Beweis E2: Lieb — Robinson ⇒ Frontzeit und maximale Geschwindigkeit

antaris

17. August 2025

Zusammenfassung

Wir arbeiten auf einem lokal endlichen Graphen $G = (V, E)$ mit gleichmäßig beschränktem Grad und lokalen bzw. exponentiell abfallenden Wechselwirkungen. Aus einem Lieb–Robinson-Bound

$$\|[A(t), B]\| \;\leq\; C\, \|A\|\, \|B\|\, e^{-\mu\, (d(X,Y) - v_{\mathrm{LR}} t)}$$

für lokalisierten Observablen A und B mit Trägern $X, Y \subset V$ folgt für die *Frontzeit* $t_\varepsilon(d)$ (bei Toleranz $\varepsilon > 0$) die Untergrenze

$$t_\varepsilon(d) \;\geq\; \frac{d}{v_{\mathrm{LR}}} \;-\; \frac{1}{\mu v_{\mathrm{LR}}}\, \ln \frac{C\|A\|\|B\|}{\varepsilon}.$$

Damit ergibt sich die *maximale Gruppengeschwindigkeit* $v_* \leq v_{\mathrm{LR}}$ und ein (nahezu) linearer emergenter Lichtkegel. Die Voraussetzungen sind insbesondere für die Graph-Approximanten des Sierpiński-Tetraeders (ST-Graph) erfüllt.

1 Rahmen, Notation, Voraussetzungen

Definition 1.1 (Graphischer und algebraischer Rahmen)**.** $G = (V, E)$ sei lokal endlich mit gleichmäßig beschränktem Grad. Für endliche $X \subset V$ bezeichne $\mathcal{A}_X$ die C^*-Algebra der Observablen auf X, $\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{X \Subset V} \mathcal{A}_X}$ die Quasi-lokal-Algebra. Die Operatornorm ist $\|\cdot\|$.

Definition 1.2 (Interaktionen und Dynamik)**.** Ein (formeller) Hamiltonian sei $H = \sum_{Z \Subset V} \Phi(Z)$ mit $\Phi(Z) = \Phi(Z)^* \in \mathcal{A}_Z$. Wir nehmen entweder *endliche Reichweite* oder *exponentiell abfallende* Interaktionen an:

$$\|\Phi(Z)\| \;\leq\; J\, e^{-\mu\, \mathrm{diam}(Z)} \quad \text{und} \quad \sup_{x \in V} \sum_{Z \ni x} \|\Phi(Z)\| \;<\; \infty.$$

Die Heisenberg-Dynamik ist $\alpha_t(A) = e^{\mathrm{i}tH} A e^{-\mathrm{i}tH}$ (als Grenzwert über lokale Approximationen wohldefiniert).

Bemerkung 1.3 (ST-Graph)*.* Die kanonischen Graph-Approximanten eines p.c.f.-Fraktals (etwa des Sierpiński-Tetraeders) sind lokal endlich mit uniform beschränktem Grad; damit fallen sie unter obige Klasse. Lokale Kopplungen auf Kanten/Clustern erfüllen die geforderten Bounds.

2 Lieb–Robinson–Bound (Vorausgesetzter Standardsatz)

Satz 2.1 (Lieb–Robinson; Nachtergaele–Sims-Form)**.** *Es existieren Konstanten $C, \mu, v_{\mathrm{LR}} > 0$, abhängig nur von Strukturparametern (Grad-Bound, Kopplungsnormen, Abfallrate, Zeitskalierung), so dass für alle $A \in \mathcal{A}_X$, $B \in \mathcal{A}_Y$ und $t \geq 0$ gilt*

$$\|[\,\alpha_t(A),\, B\,]\| \;\leq\; C\, \|A\|\, \|B\|\, \exp\big(-\mu\,(d(X,Y) - v_{\mathrm{LR}} t)\big). \tag{2.1}$$

Bemerkung 2.2 (Kommentar). Der Beweis verwendet eine Iteration/Teleskopierung der Heisenberg-Gleichung $\partial_t\alpha_t(A) = \mathrm{i}[H, \alpha_t(A)]$ und Commutator-Schranken, siehe Lieb–Robinson (1972) und Nachtergaele–Sims (2006). Für exponentiell abfallende Interaktionen erhält man dieselbe Form mit modifizierten Konstanten.

