# Sierpiński-Tetraeder (ST) als Ur-Graph: Formalisierte Theorie, beobachtbare Kennzahlen und direkte Vergleiche zu regulären Gittern

antaris

19. August 2025

**Zusammenfassung**

Wir formulieren eine geschlossene, numerisch überprüfbare Theorie für Diffusion und Dynamik auf dem Sierpiński-Tetraeder (ST) in diskreter Graphsicht und stellen direkte Vergleiche zu regulären Gittern $\mathbb{Z}^d$ her. Die Konstruktion folgt dem Rahmen der Dirichlet-/Resistance-Formen auf p.c.f.-Fraktalen (Kigami). Für die Simulationen verwenden wir: (i) Heat-Trace $\overline{p}_t = |V|^{-1}\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{-tL})$ samt spektraler Dimension $d_s(t)$, (ii) unitäre Einteilchendynamik $H = -A$ mit quantilbasiertem Lieb–Robinson-Front-Radius, (iii) GKLS-Dephasierung mit quasi-lokaler Ausbreitung und (iv) Dirichlet-to-Neumann (DtN)-Map $\Lambda$ mit gezielten Tiefen-Perturbationen. Unsere Formeln sind direkt mit Primärquellen aus der Fraktal- und Operator-Theorie verknüpft und so gewählt, dass die numerischen Observablen ohne zusätzliche Regularisierung reproduzierbar sind.

## 1 Geometrie, Graph und Laplace-Operator

**ST-Approximanten.** Der ST entsteht aus einem regulären Tetraeder mit Ecken $v_0, \ldots, v_3$ mittels IFS $F_i(x) = \frac{1}{2}(x + v_i)$. Der *Level-$m$*-Approximant ist ein endlich großer Graph $G_m = (V_m, E_m)$, der durch die bekannte Verklebung von vier Kopien des Level-$(m-1)$-Graphen entlang der berührenden Ecken entsteht (Start $K_4$ bei $m = 0$). Diese diskrete Sicht ist kompatibel mit dem p.c.f.-Rahmen und den Resistance-Formen von Kigami [1, 2].

**Gewichteter Laplace-Operator.** Sei $A$ die Adjazenzmatrix (Gewichte $w_{uv} > 0$) und $D$ die Grad-Diagonale $D_{uu} = \sum_v w_{uv}$. Wir nutzen den kombinatorischen Laplace-Operator

$$L = D - A, \tag{1}$$

sowie optional die symmetrisch normalisierte Variante $L_{\mathrm{norm}} = I - D^{-1/2}AD^{-1/2}$; vgl. [8]. Für p.c.f.-Fraktale steht $L$ in direkter Beziehung zur zugehörigen Dirichlet-Form [1, 2].

**Randknoten.** Als Rand $V_0 \subset V_m$ verwenden wir die vier äußeren Ecken (Adressen, die stets mit der gleichen Ziffer beginnen). Diese Wahl erzeugt die diskrete Analogie zum klassischen Rand auf dem p.c.f.-Set.

## 2 Heat-Trace, spektrale Dimension und sub-Gauss'sche Kerne

**Heat-Trace und Hutchinson-Schätzer.** Für $t > 0$ sei $P_t = \mathrm{e}^{-tL}$ und $\overline{p}_t = |V|^{-1}\,\mathrm{tr}(P_t)$ die mittlere Rückkehrwahrscheinlichkeit. Wir schätzen $\mathrm{tr}(P_t)$ via Hutchinson mit Rademacher-Vektoren $z$:

$$\mathrm{tr}(P_t) \approx \frac{1}{N_{\mathrm{probe}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{probe}}} z_k^{\top} P_t z_k, \tag{2}$$

und evaluieren $P_t z$ numerisch stabil mit `expm_multiply` (Al-Mohy–Higham) [9, 10].

**Spektrale Dimension.** Die (zeitabhängige) spektrale Dimension bestimmen wir aus der Logarithmus-Ableitung

$$d_s(t) \equiv -2 \frac{d}{d \log t} \log \overline{p}_t, \tag{3}$$

die bei Graphen/Fraktalen die klassische Relation $p_t \sim t^{-d/2}$ ersetzt; vgl. sub-Gauss'sche Heat-Kern-Schätzungen [3, 4]. Auf p.c.f.-Fraktalen sind Anomalien gegenüber $\mathbb{Z}^d$ (z. B. log-periodische Modulationen) gut dokumentiert [6, 5].

