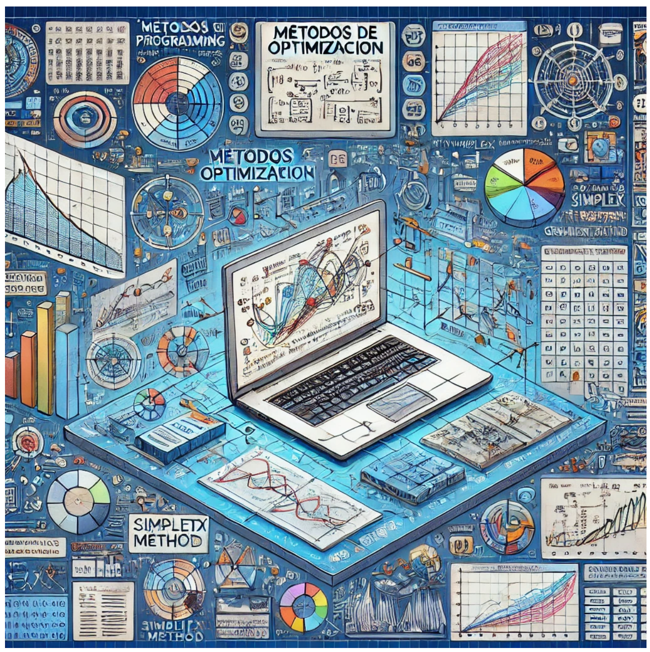
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

Actividad Preguntas de clase

Responder a las preguntas propuestas

[h] 

Andree Alessandro Chili Lima
[229071]
https://github.com/antartida15l

04/10/2024

1. Explica el concepto de norma vectorial y proporciona un ejemplo de una norma vectorial distinta de la norma euclidiana.

Una **norma vectorial** es una función que asigna un número no negativo a cada vector, indicando su "tamaño" o "longitud". Formalmente, una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$ satisface las siguientes propiedades:

1. **Positividad:** $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. **Homogeneidad:** Para cualquier escalar α, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
3. **Desigualdad triangular:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos los vectores $x, y \in V$.

se define como:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Esta mide la distancia como la suma de las diferencias absolutas de las componentes del vector.

2. ¿Qué es una norma matricial inducida y cómo se relaciona con una norma vectorial?

La **norma matricial inducida** es una norma definida en el conjunto de matrices que se deriva de una norma vectorial. Si $\|\cdot\|$ es una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$, la norma matricial inducida por esta norma se define como:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

donde A es una matriz y x es un vector no nulo. Esta fórmula mide el máximo factor de amplificación que la matriz A puede aplicar a un vector en términos de su norma.

3. Define el número de condición de una matriz y explica cómo se relaciona con la estabilidad numérica de un sistema lineal.

El **número de condición** de una matriz A mide cuán sensible es la solución de un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ a pequeñas variaciones en los datos de entrada. Se define como:

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

donde $\|A\|$ es la norma de la matriz y $\|A^{-1}\|$ es la norma de su inversa. Si el número de condición es grande, el sistema es numéricamente inestable, lo que significa que pequeños cambios en los datos pueden producir grandes errores en la solución.

4. ¿Qué es un espacio vectorial y cuáles son las propiedades que debe cumplir un conjunto de vectores para ser considerado un espacio vectorial?

Un **espacio vectorial** es un conjunto de vectores, junto con dos operaciones: suma de vectores y multiplicación por un escalar, que cumplen las siguientes propiedades:

1. **Cierre bajo la suma:** Si $u, v \in V$, entonces $u + v \in V$.
2. **Cierre bajo la multiplicación escalar:** Si $u \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha u \in V$.
3. **Asociatividad de la suma:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$.
4. **Elemento neutro:** Existe un vector $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$.
5. **Elemento opuesto:** Para cada $v \in V$, existe un vector $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

5. Define una matriz totalmente unimodular y explica su importancia en la programación lineal entera.

Una **matriz totalmente unimodular (TUM)** es una matriz en la que todos los determinantes de sus submatrices cuadradas son 0, 1 o -1. Estas matrices son fundamentales en la **programación lineal entera**, ya que si las restricciones de un problema de programación lineal tienen una matriz TUM, las soluciones óptimas de la relajación lineal del problema serán enteras, facilitando la resolución del problema de optimización entera.

La siguiente matriz es totalmente unimodular:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de cada submatriz cuadrada de A es 0, 1 o -1, cumpliendo la definición de TUM.