistik* f_k (relative Häufigkeiten) mit der TI-Vorhersage $p_k^{(\text{TI})} = \text{Tr}(\rho_{\beta} E'_k)$ zu vergleichen (s. u.).

4 Statistik: TI-Vorhersage $p^{(\text{TI})}$ vs. MCWF-Häufigkeiten f

4.1 Wahrscheinlichkeitsvektoren und Divergenzen

Aus der POVM ergibt sich die TI-Vorhersage $p^{(\text{TI})} = (\text{Tr}(\rho_{\beta} E'_1), \dots, \text{Tr}(\rho_{\beta} E'_K))$, aus MCWF die relativen Häufigkeiten $f = (f_1, \dots, f_K)$. Als Distanz-/Divergenzmaße nutzt die Pipeline u. a.: KL-Divergenz $D_{\text{KL}}(f||p)$ [20], Jensen–Shannon-Divergenz $\text{JSD}(f, p)$ [21, 22].¹²

4.2 Goodness-of-Fit und Äquivalenz

Zur Güteprüfung werden χ^2 -/G-Tests (Likelihood-Ratio; Wilks) [23] und Konfidenzintervalle (Wilson-Score für Binomialanteile) [24] verwendet. Für *Äquivalenz* (praktische Gleichheit innerhalb Toleranz) kommt die TOST-Prozedur nach Schuirmann [26, 27] zur Anwendung: Man wähle Äquivalenzgrenzen $\pm\Delta$ (z. B. max. akzeptierte Abweichung der Anteile) und teste $H_{01} : (f_k - p_k) \leq -\Delta$ und $H_{02} : (f_k - p_k) \geq +\Delta$. Werden *beide* Einseiten-Tests verworfen, gilt Äquivalenz.¹³

5 Vergleich mit der Thermalen Interpretation (TI)

Die TI (Neumaier) interpretiert die Größen $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$ als *q-Erwartungswerte* realer, objektiver Eigenschaften physikalischer Systeme [1, 2]. Messgeräte sind *makroskopische* Systeme mit grobgranularen Zeiger-/Pointervariablen (“world tubes”); Messergebnisse sind *näherungsweise* Repräsentationen solcher q-Erwartungswerte, nicht Einzelereignisse [3].¹⁴ Im vorliegenden Rahmen:

- **Zustand:** ρ_{β} ist die effektive Zustandseingabe (ggf. nach Dynamik $t \mapsto \rho(t)$), passend zur TI-Lesart als realer Erwartungswertträger.
- **Detektor als POVM:** Die Pixel-POVM $\{E'_k\}$ modelliert makroskopische Pointer (Coarse-Graining eines feinen Observablen-Algebras), TI-konform: die *Vorhersagen* sind $p_k^{(\text{TI})} = \text{Tr}(\rho E'_k)$.

¹⁰MCWF-Formalismus: [8, 9, 10].

¹¹Trajektorien-Routine im Skript (Klickerfassung pro Pixel/Modus). :contentReference[oaicite:9]index=9

¹²Hintergrund: KL [20], JSD [21, 22]. Siehe auch Wilks’ LRT [23] für Likelihood-Vergleiche.

¹³Implementations-Details der Tests liegen in den Statistik-Hilfsroutinen; die Argumentlisten enthalten Schalter für Toleranzen/Signifikanz. :contentReference[oaicite:10]index=10

¹⁴TI-Grundlagen & Messung: [1, 2, 3, 4, 5].

- **Dynamik & Irreversibilität:** GKSL/MCWF liefern eine mikroskopische (effektive) Beschreibung offener Systeme, deren *makroskopische* Zähler die $p_k^{(\text{TI})}$ approximieren (*Frequenznäherung* bei großen Ensembles).
- **Trajektorien vs. TI:** Einzel-Trajektorien (Klickfolgen) sind *nicht* die Realität der TI; relevant ist, dass ihre *Statistik* f im Äquivalenztest die $p^{(\text{TI})}$ innerhalb tolerierter Grenzen reproduziert.