## 3 Unitäre Dynamik und Lieb–Robinson-Front

**Hamiltonoperator.** Für Einteilchendynamik auf $G_m$ verwenden wir

$$H = -A = D - L, \tag{4}$$

so dass $H$ lokal (bandbegrenzt im Graphsinn) ist.

**Lieb–Robinson-Heuristik.** LR-Schranken liefern eine effektive Lichtkegelstruktur für lokale Modelle: Operatornormen von Kommutatoren wachsen außerhalb eines linearen Kegels exponentiell klein [13]. Für Markovsche (GKLS-)Dynamik existieren analoge LR-Schranken [14]. Unsere numerische *Front* definieren wir über den $q$-Quantilsradius $r_q(t)$ der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $|\psi(t)|^2$ (bzw. Diagonale der Dichtematrix). Ein *quasi-linearer* Anstieg von $r_q(t)$ ist zu erwarten.

## 4 GKLS-Dephasierung (offene Systeme)

**GKLS-Generator.** Markovsche offene Dynamik auf Dichtematrizen $\rho$ hat den GKLS-Generator [?, ?]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + \sum_\alpha \Big( L_\alpha \rho L_\alpha^\dagger - \tfrac{1}{2}\{L_\alpha^\dagger L_\alpha, \rho\} \Big). \tag{5}$$

Wir verwenden reine *Dephasierung*, $L_u = \sqrt{\gamma}\, |u\rangle\langle u|$, die Off-Diagonalen im Ortsraum dämpft. Für lokal erzeugte GKLS-Dynamik gelten LR-ähnliche Lokalitätsschranken [14].

## 5 Dirichlet-to-Neumann (DtN) und Tiefen-Perturbationen

**DtN auf Graphen.** Partitioniere $V = V_b \cup V_i$ (Rand/Innen). Dann hat $L$ die Blockform $L = \left(\begin{smallmatrix} L_{bb} & L_{bi} \\ L_{ib} & L_{ii} \end{smallmatrix}\right)$. Für das diskrete Dirichletproblem $Lu = f$ mit $u|_{V_b} = u_b$ gilt $u_i = -L_{ii}^{-1} L_{ib} u_b$ und der Randfluss $f_b = \Lambda u_b$ mit

$$\Lambda = L_{bb} - L_{bi} L_{ii}^{-1} L_{ib}, \tag{6}$$

dem *Schur-Komplement*. Das ist exakt die Dirichlet-to-Neumann-Map eines elektrischen Netzwerks [15]. Änderungen *tiefer* Kanten-Gewichte führen zu messbaren $\|\Delta\Lambda\|$ ohne Instabilitäten in der Lösungstheorie.

## 6 Spektrum und Zählfunktion auf dem ST

Für das ST ist die Existenz des Laplace-Operators im Kigami-Sinn gesichert; das Spektrum wurde explizit beschrieben und die Zählfunktion $N(\lambda)$ (Weyl-Analogon) untersucht [7, 5, 6]. Das liefert harte Referenzen für numerische Eigenwerte & Heat-Trace.

## 7 Zu validierende Observablen (direkter Physik-Vergleich)

1. **Heat-Trace & $d_s(t)$:** Auf $\mathbb{Z}^d$ gilt $\overline{p}_t \sim t^{-d/2}$, auf ST sub-Gauss'sch mit $d_s < 3$ und log-periodischen Modulationen [3, 4, 6].
2. **LR-Front:** $r_q(t)$ wächst quasi-linear; GKLS-Dephasierung reduziert den Front-Radius relativ zur unitären Referenz (*quasi-Lokalität*) [13, 14].
3. **DtN-Signatur:** $\Delta\Lambda$ ist klein aber konsistent messbar und korreliert mit der Perturbationstiefe (Schur-Komplement-Formel) [15].

## 8 Numerik-Bausteine (reproduzierbar)

- *Matrix-Exponential-Wirkung* $\mathrm{e}^{-tL}z$ und $\mathrm{e}^{-itH}\psi_0$ via `expm_multiply` mit adaptivem Skalieren & truncierter Taylorreihe [9, 10].
- *Stochastische Spur* (Hutchinson) mit Rademacher-Vektoren; Varianzreduktion über mehr Proben oder Hutch++-Ideen bei Bedarf [11, 12].
- *DtN* per Sparse-Faktorisierung von $L_{ii}$ (Schur-Komplement).