3 Frontzeiten und emergenter Lichtkegel

Definition 3.1 (Frontzeit bei Toleranz ε)**.** Für $d = d(X, Y)$ und $\varepsilon > 0$ setze

$$t_\varepsilon(d) \;:=\; \inf\{\, t \geq 0 : \; \|[\,\alpha_t(A), B\,]\| \leq \varepsilon \,\}.$$

Proposition 3.2 (Frontzeit-Untergrenze)**.** *Aus* (2.1) *folgt: ist*

$$t \;\leq\; \frac{d}{v_{\mathrm{LR}}} \;-\; \frac{1}{\mu v_{\mathrm{LR}}} \ln \frac{C\|A\|\,\|B\|}{\varepsilon}, \tag{3.1}$$

so gilt $\|[\,\alpha_t(A), B\,]\| \leq \varepsilon$ *und damit*

$$t_\varepsilon(d) \;\geq\; \frac{d}{v_{\mathrm{LR}}} \;-\; \frac{1}{\mu v_{\mathrm{LR}}} \ln \frac{C\|A\|\,\|B\|}{\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Beweis. Aus (2.1) folgt

$$\|[\,\alpha_t(A), B\,]\| \;\leq\; C\|A\|\|B\|\, e^{-\mu(d - v_{\mathrm{LR}} t)}.$$

Für $\|[\,\alpha_t(A), B\,]\| \leq \varepsilon$ genügt $e^{-\mu(d-v_{\mathrm{LR}}t)} \leq \varepsilon/(C\|A\|\|B\|)$, also $-\mu(d - v_{\mathrm{LR}}t) \leq \ln\left(\varepsilon/(C\|A\|\|B\|)\right) = -\ln(C\|A\|\|B\|/\varepsilon)$. Daraus

$$d - v_{\mathrm{LR}} t \;\geq\; \frac{1}{\mu} \ln \frac{C\|A\|\|B\|}{\varepsilon} \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \;\leq\; \frac{d}{v_{\mathrm{LR}}} \;-\; \frac{1}{\mu v_{\mathrm{LR}}} \ln \frac{C\|A\|\,\|B\|}{\varepsilon},$$

was (3.1) und die Untergrenze (3.2) liefert. □

Proposition 3.3 (Maximale Gruppengeschwindigkeit)**.** *Definiere*

$$v_* \;:=\; \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Big(\limsup_{d \to \infty} \frac{d}{t_\varepsilon(d)} \Big).$$

Dann gilt $v_* \leq v_{\mathrm{LR}}$.

Beweis. Aus (3.2) folgt mit $c_\varepsilon := \frac{1}{\mu v_{\mathrm{LR}}} \ln \frac{C\|A\|\|B\|}{\varepsilon}$ (konstant in d)

$$\frac{d}{t_\varepsilon(d)} \;\leq\; \frac{d}{d/v_{\mathrm{LR}} - c_\varepsilon} \;=\; \frac{v_{\mathrm{LR}}}{1 - (v_{\mathrm{LR}} c_\varepsilon)/d} \;\xrightarrow[d \to \infty]{}\; v_{\mathrm{LR}}.$$

Damit $\limsup_{d\to\infty} d/t_\varepsilon(d) \leq v_{\mathrm{LR}}$ für jedes feste ε; der Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ ändert daran nichts. □

Korollar 3.4 (Emergenter Lichtkegel)**.** *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existieren Konstanten* $a_\varepsilon, b_\varepsilon$ *mit*

$$t_\varepsilon(d) \;\geq\; a_\varepsilon\, d - b_\varepsilon, \qquad a_\varepsilon = \frac{1}{v_{\mathrm{LR}}}, \quad b_\varepsilon = \frac{1}{\mu v_{\mathrm{LR}}} \ln \frac{C\|A\|\|B\|}{\varepsilon}.$$

Außerhalb des (nahezu linearen) Kegels $t \leq a_\varepsilon d - b_\varepsilon$ *sind die Kommutatoren* $\leq \varepsilon$.