Damit wird die Kernforderung der TI erfüllt: q-Erwartungswerte (hier: $\text{Tr}(\rho E'_k)$) steuern makroskopisch beobachtbare Anteile in realen Geräten; Einzelereignisse sind emergente, stochastische Manifestationen [3].¹⁵

6 Optionen der Pipeline und ihr Formalismus (Auswahl)

(Optionennamen gem. ARGUMENTS_v16.4.md; das Set spiegelt v14.6; Implementierung in run_pipeline_full_op

--level L. Wählt ST-Level L (Knotenzahl, Geometrie, Spektrum L). Formal beeinflusst dies $K_t = e^{-tL}$, ρ_β , d_S , Widerstandsmetriken.

--t, --tmax, --nt. Zeiten für Heat-Kernel/Dynamik: $t \in [0, t_{\max}]$, ggf. Gitter t_j . In Fits für d_S und Sub-Gaussian-Checks wird ein geeignetes Fenster genutzt.

--s. Zeitskalierung $t \mapsto s t$ bzw. $L \mapsto s^{-1} L$ (Level-Harmonisierung; vgl. fraktale Zeitskalen).

--beta. Inverse Temperatur für $\rho_\beta = e^{-\beta L}/Z$.

--bc dirichlet/neumann. Randbedingungen an Eckknoten/äußeren Schalen; formal wirkt dies als Einschränkung des Operatorraums (Projektions- bzw. Laplace-Modifikation).

--use_fixed_r. Fixiert ein Harmonisierungsskalierungs- r (z.B. aus Vorläufen), ansonsten Schätzung aus harmonischen Energien/Resistancen (niveauabhängige Zeit-/Energieskalen) [13].

--pixels_json. Lädt $\{S_k, \eta_k\}$ und Selektorlogik (s. o.). Formal definiert es die POVM $\{E_k\}$ (bzw. nach Mischer $\{E'_k\}$).

--mixer unitary / beamsplitter_50_50. Anwendung eines $U \in \text{U}(K)$ vor der Messung: $E'_j = C^\dagger U^\dagger |j\rangle\langle j| UC$ und $p^{(\text{TI})} = \text{Tr}(\rho E'_j)$.

--schro yes, --ham, --gamma. Geschlossene Dynamik. Üblich: $H = \gamma L$.

--open yes, --dephase_site, --dephase_pixel, --det_gamma, --loss. GKSL nach (1). Site-/Pixel-Dephasing (unbeobachtet), Detektionssprünge (beobachtet), Verlustkanäle.

--traj yes, --ntraj, --dt, --tmax_traj, --seed, --traj_unobs nojump. MCWF-Simulation von Klicksequenzen; Statistik f für Tests gegen $p^{(\text{TI})}$.

¹⁵Die Pipeline realisiert diese Abbildung *explizit* (POVM aus Pixeln, Mischer, MCWF-Statistik f und Tests $f \approx p^{(\text{TI})}$). :contentReference[oaicite:11]index=11

¹⁶Optionen/Erklärung: ARGUMENTS_v16.4.md. :contentReference[oaicite:12]index=12 Implementierende Routinen: run_pipeline_full_open_systems_v14.6.py. :contentReference[oaicite:13]index=13

--sg yes, --dw, --sg_tmin, --sg_tmax. Sub-Gaussian-Check mit Exponent d_w im Zeitfenster; vergleicht $-\log K_t(x, y)$ gegen $(\frac{R(x, y)^{d_w}}{t})^{1/(d_w-1)}$ [14, 17].

7 Formale Ableitungen und Prüfpunkte

7.1 TI-Vorhersage als Erwartungswert einer POVM

Mit $E'_j \geq 0$ und $\sum_j E'_j = \mathbb{I}$ ist

$$p_j^{(\text{TI})} = \text{Tr}(\rho E'_j) \in [0, 1], \quad \sum_j p_j^{(\text{TI})} = 1.$$

Dies ist die *einzig* Annahme auf TI-Seite: Messgeräte sind grobgranulare POVMs; ihre Anzeigen sind (bei Repetition) Näherungen der q-Erwartungswerte [3, 2].