## 9 Anbindung an die gelieferten Simulationen

Die mitgelieferten CSV/PNGs zeigen (i) konsistente Rangfolge der Heat-Traces (ST $> \mathbb{Z}^2 > \mathbb{Z}^3$ bei großem $t$), (ii) $d_s(t)$-Plateaus nahe der Theorie (z. B. $\approx 2$ auf $\mathbb{Z}^2$, $\approx 3$ auf $\mathbb{Z}^3$, sub-gauss'sch auf ST) und (iii) eine GKLS-Front $\leq$ unitäre Front. Die DtN-Differenznorm stimmt numerisch mit dem Schur-Komplement überein. Diese Punkte sind direkte, überprüfbare Konsequenzen der Literatur [3, 4, 13, 14, 15, 9].

**Hinweis.** Für eine publikationsreife Fassung können wir die Tabellen/Plots (Heat-Trace, $d_s(t)$, LR-Front, $\|\Delta\Lambda\|$) direkt aus den CSVs einbinden und Fits samt Fehlerbalken angeben.

## Literatur


[1] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics 143, Cambridge Univ. Press (2001). `https://www.cambridge.org/core/books/analysis-on-fractals/1F169AC8661D831777E2F2869BCE8DF3`.

[2] J. Kigami, *Harmonic analysis for resistance forms*, J. Funct. Anal. **204** (2003), 399–444. `https://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~kigami/ulcg.pdf`.

[3] A. Grigor'yan, A. Telcs, *Sub-Gaussian estimates of heat kernels on infinite graphs*, Duke Math. J. **109** (2001), 451–510. `https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/barc.pdf`.

[4] A. Grigor'yan, A. Telcs, *Harnack inequalities and sub-Gaussian estimates for random walks*, Math. Ann. **324** (2002), 521–556. `https://scispace.com/pdf/heat-kernels-on-manifolds-graphs-and-fractals-3jk74ogo8a.pdf`.

[5] J. Kigami, M. L. Lapidus, *Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals*, Commun. Math. Phys. **158** (1993), 93–125. `https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-158/issue-1/Weyls-problem-for-the-spectral-distribution-of-Laplacians-on-pcf/cmp/1104254132.pdf`.

[6] R. S. Strichartz, *Exact spectral asymptotics on the Sierpinski gasket*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 1749–1755. `https://ar5iv.labs.arxiv.org/html/1110.5816`.

[7] N. Riane, C. David, *Laplacian on the Sierpiński tetrahedron: explicit spectrum and counting function*, arXiv:1703.05793 (2017). `https://arxiv.org/abs/1703.05793`.

[8] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 92, AMS (1997). `https://www.math.ucsd.edu/~fan/research/cbms.pdf`.

[9] A. H. Al-Mohy, N. J. Higham, *Computing the Action of the Matrix Exponential, with an Application to Exponential Integrators*, SIAM J. Sci. Comput. **33**(2) (2011), 488–511. `https://eprints.maths.manchester.ac.uk/1591/1/alhi11.pdf`.

[10] SciPy Docs: *expm_multiply*, Zugriff 2025. `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.sparse.linalg.expm_multiply.html`.

[11] M. F. Hutchinson, *A stochastic estimator of the trace of the influence matrix for Laplacian smoothing splines*, Commun. Statist. Simula. Comput. **18** (1989), 1059–1076. (Siehe z. B. Zusammenstellungen in [12]).

[12] R. A. Meyer, C. Musco, C. Musco, D. P. Woodruff, *Hutch++: Optimal Stochastic Trace Estimation*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **42**(4) (2021), 1473–1500. `https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC8553228/`.

[13] B. Nachtergaele, R. Sims, *Lieb–Robinson bounds in quantum many-body physics*, arXiv:1004.2086 (2010). `https://arxiv.org/abs/1004.2086`.

[14] D. Poulin, *Lieb–Robinson Bound and Locality for General Markovian Quantum Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010), 190401. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.190401`.

[15] E. B. Curtis, J. A. Morrow, *Inverse Problems for Electrical Networks*, World Scientific (2000). `https://sites.math.washington.edu/~curtis/book.pdf`.