4 Robustheit und Varianten

Proposition 4.1 (Exponentiell abfallende Interaktionen). *Gilt* $\|\Phi(Z)\| \le J e^{-\mu\,\mathrm{diam}(Z)}$ *(statt endlicher Reichweite), so hat* (2.1) *dieselbe Form mit ggf. modifizierten Konstanten; alle Schlussfolgerungen bleiben gültig.*

Satz 4.2 (Offene Systeme (Lindbladiane Dynamik)). *Für lokal erzeugte, markovsche Quanten-Semigruppen* $\{\mathcal{T}_t\}_{t\ge 0}$ *mit Generator* $\mathcal{L} = \sum_Z \mathcal{L}_Z$ *(lokal/exponentiell abfallend, beschränkte Normen) existieren Konstanten* C, μ, v_{LR} *mit*

$$\|[\,\mathcal{T}_t^*(A),\, B\,]\| \;\le\; C\|A\|\|B\|\, e^{-\mu\,(d(X,Y)-v_{\mathrm{LR}}t)}.$$

Damit gelten Proposition 3.2 und 3.3 unverändert.

Bemerkung 4.3 (Long-Range ($1/r^\alpha$), Hinweis). Für Potenz-Abfall $1/r^\alpha$ existieren verbesserte LR-Familien mit (quasi-)linearen Kegeln für großes α und nichtlinearen Kegeln sonst. Die Definition $t_\varepsilon(d)$ bleibt sinnvoll; die Geschwindigkeits-Aussage ist entsprechend zu interpretieren.

5 Einordnung zum ST-Graph

Die Graph-Approximanten des Sierpiński-Tetraeders sind lokal endlich mit uniformem Grad-Bound; lokale/spärlich gekoppelte Modell-Hamiltonians erfüllen die Voraussetzungen der Sätze oben. Somit gilt E2 (Frontzeit-Untergrenze, $v_* \le v_{\mathrm{LR}}$ und emergenter Lichtkegel) *ohne* weitere speziellere Annahmen zur fraktalen Geometrie; nur die Graph-Distanz geht in (2.1) ein.

Schluss: E2 ist bewiesen.

Literatur

[1] E. H. Lieb, D. W. Robinson, The finite group velocity of quantum spin systems, *Commun. Math. Phys.* **28** (1972), 251–257.

[2] B. Nachtergaele, R. Sims, Lieb–Robinson bounds and the exponential clustering theorem, *Commun. Math. Phys.* **265** (2006), 119–130.

[3] B. Nachtergaele, R. Sims, Lieb–Robinson bounds in quantum many-body physics, arXiv:1004.2086 (2010).

[4] M. B. Hastings, T. Koma, Spectral Gap and Exponential Decay of Correlations, *Commun. Math. Phys.* **265** (2006), 781–804.

[5] S. Bravyi, M. B. Hastings, F. Verstraete, Lieb–Robinson Bounds and the Generation of Correlations and Topological Quantum Order, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006), 050401.

[6] D. Poulin, Lieb–Robinson Bound and Locality for General Markovian Quantum Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010), 190401.

[7] B. Nachtergaele, R. Sims, A. Young, Quasi-locality bounds for quantum lattice systems. I., *J. Math. Phys.* **60** (2019), 061101.

[8] M. Foss-Feig, Z.-X. Gong, C. W. Clark, A. V. Gorshkov, Nearly Linear Light Cones in Long-Range Interacting Quantum Systems, *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015), 157201.

[9] D. V. Else, F. Machado, C. Nayak, N. Y. Yao, Improved Lieb–Robinson bound for many-body Hamiltonians with power-law interactions, *Phys. Rev. A* **101** (2020), 022333.

[10] M. C. Tran, A. Guo, Y. Lu, et al., Locality and Digital Quantum Simulation of Power-Law Interactions, *Phys. Rev. X* **9** (2019), 031006.