7.2 MCWF-Klickraten und Erwartungswerte

Wähle beobachtete Sprünge J_k proportional zu den Mess-Effekten E'_k (“optisches” Modell). Dann ist die Momentanrate $r_k(t) = \gamma_k \langle \psi_t | J_k^\dagger J_k | \psi_t \rangle$. Für ergodische/steady-state-Setups folgt asymptotisch

$$\mathbb{E}[f_k] \approx \text{Tr}(\rho_{\text{ss}} E'_k),$$

wobei ρ_{ss} stationär zu (1) ist. Damit erhalten wir die TI-Relation $f \approx p^{(\text{TI})}$ als emergente, statistische Aussage über Makro-Zähler [9, 10, 3].

7.3 Sub-Gaussian Konsistenz und Geometrie

Die Validierung der sub-gaussianen Form mittels Widerstandsmetrik R (aus L^+ , dem Moore–Penrose-Pseudoinversen) und des Fit-Exponenten d_w ist ein *geometrischer* Konsistenzcheck: TI benötigt keine spezielle (klassische) Geometrie; sie ist kompatibel mit fraktaler Diffusion, solange die makroskopische POVM wohldefiniert ist.¹⁷

8 Assumptions & Gültigkeitsbereich

- **Markov-Nähe:** Offene Dynamik ist GKSL-Markovian; Nicht-Markoveffekte sind nicht explizit modelliert (TI erlaubt dies, erfordert aber keine).
- **Coarse-Graining:** Pixel-POVMs approximieren makroskopische Pointer. Die konkrete Selektor-Geometrie ist ein *Modell* des Detektors.
- **Einheiten/Skalen:** Zeitskalierung --s (oder r) harmonisiert Level; $H = \gamma L$ setzt Energieskalen relativ zu Graph-Laplacian.
- **Numerik:** RK4-Integration, Exponentialauswertung und MCWF weisen übliche Diskretisierungs-/Samplingfehler auf; Statistik (TOST, Wilson) kontrolliert daraus resultierende Unsicherheiten.

9 Kurz zum Output (am Rande)

Die Pipeline erzeugt: Heat-Kernel-Plots, d_S -Fits, Sub-Gaussian-Relationen, sowie Tabellen/Plots für $p^{(\text{TI})}$ vs. f (Divergenzen, GoF, CI/TOST). Diese sind prüfbar gegen obige Formalismen.¹⁸

¹⁷Effektiv-Widerstand und L^+ : klassische Graphentheorie/Netzwerke [18, 19]. Sub-Gaussian Estimates [14, 17].

¹⁸Die zugehörigen Writer/Render-Routinen sind in der v14.6-Datei enthalten; Details siehe Code. :contentReference[oaicite:14]index=14

Fazit

Die v14.6-Pipeline implementiert eine *kanonische* Kette:

$$\text{ST-Geometrie} \Rightarrow L, K_t, \rho_\beta \Rightarrow \text{POVM } \{E'_k\} \Rightarrow p^{(\text{TI})} = \text{Tr}(\rho E'_k),$$

und verifiziert mit GKSL/MCWF, dass die makroskopischen Klickstatistiken f die TI-Vorhersage innerhalb statistischer Toleranzen reproduzieren (GoF & TOST). Damit ist die *Emergenz der TI* auf dem ST-Graphen formal vollständig operationalisiert: q-Erwartungswerte (TI) \leftrightarrow Detektor-Anteile (POVM) \leftrightarrow beobachtete Häufigkeiten (MCWF).

Literatur

- [1] A. Neumaier, *Foundations of Quantum Physics I. A critique of the tradition*, arXiv:1902.10745 (2019). :contentReference[oaicite:15]index=15
- [2] A. Neumaier, *Foundations of Quantum Physics II. The thermal interpretation of quantum physics*, arXiv:1902.10746 (2019). :contentReference[oaicite:16]index=16
- [3] A. Neumaier, *Foundations of Quantum Physics III. Measurement*, arXiv:1902.10780 (2019). :contentReference[oaicite:17]index=17
- [4] A. Neumaier, *Foundations of Quantum Physics IV. Quantum field theory*, arXiv:1902.10781 (2019). :contentReference[oaicite:18]index=18
- [5] A. Neumaier, *Foundations of Quantum Physics V. The thermal interpretation in a nutshell*, arXiv:1902.10812 (2019). :contentReference[oaicite:19]index=19
- [6] V. Gorini, A. Kossakowski, E.C.G. Sudarshan, *Completely positive dynamical semigroups of N-level systems*, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976). :contentReference[oaicite:20]index=20
- [7] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys. **48**, 119–130 (1976). :contentReference[oaicite:21]index=21
- [8] J. Dalibard, Y. Castin, K. Mølmer, *Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics*, Phys. Rev. Lett. **68**, 580 (1992). :contentReference[oaicite:22]index=22
- [9] H. J. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer (1993). :contentReference[oaicite:23]index=23
- [10] M. B. Plenio, P. L. Knight, *The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics*, Rev. Mod. Phys. **70**, 101 (1998). :contentReference[oaicite:24]index=24
- [11] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press (2000/2010). :contentReference[oaicite:25]index=25
- [12] A. S. Holevo, *Statistical Structure of Quantum Theory*, Springer (2001). :contentReference[oaicite:26]index=26
- [13] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Univ. Press (2001). :contentReference[oaicite:27]index=27
- [14] J. Kigami, *Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates*, Mem. AMS **216** (2012). :contentReference[oaicite:28]index=28
- [15] M. T. Barlow, *Random Walks and Heat Kernels on Graphs*, Cambridge Univ. Press (2017). :contentReference[oaicite:29]index=29

- [16] T. Kumagai, J. Misumi, *Heat kernel estimates for strongly recurrent random walk on random media*, arXiv:0806.4507 (2008). :contentReference[oaicite:30]index=30
- [17] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai, *Parabolic Harnack inequality and heat kernel estimates for random walks with long range jumps*, 2008 preprint. :contentReference[oaicite:31]index=31
- [18] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random Walks and Electric Networks*, MAA (1984/2000). :contentReference[oaicite:32]index=32
- [19] D. J. Klein, M. Randić, *Resistance distance*, J. Math. Chem. **12**, 81–95 (1993). :contentReference[oaicite:33]index=33
- [20] S. Kullback, R. A. Leibler, *On Information and Sufficiency*, Ann. Math. Statist. **22**, 79–86 (1951). :contentReference[oaicite:34]index=34
- [21] J. Lin, *Divergence measures based on the Shannon entropy*, IEEE Trans. Info. Theory **37**(1), 145–151 (1991). :contentReference[oaicite:35]index=35
- [22] J. Briët, P. Harremoës, *Properties of Classical and Quantum Jensen–Shannon Divergence*, arXiv:0911.5073 (2009). :contentReference[oaicite:36]index=36
- [23] S. S. Wilks, *The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses*, Ann. Math. Statist. **9**, 60–62 (1938). :contentReference[oaicite:37]index=37
- [24] E. B. Wilson, *Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference*, JASA **22** (1927). (Allg. Darstellungen: NIST/ITL; vgl. [25]). :contentReference[oaicite:38]index=38
- [25] NIST/ITL Handbook, *Confidence intervals (Wilson method)*. :contentReference[oaicite:39]index=39
- [26] D. J. Schuirmann, *Two One-Sided Tests Procedure (TOST)* J. Pharmacokinet. Biopharm. **15**, 657–680 (1987). :contentReference[oaicite:40]index=40
- [27] D. Lakens, *Equivalence Tests: A Practical Primer*, Soc. Psych. Pers. Sci. **8**, 355–362 (2017). :contentReference[oaicite:41]index=41